Notatki do wykładu
1953/54

Dedukcja naturalna (supozycyjna)

(Jaśkowski, 1934, Gentzen, Iwanicki, Słupecki)

Dwojakiego rodzaju założenia w nauce (Arystoteles), jedne przyjmowane jako prawdy, drugie jako przypuszczenia (poprzedniki okresu warunkowego - litery)

ἀξίωμα - principium, zasada (ἀξιόω - cenię, uważam)

αἴτημα - postulatum, wymagalnik (αἰτέω - żądam, wymagam)

Zagadnienie zbudowania teorii zdań bez aksjomatów, tylko przy pomocy reguł rozumowania.

Symbolika: symbole teorii zdań

Supozycje będziemy oznaczać literą S i kolejnym numerem z kropką.

Systemem pewnej supozycji będziemy oznaczać układ zdań złożony z tej supozycji, ze wszystkich supozycji, które zostaną przyjęte do jej systemu i ze zdań, które (czyli ten system) wywnioskujemy z przyjętych supozycji według ustalonych w naszej teorii reguł rozumowania.

~~Układem~~ Systemem podrzędnym w stosunku do systemu supozycji α nazywamy system dowolnej supozycji β, różnej od α, zawsze i tylko, jeżeli β należy do systemu α.

Systemem bezwzględnym będziemy nazywać układ zdań udowodnionych w danej teorii, nie zawierający zatem supozycji. Jest on nadrzędny w stosunku do wszystkich systemów supozycyjnych.

Zdania należące do systemu nadrzędnego są ważne w każdym systemie supozycyjnym jemu podrzędnym.

Cztery reguły rozumowania dla ~~systemu~~ teorii supozycyjnej implikacyjno-negacyjnej:

I. Do każdego systemu wolno dołączyć dowolną supozycję

II. Jeżeli β należy do systemu supozycji α, to $C\alpha\beta$ należy do systemu bezpośrednio nadrzędnego (t.zn. do systemu powstałego przez odrzucenie α).

III. Jeżeli do systemu należą dwa zdania α i $C\alpha\beta$, to β należy do systemu

IV. Jeżeli do systemu supozycji $N\alpha$ należą zdania β i $N\beta$, to α należy do systemu bezpośrednio nadrzędnego.

3

a) 1· Sp	I		
b) 1·1· SCpq	I		
c) 1·1· q	III a) b)		
d) 1·~~1~~ Cpqq	II b) c)		
e) CpCpqq	II a) d)	221,4	(mo

a) 2· SCNpNq	I		
b) 2·1 Sq	I		
c) 2·1·1 SNp	I		
d) 2·1·1 Nq	III a) c)		
e) 2·1 p	IV. c) b) d)		
f) 2· Cqp	II b) e)		
g) CCNpNqCqp	II a) f)	222,10	(Tr)

a) 3· Sp	I		
b) 3·1· Sq	I		
c) 3· Cqp	II b) a)	I Ak[illegible] [illegible]	
d) CpCqp	II a) c)	221,2	(Simpl.)

a) 4· Sp	I		
b) 4·1· SNp	I		
c) 4·1·1 SNq	I		
d) 4·1· q	IV. c) a) b)		trac[illegible]
e) 4· CNpq	II b) d)	222,5	(D. Sc.)
f) CpCNpq	II a) e)		

a) 5· S Cpq I

b) 5·1· S Cqr I

c) 5·1·1· Sp I.

d) 5·1·1· q III a) c)

e) 5·1·1· r III b) d)

f) 5·1· Cpr II c) e)

g) 5· CCqrCpr II b) f.)

h) CCpqCCqrCpr II a) g) 221,7 (Hip.) hiányz.

---

a) 6· S CpCqr I

b) 6·1· S Cpq I

c) 6·1·1· Sp I

d) 6·1·1 Cqr III a) c)

e) 6·1·1 q III b) c)

f) 6·1·1· r III d) e)

g) 6·1 Cpr II c) e)

h) 6· CCpqCpr II b) g) II csop. ismétlődik. –

CCpCqrCCpqCpr II a) h)

---

d. c.

5.

a) 7. SCNpp $\bar{I}$

b) 7.1. SNp $\bar{I}$

c) 7.1. p $\overline{III}$ a) b)

d) 7. p $\overline{IV}$ b) c) b)

e) CCNppp $\overline{II}$ a) d) (red. adal. drajicu)

---

a) 8. SCCpqp $\bar{I}$

b) 8.1. SNp $\bar{I}$

c) 8.1.1. Sp $\bar{I}$

d) CpCNpq – (4)

e) 8.1.1. CNpq $\overline{III}$ d) c)

f) 8.1.1. q $\overline{III}$ b) e)

g) 8.1. Cpq $\overline{II}$ c) f)

h) 8.1. p $\overline{III}$ a) g)

i) 8. p $\overline{IV}$ b) h) b)

j) CCCpqpp . $\overline{II}$ a) i) 221.5. (Peirce)

Analiza logiczna pojęcia liczby.

(Hilb.-Ackerm.- Theor. Logik, 4. Kap. § 2 str. 86)

Liczba nie jest przedmiotem ze świata zewnętrznego, lecz [illegible]. Przedmiotami [illegible] określonymi jest liczba nie są przedmioty, które liczymy, [illegible] jest jedynie tylko. Pojmujemy określenie liczby jako określenie tego pojęcia, które [illegible] liczone przedmioty, pod które te przedmioty są podporządkowane. Tak np. mówiąc, że ~~[illegible]~~ było dwunastu apostołów, pojmujemy w tym sensie, że liczba 12 jest określeniem pojęcia „x jest apostołem" w tym sensie, że pojęcie tego [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] x.

Liczby są przeto określeniami pojęć lub własności, mówiąc [illegible] klas lub zbiorów, jako właściwości [illegible], albo funkcji ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ zdaniowych, których argumentami są funkcje pierwszego rzędu. Każda poszczególna liczba naturalna (włącznie 0) jest taką funkcją ~~[illegible]~~ drugiego rzędu. Tak np. liczbę 0 definiujemy jako określenie takiej funkcji pierwszego rzędu, która dla żadnej [illegible] [illegible] [illegible] nie [illegible] się [illegible] [illegible]:

(1) $„0(f)" = [E x] \, N f(x) = [x] \, N f(x)$

Liczba 1 jest [illegible] [illegible] funkcji [illegible] takich, że [illegible] dla pewnego x; jeśli ~~[illegible]~~ [illegible] y jest identyczne z x:

(2) $„1(f)" = [E x] \, K f(x) [y] \, C f(y) \, I(x,y)$

Liczba 2 jest [illegible] [illegible] funkcji [illegible] takich, że dla pewnego x i dla pewnego y [illegible] [illegible] [illegible] jest [illegible] $f(x)$ jak $f(y)$, oraz dla każdego z, jeśli $f(z)$, to z ~~jest~~ identyczne z x lub z ~~jest~~ y.

(3) $„2(f)" = [E x][E y] \, K \, N I(x,y) \, K f(x) \, K f(y) [z] \, C f(z) \, A \, I(x,z) \, I(y,z)$

Wszystkie te definicje [illegible] z definicji [illegible] ~~ele-~~ ~~[illegible]~~ pojęcia logiczne, funkcje [illegible], funkcje [illegible], kwantyfikatory i ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] przez kwantyfikatory i funkcje [illegible]: $„I(x,y)" = [\varphi] \, \Sigma \, \varphi(x) \, \varphi(y)$

Ta okoliczność [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]-nie [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] z definicjami [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible], [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]

$$„Sym(R)" = [x][y]\, C\, R(x,y)\, R(y,x)$$

$$„Trans(R)" = „[x][y][z]\, C\, R(x,y)\, C\, R(y,z)\, R(x,z)$$

W wyrażeniach, które uważaliśmy, funkcje zdań lub funkcyj propozycjonalnych występują jako zdania lub funkcje propozycyjne wraz z kwantyfikatorami. Np. wyrażenie

$$[f][x]\, A\, f(x)\, N f(x)$$

stwierdza, że teza $[x]\, A\, f(x)\, N f(x)$ jest prawdziwa dla każdej funkcji $f(x)$; podobnie ~~...~~ wyrażenie wyraża, że teza $C[x]\, C\, p\, f(x)\, C\, p\, [x]\, f(x)$ jest prawdziwa dla każdego p i $f(x)$, w formule:

$$[p][f]\, C[x]\, C\, p\, f(x)\, C\, p\, [x]\, f(x)$$

Dalszym przykładem ~~wyrażenia~~, w którym funkcje propozycjonalne występują jako zmienne jest zasada indukcji matematycznej. Stwierdza ona, że funkcja propozycjonalna (orzecznik), która jest prawdziwa dla liczby 1 i która, jeżeli jest prawdziwa dla pewnej liczby, to jest prawdziwa także dla liczby bezpośrednio następującej, jest prawdziwa dla każdej liczby. Niech „$Sq(x,y)$" znaczy: „y następuje bezpośrednio po x w szeregu liczb naturalnych"; — zasadę indukcji matematycznej możemy wyrazić

Ogólna teorja funkcyj logicznych.

(Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoret. Logik, IV Kap. Der erweiterte Funktionenkalkül, str. 82 i nast.)

1. W teorji funkcyj prawdziwościowych oddaliśmy się osobno rzędu, ~~[illegible]~~ których nazwy wyrażenia jako argumenty funkcyj prawdziwościowych, w tylko funkcji, tj. niewiadomej o jednym argumencie i relacji o ~~[illegible]~~ dwóch lub więcej argumentach i od dwu, trzech [illegible] argumentów. W ogólnej teorji funkcyj logicznych uważamy także funkcje zdaniowe logiczne za wyrażenia, które posiadają określone wartości prawdziwości w określonych warunkach wartości zmiennych. ~~[illegible]~~ Np. wyrażenie $[x](\varphi f(x))$ możemy pojmować w ten sposób, iż ma ono wartość zależną (R(a, b)) od zmiennej „φ" i funkcji prawdziwościowej „f(x)", ~~[illegible]~~ którą charakteryzujemy ~~[illegible]~~ wartością, iż zdanie takie wartość 1 ma dla każdej funkcji f(x), zdanie wartości prawdziwości wartość do funkcji, dla których jest $[x] f(x)$. Funkcjami są wyrażenia definiujące zwrotność, symetryczność, przechodniość:

zwrotność: $\text{Refl.}(R) = [x]\, R(x, x)$

zawierając w definicjach wyłącznie wyrażenia typowe, wystarczają one dla zbudowania ekstensjonalnego systemu arytmetyki. Wynika stąd, że skoro pomijamy od wielkich, a nazwałem ono także poddawanym ruchowaniu, wyrzucając nie ~~jest opartym na jakichś teoriach, niż~~ teorię wśród nich od logiki systemu ~~[illegible]~~ dedukcyjnego, lecz teorię opartą logiki, tzn. daje się skonstruować bez użycia wyrażeń typowych wyrażeń.

Określenie równości (dwóch) liczb funkcji fx i gx, którą przedstawiamy symbolem $Aeq\, f x\, g x$, oparte jest na tym przekonaniu, że jeśli funkcje fx i gx przyporządkowują równe liczby, to przedmioty zachodzi ale się ~~[illegible]~~ przyjmować skoordynowane parami w sposób odpowiedni jednoznaczny przez pewien stosunek R, taki że dla każdego x, jeśli fx, to istnieje takie y, wyznaczone przez stosunek Rxy, że jednocześnie gy — i odwrotnie dla każdego y, jeśli gy, to istnieje takie x wyznaczone przez stosunek Rxy, że fx, przyczem stosunek R jest odwracalnie jednoznaczny. Wynika to z poniższej definicji:

$[ER]$ ~~[x]~~ $K[x]\,C\,fx\,[Ey]\,K\,Rxy\,gy\,K[y]\,C\,gy\,[Ex]\,K\,Rxy\,fx$

$[x][y][z]\,K\,C\,K\,Rxy\,Rxz\,Iyz\,C\,K\,Rxz\,Ryz\,Ixy$

Znaczy to: istnieje takie R, że 1) dla każdego x jeżeli fx, to istnieje y takie, że Rxy oraz gy 2) dla każdego y jeżeli gy, to istnieje x takie, że Rxy oraz fx 3) dla każdego x, y, z, jeżeli Rxy i Rxz to y i z są identyczne, jeżeli zaś Rxz i Ryz to Ixy,

Dodawanie liczb odbywa się przez dysjunkcję funkcji przyporządkowanych. Jeżeli fx i gx wykluczają się wzajemnie i funkcji fx odpowiada liczba m, funkcji zaś gx liczba n, to funkcji Afxgx odpowiada liczba m+n.

Na tej podstawie wszelkie działania liczb ~~sprowadzają się do~~ przedstawiają się jako ~~[illegible]~~ zdania, wynikające wyłącznie logiczne twierdzenia. Np. równanie 1+1=2 przedstawia się w postaci twierdzenia logicznego:

$[f][g]\,C\,K\,Afg\,K\,1f\,1g\,2\,Afg$

Aby określić liczbę ogólnie, uwzględnijmy, że stwierdzenie φf jest jednakową liczbą; φ musi ogólnie zachodzić między- ~~[illegible]~~ cechami warunkami:

Jeżeli f i g są równoważne funkcjami, którym przysługuje

Tak np. niech będzie dane wyrażenie rozciągłe względem zmiennych u, v

[u][v] K A p A u v K A q A u N v K A r A N u v A s A N u N v

aby eliminować wyrażenie zmienną v ~~otrzymujemy~~ stosujemy prawo według którego wyrazy rozciągłe v oraz Nv

[u][v] A K A p u A r N u v A K A q u A s N u N v

teraz eliminujemy ~~zmienną~~ v

[u] K K A p u A r N u K A q u A s N u

otrzymamy wyrażenie ze względu na Nu

[u] K A K p q u A K r s N u

eliminujemy teraz u i otrzymujemy:

K K p q K r s

Zastosowaną wyżej **metodę eliminacji** można będzie przeprowadzić wszędzie, w których występują same zmienne związane od kwantyfikatorów:

Bierzemy np. takie wyrażenie wyżej omówione:

[p][Eq] K A p q N K p q

i weźmy K A p q N K p q względem q:

[p][Eq] K A p q A N p N q

eliminujemy teraz q otrzymujemy:

wyrażenie:

$$[f]\,C\,f(1)\,C\,[x][y]\,C\,K\,f(x)\,Eq(x,y)\,f(y)\,[x]\,f(x)$$

Definicja identyczności wymaga również użycia zmiennej funkcyjnej przy kwantyfikatorze. ~~Identyczność między x i y definiujemy przez~~ ~~[illegible]; mianowicie~~ x jest identyczne z y, jeżeli cokolwiek orzeka się o x orzeka się również o y i odwrotnie:

$$„I(x,y)" = [f]\,E\,f(x)\,f(y)$$

Aby wyrazić, że $[x][y]\,f(x,y)$ nie jest wyrażeniem ogólnie prawdziwem, piszemy:

$$N[f][x][y]\,f(x,y)$$

albo

$$[Ef][Ex][Ey]\,N\,f(x,y)$$

Podobnie wyraża się twierdzenie: dla każdego zdania p istnieje zdanie q takie, iż z pośród obu zdań jedno i tylko jedno jest prawdziwe:

$$[p][Eq]\,K\,Apq\,NKpq$$

Następująca para twierdzeń daje prawidło eliminacji kwantyfikatora z wyrażenia, zbudowanego według tych umów:

$$[u]\,E\,K\,Apu\,Aq\,Nu\,Kpq$$

$$[Eu]\,E\,K\,Apu\,Aq\,Nu\,Apq$$

jest oznaczone ~~tę~~

jedna i ta sama liczba, to φ ~~jest oznaczone~~ dla obu tych funkcji lub dla żadnej z nich. Jeżeli zaś funkcjom f i g przysługują różne liczby, to φ musi być spełnione conajwyżej przez jedną z nich.

Warunek powyższy przedstawia się w postaci następującego wyrażenia:

~~$[f][g]\,KC\varphi f K\varphi f\varphi g Aeqfg\, KC\varphi f Aeqfg\varphi g$~~

$[f][g]\,KCK\varphi f\varphi g\, Aeqfg\, KC\varphi f\, Aeqfg\,\varphi g$

Wyrażenie to orzeka istność funkcji φ, oznaczamy tę istność dla skrócenia symbolem $N\varphi$, to możemy powiedzieć:

liczba jest to funkcja φ funkcyj równoznacznych, której przysługuje istność $N\varphi$

~~Pewnie~~ Pewna trudność wiąże się z pytaniem, jaki jest warunek, aby dwie funkcje φ i ψ, o własnościach $N\varphi$ i $N\psi$, określały tę samą liczbę. Wspomniany warunek polega na tem, że wyrażenia φf i ψf dla ~~tych samych~~ f muszą być równoważne dla wszelkich wartości f, czyli

$[f]\,\Sigma\varphi f\psi f$

x)

Jeżeli ~~Przyjmujemy~~, że zakres niewiadomych w którejś określenia oznaczmy f [illegible] że skończonej liczby przedmiotów, (mniejszej od [illegible])

to wszystkie liczby od tej większe, więc się trzeba przecież określenia; ~~ta~~ jest oczywiste (Tarskiego) ~~[illegible]~~ wspomniane.

Albowiem założony, iż zakres zmiennych x jest mniejszy od 10^{60} i niech φ oznacza liczbę 10^{60}, a ψ liczbę $10^{60}+1$;

w takim przypadku ani φ ani ψ nie spełnia się dla żadnej wartości f i wszystek

$$[f] \Sigma \varphi f \psi f$$

jest spełniony, a to znaczy, że liczby φ i ψ są równe.

Aby uniknąć tej trudności, trzeba założyć, że zakres zmiennych x jest nieskończony. Ten założenie to ~~[illegible] [illegible]~~ nie daje się wyrazić z pomocą określeń [illegible], i ~~[illegible]~~ potrzebuje więc pewne odrębnego aksjomatu, który dotyczy od ~~[illegible] [illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] do [illegible], [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible] z Tarskiego [illegible].

Teorję funkcyj liczbowych przedstawia się w ten sposób, iż traktujemy liczby jako funkcje funkcyj propozycjonalnych.

Tak np. liczba 0 jest odmiennością funkcyj propozycjonalnej f(x) ~~…~~ na tem polegającym, iż niema takiego x, dla którego ~~f(x)~~ byłoby f(x)

(1.) „0(f)" = „$\sim$[Ex] f(x)"

„f(x) jest zero wtedy i tylko wtedy, gdy: niema x dla którego byłoby f(x)"

(2) „1(f)" = „[Ex] K f(x) [y] C f(y) I(x, y)"

f(x) jest jedynką wtedy i tylko, co: dla pewnego x f(x) i dla każdego y, jeżeli f(y), to x jest identyczne z y.

(3) „2(f)" = „[Ex][Ey] KKNI(x, y) K f(x) f(y) [z] C f(z) A I(x, z) I(y, z)"

f(x) jest dwójką wtedy i tylko co: istnieją x i y, nieidentyczne ze sobą, i takie, iż f(x) oraz f(y) a wtedy dla każdego z: jeżeli f(z), to z jest identyczne bądź z x bądź z y.

Rl(f, g)

Równoliczność dwuch funkcyj f(x) i g(x) jest ich odmiennością, polegającą ~~na~~ na tem, że zbiór wszystkich przedmiotów, dla których f(x) i przedmiotów, dla których g(x), w ten sposób, iż między temi przedmiotami zachodzi relacja, w której każdemu f(x) odpowiada jeden przedmiot, w którym g(x) i odwrotnie:

[p] A p Np

Zaś Ap Np jest wyrażeniem ogólnie ważnem, także [illegible] jest także wyrażenie wyżej nie ważne.

<u>Zastosowanie wyższej teorji funkcji logicznych do badania pojęcia liczby</u> (Hilb.-Ack. Kap. IV § 2 str. 86)

Liczba nie jest przedmiotem konkretnym, lecz cechą lub własnością. Przedmiotami, którym te własności przysługują nie mogą też być przedmioty, które liczymy, gdyż każdy z nich jest jednością, tak że nie przysługują wcale liczby ~~[illegible]~~ różne od jedności. Natomiast można uważać liczby jako własności tych pojęć, pod które podpadają przedmioty liczone. Tak np. fakt, że istnieje pięć części świata, Europa, Azja, Afryka, Ameryka, Australja i Antarktyda, nie może być wypowiedziany w ten sposób, że każda z części świata [illegible] własność [illegible] w liczbie pięć, natomiast jest własnością pojęcia „...jest częścią świata", że może być mowy o pięciu i tylko pięciu przedmiotach.

Liczby są więc własnościami pojęcia, ~~[illegible]~~ a w ogólnej

(4) $Rl(f,g)$ "=" $[\Sigma R]\, K\, [x]\, C\, f(x)\, [\Sigma y]\, K\, R(x,y)\, g(y)\, K\, [y]\, C\, g(y)\, [\Sigma x]\, K\, R(x,y)\, f(x)$

"$[x][y][z]\, K\, C\, K\, R(x,y)\, R(x,z)\, I(y,z)\, C\, K\, R(x,z)\, R(y,z)\, I(x,y)$"

T. zn. ~~dla pewnego~~ istnieje taki stosunek R, że

1) dla każdego x: jeśli f(x), to istnieje takie y, pozostające w stosunku R do x, że g(y)

2) dla każdego y: jeśli g(y) to istnieje takie x, do którego y pozostaje w stosunku R, że f(x)

3) dla każdego x, y, z: jeśli x pozostaje w stosunku R do y i z to y ~~jest~~ i z są identyczne, oraz jeśli x pozostaje w stosunku R do z oraz y pozostaje w tymże stosunku do z, to x i y są identyczne

Podobnie łatwo określa się teraz dysjunkcję obu funkcji. Jeśli f(x) i g(x) nie mogą się wykluczają się wzajemnie (co oznaczamy wyrażeniem D(f,g)), i jeśli funkcji f(x) przysługuje liczba m (tzn. m ~~przedmiotów~~ spełnia f(x)), funkcji g(x) liczba n, to funkcji Af(x)g(x) przysługuje liczba m+n. Tak np. wyraża się twierdzenie 1+1=2 w postaci zdania:

(5) $[f][g]\, C\, K\, D(f,g)\, K\, 1(f)\, 1(g)\, 2(Afg)$

~~Wyrażenie~~ Dla każdej funkcji f(x), dla każdej funkcji g(x), jeśli f(x) i g(x) wykluczają się i jeżeli wówczas f(x) jak g(x) są spełnione dla jednej tylko wartości x, A f(x) g(x) jest spełnione dla dwóch wartości x.

~~W danym przypadku~~ Liczby i działania muszą więc dają się zdefiniować używając tylko ogólnych terminów logicznych, takich jak wyłączanie, identyczność, spełnianie się funkcji dla pewnych wartości zmiennych. Okazuje się, wbrew mniemaniu Kanta, że nie mamy wcale żadnych szczególności, opartych na intuicji przestrzennej:

Jeżeli funkcja, której argumentem jest funkcja propozycjonalna, φ(f) ma wyrażać jakąś liczbę, to musi spełniać następujące warunki:

a) jeżeli f(x) i g(x) są równoliczne obszarami, to musi być ~~[illegible]~~ $K\varphi(f)\varphi(g)$ lub $KN\varphi(f)N\varphi(g)$

b) jeżeli f(x) i g(x) nie są równoliczne, to może być spełniony jeden z dwóch φ(f) albo φ(g).

Warunki te dadzą się ująć w następującym wyrażeniu:

(6) $[f][g]\, KCK\varphi(f)\varphi(g)\, Rl(f,g)\, CK\varphi(f)\, Rl(f,g)\, \varphi(g)$

Następujące wyrażenie dla skrócenia „Num(φ)", to można powiedzieć:

(funkcji)

Liczba jest to taka własność funkcji propozycjonalnych, która posiada własności Num(φ) (lub która spełnia funkcję Num(φ)

Wreszcie widzę pewną trudność, gdy mówimy o warunku, aby jeśli dwie funkcje φ i ψ, odpowiadające wyrażeniom $Num(\varphi)$ i $Num(\psi)$ determinują jedną i tę samą liczbę. Warunek ten polega na tem, by $\varphi(f)$ i $\psi(f)$ były dla tych samych wartości zmiennej f, bądź obie prawdziwe, bądź obie fałszywe, t.zn. zachodzi równoważność

$$[f]\, \Sigma\, \varphi(f)\, \psi(f). \qquad (7)$$

Przyjmijmy teraz, że zbiór przedmiotów x, ~~dla których określone jest funkcja $f(x)$ jest skończony~~ w obrębie których są zdefiniowane funkcje $f(x)$ jest skończony. Wtedy wszystkie liczby, większe od liczby przedmiotów x są wzajemnie odpowiednio określone sobie równe. Przypuśćmy np., że liczba przedmiotów x jest mniejsza od 10^{60} i weźmy jako φ i ψ funkcje, które determinują liczby 10^{60} i $10^{60}+1$. Wobec tego, że żadna z funkcji $f(x)$ nie spełnia ani $\varphi(f)$ ani $\psi(f)$ równoważność (7) jest spełniona, t.zn. φ i ψ przedstawiają tę samą liczbę.

Aby uniknąć tę trudność trzeba przyjąć, że ~~świat~~ zbiór przedmiotów, o których mogą być orzekane funkcje $f(x)$ jest nieskończony. ~~Często~~ Założenie to nosi nazwę aksjomatu nieskończoności. Po przyjęciu tego aksjomatu wszystkie otrzymane wszystkie [illegible] się [illegible], które mogą odpowiadać, opiszemy je na [illegible] jakiejś funkcji logicznej.

Paradoksy logiczne

(Hilb. Ack. – Grz. d. th. Log. III Kap. § 4.)

Ogólny teraz funkcji logicznej, jeśli nie zostanie ustalona pewnym ograniczeniom, prowadzi do sprzeczności, których przykładami są t. zw. paradoksy logiczne.

a) Niech będzie $P(f)$ funkcją orzeczników, której argumentem jest funkcja propozycjonalna $f(x)$

Zbadać i uzasadnić według prawideł sylogizmu, dla każdej figury z osobna, które z poniższych par przesłanek

aa ea ia oa
ae ee ie oe
ai ei ii oi
ao eo io oo

dają konkluzję ważną, które natomiast konkluzji nie dają.

(Zadanie domowe)

a/ Znaleźć proporcję, w której suma kwadratów jej wyrazów jest 50, suma wyrazów skrajnych jest 7, a suma wyrazów średnich 5.

b/ Znaleźć sumę liczb naturalnych, mniejszych od 100, a podzielnych przez 7.

N5

Sylogizmy (według Brentana).

26.

a/ Rozwiązać układ równań

$$xy-x-y=1 \quad ; \quad 3xy-5x-y=5 \;.$$

b/ Między 71 i 23 wstawić 15 wyrazów, któreby wraz z nimi tworzyły postęp arytmetyczny.

Fig. III.

1) MaP	2) MaP	3) MeP	4) MeP	5) Ma'P	6) Ma'P
Ma'S	Me'S	Ma'S	Me'S	MaS	MeS
Sa'P	SaP	Se'P	SeP	Sa'P	SaP
7) Ma'P	8) Ma'P	9) Me'P	10) Me'P	11) Me'P	12) Me'P
Ma'S	Mi'S	MaS	MeS	Ma'S	Mi'S
SiP	SiP	Se'P	SeP	SoP	SoP
13) Mi'P	14) Mo'P				
Ma'S	Ma'S				
SiP	SoP				

Fig IV.

1) PaM	2) PaM	3) PeM	4) PeM	5) PoM	6) Pa'M
Ma'S	Mi'S	Ma'S	Ma'S	Ma'S	Ma'S
SoP	SoP	SiP	SiP	SiP	SoP
7) Pa'M	8) Pa'M	9) Pa'M	10) Pe'M	11) Pe'M	12) Pe'M
MeS	Ma'S	Mi'S	MaS	MiS	Ma'S
SaP	SiP	SiP	SiP	SiP	SoP
13) Pe'M	14) Pi'M	15) Po'M			
Me'S	MaS	Ma'S			
SaP	SoP	SoP.			

Uzupełnić tablicę klasycznych trybów sylogizmu przez tryby, w których jako przesłanki występują zdania a', e', i', o' i wykazać drogą redukcji do trybów klasycznych, które z tak otrzymanych trybów są poprawne.

Tablica przesłanek:

aa	ea	ia	oa	a'a	e'a	i'a	o'a
ae	ee	ie	oe	a'e	e'e	i'e	o'e
ai	ei	ii	oi	a'i	e'i	i'i	o'i
ao	eo	io	oo	a'o	e'o	i'o	o'o
aa'	ea'	ia'	oa'	a'a'	e'a'	i'a'	o'a'
ae'	ee'	ie'	oe'	a'e'	e'e'	i'e'	o'e'
ai'	ei'	ii'	oi'	a'i'	e'i'	i'i'	o'i'
ao'	eo'	io'	oo'	a'o'	e'o'	i'o'	o'o'

Tryby poprawne.

Fig. I.

1.)	2)	3)	4)	5)	6)
MaP	MaP	MeP	MeP	Ma'P	Ma'P
Sa'M	Si'M	Sa'M	Si'M	SeM	SoM
Sa'P	Si'P	Se'M	So'M	SaP	SiP

7)	8)	9)	10)	11)	12)
Ma'P	Ma'P	Ma'P	Me'P	Me'P	Me'P
Sa'M	Se'M	So'M	SeM	SoM	Se'M
SiP	Sa'P	Si'P	SeP	SoP	Se'P

13)
Me'P
So'M
So'P

Fig II.

1)	2)	3)	4)	5)	6)
PaM	PaM	PeM	PeM	Pa'M	Pa'M
Se'M	So'M	Sa'M	Si'M	SeM	SoM
Se'P	So'P	Se'P	So'P	SaP	SiP

7)	8)	9)	10)	11)	12)
Pa'M	Pa'M	Pe'M	Pe'M	Pe'M	Pe'M
Se'M	So'M	SaM	SiM	Sa'M	Si'M
Sa'P	Si'P	SaP	SiP	Sa'P	Si'P

a) W sylogizmach, które dają konkluzję a: M łączy S i P, t.zn. zawiera w sobie S i zawiera się w P.

b) W sylogizmach, które dają konkluzję e: M dzieli S i P, t.zn. zawiera w sobie jeden z terminów, a wyklucza drugi

c) W sylogizmach, które dają konkluzję i: M łączy część S z P, ~~t.zn.~~ w stosunku do których się krzyżuje się z jednym z terminów skrajnych i zawiera się z drugim.

d) W sylogizmach, które dają konkluzję o: M dzieli część S od P, ~~t.zn.~~ w stosunku do których bądź wyklucza się z P i zawiera w sobie część S, bądź zawiera w sobie P i wyklucza część S, bądź zawiera się w S a wyklucza się ~~częściowo~~ z P.

Uzasadnić, że warunkom powyższym czynią zadość tryby

a) Barbara

b) Celarent, Cesare, Camestres, Celantes

c) Darii, Darapti, Disamis, Datisi, Bramalip, Dimatis

d) Ferio, Festino, Baroco, Felapton, Bocardo, Ferison, Fesapo, Fresison.

Syllogizmy

1) Wykonać redukcję syllogizmów:

a) trybów figury II – IV do trybów figury pierwszej

b) trybów figury I do trybu Barbara

2) Wyprowadzić wszystkie tryby syllogistyczne z trybu Barbara, nie posługując się ani prawem odwracania zdań (według Leibniza, Słow. T. dow. I. str. 109 i nast.

3) Udowodnić prawa odwracania zdań przy pomocy zasady tożsamości (według Leibniza, Słow. T. dow. I. str. 109 i nast.

E:

SEP
PAP

PES

(Cesare)

I:

SiP
SaS

SaS
SiP

PiS

~~Dar~~ Datisi

A:

SaP

SaS
SaP

PiS

Darapti

Wnioskow. - rozumowanie dedukcyjne.

Dlaczego żarówka zgasła ?

Słabszy.związek: Jeżeli q, to prawdopodobnie p w stop niu u. Rozumowanie redukcyjne.

Podział roz. na ded. i red z podziałem nauk na matem. i emp.

Wnioskowanie rozumowaniem odkrywczym

Dowodzenie - uzasadniającym cel rozumowania.

Wyjaśnianie i sprawdzanie pozytywne (konfirmacja)

Sprawdzanie negatywne jest syl. destr.

Podwójne zadanie badań nauk. odkrywanie i uzasadn.

Założenia uzasadn. aksjomaty i zdania obs.

Rozum. progres. i regres.

Trojakie stosunki w rozumow. trzy zasady podziału.

Cztery rodzaje rozumowań

I Dedukcyjne - redukc.	Przesłanka racja
II odkr. uzasadn.	przesłanka - punkt wyjścia
III porog. regr.	punkt wyjścia - racja

Wnioskowanie
Dowodzenie
Wyjaśnianie
Sprawdzanie (poz.)

20

Dysputa - forma sporu (disputatio - rozważanie)

Defendens - tezy obowiązki (onus probandi)

Oponens - przeciw uzasadnieniu - przeciw tezie.

Rozstrzygnięcie formalne - rzeczowe - principia

- logiczne - psychologiczne

Doświadczenie. ~

Dow. przypuszczenie że S jest P, ponieważ M.

rozpoznajemy żadnego rozumowania nie stanowi.

żadne ... nie jest ... dow.

Warunki poprawności rozumowania:

a) prawdziwość przesłanek   b) konsekwencji

a) błąd materialny   petitio principii   Ciało niepodzielne [illegible] = [illegible]

błędne koło (circ. vit.)

A jest C, bo A jest B. — A jest B, bo C jest B

S jest P, bo M jest P — M jest S, bo M jest S

b) błąd formalny

c) ignoratio elenchi (dowodu?) (nie tego. przedmiotu)   non sequitur (wniosku) (niezależn. wniosek)

arg. ad hominem.

[illegible], [illegible] - [illegible]

onus probandi

przekonywanie!

<u>Dowodzenie</u>   S-P znaleźć termin środkowy

Geneza twierdzeń - potrzeba dowodzenia - <u>dowodz. a wnioskowanie</u>

Wstępne dowody. [illegible] błąd [illegible] -

Dow. progresywny (synt.) - regresywny (anal.)

<u>Jak [illegible]</u> - onus probandi

Dowód niewprost. Transpozycja - CCNAAA (20)

Dowody fałszywości przez sprowadz. do niedorzeczności albo kontradykcji.

(dowód przez przykład przeciwny)   wewnątrz. sprzeczna

Wyjaśnianie. -

Przeciwieństwo:

Ca Ne

Ce Na

Podprzeciwieństwo

CN i O

CN O i

Podrzędność

Ca i

CN i Na

Ce O

CN o Ne

Ad 8. Na podstawie kwadratu logicznego i zaprzeczenia zdania „i" będą następujące wnioski

Zdanie a jest fałszywe – $(SiP) \sqsupset -(SaP)$

" o " prawdziwe – $(SiP) \sqsupset -(SoP)$

" e " prawdziwe – $(SiP) \sqsupset -(SeP)$

M jest P

S jest M

S jest P

S jest P, bo M jest P

M jest P, bo M jest S

S jest P

S jest M

S jest M

A jest C

Reguły syl:

1. Przynajmiej jedna przesłanka ogólna (z dwóch szczeg
   nic nie wynika.
2. Przynajmniej jedna przesłanka twierdząca
3. Termin średni przynajmniej raz rozłożony.
4. Jeżeli obie przesł. ogólne, konkl. ogólna lub szcze
   jeżeli jedna szczeg. - konkluzja szczeg.
5. Jeżeli obie przesł. twierdz. konkl. twierdz. - jeże
   jedna przecząca konkl przecz.
6. Termin nie może byś rozł. w koknl., jeżeli nie był
   rozł. w przesł.

Wieloryby są ssakami,
" " zwierzętami morskimi.

Każdy prostokąt jest czworobokiem
Żaden trapez nie jest prostokątem   przestawić prze

Każdy kwadrat jest prostok.
niektóre prostok. nie są równoboczne. niema konkl.

Wykresyn

Entymematy

Każdy z nas może się omylić, bo ~~ludzie~~ człowiek ~~są~~ jest niedoskon

S jest P, bo M jest N

N jest P	M jest P
M jest N	S jest M
M jest P	S jest P

Nie wszystko złoto, co się świeci.

Związki opozycji jako twierdzenia Teorii nazw!

1.) Cai 3) Ceo } podrzędności
2) CNiNa 4) CNoNe

5) CaNe 6) CeNa przeciwieństwa

7) CNio 8) CNoi podprzeciwieństwa

9) CaNo 10) CoNa
11) CNao 12) CNoa } sprzeczności
13) CeNi 14) CiNe
15) CNei 16) CNie

Wnioski z opozycji (według tw. 1)–16) jako zasad)

Rozszerzenie kwadr. log. na zdania jednostkowe.

Zdania modalne w kwadracie i w czworoboku.

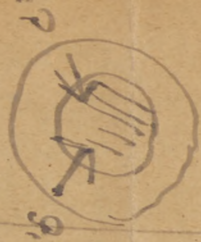
Odwracanie zdań (konwersja) równoważnościowe i przez ograniczenie (wykresy!)

Tablica konwersji:

1) C(SaP)(~PeS) 2) C(SeP)(PeS)
1a) C(SaP)(PiS) 2a) C(SeP)(~PiS)
3) C(SiP)(PiS) 4) C(SoP)(~PiS)

Tylko S są P = żadne ~S nie jest P = Każde P jest S
Tylko niektóre S są P = i.o. ~

Wiele książek nie jest wyjaśnionych
Nie wszystko wiedzieć, co ma wiele
45 – 53



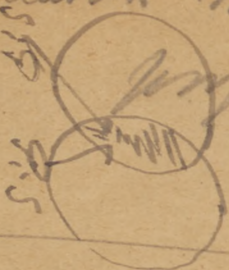
1) Ustalenie treści książki [illegible]

Potwierdzam, że [illegible]
autorów książki [illegible]
w porozumieniu z ~~[illegible]~~ [illegible]
~~[illegible]~~ Autor [illegible] … [illegible]
[illegible]

Uszanowanie redaktora naczelnego
[illegible]
K. G.

2)

5) Redaktor naczelny



1) Wydawcy Honorarii

Ustalenie
6) [illegible] z [illegible] p. [illegible]
[illegible] ([illegible]) i [illegible] o T. [illegible]
[illegible]
[illegible] p. [illegible]
[illegible] p. [illegible]
[illegible] o [illegible]
[illegible]
[illegible]

Opozycja zd. jednostk. - Sześciobok -

Zdania modalne.

S musi być P — S musi być nie P

nie może być nie P — (nie może b. P.

S może być P — S może być nie P

nie musi być P. — (nie musi b. P.)

Abacus! -

Tablica konwersji

1) Eace' — 5) Eici — 7)

2) Caci — 6 Eocil — 8)

3) Eece — 9)

4/ Ceci' — 10)

Inwersja — SaP - SoP — Cao'

SeP - SiP — Cei'

Każdy dorosły umie czytać — niekt. (nie umieją czytać) dzieci ~~nie są dorośli~~

Żaden nauc. zd. nie [illegible] — Niekt. ~~przedmioty~~ niegodziwi ~~nie są [illegible]~~ [illegible]

Zd. wyłączające

Tylko stud. są uczni D.A. — Każdy ucz. D.A. jest studentem.

Zdania kategoryczne - zdaniami subsumcyjnymi

jakość - ilość!

Obwersja.

SaP	a SaP	e Se-P	i NSi-P	o NSoP
SaP	Sa-P	SeP	NSiP	NSo-P
SiP	NSeP	NSeP	SiP	So-P
SoP	NSaP	NSe-P	Si-P	SoP

„Każde" ~~bz~~ - dystryb. i ~~stało~~ (rozłącznie, wyjątkowo)

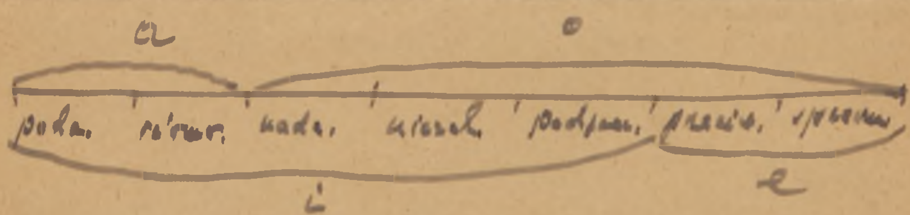
„pewne" „ [illegible]

„wszystkie" kolekt. i [illegible]

Zd. generalne

Przedst. graficzne ! -

Zd. kateg. a stosunki między zakresami:



Interpretacja subsumcyjna

" implikacyjna (kwant. ogólny)

funkcja propozycjonalna -

implikacji formalna.)

" egzystencjalna kwant. szczeg.

Zw. między kwant. ogólnym (koni.) i szczeg. (altern.)

Zd. jednostkowe - elementarne i [illegible]

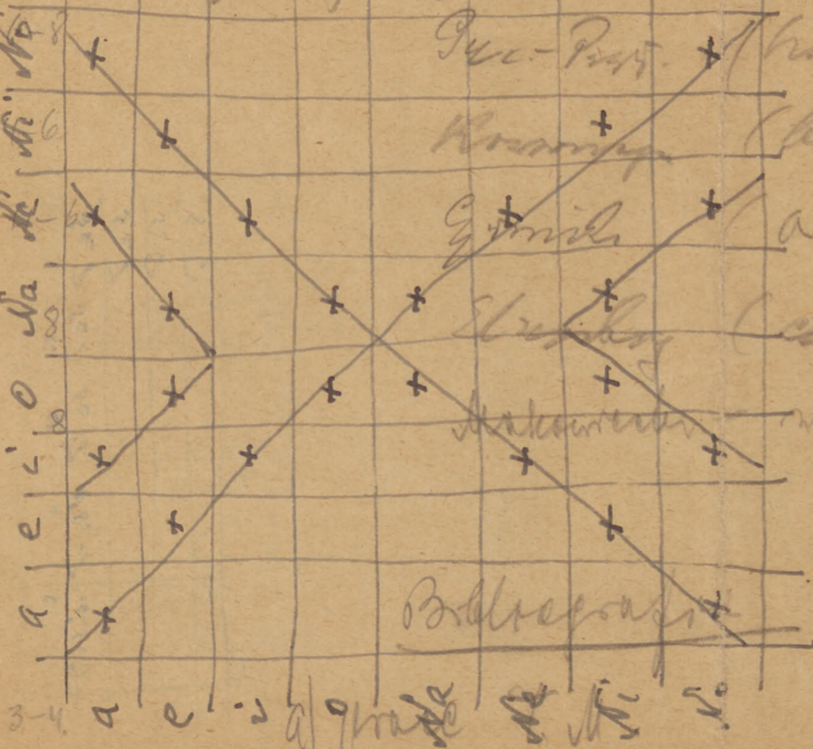
Zd. - o przedmiotach fikcyjnych.

Opozycja zdań —

2-3

Wstęp. — Stan badań

10



Gośki ([illegible])

Pers-Persz. ([illegible])

Krasnopp. ([illegible]) — 2

Gomulka ([illegible]) —

[illegible] ([illegible] i [illegible]) !

Makowiecki — wspomnienie o zakonach

Bib. Univ. Wars.

Bibliografia

a) grafika

b) artykuły i recenzje i T. M.

a	o
b	+ o
c	

wpisane [illegible]

Definicje

Doniosła rola: 1) ~~[illegible]~~ tworzenie nazw z przeciwnych [illegible].

Def. nominalne i realne -

Terminów - zdań.

Def. nominalne terminów. Rozróżnienie -

Def. klasyczna. Adekwatność definicji (za szeroka, za wąska)

Def. analityczne - syntetyczne (postulat tworzenia),

definiendum Tezy -

Def. nominalne - dyktatorskie zastępowanie! -

Def. zdań - „[illegible]" = „[illegible]" „[illegible]" = „[illegible]"

„[illegible]" = „[illegible]" Wyrazy synkategorematyczne.

Def. rozróżniające - błędne koło - -

([illegible] - [illegible], [illegible] - [illegible] - Terminy [illegible]

Systematyka definicji:

Def

rzeczowe / umowne (słowne)

Terminów / zdań (wyjątek)

nominalne / realne (klasa) / nom. / realne

analityczne / syntetyczne

[illegible]: ~~[illegible]~~ aksjomaty postulatów = wyjątek [illegible] wszystkich ludzi, którzy mają wspólne wrodzone.

