Die anbeschriebenen Kreise des bicentrischen oder Sehnen-Tangentenvierecks und die bicentrische Vierecksschar.

Von

W. JAEHNIKE
Oberlehrer.

Beilage zum Jahresbericht 1903/04 des Königlichen Gymnasiums zu Bromberg.

BROMBERG
Buchdruckerei von A. Dittmann.

1904. Progr. Nr. 185.

Die anbeschriebenen Kreise des bicentrischen oder Sehnen-Tangentenvierecks und die bicentrische Vierecksschar.

Es ist auffallend, wie wenig Berücksichtigung in den Lehrbüchern und Aufgabensammlungen die Vierecke finden, welche einem Kreis umbeschrieben und einem anderen zugleich einbeschrieben sind. In den meisten Lehrbüchern werden sie bis auf den besonderen Fall des regulären Vierecks nicht einmal erwähnt und nur in einigen Aufgabensammlungen zur Stellung von Aufgaben benutzt. Und doch bieten diese Art Vierecke eine Fülle merkwürdiger Eigenschaften und einfacher metrischer Relationen. Es ist Schlömilch's Verdienst, wiederholt in der Hoffmann'schen Zeitschrift darauf hingewiesen und Untersuchungen über bicentrische Vierecke angeregt zu haben. Trotzdem finde ich in der mathematischen Literatur nur eine einzige gröfsere Abhandlung über bicentrische Vierecke, welche im Jahresbericht der Realschule zu Crefeld für das Jahr 1891/92 veröffentlicht wurde. „Geometrische Untersuchungen über bicentrische Vierecke“ von Herrn Oberlehrer Dr. Junker. In dieser Arbeit wird auch eine Reihe von Eigenschaften des bicentrischen „Viereckskomplexes“, welches denselben um- und einbeschriebenen Kreis hat, abgeleitet. Aber weder in ihr, noch in irgend einer anderen Veröffentlichung sind meines Wissens Untersuchungen über die anbeschriebenen Kreise derartiger Vierecke angestellt oder Eigenschaften derselben mitgeteilt worden. Als ich mich mit denselben beschäftigte, fand ich, dafs sie für das bicentrische Viereck eine ähnliche Bedeutung haben, wie die anbeschriebenen Kreise des Dreiecks für dasselbe, und gelangte zu analogen Beziehungen.

Zur Veröffentlichung meiner Untersuchungen an dieser Stelle glaube ich um so mehr berechtigt zu sein, als dieselben und die zahlreichen Aufgaben, welche sich auf diesem Gebiete stellen liefsen, nach meiner Ansicht im Unterricht der höheren Lehranstalten Verwendung finden könnten.

Bevor ich das eigentliche Thema behandle, will ich einige bekannte Lagenverhältnisse betrachten, deren Kenntnis erforderlich ist, um die Figur zu verstehen.

ABCD sei das bicentrische Viereck, dessen Seiten einen Kreis vom Radius ϱ und dem Mittelpunkte O in den Punkten F, G, H und J berühren und dessen Ecken auf einem Kreise mit dem Radius r und dem Mittelpunkte M liegen. Für die Seiten und Winkel benutze ich die gebräuchlichen Bezeichnungen. Die Gegenseiten schneiden sich in den Punkten S und S_1, und die Diagonalen in E. Die Schnittpunkte der Gegenseiten des Vierecks FGHJ, welches ich Berührungsviereck nennen will, heifsen Z und Z_1. Dieselben liegen nach einem bekannten Satze über das Tangentenviereck auf der Verlängerung von AC und BD und mit S und S_1

auf derselben Geraden, während die Diagonalen FH und GJ durch den Schnittpunkt der Diagonalen des bicentrischen Vierecks E gehen. SS_1 ist die Polare des Punktes E in Bezug auf den einbeschriebenen Kreis, weil E der Durchschnitt der Polaren der beiden Punkte S und S_1, nämlich GJ und FH ist. Da die Diagonalen eines Vierseits sich harmonisch schneiden, werden sowohl E und Z, als auch E und Z_1 durch den umbeschriebenen Kreis harmonisch getrennt. Es mufs daher ZZ_1 oder SS_1 auch Polare des Punktes E in Bezug auf den umbeschriebenen Kreis sein. Die Gerade, auf welcher Z, Z_1, S und S_1 liegen, ist also für beide Kreise eine Polare zum Pole E. Folglich mufs sowohl ME, als auch OE auf dieser Geraden senkrecht stehen. Das ist aber nur möglich, wenn M, O und E in einer Geraden, nämlich in der Centrale beider Kreise liegen. Schneidet die Centrale die gemeinschaftliche Polare in E_1, so ist nach der Polarentheorie die Senkrechte auf der Centralen in E Polare für beide Kreise zum Pol E_1. Es läfst sich zeigen, dafs die Punktreihen auf der Centrale, welche durch beide Kreise harmonisch getrennt werden, nur in zwei Punktpaaren E und E_1 übereinstimmen können, dafs also nur zwei gemeinschaftliche Pole und zwei gemeinschaftliche Polaren möglich sind. Für die gemeinschaftlichen Pole E und E_1 sind nämlich die Gleichungen zu erfüllen:

$$\text{I } ME \,.\, ME_1 = (MO + OE)\,(MO + OE_1) = r^2$$

$$\text{II } OE \,.\, OE_1 = \varrho^2.$$

Diese beiden Gleichungen werden aber nur durch zwei Wertepaare erfüllt, die wechselseitig die beiden gemeinschaftlichen Pole ergeben. Während also alle anderen Punkte der Ebene in Bezug auf jeden der Kreise verschiedene Polaren und alle anderen Geraden verschiedene Pole haben, decken sich die Polaren für die Punkte E und E_1, die Pole für die Gerade SS_1 und für die in E auf der Centrale errichtete Senkrechte. Ich nenne daher SS_1, die äussere Doppelpolare, die Senkrechte auf der Centrale in E die innere Doppelpolare, E den inneren und E_1 den äusseren Doppelpol.

ZZ_1, ZJ, ZE und ZF sind harmonische Strahlen, denn sie gehen durch die harmonischen Punkte F, E, H und den Schnittpunkt von FH und SS_1. Daraus folgt, dass die Punkte, in welchen AC von FJ und GH geschnitten wird, von Z_1 durch den einbeschriebenen Kreis harmonisch getrennt sind. AC ist also die Polare zu Z_1, entsprechend auch BD die Polare zu Z in Bezug auf den einbeschriebenen Kreis. Für denselben Kreis sind auch GJ und FH Polaren zu S und S_1. Nun sind nach dem Satze vom Vierseit Z, S, Z_1, S_1 harmonische Punkte. Folglich bilden die Diagonalen des bicentrischen und des Berührungsvierecks ein harmonisches Strahlenbüschel nach dem Satze: „Die Polaren harmonischer Punkte bilden ein harmonisches Strahlenbüschel.“ Verbindet man O mit F, G, H und J, so ist: $\sphericalangle FOJ = 2R - \alpha$, $\sphericalangle HOG = 2R - \gamma = \alpha$. Mithin: $\sphericalangle FHJ = 1R - \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle HJG = \frac{\alpha}{2}$, also: $\sphericalangle JEH = 1R$ d. h. FH und JG stehen auf einander senkrecht. Da aber, wie eben bewiesen, diese Verbindungslinien mit den Diagonalen des bicentrischen Vierecks ein harmonisches Strahlenbüschel bilden, so halbieren sie nach einem bekannten Satze über die harmonischen Strahlen die Winkel zwischen den Diagonalen des Vierecks. Daher der Satz: „Die Verbindungslinien der Punkte, in welchen der einbeschriebene Kreis die Gegenseiten eines bicentrischen Vierecks berührt, stehen senkrecht auf einander und halbieren die Winkel zwischen den Diagonalen des Vierecks.“ Nach diesen vorbereitenden Sätzen wende ich mich zu meinem eigentlichen Thema.

I. Die anbeschriebenen Kreise des bicentrischen Vierecks.

O_a, O_b, O_c, O_d seien die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise, deren Radien mit ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d, bezeichnet werden. Die Berührungspunkte derselben und der Seiten des bicentrischen Vierecks sind analog wie beim einbeschriebenen Kreis bezeichnet worden, und die Bezeichnungen aus der Figur zu ersehen. $OS \perp GJ$, weil GJ Berührungssehne, und $HF \perp GJ$, wie oben gezeigt wurde. Daher: $HF \parallel O_a O_c$, ebenso auch: $GJ \parallel O_b O_d$. Nun ist: $GJ \perp HF$, folglich: $O_a O_c \perp O_b O_d$.