Szczególne - wspólne [illegible] - które [illegible] -

10.

Rodzi się przeto nowe pytanie, jak odszukać pierwotny
pełność i pewność wiedzy o rzeczywistości, przy zachowaniu tych
wartości, które daje racjonalizacja. Stawiając to pytanie, wpro-
wadzę metafizykę, odkrywając na inne jeszcze metody poznania,
poza tymi, które tradycja obejmuje rozróżnieniem poznania
zmysłowego (lub introspekcyjnego, o ile chodzi o zjawiska psychiczne)
oraz racjonalnego. Te inne metody okazać się muszą różno-
rodnymi niż tamte. Żeby je z rzeczą związać bezpośredniość
i zupełność wszystkie przedstawiać. Stąd wydaje się
być zaliczanie ich do dziedziny empirii, która w tem ujęciu
dosięga rozszerzenia poza tradycyjne granice. Te inne ro-
dzaje empirii nie są tak opracowane, jak empiria zwy-
czajna. Nie byłoby jednak rozsądne odmawiać im z tego
powodu doniosłości i uznania, a przy uwzględnieniu niepew-
ności wiedzy przez nie ustanowionej.

16. X. 54.

Wykł...

Określę ją. Def. [illegible] [illegible]. Def. [illegible]. Def. [illegible]-
[illegible].

Zdania kategoryczne – interpretacja subsumpcyjna
przyczynowi
„~~tylko~~" niektóre !

podział według jakości – ilości

(zdania o zaprzeczonym podmiocie)

obwersja !

Rozumienie zdań ogólnych:

Mocne – słabe, (Każdy – wszystk.)

Kolekt. – dystrybutywne (Wszyscy – każdy)

Zdania generalne.

Zdania kategoryczne, a stosunki

między zakresami terminów !

podrz. równ. nadrz. wykl. podprz. przeciw. sprzecz.

Interpretacja subsumpcyjna

" implikacyjna

" egzystencjalna.

Funkcje propozycyjne – implikacja materialna – kwantyfik. ogólny.

Kwant. szczeg. – związki między kwantyfikatorami.

Zd. jednostk. – deskrypcja –

Opozycja zdań – tablica opozycji

sprzecz.	4
przec.	2
podprz.	2
razem	8

1) Łai

2) Ćwiki

jest P" przyczym x jest wprowadzoną zmienną nieokreśloną;

W postaci egzystencjalnej $N(Ex)\ S \cdot P - Px$ brzmi
„Nieprawda, że istnieją takie x które są S a nie są P"

Tutaj wprowadziliśmy kwantyfikator szczegółowy (Ex), który oznacza – istnieje

8) Zdania jednostkowe to takie, które mają w podmiocie termin jednostkowy, nie są to jednak zdania indywidualne, w podmiocie jest bowiem termin, który nie jest pusty i nie określone znaczenie. Zdania te posiadają budowę złożoną są to zdania deskrypcyjne. Są one koniunkcją 3 zdań których prawdziwość warunkuje prawdziwość zdania deskry-pcyjnego. Zdania jednostkowe rozróżniamy: elementarne i deskrypcyjne.

Zdania kategoryczne

Ich wyliczenie i opis – analiza – jakość i ilość

Obwersja   kwadrat logiczny.

Rozumienie dystrybutywne i kolektywne

słabe i mocne – generalne.

Tablica obwersji

Zdania kategoryczne a stosunki między zakresami

Przedstawienie graficzne zdań kategorycznych.

a   o

podrz. równ. nadrz. niezal. podprz. przeciw. sprzeczn.

i   e

Interpretacja subsumcyjna.

Int. implikacyjna

Funkcje propozycjonalne. Implikacja formalna.

Kwantyfikator og. imienny (generalny: partykularny)

Interpr. egzystencjalna

Kwant. szczegółowy. Kwantyfikatory a funktory.

Własności kwantyfik. i związek między nimi.

Zd. jednostk. deskrypcyjne.

	a	e	i	o
SaP	SaP	Se-P	NSi-P	NSoP
SeP	Sa-P	SeP	NSiP	NSo-P
SiP	NSaP	NSeP	SiP	So-P
SoP	NSaP	NSo-P	Si-P	SoP

Stosunki opozycji – 16 związków – Tablica! –

Obwersja zawsze jednostronna

Kwadrat zdań modalnych.

Inwersja: SaP SeP
-Pa-S PeS
-SoP -SiP

Każdy orzeł jest ptakiem

Niekt. nie orły ~~nie~~ są ptakami

Każde dziecko jest małe

Niektórzy dorośli nie są mali.

Żaden kwadrat nie jest kołem

Niekt. nie kwadr. ~~nie~~ są kołami

Żaden [illegible] nie [illegible]

Niekt. [illegible] [illegible]

Zd. [illegible] przecz. jakości o zespoł. podmiocie –

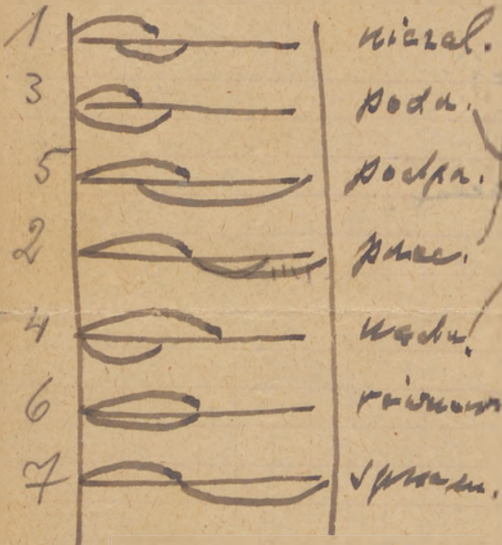
Kategorie semantyczne.

Nazwy generalne – terminy

Zakres terminów – ogólne – jednostkowe – puste

Stosunki między terminami. ([illegible] [illegible] – [illegible])
(przykłady determin. i modyfik.)   Zero i jedynka logiczna

Przedstawienie graficzne. –



	PQ	P–Q	–PQ	–P–Q	
	/	/	/	/	1
	–	/	/	/	2
	/	–	/	/	3
	/	/	–	/	4
	/	/	/	–	5
	/	–	–	/	6
	–	/	/	–	7

Niezależność – [illegible]

Praedicabilia   Liczba pierwsza – liczba względna do trzech

generalizacja – specjalizacja

Systematyka.

" najpospolitszy Arystot. (Porfir.) drzewo –

Podział logiczny i klasyfik.

podz. natur. i sztuczny.

podz. fizyczny – abstrakcyjny – dystrakcyjny   1 pl

Szeregowanie.   Wartość podziału [illegible] [illegible].

Generalis. - specif. - -

Systematyka - układ g. [illegible]

Klasyfikacje

Podział logiczny

p. [illegible] i [illegible]

Antinomia i [illegible].

używając deskrypcji w podm. zdań zakładamy że istnieje przedmiot o którym jest mowa że jest on jedyny

Szeregowanie d.c. [1) Wyjście pięknych i nabliższych różnic.
2) Uporządkowanie między - wewnątrz gatunku
barwy - dźwięki - alfabet. } 3) Wykorzystanie różnic między wid.
innych tradycyjnie - Temp.

Charakterystyka uporządkowania wewn. - jednoczesnie między

Szer. metryczne i niemetryczne.

Stosunek rekursyjny (poprzedzanie i następowanie)

przechodni; przeciwzwrotny, spójny.

różne możliwości uszeregowania

$0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}\, \frac{2}{3}\, \frac{3}{1}, \ldots$ (wymiernych lub wymiernych)

pręgi [illegible]. ([illegible], [illegible])

skala twardości - typy konstytucyjne.

Opis statystyczny. Liczebność. Krzywa Gaussa.

Definicje..

Nomin. i realne - Terminy i zdania

def. słownikowa. - za szeroka, za wąska - adekw.
adekwatnej i

def. analityczne i syntetyczne - podział (klasyfikacji)

Def. wyliczające: konwencjonalne; - Typ. zastosowania
(Dowód 12 (CApqCNpq))

Def. cząstkowe (def. zdań) - Wyraz. kategorem. i synkat.

Def. równościowe; [illegible] nie mieszać.

Def. aksjomatyczne. CCpqCCqrCpr (tw. 6 i tw. 26)

„Kpq" = „NCpNq" CCNpNp (tw. 5)

CpCNpq (" 2i)

Definicje

Prawidła semiw, opisi przyczyny przedmiotów – def. wyrażeń (nominal.) i def. rzeczy (realne). Inny podział na def. terminów i def. zdań. – definiendum i definiens.

Def. terminów: nominalne przykład a^2 za a.a. [illegible] o terminie definiowanym. Równoznaczność wyrażeń symbolami w dyspozycji metateorii (z gr. metateorii). 15/X.

realne – klasyczna def. [illegible] – per genus prox. Równoważność zakresów „jest to"

def. za obszerna, za ciasna, adekwatna.

Def. analityczne i syntet. (tylko nominalne) – [illegible] ustalenia

Różne rola def. realnych i nominalnych.

dyrektywy ~~[illegible]~~. –

Def. zdania – określanie wyrażeń synkategorematów (funktorów)

– def. uwikłane.

Def. równościowe – błędne koło w defin. Terminy pierwotne.

Def. uwikłane –

Def. przez aksjomaty – przez abstrakcję.

1) Jeśli punkt C leży między A i B, to leży między B i A.

2) Z trzech punktów A, B, C jeden i tylko jeden leży między dwoma innymi.

3) Każdy punkt A dzieli pozostałe punkty na dwa rodzaje, tak, że jeśli A leży między dwoma punktami, to należą one do różnych rodzajów, jeśli zaś nie leży między nimi, to należą one do jednego rodzaju. –

Definicje f. prawd. przez C i N jako term. pierw.

„Apq" = „CNpq" (12) „Kpq" = „NCpNq"

„Dpq" = „CpNq" (13) „Epq" = „NCCpqNCqp"

Aksj. 1) CCpqCCqrCpr (6) – exp. (26)

2) CCNppp (20)

3 CpCNpq (21)

Do str. 74. F

~~Systematyka~~ Dla jasnego przeglądu różnych odmian definicji, które omówiliśmy, niech służy ich następująca (systematyka:

Definicja

- równoważne
  - terminów
    - nominalne
    - realne ([illegible])
      - analityczne
      - syntetyczne
  - zdań (użytkowe)
    - nomin.
    - realne
- nierównoważne (uwikłane)
  - przez aksjomaty
  - przez abstrakcję

Dwojakie zastosowanie definicji

Nominalne i realne - tworzenie idei.

Równoznaczność

Def. realne - Abstrakcje.

Pojęcie istnienia, oraz określania.

za [illegible], do [illegible].

Analityczne i syntetyczne.

Rola def. nominalnych i realnych - zastosowanie.

Definicja zdania (syntetyczna)

wymogi dedukcji i syntetyczności.

Def. konstruktywne - [illegible] Kotz.

Def. przez aksjomaty. Teoria aksjomatyczna.

równ. uwikł.

Term. uwikł.

symb. o [illegible]

[illegible] [illegible]

Teoria ogólna.

Rozw. [illegible].

[illegible].

Rolor

Zd. Russel. Obserwacje

Typy interpretacji - Kwantyf.

Zd. definiujące - o prawdzie filozoficznej.

Opór zdań jednostkowych

Sądy tw. – prez. prawdz. fakty [illegible] 35

Praedicabilia

Generalizacja, szczegółyzacja

Systematyka, Kategorie Arystot. Cechy.

Typy, gromady, rzędy, rodziny, rodzaje, gatunki – odmiany (rasy)

Podział logiczny. Składanie podziałów

Klasyfikacja

Terminy [illegible]

genetyczne

Podziały naturalne i sztuczne.

Opis – pozycja – opozycja.

Opis klasyfikacyjny i szczegółowy

1) Użycie właściwych pojęć

2) Wyprowadzenie cech szczególnych (Okiem)

3) Uwzględnienie różnic między. (typy!)

[illegible], [illegible]

Stosunek [illegible] i [illegible].

[illegible]

Łączenie [illegible] –

Opis statystyczny – [illegible] –

Definicje –

Z powodu tej sytuacji księgi rozwinięcia zależności wśród opracowań systemów arytmetyki (od Euklidesa – Theon ze Smyrny (w. I–II.) – Nikomach z Gerazy (~~[illegible]~~ I i II w.) – Jamblichus (w. III–IV) – Boecjusz ~~(w. V–VI)~~ (aż do [illegible] i XIII w. [illegible] Jordanus Nemorarius (w XIII) i Jacobus Faber Stapulensis którego podręcznik, wydany [illegible] i wydany z początkiem XVI w. przez Jakuba Lefèvre (Jacobus Faber Stapulensis) był bezpośrednim wzorem dla Maur. Autor stwierdził, że (indukcyjne) ~~dowody~~ twierdzeń u Maurolica, podobnie jak u jego poprzedników nie są jeszcze indukcją matematyczną, gdyż nie zawierają wniosku z n na n+1 w postaci ogólnej, lecz ograniczają się do przeprowadzenia dowodu dla kilku określonych wartości n, [illegible] ich formuły, co jest [illegible]. Porównanie [illegible] autora do konkluzji, że [illegible] M. nie był [illegible], [illegible] jego poprzednikowi [illegible]. [illegible] Pascal [illegible]

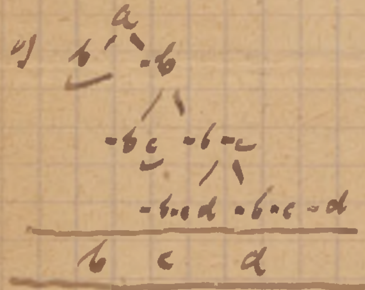
Wykł. I (Alumn.) 6. X. 53.

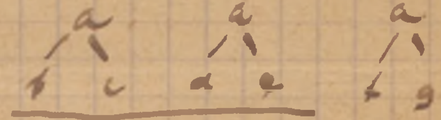
Analiza zdania. Zdania. Nazwy. Terminy. Stosunki między terminami. Praedicabilia. Rodzaje i gatunki. Systematyka, nazwy. Kategorie.

Podział logiczny. Człony, zasady. Podział dwudzielny. | Kombinacje podziałów. Podziały wielodzielne. Warunki poprawności podziału. Podziały naturalne i sztuczne. Pod. fizyczny. Abstrakcyjny. Partycja

Szeregowanie

Schematy wyszukiwania podziałów wielod. z podz. dwudz.





bd, be, cd, ce

bdf, bdg, bef, beg, cdf, cdg, cef, ceg,

Szeregowanie: 1) Cel – wyjście odpowiednich różnic, porządek uwzględniający wielorakie różnice indywidualnych. Przykłady: barwy, dźwięki, katalogi ułożone, ... przykłady, ...

Cecha stanowiąca miejsce w szeregu. Liczba wyjść różnic, szeregi ciągłe i nieciągłe.

Stosunek poprzedzania lub następ. (przechodni, asymetr., liczbowy)

Przechodniość, przeciwzwrotność, spójność.

Możliwość różnych uszeregowań (np. liczb). Szereg liczb wymiernych

$0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ Przeciwne szeregi – podział logiczny.

7) Jakie zastosowanie ma rozumowanie przez analogię.
Rozumowanie przez analogię jest rozumowaniem, w którym przesłanką jest twierdzenie iż w jednym lub więcej przypadkach obserwowanym występuje pewien układ zjawisk, w drugim zaś przypadku fragmenty takiego układu np. prehistoryk znalazłszy szczątki narzędzia przedhistorycznego potrafi przez analogię zrekonstruować jego całość na podstawie znajomości innych narzędzi. Tak też rozumowanie przez analogię pojmujemy jako rozumowanie w którym przesłanka jak wniosek są następstwem wspólnej racji w postaci prawa indukcyjnego. Rozumowanie przez analogię ma duże zastosowanie w badaniach naukowych np. w górach pokrytych lodowcami, lodowce są przyczyną powstawania określonych form krajobrazowych. W nauk-

1) CPp - zwrotn.

2) ApNp

3) NKpNp

4) CpNNp

5) CNNpp

6) CKCpqCqrCpr - przechodn.

7) CKpqKqp - symetr.

8) CApqAqp

9) CCpqCNqNp

10) CKCpqpq

11) CKCpqNqNp

28

1) Cpp - pr. ident. - zwrotność. Sprawdz. wstępnie.

2) ApNp - " wył. śr. - zd. sprzeczne.

3) NKpNp - " spr.

4) CpNNp - " podw. przecz.

5) CNNpp -

6) CKCpqCqrCpr - z. sylog. hip. - przechodniość.

7) CKpqKqp - pr. przemienn. - symetryczność

8) CApqAqp "

9) CCpqCNqNp - " transpoz. ~~10)~~

10) CKCpqrCpCqr - prawo ekspor. lub łącz. koniunk.

13 11) CKCpqNqNp - " " dod.

14 12) CApqCNpq - " wył. alter.

15 13) CApqCpNq " " dysj.

11 14) CApAqrAApqr " transp. łącz. alt.

10 15) CKpKqrKKpqr " " łącz.

16) CNKpqANpNq " de Morg.

17) CNApqKNpNq "

18) CCpCqrCqCpr pr. komut. przesłanek

Jeżeli 4 podz. przez 3, to jeżeli podzielne przez 2, podz. przez 6. –

19) CCpNqNp pr. redukcji do absurdu. –

$Ax + B = C \quad x_1 = x_2$.

20) CCNppp pr. Claviusa (a^2 podz. przez a)

21) CpCNpq (klas. implikacji i klas. z fałsz.)

22) CNpCpq ze sprzeczn. wszystko wynika

pr. Dunsa Scota.

$2 \cdot 2 = 5 \;/ -3 \rightarrow$ [illegible] jest p.p. –

$1 = 2$

23) CCpqCCNpqq dyl. konstr.

Omar – Koran dyl. –

24) CCpqCCpNqNp dyl. destr. (niemożl. [illegible] sprzeczności)

25) CCpCqrCCpqCpr [illegible]

26) CCKpqrCpCqr export.

38

T. 2 w. wszechzdaniowych

Analiza zdania.

Zd. relacyjne i zd. element.

ogólne wyp. - relacyjny

„jest" w zdaniu elem.

Podział naszego ~~tut~~ oznacz. wszystk. słownych

nazwy indyw. i generalne.

Supozycja nazw

„jest" funktor zdaniotw.

Przegląd wzorów

Wnioskowanie

Przesłanka - konkluzja

Zasada wnioskowania - podstawienie

Stosunek racji do następstwa - podstawa tego stosunku

odrywanie.

Dwa etapy wnioskowania

Reguły (dyrektywy) wnioskowania

schemat inferencyjny

1) $\dfrac{\begin{matrix}Cab\\ a\end{matrix}}{b}$ 2 $\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}CaCbc\\ a\end{matrix}}{\begin{matrix}Cbc\\ b\end{matrix}}}{c}$

„jeżeli" a „przeto"

Sylog. hip. 6) CKCpqCqrCpr

Transp. 9) CCpqCNqNp

Syl. konstr. 10) CKCpqpq

" destr. 11) CKCpqNqNp

" altern. 12) CApqCNpq

" disjunkt. 13) CDpqCpNq

1

Analiza zdania, jego składniki

Zdanie elementarne (jednostkowe, o faktach)

Zdania relacjonalne – zdania przynależnościowe.

Podmiot i orzeczenie, funktor „jest”
(okazjonalne)

Nazwa indywidualna, nazwa generalna

Supozycje nazw (stopnie języka!

Stos. przynależn. (przeciwsym. przeciwzwrotny, nieprzech.)

„ identyczn. (sym. zwr. przech.)

„ subsumcji (niesym. ~~nie~~zwr. przech.)

Wieloznaczność „jest”

Kategorie semantyczne.

Terminy. Zakresy terminów. Ogólne, jednostk., puste.

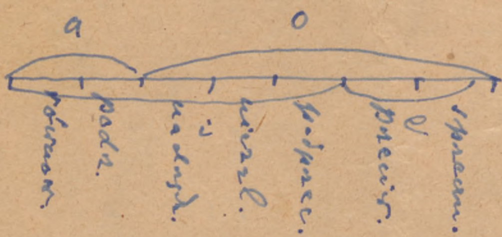
Działania na terminach, dodaw. logiczne, mnożenie

log. negowanie. Zakresy uniwersalny (1) i pusty (0).

Przydawki determinujące i modyfikujące.

Wykresy: Odcinki prostej lub okręgu. Pola kształt,

Koła. – Stosunki między zakresami:



a	i	? (=Cai)
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

a	e	? (=Dae)
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	v

i	o	? (=Aio)
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

a	o	? (=NEao)
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	f

e	o	?

e	i	?

NEao

NKCaoCoa

ANCaoNCoa

X_1 – A. B. C. D. E. F

X_2 – a b c d e g

X_3 – b c d f g

X_4 – a b d e f

X_5 – a c e f g

1.) S jest to ab (genus, differ.)

jaki jest zakres terminu S?

X_1, X_2, X_4

jakie są cechy (propria) towarzyszące w stosunku do ab

d e

Jaka jest różnica gatunkowa dla X_1 X_2

c

" " dla X_1, X_4

f

dla X_2, X_4 −c+−f

2) Zdefiniować rodzaj (B) do którego należą przedmioty X_4, X_5

B jest to aef

Jakie jeszcze przedmioty należą do tego rodzaju?

X_1

Czy któraś z cech aef nie jest zbędna (wynika z pozostałych)

e.

$1 = S + s$

$1 = SP + Sp + sP + sp$

$1 = SMP + SMp + SmP + Smp$
$+ sMP + sMp + smP + smp,$

Prawa tożsamości, przemienności i rozdzielności.

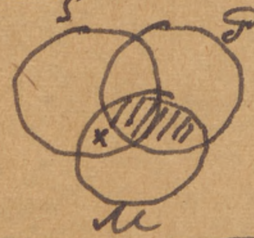
$SMP \neq 0$

1) Żaden metal nie rozpuszcza się w wodzie
Niekt. metale są trujące

Niekt. ciała trujące nie rozp. się w wodzie

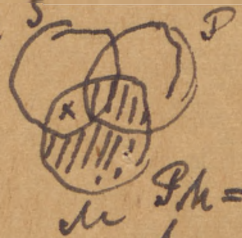
2) Żaden ptak nie jest rekinem,
Każdy rek. jest drapieżny (drapieżcą)

Niekt. zwierz. drap. (krwio.) nie są ptakami

1) 

$MP = 0$
$MS \neq 0$

$Sp \neq 0$

2 

$PM = 0$
$Ms = 0$

$Sp \neq 0$

Terminy – zakresy terminów

Ogólne – uniwersalne

jednostkowe – puste

Dodawanie, mnożenie, zaprzeczanie (dopełn.)

$1 \cdot a = a$, $1 + a = 1$ $1 \cdot 0 = 0$ $1 + 0 = 1$.

$0 \cdot a = 0$, $0 + a = a$

przykłady determ. i modyfik.

Wykresy.

Stosunki między zakresami.

Podrzędność; nadrzędność; sprzeczność

(mnoż.) (dodaw.) (neg.)

Przeciwieństwa

Podział i klasyfikacja

Str. racji do nast.

Cab / a / b CεCbc / a / Cbc.

Syll. hip. 6) CKCpqCqrCpr

Transp. 9) CCpqCNqNp.

10) CKCpqpq

11) CKCpqNqNp

12) CApqCNpq

13) CDpqCpNq

Wykł.? 15. I. 58.

Wnioskowanie. Podstawienie – odrywanie.

Zdania relacyjne oraz elementarne.

Orzeczniki wyższe (relatywy)

Składniki zd. elem.

Wzory indywid. i generalne.

Supozycja wzorów.

Funktor zdaniotwórczy „jest"

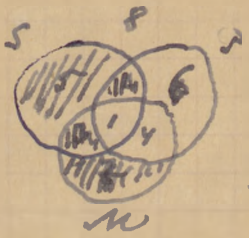
Sposób przysługiwania – przeciwstawny przeciwny. niesprzeczności.

„ identyczności.

„ istoty. 2-ow. niezgodne. przechodni.

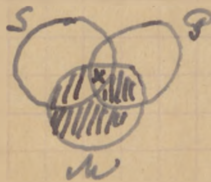
„jest" egzystencjalny i temporalny – .

[illegible]



$\overset{1}{SPM} + \overset{2}{SPm} + \overset{3}{SpM} + \overset{4}{sPM} + \overset{5}{Spm} + \overset{6}{sPm} + \overset{7}{spM} + \overset{8}{spm}$

MaP	$Mp = 0$
SaM	$Sm = 0$
SaP	$Sp = 0$



MaP $\quad SPM + SPm + SpM + Spm + sPM + sPm + spM + spm$

MaS	$Mp = 0$	$SPm \neq 0$
SiP	$Ms = 0$	

Gos Henryk, ch. IV r. — wyzn. terpółz.

Kuśka Karimera kl. II —

Środa 9-11 od 14-III

czw. 9-11 - co drugi od 16-III

w zakł. terpół.

Bieda Leon, mat. III r.

Zamorski Józef

Kamiński Zygmunt

[illegible]

Ekonom. wypalanie		Niszczenie
		Ogień
Praca		
ośr. wyb.		kwas. systek

Czw. 16 - 18

Piątek 17 - 18 ćwicz.

Logika dla biologów, (II. sem. 1954/55)

Wykł. 1. 2. IV. 55.

Logika wśród teorii nauk — nauka o strukturze

dwa typy nauk — aksjomatyczne i empiryczne.

Obserwacja — ~~myśl~~ rozumowanie.

Myśl pierwsza. Twierdzenia i przedstawie-

nia.

Wykł. 3-ci

Podział wyobrażeń. podział pojęć

Cel systematyki i podziału

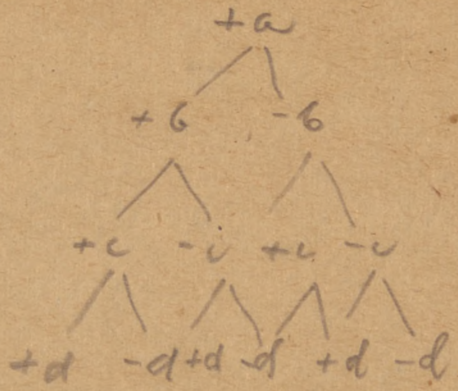
Podziały naturalne i sztuczne.

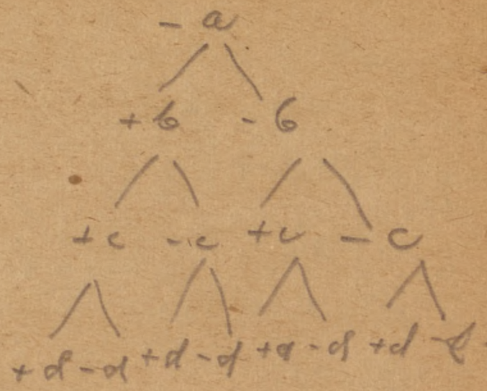
Opis przedmiotu przez zaliczanie do klasy systematycznej.

Analiza – podział fizyczny
abstrakcyjny.

Dyspozycja

Opis [illegible]





abcd, abc-d, ab-cd, ab-c-d.

1) Jeżeli punkt C leży między punktami A i B, to leży też między punktami B i A.

2) Z trzech punktów A, B, C, jeden i tylko jeden leży między dwoma pozostałymi.

3) Każdy punkt A dzieli pozostałe punkty na dwa rodzaje, tak iż jeżeli A leży między dwoma punktami, to należą one do różnych rodzajów, jeżeli zaś A nie leży między nimi, to należą one do jednego rodzaju.

„Kpq" = „NCpNq"

„Apq" = „CNpq"

1) CCpqCCqrCpr

2) CCNppp

3) CpCNpq

CApqApq

CApqCNpq

Tablica operacji:

Podrzędność: 1) CSaPSiP

2) CNSiPNSaP

3) CSePSoP

4) CNSoPNSeP

Przeciwieństwo 5) CSaPNSeP

6) CSePNSaP

Podprzeciw. 7) CNSiPSoP

8) CNSoPSiP

Sprzeczne: 9) CSaPNSoP

10) CSoPNSaP

11) CSePNSiP

12) CSiPNSeP

13) CNSaPSoP

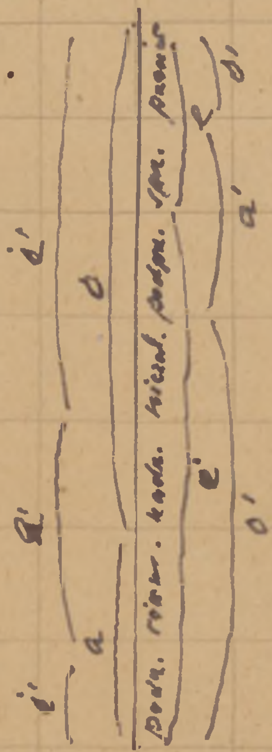
14) CNSoPSaP

15) CNSePSiP

16) CNSiPSeP

	a	e	i	o	Na	Ne	Ni	No
a	■		■			■		■
e		■		■	■		■	
i			■			■		
o				■	■			
Na				■	■			
Ne			■			■		
Ni		■		■	■		■	
No	■		■			■		■

/	S-P≠0	SP≠0	-SP≠0	-S-P≠0
	o	i	i'	o'
Niezal.	o	i	i'	o'
Podprz.	a	i	i'	o'
Przeciw	o	e	i'	o'
Nadrz.	o	i	e'	o'
Podpo.	o	i	i'	a'
Różn.	a	i	e'	o'
Sprzecz.	o	e	i'	a'
—	S-P=0	SP=0	-SP=0	-S-P=0
	e	e	e'	a'



Kwadraty logiczne.

Macierze stosunków opozycji.

$$S\beta P = SaP \cdot SiP \cdot Si'P \cdot So'P = Pe'S \cdot PiS \cdot PoS \cdot Po'S$$
$$= P\delta S$$

4) Zależności między zdaniami kategorycznymi:

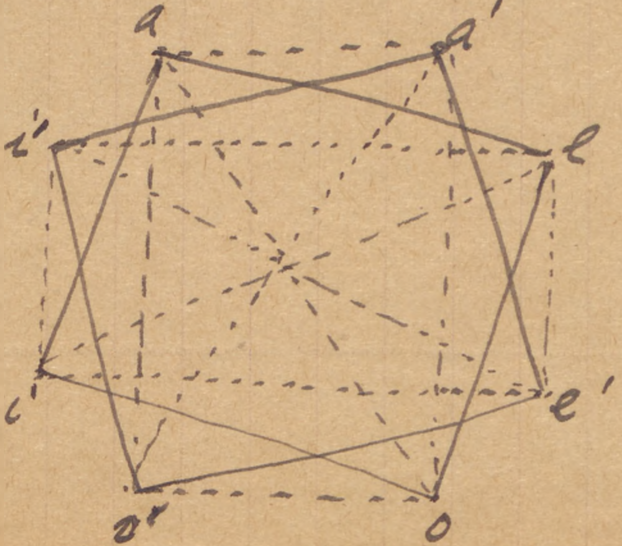
X (Odczytać z Tablicy):

Implikacja (podrzęd.) a–i, a–o', e–o, e–i'
(2–8) e'–o', e'–i', a'–i', a'–o

Dysjunkcja (przeciw.): a–e, a–a', a'–e', e–e'

Alternat. (podprzec.) i–o, i–i', i'–o', o'–o

Sprzeczności a–o, e–i, a'–o', e'–i'



Zdania proste i złożone.

Funktory zdaniotwórcze argumentów zdaniowych.

Teoria dedukcji (rachunek zdań)

Zmienne literowe – zmienne zdaniowe.

wartości logiczne.

funkcje prawdziwościowe.

Koniunkcja – matryca

Alternatywa (vel = „niewyłączający”)

„rozłączający”

Dysjunkcja (aut – „wyłączający”)

Implikacja — Np, NCpq, NKCpqCqp,

Równoważność — CCpqq, CKpqApq, CKCpqCqrCpr

Negacja. — rozkładanie na składn. proste od prawej strony.

Język teorii zdań

a) słownik ⊥ 3/12

b) prawa składni

c) przepisy sensu (matryce – definicje) – aksjomaty. –

Odczytywanie i zapisywanie f. prawdziwościowych – (język logiki i metalogiki)

	S-P	SP	-SP	-S-P	
Niezal.	o	i	i'	o'	..io..i'o'
Podrzęd.	a	i	i'	o'	a.i...i'o'
Przeciw.	o	e	i'	o'	.e.o..i'o'
Nadrzęd.	o	i	e'	o'	..io.e'.o'
Podprzec.	o	i	i'	a'	..ioa'[illegible]'i.
Równorz.	a	i	e'	o'	a.i..e'.o'
Sprzecz.	o	e	i'	a'	.e.oa'.i'[illegible]

Jest.	Zakres	Nie ma
o lub ĭ'	S-P	a lub ĕ'
e " ĭ	SP	e " ĕ
i' " ŏ	-SP	e' " ă
o' " ŏ'	-S-P	a' " ă'

Redukcja sylogizmów.

Sprawdzanie [illegible] -

[illegible] - podsłuch kontrolny

Zasady szyfrowania.

Wyszukiwanie - rozp. [illegible].

Podsłuchiwanie - odszyfrowanie

Schemat inf. prasy i [illegible].

Sztaby wojsk -

Analiza zdarzeń -

55

Nazwy indywidualne i generalne.

Supozycja nazw. –

Przechodniość – jest

niezwrotne, przechodniość. nieprzechodnie

Identyczność

Sprzeczność.

„Jest” egzystencjalny i temporalne.

Kategorie semantyczne.

Terminy. – zakres terminów

Działania na terminal

Interpr. logiczna – Kwant. ogólny.
" egzyst. " szczegółowy –

Związki między kwantyfikatorami

Zdanie jednostkowe – elem. i deskrypc.

Opozycja i konwersja

Opozycja zdań jednostkowych

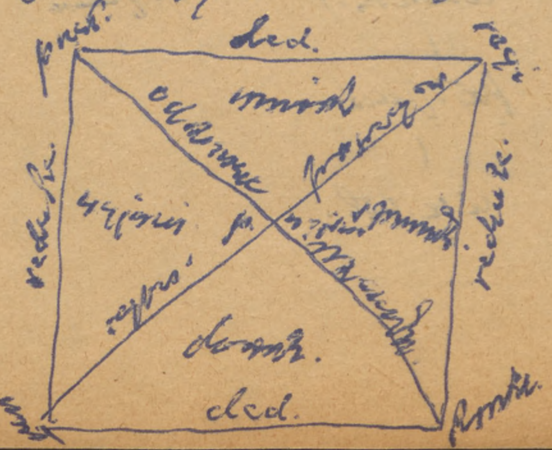
Inwersja = contrapoz. + ograniczenie

Zdania wyłączające. –

Wnioskowanie jest odwrotnym relacji wynikania.
Rozum. ded. i red. – Brak logicznego tautolog.! warunk.

Odkrywanie i uzasadnianie – dowodzenie –
wyjaśnianie – sprawdzanie zwątpienie –
przypuszcz. i weryfikacje

Teza dowodu – wiele metod..



Błędy rozumowania

1) Przypisanie poprzedników i ich uzasadnienia

2) Zakłócenie logiczne

Błąd materialny.

Petitio principii (wyłącznie formalne, nieprzydatne)

błędne koło.

A jest C, bo A jest B, A jest B, bo C jest B.

S jest P, bo M jest P, M jest P, bo M jest S.

Błąd formalny.

Błędy rozumowania

Bł. w poprzednikach | Bł. w konsekwencji

Bł. materj. (przesł. nieuzasadn.) | non sequitur | Zaś [illegible]

petitio princ.

circ. vit.

3) Wybór prof. Zb.Hornunga na członka Komitetu Redakcyjnego Prac Wydziału Filol.-Filoz.

Uchwalono jednomyślnie.

Przyjęto jednomyślnie.

Molier

Chory z urojenia (Wiśdzyak-Tuaci)

Bachelierus

Mihi a docto doctore
Zapytatur causam et rationem quare
Opium facit usypiare.
Na co ja respondeo
Quia est in eo
Vis usypiativa
Cuius est natura
Sensus odurzare

(tłum. Boya)

Egzamin – pytania – próba

Rozmowa – repetycje

błędy rozumu.

błąd w punktach – błąd w konkluzji

błąd ważny. – zł. ... – przes. ... – ... ...

bł. Rob. w roz.

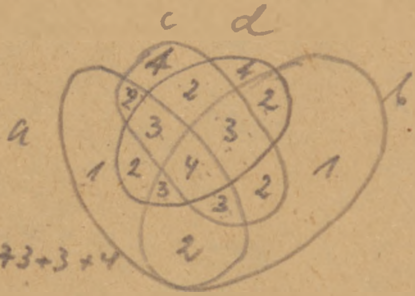
Dyspensa

Dziwaczne – Rzeczy potrzebne.

... ... (...

dowody fałszywe: wedł. zas. ... ... (z ... ...)

... ... (... ...). Cisk

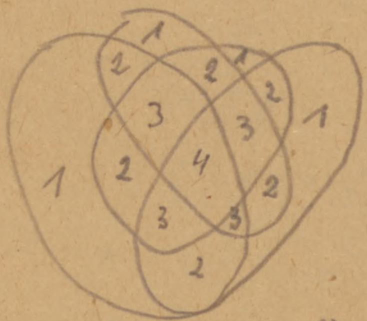


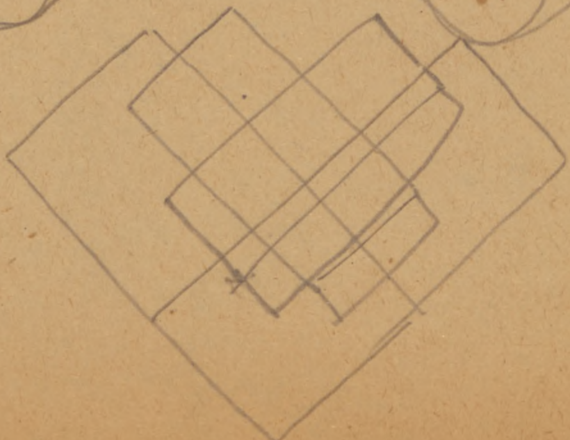
1 1 1 1
2 2 2 2 2 2
3 3 3 3
4

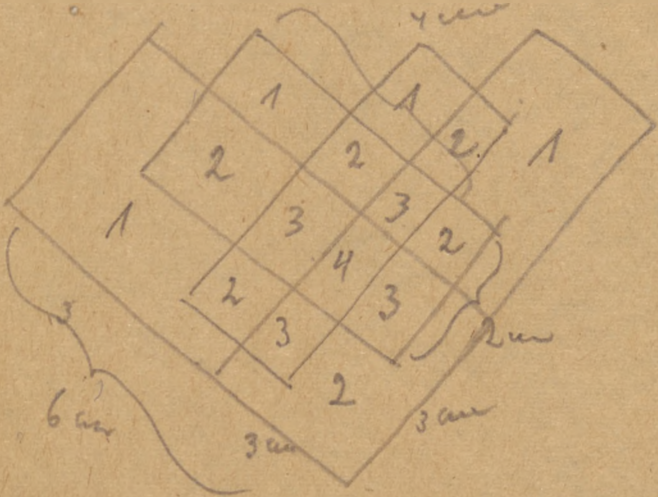
$a = 1+2+2+2+3+3+3+4$

$b =$

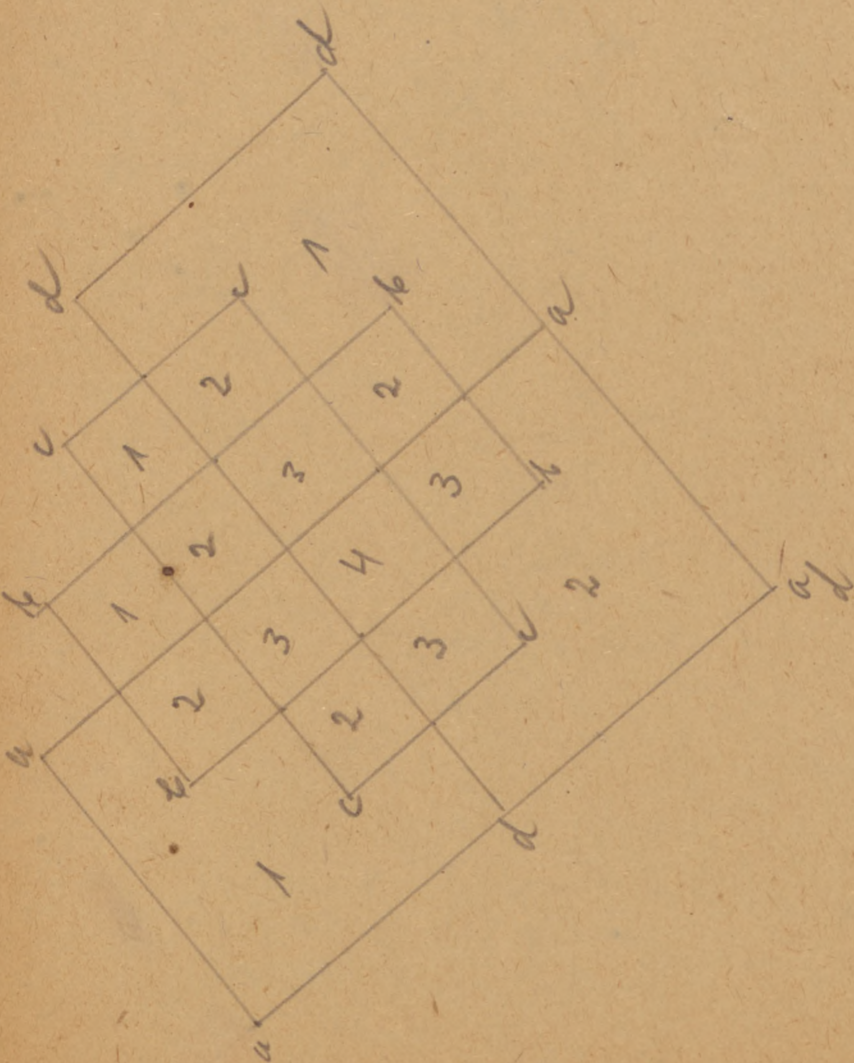
a, ab, ac, ad, abc, abd, acd, abcd







4 cm
2 cm
3 cm
3 cm
6 cm
3



Logika a) dla III. r. chemii

ćwiczenia - nawiązanie do Mgr. Kubika Moczyg.

b) dla I. r. historii (wykład łączne z ćwiczeniami)

c) dla I r. filozofii (ćwiczenia - poza do omówienia) Mgr. Gumański

Skrypt - słuchanie wykładów notowanie - interpelacje. -

Czemu służą wykłady logiki?

Logika należy do grupy teorii nauk

(przyrod.-poza., socjol. więcej, gnoseol. lub ćwiczeń. nactotał. nauk) logika - stosowane nauk.

Układ twierdzeń nauk. - związki niesprzeczn. uzasadn.

Przegląd wykł. Uwaga histor. Podst. wiadom. z przyrod.

T. zas. niesp. cz. I, Aryst. 384-322

" wyw. " Chryzypp ok. 280-205

" wyłącz. " II. Sextus III w. po Chr.

Galileusz 1564-1642. Franc. Bacon 1561-1626

Descartes (1596-1650) J. Łukas. 1878-1956

Gius. Peano 1858-1932 St. Leśn. 1886-1939.

Gottl. Frege 1848-1925

B. Russel 1872 Pr. 1910

9) Darapti

MaP

MaS

SiP

SkP

10) Felapton

MeP

MaS

SoP

Sk-P

11) Disamis

MiP

MaS

SiP

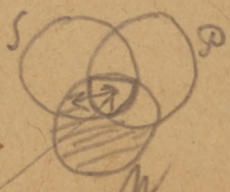
MSP.