„Die Centralen der den Gegenseiten eines bicentrischen Vierecks anbeschriebenen Kreise stehen auf einander senkrecht.“

OA, OB, OC, OD stehen auf den Berührungssehnen FJ, FG, GH, HJ, aber auch auf den Centralen $O_a O_d$, $O_a O_b$, $O_b O_c$, $O_c O_d$ senkrecht Daraus folgt: $FJ \parallel O_a O_d$, $FG \parallel O_a O_b$, $GH \parallel O_b O_c$, $HJ \parallel O_c O_d$. Da auch $GJ \parallel O_b O_d$ und $HF \parallel O_a O_c$, so sind die beiden Vierecke FGHJ und $O_a O_b O_c O_d$ ähnlich und liegen perspektivisch. Aus der Ähnlichkeit und daraus, dafs FGHJ ein Sehnenviereck ist, ergibt sich, dafs auch $O_a O_b O_c O_d$ ein Sehnenviereck sein mufs. Daher der Satz:

„Die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise eines bicentrischen Vierecks bilden die Ecken eines Sehnenvierecks, welches zum Berührungsviereck perspektivisch ähnlich liegt.“

Aus dem vorigen Satze folgt, dafs die Diagonalen dieses Vierecks aufeinander senkrecht stehen, und aus der Konstruktion der Mittelpunkte des ein- und der anbeschriebenen Kreise, dass sie sich im Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises O schneiden.

L_1, L_2, L_3, L_4 mögen die Durchschnittspunkte des umbeschriebenen Kreises mit den Centralen der den anstofsenden Seiten des Vierecks anbeschriebenen Kreise heifsen. Der umbeschriebene Kreis des Vierecks ist auch der umbeschriebene Kreis der aus den Diagonalen und je zwei Seiten des Vierecks gebildeten Dreiecke. Er schneidet also nach der Lehre von den anbeschriebenen Kreisen des Dreiecks die Halbierungslinien der Aussenwinkel des Vierecks in Punkten, welche, wie der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, senkrecht über den Halbierungspunkten der Diagonalen K und K_1 liegen. Daraus folgt, dafs $L_1 L_3$ und $L_2 L_4$ Durchmesser des umbeschriebenen Kreises sind, und AL_2, BL_3, CL_4, DL_1 die Winkel des bicentrischen Vierecks halbieren, mithin durch O gehen.

Im rechtwinkligen Dreieck $O_b O O_c$ ist: $\sphericalangle O O_c O_b = \sphericalangle FHG = \sphericalangle \frac{FOG}{2} = 1R - \frac{\beta}{2}$.

$\sphericalangle O_c O L_2 = OAS + ASO = \frac{\alpha}{2} + \frac{2R - \alpha - \beta}{2} = 1R - \frac{\beta}{2}$. Daraus ergibt sich: $\sphericalangle O O_c L_2 = L_2 O O_c$. Folglich: $O_c L_2 = OL_2$. Ähnlich zeigt man, dafs: $O_b L_2 = OL_2$. Mithin ist: $L_2 O_b = L_2 O_c$ und entsprechend: $O_a L_1 = L_1 O_b$, $O_c L_3 = L_3 O_d$, $O_a L_4 = L_4 O_d$.

Wir erhalten also einen Lehrsatz, dessen erster Teil mit einem Satz über das Dreieck vollkommen übereinstimmt:

„Der umbeschriebene Kreis des bicentrischen Vierecks halbiert die Centralen der den anstofsenden Seiten des Vierecks anbeschriebenen Kreise.

Die Halbierungspunkte liegen auf den Winkelhalbierenden des bicentrischen Vierecks."