12) Datisi

MaP

MiS

SiP



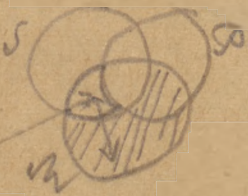
SMP

13) Bocardo

MoP

MaS

SoP



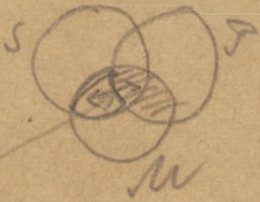
SM-P

14) Ferison

MeP

MiS

SoP



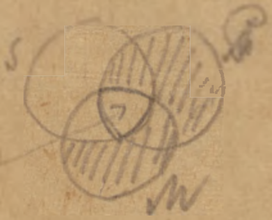
SM-P

15) Bamalip

PaM

MaS

SiP



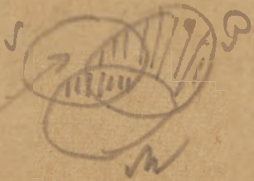
SMP !!

16) Calemes

PaM

MeS

SeP



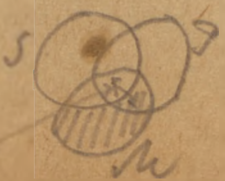
S-M-P

17) Dimatis

PiM

MaS

SiP



SMP.

Zdania kategoryczne. obwarunkowe.

[illegible] [illegible] [illegible] „[illegible] [illegible]"

Podział według jakości - ilości

Dystrybutywne, kolektywne, [illegible], [illegible] - [illegible]

Zd. kategoryczne a stosunki między pojęciami

~~Definicje~~

~~[illegible] [illegible]~~

~~nominalne realne ([illegible])~~

~~przez [illegible] przez abstr.~~

~~anal. synt.~~

Definicje

równoznaczne — nieścisłe

Terminów — zdań (użyteczne) — przykł. — przez abstr.

nomin. — realne (rzecz.) — nowe — stałe

anal. synt.

Logika jako część teorii nauk.

Psychologia poznania – myśl i język.

Teoria związków międzyzdaniowych – wnioskowanie

Teoria związków wewnątrzzdaniowych.

Składniki zdania – rodzaje zdań ze względu na ich składniki

Zdania subsumujące.

Terminy – stosunki między terminami.

(Stos. między zakresami.)

Stosunki orzekania – predykabilia

Systematyka nazw. Generalizacja i klasyfikacja

Kryt. argum. Błędy i sofizmaty.

Rodz. wyjaśnień. Poj. nauki i teorii.

5. z historii logiki

Projekt planu badań ~~logicznych~~ na rok 1955.

Historia logiki w Polsce

A) Monografie

a) ~~Odrodzenie~~ wiek XVI i XVII.

b) wiek XVIII.

c) wiek XIX.

" XX.

d)

B) Materiały (badania archiwalne)

Pomniki historii logiki

1) logika starożytna i średniowieczna.

2) " nowożytna

3) " współczesna (w XIX i XX w)

B) Materiały.

W myśl wskazań do perspektywicznego planu .... projekt planu badań ... 1955 winien uwzględniać w następującej kolejności:

I. Bibliografie i inwentaryzacja źródeł;

Badania archiwalne (praca zespołowa.)

II, C. ~~Inne~~ Prace informacyjne i popularyzacyjne

W-RL 26. 3. 58 65

Pozn. – Defin. wyjątkowe – zastosowanie

Redukcja różnych rodzajów defin.

Defin. równościowa – ... na defin.

Przez aksjomaty

1) Jeż. C leży między A i B, to i m. B i A.

2) Z trzech punktów ABC, jeden leży między.

3) Każdy punkt od danego ... odcinka –

jeżeli między to równa

... leży między – to do jednego należy

Def. przez abstr. przez indukcję –

rozmaitych ... – ... punkt.

Uwaga –

Definicje

rozumowe

nazwowe

Tarski

wyjątkowe

aksj.

abstr.

konw. realna

[illegible] realna

[illegible]

[illegible] [illegible]

1) [illegible] [illegible] [illegible]. (6 - 26)

2) [illegible] (20)

3) [illegible] (21)

[illegible] = [illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible] = [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible].

Arystoteles 384-322

Chryzyp 280-205

Galileo Galilei 1564-1642

Francis Bacon 1561-1626

René Descartes 1596-1650

Giuseppe Peano 1858-1932

Gottlob Frege 1848-1925

Bertrand Russell 1872

Jan Łukasiewicz 1878-1956

Stan. Leśniewski 1886-1939

David Hume 1711-1776

67

Poznawcze zjawiska psychiczne.

1) Przekonania

a) jakość b) wartość, c) przedmiot, d) istnienie

Określenie przedmiotów.

Podstawa przekon. (wraz. Rozumowania)

przedstawienie

Wyobrażenia Pojęcia

a) naoczne (wiz.), bezp. i całość. – nienaoczne
wyob. i abstr.–

b) konkretne – abstrakcyjne

c) ogólne. – jasne i wyraźne
nieadekw.– –

d) w. i p. to sposoby przedstawiania tych samych przedm.

e) konkretność a jednostkowość.
cały indywidual.

Podmiot wyobrażeń. Podmiot pojęć.

Przedst. jako podstawa i materiał przekonania.

Przekon. empiryczne i analityczne.

Oczywistość przekonań. –

Myśl i język. Subjektywność, oczywistość

c) przenośność d) abstr. i treść e) intencjonalność.

Język –

63

Jadeum

Créroute

Zbadej dokazování sylogismu:

· Každá figura formálně jest odůvodněna

- žádná logická pravidla nejsou jejich barevná

žádný logický prostředek. nejsou tedy odůvodněny

M a P

S e M

(Slov. T. Dr. I sv. 117)

Orzec o podanych niżej nazwach czy są:

a) ogólne czy też jednostkowe
b) zbiorowe czy dystrybutywne
c) konkretne czy abstrakcyjne.
d) pozytywne, negatywne czy prywatywne.
e) absolutne czy względne.

Matematyki
Książka
Księgozbiór
Izba Deputowanych
Pieniądz
[illegible]
Praca
Niewinność
Łódź
Przyrodzenie
Niemiłość
Rekrut
Flora
Niezdolność
Ciepło
Drzewo
Czerwony
Zastosowanie

Jednostka
Tom
Sędzia
Dwór
Inteligencja
Miasto
Obecność
Język
Minister
Ameryka
[illegible]
[illegible]
[illegible]
Niezręczny
Świeca
Nieskończoność
Ciężkość
Harmonia

Dziecko
Brudny
Mowa
Uprzejmość
Gleba
[illegible]
Niewidomy
Logika
Rozum
Geologia
Porównanie
[illegible]
[illegible]
Aleksander

(wg. Jevonsa Lekcje str. 287.)

a/ Jakie [illegible] wiążą się z takimi terminami:

Władca, [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], pomnik, [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], polityk, [illegible], [illegible].

b/ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] terminami?

Nie wszystko złoto, co się świeci. 13

„Nie" - negacja zdaniowa

„wszystko" - kwantyfikator ogólny.

$\sim (x) . (x \text{ świeci się} \supset x \text{ jest złotem})$

Gestade nie 2663 w [illegible]. 2.

(Wyraz uwidoczniony jest [illegible] między tymi [illegible] a liczbą wyrazową, jest- nadto [illegible] w oddzieleniu [illegible] - Cavneo. Abr. d. L. str. 404)

2663 (jest najwyższy [illegible]) Entdecker R

Wyraz [illegible] $=$ 2663.

R' Entd. $=$ 2663.

3.75

Sądzę, że mnie odrzucisz

= Życzę uwolnienia p i p rozwija się odmiennie

„odrzucenia mnie

Ja życzę uwolnienie p = R jiż p

p rozwija się odmiennie „odrzuci mnie" = Sp „–"

Sądzę że mnie odrzucisz R; S jiż „–"

Prawdopodobnie będzie dana rzecz

Twierdzę tylko względem p, że prawdopodobień-stwo zdania „b. dana rzecz" jest większe od prawdopodobieństwa jego negacji

$$(\exists p).(P_{pq} > P_{p\bar{q}})$$

57

<u>Mogę wyjechać do Lublina</u>

= Nieprawda, że istnieje świadectwo p, które wyklucza, że q (= wyjazd do L.).

$\sim(\exists p).(p \supset \sim q)$

Przypuszczam, że wszystko do [illegible] V2

= Sądzę, że wolno (jest możliwe, że) op. d. q.

(por. 3, 5)

R; S jest $[\sim(\exists p).(p \supset \sim q)]$

Syll. dowodu:

„Wiem to na pewno, że jestem rzeczą myślącą — czyż więc wiem także, czego mi do tego potrzeba, abym był czegoś pewny? Otóż w tym pierwszym poznaniu nie jest niczem innem, jak jasnem, pewnem i wyraźnem uświadomieniem tego, co twierdzę. Nie wystarczyłoby to wcale do tego, aby mnie upewnić o prawdziwości jakiejś rzeczy, gdyby się mogło kiedyś zdarzyć, żeby coś, co tak jasno i wyraźnie sobie uświadamiam, było fałszem. Więc zdaje mi się, że mogę jako ogólną ustanowić regułę, że wszystko to jest prawdą, co całkowicie jasno i wyraźnie sobie przedstawiam. (Desc. Medit. de pr. phil. III.)

Jaki jest schemat rozumowania w ~~powyższym~~ wywodzie?

I Gdyby się mogło zdarzyć, żeby coś, co tak jasno i wyraźnie sobie uświadamiam było fałszem, to nie wystarczyłoby to do tego, aby mnie upewnić o prawdziwości jakiejś rzeczy.

II To pierwsze poznanie nie jest niczem innem, jak pewnem jasnem i wyraźnem uświadomieniem tego, co twierdzę,

---

Wszystko to jest prawdą, co całkowicie jasno i wyraźnie sobie uświadamiam

I Jeżeli niektóre a nie są b, to żadne a nie jest c

II Niektóre a jest c

Każde a jest b.

Objaśnić rozumowanie:
„Jeśli wiem, że umrę, to umrę (bo wiedza ex definitione jest prawdą); jeśli wiem, że umarłem, to nie umarłem (umarły bowiem nic nie wie, a więc nie wiem, że umarłem)."
(Origenes, Contra Celsum, cyt. Łukasiewicz, Z hist. logiki zdań, Przegl. fil. 1934, str. 427).

p/ „wiem, że umarłem" q/ „umarłem"

CKCpqCpNqNp
(Łuk. El. l. mat. 55).

prawdziwie
dowodnie. –

Objaśnienie [illegible]: 29.

Konsekwencje. „Sokrates biegnie i Sokrates nie biegnie, a więc [illegible] biegnie" jest formalnie trafne. Z koniunkcji bowiem „Sokrates biegnie i Sokrates nie biegnie" wynika w konsekwencji formalnej zarówno zdanie „Sokrates biegnie" jak zdanie „Sokrates nie biegnie". Ze zdania „Sokrates biegnie" wynika znowu w konsekwencji formalnej dysjunkcja (NB: [illegible]) „Sokrates biegnie albo [illegible] biegnie". Z dysjunkcji tej oraz z negacji jej pierwszego członu otrzymujemy znowu

w [illegible] formalnej [illegible] „jeżeli dzień to jasno"
([illegible] Quaest. s. nat. ks. II, 3, wedł. Łukas.
Z hist. logiki zdań. P.F. 1934 str. 434).

p/ świeci słońce q/ jest jasno.

a) KpNp

1 CKpq-p

1 q/Np × Ca-b

b) p

2 CKpqq

2 q/Np × Ca-c

c) Np

3 CpApq

3 × Cb-d

d) Apq

4 CApqCNpq

4 × Cd-c-e

e) q

(Łukas. El. log. mat. 106 CKpNpq)

(Tremposzyzi) 10. 82

Předsevzetí: „Jestli vezmu večeř, tak dej obětu" I.

Udržování: II „Jestli dej ne ob. tak [illegible]!

Zvažu. [illegible]: 1.) [illegible]

1 p/ vezmu večeř, 9/ dej obětu × c II - IV

II

11.83

<u>Chociaż</u>: „p chociaż q" = „q i p i to, że q wzbudza rozsądny domysł, że nie-p"
(Kotarb. Elem. str. 208.)

„to, że q" = przekonanie wywołane danym „q"
(według $\overrightarrow{W}$ „p" - Carnap Abr. d. Log. 14)

„rozsądny domysł, że ~p" = $\overrightarrow{W}$ „~p"

wzbudza = jest następstwem (Nast)

„p chociaż q" = K K p q (Nast $\overrightarrow{W}$ „q" $\overrightarrow{W}$ „~p")

84/12

Wprawdzie... jednak: „wprawdzie p, jednak q" = „p i q, i to, że p wbrew mniemaniu rozs. drugiego, że nie q" (Kotarb. Elem. str. 208).

„wprawdzie p, jednak q" =

$$KKpq\,(\mathrm{Mot}\,\vec{W}\text{„}p\text{"}\,\vec{W}\text{„}Nq\text{"})$$

(tab. 11).

„Kto skrzywdzi sierotę, ten się sam pokarze"
(Carnap, Abr. d. Lg. str. 92 a)

kto/x skrzywdzić/R pokarać/S sierota/s

$(x). x R s \supset x S x$ J = identyczność

$J \upharpoonright \overrightarrow{R}{}^{\text{c}}s \mathrel{\dot{\subset}} S$ (wówczas $J \upharpoonright \overrightarrow{R}{}^{\text{c}}s$ jest węższe od S).

8/13.

Kdo pak knih dostí kajíce, sám v ní najde.

Kdo / x koupí od kněze / R vydání / S dotčený / d.

$(x) / x R d \supset x S d$

$\vec{R}`d \supset \vec{S}`d$

(nesmíme však míchat vztah $R \subset S$, když d není jen jménem vzoru).

$\overset{?}{?}$ 14,

Mamy wspólnego przyjaciela.

(Carnap Abr. d. Log. nr. 93.)

Zdanie owo może mieć dwojakie rozumienie:

a) ów wspólny przyjaciel jest jedynym przyjacielem ~~każdego~~ z nas;

przyjaciel / P   jest / a   [illegible] / b

$$P'a = P'b$$

b) ów przyjaciel nie jest jedynym przyjacielem każdego z nas:

$(\exists x) . xPa . xPb$ albo:

a P̌; Pb

(jā jāsān [illegible] Frag. [illegible]).

88/5

Chyba, że

Nie zdążymy do pociągu, chyba że się spóźni

= jeżeli pociąg nie spóźni się, nie zdążymy do p.x)

p chyba, że q = jeżeli nie q, to p.

Będzie deszcz, chyba że wiatr zmieni się

= jeżeli wiatr nie zmieni się, będzie deszcz.

x) Lecz jest mało prawdopodobne, że się spóźni. –

8/6.

Gdyby [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
= jeżeli niektóre [illegible] [illegible], lecz nie
niektóre;

Gdyby p, to q = jeżeli p, to q, lecz nie p.

ad 17.

Jeżeliby deszcz padał, wówczas będzie odwołanie

= Jeżeli będzie deszcz padał, wówczas będzie odwo-łanie – i może będzie deszcz padał

Jeżeliby p, to q" = ~~$KCpq(\exists r).Crnr$~~

$KCpqN(\exists r)CrNp$

(por. 5)

Zawdzięczamy postawie więcej [illegible]
i uwadze jego [illegible]:
... Jeżeli mówimy: „Nasze przedstawienia muszą być prawdziwe, aby zbudowane na nich postępowanie było pożyteczne" – to nie widzimy dla prawdziwości naszych przedstawień innego dowodu, jak tylko korzystny [illegible], którego doznajemy przez oparte na nich działanie.
(Simmel. Üb. e. Bez. d. Selektionslehr. zur Erk.-Th. cyt. wg. [illegible] 47) –

= Tylko jeżeli wsze przedm. się przyznaje, ogólne
ma więc rozwiązanie jest prawdziwe
= Jeżeli n. przedm. nie są wyznacz., ogólnie na siebie
wiążą. nie jest ważne.
≡ Jeżeli ogólnie ma wszy przedm. wszystk. jest ona,
to są one względne.
≡ Wszystkim przedmiotom jest właściwe

autor twierdzi, że jedynym wszystkim wspólne
jest wszyst., co nie wynika z porównania. –

jednorodne
~~jednakowe~~ podniety /np. dwie podniety wzrokowe lub dwie podniety słuchowe/ o różnych intensywnościach p_1 i p_2; według ~~prawa~~ wzoru Fechnera powstające dzięki nim wrażenia posiadają intensywności $w_1=k\log p_1+c$ oraz $w_2=k\log p_2+c$. Współczynniki k i c dla wrażeń tego samego zmysłu u jednej i tej samej osoby są stałe, przeto różnica intensywności wrażeń $w_2-w_1=k/\log p_2-\log p_1/$. Przypuśćmy, że ~~że~~ intensywność obu podniet zmienia się w jednakowym stosunku /np. proporcjonalnie do kwadratu ~~zmiany~~ odległości przy zbliżaniu się lub oddalalniu się źródła światła lub głosu/. Niech n będzie współczynnikiem, określającym ów stosunek /przy n całkowitem intesywność wzrasta, przy ułamkowem maleje/. Wskutek tej zmiany wrażenie w_1 przechodzi na $w_1'=k\log np_1+c$, w_2 zaś na $w_2'=k\log np_2+c$.

Różnica $w_2'-w_1'=k(\log np_2-\log np_1)=k(\cancel{\log n}+\log p_2-\cancel{\log n}-\log p_1)=w_2-w_1$

c. b. d. d.

Prawo Webera-Fechnera stwierdza, że próg różnicy jest proporcjonalny do siły działającej podniety. Niech w_o będzie wrażeniem progowem, d zaś ledwie dostrzegalnym przyrostem intensywności wrażenia. Ułóżmy szereg wrażeń, których intensywności różnią się ledwie dostrzegalnym przyrostem:

/A/ w_o, $w_1=w_o+d$, $w_2=w_o+2d$, ... $w_n=w_o+nd$

Niech p_o oznacza podnietę progową, r zaś niech będzie współczynnikiem proporcjonalności, który określa próg różnicy. Szereg podniet, którego kolejne wyrazy odpowiadają wyrazom szeregu wrażeń /A/, jest następujący:

/B/ p_o, $p_1=p_o+rp_o=p_o/1+r/$, $p_2=p_1+rp_1=p_1/1+r/=p_o/1+r/^2$, ... $p_n=p_o/1+r/^n$

Eliminujemy z równań $w_n=w_o+nd$ oraz $p_n=p_o/1+r/^n$ wyraz n, aby otrzymać związek między w_n oraz p_n; związek ten, gdy opuścimy wskaźniki n przy wyrazach zmiennych w i p, ma postać następującą /wzór Fechnera/:

$$w = k \log p + c$$

parametry k i c zawierają jedynie wyrazy stałe w_o, p_o, d, r.

Jednem z następstw prawa Fechnera jest, że jeżeli intensywność dwóch podniet zmienia się w jednakowym stosunku, to różnica intensywności wrażeń pozostaje niezmieniona; a zatem stosunki intensywności barw, dźwięków itp. pozostają niezmienione bez względu na to, czy jesteśmy bliżej lub dalej od źródła światła lub głosu. Aby udowodnić to twierdzenie, załóżmy, że na pewną osobę działają dwie

Aksjomatyzacja trójwartościowego rach. zdań

(dowód niezależn. i zupełności)

Sprawozd. T.N.Warsz. Wydz. III

R. XXIV. 1931 z. 2-6

Wajsberg.

Niesprzeczność, niezal. zupełność T. dedukcji

Łukas. Elementy §§ 6, 7.

Sprowadzenie aksjomatyki teorii dedukcji

do jednego aksjomatu.

Sobociński: Z badań nad teorią dedukcji

Przegl. fil. XXXV str. 188 (Odb. str. 20)

ustęp 5.

Przedstawić dowody twierdzeń z Teorji dedukcji (Whitehead-Russell, Principia Mat. I *1-) w symbolice beznawiasowej i nadać im postać dowodów założeniowych.

Aksjomatyka logiki klasycznej

(Łukasiewicz, Elementy, str. 170 i nast.

Sprowadzenie aksjomatyki Teorji dedukcji do układu aksjomatów Tarski-Bernays i definicji negacji przez kwantyfikator ogólny.
(Łukasiewicz, Elementy str. 163 i nast.)

Zasada dwoistości —

Prawa Poretskiego – form – teorji – [illegible] —

Stosunki opozycji między zdaniami kategorycznymi

	Podrzędn.	Równow.	Nadrzędn.	Niezal.	Podprzec.	Sprzeczn.	Przeciw.
SaP							
SeP							
SiP							
SoP							
Sa'P							
Se'P							
Si'P							
So'P							

Pełny kwadrat logiczny da się zbudować ~~tylko~~ dla zdań aeio ~~oraz~~ a'e'i'o'. I Zdania aa'ii' oraz ee'oo' dają kwadraty, w których na miejscu sprzeczności występuje niezależność.

V aa'o'o, ee'i'i

Zdania przeciwne:

a-e, a-a', a'-e', e-e' (1-4)

Zdania podrzędne:

a-i a'-i' e-o e'-o'
a-o' a'-o e-i' e'-i (5-12)

Zdania podprzeciwne

i-o, i-i', o-o' o'-i' (13-16)
i-i'

Zdania sprzeczne:

a-o e-i a'-o' e'-i' (17-20)

Zdania niezależne:

a-e' a'-i e-o' e'-o (21-28)
a-i' a'-e o-i' i-o'

Razem zestawień $\frac{8(8-1)}{2} = 28$

Stosunki przeciwieństwa, podrz., podprzeciw-
nieństwa. mogą być jednoznaczne
jedynie [illegible] [illegible] [illegible].

Algebra logiki. I

Rozwinięcie funkcji logicznych.

(Couturat, L'alg. de la log. str. 28 i nast.)

1. Podstawowym procesem w alg. logiki Boole'a i jej następców jest proces rozwijania wyrażeń logicznych na sumy lub iloczyny. ~~argumentów~~. Załóżmy, że mamy terminy a, b, c ... w jakiejkolwiek skończonej liczbie; terminy 0 i 1 rozwijają się ze względu na te terminy a, b, c ... i ich negacje według następujących wzorów, ~~...~~ wynikających z praw rozdzielności:

(1)
$$\begin{cases} 0 = aa' \\ 0 = aa' + bb' = (a+b)(a+b')(a'+b)(a'+b') \\ 0 = (aa' + bb' + cc') = (a+b+c)(a+b+c')(a+b'+c) \\ \quad \times \cancel{(a+b+c')}(a+b'+c')(a'+b+c)(a'+b+c')(a'+b'+c)(a'+b'+c') \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} 1 = a+a' \\ 1 = (a+a')(b+b') = ab + ab' + a'b + a'b' \\ 1 = (a+a')(b+b')(c+c') = abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc \\ \quad + a'bc' + a'b'c + a'b'c' \end{cases}$$

Tj. – Wogóle, dla n terminów a, b ... 0 rozwija się na iloczyn ~~liczby~~ 2^n czynników, a 1 na sumę 2^n dodaj-

ników. Czynniki 0 są wszystkimi zestawieniami ~~kombinacjami~~ samo-
w danych terminów i ich negacji, a dodajniki 1 są uzu-
pełnieniu wszystkimi zestawieniami ~~kombinacjami~~ takiemi wszystkich ilo-
czynów, przyczem każde ~~kom~~ zestawienie zawiera w termi-
nów przyjętych, wśród których mają nie występo-
wać równie termin i jego negacja.

Dodajniki ostateczne 1 mogą bowiem konstytuentami
uniwersum logicznego. Można je też nazwać (Platon Porec-
ki) minimami w uniwersum, ponieważ są one naj-
mniejszymi klasami, na które dzieli się uniwersum
w danych terminach. Podobnie czynniki ostate-
czne 0 mogą być nazwane maximami uniwersum
jako najwyższe klasy, jakie dają się wyznaczyć w uni-
wersum przez w danych terminów.

Konstytuenty posiadają dwie własności charakterystyczne
dla całości rozumowego rodzaju logicznego, mianowicie
~~się~~ wyłączają się wzajemnie, tzn. iloczyn którychkolwiek
dwóch z pomiędzy nich jest zerem, zaś suma ich wyczer-
puje uniwersum. Maxima uniwersum posiadają wła-
sności korelatywne według zasady dualizmu: suma dwóch

tiektą Tamstoms Apkoopsąjungų ir jų ein.s-tų sąrašą, tai prašome Tamstas Apkoopsąjungoms patiekiamose s-tose skaityti už toną:

a)už kalv. anglis - Rb.109.70 franco vag. Lūšė.

b) už antracitą - Rbl. 86.35 franco vag. N. Vilnia.

Rubl. 1.80 (109.70 - 107.90) už toną kalviškų anglių ir Rubl.1.65 (86.35 - 84.70) už toną antracito prašome įnešti kiekvieno mėnesio gale į L.R.V.K.S-gos ein. s-tą Valstyb. Banke Kaune Nr.91008.

LIETKOOPSĄJUNGA
Kolonialinių Prekių Skyrius

GAUTA
1941.III.2[illegible]
Atsakyta

1/IV

[illegible]

$f(x) = (ax' = 0)(b + x \neq b) = Ax + Bx'$

$f(1) = (0 = 0)(b + 1 = b) = 0$

$f(0) = (1 = 0)(b = b) = 0$

$(a < x)(x < b)$ $[(ax' = 0)(x' + b = 1)]$

$(ax' = 0)(x' + b = 1)$

$f(1) = (0 = 0)(0 + b = 1) = (b = 1)$

$f(0) = (1 = 0)(1 + b = 1) = 0$

$[(ax' = 0)(x' + b = 1)] = [(b = 1)x]$

Ad str. 3. ,

F W rozwiązaniu 1 suma dowolnej liczby komutatorów jest nadal sumą przemiennych. Istotnie, dodając obie te sumy otrzymujemy ~~tylko~~ oczywiście rozwiązanie 1, a mnożąc je otrzymujemy 0, ponieważ dowolne dwa komutatory różnią się między sobą najwyżej przestawieniem jednego z czynników – dając zatem 0 jako iloczyn.

którychkolwiek z nich jest równa 1, a tylko iloczyn wszystkich jest zerem. E

2. Funkcją logiczną nazywa się ~~każde~~ wyrażenie, zbudowane z terminów elementarnych przy pomocy trzech działań logicznych: dodawania, mnożenia i negacji. Funkcja logiczna ~~Wyrażenie takie~~ zależeć może w zasadzie nie tylko od terminów wymienionych w niej występujących, lecz także od jakichkolwiek innych terminów w uniwersum logicznym. Każdą funkcję logiczną można bowiem w sposób analogiczny jak w ust. 1, rozwinąć na konstytuenty względem każdego z terminów uniwersum.

Przypuśćmy, że rozwijamy funkcję $f(x)$ ze względu na x i ~~nich~~ że rozwinięcie ma postać $ax+bx'$, tak iż

$$f(x) = ax + bx'$$

dla wszelkich wartości x. Kładziemy $x=1$, a przeto $x'=0$, wtedy ~~otrzymujemy się~~ wynikają wartości współczynników rozwinięcia

$$f(1) = a \qquad f(0) = b,$$

$$(3) \qquad f(x) = f(1)x + f(0)x'$$

Funkcję dwóch argumentów x, y, rozwijamy wzglę-

…ów ze względu na x:

$$f(x,y) = f(1,y)x + f(0,y)x'$$

rozwijamy następnie każdy z tych członów ze względu na y:

$$(4)\quad f(x,y) = f(1,1)xy + f(1,0)xy' + f(0,1)x'y + f(0,0)x'y'$$

Podobnie otrzymamy rozwinięcie funkcji 3, i większej liczby zmiennych, przyczem prawo ogólne rozwinięcia brzmi, jak następuje:

Aby rozwinąć funkcję ze względu na n zmiennych, tworzymy wszystkie kombinacje tych n zmiennych, i każdą z nich mnożymy przez współczynnik równy wartości, którą przybiera funkcja, gdy podstawimy w niej 1 za każdą zmienną, która występuje w danej kombinacji bez negacji, a 0 za każdą zmienną zanegowaną.

W szczególności jeżeli $f(x) = a$, t. zn. ~~…~~ jeżeli funkcja nie zależy od zmiennych, według których ją rozwijamy, otrzymuje się na kolejne rozwinięcia:

$$(5)\quad \begin{aligned} a &= ax + ax' \\ a &= axy + axy' + ax'y + ax'y' \\ a &= axyz + axyz' + axy'z + axy'z' + ax'yz + ax'yz' + \\ &\quad + ax'y'z + ax'y'z' \end{aligned}$$

(Te ~~wzory~~ wzory można też otrzymać bezpośrednio, mnożąc przedtem ~~…~~ podstawiając wzorem 6, obie strony rozwinięcia 1 bierze a.

Przykłady: a) Rozwinąć funkcję $(a+x')(b+x)$ ze względu na x; mamy $f(1)=(a+0)(b+1)=a$

$$f(0)=(a+1)(b+0)=b$$

zatem

$$(a+x')(b+x)=ax+bx' \qquad (6)$$

co można sprawdzić bezpośrednio wykonując wyłącznie mnożenie, a następnie rozwijając jej wynik według x:

$$(a+x')(b+x)=ax+bx'+ab=$$
$$=ax+bx'+abx+abx'=(a+ab)x+(b+ab)x'=ax+bx'$$

b) Rozwinąć funkcję $ax+bx'+c$ według x:

$$f(1)=(a+c) \qquad f(0)=(b+c) \quad \text{więc}$$

$$ax+bx'+c=(a+c)x+(b+c)x' \qquad (7)$$

co można sprawdzić, rozwijając termin c według x

$$ax+bx'+c=ax+bx'+cx+cx'=(a+c)x+(b+c)x'$$

według ~~ostatniego~~ przyjętej przykładów można również funkcję rozwinąć (uważanej za funkcję x) według samej siebie i zastosować do wzoru, który zresztą tego nie zmienia.

3. Przy pomocy rozwinięcia funkcji można każdą sumę przekształcić na sumę, której wyrazy wyłączają się, t.zn.

pomnożone parami dają iloczyny równe 0. Niech będzie dana suma $a+b+c$, której wyrazy jak można przypuszczać nie wykluczają się. Rozwińmy każdy jej wyraz względem pozostałych i otrzymamy po uporządkowaniu:

$$a+b+c = abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' + a'b'c$$

Cztery pierwsze składniki tego rozwinięcia tworzą rozwinięcie a względem b i c; dwa następne są rozwinięciem wyrażenia $a'b$ względem c. ~~Prze~~ Mamy przeto:

$$a+b+c = a + a'b + a'b'c \qquad (8)$$

przyczem ~~te~~ składniki prawej strony wykluczają się wzajemnie. Łatwo, którą tu dokonamy, daje się wogóle, jest bowiem jasne, że aby wyczerpać bez powtarzania przedmioty, które są a lub b lub c, wyliczamy wyczerpująco wszystkie a, następnie b, które nie są a, następnie c, które nie są a i nie są b i.t.d.

Wyrażenie tak otrzymane nie jest symetryczne w stosunku do składników sumy $a+b+c$, gdyż zależy od kolejności, w której bierzemy pod uwagę te składniki, tak iż otrzymać możemy jako wyrażenie równoważne trzecia sumy: $b+ab'+a'b'c$, $c+ac'+a'bc'$ i t. p.

Naodwrót, aby uprościć wyrażenie będące sumą pewnych składników do prostszej postaci, wolno, wypisawszy oddzielone uprzednio tych składników, skreślić w każdym z nich, ~~wszystkie~~ te czynniki, które są negacją któregokolwiek z (składników) przeciwnych sumy. Możemy w ten sposób przekształcić sumę na wyrażenie o budowie symetrycznej, złożone już z składników itp.

$$a+a'b=b+ab'=a+b. \qquad (9)$$

4. Rozwinięcia funkcyj logicznych posiadają następującą własność, która sprawia, że rozwinięcia te posiadają dużą doniosłość praktyczną w algebrze logiki:

Sumę i iloczyn dwóch funkcyj rozwiniętych względem tych samych terminów ~~jest funkcją tych~~ otrzymuje się dodając lub mnożąc odpowiednio współczynniki obu ~~składników~~ rozwinięć; negację funkcji rozwiniętej tworzy się negując współczynniki rozwinięcia. Okazać to można na przykładzie następującym, który łatwo uogólnić na dowolną liczbę terminów:

№5

Przypuśćmy, że dane są równania:

$$f_1(xy) = a_1 xy + b_1 xy' + c_1 x'y + d_1 x'y'$$

$$f_2(xy) = a_2 xy + b_2 xy' + c_2 x'y + d_2 x'y'$$

Jako sumę otrzymamy łącząc odpowiednie wyrazy wolnego i stosując prawo rozdzielności: (10)

$$f_1(xy) + f_2(xy) = (a_1+a_2)xy + (b_1+b_2)xy' + (c_1+c_2)x'y + (d_1+d_2)x'y'$$

Tworząc zaś iloczyn obu funkcji ~~według prawa rozdzielności~~ ~~dla~~ spostrzeżemy, że wszystkie iloczyny utworzone z różnych konstytuantów dają zero (bo różnią się między sobą przynajmniej jednym z czynników konstytuanty), ostaną się tylko iloczyny tych samych ~~[illegible]~~ konstytuantów, a współczynnikami przy nich są iloczyny odpowiednich współczynników obu funkcji:

$$f_1(xy)\, f_2(xy) = a_1a_2\, xy + b_1b_2\, xy' + c_1c_2\, x'y + d_1d_2\, x'y' \qquad (11)$$

$$= axy + bxy' + cx'y + dx'y'$$

Wreszcie negacja funkcji $f(xy)$ jest:

$$f'(xy) = a'xy + b'xy' + c'x'y + d'x'y' \qquad (12)$$

Dla sprawdzenia wystarczy stwierdzić, że ~~[illegible]~~ $f(xy) + f'(xy) = 1$ oraz $f(xy) . f'(xy) = 0$, czego dokonamy stosując otrzymane prawa dla sumy i iloczynu - okaże się, że współczynniki sumy iloczynu są wszystkie 0, współczynniki ~~[illegible]~~

sumy tej przy-wodzi 1, wobec czego odwracając-je się otrzymujemy 1.

Przykład:

Stosując ostatnie twierdzenie otrzymujemy wzory:

$$(ab+a'b')' = ab'+a'b \qquad (13)$$
$$(ab'+a'b)' = ab+a'b'$$

które można uważać za formuły de Morgana

Z poprzednich równości wynika dalej

$$(ab'+a'b=0) = (ab+a'b'=1)$$

~~[illegible]~~

Dodając się obustronnie do ~~[illegible]~~ równości $ab'+a'b=0$ sumę $ab+a'b$ ~~[illegible]~~ otrzymujemy po jej lewej stronie zawierające a każdy b, po prawej zawierające b każdy a, czyli przechodzimy do równości $a=b$. Otrzymujemy więc

$$(a=b) = (a<b)(b<a) = (ab'=0)(a'b=0) = (ab'+a'b=0)$$

Przez połączenie ostatniej równości z poprzednią otrzymujemy wzór

$$(a=b) = (ab'+a'b=0) = (ab+a'b'=1) \qquad (14)$$

Wzór ten pozwala dowolną równość $a=b$ przekształcić na równość, w której po prawej stronie jest 0 albo 1.

Wzór (14) pozwala udowodnić, co następuje:

$$(a=bc'+b'c)=(b=ac'+a'c)=(c=ab'+a'b) \qquad (15)$$

Równoważności ~~[illegible]~~

według (14) ~~i~~ i (13)

$$(a = bc'+b'c) = (a(bc+b'c')+a'(bc'+b'c)=0)$$
$$= (abc+ab'c'+a'bc'+a'b'c=0)$$
$$(b=ac'+a'c) = (b(ac+a'c')+b'(ac'+a'c)=0)$$
$$= (abc+ab'c'+a'bc'+a'b'c=0)$$
$$(c=ab'+a'b) = (c(ab+a'b')+c'(ab'+a'b)=0)$$
$$= (abc+ab'c'+a'bc'+a'b'c=0)$$

a zatem wszystkie trzy równości przedstawiają się jako to samo wyrażenie.

5. Jeżeli zachodzi podwójny związek $a<x<b$, to mówimy, że x jest zawarte między a i b, przyczem a jest kresem dolnym dla x, b kresem górnym.

Funkcja $f(x)$ ~~rozwinięta~~ $=ax+bx'$ według x jest zawarta między iloczynem i sumą współczynników rozwinięcia.

16) $$ab < ax+bx' < a+b$$

Jest bowiem, z jednej strony, (wobec $ab < a$ i $ab < b$)

$$\cancel{(ab < a)} < (abx < ax)$$

$$\cancel{(ab < b)} < (abx' < bx')$$

skąd $\quad ab(x+x') < ax+bx'$

α) $\quad ab < ax+bx'$

Z drugiej zaś strony, wobec $a < a+b$ i $b < a+b$

$$ax < (a+b)x$$

$$bx' < (a+b)x'$$

β) $\quad ax+bx' < a+b$

α i β łącznie dają dowód twierdzenia (16). Twierdzenie to można nadać postać

$$f(b) < f(x) < f(a)$$

ponieważ $f(a) = aa+ba' = a+b$

$$f(b) = ab+bb' = ab$$

Twierdzenie

(17) $\quad (x = ax+bx') = (b < x < a)$

nosi nazwę ~~for~~ formuły Poretskiego.

Mnożąc obie strony równości $x = ax+bx'$ przez x otrzymujemy $x = ax$ czyli $x < a$; ~~mnożąc~~ pomnożenie zaś obie strony przez x' daje $0 = bx'$ czyli $b < x$, więc:

$$(x = ax + bx') < (b < x < a)$$

Na odwrót:

$$(x < a) = (x = ax)$$

$$(b < x) = (bx' = 0)$$

skąd:

$$(b < x < a) = (x = ax)(0 = bx') < (x = ax + bx')$$

Twierdzenie:

(18) $$(ax + bx' = 0) = (b < x < a')$$

nosi nazwę Twierdzenia Schrödera.

Dowód:

$$(ax + bx' = 0) = (ax = 0)(bx' = 0)$$

$$(ax = 0) = (x < a')$$

$$(bx' = 0) = (b < x)$$

przeto $$(ax + bx' = 0) = (b < x < a')$$

Łącząc twierdzenia (17) i (18) otrzymujemy

(19) $$(ax + bx' = 0) = (x = a'x + bx')$$

Tw. 19 pozwala nadać równaniu zawierającemu niewiadomą x jedną lub drugą postać rozwiązania.

Równania logiczne

Alg. logiki II. **Równania logiczne.**

(Couturat, L'Alg. de la Log. 30, 36) (Schr. T.d. II. tw. 62)

Według tw. 7. można równanie logiczne o jednej niewiadomej x ~~przedstawić~~

$$ax + bx' + c = 0$$

przedstawić w ten sposób, by nie zawierało ono wyrazu wolnego. Przypuśćmy, że to zostało uczynione i weźmy pod uwagę równanie o jednej niewiadomej bez wyrazu wolnego

~~(1)~~ $$ax + bx' = 0 \qquad \text{I}$$

~~Udowodnimy, że~~ Tw. (18) ustala równoważność ~~(1) ax + bx'~~ między tem równaniem i ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ warunkiem $b < x < a'$:

$$(ax + bx' = 0) = (b < x < a')$$

Założenie $b < x < a'$ ma za następstwo $b < a'$
równość ta czyli rezultant eliminacji x
czyli $ab = 0$; jest to warunek konieczny rozwiązalności równania $ax + bx' = 0$, ponieważ przez rozwiązalność rozumiemy istnienie takiej wartości x, dla której równanie to jest prawdziwe; gdyby bowiem rezultant ~~[illegible]~~ był fałszywy ~~[illegible]~~, to także równanie

$ax + bx' = 0$

LIETUVOS RESPUBLIKINĖ
VARTOTOJŲ KOOPERACIJOS SĄJUNGA

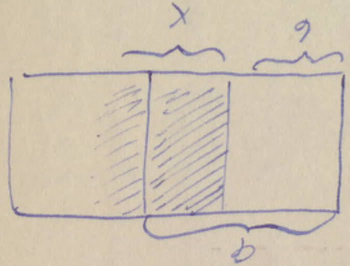
Kolonialinių prekių SKYRIUS

ЛИТОВСКИЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
СОЮЗ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ОБЩЕСТВ

ОТДЕЛ

Tel. 20171
M/ženklai I-K/Fl.

Kaunas, 1941 m. kovo mėn. 14 d.
~~[illegible]~~ Stalino pr. 59 Nr.



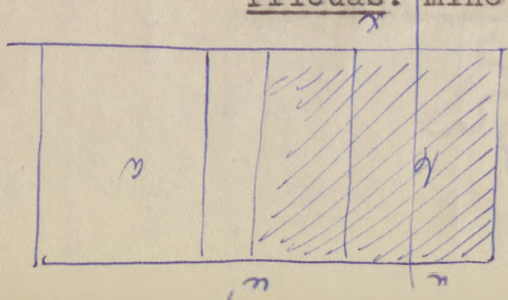
Vyriausiajai Kuro Valdybai
Anglių Kontorai

K a u n a s

Žiemos Uosto

Grąžiname Tamstų s-tas Nr.Nr. 2352 ir 2642 kaip ne mums priklausančias.

Priedas: minėtos.



$x = b + a'x$

$x = a'u + bu'$

$x = b + a'u$

$x = a'(bu)$

LIETKOOPSĄJUNGA
Kolon.a.inių Prekių Skyrius

Poeliant.

jako rząd jej musiałby być przy wszelkich wartoś-
ciach x fałszywe.

Przekształćmy rozważane równanie w myśl (19) na wyrażenie

(A) $x = a'x + bx'$ (jak to było poprzednio)

Wprowadźmy w nie warunek $b = a'b$, wyrażający z rezultant, $ab = 0$

$$x = a'x + bx' = a'x + a'bx' = a'bx + a'b'x + a'bx' =$$

$$= a'b + a'b'x = b + a'b'x = b + a'x$$

tożsame z (A)

(A') Wyrażenie $x = b + a'x$ [możemy uważać za rozwiązanie równania (A); [wartość x zawiera się między b jako dolnym i a' jako górnym]; twierdzi ono, że x jest sumą b i pewnej części a', co jest inną formą stwierdzenia, że ⟨ ⟩. Rozwiązanie jest zatem nieokreślone i ~~staje~~ przestaje nim być tylko w przypadku, gdy oba kresy są identyczne. $a' = b$; wtedy:

$$x = b + a'x = b + bx = b = a'$$

Rozwiązaniu równania (~~A~~) (A') możemy nadać pod warunkiem, że $ab=0$, jeszcze formę odmienną, mianowicie

(B) $\qquad x = a'u + bu'$

gdzie u jest terminem nieokreślonym.

Przekształcamy (B) według (14):

$$x(a'u+bu')' + x'(a'u+bu') = 0$$

~~[illegible]~~ $\qquad$ lecz $(a'u+bu')' = au + b'u'$

co łatwo sprawdzić, gdyż $(au+b'u')(a'u+bu') = 0$

$$a'u + bu' + au + b'u' = 1$$

przeto

$$x(au+b'u') + x'(a'u+bu') = 0$$

$$axu + b'xu' + a'x'u + bx'u' = 0$$

$$u(ax+a'x') + u'(b'x+bx') = 0$$

To ostatnie równanie możemy uważać za równanie o postaci (A), gdzie u jest niewiadomą, a współczynnikami $ax+a'x'$ oraz $b'x+bx'$. Otrzymamy rezultant

$$(ax+a'x')(b'x+bx') = 0$$

$$ab'x + a'bx' = 0$$

Według (18) zachodzi równoważność

$$(ab'x + a'bx' = 0) \equiv (a'b < x < a'+b)$$

Lecz rozważamy jest warunek $ab=0$, przeto

$$(ab=0) = (a'b = b) = (a'+b = a')$$

wobec czego otrzymujemy, że z równości (B) wynika $b < x < a'$

że wiersz (18) jest równoważne z równaniem (A). Jeżeli zamiast x wstawić rozwiązanie (B), to otrzymamy jest zawsze spełnione równanie (A) czyli (B) jest rozwiązaniem równania (A).

Rozwiązanie (B) przyjmuje także formy bardziej proste

$$x = b + a'w \qquad (C)$$

$$x = a'(b+u) \qquad (D)$$

Z warunku $(b < a')$ wynika, że $bu < a'w$

czyli $a'u = bu + a'w$; zatem wolno napisać

$$x = bu' + a'u = bu' + bu + a'u = b(u+u') + a'w$$

i ostatecznie ~~a zatem~~ $x = b + a'u$

Z warunku $b < a'$. wynika też $a'b = b$, zatem

$$x = \cancel{bu' + a'u = a'bu' + a'u} = b + a'w = a'b + a'w$$

$\cancel{= a'(b+u}$; i ostatecznie $x = a'(b+u)$

Każda z postaci (B), (C), (D) daje pełne rozwiązanie (A) i (A) nieograniczenie wiele wartości na x, gdyż u może mieć dowolną z wartości 0, 1.

dla $u=0$ jest $x=b$, dla $u=1$ jest $x=a'$;

czyli to dwie końcowe wartości dla x.

Przykłady:

1) Zagadnienie Boole'a (Słow. T. dow. II str. 70)

Bierzemy pod uwagę pięć klas a, b, c, d, e i zakładamy:

I. Gdzie niema ani a ani c, tam jest e razem z b albo razem z d, ale nie razem z obydwoma.

II. Gdzie są a i d, ale niema e, tam są razem b i c albo razem ich niema.

III. Gdzie jest a razem z b lub z e, tam jest c albo d, ale nie oba razem; i odwrotnie.

Pierwsze dwa założenia, jako ~~nie są~~ nie odwrotne, są impli~~cyt~~ ~~ność~~ kacjami, trzeba przeto, aby je wyrazić w postaci równań logicznych, wprowadzić nieokreślone czynniki x i y, trzecie jest odwrotne, możemy więc przeto każde oddać równością bez wprowadzania czynnika nieokreślonego:

I. $a'c' = xe(bd'+b'd)$

II. $ade' = y(bc+b'c')$

III. $a(b+e) = cd'+c'd$.

Przykład: 6.

$x =$

Różnicę dwóch klas $a-b$ można uważać za rozwiązanie równania $x+b=a$. Iloraz zaś $x=a:b$ można uważać za rozwiązanie równania $xb=a$. Przekształcamy pierwsze z tych równań w myśl (14):

$$a'(x+b)+ax'b'=0$$

$$a'x+ab'x'+a'b=0$$

$$(a'+\cancel{a'b})x+(ab'+a'b)x'=0$$

Warunek rozwiązalności równania czyli istnienia różnicy $a-b$ jest prosto (rezultanta):

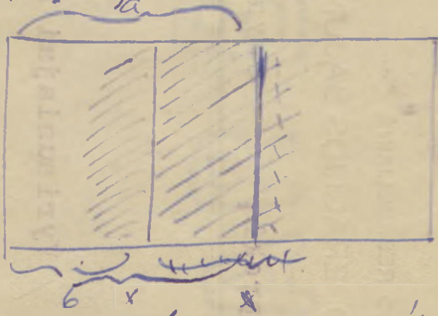
$$(a'+a'b)(ab'+a'b)=0$$

$$a'b=0 \quad \text{czyli} \quad b<a \quad \text{stąd według (C)}$$

$$(a'+a'b)'$$

$$x = ab'+a'b+(a'+\cancel{a'b})'_{a}u$$

$$= ab'+a^{x'}u$$



Przekształcamy z kolei równanie $xb=a$ w myśl (14)

$$a'xb+a(x'+b')=0$$

$$a'bx+ax'+ab'=0$$

$$(a'b+ab')x+(a+ab')x'=0$$

Rezultanta (bo uproszczenie

Algebra logiki III.

Prawo form, prawo racji, prawo następstw.
(Metoda Poreckiego).

(Couturat, L'Alg. de la log. 42 i nast. str 64).

Ogólnem (jakie sobie stawiamy, jest) ~~Właściwym jest~~ zadaniem, materialnie ~~ogólnej~~ metody, któraby pozwoliła na podstawie znajomości pewnych związków między terminami, określić inne związki między temi terminami. Zadanie to dzieli się na trzy grupy: formy, racji i następstwa.

1.) Prawo form odpowiada następującemu ujęciu zagadnienia: Gdy dane jest pewne równanie, znaleźć dla dowolnego terminu (prostego lub złożonego), równanie, równoważne z tem równaniem. Inaczej mówiąc, chodzi o znalezienie wszystkich form, wyrażających danej równości, ~~gdy~~ i wszelkich postaci równania, których lewą stroną jest dowolny termin (prosty lub złożony).

Według (14) (Alg. log.) dowolne równanie można sprowadzić w ten sposób, by prawa jego strona była 0 lub 1, czyli można mówić tam zawsze:

$$N=0 \qquad N'=1$$

2.

Funkcję N nazywam Poretskiego zerem logicznem danego równania, funkcję N' jego ~~zerem~~ jedynką logiczną.

Prawo form stwierdza, że jeśli U jest terminem jakimkolwiek, to szukaniem jego rozwiązania, równoważnem ~~z~~ z równością $N=0$, jest

$$(1) \qquad U = N'U + NU'$$

Istotnie, mamy bowiem według (19)

$$(U = N'U + NU') = (NU + NU' = 0)$$

a że $NU + NU' = N$, przeto

$$(U = N'U + NU') = (N = 0)$$

Forma (1) jest w myśl ~~formuły Poretskiego~~ (17) równoważna twierdzeniu, że termin U ~~zawarty jest w~~ jest zawarty między N ~~jak~~ jako kresem dolnym i N' jako kresem górnym, co jest jasne, gdyż według założenia $N=0$ a $N'=1$. Można przeto prawo form wypowiedzieć w następujących słowach:

Aby otrzymać wszystkie formy równoważne danej równości, należy stwierdzić, że dowolny termin zawiera się między zerem logicznem danej równości i jej jedynką logiczne, jako stosunek do innych i liczenie górnego.

Każde przez terminy należące do universum logicznego wyrażenie, jakie można utworzyć z terminów, należących do universum logicznego, daje początek innej formie. Jeśli universum logiczne składa się z n terminów prostych, to z terminów tych można utworzyć 2^n konstytuentów. Każde wyrażenie, dające się odnieść do danego universum jest sumą niektórych z pomiędzy konstytuentów. Liczba takich sum niejednakowych jest przeto równa liczbie różnych zestawień bez powtarzania, które dają się utworzyć z 2^n konstytuentów, mianowicie 2^{2^n}, wliczając w to 0, jako zestawienie 0 konstytuentów, oraz 1, zestawienie wszystkich konstytuentów. Jest to zarazem liczba różnych form, jakie może nadać rozwiązanie w takiem universum. Tak np. (Słupecki, T. dow. II nr. 77) jeżeli $n=1$, ilość konstytuentów wynosi 2, są to klasy a i a'. Przy ich pomocy otrzymujemy $2^2=4$ różne między sobą wyrażenia w danem universum, mianowicie $0, a, a', a+a'=1$

Załóżmy, że $n=2$; w takim uniwersum istnieją $2^2=4$ konstytuentów, mianowicie $ab, ab', a'b, a'b'$, można z nich utworzyć $2^4=16$ wyrażeń:

0

$ab \qquad ab+ab' = a(b+b') = a$

$ab' \qquad ab+a'b = b(a+a') = b$

$a'b \qquad ab+a'b'$

$a'b' \qquad ab'+a'b$

$ab'+a'b' = (a+a')b' = b'$

$a'b+a'b' = a'(b+b') = a'$

$ab+ab'+a'b = a+a'b = a+b$

$ab+ab'+a'b' = a+a'b' = a+b'$

$ab+a'b+a'b' = b+a'b' = a'+b$

$ab'+a'b+a'b' = ab'+a' = a'+b'$

$ab+ab'+a'b+a'b' = 1.$

~~Przyjmy~~ ~~Załóżmy, że~~ W uniwersum, dla którego $n=1$ bierzemy pod uwagę równość $a=0$ i uważamy dla niej formę rozwiniętą według (1); mamy $s=a$ $s'=a'$, zaś za U podstawiamy kolejno wszystkie 4 występujące w danym uniwersum wyrażenia, $0, a, a', 1$. Otrzymujemy 4 tego rodzaju wszystkie możliwe postaci równości $a = 0$:

$a = a'a + aa'$ t.j. $a = 0$

$0 = a'0 + a.1$ t.j. $0 = a$

$a' = a'.a' + a.a$ t.j. $a' = 1$

$1 = a'.1 + a.0$ t.j. $1 = a'$

Dla tego samego uniwersum niech będzie dana

równość $a = a'$

Według (14) $(a = a') = (aa + a'a' = 0)$ czyli $A = 1$ $B = 0$

$0 = 0.0 + 1.1 = 1$ t.j. $0 = 1$

$a = 0.a + 1a' = a'$ " $a = a'$

$a' = 0.a' + 1.a = a$ " $a' = a$

$1 = 0.1 + 1.0 = 0$ " $1 = 0$

otrzymujemy wszystkie możliwe postaci fałszu w danym

uniwersum.

Załóżmy wreszcie, że w uniwersum, dla którego

$n = 2$ dana jest równość $a = b$. Jej formy

równoważne są następujące:

$a = b$	$b = a$
$ab = a + b$	$a + b = ab$
$ab' = a'b$	$a'b = ab'$
$ab' + a'b = 0$	$0 = ab' + a'b$

$$a' = b' \qquad b' = a'$$

$$a'+b' = a'b' \qquad a'b' = a'+b'$$

$$a'+b = a+b' \qquad a+b' = a'+b$$

$$ab+a'b' = 1 \qquad 1 = ab+a'b'$$

2) Prawo uwięzów. Każde zagadnienie, którego założenia $(A=0, B=0\ C=0 \ldots)$ są wyrażone w postaci równań lub nierówności, da się sprowadzić do jednej równości w postaci formuły ~~przy pomocy~~ ~~sumy~~

$$(A=0)(B=0)(C=0)\ldots = (A+B+C\ldots = 0)$$

W tej równości, której są wszystkie dane zagadnienia wzięte łącznie, rozwijamy teraz stronę ze względu na wszystkie terminy proste, które w niej występują; niech ich liczba będzie n; otrzymamy 2^n konstytuentów rozwinięcia 1. Niech będzie $m \leqq 2^n$ liczba konstytuentów, które tworzą w danym zagadnieniu ~~lewą stronę~~ $A+B+C\ldots$. Otrzymamy wszystkie możliwe uwięzy równości $A+B+C\ldots=0$ w możliwie n terminów prostych, tworząc wszystkie możliwe sumy cząstkowe owych m konstytuentów i przyrównując je do 0, a to na zasadzie wnioskowania $(A+B=0) \supset (A=0)$. Tworzenie sumy od danego rókania przechodzimy do dziedziny z jego konse-kwencji, skreślając np. ~~np.~~ lewej jego stronie niektóre z konstytuentów. Każdy z tych konstytuentów przyrównany do zera daje równanie elementarne, wynikające ściśle z danych zagadnienia. Możemy które przechodzimy od ~~zagadnienia do~~ założeń zagadnienia do jego konsekwencji drogą eliminacji danych (danych równań w niewiadomych) elementarnych ~~danych~~

Liczba konsekwencji, ~~które można wysnuć~~ jest równa liczbie ich zestawień (kombinacyj), które można utworzyć z n konstytuentów, to jest 2^n; liczba ta obejmuje zestawienie o konstytuentów, które daje identyczność $0=0$ oraz zestawienie n konstytuentów, to jest samo równanie, wyrażające dane zagadnienia.

Zastosujmy tę metodę do równania

$$ax+bx'=0$$

Rozwijamy je ze względu na trzy terminy a, b, x:

$$(abx+ab'x+abx'+a'bx'=0) =$$

$$= [ab(x+x')+ab'x+a'bx'=0] =$$

$$= (ab=0)(ab'x=0)(a'bx'=0)$$

 124

Mamy w ten sposób wzór uniwersalny przedstawiający rezultat $ab=0$; dwie uzyskane równości przedstawiamy (biorąc pod uwagę, że rezultat $ab=0$ daje $b<a'$, ~~a więc~~ wobec tego $a'+b=a'$ oraz $a'b=b$)

$$(ab'x=0)=(x<a'+b)=(x<a')$$

$$(a'bx'=0)=(a'b<x)=(b<x)$$

jako wynik otrzymujemy wzór $b<x<a'$ t.j. znane rozwiązanie równania.

Przykład II. Przyjmijmy jako założenie dwie przesłanki sylogizmu

$$(a<b)(b<c)$$

i ~~wyrażamy je do~~ wyrażamy je w postaci jednego równania

$$(a<b)=(ab'=0)$$
$$(b<c)=(bc'=0)$$

$$(ab'=0)(bc'=0)=(ab'+bc'=0)$$

i wyznaczamy wszystkie konsekwencje.

~~Znalezione~~ Pomimo tego równanie rozwijamy ze względu na trzy terminy a, b, c:

$$abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'=0$$

Równanie zawiera cztery konstytuenty, daje więc $2^4=16$ konsekwencji, mianowicie:

1.) $(abc'=0)=(ab<c)$

2) $(ab'c=0)=(ac<b)$

3) $(ab'c'=0)=(a<b+c)$

4) $(a'bc'=0)=(b<a+c)$

5.) $(abc'+ab'c=0)=(a<bc+b'c')$

6.) $(abc'+ab'c'=0)=(ac'=0)=(a<c)$

7.) $(abc'+a'bc'=0)=(bc'=0)=(b<c)$

8.) $(ab'c+ab'c'=0)=(ab'=0)=(a<b)$

9) $(ab'c+a'bc'=0)=(ac<b<a+c)$

10) $(ab'c'+a'bc'=0)=(ab'+a'b<c)$

11) $(abc'+ab'c+ab'c'=0)=(ab'+ac'=0)=(a<bc)$

12) $(abc'+ab'c+a'bc'=0)=(ab'c+bc'=0)=(ac<b<c)$

13) $(abc'+ab'c'+a'bc'=0)=(ac'+bc'=0)=(a+b<c)$

14) $(ab'c+ab'c'+a'bc'=0)=(ab'+a'bc'=0)=(a<b<a+c)$

15) $(abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'=0)=(a<b)(b<c)$

16) $0=0$

Z powyższych przykładów konkluzja 6) jest tradycyjną konkluzją sylogizmu, gdyż jest jedyną konkluzją niezależną od b; 7 jest identyczną z [illegible], 8 z drugą. 15 jest [illegible] [illegible], lecz w niej brak [illegible] jest tak samo [illegible] konkluzji, wreszcie 16 odpomoże się ~~[illegible]~~ jako rezultat skreślenia wszystkich konstytuentów; tautologia 0=0 jest konsekwencją każdego wnioskowania.

3) Szukanie racji. Metoda szukania racji danego twierdzenia jest sposobem odwrotnym do metody szukania konsekwencji. Od racji przechodzi się do konsekwencji ~~[illegible]~~ obejmującej dane wyrażenie, tj. ~~[illegible]~~ dołączając pewne z konstytuentów jego zaprzeczenia; szczególnie od konsekwencji przechodzi się do racji przez dołączanie danych lub dopisywanie konstytuentów. Liczba konstytuentów, które nie wchodzą w [illegible] tworzenia, złożonego z n terminów elementarnych, [illegible] tworzy i zawierającego u konstytuentów, wynosi 2^n-u. Otrzymamy więc wszystkie (możliwe) ~~[illegible]~~ o n terminów elementarnych racje, tworząc sumy ze wszystkich 2^n-u konstytuentów, dołączając je do lewej strony równania i wypisując [illegible] wniosku, z tego wynika

$$(A+B=0) < (A=0)$$

który świadczy, że równość $A=0$ jest [illegible] racją $A+B=0$, czy jakikolwiek [illegible] B. Liczba [illegible] otrzymać w ten sposób racji jest 2^{2^n-u}

Przykład: Zastosujemy tę metodę do formułowania ra-cji dla przesłanek [illegible]:

$$(a < b)(b < c)$$

które są równoważne równaniu

$$abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' = 0$$

Mianowicie trzech terminów tworzymy $2^3 = 8$ konstytuentów, z tych cztery weszły do równania, a cztery [illegible]

$$abc,\ a'bc,\ a'b'c,\ a'b'c'$$

Liczba ~~szukanych~~ ich rozwiązań jest $2^{2^3-4} = 2^4 = 16$ i tyle jest liczba szukanych racji, ~~tzn~~ a mianowicie:

1) $(abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' = 0) = (a + bc' = 0) = (a = 0)(b < c)$

2) $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' = 0) = (abc' + ab' + a'b = 0) = (ab < c)(a = b)$

3) $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c = 0) = (bc' + b'c + ab'c' = 0) = (b = c)(a < b + c)$

4) $abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c' = 0) = (c' + ab' = 0) = (c = 1)(a < b)$

5.) $(abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' = 0) = (a + b = 0) = (a = 0)(b = 0)$

6) $(abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c = 0) = (a + bc' + b'c = 0) = (a = 0)(b = c)$

7) $(abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c' = 0) = (a + c' = 0) = (a = 0)(c = 1)$

8) $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' + a'b'c = 0) = (ac' + a'c + ab'c + a'bc' = 0) =$
$= (a = c)(ac < b < a + c) = (a = b = c)$

9) $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' + a'b'c' = 0) = (c' + ab' + a'b = 0) = (c = 1)(a = b)$

10) $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c + a'b'c' = 0) = (b' + c' = 0) = (b = c = 1)$

Szukanie wszystkich racji uprościmy sobie [illegible], biorąc pod mínkou, že negovaná suma prvních konjunkcí a zase její vzhledem k negovaným sumy ostatních konjunkcí a jedničce. Proto zaměníme-li každou z těchto konjunkcí, ~~[illegible]~~ i budeme [illegible] každou z ostatních negovanými [illegible] ~~[illegible]~~ postupně konjunkcí a jedničky:

11) $(a'b'c'=1)=(a+b+c=0)=(a=b=c=0)$

12) $(a'b'c=1)=(a+b+c'=0)=(a=b=0)(c=1)$

13) $(a'bc=1)=(a+b'+c'=0)=(a=0)(b=c=1)$

14) $(abc=1)=(a=b=c=1)$

15) $(0=1)$

16) $abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'=0$

Z pomocných vět jediná 7 jest nezávislá na b, tj. [illegible] dvě [illegible] [illegible] b, podobně jest 5 jest nezávislá na c, 10 pak nezávislá na a. Kdyby 15 [illegible] [illegible] a nahrazení [illegible] [illegible] konjunkcí, [illegible] konjunkcí jest konjunkcí, kdyby 15 jest ~~[illegible]~~ tautologie, jest [illegible] - a [illegible] jest [illegible]. Každá 16 jest [illegible] [illegible]; každá [illegible] jest [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] samo.

4) Formy następstw i racji. Można zastosować prawo form do następstw i do racji danego równania, aby otrzymać dla nich wszelkie możliwe formy. Jeśli dane równanie ma postać $N=0$ lub $N'=1$, to każdą jego konsekwencję daje się przedstawić w postaci

$$NX=0 \quad \text{lub} \quad N'+X'=1$$

a każdą jego rację w postaci

$$N+X=0 \quad \text{lub} \quad N'X'=1$$

(wyraz X, podobnie jak N, jest zależny na ogół tylko od wszystkich elementów niewiadomych), zależność bowiem wynika:

$$(N+X=0)<(N=0)<(NX=0)$$
$$(N'X'=1)<(N'=1)<(N'+X'=1).$$

Po zastosowaniu prawa form, każda z konsekwencji wyraża postać

$$U=(N'+X')U+NXU'$$

a każda z racji:

$$U=N'X'U+(N+X)U'$$

albo jeszcze ogólniej, uwzględniając, że X i X' są zupełnie niezależne i nie mają stosunku do siebie ... ograniczeni;

formy następstw: $u = (N'+X)u + NYu'$

formy racji: $u = N'Xu + (N+Y)u'$

~~Przykład.~~ Gdy wzory te porównamy z wzorem na formy odrzucenia $\delta = 0$: $u = N'u + Nu'$ i uwzględnimy zarazem, że ten ostatni według formuły Poreckiego (17) jest równoważny stwierdzeniu zawierania się u między N jako klasą dolną i N' jako klasą górną, to wynika stąd, że każde następstwo u zawiera się między NY jako klasą dolną oraz $N'+X$ jako klasą górną, każda zaś jego racja między $N+Y$ jako klasą dolną oraz $N'X$ jako klasą górną. Stąd łatwo wynika w sposób następujący: ~~jeśli~~ umówimy podklasy klasy zawierające się w danej, a nadklasy klasy które zawierają w sobie daną, to aby otrzymać wszystkie następstwa ~~danej~~ odrzucenia, scharakteryzowanego w postaci $u = N'u + Nu'$, wystarczy podstawić za ~~jej ...~~ N' wszystkie nadklasy a za N wszystkie podklasy. Natomiast, aby otrzymać wszystkie racje tego samego, wystarczy podstawić za N' wszystkie podklasy, a za N wszystkie nadklasy.

Tablice form. uczęszcz. 15.

5 (Dla bezpośredniego odczytania następstw i racji danej równości układa się tablicę następstw lub tablicę racji, przyczem każda równość daje odrębną tablicę. Tablica zawiera 2^{2^n} klas, które można odczytać i rozróżnić w [illegible] n terminów, [illegible], jak wiemy 2^n konstytuant.

Wiadomo zresztą, że jeśli N. T. zero logiczne rozwinięte na n konstytuantów, to liczba jego podklas jest 2^n, tyleż jest jego następstw, z których każde daje się uzyskać przez przyrównanie do zera jednej podklasy. Ułóżmy je wszystkie w ~~tablicy~~ jednym pionie, poczynając od klasy 0, a kończąc na klasie N ~~jako~~. ~~[illegible]~~ Z drugiej strony do pierwiastków klasą ~~można dodać~~ nie zmieni się, gdy dołączymy do niej podklasę zera logicznego, gdyż w każdym danym rozwinięciu, wszystkie te podklasy są zerami. W myśl przeto zasadzie $N=0$ każda klasa jest równa każdej [illegible] ~~[illegible]~~ ze zbioru 2^n klas, będących sumami jej samej i pozostałych podklas zera logicznego. Zbiór 2^{2n} klas możemy rozbić się przeto na $\frac{2^{2n}}{2^n} = 2^{2^n-n}$ szeregów po 2^n klas, z których każdy zawiera ~~[illegible]~~ sumy otrzymywane przez dołączenie do pewnej klasy podklas

N N^x 2 pierwszego rzędu. ~~Każdy z tych~~ wyrazów tę tworzy ~~...~~ w następnych wierszach, ~~tworząc kolejne wiersze~~ tablicy, ~~...~~ tak że tworzymy klasy w których dodajnikiem jest ten sam wyraz z pierwszego rzędu ~~...~~ należą do tego samego wiersza.

Weźmy np. równość $a = b$ jako twierdzenie o uni-wersum $n = 2$ terminów. Jest ona równoważna równości

$$ab' + a'b = 0$$

$N = ab' + a'b$; N ~~zawiera~~ zawiera 2 dwa konstytuenty, zatem tworzą cztery wyrazy $0, ab', a'b, ab' + a'b$. Te cztery wyrazy układamy w pierwszym rzędzie. Pozostałe klasy uniwersum są ab, $a'b'$, $ab + a'b'$ i wreszcie wszystkie te, które powstają przez dodanie do których klas z pierwszego rzędu. Tak powstaje następująca tablica.

0	ab	$a'b'$	$ab + a'b'$
ab'	a	b'	$a + b$
$a'b$	b	a'	$a' + b$
$ab' + a'b$	$a + b$	$a' + b'$	1

Każda klasa w tej tablicy jest równa klasie wszy-czyli na osi jej wiersza i kolumny i jest równa według danych uzgodnienia, każdej innej leżącej w tej samej kolumnie. ~~Tw~~ Rozważmy też teraz 64 związki między sobą konieczne dla dowolnej równości w u-niwersum o 2 elementach; ~~między nimi [illegible] dzieli się~~ ~~o 32 parami~~ ~~one na dwie grupy~~ ~~rozpadają się między sobą porządkiem~~ ~~równości; w każdej grupie jest 16 równości identycznych, które otrzymuje się pisząc równość każdej klasy z nią sa-mą, i 16 form równości stanowiących; widzimy zupełnie, nie otrzymujemy też ze sobą klasy należące do jednego pisma wierszy;~~

~~$0 = ab$ $0 = a'b$ $0 = ab'$ $0 = ab' + a'b$~~

~~$ab' = a'b$ $ab' = a'b' + a'b$ $a'b = ab' + a'b$ ab'~~

~~w pierwszej grupie zamieszczamy 16 identyczności w dru-giej 48 równości nieidentycznych,~~ ~~gdyż~~ ~~tworzących 24 pary~~ ~~wymagają się porządkiem równości; 32 pary równości się między sobą~~ tylko ~~porządkiem równości. Gdy pominiemy porządek równości, będziemy mieli z każdej pary 8 rów-ności~~ Dwójki one dla każdej z 16 klas tablicy [illegible]

134

formy określające ~~[illegible]~~ tą tablicę przez uwzględnienie założeń zagadnienia. ~~[illegible]~~ Pomińmy sobie np. pole zadanie znaleźć, uwzględnia równości $a = b$, w postaci formy określającej sumę $a+b$. Otrzymamy z dowolnego pola tablicy, mianowicie:

$a+b = ab$, $a+b = a$, $a+b = b$, $a+b = a+b$.

podobnie dla a otrzymujemy z tego samego pola

$a = b$, $a = a+b$, $a = ab$, $a = \bar{a}$

Tablica dla założenia $(a+b)(b+c) = abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' = 0$ gdzie $n=3$ $m=4$ zawierać będzie $2^{2^3} = 2^8 = 256$ ~~[illegible]~~ wyrazów. W pierwszym polu ~~[illegible]~~ wystąpić $2^4 = 16$ uwzględnień, pionów jest $2^{2^3-4} = 2^4 = 16$, w wyglądzie każdego pionu napełnić się jedna z nich, ~~[illegible]~~ odrzucając z konsystencji, nie sprzeczność w tym zagadnieniu:

0	abc	$a'bc$	$a'b'c$	$a'b'c'$	$abc+a'bc$	......
abc'						
$ab'c$						
$ab'c'$						
$a'bc'$						
$abc'+ab'c$						
......						

19

(uwzględn. ołówkiem wstawienia)

~~Ta sama~~ Tablica ~~przy pewnem przedstawieniu~~ służy ~~dla~~ zarazem dla przedstawienia obu tych równań, a to dzięki temu, że gdy konsekwencję równości $N=0$ w przedstawimy w postaci określenia klas U, to jej wraz z konsekwencjami równości $N=1$, ~~przedstawionemi także~~ jedyne analogicznemi w postaci określeń klas U, pisząc po jednej stronie (prawej) każdego określenia trzeba przenieść ze obu terminy U i U'. Przypomnijmy bowiem, że wniosek z równości $N=0$ ma postać $U=(N'+X)U+NYU'$, zaś wniosek z dalszej równości postać $U=N'XU+(N+Y)U'$. Przenieśmy po prawej stronie U i U' to otrzymamy:

$$U=(N+Y)U+N'XU'$$

możemy zarazem opuścić ze obu terminy X i Y jako wyraźnie nieokreślone bowiem

$$U=(N+X)U+N'YU'$$

porównując to wyrażenie z wyrażeniem dla wniosku z równości $N=0$, spostrzegamy że różnią się one między sobą przez zamianę terminów N i N', tak iż wniosek ~~jej~~ przedstawia wniosek z równości $N'=0$ czyli $N=1$.

Na tej podstawie zbudujemy dla wykresu tablicę wniosków z równości $a=b$, tudzież to tablica wniosków równości $a=b'$

gdzie mamy $(a=b)=(ab'+a'b=0)$ oraz $(a=b')=(ab+a'b'=0)$
$=(ab'+a'b=1)$

0	ab'	$a'b$	$ab'+a'b$
ab	a	b	$a+b$
$a'b'$	b'	a'	$a'+b'$
$ab+a'b'$	$a+b'$	$a'+b$	1

Ażeby uzyskać z tej tablicy zamiast konsekwencyj równości $a=b'$ racje równości kontradyktorycznej $a=b$, potrzeba i wystarczy przyłożyć negację każdej klasy do ~~klas~~ innych klas w tym samym pionie. Tak np. formy racyj w ostatniem ... klasy $a'+b'$ bierzemy z ostatniego pionu, biorąc zaś negację $ab = a'+b'$ i przykładamy ją do klas tego pionu:

$a'+b' = 0 \quad a'+b' = ab \quad a'+b' = a'b' \quad a'+b' = ab+a'b'$

co ... z tego ...

~~[illegible]~~ i tyle racyj jest (tautologicznie) fałszywych, że taka jest racja dla poszczególnych twierdzeń; ... podobnie z ~~drugiego~~ pionu otrzymamy racje w postaci form dla a: $a = a'b$, $a = b$, $a = a'$, $a = a'+b$, przyczem również tutaj znajduje się forma (tautologicznie) fałszywa $a=a'$ przez ~~[illegible]~~ samo równanie $a=b$ jako racja równoważnie.

Tablica racyj jest symetrycznym obrazem tablicy uzyskanej według osi skośnej $0-1$, tzn. obie tablice mają się w ten sposób, iż piony jednej są wierszami drugiej i odwrotnie.

21. Obie tablice wyłożonej

~~Zwykły sposób~~ (~~wszystkie jedna~~) [illegible] jeżeli przedstawić

~~obie tablice~~, o.t.: jak ~~obiecujemy~~ wymieniamy wiersz w każdej kolumnie

tablicy na miejsce obu jej przekątnych (~~między dwu-~~ którą tworzą klasy

~~[illegible]~~ (a, b, a' b'), to zmieniamy względem tej osi

pomiędzy sobą klasy (po dwie), z których jedna jest najwyższą będącą tożsamą

dopiero. ~~[illegible]~~ [illegible] otrzymać z tablicy wierszowej

zupełnie [illegible] jak z niej ~~[illegible]~~ tejże; niewątpliwie

więc, aby otrzymać [illegible] [illegible] i wystarczy

wymienić pewną klasę do ~~innej~~ klas tej innej ~~[illegible]~~

[illegible], aby otrzymać więc [illegible] [illegible] [illegible]

na klasę do ~~innej~~ klas [illegible], w których [illegible] [illegible]

do tamtej [illegible] [illegible] względem osi tablicy.

A 38

Niże przeczące dają konkluzję

w III

Żadne M nie jest P } fig. III
Niektóre M nie są S } e o

Żadne P nie jest M } II Festino
Niektóre nie S są M

Niektóre nie S nie są P

(lecz podmiot nie - S!)

to samo w IV fig. Żadne P nie jest M
i.t.d.

Zasada dwoistości.

(Couturat, L'alg. de la log. str. 21 [14']).

Działania mnożenia i dodawania są zdefiniowane przez następujące postulaty.

1) $ab < a \quad ab < b$ (zas. symplif. dla mnożen.)

2) $(x < a)(x < b) \supset (x < ab)$ (zas. kompoz. dla mnoż.)

3) $a < a+b \quad b < a+b$ (zas. symplif. dla dodaw.)

4) $(a < x)(b < x) \supset (a+b < x)$ (zas. kompoz. dla dodaw.)

Powyższe postulaty <u>tem samem</u> posiadają charakterystyczną własność dwoistości, mianowicie przechodzą w siebie wzajemnie (1 i 3 oraz 2 i 4) przez zamianę znaków mnożenia i dodawania
Te ostatnie przejdą w siebie wzajem. zamieniając 0 na 1 i 1 na 0.
oraz odwrócenie znaku $<$. Ta dwoistość w postulatach przenosi się na wszystkie twierdzenia dające się z nich wyprowadzić i daje się ująć w przepis, następujący, noszący nazwę zasady dwoistości dla mnożenia i dodawania: Każde twierdzenie prawdziwe daje nowe twierdzenie prawdziwe przez

zamiany znaków mnożenia i dodawania oraz odwrócenie znaku <, przy czym należy 0 zastą-
pić przez 1, a 1 przez 0.

Przykłady (formy dualne odpowiadające sobie umieszczone w jednym wierszu obok siebie:)

Prawa absorpcji

$a+ab=a$ $\qquad$ $a(a+b)=a$

Prawo ~~mnożenia i~~ czynników i dodajników

$(a<b)\supset(ac<bc)$ $\qquad$ $(a<b)\supset(a+c<b+c)$

Prawo mnożenia i dodawania stronami:

$(a<b)(c<d)\supset(ac<bd)$ $\qquad$ $(a<b)(c<d)\supset(a+c<b+d)$

Prawo zamiany inkluzji w równość

$(a<b)=(a=ab)$ $\qquad$ $(a<b)=(a+b=b)$

Prawa rozdzielności

$(a+b)c=ac+bc$ $\qquad$ $ab+c=(a+c)(b+c)$

$$ab+ac+bc=(a+b)(a+c)(b+c)$$

Prawa sprzeczn. i wył. środka

$aa'=0$ $\qquad$ $a+a'=1$

$(a<b)=(ab'=0)$ $\qquad$ $(a<b)=(a'+b=1)$

Prawa de Morgana:

$(a+b)' = a'b' \qquad (ab)' = a'+b'$

$(ab+a'b')' = ab'+a'b \qquad \left[(a+b)(a'+b')\right]' = (a+b')(a'+b)$

$ax+bx' = 0 \qquad (a+x)(b+x') = 1$

$*2.01 \quad \vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$

Dem. $\left[\text{Taut. } \frac{\sim p}{p}\right] \vdash : \sim p \vee \sim p . \supset . \sim p \quad (1)$

$[(1).(*1.01)] \vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$

$*2.02 \quad \vdash : q . \supset . p \supset q$

Dem. $\left[\text{Add } \frac{\sim p}{p}\right] \vdash : q . \supset . \sim p \vee q$

$[(1).(*1.01)] \vdash : q . \supset . p \supset q$

$*2.03 \quad \vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$

Dem. $\left[\text{Perm. } \frac{\sim p, \sim q}{p, q}\right] \vdash : \sim p \vee \sim q . \supset . \sim q \vee \sim p$

$[(1).(*1.01)] \quad \vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$

$*2.04 \quad \vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$

Dem. $\left[\text{Assoc } \frac{\sim p, \sim q}{p, q}\right] \vdash :. \sim p \vee (\sim q \vee r) . \supset . \sim q \vee (\sim p \vee r) \quad (1)$

$[(1)(*1.01) \quad \vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$

$*2.05 \quad \vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$

Dem. $\left[\text{Sum } \frac{\sim p}{p}\right] \vdash :. q \supset r . \supset : \sim p \vee q . \supset . \sim p \vee r \quad (1)$

$[(1).(*1.01)] \vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r ;$

Bertrand Russell, Principia mathematica. 147

$*1{\cdot}2 \quad \vdash : p \vee p . \supset . p$ Pp.

$*1.3 \quad \vdash : q . \supset . p \vee q$ Pp.

$*1.4 \quad \vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ Pp.

$*1.5 \quad \vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ Pp.

$*1.6 \quad \vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ Pp.

$*2.06 \ \vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

Dem. $\left[\mathrm{Comm}\ \dfrac{q \supset r,\ p \supset q,\ p \supset r}{p,\quad q,\quad r}\right] \vdash :: q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r :. \supset :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$ (1)

$[*2.05] \quad \vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$ (2)

$[(1).(2).*1.11] \quad \vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

$*2.07 \ \vdash : p . \supset . p \lor p \quad \left[*1.3\ \dfrac{p}{q}\right]$

$*2.08 \ \vdash . p \supset p$

Dem. $\left[*2.05\ \dfrac{p \lor p,\ p}{q,\ r}\right] \vdash :: p \lor p . \supset . p : \supset :. p . \supset . p \lor p : \supset . p \supset p$ (1)

$[\mathrm{Taut}] \quad \vdash : p \lor p . \supset . p$ (2)

$[(1)(2).*(1,11)] \quad \vdash :. p . \supset . p \lor p : \supset . p \supset p$ (3)

$[2.07] \quad \vdash : p . \supset . p \lor p$ (4)

$[(3).(4).*1.11] \quad \vdash . p \supset p$

$*2.1 \ \vdash . \sim p \lor p \quad [\mathrm{Id} . (*1.01)]$

$*2.11 \ \vdash . p \lor \sim p$

Dem. $\left[\mathrm{Perm}\ \dfrac{\sim p,\ p}{p,\ q}\right] \vdash : \sim p \lor p . \supset . p \lor \sim p$ (1)

$[(1).(*2,1).*1.11] \quad \vdash . p \lor \sim p .$

$*2.12 \quad \vdash . p \supset \sim(\sim p)$

Dem. $\left[*2.11 \frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash . \sim p \vee \sim(\sim p) \quad (1)$

$[(1).(*1.01)] \quad \vdash . p \supset \sim(\sim p)$

$*2.13 \quad \vdash . p \vee \sim\{\sim(\sim p)\}$

Dem. $\left[\mathrm{Sum}\ \frac{\sim p,\ \sim\{\sim(\sim p)\}}{q \qquad r}\right] \quad \vdash :. \sim p . \supset . \sim\{\sim(\sim p)\} . \supset : p \vee \sim p . \supset . p \vee \sim\{\sim(\sim p)\} \quad (1)$

$\left[*2.12 \frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash : \sim p . \supset . \sim\{\sim(\sim p)\} \quad (2)$

$[(1)(2).*1.11] \quad \vdash : p \vee \sim p . \supset . p \vee \sim\{\sim(\sim p)\} \quad (3)$

$[(3).(*2.11)*1.11] \quad \vdash : p \vee \sim\{\sim(\sim p)\}$

$*2.14 \quad \vdash . \sim(\sim p) \supset p$

Dem. $\left[\mathrm{Perm.} \frac{\sim\{\sim(\sim p)\}}{q}\right] \quad \vdash : p \vee \sim\{\sim(\sim p)\} . \supset . \sim\{\sim(\sim p)\} \vee p \quad (1)$

$[(1).*2.13.*2.11] \quad \vdash . \sim\{\sim(\sim p)\} \vee p \quad (2)$

$[(2).(*1.01)] \quad \vdash . \sim(\sim p) \supset p$

$*2.15 \ \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$

Dem.

$\left[*2.05 \frac{\sim p, \sim(\sim q)}{p \quad r}\right] \vdash :. q \supset \sim(\sim q) . \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q)$ (1)

$\left[*2.12 \frac{q}{p}\right] \vdash . q \supset \sim(\sim q)$ (2)

$[(1)(2) *1.11] \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q)$ (3)

$\left[*2.03 \frac{\sim p, \sim q}{p, q}\right] \vdash : \sim p \supset \sim(\sim q) . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p)$ (4)

$\left[*2.05 \frac{\sim q, \sim(\sim p), p}{p, \ q, \ r}\right] \vdash :. \sim(\sim p) \supset p . \supset : \sim q \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim q \supset p$ (5)

$[(5) . *2.14 . *1.11] \vdash : \sim q \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim q \supset p$ (6)

$\left[*2.05 \frac{\sim p \supset q, \ \sim p \supset \sim(\sim q), \ \sim q \supset \sim(\sim p)}{p, \qquad q, \qquad r}\right] \vdash :: \sim p \supset \sim(\sim q) . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) : \supset :. \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p)$ (7)

$[(4).(7). *1.11] \vdash :. \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p)$ (8)

$[(3).(8). *1.11] \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p)$ (9)

$\left[*2.05 \dfrac{\sim p \supset q,\ \sim q \supset \sim(\sim p),\ \sim q \supset p}{p,\quad q,\quad r}\right] \vdash :: \sim q \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim q \supset p : \supset :. \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$ (10)

$[(6).(10).*1.11] \vdash :. \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$ (11)

$[(9)(11).*1.11] \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$

$*2.16 \vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$

Dem. $[*2.12] \vdash . q \supset \sim(\sim q) . \supset$

$[*2.05] \vdash : p \supset q . \supset . p \supset \sim(\sim q)$ (1)

$\left[*2.03 \dfrac{\sim q}{q}\right] \vdash : p \supset \sim(\sim q) . \supset . \sim q \supset \sim p$ (2)

$[\text{Syll}] \vdash . (1).(2) . \supset \vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p .$

$*2.17 \quad \vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset q$

Dem. $\left[*2.03 \frac{\sim q, p}{p, q}\right] \quad \vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset \sim(\sim q)$ (1)

$[*2.14] \quad \vdash : \sim(\sim q) \supset q : \supset$

$[*2.05] \quad \vdash : p \supset \sim(\sim q) . \supset . p \supset q$ (2)

$[\mathrm{Syll}] \quad \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash .$ Prop

$*2.18 \quad \vdash : \sim p \supset p . \supset . p$

Dem. $[*2.12] \quad \vdash . p \supset \sim(\sim p) . \supset$ ~~(1)~~

$[*2.05] \quad \vdash . \sim p \supset p . \supset . \sim p \supset \sim(\sim p)$ (1)

$\left[*2.01 \frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash : \sim p \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim(\sim p)$ (2)

$[\mathrm{Syll}] \quad \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash : \sim p \supset p . \supset . \sim(\sim p)$ (3)

$[*2.14] \quad \vdash . \sim(\sim p) \supset p$ (4)

$[\mathrm{Syll}] \quad \vdash . (3) . (4) . \supset \vdash .$ Prop

$*2.2 \ \vdash : p . \supset . p \vee q$

Dem. $\vdash . \text{Add} . \supset \vdash : p . \supset . q \vee p$ (1)

$[\text{Perm}] \ \vdash : q \vee p . \supset . p \vee q$ (2)

$[\text{Syll}] \ \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \text{Prop}$

$*2.21 \ \vdash : \sim p . \supset . p \supset q \quad \left[*2.2 \frac{\sim p}{p}\right]$

$*2.24 \ \vdash : p . \supset . \sim p \supset q \quad [*2.21 \ \text{Comm.}]$

$*2.25 \ \vdash :: p : \vee : p \vee q . \supset . q$

Dem. $\vdash . *2.1 . \supset \vdash : \sim (p \vee q) . \vee . (p \vee q) :$

$[\text{Assoc}] \supset \vdash : p . \vee . \{ \sim (p \vee q) . \vee . q \} : \supset \vdash . \text{Prop}$

$*2.26 \ \vdash :. \sim p : \vee : p \supset q . \supset . q \quad \left[*2.25 \frac{\sim p}{p}\right]$

$*2.27 \ \vdash :. p . \supset : p \supset q . \supset . q \quad [*2.26]$

$*2.3 \ \vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . p \vee (r \vee q)$

Dem. $\left[\text{Perm} \frac{q, r}{p, q}\right] \vdash : q \vee r . \supset . r \vee q :$

$\left[\text{Sum} \frac{q \vee r, \ r \vee q}{q \quad r}\right] \supset \vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . p \vee (r \vee q)$

*2.31 $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . (p \vee q) \vee r$

[Syll] $\vdash :. a \supset b . \supset : b \supset c . \supset . a \supset c$ (1)

$\vdash : a . \supset . b$ (2)

[(1).(2).*1.11] $\vdash : b \supset c . \supset . a \supset c$ (3)

$\vdash : b . \supset . c$ (4)

[(3).(4)*1.11] $\vdash : a . \supset . c$ (5)

[Syll] $\vdash :. a \supset c . \supset : c \supset d . \supset . a \supset d$ (6)

[(5).(6).*1.11] $\vdash : c . \supset . d . \supset . a \supset d$ (7)

$\vdash : c \supset d$ (8)

[(7).(8) *1.11] $\vdash : a . \supset . d$

$\vdash : a . \supset . b .$

[etc] $\supset . c .$

[etc] $\supset . d : \supset \vdash .$ Prop.

Dem. [*2.3] $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . p \vee (r \vee q)$.

[Assoc $\frac{r, q}{q, r}$] $\supset . r \vee (p \vee q)$.

[Perm $\frac{r, p \vee q}{p, q}$] $\supset . (p \vee q) \vee r : \supset \vdash$. Prop.

*2.32 $\vdash : (p \vee q) \vee r . \supset . p \vee (q \vee r)$

Dem. [Perm $\frac{p \vee q, r}{p, q}$] $\vdash : (p \vee q) \vee r . \supset . r \vee (p \vee q)$

[Assoc $\frac{r, p, q}{p, q, r}$] $\supset . p \vee (r \vee q)$

[*2.3] $\supset . p \vee (q \vee r) : \supset \vdash$. Prop.

*2.33 $p \vee q \vee r . = . (p \vee q) \vee r$ Df.

*2.36 $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . r \vee p$

Dem. [Perm] $\vdash : p \vee r . \supset . r \vee p :$

[Syll $\frac{p \vee q, p \vee r, r \vee p}{p, q, r}$] $\supset \vdash :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : p \vee q . \supset . r \vee p$ (1)

[Sum] $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ (2)

$\vdash . (1) . (2)$. Syll $. \supset \vdash$. Prop.