Auf der Centrale des ein- und umbeschriebenen Kreises trage man jetzt MO in entgegengesetzter Richtung von M aus bis M_1 ab und verbinde M_1 mit L_2 und L_4; so ist $OL_4 M_1 L_2$ ein Parallelogramm, weil sich die Diagonalen halbieren. Daher: $M_1 L_4 \parallel OA$ und da OA auf $O_a O_d$ senkrecht steht, so mufs auch $M_1 L_4$ auf $O_a O_d$ senkrecht stehen. Ebenso ist nachzuweisen, dafs $M_1 L_1 \perp O_a O_b$, $M_1 L_2 \perp O_b O_c$, $M_1 L_3 \perp O_c O_d$. Da also M_1 der Durchschnittspunkt der in den Mitten der Seiten des Vierecks $O_a O_b O_c O_d$ errichteten Senkrechten ist, so ist es der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises des Sehnenvierecks $O_a O_b O_c O_d$. Daher der Satz, der auch für das Dreieck gilt:

„Die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich auf der Centrale des um- und einbeschriebenen befindet. Der Abstand des Mittelpunktes dieses Kreises vom Mittelpunkte des einbeschriebenen wird durch den Mittelpunkt des umbeschriebenen halbiert."

Den Radius dieses Kreises bezeichne man mit R, so dafs: $M_1 O_a = M_1 O_b = M_1 O_c = M_1 O_d = R$ und versuche ihn durch die Radien der anbeschriebenen Kreise auszudrücken.

Es ist: $\triangle AJ_d O_d \backsim AF_a O_a$, also: $AO_d : \varrho_d = AO_a : \varrho_a$

daher: $(AO_d + AO_a) : (\varrho_a + \varrho_d) = AO_a : \varrho_a$ oder:

$$\text{I} \quad 2\, O_d L_4 : (\varrho_a + \varrho_d) = AO_a : \varrho_a \text{ ebenso:}$$

$$\text{II} \quad 2\, O_c L_2 : (\varrho_b + \varrho_c) = CO_c : \varrho_c.$$

Nun ist: $\sphericalangle O_d O_b O_a = JGF = \frac{JOF}{2} = 1\,R - \frac{\alpha}{2}$

also: $\sphericalangle L_4 M_1 O_d = \frac{1}{2} O_a M_1 O_d = O_d O_b O_a = 1\,R - \frac{\alpha}{2}$

Folglich ist: $\triangle L_4 M_1 O_d \backsim A O_a F_a$

mithin: $O_d M_1 : O_d L_4 = A O_a : \varrho_a$ oder:

$$\text{III} \quad R : O_d L_4 = A O_a : \varrho_a.$$

Ebenso läfst sich zeigen, dafs:

$$\triangle M_1 L_2 O_c \backsim CO_c H_c$$

daraus folgt: $\text{IV} \quad R : O_c L_2 = CO_c : \varrho_c.$

Aus I, III und II, IV ergibt sich:

$$2\, O_d L_4 : (\varrho_a + \varrho_d) = R : O_d L_4 \text{ und:}$$

$$2\, O_c L_2 : (\varrho_b + \varrho_c) = R : O_c L_2 \text{ oder:}$$

$$\text{V} \quad R\,(\varrho_a + \varrho_d) = 2\, O_d L_4^2 \text{ und:}$$

$$\text{VI} \quad R\,(\varrho_b + \varrho_c) = 2\, O_c L_2^2.$$

Addiert man V und VI, so erhält man:

$$\text{VII} \quad R\,(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d) = 2\,(O_d L_4^2 + O_c L_2^2).$$

Nun ist: $O_c L_2 = O L_2 = L_4 M_1$ und $O_d L_4^2 + L_4 M_1^2 = R^2$, daher auch $O_d L_4^2 + O_c L_2^2 = R^2$.

Setzt man diesen Wert in VII ein, so findet man:

$$R \,.\, (\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d) = 2\, R^2 \text{ oder:}$$

$$2\, R = \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d.$$

Daher der Satz:

„Der Durchmesser des umbeschriebenen Kreises des aus den Mittelpunkten der anbeschriebenen Kreise gebildeten Vierecks ist gleich der Summe der Radien der anbeschriebenen Kreise.“

Ich will fernerhin das arithmetische Mittel aus den Radien der anbeschriebenen Kreise welches als Hilfsgröfse uns grofse Dienste leisten wird, mit m bezeichnen, so dafs:

$$R = \frac{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d}{2} = 2\,m$$

Aus V folgt: $O_d\,L_4 = \sqrt{\frac{R(\varrho_a + \varrho_d)}{2}}$ daher:

$$O_a\,O_d = 2\,O_d\,L_4 = \sqrt{2\,R\,(\varrho_a + \varrho_d)} = 2\sqrt{m\,(\varrho_a + \varrho_d)}$$