$*2.37 \quad \vdash :. q \supset r . \supset : q \vee p . \supset . p \vee r$ [Syll. Perm. Sum]

$*2.38 \quad \vdash :. q \supset r . \supset : q \vee p . \supset . r \vee p$ [Syll. Perm. Sum]

$*2.4 \quad \vdash :. p . \vee . p \vee q : \supset . p \vee q$

Dem. $\vdash . *2.31 . \supset \vdash :. p . \vee . p \vee q : \supset : p \vee p . \vee q :$
$\supset : p \vee q :. \supset \vdash .$ Prop

[Taut. *2.38]

$*2.41 \quad \vdash :. q . \vee . p \vee q : \supset . p \vee q$

Dem. [Assoc. $\frac{q, p, q}{p, q, r}$] $\vdash :. q . \vee . p \vee q : \supset : p . \vee . q \vee q :$
$\supset : p \vee q :. \supset \vdash .$ Prop.

[Taut. Sum]

$*2.42 \quad \vdash :. \sim p . \vee . p \supset q : \supset . p \supset q$ [$*2.4 \ \frac{\sim p}{p}$]

$*2.43 \quad \vdash :. p . \supset . p \supset q : \supset . p \supset q$ [$*2.42$]

$*2.45 \quad \vdash : \sim (p \vee q) . \supset . \sim p$ [$*2.2$ Transp]

$*2.46 \quad \vdash : \sim (p \vee q) . \supset . \sim q$ [$*1.3$ Transp]

$*2.47 \quad \vdash : \sim(p \vee q) . \supset . \sim p \vee q \quad [*2.45 . *2.2 \frac{\sim p}{p} \text{ Syll}]$

$*2.48 \quad \vdash : \sim(p \vee q) . \supset . p \vee \sim q \quad [*2.46 *1.3 \frac{\sim q}{q} \text{ Syll}]$

$*2.49 \quad \vdash : \sim(p \vee q) . \supset . \sim p \vee \sim q \quad [*2.45 . *2.2 \frac{\sim p, \sim q}{p, q} . \text{Syll}]$

$*2.5 \quad \vdash : \sim(p \supset q) . \supset . \sim p \supset q \quad [*2.47 \frac{\sim p}{p}]$

$*2.51 \quad \vdash : \sim(p \supset q) . \supset . p \supset \sim q \quad [*2.48 \frac{\sim p}{p}]$

$*2.52 \quad \vdash : \sim(p \supset q) . \supset . \sim p \supset \sim q \quad [*2.49 \frac{\sim p}{p}]$

$*2.521 \quad \vdash : \sim(p \supset q) . \supset . q \supset p \quad [*2.52 . 17]$

$*2.53 \quad \vdash : p \vee q . \supset . \sim p \supset q$

Dem. $\vdash . *2.12 . 38 . \supset \vdash : p \vee q . \supset . \sim(\sim p) \vee q : \supset \vdash . \text{Prop}$

$*2.54 \quad \vdash : \sim p \supset q . \supset . p \vee q \quad [*2.14 . 38]$

$*2.55 \quad \vdash :: \sim p . \supset : p \vee q . \supset . q \quad [*2.53 \text{ Comm}]$

$*2.56 \ \vdash :. \sim q . \supset : p \vee q . \supset . p$ $\left[*2.55 \dfrac{q, p}{p, q} \text{ Perm}\right]$

$*2.6 \ \vdash :. \sim p \supset q . \supset : p \supset q . \supset . q$

Dem. $[*2.38]$ $\vdash :. \sim p \supset q . \supset : \sim p \vee q . \supset . q \vee q$ (1)

[Taut. Syll] $\vdash :: \sim p \vee q . \supset . q \vee q : \supset : \sim p \vee q . \supset . q$ (2)

$\vdash . (1)(2) . \text{Syll} . \supset \vdash :. \sim p \supset q . \supset : \sim p \vee q . \supset . q :. \supset \vdash .$ Prop.

$*2.61 \ \vdash :. p \supset q . \supset : \sim p \supset q . \supset . q$ $[*2.6 \text{ Comm}]$

$*2.62 \ \vdash :. p \vee q . \supset : p \supset q . \supset . q$ $[*2.53 . 6 \text{ Syll}]$

$*2.621 \ \vdash :. p \supset q . \supset : p \vee q . \supset . q$ $[*2.62 \text{ Comm}]$

$*2.63 \ \vdash :. p \vee q . \supset : \sim p \vee q . \supset . q$ $[*2.62]$

$*2.64 \ \vdash :. p \vee q . \supset : p \vee \sim q . \supset . p$ $\left[*2.63 \dfrac{q, p}{p, q} \text{ Perm}\right]$

$*2.65 \ \vdash :. p \supset q . \supset : p \supset \sim q . \supset . \sim p$ $\left[*2.64 \dfrac{\sim p}{p}\right]$

$*2.67 \ \vdash :. p \vee q . \supset . q : \supset . p \supset q$

Dem. $[*2.54 \text{ Syll}]$ $\vdash :. p \vee q . \supset . q : \supset : \sim p \supset q . \supset . q$ (1)

$[*2.24 \text{ Syll}]$ $\vdash :. \sim p \supset q . \supset . q : \supset . p \supset q$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \text{Syll} . \supset \vdash .$ Prop.

*2.68 $\vdash :. p \supset q . \supset . q :\supset . p \vee q$

Dem. $\left[*2.67 \frac{\sim p}{p} \right] \vdash :. p \supset q . \supset . q : \supset . \sim p \supset q$ (1)

$\vdash . (1) . *2.54 . \supset \vdash .$ Prop

*2.69 $\vdash :. p \supset q . \supset . q : \supset : q \supset p . \supset . p$ $\left[2.68 \text{ Perm. } *2.62 \frac{q, p}{p, q} \right]$

*2.73 $\vdash :. p \supset q . \supset : p \vee q \vee r . \supset . q \vee r$ [*2.621.38]

*2.74 $\vdash :. q \supset p . \supset : p \vee q \vee r . \supset . p \vee r$ $\left[*2.73 \frac{q, p}{p, q} \text{ Assoc. Syll} \right]$

*2.75 $\vdash :: p \vee q . \supset :. p . \vee . q \supset r : \supset . p \vee r$ $\left[*2.74 \frac{\sim p}{q} *2.53.31 \right.$

*2.76 $\vdash :. p . \vee . q \supset r : \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ [*2.75 Comm]

*2.77 $\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$ $\left[*2.76 \frac{\sim p}{p} \right]$

*2.8 $\vdash :. q \vee r . \supset : \sim r \vee s . \supset . q \vee s$

Dem. $\vdash . *2.53 . \text{Perm} . \supset \vdash :. q \vee r . \supset : \sim r \supset q :$

$\supset : \sim r \vee s . \supset . q \vee s :. \supset \vdash .$ Prop.

*2.81 $\vdash :: q . \supset . r \supset s : \supset :. p \vee q . \supset : p \vee r . \supset p \vee s$

Dem.

$\vdash . \text{Summ} . \supset \vdash :: q . \supset . r \supset s : \supset :. p \vee q . \supset : p . \vee . r \supset s$ (1)

$\vdash . {*2.76} \text{ Syll} . \supset \vdash :: p \vee q . \supset : p . \vee . r \supset s :. \supset :.$
$p \vee q . \supset : p \vee r . \supset . p \vee s$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \text{Prop}$

$*2.82$ $\vdash :. p \vee q \vee r . \supset : p \vee \sim r \vee s . \supset . p \vee q \vee s$

$\left[{*2.8} . {*2.81} \frac{q \vee r , \sim r \vee s , q \vee s}{q , \; r , \; s} \right]$

$*2.83$ $\vdash :: p . \supset . q \supset r : \supset :. p . \supset . r \supset s : \supset : p . \supset . q \supset s$

$\left[{*2.82} \frac{\sim p , \sim q}{p , q} \right]$

$*2.85$ $\vdash :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : p . \vee . q \supset r$

Dem.

[Add. Syll] $\vdash :. p \vee q . \supset . r : \supset . q \supset r$ (1)

$\vdash . {*2.55} . \supset \vdash :: \sim p . \supset :. p \vee r . \supset . r :.$

[Syll] $\supset :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : p \vee q . \supset . r :.$

[(1) . *2.83] $\supset :: p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : q \supset r$ (2)

$\vdash .(2).\mathrm{Comm}. \supset \vdash :: p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : \sim p . \supset . q \supset r :$

[*2.54] $\supset : p . \vee . q \supset r :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}.$

*2.86 $\vdash :: p \supset q . \supset . p \supset r : \supset : p . \supset . q \supset r$ [*2.85 $\frac{\sim p}{p}$]

ica. 158-X

ual

ts

[illegible]

Str. 116 Rozdz. 3 Russell. Principia mathematica. 158

$*3.01 \quad p.q. = .\sim(\sim p \vee \sim q)$ Df.

$*3.02 \quad p \supset q \supset r. = .p \supset q . q \supset r$ Df

$*3.03$ Given two asserted elementary propositional functions "$\vdash . \phi p$" and "$\vdash . \psi p$" whose arguments are elementary propositions, we have $\vdash . \phi p . \psi p$.

Dem. $\vdash . *1.7.72 . *2.11 . \supset \vdash : \sim \phi p \vee \sim \psi p . \vee . \sim(\sim \phi p \vee \sim \psi p)$ (1)

$\vdash . (1) . *2.32 . (*1.01) . \supset \vdash :: \phi p . \supset : \psi p . \supset . \sim(\sim \phi p \vee \sim \psi p)$ (2)

$\vdash . (2) . (*3.01) . \supset \vdash :: \phi p . \supset : \psi p . \supset . \phi p . \psi p$ (3)

$\vdash . (3) . *1.11 . \supset \vdash .$ Prop

$*3.1 \quad \vdash : p.q. \supset . \sim(\sim p \vee \sim q)$ [Id. (*3.01)]

$*3.11 \quad \vdash : \sim(\sim p \vee \sim q) . \supset . p.q$ [Id. (*3.01)]

$*3.12 \quad \vdash : \sim p . \vee . \sim q . \vee . p.q$ $\left[*2.11 \dfrac{\sim p \vee \sim q}{p}\right]$

$*3.13 \vdash : \sim(p.q) . \supset . \sim p \vee \sim q$ [*3.11. Transp]

$*3.14 \vdash : \sim p \vee \sim q . \supset . \sim(p.q)$ [*3.1 Transp]

$*3.2 \vdash :. p . \supset : q . \supset . p.q$ [*3.12]

$*3.21 \vdash :. q . \supset : p . \supset . p.q$ [*3.2. Comm]

$*3.22 \vdash : p.q . \supset . q.p$

Dem. $\left[*3.13 \frac{q,p}{p,q}\right] \vdash : \sim(q.p) . \supset . \sim q \vee \sim p .$

[Perm] $\supset . \sim p \vee \sim q$

[*3.14] $\supset . \sim(p.q)$ (1)

$\vdash . (1) . \text{Transp} . \supset \vdash . \text{Prop}$

$*3.24 \vdash . \sim(p . \sim p)$

Dem. $\left[*2.11 \frac{\sim p}{p}\right] \vdash . \sim p \vee \sim(\sim p) . \supset$

$\left[*3.14 \frac{\sim p}{q}\right] \vdash . \sim(p . \sim p)$

$*3.26 \quad \vdash : p . q . \supset . p$

Dem. $\left[*2.02 \ \frac{q,\,p}{p,\,q}\right] \quad \vdash : p . \supset : q \supset p \quad (1)$

$[(1).(*1.01)] \quad \vdash : \sim p . \vee . \sim q \vee p :$

$[*2.31] \quad \supset \vdash : \sim p \vee \sim q . \vee . p :$

$\left[*2.53 \ \frac{\sim p \vee \sim q,\ p}{p\ ,\ q}\right] \supset \vdash : \sim(\sim p \vee \sim q) . \supset . p \quad (2)$

$[(2).(*3.01)] \quad \vdash : p . q . \supset . p$

$*3.27 \quad \vdash : p . q . \supset . q$

Dem. $[*3.22] \quad \vdash : p . q . \supset . q . p .$

$\left[*3.26 \ \frac{q,\,p}{p,\,q}\right] \quad \supset . q : \supset \vdash .$ Prop

$*3.3 \quad \vdash :: p . q . \supset . r : \supset : p . \supset . q \supset r$

Dem. $[\mathrm{Id}.(*3.01)] \quad \vdash :: p . q . \supset . r : \supset : \sim(\sim p \vee \sim q) . \supset . r :$

$[\mathrm{Transp}] \quad \supset : \sim r . \supset . \sim p \vee \sim q :$

$[\mathrm{Id}.(*1.01)] \quad \supset : \sim r . \supset . p \supset \sim q :$

$[\mathrm{Comm}] \quad \supset : p . \supset . \sim r \supset \sim q :$

$[\mathrm{Transp}.\mathrm{Syll}] \quad \supset : p . \supset . q \supset r :. \supset \vdash .$ Prop

$*3.31 \quad \vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : p . q . \supset . r$

Dem. $[\mathrm{Id}. (*1.01)] \quad \vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : \sim p . \vee . \sim q \vee r :$

$[*2.31] \quad \supset : \sim p \vee \sim q . \vee . r :$

$\left[*2.53 \dfrac{\sim p \vee \sim q, r}{p, \quad q}\right] \quad \supset : \sim(\sim p \vee \sim q) . \supset . r :$

$[\mathrm{Id}. (*3.01)] \quad \supset : p . q . \supset . r :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*3.33 \quad \vdash : p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r \quad$ [Syll. Imp]

$*3.34 \quad \vdash : q \supset r . p \supset q . \supset . p \supset r \quad$ [Syll. Imp]

$*3.35 \quad \vdash : p . p \supset q . \supset . q \quad$ [*2.27 . Imp]

$*3.37 \quad \vdash :. p . q . \supset . r : \supset : p . \sim r . \supset . \sim q$

Dem.

$\vdash . \mathrm{Transp} . \supset \vdash : q \supset r . \supset . \sim r \supset \sim q :$

$[\mathrm{Syll}] \quad \supset \vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : p . \supset . \sim r \supset \sim q \qquad (1)$

$\vdash . \mathrm{Exp} \quad \supset \vdash :. p . q . \supset . r : \supset : p . \supset . q \supset r \qquad (2)$

$\vdash . \mathrm{Imp} . \quad \supset \vdash :. p . \supset . \sim r \supset \sim q : \supset : p . \sim r . \supset . \sim q \qquad (3)$

$\vdash . (2) . (1) . (3) . \mathrm{Syll} . \supset \vdash . \mathrm{Prop}.$

$*3.4 \quad \vdash : p . q . \supset . p \supset q \quad$ [*2.51 . Transp . (*1.01 . *3.01)]

*3.41 $\vdash :. p \supset r . \supset : p . q . \supset . r$ [*3.26 . Syll]

*3.42 $\vdash :. q \supset r . \supset : p . q . \supset . r$ [*3.27 . Syll]

*3.43 $\vdash :. p \supset q . p \supset r . \supset : p . \supset . q . r$

Dem. $\vdash . *3.2 . \supset \vdash :. q . \supset : r . \supset . q . r$ (1)

$\vdash . (1) . \mathrm{Syll} . \supset \vdash :: p \supset q . \supset :. p . \supset : r . \supset . q . r :.$

[*2.77] $\supset :. p \supset r . \supset : p . \supset . q . r$ (2)

$\vdash . (2) . \mathrm{Imp} . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*3.44 $\vdash :. q \supset p . r \supset p . \supset : q \vee r . \supset . p$

Dem. $\vdash . \mathrm{Syll} . \supset \vdash :. \sim q \supset r . r \supset p . \supset : \sim q \supset p :$

[*2.6] $\supset : q \supset p . \supset . p$ (1)

$\vdash . (1) . \mathrm{Exp} . \supset \vdash :: \sim q \supset r . \supset :. r \supset p . \supset : q \supset p . \supset . p :.$

[Comm . Imp] $\supset :. q \supset p . r \supset p . \supset . p$ (2)

$\vdash . (2) . \mathrm{Comm} . \supset \vdash :. q \supset p . r \supset p . \supset : \sim q \supset r . \supset . p :.$

[*2.53 . Syll] $\supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*3.45 $\vdash :. p \supset q . \supset : p . r . \supset . q . r$

Dem.

$\vdash . \text{Syll} \frac{\sim r}{r} . \supset \vdash :. p \supset q . \supset : q \supset \sim r . \supset . p \supset \sim r :$

[Transp] $\supset : \sim (p \supset \sim r) . \supset . \sim (q \supset \sim r) :.$

[Id. (*1.01 . *3.01)] $\supset \vdash .$ Prop

*3.47 $\vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p . q . \supset . r . s$

Dem. $\vdash . {*}3.26 . \supset \vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p \supset r :$

[Fact] $\supset : p . q . \supset . r . q :$

[*3.22] $\supset : p . q . \supset . q . r$ (1)

$\vdash . {*}3.27 . \supset \vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : q \supset s :$

[Fact] $\supset : q . r . \supset . s . r :$

[*3.22] $\supset : q . r . \supset . r . s$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . {*}3.03 . {*}2.83 . \supset$

$\vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p . q . \supset . r . s :. \supset \vdash .$ Prop.

*3.48 $\vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p \vee q . \supset . r \vee s$

This theorem is the analogue of *3.47

Dem.

$\vdash . *3.26 . \supset \vdash :: p \supset r . q \supset s . \supset : p \supset r :$

[Summ] $\supset : p \vee q . \supset . r \vee q :$

[Perm] $\supset : p \vee q . \supset . q \vee r$ (1)

$\vdash . *3.27 . \supset \vdash :: p \supset r . q \supset s . \supset : q \supset s :$

[Summ] $\supset : q \vee r . \supset . s \vee r :$

[Perm] $\supset : q \vee r . \supset . r \vee s$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *2.83 . \supset$

$\vdash :: p \supset r . q \supset s . \supset : p \vee q . \supset . r \vee s :. \supset \vdash .$ Prop

Russell Principia mathematica, 1910.1913

I

Alphabetical list of propositions referred to by names.

Name	Number	
Abs	*2.01	$\vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$
Add	*1.3	$\vdash : q . \supset . p \vee q$
Ass	*3.35	$\vdash : p . p \supset q . \supset . q$
Assoc	*1.5	$\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$
Comm	*2.04	$\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$
Comp	*3.43	$\vdash :. p \supset q . p \supset r . \supset : p . \supset . q . r$
Exp	*3.3	$\vdash :. p . q . \supset . r : \supset : p . \supset . q \supset r$
Fact	*3.45	$\vdash :. p \supset q . \supset : p . r . \supset . q . r$
Id	*2.08	$\vdash . p \supset p$
Imp	*3.31	$\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : p . q . \supset . r$

Π 166

Name	Nummer	
Perm	*1.4	$\vdash : p \vee q \,.\supset.\, q \vee p$
Simp	*2.02	$\vdash : q \,.\supset.\, p \supset q$
"	*3.26	$\vdash : p . q \,.\supset.\, p$
"	*3.27	$\vdash : p . q \,.\supset.\, q$
Sum	*1.6	$\vdash :. q \supset r \,.\supset:\, p \vee q \,.\supset.\, p \vee r$
Syll	*2.05	$\vdash :. q \supset r \,.\supset:\, p \supset q \,.\supset.\, p \supset r$
"	*2.06	$\vdash :. p \supset q \,.\supset:\, q \supset r \,.\supset.\, p \supset r$
"	*3.33	$\vdash : p \supset q \,.\, q \supset r \,.\supset.\, p \supset r$
"	*3.34	$\vdash : q \supset r \,.\, p \supset q \,.\supset.\, p \supset r$
Taut	*1.2	$\vdash : p \vee p \,.\supset.\, p$
Transp	*2.03	$\vdash : p \supset \sim q \,.\supset.\, q \supset \sim p$
"	*2.15	$\vdash : \sim p \supset q \,.\supset.\, \sim q \supset p$
"	*2.16	$\vdash : p \supset q \,.\supset.\, \sim q \supset \sim p$
"	*2.17	$\vdash : \sim q \supset \sim p \,.\supset.\, p \supset q$

III 167

Name	Nummer	
Transp	*3.37	$\vdash :. \, p . q . \supset . r : \supset : p . \sim r . \supset . \sim q$
"	*4.1	$\vdash : p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p$
"	*4.11	$\vdash : p \equiv q . \equiv . \sim p \equiv \sim q$

170

171

168

radia-

r Pri-

ssnem,

)

r-8-9

Dowód Bernaysa aksjomatu 1·5 CApAqrAqApr na podstawie innych pozostałych aksjomatów Whitehead-Russella.

(P. Bernays, Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia mathematica, Math. Zeitschr. 25 (1926). - Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoret. Logik (1928) §10 str. 23, §11, str. 24)

Def. Cpq = ANpq

Aksj: 1 CAppp

2 CpApq

3 CApqAqp

4 CCpqCArpArq

Dowód: 4 r/Nr. Def. + 5

5 CCpqCCrpCrq

5 p/Apq, q/Aqp, r/p + C3 - 2 - 6

6 CpAqp

4 p/r, q/Apr, r/q + C6 p/r, q/p - 7

7 CAqrAqApr

4 p/Aqr, q/AqApr, r/p + C7 - 8

8 CApAqrApAqApr

5 p/ApAqApr, q/AAqAprp, r/ApAqr + C3 q/AqApr - 8 - 9

9 CApAqrAAqAprp

5 p/Apr, q/AqApr, r/p + C6 p/Apr - 2 q/r - 10

10 CpAqApr

4 q/AqApr, r/AqApr + C 10 - 11

11 CAAqAprpAAqAprAqApr

5 p/AAqAprAqApr, q/AqApr, r/AAqAprp + C1p/AqApr - 11 - 12

12 CAAqAprpAqApr

5 p/AAqAprp, q/AqApr, r/ApAqr + C 12 - 9 - 13

13 CApAqrAqApr

[illegible] Bernaysa

Aksjomaty:

1. CAppp
2. CpApq (CqApq)
3. CApqAqp
4. CCpqCArpArq.

14 / CApAqrAqApr

a) CqApq (2)

b) CAqrAqApr (2, 4)

c) CApAqrAqApr (3)

d) CpApr (2) 6 2

e) CAprAqApr (4) 6

f) CpAqApr (d, e, [illegible])

g) CAAqAprpAAqAprAqApr (4, 4, [illegible])

h) CAAqAprpAqApr (1)

CApAqrAqApr (c, h, [illegible]).

4. r/Nr Def + [illegible] 5

5. CCpqCANrpANrq

5 CCpqCCrpCrq

5 p/Apq, q/Aqp r/p + C 3 - 2 - 6

6 CpAqp

4 p/r, q/Apr, r/q + C 6 p/r, q/p - 7

7 CAqrAqApr

4 p/Aqr, q/AqApr, r/p + C 7 - 8

8 CApAqrApAqApr

5 p/ApAqApr, q/AAqAprp, r/ApAqr + C 3 q/AqApr - 8 - 9

9 CApAqrAAqAprp

5 p/Apr, q/AqApr, r/p + C 6 p/Apr - 2 q/[illegible] r - 10

10 CpAqApr F

F 4 q/AqApr, r/AqApr + C 10 - 11.

11 CAAqAprpAAqAprAqApr

5 p/AAqAprAqApr, q/AqApr, r/AAqAprp + C 1 p/AqApr - 11 - 12

12 CAAqAprpAqApr

5 p/AAqAprp, q/AqApr, r/ApAqr + C 12 - 9 - 13

13 CApAqrAqApr

Dowód, że aksjomat III Fregego wynika z dwóch pierwszych.
(Łukasiewicz, Z historji logiki zdań, odb. z 37 rocz. Przegl. Fil. (1934) nr. 23 (437))

Aksjomatyka Fregego:
I CpCqp
II. CCpCqrCCpqCpr
III CCpCqrCqCpr
IV CCpqCNqNp
V CNNpp
VI CpNNp

I p/CCpCqrCCpqCpr, q/Cqr × C II − 1
1 CCqrCCpCqrCCpqCpr

II p/Cqr, q/CpCqr, r/CCpqCpr × C1 − 2
2 CCCqrCpCqrCCqrCCpqCpr
2 × C I p/Cqr, q/p − 3
3 CCqrCCpqCpr

II p/Cqr, q/Cpq, r/Cpr × C3 − 4
4 CCCqrCpqCCqrCpr

I p/CpCqr, q/r × C I − 5
5 CrCpCqp

4 q/Cpq, p/q × C5. r/CCpqr, p/q, q/p − 6
6 CCCpqrCqr

3 q/CCpqr, r/Cqr, p/s × C 6 − 7
7 CCsCCpqrCsCqr

7 s/CpCqr, r/Cpr × C II − 8
8 CCpCqrCqCpr.

Teorja zdań kategorycznych (logika Arystotelesa).

Teorja zdań kategorycznych (Arystotelesowskich).

(Łukasiewicz, Elementy logiki matemat. V. Teorja sylogizmu Arystot. str. 170 – 190).

1. W zdaniach kategorycznych występują zmienne nazwowe. Dla ich oznaczenia będziemy używali początkowych liter alfabetu łacińskiego „a", „b", „c" ... „m" w odróżnieniu od zmiennych zdaniowych „p", „q", „r", ... Wprowadzamy nadto dwa ~~nowe~~ nowe wyrazy stałe „U" i „I" oznaczające funktory zdaniotwórcze o argumentach nazwowych. Wyrażenie postaci „Uab" czytamy „każde a jest b" i nazywamy zdaniem ogólnym twierdzącym; (~~[illegible]~~ reprezentujące uniwersalne generalne zdanie) „Iab", zaś zdaniem szczegółowym twierdzącym czytamy „pewne a jest b". Wyrażenia te występują w następujących czterech aksjomatach nowych wyrażeń:

1 Uaa

2 Iaa

3 CKUmbUamUab

4 CKUmbImaIab

Wzorem: Każde a jest a
Pewne a jest a
Jeżeli każde m jest b i każde a jest m, to każde a jest b
(tryb sylogizmu Barbara)

Jeżeli każde m jest b i pewne m jest a, to pewne a jest b (tryb sylogistyczny Datisi).

Wprowadzamy ponadto dwie definicje ~~funktorów~~ dla wyrażeń „O" oraz „Y" jako funktorów zdaniotwórczych o dwóch argumentach nazwowych:

D1. Oab = NUab

D2. Yab = NIab

„Oab" czyli zdanie szczegółowe przeczące, „pewne a nie jest b" jest zdefiniowane jako zaprzeczenie zdania ogólnego twierdzącego, „Yab" czyli zdanie ogólne przeczące jest zdefiniowane jako zaprzeczenie zdania szczegółowego twierdzącego.

Teorię zdań kategorycznych opieramy na teorii dedukcji jako na teorii niższej, będącej zdania czyste, bez zmiennych w ich przedmiotowym trybie; uważamy również za wyrażenie sensowne każde wyrażenie, które powstaje z wyrażeń sensownych teorii dedukcji przez podstawienie za zmienne zdaniowe któregoś z wyrażeń postaci „Uab", „Iab", „Oab" i „Yab".

Posługujemy się nadto trzema regułami wnioskowania. Reguła podstawiania z teorii dedukcji jest tu w ten sposób zmodyfikowana, się pozwala w tezach teorji dedukcji podstawiać za zmienne zdaniowe wyrażenia sensowne, zawierające obok wyrazów teorji dedukcji, wyrazy oznaczające zdania kategoryczne. Za zmienne nazwowe wolno podstawiać jedynie zmienne nazwowe. Reguły odrywania z teorji dedukcji przenoszą się bez zmiany. Reguła zastępowania, oparta o definicje D1, D2, pozwala zastępować ~~[illegible]~~ wyrażenia równokształtne z prawemi stronami tych definicji lub ich podstawieniami, odpowiedniemi lewemi stronami.

Przy dowodzie twierdzeń teorji zdań kategorycznych będziemy korzystali bezpośrednio z następujących twierdzeń teorji dedukcji:

Tw 1. Cpp
Tw 2. CCpqCCqrCpr
Tw 3. CCpqCNqNp
Tw. 4. CCpNqCqNp
Tw. 5 CCNpqCNqp
Tw. 6. CCKpqrCpCqr
Tw. 7 CCKpqrCqCpr
Tw. 8 CCKpqrCKpNrNq
Tw 9. CCKpqrCKNrqNp
Tw. 10 CCKpqrCCspCKsqr
Tw. 11 CCKpqrCCsqCKpsr
Tw. 12 CCKpqrCCrsCKpqs

2. [illegible] H1

a/ [illegible] ([illegible])

[illegible] ;

Tr 1 p/NUab * D1. I - 5

5 COab NUab

Tr. 1 p/NUab * D1. II - 6

6 CNUab Oab

Tr. 4. p/Oab, q/Uab * C5 - 7

7 CUab NOab

Tr. 5 p/Uab, q/Oab * C6 - 8

8 CNOab NUab

Tr. 1. p/NTab * D2. I - 9

9. CYab NTab

Tr. 1 p/NTab * D2. II - 10

10 CNTab Yab

Tr. 4 p/Yab, q/Tab * C9 - 11

11 CTab NYab

Tr. 5 p/Tab, q/Yab * C10 - 12

12. CNYab Tab

Prawo podrzędności:

Tw. 7 p/Uab, q/Iaa, r/Iab * C 4 u/a — C 2 — 13

13 C Uab Iab

Tw. 3 p/Uab, q/Iab * C 13 — 14

14. C N Iab N Uab

14 * D 2 . D 1 — 15

15 C Yab Oab

Tw. 3 p/Yab, q/Oab * C 15 — 16

16 C N Oab N Yab

Prawo przeciwieństwa:

14 * D 2 — 17

17 C Yab N Uab

Tw. 4 p/Yab, q Uab * C 17 — 18

18 C Uab N Yab

Prawo podprzeciwieństwa:

14 * D 1 — 19

19 C N Iab Oab

Tw. 5 p/Iab, q/Oab * C 19 — 20

20 C N Oab Iab

6.) Prawo konwersji:

Tw 6. p/Uaa, q/Iab, r/Iba * C 4 m/a, b/a, a/b – C 1 – 2i

2i CIabIba

Tw 2 p/Uab, q/Iab, r/Iba * C 13 – 2i – 22

22 CUabIba

Tw 3 p/Iba, q/Iab * C 21 a/b, b/a – 23

23 CNIabNIba

23 * D2' – 24

24 CYabNIba

24 * D2 a/b, b/a – 25

25 CYabYba

c) Sylogizmy:

Sylogizmy Barbara z I-szej figury jako tezę i innych aksjomatów, uzyskuje przez to rozumowanie 22 tezy (łącznie z odbiciami):

Tw. 11 p/Umb, q/Ima, r/Iab, s/Uam * C4 – C22 b/m – 26

26 CKUmbUamIab (Barbari)

Tw 8. p/Umb, q/Ima, r/Iab * C4 – 27

27 CKUmbNIabNIma

Tw 11 p/Umb, q/NIab, r/NIma, s/Yba * C27 – 24 a/b, b/a – 28

28 CKUmbYbaNIma

Tw 12 p/Uam, q/Ymb, r/NIab, s/Yab * C 28 m/a, b/m, a/b –

C 10 – 29

29 CKYmbIamYab (Celarent)

Tw 2 p/KYmbIam, q/Yab, r/Oab * C29 - C15 - 30

30 CKYmbIamOab (Celaront)

Tw 11 p/Imb, q/Ima, r/Iab, s/Iam * C4 - C21 b/m - 31

31 CKImbIamIab (Darii)

Tw 9 p/Imb, q/Ima, r/Iab * C4 - 32

32 CKNIabImaNImb

32 a/m, m/a * D2 a/m . D1. - 33

33 CKYmbIamOab (Ferio)

Tw 10 p/Ymb, q/Iam, r/Yab, s/Ybm * C29 - C25 a/b, b/a - 34

34 CKYbmIamYab (Cesare)

Tw 2 p/KYbmIam, q/Yab, r/Oab * C34 - C15 - 35

35 CKYbmIamOab (Cesaro)

Tw 12 p/Yam, q/Ibm, r/Yba, s/Yba * C34 b/a, a/b - C25 a/b, b/a - 36

36 CKIbmYamYab (Camestres)

Tw 2 p/KIbmYam, q/Yab, r/Oab * C36 - C15 - 37

37 CKIbmYamOab (Camestrop)

Tw 10 p/Yma, q/Iam, r/Oab, s/Ybm * C33 - C25 a/b, b/m - 38

38 CKYbmIamOab (Festino)

Tw 8 p/Imb, q/Iam, r/Iab * C3 - 39

39 CKImbNIabNIam

39 m/e, b/m * D1. b/m D1 - 40

40 CKMbm Oam Oeb (Baroco)

Tw 11 p/Uma, q/Ima, r/Ieb, s/Uma * C4 - C13 e/m, b/a - - 41

41 CKUmb Uma Iab (Darapti)

Tw. 11. p/Ymb, q/Iam, r/Oab, s/Uam * C33 - 22 a/m, b/a - 42

42 CKYmb Uma Oab (Felapton)

Tw. 12 p/Uma, q/Imb, r/Iba, s/Iab * C4 b/a, a/b - C21 a/b, b/a - 43

43 CKImb Uma Iab (Disamis)

Tw. 9 p/Umb, q/Uam, r/Uab * C3 - 44

44 CKNUab Uam NUmb

44 a/m, m/a * D1. a/m D1. - 45

45 CKOmb Uma Oab (Bocardo)

Tw. 11 p/Ymb, q/Iam, r/Oab, s/Ima * C33 - C21 a/m, b/a - 46

46 CKYmb Ima Oab (Ferison)

Tw. 10 p/Imb, q/Uma, r/Iab, s/Ubm * C43 - C22 a/b, b/m - 47

47 CKUbm Uma Iab (Bamalip)

Tw 11 p/Ubm, q/Yam, r/Yab, s/Yma * C36 - C15 a/m, b/a - 48

48 CKUbm Yma Yab (Calemes)

Tw. 2 p/KUbmYma, q/Yab, r/Oab * C48 - C15 - 49

49 CKUbmYma Oab (Calemop)

Tw. 10 p/Iwb, q/Awa, r/Iab, s/Ibw * C43 - C21 a/b, b/w - 50

50 CKIbwAwaIab (Dimatis)

Tw. 10 p/Ewb, q/Awa, r/Oab, s/Ebw * C42 - C25 a/b, b/w - 51

51 CKEbwAwaOab (Fesapo)

Tw. 10 p/Ewb, q/Iwa, r/Oab, s/Ebw * C46 - C25 a/b, b/w - 52

52 CKEbwIwaOab (Fresison)

1.

Teorja dedukcji z kwantyfikatorami

(Łukasiewicz, Elementy logiki matematycznej, 1929. IV. § 8, str. 154-169.)

1. ~~Symbol kwantyfikatora~~ Symbole kwantyfikatorów (quantifier) zostały wprowadzone przez Ch. S. Peirce'a (On the Algebra of Logic, A contribution to the philosophy of notation. Am. Journal of Mathem. VII. 1885). Jeżeli „p, q" są zmienne zdaniowe, a $\varphi(p)$ reprezentuje zdanie teorji dedukcji, zawierające zmienną p, to wyrażenie $\Pi p \varphi(p)$ oznacza „dla każdego p: $\varphi(p)$" (n.p. „$\Pi p Cpq$" znaczy „dla każdego p: jeżeli p, to q"), a wyrażenie $\Sigma p \varphi(p)$ oznacza „dla pewnego p: $\varphi(p)$" (np. $\Sigma p Kpq$ znaczy „dla pewnego p: ~~jeżeli~~ p i q"). Symbol „Π" nazywamy kwantyfikatorem ogólnym, „Σ" kwantyfikatorem szczegółowym. ~~Kwa~~ W każdem wyrażeniu z kwantyfikatorem ~~bezpośrednio po kwa~~ ~~ntyfikatorze~~ występuje (~~jedna~~ bezpośrednio po nim) zmienna, ~~[illegible]~~ po niej zaś samoistne wyrażenie, w którem przynajmniej raz występuje ta zmienna. Uważam nie więc samo wyrażenie $\Pi p Cqq$ nonsensem. Kwantyfikator nie jest funktorem, tak jak np. „Πp" itp. „C", „A" itp. gdyż te ostatnie wyznaczają wyrażenie zmienne, ani też ... ani nie wyrażenia zmienne, natomiast z nadw-

fikatór przedrostka wyrażenie ~~...~~, przed którem stoi, na drugie - określone - przez dwie lub trzy.

wymowniki

Zmienną występującą bezpośrednio po kwantyfikatorze i zmienne w następującem wyrażeniu zdaniowem mogą być zmiennemi związanemi przez ten kwantyfikator lub zmiennemi wolnemi; zmienną niezwiązaną nazywamy wolną lub rzeczywistą. W wyrażeniu „ΠpCpq" „p" jest zmienną związaną, „q" jest zmienną wolną, w wyrażeniu „CΠpCpqp" „p" w „Cpq" jest zmienną związaną, natomiast „p" na ostatniem miejscu ~~...~~ jest zmienną wolną, bo nie należy do wyrażenia zamkniętego „Cpq", następującego po „Πp". Jeśli w jednem wyrażeniu, następującem kwantyfikator występuje jedna zmienna wolna, to można ją związać innym kwantyfikatorem. Tak się ma rzecz z wyrażeniem „ΠpCΠpCpqp" W wyrażeniu tem występują trzy zmienne związane, ~~wymownikowa~~ne z „p": pierwsza i druga przez pierwszy kwantyfikator, druga i trzecia drugi. Pozostaje jeszcze zmienna wolna „q", można ją związać nowym kwantyfikatorem, tworząc wyrażenie zamknięte „ΠqΠpCΠpCpqq". Zagadnienie, które wyrażenia są wyrażeniami zamkniętemi w teorji dedukcji z kwantyfikatorami, należy

się rachunku następującym twierdzeniem: Jeżeli φ(p) jest wyraże-
niem sensownym, zawierającym przynajmniej jedną stałą
zmienną, różniącą się z „p", to wyrażenie Πp φ(p) jest
wyrażeniem sensownym, w którym zmienne odpowiadające
z „p" są przy zmiennych wiązanych.

Sens kwantyfikatorów objaśnimy przy pomocy symboli prawdy
„1" i fałszu „0". Wyrażenie „dla każdego p: φ(p)" oddaje,
używamy się, by stwierdzić, że wyrażenie „φ(p)" sprawdza się
przy wszelkich podstawieniach jakiegoś zdania za zmienną
„p", wyrażenie zaś „dla pewnego p: φ(p)" oddaje, by
stwierdzić, że wyrażenie „φ(p)" sprawdza się przynajmniej
przy jednym podstawieniu jakiegoś zdania za „p". Ponieważ
za zmienną „p" może wchodzić jedynie albo zdanie „1"
lub „0". Wyrażenie Πp φ(p) jest więc równoważne z Kφ(1)φ(0),
a wyrażenie Σp φ(p) jest równoważne z Aφ(1)φ(0) (Ana-
logicznie mamy w algebrze logicznej iloczyn, logiczną sumę,
[illegible] - sumy logicznej). Postępując w ten sposób
[illegible] wszystkimi, sprowadzamy każde kwantyfikatorowe wyrażenie
sensowne. Tak np. „Πpp" jest fałszem, gdyż Πpp = K01 = 0

„$\Pi p C p p$" jest prawdą, gdyż $\Pi p C p p = K C 0 0 C 1 1 = K 1 1 = 1$. Prawdą jest również „$C \Pi p p p$" gdyż $C \Pi p p p = C K 0 1 p = C 0 p$, a to ostatnie jest ~~[illegible]~~ ogólnie prawdziwe, gdyż $C 0 0 = 1$ i $C 0 1 = 1$. Natomiast nie jest ogólnie prawdziwe wyrażenie „$\Pi p C p q$" zawierające zmiennej wolnej „q", podstawiając bowiem $q/0$ otrzymamy $\Pi p C p 0 = K C 0 0 C 1 0 = K 1 0 = 0$.

Wyrażenie „$C p \Pi p p$" zachowuje się jak funkcja „$N p$", która daje wartości $N 0 = 1$ i $N 1 = 0$, albowiem podstawiając w niem na zmienną wolną $p/0$ otrzymujemy: $C 0 \Pi p p = C 0 K 0 1 = C 0 0 = 1$, podstawiając zaś $p/1$ mamy $C 1 \Pi p p = C 1 K 0 1 = C 1 0 = 0$. Opiera się na tem, ciekawa definicja negacji przy pomocy implikacji i kwantyfikatora ogólnego:

$$N p = C p \Pi p p$$

Dla kwantyfikatora szczegółowego przytoczymy następujące przykłady:

$\Sigma p p = A 0 1 = 1$

$\Sigma p C p q = A C 0 q C 1 q = A 1 C 1 q = 1$ (niezależnie od wartości „q").

Z prawa de Morgana wynika:

$N\Pi p\varphi(p) = NK\varphi(0)\varphi(1) = AN\varphi(0)N\varphi(1) = \Sigma pN\varphi(p)$

$\Sigma p\varphi(p) = A\varphi(0)\varphi(1) = NKN\varphi(0)N\varphi(1) = N\Pi pN\varphi(p)$

Wyrażenie „$N\Pi p\varphi(p)$" jest równoważne z wyrażeniem „$\Sigma pN\varphi(p)$" albo „$\Sigma p\varphi(p)$" z „$N\Pi pN\varphi(p)$"; równoważności te służą dla określenia kwantyfikatora szczegółowego przez kwantyfikator ogólny.

2) Teorja dedukcji z kwantyfikatorami daje się ująć w systemie aksjomatycznym, w którym terminami pierwotnymi są jedynie implikacja i kwantyfikator ogólny; inne te dwa terminy definiuje się wyżej, jak o tem wyżej wspomniano. ~~Reguł~~

~~Dyrektyw~~ wnioskowania jest więcej:

Z ~~[illegible]~~ reguły podstawiania i odrywania; druga jest taka sama jak w zwykłej teorji dedukcji, pierwsza wymaga bliższego określenia. Pozwala ona podstawiać wyrażenia zdaniowe z kwantyfikatorami ogólnymi, lecz jedynie za zmienne wolne, wymagając każda zmienna wolna wyrażenia podstawianego po podstawieniu została również zmienną wolną.√ Jeśli ~~zmienne~~ warunek ten nie będzie zachowany, to podstawienie może doprowadzić od wyrażenia prawdziwego do wyrażenia fałszywego, jak okazuje następujący przykład:

Wyrażenie ~~„$C\Pi ppCq\Pi qq$"~~ „$C\Pi pCpqq$" ze zmienną wolną „q"

√ Tak np. przez podstawienie $p/Cq\Pi qq$ otrzymujemy z wyrażenia „$C\Pi ppp$" wyrażenie $C\Pi ppCq\Pi qq$

jest ogólnie prawdziwe. Jest bowiem niezależnie od wartości „q":

$C1q = q$ oraz $K1q = q$, przeto także $C\Pi pCpqq = CKC0qC1qq =$

$= CK1qq = Cqq$. Dokonajmy w tem wyrażeniu podstawienia q/Cqp.

Otrzymane wyrażenie „$C\Pi pCpCqpCqp$" nie jest ogólnie prawdziwe.

Przy podstawieniu bowiem, za zmienne dla $p/0$, $q/1$ jest

$C\Pi pCpC1pC10 = CKC0C10C1C11C10 = CKC00C110 =$

$= CK110 = C10 = 0$.

Przy podstawieniu nie uwzględniliśmy warunku, w myśl którego każda zmienna wolna wyrażenia podstawianego winna pozostać nadal zmienną wolną; zmienna „p" podstawienia „Cqq" w postaci ze zmiennej „q" stała się zmienną związaną.

b) Następnie dwie reguły dotyczą operacji kwantyfikatora ogólnego. Reguła dołączania kwantyfikatora (RD) pozwala na podstawie tezy postaci $C\alpha\beta(p)$, będącej okresem warunkowym, którego następnik zawiera zmienną wolną „p", poprzednik zaś zmiennej wolnej „p" nie zawiera, uważać jako tezę wyrażenie postaci $C\alpha\Pi p\beta(p)$. Tu dołączamy do następnika wyjściowej tezy kwantyfikator. Np. na podstawie tezy „$CqCpq$" otrzymamy jako tezę wyrażenie „$Cq\Pi pCpq$"; na podstawie wyrażenie „CΠppCpq" albo nawet wyrażenie „CΠppΠpCpq".

Regułę RD uzasadniamy przy pomocy tezy teorii dedukcji „CCpqCCprCpKqr", która pozwala na podstawie zdań postaci „Cpq" i „Cpr" uznać zdanie postaci „CpKqr". Z tezy „Cαβ(p)" ~~otrzymujemy~~ dające przez podstawienia p/0 i p/1 tezy Cαβ(0) i Cαβ(1), ~~skąd zaś~~ z których wynika „CαKβ(0)β(1)" czyli „CαΠpβ(p)".

Odwrotną do RD jest reguła opuszczania kwantyfikatorów (RO). Pozwala ona na podstawie tezy postaci „CαΠpβ(p)", w której α nie zawiera zmiennej wolnej równokształtnej z „p", uznać jako tezę wyrażenie postaci Cαβ(p). Np. na podstawie tezy „CΠppΠpp" wolno uznać tezę „CΠppp".

Regułę RO uzasadnia się przy pomocy tez teorii dedukcji „CCpKqrCpq" oraz „CCpKqrCpr", które pozwalają na podstawie zdania postaci „CpKqr" uznać zdania postaci „Cpq" i „Cpr". Mając więc tezę postaci „CαΠpβ(p)" czyli „CαKβ(0)β(1)", otrzymujemy tezy postaci „Cαβ(0)" i Cαβ(1), które łącznie dają ogólną podstawę zdaniu Cαβ(p).

c) Ponieważ regułą wnioskowania w teorii dedukcji z kwantyfikatorami jest tu reguła zastępowania, wyrażeń z definicji (D)

(D) $Np = Cp\Pi pp$

Reguła zastępowania pozwala w każdej tezie zamienić prawą stronę definicji lub jej podstawienia przez jej lewą stronę resp. lewą stronę tezy jej podstawienia i odwrotnie.

3. Jako aksjomatów systemu teorii dedukcji z kwantyfikatorami przyjmiemy układ trzech tez, które wystarczają w teorii dedukcji dla udowodnienia wszystkich jej tez, budowanych przy pomocy jedynego symbolu stałego C:

T 1 $CqCpq$

T 2 $CCpqpp$

T 3 $CCpqCCqrCpr$

okażemy, że z aksjomatów tych przy pomocy odpowiednich reguł wnioskowania wynikają tezy

~~$CCpq$~~ 7. $CCNppp$

11. $CpCNpq$.

które wraz z aksjomatem T 3 tworzą układ wystarczający do wyprowadzenia wszystkich tez teorii dedukcji.

Z aksjomatów wynikają następujące tezy tej wersji teorji dedukcji, budowane przy pomocy jedynego wyrazu stałego „C":

T 4 Cpp

T 5 CCpCqrCqCpr

T 6 CCqrCCpqCpr

Tezę 7 dowodzimy, jak następuje:

T2 q/Πpp * D - T7

T7 CCNppp

dowodzimy dalej:

T4 p/Πpp * Ko - T8

T8 CΠppp

T6 q/Πpp, r/q * CT8pq - T9

T9 CCpΠppCpq

T9 * D - T10

T10 ~~C~~ CNpCpq

T5 p/Np, q/p, r/q * C T10 - T11

T11 CpCNpq

W teorji dedukcji z kwantyfikatorem ogólnym wolno z każdej tezy φ(p), zawierającej przynajmniej jedną zmienną wolną, otrzymać tezę postaci „Πpφ(p), postawiwszy przed daną kwantyfikatora ogólnego na początku, a rozumowanie złożony

I $\varphi(x)$

T1 $q/\varphi(x), x/q$ * e I – II

II $e_q \Pi \varphi(x)$

II * Rd – III

III $e_q \Pi x \varphi(x)$

III $q/\varphi(x)$ * e I – IV

IV $\Pi x \varphi(x)$

Podobnie możemy postąpić dla dowolnie przed wyrażeniem, ze-stawionym dowolnym bądź skończonej liczby ogólnych kwan-tyfikatorów ogólnych. Postępując w porządku odwrot-nym, możemy usunąć kwantyfikatory ogólne znajdujące się na początku jakiejś tezy. Tak więc wyrażenia „$\varphi(x)$" i „$\Pi x \varphi(x)$" są w obliczu rozważanej teorii inferencyjnie równoważne.

3.

183

184

192

189

Dowód względności i niesprzeczności pewnego układu aksjomatycznej teorji idei.

(Łukasiewicz, Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls, Sprawozd. z pos. Tow. Nauk. Warsz. Wydz. III r. XXIV (1931) z. 2-6).

zupełności i niesprzeczności.

1. System teorji idei, zbudowany na danym ~~[illegible]~~ układzie aksjomatów i dyrektyw wnioskowania nazywamy zupełnym wtedy i tylko wtedy, gdy każde wyrażenie sensowne w tym systemie bądź wynika z aksjomatów według dyrektyw wnioskowania systemu, bądź - po dołączeniu do układu aksjomatów [illegible] w celu wynikanie ~~[illegible]~~ wszystkich ~~[illegible]~~ wyrażeń sensownych w tym systemie.

Według przytoczonej definicji nazywamy takie takie systemy teorji idei, z których aksjomatów wynikają wszelkie według dyrektyw wnioskowania wszystkie takie wyrażenia sensowne w danym systemie, które zawierają wyrazy naczelne jest i fałszywe. Takie systemy ~~[illegible]~~ [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible], że [illegible] i [illegible] [illegible] jednak.

wartości [illegible]; czy to zgodny [illegible], Wyrażający

być ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] być [illegible]-

ściem [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible]. Tylko, jeśli z nim nie [illegible]-

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] z [illegible].

Obie wyżej podane definicje – [illegible] i [illegible]-

ści ~~[illegible]~~ [illegible] nie [illegible] z sobie [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] funkcji logicznej

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] to każdy [illegible] [illegible]

[illegible], np. [illegible] [illegible] tylko [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] itp.

2. Pojęcie [illegible].

~~Pojęcie [illegible]~~ [illegible] tylko [illegible] [illegible], [illegible]-

[illegible], że [illegible] [illegible] [illegible] to, [illegible] [illegible]-

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], że [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], to w. [illegible] [illegible]

[illegible], [illegible] i [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] że nie [illegible] [illegible]

1º. Jeśli [illegible] ~~[illegible]~~ z [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] tylko [illegible] [illegible] [illegible]-

nie, które powstaje, jeśli w miejsce zmiennej wstawimy W, zmienną „p" zaś, która jest wyrażeniem sensownym, tę wstawimy nie ponadto, to nie wszystkie wyrażenia sensowne wynikają z aksjomatu, mianowicie nie wynika z niej „p". Wzorowi W odpowiada przy równoważności tabela ~~?~~ wartości dla wyrażeń Apq i Np.

A	0	1	N
0	0	1	1
1	1	1	0

Widać tabelę wartości dla Cpq

C	0	1
0	1	1
1	0	1

Wyrażenie sensowne względem wzoru W nazywa się tautologią, jeśli zawsze przybiera tautologicznie wartość 1. Sprawdza się bezpośrednio, że wszystkie tezy wynikają z wzoru W. Wzorowi W jest właściwa tautologia dziedziczna każdej reguły wnioskowania, bo jeśli jakieś wyrażenia mają tautologiczne wartości 1, to i ich wyrażenie przez regułę wnioskowania. Jest nie inaczej przy regule odrywania. Tak więc każdy wynik odrywania, gdy jeśli dla wyrażeń „α" i „Cαβ" posiadamy wzorowi W" $C1\beta$ to jest $C1\beta = 1$; ~~tak~~ bo ~~z~~ wyrażenie takie ~~może~~ może przyjąć tylko wartość 1, gdy $\beta = 1$; ~~zatem~~ zakładam że „α" i „Cαβ" posiadają wzorowi W jest tautologią, dla ~~tego~~ tego przysługuje ona też wyrażeniu β.

Nazwiemy „p" zdaniem nie prawdą, gdy jego odrzucenie $p/0$ jest $A=0$. Tak więc okazuje się, że ten nasz system jest niesprzeczny.

3) <u>Myśl przewodnia dowodu zupełności</u>. W każdym niesprzecznym systemie teorji liczb, istnieją wyrażenia zamknięte, które ani nie wynikają z aksjomatów tej dyscypliny sformalizowanej, ani też, gdy wstawimy ich zaprzeczenie do zbioru aksjomatów, nie prowadzą za sobą wynikania sprzeczności w tym systemie; wyrażenia takie nazywamy <u>wyrażeniami niezależnemi</u>. Jeśli ~~więc~~ założymy, że badany system nie jest zupełny, to istnieją w nim wyrażenia niezależne. Ponieważ zaś każde wyrażenie zamknięte składa się ze skończonej liczby liter, więc między wyrażeniami niezależnemi istnieje przynajmniej jedno takie, iż żadne inne wyrażenie niezależne nie jest od niego krótsze, tzn. ~~nie ma~~ złożone z mniejszej liczby liter. Jeśli okażemy, że w systemie żadne wyrażenie niezależne nie jest w tym sensie najkrótsze, to stąd wnioskujemy, że niema w systemie wcale wyrażeń niezależnych i że system jest zupełny. Dowód będzie prowadzony w ten sposób, iż wyrażenia zamknięte zostaną podzielone na typy, które zostaną kolejno rozważone i dla każdego okaże się, że najkrótsze wyrażenie niezależne do żadnego z nich nie należy; takiego więc w systemie nie istnieje.

4) Typy wyrażeń sensownych. Każde wyrażenie sensowne zdaniowe jest albo zmienną „p, q, r", albo wyrażeniem typu „$N\alpha$" (gdzie α jest wyrażeniem sensownym, albo wyrażeniem typu $A\alpha\beta$ (gdzie α i β są wyrażeniami sensownymi. W obu ostatnich typach wyrażeń α z kolei jest albo zmienną „p" albo wyrażeniem typu „$N\alpha$", albo wyrażeniem typu „$A\alpha\beta$" tak iż otrzymujemy typy bardziej specjalne

z „$N\alpha$" otrzymujemy „Np", „$NN\alpha$", „$NA\alpha\beta$"

z „$A\alpha\beta$" otrzymujemy „$Ap\alpha$", „$AN\alpha\beta$", „$AA\alpha\beta\gamma$"

tę specjalizację typów prowadzimy dalej, dopóki to okaże się do dowodu potrzebne. W całości ~~[illegible]~~ będziemy rozważali 36 rozmaitych typów wyrażeń sensownych:

$T1$ p — $T21$ Np — $T31$ $Ap\alpha$

$T2$ $N\alpha$ — $T22$ $NN\alpha$ — $T32$ $AN\alpha\beta$

$T3$ $A\alpha\beta$ — $T23$ $NA\alpha\beta$ — $T33$ $AA\alpha\beta\gamma$

$T321$ $ANp\alpha$ — $T311$ App

$T322$ $ANN\alpha\beta$ — $T312$ $ApN\alpha$

$T323$ $ANA\alpha\beta\gamma$ — $T313$ $ApA\alpha\beta$

$T3121$ $ApNp$ — $T3211$ $ANpp$

$T3122$ $ApNN\alpha$ — $T3212$ $ANpN\alpha$

$T3123$ $ApNA\alpha\beta$ — $T3213$ $ANpA\alpha\beta$

Γ3131	ApApα
Γ3132	ApANαβ
Γ3133	ApAAαβγ
Γ31321	ApANpα
Γ31322	ApANNαβ
Γ31323	ApANAαβγ

Γ32121	ANpNp
Γ32122	ANpNNα
Γ32123	ANpNAαβ
Γ32131	ANpApα
Γ32132	ANpANαβ
Γ32133	ANpAAαβγ
Γ321321	ANpANpα
Γ321322	ANpANNαβ
Γ321323	ANpANAαβγ

Każdy typ jest oznaczony literą „Γ” z następującemi po niej cyframi tak, by można było zanotować z jakich podrzędnych typów powstaje bardziej specjalne. Mianowicie oznacza „1” znaczenie (po nierozwiązanym znaczeniu) „p”, „2” literę „N”, „3” literę „A”, poczem umieszczamy litery w porządku alfabetycznym i w takiej liczbie, jakiej wymaga rozwiązanie. Np. Γ3132 składa się kolejno z liter „A”, „p”, „A” „N” ~~[illegible]~~ „α” i „β”. Widzimy obecnie, że typy Γ31321, Γ31322, Γ31323 powstają jako przypadki specjalne z typu Γ3132 w ten sposób, że „α” dzieli ~~[illegible]~~ się odpowiednio na trzy możliwe przypadki „pα”, „Nα”, „Aαβ”. Jeśli zostanie dowiedzione, że wyrażenie wyróżnione niezależnie nie należy do żadnego z typów Γ31321, Γ31322, Γ31323, to wówczas bezpośrednio wynika, że nie należy ono do typu Γ3132. Jeśli zaś dowiedziemy tego

7

Ale trzeba tezów wszelkich F1, F2, F3, to otrzymamy dowód zupełności.

5.) Przegląd typów. Wśród przytoczonych 36 typów jest:

a) 4 typy $\Gamma 3211$, $\Gamma 3121$, $\Gamma 32131$, $\Gamma 31321$ które wynikają z aksjomatów, wśród nich niema przeto wyrażeń niezależnych.

b) 4 typy $\Gamma 1$, $\Gamma 21$, $\Gamma 311$, $\Gamma 32121$ które wiodą do aksjomatów, dając wynikanie wszystkich wyrażeń sensownych, wobec przeto wśród nich niema wyrażeń niezależnych.

c) 6 typów $\Gamma 22$, $\Gamma 23$, $\Gamma 322$, $\Gamma 323$, $\Gamma 3131$, $\Gamma 321321$ które ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ są równoważne pewnym typom krótszym, — a więc niema wśród nich najkrótszych wyrażeń niezależnych.

d) 8 typów $\Gamma 3122$, $\Gamma 3123$, $\Gamma 32122$, $\Gamma 32123$, $\Gamma 31322$, $\Gamma 31323$, $\Gamma 321322$, $\Gamma 321323$, ~~które są~~ równoważnych takim typom o tej samej liczbie liter, o których wiadomo, że nie są najkrótszymi wyrażeniami niezależnemi;

e) 3 typy $\Gamma 33$, $\Gamma 3133$, $\Gamma 32133$, które składają się równocześnie otrzymany tabele tylko ~~[illegible]~~ z pomocą równoważnych tezów, ~~[illegible]~~ w których zamiast litery „A" wstawiona „A" lub „N"

f) wreszcie pozostałych 11 typów $\Gamma 2$, $\Gamma 3$, $\Gamma 31$, $\Gamma 32$, $\Gamma 321$, $\Gamma 312$, $\Gamma 313$, $\Gamma 3212$, $\Gamma 3213$, $\Gamma 3132$, $\Gamma 32132$, których nie potrzeba rozważać oddzielnie, ponieważ wszystkie wyrażenia ogólne, które ... należą;

8.

mieszczą się w przykładach a – e. [illegible] tego [illegible]

Wyrazy nazwowe [illegible] i zdania tego [illegible]

6.) [illegible] stwierdzają się na pewne brzmienia, należące

[illegible]

do [illegible] tego dziedziny. Niektóre z nich [illegible]

w całości ... (porządnie); ~~[illegible]~~ [illegible]

~~[illegible]~~ [illegible] je [illegible] z [illegible]; ~~[illegible]~~ bez

[illegible] symbolu „C" [illegible] „A N" [illegible] z nich

[illegible], [illegible] w [illegible]:

1. A N A N A pęr A N pr
2. A N A N A pęr A N ęr
3. A N A N pr A N A N ęr A N A pęr

7 A N pp
8 A N A ppp
9 A N p A pę
10 A N ę A pę
11 A N A ęp A pr
12 A p N p
16 A N A p A pę A pę
18 ~~A p A N pę~~ A N A p A ęr A ę A pr
19 A p A N pę
20 A N A pę A N N pę
21 A N N N pp
24 A N A N N N pę A pę
~~26 A N A p A pę A p A pę~~

Niżej podobne będą jeszcze inne twierdzenia, których dowody w notacji powyżej przytoczonej łatwo się wyprowadzić z tezie... o jednolitej numeracji; twierdzenia podkreślone będą podobne z dalszymi tezami, inni i wykonanymi wzorach; gdzie „C" wszędzie zastąpiony przez „A":

25 q/Aqr, r/Arq × AN 11 p/r - 26

26 ANApAqrApArq

23 p/NApAqr, q/ApArq, r/s × AN 26 - 27

27 ANANApAqpANApAqrs

27 s/ArApq × AN 18 q/r, r/q - 28

28 ANApAqrArApq

26 p/NApAqr, q/r, r/Apq × AN 28 - 29

29 ANApAqrAApqr

25 q/AsAqr, r/AAsqr × AN 29 p/s - 30

30 ANApAsAqrApAAsqr

23 p/NApq, q/Apq × AN 11 - 31

31 ANANApqANAqpr

31 q/Apq, r/AqApr × AN 28 q/r, r/q - 32

32 ANAApqpAqApr

10.

25 q/AqAsr, r/ArAqs * AN 28 p/q, q/s – 33

33 ANApAqAsrApArAqs

33 p/NAApqr, s/r, r/p * AN 32 r/p, p/r – 34

34 ANAApqrApAqr

25 q/AAsqr, r/AsAqr * AN 34 p/s – 35

35 ANApAAsqrApAsAqr

31 q/Aqr, r/ApArq * AN 26 – 36

36 ANAAqrpApArq

26 p/NAAqrp, q/p, r/Arq * AN 36 – 37

37 ANAAqrpAAArqp

25 q/AAqrs, r/AArqs * AN 37 p/s – 38

38 ANApAAqrsApAArqs

11 q/Np, p/Apq * AN 9 – 39

39 AApqNp

20 p/Apq, q/Np * AN 39 – 40

40 ANNApqNp

11 q/Nq, p/Apq * AN 10 – 41

41 AApqNq

20 p/Apq, q/Nq * AN 41 – 42

42 ANNApqNq

18 p/NApq, q/NNp, r/q * AN 20 – 43

43 ANNpANApq

28 p/NNp, q/NApq, r/q * AN43-44

44 AqANNpNApq

20 p/q, q/ANNpNApq * AN44-45

45 ANNqANNpNApq

7) Inne wyrażenia pierwotne. Wyrażenia „α" i „β" uważamy (inferencyjnie) równoważnemi ze względu na pewien system teorii, jeżeli symbolicznie

$$\alpha \sim \beta$$

jeżeli wyrażenie jednego z nich do układu dołączone otrzymamy drugie z tego układu. Warunkiem wystarczającym lecz niekoniecznym równoważności „α ~ β" jest, aby wyrażenia „ANαβ" i „ANβα" były twierdzeniami systemu. Albowiem jeżeli ten warunek jest spełniony i jedno z wyrażeń „α" lub „β" zostanie do systemu dołączone, to drugie może być wyprowadzone (przez odrywanie) z ~~[illegible]~~ tylko wyrażenia).

Wyrażenie α uważamy (inferencyjnie) równoważnem (ze względu na pewien system teorii) z dwoma wyrażeniami „β" i „γ":

$$\alpha \sim \beta, \gamma$$

jeżeli z wyrażenia α do ~~układu~~ systemu wynika, że β i γ mogą być w nim udowodnione i odwrotnie z wyrażeń β i γ w systemie wynika, że α może być w nim udowodnione. Wystarczającym lecz niekonieczwym warunkiem równoważności α ~ β, γ jest, aby wyrażenia $ANαβ$, $ANαγ$ $ANβANγα$ były razem zgodne.

Określenie warunku równoważności jest niezbędne dla niniejszych celów twierdzeń pomocniczych:

P1. Jeśli ~~wyrażenie „α" i „β" są równoważne~~ α ~ β i „α" jest wyrażeniem niezależnym, to także „β" jest wyrażeniem niezależnym.

Dowód: Jeśli „α" jest wyrażeniem niezależnym, to nie wynika z aksjomatów; więc także „β" nie wynika z aksjomatów, bo w myśl określenia równoważności „α" wynika z „β". Z drugiej strony, jeśli „α" jest wyrażeniem niezależnym, to po dołączeniu „Nα" do zespołu nie wszystkie wyrażenia sensowne dadzą się w nim udowodnić; lecz „β" wynika z „α", gdyby więc po dołączeniu „Nβ" do zespołu ~~aksjomatów~~ dadzą się w nim udowodnić wszystkie wyrażenia sensowne, wówczas to zachodzi także dla „α". ~~Przeto~~ ~~tak~~ razem z „Nβ" z zespołem nie wszystkie wyrażenia sensowne dadzą się w nim udowodnić. „β" spełnia ~~~~ oba warunki charakterystyczne dla wyrażeń niezależnych, jest tedy wyrażeniem niezależnym. –

P2. Jeśli α ~ β, γ i „α" jest wyrażeniem niezależnym, to przynajmniej jedno z wyraż. „β" lub „γ" jest wyrażeniem niezależnym.

Dowód: jeżeli „α" jest wyrażeniem niezależnym, to nie wynika z aksjomatów; przeto także przynajmniej jedno z wyrażeń „β" lub „γ" nie wynika z aksjomatów, gdyż inaczej także „α" – wobec tego, że wynika ono z „β" i „γ" – wynikałoby z aksjomatów. Z drugiej strony, jeżeli „α" jest wyrażeniem niezależnym, to po dołączeniu „α" do systemu, nie wszystkie wyrażenia sensowne dają się udowodnić; [illegible] wyrażenia ~~niezależne~~ β i γ, ~~niezależne~~ obu tych wyrażeń wynikają bowiem z „α"; gdyby ~~[illegible]~~ po [illegible] którego z nich (do żadnego z nich) dało się udowodnić wszystkie wyrażenia sensowne, to byłoby to zachodziło również dla „α". Przeto ~~[illegible]~~ żadne z wyrażeń β i ~~γ~~ γ ~~jest wyrażeniem niezależnym~~ nie powoduje sprzeczności systemu. ~~[illegible]~~ Stąd zaś wynika, że przynajmniej jedno z wyrażeń „β" lub „γ" jest wyrażeniem niezależnym. —

P3. Jeżeli α ~ β i „β" jest słabsze niż „α", to „α" nie jest najsłabszym wyrażeniem niezależnym.

Dowód: jeżeli „α" jest wyrażeniem niezależnym i α ~ β, to według P1 także „β" jest wyrażeniem niezależnym, a że „β" jest słabsze niż „α", „α" nie jest najsłabszym wyrażeniem niezależnym.

P4. Jeżeli α ~ β, γ i jeżeli oba wyrażenia „β", „γ" są słabsze niż „α", to „α" nie jest najsłabszym wyrażeniem niezależnym.

Dowód: jeżeli „α" jest wyrażeniem niezależnym i α ~ β, γ, to według P2 przynajmniej jedno z wyrażeń „β" lub „γ" jest wyrażeniem niezależnym,

~~a ie obu~~ jeśli przed oba tej kreskę „N x”, to „x” nie jest naj-
krótszym wyrażeniem niezależnym.

Dowód niezależności.

8. Zmienna i negacja (T1, T2). Myśl ~~niewątpliwie~~ niezawodnie dowodu jest udo-
wodnić, że w systemie nie ma najkrótszego wyrażenia niezależnego. Gdy wykażemy, że nie ma w nim wyrażeń niezależnych i system jest zupeł-
ny.

Najkrótsze wyrażenie niezależne, gdyby istniało, byłoby bądź zmienną „p” typu T1, bądź negacją „Nx” typu T2, bądź alternatywą Aαβ typu T3.

Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest zmienną typu T1, gdyż „p” nie jest wyrażeniem niezależnym, co wynika stąd, że z „p” można wyprowadzić przez odrzucenie ~~i zgodnie~~ wszystkie wyrażenia ~~odrzucone~~.

Dowód twierdzenia, że najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest negacją typu T2, rozkłada się na trzy przypadki: T21, T22, T23.

T21: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest negacją zmiennej „Np” typu T21; jeśliby „Np” nie jest bowiem wyrażeniem niezależnym, co wynika stąd, że przez odrzucenie „Np” od Ap... otrzymujemy z systemu „p” i wszystkie wyrażenia odrzucone.

I Np   21 × ANII − III

I p/Np   ×   II   III p

II NNp

205

T 22: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu „NNα", gdzie zachodzi równoważność $NN\alpha \sim \alpha$. Albowiem „α" jest o dwa „N" krótsze od „NNα"; więc według P3 wyrażenie typu „NNα" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym. Dowód równoważności jest następujący:

21 p/α × $\overline{\text{IV}}$

$\overline{\text{IV}}$ $ANNN\alpha\alpha$

12 $p/N\alpha$ × $\overline{\text{V}}$

$\overline{\text{V}}$ $AN\alpha NN\alpha$

$\overline{\text{IV}}$ i $\overline{\text{V}}$ tworzą dowód równoważności między „α" i „NNα"

T 23: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu „NAαβ", gdyż zachodzi równoważność $NA\alpha\beta \sim N\beta, N\alpha$. Lecz każde z wyrażeń „Nβ" i „Nα" jest przynajmniej o dwie litery krótsze od „NAαβ"; zatem według P4 wyrażenie typu „NAαβ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym. Dowód równoważności:

42 $p/\alpha, q/\beta$ × $\overline{\text{VI}}$

$\overline{\text{VI}}$ $ANNA\alpha\beta N\beta$

40 $p/\alpha, q/\beta$ × $\overline{\text{VII}}$

$\overline{\text{VII}}$ $ANNA\alpha\beta N\alpha$

45 $q/\beta, p/\alpha$ × $\overline{\text{VIII}}$

$\overline{\text{VIII}}$ $ANN\beta ANN\alpha NA\alpha\beta$

$\overline{\text{VI}}$, $\overline{\text{VII}}$ i $\overline{\text{VIII}}$ tworzą dowód równoważności między $A\alpha\beta$ oraz α i β.

Okazało się przeto że najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest ani typu T21, ani typu T22, ani typu T23 – jeżeli zaś tak jest, to nie może być najkrótsze wyrażenie niezależne typu „$\delta\alpha$",

9. Macierzyste. Typy T33, T322, T323. Dowód twierdzenia, że najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest macierzyste, rozdziela się na szereg przypadków szczegółowych. Rozpatrzmy najpierw przypadek T33. Zachodzi równoważność $\delta\delta\alpha\beta\gamma \sim \delta\alpha\delta\beta\gamma$

Dowód

$34 \quad p/\alpha,\ q/\beta,\ r/\gamma \times \underline{IX}$

$\underline{IX} \quad \delta N \delta\delta\alpha\beta\gamma\ \delta\alpha\delta\beta\gamma$

$29 \quad p/\alpha,\ q/\beta,\ r/\gamma \times \underline{X}$

$\underline{X} \quad \delta\delta\delta\alpha\delta\beta\gamma\ \delta\delta\alpha\beta\gamma$

Na podstawie tej równoważności można w każdym przypadku wiązać się z jedną liczbą liter „δ" stojące na początku wyrażenia i tak dalej stosując tej transformacji, jeśli nie otrzymamy tym samym, w którym po prawej „δ" już nie występuje „δ" lecz bądź zmienna, bądź negacja. Wszystkie wyrażenia które się tworzą tylko ze zmienioną liczbą liter. Warunek podkreślmy, że transformacja ta nie zmniejsza liczby liter w wyrażeniu, tylko przenosi „δ" na lewo więcej. Z tego wynika, wrócę od razu P1: T33: ~~Jeżeli Przyjmiemy~~ Przyjmie, że najkrótsze wyrażenie niezależne jest typu T33 ~~[illegible]~~ to pociąga konsekwencję że również także najkrótsze wyrażenie niezależne typu T31 lub T32.

Tak więc T33 redukuje się do T31 lub T32.

Przechodzimy obecnie do omówienia wyrażeń typu T322 i T323.

T322: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu „ANNαβ", gdyż zachodzi równoważność $ANN\alpha\beta \sim A\alpha\beta$ i „Aαβ" jest o dwa „N" krótsze od „ANNαβ" - przeto wedle P3 wyrażenie typu „ANNαβ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Dowód równoważności: 14 $p/\alpha, q/\beta \times \overline{XI}$

$\overline{XI}$ $ANANN\alpha\beta A\alpha\beta$

20 $p/\alpha, q/\beta, \times \overline{XII}$

$\overline{XII}$ $ANA\alpha\beta ANN\alpha\beta$

T323: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu „ANAαβγ", gdyż zachodzi równoważność:

$$ANA\alpha\beta\gamma \sim AN\alpha\gamma, AN\beta\gamma$$

zarówno „ANαγ" jak „ANβγ" jest conajmniej o dwie litery krótsze od „ANAαβγ", a przeto wedle P4 wyrażenie typu „ANAαβγ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Dowód równoważności:

1 $p/\alpha, q/\beta, r/\gamma \times \overline{XIII}$

$\overline{XIII}$ $ANANA\alpha\beta\gamma AN\beta\gamma$

2 $p|\alpha,\ q|\beta,\ r|\gamma$ * $\underline{XIV}$

$\underline{XIV}$ $ANANA\alpha\beta\gamma\ AN\beta\gamma$

3 $p|\alpha,\ q|\beta,\ r|\gamma$ * $\underline{XV}$

$\underline{XV}$ $ANAN\alpha\gamma\ ANAN\beta\gamma\ ANA\alpha\beta\gamma$

Dowód pozostałych opiera się znowu na [illegible] [illegible].

10. Typy $T31$ i $T321$. Dla doprowadzenia dowodu wszystkiego do końca wystarczy jeszcze okazać, że najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest ani postaci $T31$ ani $T321$. Po ostatnie zaś z poprzednio uzasadnionymi twierdzeniami dla $T322$ i $T323$ pozwalają wnosić, że najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu $T32$. Jeżeli zaś nadto nie jest ono typu $T31$, to tem samem dowód jest przeprowadzony dla całego typu $T3$ i w danym wypadku – doprowadzony do końca.

W wyrażeniach $T31$ i $T321$ tj. „$Ap\alpha$" oraz „$ANp\alpha$" trzeba rozróżnić dwa przypadki: „α" bądź zawiera w sobie zmienną równokształtną z „p", bądź takiej zmiennej nie zawiera. Rozpatrujemy najpierw drugi przypadek.

Jeżeli „α" nie zawiera w sobie zmiennej równokształtnej z „p", to „α" nie zmienia się, jeżeli podstawimy za „p" dowolne wyrażenie. Jeżeli w takim przypadku dołączymy do zbioru wyrażenie „$Ap\alpha$" lub „$ANp\alpha$" to z każdego z tych wyrażeń możemy wywnioskować „α":

Dowód dla $T31$:

$\overline{\text{XVI}}$ $Ap\alpha$

$\underline{\text{XVI}}$ $p/NAp\alpha$ $\times AN\,\overline{\text{XVI}} - \overline{\text{XVII}}$

$\overline{\text{XVII}}$ α

Dowód dla $\Gamma 32i$:

$\overline{\text{XVIII}}$ $ANp\alpha$

$\underline{\text{XVIII}}$ $p/ANp\alpha$ $\times AN\,\overline{\text{XVIII}} - \overline{\text{XIX}}$

$\overline{\text{XIX}}$ α

Jeśli z drugiej strony wszystkie zmienne wyrażenia „x", to wynika z „α" zarówno „$Ap\alpha$" jak „$ANp\alpha$"

Dowód

$\overline{\text{XX}}$ α

10 q/α $\times AN\,\underline{\text{XX}} - \overline{\text{XXI}}$

$\overline{\text{XXI}}$ $Ap\alpha$

10 q/α, p/Np $\times AN\,\underline{\text{XX}} - \overline{\text{XXII}}$

$\overline{\text{XXII}}$ $ANp\alpha$

Udowodniliśmy zatem ~~[illegible]~~ równoważności $Ap\alpha \sim \alpha$, $ANp\alpha \sim \alpha$; „α" jest krótsze od „$Ap\alpha$" i od „$ANp\alpha$", więc według P3 żadne wyrażenie typu „$Ap\alpha$" ani „$ANp\alpha$" nie jest najkrótszym wyrażeniem nie-zależnym – pod względem, które przyjęliśmy wyżej, że „α" nie zawiera zmiennej równokształtnej z „p". Pozostaje przeto do rozpatrzenia przypadek, ~~x~~ „α" w i wyrażeniach typów $\Gamma 3i$ i $\Gamma 32i$ zawiera zmienną równokształtną z „p".

11. Typy $\Gamma 311$, $\Gamma 3211$, $\Gamma 3121$, $\Gamma 32121$, $\Gamma 3122$, $\Gamma 32122$, $\Gamma 3123$ i $\Gamma 32123$

Przyjmujemy na rozstał, że

Zarówno w T3i, jak w T321 „x" jest zmienną i jest ono stąd wspólnie zmienną „p", ponieważ zakładamy, że „x" zaraz zmienną równoczesną z „p".

T311: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie może być typu „App", albowiem „App" nie jest wyrażeniem niezależnym. Jeśli dołączymy „App" do aksjomatów, to wynika stąd „p", a więc i wszystkie wyrażenia sensowne.

Dowód:

$$\overline{XXIII} \quad App$$

$$8 \quad ^{x}\ AN\ \underline{\overline{XXIII}} - \underline{\overline{XXIV}}$$

$$\underline{\overline{XXIV}} \quad p$$

T3211: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest postaci „ANpp", gdyż „ANpp" wynika według tezy 7 z aksjomatów.

W wyrażeniach T312, T3212 t.j. „ApNx" i „ANpNx" przyjmujemy teraz na rozstał, że „x" jest zmienną i w tym przypadku jest ono wzorem zmiennej „p". Wyrażenia T3121 i T32121 ~~dla~~ Przedstawiamy w ten sposób:

T3121: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest postaci ApNp, gdyż to wyrażenie według tezy 12 wynika z aksjomatów.

T32121: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest postaci ANpNp, gdyż po dołączeniu tego wyrażenia do aksjomatów otrzymuje się zeń „Np" i w dalniem uzasadnione wszystkie wyżej wyrażenia sensowne.

Dowód: $\overline{XXV}$ ANpNp

8 p/Np × ANXXV – $\overline{XXVI}$

$\overline{XXVI}$ Np.

Poniżej będziemy uważać typy wyrażeń, które ~~[illegible]~~ powstają z T312 i T3212, mianowicie T3122 i T3123 oraz T32122 i T32123 (o równej liczbie liter, [illegible]) łącznie z wyrażeniami ~~[illegible] tego~~ które nie przedstawiają najkrótszych wyrażeń niezależnych:

T3122: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest postaci „ApNNx", gdyż zachodzi równoważność:

ApNNx = ANNxp.

Lecz wynika z przykładu T322, że żadne wyrażenie zaczynające się od „ANN" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym, a zatem także żadne wyrażenie typu „ApNNx" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Dowód równoważności:

11 q/p, p/NNx × $\overline{XXVII}$

$\overline{XXVII}$ ANApNNxANNxp

11 q/NNx × $\overline{XXVIII}$

$\overline{XXVIII}$ ANANNxpApNNx

T32122: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest postaci „ANpNNx"

Dowód jest taki sam, jak dla T 3122, ~~tylko~~ jeśli w „p" podstawimy wszędzie „Np". –

T 3123: Najkrótsze wyrażenie [illegible] nie jest typu „ApNAαβ", gdyż zachodzi równoważność:

$$ApNA\alpha\beta \sim ANA\alpha\beta p$$

Wiadomo jednak z wywodów T 3123, że żadne wyrażenie, które zaczyna się od „ANA" nie jest najkrótszym wyrażeniem [illegible], a zatem także żadne wyrażenie typu „ApNAαβ" nie jest najkrótszym wyrażeniem [illegible].

Dowód równoważności:

$$11\ q/p,\ p/NA\alpha\beta \ast \underline{XXIX}$$

$$\underline{XXIX}: ANApNA\alpha\beta ANA\alpha\beta p$$

$$11\ q/NA\alpha\beta \ast \underline{XXX}$$

$$\underline{XXX}\ ANANA\alpha\beta p ApNA\alpha\beta$$

T 32123: Najkrótsze wyrażenie [illegible] nie jest typu „ANpNAαβ"

Dowód jest zupełnie analogiczny, jak dla T 3123. –

Wobec tego, że najkrótsze wyrażenie [illegible] nie jest ani typu T 3121, ani T 3122, ani T 3123 – a także nie może być ani typu T 32121, ani T 32122, ani T 32123, udowodnione są także twierdzenia:

T 312: Najkrótsze wyrażenie [illegible] nie jest postaci „ApAα".

T 3212: Najkrótsze wyrażenie [illegible] nie jest postaci: „ANpNα".

12. Typy T313, T3213, T3133, T32133. Pozostają do rozpoznania jeszcze dwa typy: T313, T3213, tj. „ApAαβ" i „ANpAαβ" oraz ich przypadki szczególne.

Typy te powstają z T31 i T321, a zatem obowiązuje dla nich zastrzeżenie, że „Aαβ" musi zawierać zmienną różną od „p". Wolno przyjąć, że „p" zawiera się w pierwszym członie alternatywy „α"; gdyby jednak „p" zawarte było w drugim jej członie tj. w „β", to wolno zamienić ze sobą „α" i „β" na podstawie równoważności ApAαβ ~ ApAβα i ANpAαβ ~ ANpAβα.

Dowód pierwszej równoważności:

26 q/α, r/β * $\overline{\text{XXX1}}$

$\overline{\text{XXX1}}$ ANApAαβ ApAβα

26 q/β, r/α * $\overline{\text{XXX4}}$.

$\overline{\text{XXX4}}$ ANApAβα ApAαβ

Dowód drugiej równoważności jest całkowicie analogiczny, jeżeli zamiast „p" wszędzie podstawimy „Np".

Przechodzimy do typów T3133 i T32133 tj. „ApAAαβγ" oraz „ANpAAαβγ". W myśl poprzedniego rozumowania przyjmujemy, że zmienna „p" zawiera się w pierwszym członie alternatywy „AAαβγ" tj. w „Aαβ"; wolno posunąć się dalej jeszcze i przyjąć, że „p" zawiera się w „α". Gdyby bowiem „p" zawierało się w „β", to wolno zamienić ze sobą „α" i β na podstawie wyrażenia Ap A Aαβγ ~ Ap A Aβαγ oraz

A Np A Aαβγ ~ A Np A Aβαγ.

dowód pierwszej równoważności:

38 q/α, r/β, s/γ * $\overline{\text{XXXIII}}$

$\overline{\text{XXXIII}}$ A N Ap A Aαβγ Ap A Aβαγ

38 q/β, r/α, s/γ * $\overline{\text{XXXIV}}$

$\overline{\text{XXXIV}}$ A N Ap A Aβαγ Ap A Aαβγ.

dowód drugiej równoważności opiera się na tej samej Tezie 38, należy jedynie podstawić wszędzie „Np" zamiast „p".–

Zakładamy następujące równoważności:

Ap A Aαβγ ~ Ap Aα Aβγ oraz A Np A Aαβγ ~ A Np Aα Aβγ

dowód pierwszej równoważności:

35 s/α, q/β, r/γ * $\overline{\text{XXXV}}$

$\overline{\text{XXXV}}$ A N Ap A Aαβγ Ap Aα Aβγ

30 s/α, q/β, r/γ * $\overline{\text{XXXVI}}$

$\overline{\text{XXXVI}}$ A N Ap Aα Aβγ Ap A Aαβγ

dowód drugiej równoważności jest analogiczny, przy zastąpieniu wszędzie „Np" zamiast „p".

W wyrażeniach „Ap Aα Aβγ" lub „A Np Aα Aβγ" „α" może być bądź zmienną, i wtedy jest ono różne od „p", bądź negacją, bądź alternatywą.

W tym ostatnim przypadku możemy powtórzyć całe powyższe rozumowanie; tak że dojdziemy znów do wyrażeń typu „ApAαAβγ" lub „ANpAαAβγ", w których „α" może być zmienną równokształtną z „p".

Proces ten możemy prowadzić dalej, póki nie otrzymamy wyrażeń, w których po „p" już nie będzie dwóch „A" po sobie następujących. Stąd wynikające twierdzenia:

T3133: Jeśli założymy, że najkrótsze wyrażenie niezależne jest postaci T3133, to istnieje także najkrótsze wyrażenie niezależne postaci T3131 ~~lub~~ T3132.

T32133: Jeśli założymy, że najkrótsze wyrażenie niezależne jest postaci T32133, to istnieje także najkrótsze wyrażenie niezależne postaci T32131 lub T32132.

W ten sposób wyrażenia T3133 i T32133 redukujemy do wyrażeń innej postaci.

13. Typy T3131, T32131, T31321, T321321, T31322, T321322, T31323 i T321323. Zarówno w T313 jak w T3213 ~~[illegible]~~ z dodanymi uwagami, że „α" jest ~~[illegible]~~ zmienną i (różną) jest ~~[illegible]~~ wprost różne „p", gdzie ~~[illegible]~~ ~~wolno~~ trzeba, że „α" może zmienną równokształtną z „p". Zbadamy najpierw typy T3131 i T32131.

T3131: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu ApApα, gdzie zachodzi równoważność ApApα ∼ Apα, w której „Apα" jest o dwie litery krótsze, a przeto według P3 „ApApα" nie jest najkrótszym wyrażeniem zdaniowym. Dowód tej równoważności:

16 q/α * $\overline{\text{XXXVII}}$

$\overline{\text{XXXVII}}$ ANApApα Apα

10 q/Apα * $\overline{\text{XXXVIII}}$

$\overline{\text{XXXVIII}}$ ANApα ApApα

T 3213i: Najkrótsze wyrażenie zdaniowe nie jest postaci „ANpApα", gdyż wyrażenia tej postaci wynikają z aksjomatów, mianowicie:

9 q/α * $\overline{\text{XXXIX}}$

$\overline{\text{XXXIX}}$ ANpApα

W wyrażeniach T3132 i T32132 tj. „ApANαβ" oraz „ANpANαβ" nie jest uwzględniony wzgląd na początek, że „α" jest zmienną, a przeto jest ono różne „p".

T 3132i: Najkrótsze wyrażenie zdaniowe nie jest typu „ApANpα", gdyż wyrażenia tego typu wynikają z aksjomatów, mianowicie:

19 q/α * $\overline{\text{XL}}$

$\overline{\text{XL}}$ ApANpα

T 321321: Najkrótsze wyrażenie zdaniowe nie jest typu „ANpANpα", gdyż zachodzi równoważność ANpANpα ∼ ANpα, wyrażenie że „ANpα" jest o tyle krótsze od „ANpANpα", więc wobec P3 wynika, że to ostatnie wyrażenie nie może być najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Dowody tezy wyrażeń, które odnoszą się z Γ3132 i Γ32132, mianowicie Γ31322 i Γ31323, oraz Γ321322 ~~i~~ Γ321323, są stosunkowo krótkie ~~wyrażenia~~ typowe, o pewnej liczbie liter, lecz nie przedstawiają najkrótszych wyrażeń niezależnych.

Γ31322: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu „ApANNαβ", gdyż zachodzi równoważność: $ApANN\alpha\beta \sim ANN\alpha Ap\beta$. Oczywiście jednak, że wyrażenie, które zaczyna się od „ANN" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym, także więc i takie wyrażenie postaci „ApANNαβ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Dowód równoważności

$$18\ q/NN\alpha,\ r/\beta\ *\ \overline{XLI}$$

$$\underline{XLI}\ ANApANN\alpha\beta ANN\alpha Ap\beta$$

$$18\ p/NN\alpha,\ q/p,\ r/\beta\ *\ \underline{XLII}$$

$$\underline{XLII}\ ANANN\alpha Ap\beta ApANN\alpha\beta$$

Γ321322: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu „ANpANNαβ". Dowód jest analogiczny jak dla Γ31322, z podstawieniem „Np" zamiast „p".

Γ3132~~2~~3: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu „ApAN~~X~~Aαβγ", gdyż zachodzi równoważność $ApANA\alpha\beta\gamma \sim ANA\alpha\beta Ap\gamma$. Oczywiście jeden z bo[illegible], że żadne wyrażenie, zaczynające się od „ANA" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym. Przeto także żadne wyrażenie typu „ApANAαβγ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Dowód rozważamy:

$$18\ q/NA\alpha\beta,\ r/\gamma \times \underline{XLIII}$$

$$\underline{XLIII}\ ANApANA\alpha\beta\gamma\ ANA\alpha\beta Ap\gamma$$

$$18\ p/NA\alpha\beta,\ Ap,\ r/\gamma \times \underline{XLIV}$$

$$\underline{XLIV}\ ANANA\alpha\beta Ap\gamma\ ApANA\alpha\beta\gamma$$

T321323: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest typu „ANpANAαβγ"

Dowód przebiega analogicznie jak dla T31323, jedynie z tą różnicą, że za „p" podstawiamy „Ap".