Entsprechende Werte erhält man für die Centralen: $O_a\,O_b$, $O_b\,O_c$ und $O_c\,O_d$. Ferner ist:

$OO_a{}^2 = O_a\,O_d\,.\,O_a\,A$ und unter Benutzung von I:

$$OO_a{}^2 = \frac{2\,O_d\,L_4\,.\,2\,O_d\,L_4\,\varrho_a}{\varrho_a + \varrho_d} = 4\,m\,\varrho_a.$$

Analog erhält man: $OO_b{}^2 = 4\,m\,\varrho_b$, $OO_c{}^2 = 4\,m\,\varrho_c$, $OO_d{}^2 = 4\,m\,\varrho_d$.

Aus den gefundenen Werten folgt:

$OO_a{}^2 : OO_b{}^2 : OO_c{}^2 : OO_d{}^2 = \varrho_a : \varrho_b : \varrho_c : \varrho_d$ und:

$O_a\,O_b{}^2 : O_b\,O_c{}^2 : O_c\,O_d{}^2 : O_d\,O_a{}^2 = (\varrho_a + \varrho_b) : (\varrho_b + \varrho_c) : (\varrho_c + \varrho_d) : (\varrho_d + \varrho_a)$

„Die Quadrate über den Centralen des einbeschriebenen und der anbeschriebenen verhalten sich wie die Radien der zugehörigen anbeschriebenen Kreise, während die Quadrate über den Centralen der den anstofsenden Seiten anbeschriebenen sich wie die Summen der Radien der entsprechenden Kreise verhalten.“

Im Dreieck $L_4\,O\,L_2$ ist: $L_4\,O = \frac{O_a\,O_d}{2} = \sqrt{m\,(\varrho_a + \varrho_d)}$, $L_2\,O = \frac{O_b\,O_c}{2} = \sqrt{m\,(\varrho_b + \varrho_c)}$

$L_4\,L_2 = 2\,r$, MO Seitenhalbierende, folglich nach einer bekannten Formel:

$$MO^2 = \frac{L_4\,O^2 + L_2\,O^2}{2} - r^2$$

$$MO^2 = \frac{m\,(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d)}{2} - r^2$$

$$\text{I}\quad MO^2 = 2\,m^2 - r^2.$$

Der Ähnlichkeitspunkt der perspektivischen ähnlichen Vierecke $O_a\,O_b\,O_c\,O_d$ und FGHJ heifse P. Er mufs auf der Centrale MO liegen, weil die ähnlich liegenden Mittelpunkte der umbeschriebenen Kreise der Vierecke O und M_1 sich auf der Centrale befinden.

Da die umbeschriebenen Kreise die Radien ϱ und 2 m haben, müssen sich alle in den Vierecken in ähnlicher Lage befindlichen Strecken wie ϱ zu 2 m verhalten. Daher auch:

$$OE : M_1O = \varrho : 2\,m \text{ und da } . M_1O = 2\,MO$$

$$OE : MO = \varrho : m \text{ oder } OE = \frac{\varrho\,MO}{m}$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Abstände des Mittelpunkts des einbeschriebenen Kreises vom Diagonalschnittpunkt und vom Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises verhalten sich wie der Radius des einbeschriebenen Kreises zum arithmetischen Mittel aus den Radien der anbeschriebenen Kreise."

Die Lage der Doppelpole E und E_1 ist bestimmt durch die Gleichungen: $OE . OE_1 = \varrho^2$ und $ME . ME_1 = r^2$.

Aus der ersteren folgt: $OE_1 = \frac{\varrho^2}{OE}$. Die zweite ergibt:

$$(MO + OE)(MO + OE_1) = r^2$$
$$MO^2 + MO\,(OE + OE_1) + \varrho^2 = r^2$$
$$MO^2 + MO\left(OE + \frac{\varrho^2}{OE}\right) + \varrho^2 = r^2.$$

Setzt man nun in diese Gleichung für OE den oben gefundenen Wert und für r^2 den Wert aus I ein, so erhält man:

$$MO^2 + MO\left(\frac{MO\varrho}{m} + \frac{m\varrho}{MO}\right) + \varrho^2 = 2\,m^2 - MO^2$$
$$2\,m\,MO^2 + MO^2\varrho + m^2\varrho + m\varrho^2 = 2\,m^3$$
$$MO^2\,(2\,m + \varrho) = m\,(2\,m + \varrho)\,(m - \varrho).$$