Zbliżamy się do końca dowodu, powtórzę jeszcze najważniejsze jego ogniwa:

Jeżeli najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest ani T31321, ani T31322, ani T31323, to:

T3132: Wyrażenie typu „ApANαβ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Jeżeli najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest ani T321321, ani T321322, ani T321323, to:

T32132: Wyrażenie typu „ANpANαβ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Udowodniliśmy, że wyrażenia T3131 i T3132 nie są najkrótszymi wyrażeniami niezależnymi, oraz że wyrażenia typu T3133 rozkłada się na T3131 lub 3132; więc wynika:

T313: Wyrażenie Sc „ApAαβ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Tą samą drogą wykażę T3213: Okazuje się, że ani T32131 ani T32132 nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym, i że T32133 rozkłada się na T32131 lub T32132; więc wynika

T3213: Wyrażenie „ANpAαβ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Cofając się dalej stwierdzamy, że wobec powyższego najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest ani T311, ani T312, ani T313, a także ani T3211, ani T3212, ani T3213, więc wynika:

T31: Wyrażenie „Apα" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

T321: Wyrażenie „ANpα" nie jest najkrótszym wyraż. niezależnym.

Także T322 i T323 nie są najkrótszymi wyrażeniami niezależnymi, więc mamy

T32: Wyrażenie „ANαβ" nie jest najkrótszym wyrażeniem niezależnym.

Nie tylko jednak T31 i T32 nie przedstawiają najkrótszego wyrażenia niezależnego; wyrażenia typu T33 zostały sprowadzone do wyrażeń typu T31 lub T32 (str. 9), więc ~~wniosek~~ twierdzenie brzmi:

T3: Najkrótsze wyrażenie niezależne nie jest postaci „Aαβ".

Stwierdziliśmy tak Kolegom, że wszystkie wyrażenia uczuciowe nie jest ani zmienne, ani szczere, ani autentyczne – wiemy przecież wspólne w naszym wyrażaniu niektórych wyrażeń uczuciowych. To zaś jest dowodem, że wiemy w wyrażaniu wyrazów uczuciowych, lub wiemy istotę, że zjawisko jest urojone.

221

drittes

i nam.)

ący sośnodom.

bóstwa

łóży wczesn-

wstępne

cz nazyl-

ji z funkcji

-kontaktu,

mi funkcji

funkcjami

5 jest taka

z funkcją

i czasami taką.

ący funkcja,

nymi, otrze-

aż obrazu

i, które

Teorja funkcyj prawdziwościowych.

(Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoret. Logik, Drittes Kapitel: Der engere Funktionenkalkül, str. 43 i nast.)

1.) Logika klasyczna [illegible] wyrażenia zdaniowe do [illegible] oznaczników, [illegible] wyrazy [illegible] zdaniowe. Teorja funkcyj prawdziwościowych ~~[illegible]~~ ~~zdania dla składniki [illegible]~~ uważa zdania za szczególny rodzaj funkcji logicznej, [illegible] analogji z funkcjami matematycznemi, i mówiąc o [illegible] -składniki (funktor) [illegible] funkcyjnych, [illegible] wyrażenia funkcji; wyrazami funkcji prawdziwościowych są nazwy [illegible]; ~~[illegible]~~ funktorami oznaczniki i ~~[illegible]~~ zdaniami. Tak np. zdanie „5 jest liczbą ~~[illegible]~~ pierwszą" ~~jest [illegible] funkcji~~ składa się z funktora ( ) jest liczbą pierwszą i wyrażenia „5", jest [illegible] tej funkcji, ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] funktora, dla tego wyrażenia.

Wprowadzimy [illegible] funkcji ~~[illegible]~~ zmiennych, [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible] funkcje prawdziwościowe, t.j. wyrażenia, które

Do str. 1 F wyjaśniając w [illegible] zdania termin generalny

i operator zdania do [illegible] wszystkich występujących, [illegible]

[illegible] między terminami generalnymi; wsku-

tek [illegible] się [illegible] [illegible] [illegible] Tak

i tylko [illegible] nie może ~~[illegible]~~ być ~~[illegible]~~

[illegible] [illegible] [illegible] na [illegible] [illegible]

tury. Teraz funkcyj przysłówkowych operatora + miejsce

terminów generalnych funkcje tzw. wraz z funkcjami

przysłówkowymi lub zdaniowymi, a więc [illegible] anal-

ogii z funkcjami [illegible]; [illegible] między [illegible]

jest [illegible] w [illegible] zdania [illegible] [illegible], termin

generalny „[illegible]” przez [illegible] funkcji czyli funktor,

oraz [illegible] niezmiennej, [illegible] przez [illegible]

i [illegible] [illegible] funkcji [illegible]: zdania [illegible] się

w ten sposób wszelkimi [illegible] między funkcjami [illegible]

[illegible], tak np. zdanie „żaden [illegible] nie jest [illegible]

[illegible]” jest [illegible] między funkcjami [illegible]

„x jest [illegible]” oraz „x jest [illegible]”. ~~Także [illegible]~~

Takie [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] formułami ogól-

nymi [illegible] [illegible] [illegible] więcej jakieś idei, zawierający składnik nieokreślony, zmienną, i staje się zdaniem dla określonych wartości tych zmiennych. Takie funkcje zdaniowe pozwalają ~~na~~ formułować ogólne twierdzenia bez wartości implikacyjnej) lub innej, np. jeżeli $M(x,y)$ znaczy „x jest mniejsze od y"; „K" ~~...~~ oznacza koniunkcję zdań, „C" implikację:

$$CKM(x,y)M(y,z)M(x,z)$$

„Jeżeli x jest mniejsze od y oraz y mniejsze od z, to x jest mniejsze od z".

Dla uwidocznienia ogólnomocności wyrażeń zawierających zmienne wolne używa się odrębnych symboli zwanych „kwantyfikatorami". Wyrażenie $F(x)$ (np. „x jest liczbą pierwszą") można rozumieć bądź jako „~~dla każdego x~~ niezawodnie, że dla każdego x, „F(x)" bądź jako „dla każdego x niezawodnie, że x". W pierwszym przypadku (lub istnieje x takie że F(x)) można powiedzieć równoważnie „dla pewnego x F(x)"; (istnieje takie x, że) wyraz „dla pewnego x" oznaczamy symbolem $\boxed{Ex}$, zwanym kwantyfikatorem szczegółowym, wyraz „dla każdego x" oznaczamy symbolem $\boxed{x}$, który nosi nazwę kwantyfikatora ogólnego.

Znaczenie zdań z kwantyfikatorami pozwoli to uwidocznić

3.

względem równoważności ($\equiv$) (N - negacja)

$$[Ex]\,F(x) \equiv N[x]\,N\,F(x)$$

$$[Ex]\,N\,F(x) \equiv N[x]\,F(x)$$

$$N[Ex]\,F(x) \equiv [x]\,N\,F(x)$$

$$N[Ex]\,N\,F(x) \equiv [x]\,F(x)$$

Przy funkcjach o więcej niż jednym argumencie mogą występować obok kwantyfikatory różne:

$$[x][y]\,F(x,y)$$

„dla każdego (x) i dla każdego (y) $F(x,y)$"

$$[Ex][Ey]\,F(x,y)$$

$$[x][Ey]\,F(x,y)$$

$$[Ex][y]\,F(x,y)$$

Dwa kwantyfikatory ogólne, a także dwa kwantyfikatory szczegółowe, można przemieniać bez zmiany sensu wyrażenia:

$$[x][y]\,F(x,y) \equiv [y][x]\,F(x,y)$$

$$[Ex][Ey]\,F(x,y) \equiv [Ey][Ex]\,F(x,y)$$

Natomiast porządek kwantyfikatorów, z których jeden jest ogólny, drugi szczegółowy, nie może być zmieniony bez zmiany sensu wyrażenia. Tak np., zdanie $[x][Ey]\,M(x,y)$ znaczy: „dla każdej liczby x istnieje liczba y, taka, że x jest mniejsze od y" — jest to zdanie prawdziwe. Przeciwny natomiast porządek kwantyfikatorów $[Ey][x]\,M(x,y)$, z odpowiadającym zdaniem: „Istnieje liczba y

takie, iż ~~...~~ każdemu x : ... jest mniejsze od y (mianowicie: istnie-
je liczba, która jest większa od każdej liczby x).

Między wyrażeniami $[x][Ey] F(x,y)$ oraz $[Ey][x] F(x,y)$
istnieje związek $C[Ey][x]F(x,y)\,[x][Ey]F(x,y)$, który
nie daje się odwrócić

2. Przykłady ustalają, jakie zastosowanie znaleźć może teorja kwant-
yfikacji powszechnej w praktyce naukowej:

a) Analiza aksjomatów arytmetyki:

Aksjomaty arytmetyki podają następujące własności liczb
naturalnych:

1) Dla każdej liczby istnieje jedna i tylko jedna bezpośrednio
po niej następująca.

2) Nie istnieje liczba, dla której liczba 1 byłaby bezpośrednio
po niej następującą.

3) Dla każdej liczby różnej od 1 istnieje jedna i tylko jedna
bezpośrednio ją poprzedzająca.

W powyższych trzech aksjomatach występują jako funktory ogól-
ne stosunek bezpośredniego następstwa i stosunek
różności między liczbami: stosunek różności występuje nie tylko
w zwrocie „różny od 1" lecz również także w zwrocie

„istnieje jedna i tylko jedna liczba", gdyż wiemy, że istnieje tylko jedna liczba, spełniająca warunek, mianowicie, że nie istnieją trzy takie różne między sobą liczby; również zaś jest pojmowaniem równości. Wprowadzamy oznaczenia:

„Aeq ~~R~~(x,y)" czyli „x jest równe y"

„Seq ~~N~~(x,y)" czyli „x następuje bezpośrednio po y"

bez ich tłumaczenia i tych innych symboli. Teraz łatwo postawione wymienione wyżej trzy aksjomaty, jak następuje:

~~1) (x)(Ey) C N(x,y) C N(x,z) R(y,z)~~

~~czyli: dla liczby x istnieje tylko liczba y, że jeżeli y następuje~~

~~1) (x)(Ey) N(x,y)(z) C N(x,z) R(y,z)~~

1) $[x][Ey]\ K\ Seq(x,y)\ [z]\ C\ Seq(x,z)\ Aeq(y,z)$

„dla każdej liczby x istnieje taka liczba y, że y następuje bezpośrednio po x i dla każdej liczby z, jeżeli z następuje bezpośrednio po x, z jest równe y."

2) $N\ [Ex]\ Seq(x,1)$

„nieprawda, że istnieje taka liczba x, po której bezpośrednio następuje liczba 1".

3) $[x]\ C\ N\ Aeq(x,1)\ [Ey]\ K\ Seq(y,x)\ C\ Seq(z,1)\ Aeq(y,z)$

3) $[x]\, C\, N\, Aeq(x,1)\, [Ey]\, K\, Seq(y,x)\, [z]\, C\, Seq(z,x)\, Aeq(y,z)$

„Dla każdego x jeśli x jest różne od 1 istnieje pewne y, po którym x następuje bezpośrednio i dla każdego z, jeżeli x następuje bezpośrednio po z, y jest równe z (i więc jest ono każdym z następującym bezpośrednio po x)

b) Teoria funkcji propozycjonalnych umożliwia przeprowadzenie dowodów, dla których brak formy w logice klasycznej:

Np. „jeżeli istnieje jakiś syn, to istnieje jakiś ojciec"

Niech „S(x)" oznacza „x jest synem"; „O(x)" – „x jest ojcem".

Twierdzenie, które ma być udowodnione brzmi

(1) „$C\, [Ex]\, S(x)\, [Ey]\, O(y)$"

Dla przeprowadzenia dowodu należy zanalizować funkcje S(x) i O(y); S(x) definiujemy jako całość „x ..." i ... Przez „M(x)" oznaczamy „x jest mężczyzną (względnie...)" przez „R(y,z,x)" oznaczamy

„y i z są rodzicami x". Definicja brzmi:

(2) „S(x)" = „$K\, M(x)\, [Ey]\, [Ez]\, K(y,z,x)$"

„x jest synem" znaczy „x jest mężczyzną oraz istnieją y i z

takie, że y jest mężczyzną oraz z jest kobietą i są rodzicami x".

Następnie definiujemy „O(y)":

(3) „O(y)" = [Ez][Ex] K(y,z,x)

„y jest ojcem" znaczy „istnieją takie z i x, że y jest mężczyzną

i z jest kobietą są rodzicami x."

Jeżeli zastosujemy definicje (2) i (3) w (1) otrzymujemy

(4) C[Ex]KM(x)[Ey][Ez]K(y,z,x)[Ey][Ez][Ex]K(y,z,x)

dowód polega na tym, by wykazać, według ich reguł przekształcenia, że wyrażenie „[Ex]KM(x)[Ey][Ez]K(y,z,x)"

implikuje „[Ey][Ez][Ex]K(y,z,x)".

Mamy dalej

(5) C[Ex]KM(x)[Ey][Ez]K(y,z,x)[Ex][Ey][Ez]K(y,z,x)

na zasadzie prawa implikacji, dla dowodu (2) CKpqq

oraz

(6) C[Ex][Ey][Ez]K(y,z,x)[Ey][Ez][Ex]K(y,z,x)

na tej zasadzie, że bezpośrednio następujące po sobie kwantyfikatory egzystencjalne mogą być zamieniane.

(5) i (6) według zasady sylogizmu dają (4) c.d.d.o.

c) Podobnie stwarza się twierdzenie: „jeśli istnieje [illegible] ~~[illegible]~~, to istnieje ~~[illegible]~~ [illegible]"; gdy położymy „S(x)" zamiast „x jest [illegible]", „P(x)" zamiast „x jest zwycięzcą", to twierdzenie przyjmuje postać:

(1) $$C\,[Ex]\,P(x)\,[Ey]\,S(y)$$

Analizując funkcje P(x) i S(y), wprowadzamy funkcję „W(x,y)" czyli „x zwycięża y"; ~~[illegible]~~ przyjmujemy następujące definicje:

(2) $$\text{„}P(x)\text{"} = \text{„}[Ey]\,W(x,y)\text{"}$$

(3) $$\text{„}S(y)\text{"} = \text{„}[Ex]\,W(x,y)\text{"}$$

Przy pomocy definicji (2) i (3) sprowadzamy (1) na

(4) $$C\,[Ex]\,[Ey]\,W(x,y)\,[Ey]\,[Ex]\,W(x,y)$$

Z niej twierdzenie wynika wprost z praw wzmiankowanych dla kwantyfikatorów [illegible].

3) W teorii funkcji propozycjonalnych używamy następujące symbole:

1) zmienne zdaniowe p, q, r . . .

2) zmienne ~~[illegible]~~ nazwowe (~~[illegible]~~ [illegible] w zdaniu) x, y, z . . .

3) pisanie funkcji argumentowej (nazwowej): $f(x)$, $g(\ )$, $F(\ )$ ...

4) Funktory teorii zdań: $\sim$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$ 5.) Kwantyfikatory ogólny, szczególny.

~~Odpowiednio do~~ Kategorii symboli pierwszych 1)–3) odpowiednie symbole ~~stałe~~ [illegible]:

1a) [illegible] [illegible] np. „[illegible] [illegible]"

2b) nazwy przedmiotów [illegible] np. „[illegible]". Jako nazw [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible]

3b) Funktory [illegible] np. ~~[illegible]~~ „[illegible]", „[illegible]". ¹

Wyjaśnienie teorii funkcji prawdziwościowych wymagają

a) Zmienne [illegible] [illegible] [illegible] argumentów [illegible] [illegible] [illegible]

b) Funktory [illegible] i [illegible] do nich [illegible] [illegible] lub [illegible] [illegible].

c) Funktory teorii zdań [illegible] i [illegible] [illegible] argumentów [illegible] a) lub b)

d) ~~Kwantyfikatory ogólny lub szczególny [illegible]~~

d) Wyrażenia typu a), b), c), poprzedzone przez kwantyfikatory ogólne lub szczególne, [illegible] wolne [illegible] w tych wyrażeniach.

¹ drugą literą alfabetu [illegible] „α", „b" itd.

Teorji funkcji prawdziwościowych założenia teorji dedukcji jako teorji twierdzeń wyjściowych, a poza tym przyjmuje dwa nowe aksjomaty dla kwantyfikatorów ogólnego i szczegółowego:

1) $C[x]f(x)\,f(y)$

2) $C\,f(y)\,[Ex]\,f(x)$ zmienna wolna (gdy jest tylko wolna x.

„Jeżeli dla każdego x : f(x), to ~~dla dowolnego y~~ f(y)"

„Jeżeli ~~dla dowolnego y~~ f(y), to ~~istnieje~~ dla pewnego x : f(x) (istnieje takie x, że f(x))."
(gdzie y jest zmienną, zaś x dowolną zmienną.

Dwie reguły wnioskowania:

1) Reguła podstawiania:

a) Za zmienną zdaniową wolno podstawić każde wyrażenie (zob. wyżej a–d), wolno także tylko samemu za tę samą zmienną z obu stron jednego wyrażenia.

b) za zmienną funkcyjną argumentów zmiennych x, y ... u, wolno podstawić każde wyrażenie zależne od tych samych zmiennych (i ewentualnie innych jeszcze).

c) Za zmienną nazwową ~~...~~ wolno podstawić inną zmienną nazwową. Taki sam względ zmian zmiennych, ~~...~~ dowolny, wolno podstawić niezależnie.

Podstawiać wolno tylko za zmienne wolne i to tym ograniczeniem, że wobec zmiennej wolnej nic nie robi się wskutek odsta-wiania zmiennych wyrazem oraz konsekwentów.

2) Reguła odrywania jest taka sama, jak w teorii dedukcji.

3) Reguła dołączania kwantyfikatorów:

a) Jeżeli p jest wyrażeniem niezależnym od x, $f(x)$ wyrażeniem zawierającym zmienną x i jeżeli jest wyrażenie $C\,p\,f(x)$ jest prawdziwe, to udowodnione również $C\,p\,[x]\,f(x)$ jest prawdziwe.

b) Jeżeli jest p i $f(x)$ jak wyżej i jeżeli prawdziwe jest wyrażenie $C\,f(x)\,p$, to wolno uznać jako prawdziwe wyrażenie $C\,[Ex]\,f(x)\,p$. ‡

4) Niektóre tezy teorii funkcji propozycjonalnych wraz z dowodami.

‡ Dyrektywa 3a daje dyrektywę według

3a') Jeżeli $f(x)$ jest wyrażeniem prawdziwym, to wolno uznać także wyrażenie $(x)\,f(x)$ – albowiem jeżeli p oraz $f(x)$ jest tezą wyrażeniem prawdziwym, to także $C\,p\,f(x)$ jest wyrażeniem prawdziwym według reguły 3a $C\,p\,[x]\,f(x)$ i wobec reguły odrywania $(x)\,f(x)$.

I C[x]f(x)f(y)
II Cf(y)[Ex]f(x)
III [x]Af(x)Nf(x)
IV C[x]f(x)[Ex]f(x)
V C[x]Apf(x)Ap[x]f(x)
VI C[x]Cpf(x)Cp[x]f(x)
VII Cp[x]Apf(x)
VIII CAp[x]f(x)[x]Apf(x) (Ctr. V)
IX CCp[x]f(x)[x]Cpf(x) (Ctr. VI)
X C[x]Kpf(x)Kp[x]f(x)
XI CKp[x]f(x)[x]Kpf(x)
XII C[x][y]f(x,y)[y][x]f(x,y)
XIII C[y][x]f(x,y)[x][y]f(x,y)
XIV C[x]Kf(x)g(x)K[x]f(x)[x]g(x)
XV CK[x]f(x)[x]g(x)[x]Kf(x)g(x)
XVI C[x]Cf(x)g(x)C[x]f(x)[x]g(x)
XVII C[Ex]f(x)N[x]Nf(x)
XVIII CN[x]Nf(x)[Ex]f(x)
XIX C[Ex]Nf(x)N[x]f(x)
XX CN[x]f(x)[Ex]Nf(x)
XXI CN[Ex]Nf(x)[x]f(x)
XXII C[x]f(x)N[Ex]Nf(x)
XXIII CN[Ex]f(x)[x]Nf(x)
XXIV C[x]Nf(x)N[Ex]f(x)

28 CKp Kqr Kq Kpr

1. ApNp 11x
2. CCpqCCqrCpr 2x
3. CApqCNpq 12x
~~4 CCpCqrCKpqr ctr. 18~~
5. CCKpqrCpCqr 17x
6 CCNpqApq 13x
Df I Cpq = ANpq
7 CpApq 8x
8 CCqrCApqApr 10x
9 CKpqq 15x
10 CKpqp 14x
11 CCpqCCprCpKqr 18x
12 CCqrCKpqKpr 19x
13 CKpqp ctr. 10
14 CKpqq " 9
15 CCpqCCprCpKqr ctr. 11
16 CCpqCCrsCKprKqs 20x
17 CCpCqrCqCpr 4.x
18 CCpCqrCKpqr 16x
19. CCKpqrCpCqr ctr. 5
20 CCpCqrCqCpr ctr. 17
21 CCpqCNqNp 7x
22 CpNNp 5x
23 CNNpp 6x
24 CCqrCCpqCpr 3.x
25 Cpp 1.x
26 CApqAqp 9x
27 CCpqCAprAqr 10a

$\overline{\underline{XXV}}$ $C[x]Cf(x)g(x)\,C[Ex]f(x)[Ex]g(x)$

$\overline{\underline{XXVI}}$ $\cancel{CC[}Ex$ $C[x]Cf(x)p\,C[Ex]f(x)p$

$\overline{\underline{XXVII}}$ $CC[Ex]f(x)p[x]Cf(x)p$

$\overline{\underline{XXVIII}}$ $C[Ex][y]f(x,y)[y][Ex]f(x,y)$

232

[x] Af(x) Nf(x)

1 Ap Np

1 p/f(x) * R 3a' – I

III [x] Af(x) N(fx)

C [x] f(x) [Ex] f(x)

Aksjomaty:

I C[x] f(x) f(y)

II. C f(y) [Ex] f(x)

IV $\boxed{2\ CCpq\ CCqr\ Cpr}$ L 1.

2 p/[x] f(x), q/f(y), r/[Ex] f(x) * C I – II – IV

IV C [x] f(x) [Ex] f(x)

C [x] Ap f(x) Ap [x] f(x)

I f(x) | Ap f(x), f(y) | Ap f(x)

a) C [x] Ap f(x) Ap f(x) $\boxed{3\ CApq\ CNpq}$ L 87

2 p | [x] Ap f(x), q/Ap f(x), r/ C Np f(x) * C a – 3 ~~p/Ap f(x),~~ q/f(x) – b
~~q/C Np f~~

b C [x] Ap f(x) C Np f(x)

$\boxed{4\ CCpCqr\ CKpqr}$ L 101

4 p/ [x] Ap f(x), q/Np, r/fx * C b – c

c CK [x] Ap f(x) Np f(x)

c * R 3a – d

d CK [x] Ap f(x) Np [x] f(x)

L 98 $\boxed{5\ CCKpqr\ CpCqr}$ $\boxed{6\ CCNpq\ Apq}$ L 85

13.

~~2 p|[x] Ap f(x), q|~~

5 p|[x] Ap f(x), q|Np, r|[x] f(x) * C d − e

e C[x] Ap f(x) C Np [x] f(x)

2 p|[x] Ap f(x), q|CNp[x] f(x), r|Ap[x] f(x) * C e − 6 q|[x] f(x) − V.

V C[x] Ap f(x) Ap [x] f(x)

C[x] Cp f(x) Cp [x] f(x)

~~7 CCpqCCqrCCrsCps (I.A.8)~~

I f(x)|ANp f(x), f(x)|ANp f(x) * a ~~ANp~~

L.87

a ~~C[x]Cpf(x)~~ C[x] ANp f(x) ANp f(x) $\boxed{\text{7 CANpqCpq}}$

2 p|[x] ANp f(x), q|ANp f(x), r|Cp f(x) * C a − C 7 q|f(x) − 6

b) C[x] ANp f(x) Cp f(x)

$\boxed{\text{8 CpCqp}}$ L 18

8 p|Cp f(x), ~~C~~ * R 3a − c
[x]

c) CCp f(x) Cq C p [x] f(x)

$\boxed{\text{9) CCpCqrCqCpr}}$

9) p|Cp f(x), r|C p [x] f(x) * C c − d

d CCqCCp f(x) Cp[x] f(x)

d q|ApNp * C 1 − e

5 p/[x]Apf(x), q/Np, r/[x]f(x) * C d – e

e) C[x]Apf(x)CNp[x]f(x)

2) p/[x]Apf(x), q/CNp[x]f(x), r/Ap[x]f(x) * C e – 6 q/[x]f(x) – V

V. C[x]Apf(x)Ap[x]f(x)

C[x]Cpf(x)Cp[x]f(x)

$\boxed{\text{def I } Cpq = ANpq}$

V p/Np def I q/f(x) * a

a) C[x]Cpf(x)ANp[x]f(x)

a def I q/[x]f(x) * VI

VI C[x]Cpf(x)Cp[x]f(x)

Cp[x]Apf(x)

$\boxed{7\ CpApq}$ l. 72

7 q/f(x) R 3a – VII

VII Cp[x]Apf(x)

CAp[x]f(x)[x]Apf(x)

VIII

$\boxed{8\ CCqrCApqApr}$ l. 76

8 q/[x]f(x), r/f(x) * C I f(y)/f(x) – a

a CAp[x]f(x)Apf(x)

a. R 3a – VIII

14.

e CC~~p~~f(x) Cp[~~x~~] f(x)

$\boxed{\text{8 CpCqr}}$ £. 18

8 p/Cpf(x), * R3a – c

c CCpf(x) Cq[x]Cpf(x)

$\boxed{\text{9 CCpCqrCqCpr}}$ £. 21

9 p/Cpf(x), r/[x]Cpf(x) * Cc – d

d) CqCCpf(x)[x]Cpf(x)

d q/ApNp *C1 – e

e) CCpf(x)[x]Cpf(x)

2 p/[x]ANpf(x), q/Cpf(x), r/[x]Cpf(x) *C6 – e – f

f) C[x]ANpf(x)[x]Cpf(x)

$\overline{VIII}$. $C\Lambda p[x]f(x)[x]\Lambda pf(x)$

$\boxed{CCp[x]f(x)[x]Cpf(x)}$

$\overline{VIII}$ p/Np. δf. I $q/[x]f(x)$. δf I $q/f(x)$ — $\overline{IX}$

$\overline{IX}$. $CCp[x]f(x)[x]Cpf(x)$

$\boxed{9\ CKpqq}$ £94.

$\boxed{C[x]Kpf(x)Kp[x]f(x)}$

2 $p/[x]Kpf(x)$, $q/Kpf(x)$, $r/f(x)$ * $C\ I\ f(x)/Kpf(x), f(y)/Kpf(x)$ — 9 $q/f(x)$ — a

a) $C[x]Kpf(x)f(x)$

a. R3a — b

$\boxed{10\ CKpqp}$ £93.

b) $C[x]Kpf(x)[x]f(x)$

2 $p/[x]Kpf(x)$, $q/Kpf(x)$, r/p * $C\ I\ f(x)/Kpf(x), f(y)/Kpf(x)$ — 10 $q/f(x)$ — c

c) $C[x]Kpf(x)p$

$\boxed{11\ CCpqCCprCpKqr}$

11 $p/[x]Kpf(x)$, q/p, $r/[x]f(x)$ * C c — b — $\overline{X}$

$\overline{X}$ $C[x]Kpf(x)Kp[x]f(x)$

$\boxed{CKp[x]f(x)[x]Kpf(x)}$

$\boxed{12\ CCqrCKpqKpr}$

~~I $f(y)/f\ x$~~

~~$CCqrCApqApr$~~

~~8 $q/[x]f(x)$, $r/f(x)$ p/q * $C\ I\ f(y)/f(x)$ — a~~

12 q/[x] f(x), r/f(x), ~~x~~ * C I f(y)/f(x) - x

a C K p [x] f(x) K p f(x)

a R 3 a

XI C K p [x] f(x) [x] K p f(x)

C [x] [y] f(x, y) [y] [x] f(x, y)

I f(x)/[y] f(x, y), f(y)/[y] f(x, y) * a

a C [x] [y] f(x, y) [y] f(x, y)

I [x] f(x)/[y] f(x, y), f(y)/f(x, y) * b

b) C [y] f(x, y) f(x, y)

2 p/[x] [y] f(x, y), q/[y] f(x, y), r/f(x, y) * C a - b - c

c) C [x] [y] f(x, y) f(x, y)

c R 3 a - d

d) C [x] [y] f(x, y) [x] f(x, y)

d R 3 a - XII

XII C [x] [y] f(x, y) [y] [x] f(x, y)

W zupełnie analogiczny sposób dowodzi się twierdzenia [illegible]:

XIII C [y] [x] f(x, y) [x] [y] f(x, y)

13.

5 p | [x] Apf(x), q | Np, r | [x] f(x) * Cd-e

e) C[x] Apf(x) CNp[x] f(x)

2 p | [x] Apf(x), q | CNp[x] f(x), r | Ap[x] f(x) * Ce-6 q | [x] f(x) - $\underline{V}$

$\underline{V}$ C[x] Apf(x) Ap[x] f(x)

C[x] Cpf(x) Cp[x] f(x)

236

16.

C[x]K f(x) g(x) K [x] f(x) [x] g(x), 13 CKpqp

~~I f(x)|Kf(x)g(x) f(y)|Kf(x)g(x) * a~~

2 p/[x]Kf(x)g(x), q/Kf(x)g(x), r/f(x) * C I f(x)|Kf(x)g(x), f(y)|Kf(y)g(y)

– 13 p/f(x), q/g(x) – a

a) C[x]Kf(x)g(x) f(x) 14 CKpqq

2 p/[x]Kf(x)g(x), q/Kf(x)g(x), r/g(x) * C I 1-w. – 14 j.w. – b.

b) C[x]Kf(x)g(x) g(x)

a R3a

c) C[x]Kf(x)g(x) [x] f(x)

b. R3a

d C[x]Kf(x)g(x) [x] g(x)

15 CCpqCCprCpKqr

15 p/[x]Kf(x)g(x), q/[x]f(x), r/[x]g(x) * C c – d – XIV

XIV C[x]Kf(x)g(x)K[x]f(x)[x]g(x)

CK[x]f(x)[x]g(x)[x]Kf(x)g(x)

16 CCpqCCrsC~~Kpr~~Kqs

16 p/[x]f(x), q/f(x), r/[x]g(x), s/g(x) * C I f(x)|f(x) – I f(x)|g(x), f(y)|g(y)

– a

a) CK[x]f(x)[x]g(x)Kf(x)g(x)

a – R3a

XV CK[x]f(x)[x]g(x)[x]Kf(x)g(x)

17. 237

31 C [x] Cf(x)g(x) C[x]f(x)[x]g(x)

17 CCpCqrCqCpr

17 p/[x]Cf(x)g(x), q/f(x), r/g(x) * C I f(x)/Cf(x)g(x), f(y)/Cf(x)g(x) - a

a) Cf(x)C[x]Cf(x)g(x)g(x)

2 p/[x]f(x), q/f(x), r/C[x]Cf(x)g(x)g(x) * C I f(y)/f(x) - a - b

b) C(x)f(x)C[x]Cf(x)g(x)g(x)

18 CCpCqrCKpqr

18 p/[x]f(x), q/[x]Cf(x)g(x), r/g(x) * C b - c

c) CK[x]f(x)[x]Cf(x)g(x)g(x)

c R3a - d

d) CK[x]f(x)[x]Cf(x)g(x)[x]g(x)

19 CCKpqrCpCqr

19 p/[x]f(x), q/[x]Cf(x)g(x), r/[x]g(x) * C d - ~~XVI~~ e

e) ~~XVI~~ C[x]f(x)C[x]Cf(x)g(x)[x]g(x)

20 CCpCqrCqCpr

~~20~~ p/[x]f(x), q/[x]Cf(x)g(x), r/[x]g(x) * C e - XVI.

XVI C[x]Cf(x)g(x)C[x]f(x)[x]g(x)

21 CCpqCNqNp

33a1 C[Ex]f(x)N[x]Nf(x)

21 p/[x]Nf(x), q/Nf(x) * C I f(x)/Nf(x), f(y)/Nf(x) - a

22 ~~Cf(x)NN~~ CpNNp

a) CNNf(x)N[x]Nf(x)

2 p/f(x), q/NNf(x), r/N[x]Nf(x) * C22p/f(x) - a - b

b, Cf(x)N[x]Nf(x)

b - R3b * XVII

XVII C[Ex]f(x)N[x]Nf(x)

33a₂ CN[x]Nf(x)[Ex]f(x)

21 p/f(x), q/[Ex]f(x) * C II f(y)/f(x) - a

a) CN[Ex]f(x)Nf(x)

a - R3a * b

b) CN[Ex]f(x)[x]Nf(x)

21 p/N[Ex]f(x), q/[x]Nf(x) * Cb - c

c) C~~[x]~~ CN[x]Nf(x)NN[Ex]f(x) — 23 CNNpp

2 p/N[x]Nf(x), q/NN[Ex]f(x) r/[Ex]f(x) * Cc - 23p/[Ex]f(x) - XVIII

XVIII. CN[x]Nf(x)[Ex]f(x)

~~24 Cpp~~

33b₁ C[Ex]Nf(x)N[x]f(x)

~~24 p/f(x) R3a' * a~~

~~a) [x]Cf(x)f(x)~~

~~XVI g(x)/f(x) * Ca - b~~

~~b) C[x]f(x)[x]f(x)~~

~~2i p/[x]f(x), q/[x]f(x) * Cb - c~~

~~c) CN[x]f(x)N[x]f(x)~~

 239

$\overline{XVII}$ f(x) | Nf(x) * a

a) C[Ex]Nf(x)N[x]NNf(x)

22 p | f(x) . R3a' * b

b) [x]Cf(x)NNf(x)

$\overline{XVI}$ g(x) | NNf(x) * Cb – c

c) C[x]f(x)[x]NNf(x)

2i p | [x]f(x), q | [x]NNf(x) * Cc – d

d) CN[x]NNf(x)N[x]f(x)

2 p | [Ex]Nf(x), q | N[x]NNf(x), r | N[x]f(x) * Ca – d – $\overline{XIX}$

$\overline{XIX}$ C[Ex]Nf(x)N[x]f(x)

33 b$_2$ CN[x]f(x)[Ex]Nf(x)

$\overline{XVII}$ f(x) | Nf(x) * a

a) CN[x]NNf(x)[Ex]Nf(x)

23 p | f(x) . R3a' * b

b) [x]CNNf(x)f(x)

$\overline{XVI}$ f(x) | NNf(x), g(x) | f(x) * Cb – c

c) C[x]NNf(x)[x]f(x)

2i p | [x]NNf(x), q | [x]f(x) * Cc – d

d) CN[x]f(x)N[x]NNf(x)

2 p | N[x]f(x), q | N[x]NNf(x), r | [Ex]Nf(x) * Cd – a – $\overline{XX}$

$\overline{XX}$ CN[x]f(x)[Ex]Nf(x)

240

$\underline{33a'\ CN[Ex]Nf(x)[x]f(x)}$.

$21\ p/N[x]f(x),\ q/[Ex]Nf(x) * C\ \overline{XX} - a$

$a)\ CN[Ex]Nf(x)NN[x]f(x)$

$2)\ p/N[Ex]Nf(x),\ q/NN[x]f(x),\ r/[x]f(x) * Ca - 23\ p/[x]f(x) - \overline{XXI}$.

$\overline{XXI}\ \ CN[Ex]Nf(x)[x]f(x)$

W podobny sposób otrzymamy z transpozycji twierdzenie odwrotne

$\overline{XXII}\ \ C[x]f(x)N[Ex]Nf(x)$

z powołaniem się na $\overline{XIX}$,

oraz twierdzenia

$\overline{XXIII}\ CN[Ex]f(x)[x]Nf(x)$

$\overline{XXIV}\ C[x]Nf(x)N[Ex]f(x)$

z powołaniem się na $\overline{XVIII}$ i $\overline{XVII}$.

$\underline{34\ C[x]Cf(x)g(x)C[Ex]f(x)[Ex]g(x)}$

$2i\ p/f(x),\ q/g(x).\ R3a' * a$

$a)\ \ [x]CCf(x)g(x)CNg(x)Nf(x)$

$\overline{XVI}\ f(x)/Cf(x)g(x),\ g(x)/CNg(x)Nf(x) * Ca - b$

$b)\ C[x]Cf(x)g(x)[x]CNg(x)Nf(x)$

$\overline{XVI}\ f(x)/Ng(x),\ g(x)/Nf(x) * c$

$c)\ C[x]CNg(x)Nf(x)C[x]Ng(x)[x]Nf(x)$

$2\ p/[x]Cf(x)g(x),\ q/[x]CNg(x)Nf(x),\ r/C[x]Ng(x)[x]Nf(x)$

$* Cb - c - d$

2i

d) C[x]Cf(x)g(x)C[x]Ng(x)[x]Nf(x)

2 p/[x]Cf(x)g(x), q/C[x]Ng(x)[x]Nf(x), r/CN[x]Nf(x)N[x]Ng(x)

*Cd – 2i p/[x]Ng(x), q/[x]Nf(x) – e

e) C[x]Cf(x)g(x)CN[x]Nf(x)N[x]Ng(x)

2 p/[Ex]f(x), q/N[x]Nf(x), r/N[x]Ng(x) *C XVII – f

f) CCN[x]Nf(x)N[x]Ng(x)C[Ex]f(x)N[x]Ng(x)

2 p/[x]Cf(x)g(x), q/CN[x]Nf(x)N[x]Ng(x), r/C[Ex]f(x)N[x]Ng(x)

*Ce – f – g

g) C[x]Cf(x)g(x)C[Ex]f(x)N[x]Ng(x)

$\boxed{\text{24 CCqrCCpqCpr}}$

24 p/[Ex]f(x), q/N[x]Ng(x), r/[Ex]g(x) *C XVIII – h

h) CC[Ex]f(x)N[x]Ng(x)C[Ex]f(x)[Ex]g(x)

2 p/[x]Cf(x)g(x), q/C[Ex]f(x)N[x]Ng(x), r/C[Ex]f(x)[Ex]g(x)

*Cg – h – XXV

XXV C[x]Cf(x)g(x)C[Ex]f(x)[Ex]g(x)

35a C[x]Cf(x)pC[Ex]f(x)p. $\boxed{\text{25 Cpp}}$ $\boxed{\text{26 CApqAqp}}$

25 p/[x]Cf(x)p. Def I p/f(x), q/p *a

a) C[x]Cf(x)p[x]ANf(x)p

26 p/Nf(x), q/p. R3a' *b

b) [x]CANf(x)pApNf(x)

XVI f(x)|ANf(x)p, g(x)|ApNf(x) * Cb – c

c) C[x]ANf(x)p[x]ApNf(x)

2 p|[x]Cf(x)p, q|[x]ANf(x)p, r|[x]ApNf(x) * Ca – c – d

d) C[x]Cf(x)p[x]ApNf(x)

2 p|[x]Cf(x)p, q|[x]ApNf(x), r|Ap[x]Nf(x) * Cd – V f(x)|Nf(x) – e

e) C[x]Cf(x)pAp[x]Nf(x)

8 q|[x]Nf(x), r|N[Ex]f(x) * C XXIV – f

f) CAp[x]Nf(x)ApN[Ex]f(x)

2 p|[x]Cf(x)p, q|Ap[x]Nf(x), r|ApN[Ex]f(x) * Ce – f – g

g) C[x]Cf(x)pApN[Ex]f(x)

2 p|[x]Cf(x)p, q|ApN[Ex]f(x), r|AN[Ex]f(x)p * Cg – 26 q|N[Ex]f(x) – h

h) C[x]Cf(x)pAN[Ex]f(x)p

h. def I p|[Ex]f(x), q|p * XXV

XXV C[x]Cf(x)pC[Ex]f(x)p

356 CC[Ex]f(x)p[x]Cf(x)p,

25 p|C[Ex]f(x)p . DI p|[Ex]f(x), q|p * a

a) CC[Ex]f(x)pAN[Ex]f(x)p

27 p|N[Ex]f(x), q|[x]Nf(x), r|p * C XXIII – b

b) CANΣ[Ex] f(x) p A[x] Nf(x) p

2 p|C[Ex] f(x) p, q|ANΣ[Ex] f(x) p, r|A[x] Nf(x) p * C a - b - c

c) CC[Ex] f(x) p A[x] Nf(x) p

2 p|C[Ex] f(x) p, q|A[x] Nf(x) p, r|Ap[x] Nf(x)

* C c - 26 p|[x] Nf(x), q|p - d

d) CC[Ex] f(x) p Ap[x] Nf(x)

2 p|C[Ex] f(x) p, q|Ap[x] Nf(x), r|[x] ApNf(x)

* C d - VIII f(x)|Nf(x) - e

e) CC[Ex] f(x) p [x] ApNf(x)

26 q|Nf(x). R3a' * f

f) [x] CApNf(x) ANf(x) p

XVI f(x)|ApNf(x), g(x)|ANf(x) p * C f - g

g) C[x] ApNf(x) [x] ANf(x) p

g. D I. p|f(x), q|p * h

h) C[x] ApNf(x) [x] Cf(x) p

2 p|C[Ex] f(x) p, q|[x] ApNf(x), r|[x] Cf(x) p * C e - h - XXVII

XXVII CC[Ex] f(x) p [x] Cf(x) p

36 C[Ex][y] f(x,y) [y][Ex] f(x,y)

II f(y)|f(x,y), f(x)|f(x,y). R.3a' * a

a) [y] Cf(x,y) [Ex] f(x,y)

./.

XVI $f(x) \mid f(x,y)$, $g(x) \mid [Ex] f(x,y)$ $*$ C a - b

b) $C [y] f(x,y) [y] [Ex] f(x,y)$

b. R 3 b $*$ XXVIII.

XXVIII. $C [Ex][y] f(x,y) [y][Ex] f(x,y)$.

3.) Przykłady zastosowania teorji funkcji propozycjonalnych do ~~zagadnień~~ ~~oraz~~ przeprowadzania rozumowań w różnych dziedzinach wiedzy.

~~Wszystkie rozumowania z dziedziny, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]~~

~~[illegible] [illegible] przedstawić symbolicznie~~

a) „Każdy człowiek jest śmiertelny, Cajus jest człowiekiem, więc Cajus jest śmiertelny."

Niech będzie: $Cz(x)$ znaczy „x jest człowiekiem"

$Śm(x)$ " „x jest śmiertelny"

Przesłanki: Każdy człowiek jest śmiertelny: $[x]\, C\, Cz(x)\, Śm(x)$ a)

Cajus jest człowiekiem $Cz(Cajus)$ b)

$I\ A(x) \mid C\, Cz(x)\, Śm(x),\ x/y\ *\ C\, a - c$

c) $C\, Cz(y)\, Śm(y)$

$c\ \ y/Cajus\ *\ C\, b - d$

d) $Śm(Cajus)$

b) Założenie: Przez dwa punkty nie różniące się przechodzi jedna i tylko jedna prosta.

Wniosek: Dwie proste mogą mieć co najwyżej jeden punkt wspólny.

Potrzebne są umówione ~~[illegible]~~ symbole:

$x, y, z \ldots$ oznaczać, zastępować nazwy punktów

$g, h, \ldots$ " " " prostych,

W a' i b' zastąpimy:

odpowiednio na (XXIII i XXIV) równoważności

$[G].N[EH]K.NI(G,H)\Delta$ przez $N[EG][EH]K.NI(G,H)\Delta$

$[x].N[Ey]K.NI(x,y)\Delta$ " $N[Ex][Ey]K.NI(x,y)\Delta$

oraz [illegible] [illegible] ~~XXIII~~ [illegible] równoważności [illegible]

[illegible] z ~~[illegible]~~ [illegible] na [illegible] [illegible]:

$[H].AI(G,H)N\Delta$ przez $N[EH]K.NI(G,H)\Delta$

$[y]AI(x,y)N\Delta$ " $N[Ey]K.NI(x,y)\Delta$

Wskutek tego otrzymujemy:

a'') $[x][y]AI(x,y)[G][H]AI(G,H)N\Delta$

b'') $[G][H]AI(G,H)[x][y]AI(x,y)N\Delta$

Równoważności V i VIII [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible]

a'' i b'' na [illegible]

Nareszcie według równoważności XII i XIII oraz [illegible] [illegible]

[illegible] do [illegible]

~~[illegible]~~ [illegible] a'' i b'' [illegible] według [illegible] [illegible] dla

[illegible] (XII i XIII) oraz [illegible] [illegible] i [illegible]

dla [illegible], [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

w [illegible] [illegible] z [illegible] i [illegible]

„$L(x,G)$" znaczy „punkt x leży na prostej G" lub „prosta G przechodzi przez x"
„$I(x,y)$" „ „punkt x jest równy identyczny z punktem y")
„$NI(x,y)$" znaczy przeto „x jest różny od y" i podobnie dla
prostych $I(G,H)$ ~~albo~~ lub $NI(G,H)$.

Przy pomocy wprowadzonych symboli możemy [illegible] ~~wyrazić~~ następujące aksjomaty:

a) $[x][y]\, C.NI(x,y).N\,[EG][EH]\, K.NI(G,H)\, K\,L(x,G)\, K\,L(x,H)\, K\,L(y,G)\, L(y,H)$

(Dla każdego x i dla każdego y: Jeżeli punkt x jest różny od punktu y, nieprawda, że istnieje taka prosta G, oraz dla pewnej prostej H, różnej od G, tego ~~jednak~~ znaczenia, że ~~x leży na~~ G przechodzi przez x i H przechodzi przez x oraz G przechodzi przez y oraz H przechodzi przez y.

Dalej mamy aksjomat następujący

b) $[G][H]\, C.NI(G,H).N\,[Ex][Ey]\, K.NI(x,y)\, K\,L(x,G)\, K\,L(x,H)\, K\,L(y,G)\, L(y,H)$

(Dla każdego G i dla każdego H: Jeżeli prosta G jest różna od prostej H, nieprawda, że istnieje taki punkt x, oraz dla pewnego punktu y, różnego od x tego znaczenia, że x leży na G i x leży na H oraz y leży na G i y leży na H.

Przyjmujmy dla skrócenia: „$KL(x,G)KL(x,H)KL(y,G)L(y,H)$" $\hat{=}$ Δ
i używając definicji I: „Cpq" = „$ANpq$"; wyrazimy a i b

I x/u, y/v, z/w * 1.

1.) [Ew] φ(u,v,w)

II y/u, u/y, z/v, w/z, v/w

2) CKφ(x,u,y)Kφ(u,v,w)φ(y,w,z)φ(x,w,z)

+ nowe! 17* p/φ(x,u,y), q/Kφ(u,v,w)φ(y,w,z), r/φ(x,w,z) * C2-3

3) Cφ(x,u,y)CKφ(u,v,w)φ(y,w,z)φ(x,w,z)

~~XVI 3. f(x) x/u; f(w)/φ~~ trzeba posłużyć CCpCKqrsCqCps (dzięki jest prawem wcześniejszym 4x) przekształcamy 3) w 4.)

4 Cφ(u,v,w)CKφ(x,u,y)φ(y,w,z)φ(x,w,z)

~~XVI x/w, f(x)/φ(u,v,w), g(x)/CKφφφ *~~

~~* C4. R3a' - 5.~~

~~5 C[w]φ(u,v,w)[w]CKφ(x,u,y)φ(y,w,z)φ(x,w,z)~~

XXV x/w, f(x)/φ(u,v,w), g(x)/CKφφφ

* C4 R3a' - C1-5

5. ~~C[Ew]φ(u,v,w)~~ [Ew]CKφ(x,u,y)φ(y,w,z)φ(x,w,z)

5 R3a' - C

CKpKqrKpr

Uzasadnijmy to tak

$a')\ [x][y]\, A\, I(x,y)\,.\, N[Eg][EH]\, K\, N\, I(g,H)\ \Delta$

$b')\ [g][H]\, A\, I(x,y)\,.\, N[Ex][Ey]\, K\, N\, I(x,y)\ \Delta$

W a' i b' opuszczamy:

opierając się na równoważności $\overline{XXIII}$ i $\overline{XXIV}$:

$[g]\, N[EH]\, K\, N\, I(g,H)\ \Delta$ zamiast $N[Eg][EH]\, K\, N\, I(g,H)\ \Delta$

$[x]\, N[Ey]\, K\, N\, I(x,y)\ \Delta$ " $N[Ex][Ey]\, K\, N\, I(x,y)\ \Delta$

oraz stosując pewne wtórne uogólnienia równoważności oraz formuły de Morgana na negacje koniunkcji:

$[H]\, A\, I(g,H)\, N\, \Delta$ zamiast $N[EH]\, K\, N\, I(g,H)\ \Delta$

$[y]\, A\, I(x,y)\, N\, \Delta$ " $N[Ey]\, K\, N\, I(x,y)\ \Delta$

Wobec tego otrzymujemy:

$a'')\ [x][y]\, A\, I(x,y)\, [g][H]\, A\, I(g,H)\, N\, \Delta$

$b'')\ [g][H]\, A\, I(g,H)\, [x][y]\,.\, A\, I(x,y)\, N\, \Delta$

Równoważności $\overline{V}$ i $\overline{VIII}$ pozwalają przekształcić a'') i b'') na

$a''')\ [x][y][g][H]\, A\, I(x,y)\, A\, I(g,H)\, N\, \Delta$

$b''')\ [g][H][x][y]\, A\, I(g,H)\,.\, A\, I(x,y)\, N\, \Delta$

Wyrażenia a''') i b''') są według praw pozwalających dla komutatywności ($\overline{XII}$ i $\overline{XIII}$) oraz prawa łączności i pozwalających dla alternatywy równoważne; tak więc zostało udowodnione, że wniosek b) wynika z założenia a) i odwrotnie.

Twierdzenie 6') przedstawimy w sposób następujący:

~~według XXI jest wyrażenie [illegible] [illegible]~~

~~6') $C[E\rho][E\upsilon]K\varphi(x,\omega,y)\varphi(y,\upsilon,z)[E\omega]\varphi(x,\omega,z)$~~

~~według def I zamieniamy implikację na alternatywę~~

~~6'')~~ zamieniamy implikację na alternatywę:

6') $AAN[Eu]\varphi(x,u,y)N[E\upsilon]\varphi(y,\upsilon,z)[E\omega]\varphi(x,\omega,z)$

według XXIII

$AA[u]N\varphi(x,u,y)[\upsilon]N\varphi(y,u,z)[E\omega]\varphi(x,\omega,z)$

według V (wraz z przemiennością alternatywy)

$A[u][\upsilon]AN\varphi(x,u,y)N\varphi(y,u,z)[E\omega]\varphi(x,\omega,z)$

według V nadto:

$[u][\upsilon][E\omega]AAN\varphi(x,u,y)N\varphi(y,u,z)\varphi(x,\omega,z)$

Zamieniając zaś z powrotem alternatywę na koniunkcję i implikację otrzymujemy

$[u][\upsilon][E\omega]CK\varphi(x,u,y)\varphi(y,u,z)\varphi(x,\omega,z)$

$CCKpKqrs \quad CKqKprs$

$CpCKqrs \quad CqCKprs$

3 Przykład. Udowodnić twierdzenie o przechodniości stosunku $M(x,y)$ – „x jest mniejsze od y", przyczem „x" i „y" są zmiennemi reprezentującemi nazwy ilości lub liczb dodatnich. Definjujemy stosunek $M(x,y)$ jak następuje: „x jest mniejsze od y wtedy i tylko, gdy istnieje liczba dodatnia u taka, że $x+u=y$." Wprowadzimy symbol „$\varphi(x,y,z)$" = „$x+y=z$", to możemy wyrazić tę definicję następująco:

$$Df^{I}\ „M(x,y)" = „[Eu]\,\varphi(x,u,y)"$$

Twierdzenie, które mamy udowodnić, jest

a) $CKM(x,y)M(y,z)M(x,z)$

a po uzupełnieniu Df I:

b) $CK[Eu]\varphi(x,u,y)[Ev]\varphi(y,v,z)[Ew]\varphi(x,w,z)$

Twierdzenie to daje się udowodnić jeśli uznamy [illegible] dwa następujące założenia, [illegible] [illegible] [illegible]:

α) ~~Każde dwie~~ $[Ez]\,\varphi(x,y,z)$

„Każde dwie liczby x, y można dodać do siebie (istnieje liczba u, która jest ich sumą)".

β) $CK\varphi(x,y,u)K\varphi(y,z,v)\varphi(u,z,w)\varphi(x,v,w)$

„Jeśli $x+y=u$, $y+z=v$, $u+z=w$, to $x+v=w$, ~~tzn~~ mianowicie:

$$(x+y)+z = x+(y+z)"$$

jest to prawo łączności dla dodawania.

Twierdzenie to przedstawimy w sposób następujący:

Zamieniamy implikację na alternatywę:

$$AAN[Eu]\varphi(x,u,y)N[Ev]\varphi(y,v,z)[Ew]\varphi(x,w,z)$$

według $\overline{XXII}$:

$$AA[u]N\varphi(x,u,y)[v]N\varphi(y,v,z)[Ew]\varphi(x,w,z)$$

Według $\underline{V}$ (wraz z prawem przemienności dla alternatywy):

$$A[u][v]AN\varphi(x,u,y)N\varphi(y,v,z)[Ew]\varphi(x,w,z)$$

Według $\underline{V}$ nadto:

$$[u][v][Ew]AAN\varphi(x,u,y)N\varphi(y,v,z)\varphi(x,w,z)$$

Zamieniając zaś z powrotem alternatywę pod kwantyfikatorami na implikację, otrzymujemy:

c) $[u][v][Ew]CK\varphi(x,u,y)\varphi(y,v,z)\varphi(x,w,z)$

Twierdzenie c) wynika z założeń α i β, jak następuje:

α) $x/u,\ y/v,\ z/w \quad * A$

A. $[Ew]\varphi(u,v,w)$

β $y/u,\ u/y,\ z/v,\ w/z,\ v/w \quad * B$

B) $CK\varphi(x,u,y)K\varphi(u,v,w)\varphi(y,w,z)\varphi(x,w,z)$

$2\ p/KC\varphi(u,v,w)K\varphi(x,u,y)\varphi(y,u,z),\ q/K\varphi(x,u,y)K\varphi(u,v,w)\varphi(y,u,z)$

$r/\varphi(y,u,z) * C\ 28\ p/\varphi(u,v,w)\ \cancel{K}\ q/\varphi(x,u,y),\ r/\varphi(y,u,z) - B - \mathfrak{C}$

$\mathfrak{C}\ C K\varphi(u,v,w) K\varphi(x,w,y)\varphi(y,w,z)\varphi(x,w,z)$

$17\ p/\varphi(u,v,w),\ q/K\varphi(x,u,y)\varphi(y,u,z),\ r/\varphi(x,w,z) * C\ \mathfrak{C} - D$

$D\ C\varphi(u,v,w) CK\varphi(x,w,y)\varphi(y,w,z)\varphi(x,w,z)$

$\underline{XXV}\ x/w;\ f(x)/\varphi(u,v,w),\ g(x)\ CK\varphi(x,u,y)\varphi(y,w,z)\varphi(x,w,z)$

$* C\ D\ R3a' - CA - \mathcal{E}$

$\mathcal{E}\ [\exists w]\ CK\varphi(x,w,y)\varphi(y,w,z)\varphi(x,w,z)$

$\mathcal{E}\ R3a' - C$

253

250

łszie, wzd.

dane jaśniej-

dni,

i omawiane

, jeśli nie

pi:

i jest one-

nni być

odległości;

rozmowanie;

nie jest

nni otwar-

ni niezmiennej.

Prawa sylogizmu[1]

(John N. Keynes, Studies and Exercises in Formal Logic, wyd. IV. 1928. Part III. Chapt. I sec. 199-204.)

Prawa sylogizmu kategorycznego są według tego wyrażone następujące:

1/ Każdy sylogizm zawiera trzy i tylko trzy terminy.

2/ Każdy sylogizm składa się z trzech i tylko trzech zdań.

3/ Termin średni musi być przynajmniej w jednej przesłance rozłożony.

4/ Termin nie może być rozłożony w konkluzji, jeśli nie był rozłożony w przesłance.

5/ Z dwu przeczących przesłanek nie da się konkluzji.

6/ Jeśli jedna przesłanka jest przecząca, konkluzja jest przecząca; odwrotnie, jeśli konkluzja jest przecząca, musi być przecząca jedna z przesłanek.

Pierwsze dwa prawa są określają sylogizm, nie ~~[illegible]~~ odnoszą się, jak powiada, wszakże opisowo do sylogizmu; w szczególności, które nie czynią im zadość może być poprawne, lecz nie jest sylogizmem. Natomiast ~~pozostałe~~ dalsze prawa są warunkami poprawności sylogizmu, sylogizm, który im nie czyni zadość, jest niepoprawny.

SPRAWOZDANIE

KOMITETU WYSTAWY "SZTUKI I RZEMIOSŁ"

w Wilnie

Przejdźmy teraz [illegible] na wyprowadzenie niektórych praw dedukcyjnych:

I. Dwie przesłanki szczegółowe nie dają wyniku.

Dowód: Dwie przesłanki szczegółowe są bądź

α) obie twierdzące, bądź

β) obie przeczące, bądź

γ) jedna twierdząca i jedna przecząca.

W przypadku α nie ma konkluzji w myśl prawa 5.

W przypadku β żaden z terminów średnich w przesłankach nie jest rozłożony (ostatnio terminy są rozłożone, jeśli te przesłanki są szczegółowe, [illegible] nie [illegible] orzeczenie, że przesłanki są przeczące; termin średni nie jest więc rozłożony i konkluzji nie ma w myśl prawa 3.

W przypadku γ), gdyby konkluzja była możliwa, musiałaby być według prawa 6 przeczącą, termin większy musiałby być wtedy w konkluzji rozłożony. Musiałyby się być w przesłankach rozłożone dwa terminy: średni według prawa 3 i większy według 4. Lecz szczegółowe przeczące i szczegółowe twierdzące razem mają tylko jeden termin rozłożony. Konkluzji więc stąd wyciągnąć nie można.

II. Jeśli jedna przesłanka jest szczegółowa, konkluzja musi być szczegółowa.

Dowód: Przesłanki mogą być

α) obie przeczące, bądź

β) obie twierdzące, bądź

γ) jedna twierdząca i jedna przecząca.

W przypadku α, konkluzja wcale nie zachodzi wedle prawa 5. W przypadku β, gdy obie przesłanki są twierdzące, a jedna jest szczegółowa, może być rozłożony w nich co najwyżej jeden termin, który wedle prawa 3 musi być terminem średnim. Termin mniejszy jest zatem w przesłance nierozłożony, i konkluzja wedle prawa 4 jest szczegółowa. W przypadku γ mogą tylko dwa terminy być rozłożone, jeden w przesłance ogólnej i jeden w przesłance przeczącej; jeden z nich musi być terminem średnim wedle prawa 3, a drugi terminem większym wedle prawa 6 i 4. Termin mniejszy nie jest więc w przesłance rozłożony i konkluzja musi być szczegółowa wedle prawa 4.

III. Szczegółowa przesłanka większa i przecząca mniejsza nie dają konkluzji.

Dowód: Jeśli przesłanka mniejsza jest przecząca, większa musi być ~~twierdząca~~ twierdząca wedle prawa 5. Gdy jest ona prócz tego szczegółowa, to nie może być rozłożony, więc termin większy w niej nie jest rozłożony, nie może być tego [illegible] i w konkluzji wtedy [illegible] 4 tzw. konkluzja musi być prawdziwa. Natomiast wtedy [illegible] 6 przesłanka przecząca daje konkluzję przeczącą. ~~Gdyby~~ Ta prawidłowość każe mówić, że [illegible] konkluzji.

Otóż wymienione [illegible] prawa sylogizmu (z pominięciem dwóch pozostałych) dadzą się ująć:

A) Dla prawa dystrybucji

1) Termin średni musi być przynajmniej w jednej przesłance rozłożony.

2) Termin nie może być rozłożony w konkluzji, jeżeli nie był rozłożony w przesłance.

B) Dla prawa jakości:

3) Dwie przesłanki przeczące nie dają konkluzji

4) Jeżeli jedna przesłanka jest przecząca, konkluzja jest przecząca; jeżeli konkluzja jest przecząca, musi być przecząca jedna z przesłanek.

Powyższe cztery prawa nie są względem siebie niezależne. Można wykazać, że przesłanki, które naruszają drugie, albo trzecie albo ostatnią część czwartego, naruszają odpowiednio także pierwsze prawo, a ~~także~~ również – że przesłanki, które naruszają pierwsze, lub trzecie lub ostatnią część czwartego, naruszają odwrotnie także drugie.

(I) Prawo, że dwie przesłanki przeczące nie dają konkluzji, wynika z prawa, że termin średni musi być rozłożony przynajmniej w jednej przesłance (1)

Przypuśćmy, że dane są dwie przesłanki ogólne przeczące. Jakiekolwiek będzie w nich położenie terminu średniego, można je zawsze przez odwrócenie proste sprowadzić do postaci

Żadne P nie jest M

Żadne S nie jest M

a następnie przez obwersję:

Każde P jest nie M

Każde S jest nie M

Ale termin średni w takiej postaci nie jest rozłożony w obu, nie daje więc żadnej konkluzji; także przeto równoważne im dwie dawne Σ nie mogą dać konkluzji w żadnym przypadku.

Jeśli jedna z przesłanek jest ogólna, druga szczegółowa, to nie-ogólna ~~mogłaby~~ że być średnią II tylko przesłanką twierdzącą. ~~Łatwo widać [illegible] z [illegible] [illegible] przesłanki~~

I. Żadne M nie jest P   czyli   ~~Każde P jest nie M~~
Niekt. S nie są M   Niekt. S są nie M

II ~~Żadne P nie jest M~~   "   Każde P jest nie M
~~Niekt.~~ S nie są M   Niekt. S są nie M

~~III Żadne M nie jest P~~ ~~czyli~~ ~~Każde P jest nie M~~

~~Niektóre M nie są S~~ ~~Niektóre nie S są nie M~~

Jeśli jednak mamy konkluzję z przesłanki mniejszej ogólnej, to tembardziej mamy wniosek z przesłanki mniejszej szczegółowej, której ona jest ogólną. (2) (NB: dla przeczącej, ogólnej i szczegółowej w III i IV będzie dany wniosek dla uwagi terminu mniejszego: Żadne M nie jest P (lub żadne P nie jest M), Niektóre M nie są S (w odwróceniu: niektóre nie S są M); Niekt. nie S nie są P.)

(3)

II. Pozór, że z dwóch przesłanek przeczących nie ma wniosku (i że (wtedy) jeśli jedna przesłanka jest przecząca, konkluzja jest przecząca), wynikają wzajemnie ze siebie.

Dowód: jeśli że ze zdań P, Q wynika zdanie R, to ze zdania P z jednym prawdziwym i zaprzeczenia R wynika zaprzeczenie Q. Przypuśćmy, że ~~twierdzącą~~ przecząca przesłanka P i twierdząca Q mają za konkluzję zdanie twierdzące R. Więc z dwóch przeczących: P i zaprzeczenia R wynikałoby zaprzeczenie Q; lecz z dwóch przeczących nie ma konkluzji, przeto jeśli jedna przesłanka jest przecząca konkluzja musi być przecząca.

Przypuśćmy odwrotnie, że z dwóch przesłanek przeczących P i Q wynika wniosek R, w takim razie z negacji R i negacji warunku P wynikałoby ~~[illegible]~~ ~~Q~~ zdanie twierdzące nie Q. Lecz jeżeli jeden warunek jest przeczący, konkluzja nie może być twierdząca, a zatem z dwóch warunków przeczących niema wniosku.

III. Każdy sylogizm wykraczający przeciw prawu 2: (termin nie może być rozłożony w konkluzji, jeżeli nie był rozłożony w warunku) wykracza pośrednio przeciw prawu 1 (termin średni musi być przynajmniej w jednym warunku rozłożony) — i odwrotnie:

~~Dowód~~: Niech będą P i Q warunkami, R konkluzją sylogizmu, ~~w którym~~ (wymieniony we) termin X, który ~~jest~~ nie był rozłożony w warunku P, jest rozłożony w R. Negacja R wraz z P daje w konkluzji negację Q. Lecz termin rozłożony w jakimkolwiek zdaniu nie może być ~~jest~~ rozłożony w jego negacji. Termin X nie jest więc rozłożony ani w negacji R, ani odpowiednio w P; sylogizm zatem mający za warunki nie R i P, a za konkluzję nie Q wykracza przeciw prawu 1.

Na odwrót niech będą P i Q warunkami sylogizmu, w którym termin średni nie jest rozłożony, R konkluzją tego sylogizmu. Sylogizm odwrotny, w którym warunkami są P i nie R a konkluzją nie Q

wyłącznego środka prawo z którego termin [illegible], który był niezna-
[illegible]
tożsamy w [illegible], jest [illegible] w jego [illegible] koniunkcji
[illegible], [illegible] przesłanek [illegible] termin [illegible]
nie[illegible]zony.

Uwzględniwszy uwagę, że prawo 4-e wynika z prawa 3, prawo 3 zaś wynika z prawa 1, oraz że prawa 1 i 2 wynikają ze sobą ~~[illegible]~~, tak iż każde z nich może być uważane jako wniosek drugiego. Można zatem poprzestać na jednym z praw 1 lub 2 oraz 4-em jako dwu niezależnych prawach [illegible], a mianowicie:

a) Prawo identyczności: Termin ścisły musi być używany w jednym znaczeniu stałym (tak: termin nie może być zmien-ny w konkluzji, jeżeli nie był stały w przesłankach).

b) prawo pewności: Jeśli konkluzja jest pewna, musi być pewna każda z przesłanek.

Należy jednak zauważyć wyraźnie, że owe te prawa nie są ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. Jak twierdzi Ary-stoteles [illegible] wszystkie [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] wyrażona jedynie, że owe te [illegible] w stosunku [illegible] [illegible] [illegible] między sobą.

9.

Dowód reguły jakości (R. A. P. Rogersa) ((w Dzienniku [illegible])

Niech $f_u(S,P)$ oznacza jakiekolwiek zdanie o terminach S, P, $f_u(M,N)$ oznacza wówczas zdanie [illegible] i [illegible] takie samo, w którym termin S zastąpiony jest M, termin P zaś zastąpiony N. Niech wreszcie $f_1(P,M)$, $f_2(S,M)$ i $f_3(S,P)$ oznacza sylogizm, którego tryb i figura zależą od relacji [illegible] i konkluzji oraz porządku terminów. Jeśli dowolny sylogizm jest poprawny, to poprawność jego będzie zachowana, jakiekolwiek terminy podstawimy za S, M, P. Podstawmy S za M oraz S za P. Jeśli sylogizm $f_1(P,M), f_2(S,M) \therefore f_3(S,P)$ jest poprawny, to także $f_1(S,S), f_2(S,S) \therefore f_3(S,S)$ jest poprawnym sylogizmem. Odwrotnie, jeśli $f_1(S,S), f_2(S,S) \therefore f_3(S,S)$ jest sylogizmem niepoprawnym, także sylogizm, z którego jest on otrzymany jest również niepoprawny.

Załóżmy dla dowodu, że przesłanki $f_1(P,M)$, $f_2(S,M)$ są twierdzące, a konkluzja $f_3(S,P)$ przecząca. Wtedy $f_1(S,S)$, $f_2(S,S)$ są również twierdzące, ~~$f_3(S,S)$~~ i ogólnie prawdziwe, natomiast przecząca konkluzja $f_3(S,S)$ jest ogólnie fałszywa. $f_3(S,S)$ nie może być więc wnioskiem z $f_1(S,S)$, $f_2(S,S)$ i sylogizm $f_1(S,S), f_2(S,S) \therefore f_3(S,S)$

nie jest poprawnym sylogizmem. Wynika stąd, że nie może być poprawnym sylogizm $f_1(P, M), f_2(S, M) \therefore f_3(S, P)$, w którym przesłanki są prawdziwe, a konkluzja fałszywa.

nr. 87.

Dowód prawideł sylogizmu.

(Śleszyński, Zaremba, Teorja dowodu t. I. rozdz. VII nr. 87 i nast.)

Scholastycy znali osiem następujących prawideł sylogizmu:

1) Tam re, tum sensu, triplex modo terminus esto.
2) Nunquam contineat medium conclusio, oportet.
3) Neque ac praemissae extendat conclusio voces.
4.) Aut semel aut iterum medius generaliter esto.
5.) Ambae affirmantes nequeunt generare negantem.
6) Utraque si praemissa neget, nil inde sequetur.
7) Peiorem semper sequitur conclusio partem.
8.) Nil sequitur geminis ex particularibus unquam.

Dwie pierwsze reguły ~~[illegible]~~ dotyczą opisowo, t. zw. rozumowanie dwóch ich nie spełnia, może być poprawne, lecz nie jest sylogizmem; natomiast te reguły sylogizmu nie stosują się do innych, t. zw. sylogizmu, który wcale nim nie jest, nie jest poprawnym rozumowaniem. Pozostałe reguły stanowiące dla celów naszego dowodu przeformułowany inaczej, owszem ostatnie rozważamy na razie, oznaczymy je cyframi i literami umownymi. Każdą regułę wyrażamy osobno w treści [illegible].

więc [illegible] wniosku.

I. Reguła przesłanek szczegółowych. (8)

a) Jeżeli obie przesłanki są szczegółowe, to nie dają wniosku.

b) Jeżeli przesłanki dają wniosek, to przynajmniej jedna z nich jest ogólna.

c) Jeżeli przesłanki dają wniosek i jedna z nich jest szczegółowa, to druga jest ogólna.

II. Reguła przesłanek przeczących (6).

a) Jeżeli obie przesłanki są przeczące, to nie dają wniosku.

b) Jeżeli przesłanki dają wniosek, to przynajmniej jedna z nich jest twierdząca.

c) Jeżeli przesłanki dają wniosek i jedna z nich jest przecząca, to druga jest twierdząca.

III. Reguła terminu średniego (4)

a) Jeżeli w obu przesłankach termin średni jest wzięty szczegółowo, to ~~[illegible]~~ nie dają one wniosku.

b) Jeżeli przesłanki dają wniosek, to przynajmniej w jednej z nich termin średni jest wzięty ogólnie.

c) Jeżeli przesłanki dają wniosek i w jednej z nich termin średni jest wzięty szczegółowo, to w drugiej jest wzięty ogólnie.

IV. Reguła terminów skrajnych (3)

a) Jeżeli przesłanki dają wniosek i ~~jeden~~ którykolwiek z terminów skrajnych jest wzięty we wniosku ogólnie, to termin ten w przesłance jest wzięty ogólnie.

b) Jeżeli który z terminów skrajnych jest wzięty w przesłance nieogólnie, to albo przesłanki nie dają wniosku, albo termin ten również we wniosku jest wzięty nieogólnie.

c) Jeżeli który z terminów skrajnych jest wzięty w przesłance nieogólnie i przesłanki dają wniosek, to termin ten także we wniosku jest wzięty nieogólnie.

V. Pierwsza reguła wniosku twierdzącego (5).

a) Jeżeli obie przesłanki są twierdzące i dają wniosek, to wniosek jest twierdzący.

b) Jeżeli przesłanki dają wniosek i wniosek jest przeczący, to przynajmniej jedna z przesłanek jest przecząca.

c) Jeżeli przesłanki dają wniosek i wniosek jest ~~przeczący~~, a jedna z przesłanek jest twierdząca, to druga jest przecząca.

VI. Druga reguła wniosku twierdzącego (7)

a) Jeżeli przesłanki dają wniosek i wniosek ten jest twierdzący, to obydwie przesłanki są twierdzące.

b) Jeżeli przynajmniej jedna z przesłanek jest przeczą, to albo przesłanki wniosku nie dają, albo wniosek jest przeczący.

c) jeżeli przynajmniej jedna z przesłanek jest przecząca, i przesłanki dają wniosek, to wniosek jest przeczący.

VII. Reguły wniosku ogólnego (7)

a) Jeżeli przesłanki dają wniosek i wniosek ten jest ogólny, to obie przesłanki są ogólne,

b) jeżeli przynajmniej jedna z przesłanek jest szczegółowa, to albo przesłanki nie dają wniosku, albo wniosek ten jest szczegółowy.

c) Jeżeli przynajmniej jedna z przesłanek jest szczegółowa i przesłanki dają wniosek, to wniosek jest szczegółowy.

W dalszym ciągu stosowane będzie obok naszego oznaczania zdań A, E, I, O, występującego przy konstrukcji lub konkluzji. Mianowicie zdanie:

A jest skróconym oznaczeniem zdania α, wyrażającego stosunek S (podmiotu) i P (orzecznika) lub β, wyrażającego włączenie S w zakresie P,

I jest skróconym oznaczeniem zdań α, β, gdy wyłączenie

S wyklucza P i δ (wyłączanie się S i P).

O jest sprzeczne z każdym zdaniem γ, δ i ε (wykluczanie się S.P),

oraz zdanie Σ jest równoważne jednemu zdaniu ε.

Zdania α, β, γ, δ, ε, wszystkie będziemy elementarnymi.

Przy uwzględnieniu reguł logicznych będziemy [illegible] następujące uwagi:

Jeżeli tryb, w którym występują ~~nazwy ze~~ zdania kategoryczne A, E, I, O ~~jest~~

~~[illegible]~~ jest objęty z wyjątkiem tej zależności tylko

w szczególnym przypadku, gdy za zdania kategoryczne podstawimy

zdania elementarne, w którym z nich jest jak albo sprzeczny,

jeżeli natomiast w tym szczególnym przypadku tak nie daje

~~[illegible]~~ wyniku; to nie jest poprawny wynik. Dla uzasadnienia

tej uwagi udowodnimy trzy twierdzenia pomocnicze:

I. Dla uwzględnienia δ (twierdzenie) wyników nie daje.

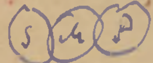
Zdanie δ jest otrzymane bez ograniczenia (warunek [illegible] jest spełniony) nie wymaga żadnych uwzględnień określenia terminów i wyjątkowego twierdzenia tego.

Przypuśćmy

Przesłanki ~~[illegible]~~ SδM oraz PδM. Przesłanki są zgodne tylko gdy między S i P zachodzi równoważność S∞P (t.j. S∞P). ~~[illegible]~~ Wobec tego wnioskiem nie może być ani zdaniem Σ, ani zdaniem O, gdyż oba te zdania wykluczają się ze zdaniem S∞P.

6.

Ten także dowód SεP nie wyklucza się z przesłankami SδM i PδM (+) 2.

 | Albowiem tej konkluzji nie może być ani dowiedzione A ani dowiedzione I, gdyż te wykluczają się z SεP. Żadne twierdzenie nie może być konkluzją wniosku poprawnego, skoro I jest nawet odrzucone.

(wykluczone)

II. Dwie przesłanki ε wniosku nie dają. Przesłanki SεM i PεM są obojętne (wykluczenie jest symetryczne), więc nie wskazują żadnego wniosku. Podobnie jak przesłanki dowodzą odwrotnemu i przesłanki są zgodne zarówno z prawdziwością, SaP (S:P są równoważne) jak też z prawdziwością SεP (S:P wykluczają się). Ponieważ wykluczone konkluzje wszystkie, przeto konkluzji żadnej – z przesłanek jak wyżej, wniosku nie dają.

III Dwie przesłanki, z których większa jest PδM, a mniejsza SεM, nie dają wniosku.

Przesłanki zgodne są zarówno z przypadkiem

$S\beta P$ (S wszystkie wyklucza P), które wyklucza konkluzję ogólną, jak i wyjątkowe $S\varepsilon P$, które wyklucza konkluzję twierdzącą i więc według konkluzji.

Oto reguły twierdzeń negatywnych (I): Dwie przesłanki negatywne mogą mieć obie zdania δ. Zdania δ jednak nie dają konkluzji, więc nie ma też konkluzji z dwóch przesłanek negatywnych.

Drugi reguły przesłanek szczegółowych (II): Dwie przesłanki szczegółowe mogą mieć obie zdania ε. Dwa zdania ε nie dają jednak konkluzji, więc nie ma też konkluzji z dwóch przesłanek szczegółowych.

W analogiczny sposób, uzasadnia się tzw. prawo III dla danej, że dwie przesłanki, z których większa jest postaci γ, a mniejsza postaci ε nie dają wniosku. Dla dwóch zdań mogą zajść przesłanką γ oraz zdanie δ, przesłanką ε oraz zdanie ε; przesłanki δ i ε nie dają wniosku, nie można więc też wniosku z przesłanek γ oraz ε.

~~Dla~~ ~~dla~~ Dowodzimy z kolei twierdzenie oznaczone IV: Jeżeli termin S w zdaniu [illegible] z terminem P, wówczas jest negatywne, to zdanie ~~[illegible]~~ [illegible] $P\beta S$ (P jest [illegible] S).

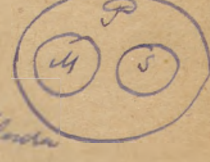
Zdanie Z może być tylko PaS lub PiS lub SiP lub SoP. Pierwsze dwa zdania z definicji dopuszczają stosunek PβS. Pozostałe dwa zdania dopuszczają wedle definicji stosunek SγP (S nadrzędne względem P), który odróżniamy jako PβS.

Opierając się na tr. pomocn. II urzeczywistniamy do dowodu uwagi o terminie średnim (III): jeżeli w obu przesłankach termin średni jest więcej niż [illegible], to nie daje się konkluzji.

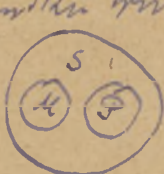
Dla dowodu przyjmujemy obie przesłanki, odpowiadające tr. pom. IV jako zdania PβM oraz SβM. Za przesłanki takie dopuszczają ~~[illegible] S i P~~ wzajemnie stosunek SαP jak SεP, z których wynikają konkluzje [illegible], [illegible] konkluzji [illegible], [illegible] konkluzji.

Dowód uwagi terminowi krańcowego (IV)

a) dla terminu większego.

Jeżeli termin większy jest w wniosku więcej niż [illegible], to [illegible] przesłanka [illegible] może [illegible] tr. pomocn. IV jako MβP. Jeżeli przesłanka mniejsza jest [illegible], to może być [illegible] jako SαM, jeżeli nie jest [illegible], to może być [illegible] jako SεM. W pierwszym wypadku (uwagi wypadek tylko [illegible] / mamy wniosek SaP, który wyklucza SoP i SeP; w drugim przypadku wniosku nie ma, ale warunki dopuszczają przypadek $S\beta P$, (tj:  tzn. że wniosek mógłby być SaP, co znów wyklucza SoP i SeP. — Jeżeli natomiast tylko dopuszczamy wniosek to może on być tylko SaP lub SiP, ale w takiej konkluzji P jest wzięte szczegółowo. Udowodniliśmy przeto, że jeżeli termin większy jest wzięty szczegółowo w przesłance, to może być wzięty w konkluzji również tylko szczegółowo.

b) dla terminu mniejszego:

Przesłanka mniejsza mająca w myśl tw. pomocn. IV kształt tylko $M\beta S$. Jeżeli wyższa jest twierdząca, to dopuszcza $M\alpha P$, jeżeli zaś przecząca, to dopuszcza $M\varepsilon P$. W pierwszym przypadku M jest równe (Swobodne wzięcie?) z P, a więc jest $P\beta S$ czyli $S\gamma P$, co wyklucza wniosek ogólny. W drugim przypadku wniosku nie ma, ale warunki dopuszczają $S\gamma P$ (tj: ). Jeżeli mamy tylko dopuszczalny wniosek, to może on być tylko szczegółowy. Udowodniliśmy więc, że jeżeli S jest wzięte szczegółowo w przesłance, to może być wzięte w konkluzji tylko szczegółowo.

Dowód reguły wniosku twierdzącego. (V)

II [illegible] V na 5.

5) II q/CNqr, r/CNrq * C V p/q, q/r – 5

5) CCpCNqr CpCNrq

6) Według 5 [illegible] I na 6:

6 r/p * C I q/p, p/Nq – 6

6 CpCNpq

7.) Tw. 6 [illegible] według III [illegible] na 7:

III q/Np, r/q * C6 – 7

7 CNpCpq

8) Przekształcając IV według II otrzymamy twierdzenie 8:

II q/CqNq, r/Nq * C IV p/q – 8

8 CCpCqNq CpNq

~~[illegible]~~ Gdy w 6 podstawimy q/NNp, to otrzymamy wg 5 według 8 [illegible] [illegible]:

8 q/~p * C 6 q/NNp – 9

9 CpNNp

Według 4 można w każdej [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] jej poprzednik na wyrażenie [illegible] poprzednik. 9 pozwala [illegible] o poprzedniku [illegible].

10) 4 p/q, q/NNq, r/p * C 9 p/q – 10a

10a CCNNqpCqp

II p/r, q/CNNqp, r/Cqp * C 10a – 10 10a [illegible] 10 [illegible] na 5.

10 CCrCNNqpCrCqp

269

Dowód: Przesłanki twierdzące dopuszczają tylko relację α między terminami, które w nich zachodzą. Ze względu na odwracalność tej relacji możemy przesłanki ująć w postaci M α P, S α M, które dają konkluzję S a P (Barbara); że jednak wykluczamy zarówno S e P, jak S o P. Udowodniliśmy więc, że dwie przesłanki twierdzące wykluczają wniosek przeczący.

Łoś 19/3.26

Druga reguła wniosku twierdzącego (VI)

Dowód: Załóżmy, że jedna przesłanka jest przecząca, druga natomiast zaś jest twierdząca. Uwzględniamy przesłanki twierdzące przez relację α, przeczące zaś relacją ε. Oznaczmy przez Q ten z terminów skrajnych, który należy do przesłanki twierdzącej, przez R ten, który należy do przesłanki przeczącej. Obie przesłanki są odwracalne, i porządek, w którym je zapisujemy, jest obojętny. Możemy je więc ująć w postaci M ε R, Q α M. Jako najogólniejszy przypadek idzie Celarent z wnioskiem Q e R lub R e Q, co wyklucza wniosek twierdzący. Udowodniliśmy więc, że jeśli jedna przesłanka jest przecząca, to wniosek nie może być twierdzący.

Dla dowodu reguły wniosku ogólnego (VII) potrzebne nam jeszcze dwa twierdzenia pomocnicze.

Dowody zupełne (Słup. T. dow. II. tod. 15 [illegible])

Teorji ded.

([illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] (najprost.) – a [illegible] [illegible] się na dowód [illegible]: –

Aksjomaty:

I CqCpq — Simpl.

II CCqrCCpqCpr — Syll.

III CCpCqrCqCpr — Comm.

IV CCpNpNp — Abs.

V CCNpqCNqp — Transp.

VI. CKpqNCpNq . VIII. CApqCNpq

VII CNCpNqKpq IX. CCNpqApq

X. CKCpqCqpEpq

XI CEpqKCpqCqp

Aksjomat I daje według prawa komm. (III) twierdzenie 1.

1.) III ~~[illegible]~~ r/p * C I q/p, p/q — 1.

Tw. 1 daje 2 przez podstawienie za q zdania prawdziwego i oderwanie

1. CqCpp

2.) 1. q/CqCpq * C I — 2

2 Cpp

Tw. 2 p/Np daje według V (Transp.) 3:

3.) V q/Np * C 1 p/Np — 3

3 CNNpp

II daje według III inną swoją postać:

4.) III p/Cqr, q/Cpq, r/Cpr * C II — 4

4 CCpqCCqrCpr

Według II można (kiedy [illegible]) [illegible] na [illegible] [illegible] [illegible] na wypadek [illegible] [illegible].

Według II można wnioskować implikację, z [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] na [illegible], której poprzednikiem jest [illegible] zdanie p, a następnikiem [illegible] [illegible] [illegible]

Tw. pierwsze V. Jeżeli dwie przesłanki dają wniosek i terminy w nich są wzięte trzy razy ogólnie, to przesłanki te muszą być A oraz E. Albowiem każda przesłanka zawiera tylko dwa terminy, i jeżeli z nich oba terminy muszą być wzięte ogólnie, tudzież przesłanka może być tylko E. Druga przesłanka musi być twierdzącą i zawierać jeden termin wzięty ogólnie. Terminem tym może być tylko podmiot, gdyż orzeczenie w zdaniu twierdzącem nie jest wzięte ogólnie. Druga przesłanka jest więc zdaniem A.

Tw. pom. VI. Jeżeli dwie przesłanki dają wniosek S a P to tryb jest Barbara. Załóżmy, że dwie przesłanki dają wniosek A. Jest on twierdzący, więc według tw. VI obie przesłanki są twierdzące. Termin S jest we wniosku A wzięty ogólnie; więc według tw. IV musi on być wzięty ogólnie w przesłance. Przesłanka jest twierdząca, przeto S może być w niej jedynie podmiotem. Przesłanka mniejsza jest więc S a M. Termin M jest w niej wzięty szczegółowo. Wobec tego w przesłance większej musi być według tw. III wzięty ogólnie t.j. [illegible] użyty jako podmiot. Przesłanka ta jest twierdząca według tw. VI, może więc być jedynie M a P. Przesłanki M a P, S a M tworzą zatem tryb Barbara.

Dowód reguły wniosku ogólnego (VII): Jeżeli wniosek jest ogólny, to jest np. S a P lub S e P. W pierwszym przypadku, według tw. poprz. VI lub jest ~~twierdz.~~ i oba warunki są ogólne. W drugim przypadku oba terminy ~~skrajne~~ są wzięte ogólnie, a więc ogólne także w warunkach (tw. IV). Ale termin średni musi być przynajmniej w jednym ogólnie (tw. III). W warunkach zatem ~~przynajmniej~~ trzy terminy są wzięte ogólnie (który nie może być ogólne, bo wtedy oba warunki byłyby twierdzące), i według tw. poprz. 5. warunki są A e E. Ten sam wynik VI jest udowodniony w całości.

Przedstawić każde ze zdań a e i o w postaci zdania

I) a, II) e, III) i, IV) o. (Ślęzyński T. dow. I. str. 73)

I 1) SaP, 2) $SeP = Sa{-}P$ 3) $SiP = \sim(Sa{-}P)$ 4) $SoP = \sim(SaP)$

II 1) $SaP = Se{-}P$ 2) SeP 3 $SiP = \sim(SeP)$ 4) $SoP = \sim(Se{-}P)$

III)

IV)

De Morgan, jak twierdzi Jevons, zwykł był mawiać na swoich wykładach, że cała logika arystotelesowska nie wystarcza, aby wyprowadzić z twierdzenia, że koń jest zwierzęciem, twierdzenie, że głowa konia jest głową zwierzęcia. (Ślesz. T. dow. T. I. str. 74) [illegible] o liczbach są [illegible] rys 4; ~~[illegible]~~ [illegible] jest np. Każda liczba podzielna przez 6, jest podzielna przez 3. ~~[illegible]~~ [illegible] Ten dowód jest bardzo [illegible]; ~~zamiast~~ Przez wyrażenie [illegible] w tym [illegible] przez [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] wyrazy [illegible]:

1) ~~Piotr jest a~~ Piotr jest apostołem — rys 1.
2) Apostołowie są [illegible] — rys 2.
3) [illegible] jest liczbą — rys 3.

—

Nie [illegible] [illegible] podobnie wyrazów na tym i tej kategorii [illegible] 2 ~~[illegible]~~ podobne na stopnie języka, który [illegible] się na [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] wyrazów [illegible] na [illegible] podobnie; wyrażenia [illegible] stopnia [illegible] [illegible] od wyrazów językowych, wyrażenia [illegible] [illegible] [illegible] wyrażenia [illegible] stopnia i t. d. Podział wyrazów na tym i tej kategorii [illegible] na [illegible] podobnie, jak [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] wyrazów i ~~[illegible]~~ [illegible] być [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible].

~~X~~ [illegible]