Daraus folgt, weil $2\,m + \varrho$ nicht Null sein kann:

$$\text{II } MO^2 = m\,(m - \varrho).$$

Wenn man aus I und II m eliminiert, so erhält man den Abstand der Mittelpunkte des um- und einbeschriebenen Kreises ausgedrückt durch die Radien derselben. Die Gleichung I liefert: $m^2 = \frac{MO^2 + r^2}{2}$. Setzt man diesen Wert in II ein und formt um, so findet man:

$$MO^4 - 2\,(r^2 + \varrho^2)\,MO^2 = -\,r^2\,(r^2 - 2\varrho^2).$$

Daraus ergibt sich:

$$MO^2 = r^2 + \varrho^2 \pm \sqrt{(r^2 + \varrho^2)^2 - r^2\,(r^2 - 2\varrho^2)}$$

$MO < r - \varrho$, daher ist nur das zweite Vorzeichen der Wurzel zu benutzen. Es wird:

$$MO^2 = r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{\varrho^2 + 4\,r^2}$$

Mit Hilfe der Formeln I und II gelingt es uns auch $R = 2\,m$ aus r und ϱ, also aus den Radien des umbeschriebenen und des einbeschriebenen Kreises zu berechnen.

Es ist:
$$m^2 - m\,\varrho = 2\,m^2 - r^2$$
$$\text{III } r^2 = m\,(m + \varrho),$$
$$R = 2\,m = \sqrt{\varrho^2 + 4\,r^2} - \varrho$$

Aus $OE = \frac{MO\,\varrho}{m}$ und $OE_1 = \frac{\varrho^2}{OE}$ folgt:

$$\text{IV} \quad OE = \frac{\varrho}{m} \sqrt{m\,(m - \varrho)}$$

$$OE_1 = \frac{\varrho}{m - \varrho} \sqrt{m\,(m - \varrho)}$$

$$\text{V} \quad ME = MO + OE = \frac{m + \varrho}{m} \sqrt{m\,(m - \varrho)}$$

$$ME_1 = MO + OE_1 = \frac{m}{m - \varrho} \sqrt{m\,(m - \varrho)}$$

Aus IV und V ergibt sich, dafs:

$$ME_1{}^2 - OE_1{}^2 = m\,(m + \varrho) \text{ und nach III:}$$

$$ME_1{}^2 - OE_1{}^2 = r^2.$$

Mithin ist die äussere Doppelpolare die Potenzlinie des umbeschriebenen Kreises und des Punktes O d. h.: Zieht man von irgend einem Punkte der äusseren Doppelpolaren an den umbeschriebenen Kreis eine Tangente, so ist dieselbe gleich der Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises."

Bezeichnet man den Berührungspunkt einer vom äufseren Doppelpol E_1 an den umbeschriebenen Kreis gezogenen Tangente mit Q, der nach der Polarentheorie auf der inneren Doppelpolaren liegen mufs, und bestimmt den Punkt T als den Endpunkt des auf der Centrale MO in M senkrechten Radius, so ist nach dem Sehnensatze und nach III und IV:

$$QE^2 = (r + ME)\,(r - ME) = \frac{(m + \varrho)\,\varrho^2}{m}$$

$$OE^2 = \frac{(m - \varrho)\,\varrho^2}{m} \text{ folglich:}$$

$$QO^2 = QE^2 + OE^2 = \frac{\varrho^2\,(m + \varrho)}{m} + \frac{\varrho^2\,(m - \varrho)}{m} = 2\,\varrho^2$$

$$QO = \varrho\sqrt{2}.$$

QO ist also nur vom Radius des einbeschriebenen Kreises abhängig.

OT findet man mit Hilfe der Gleichung:

$$OT^2 = MO^2 + MT^2 \text{ und nach I:}$$

$$OT^2 = 2\,m^2 - r^2 + r^2 = 2\,m^2.$$

$$OT = m\sqrt{2}.$$

OT hängt also nur von der Summe der Radien der anbeschriebenen Kreise ab.

Nun ist:

$$OE : OQ = \frac{1}{m\sqrt{2}} \sqrt{m\,(m - \varrho)} \text{ und:}$$

$$MO : OT = \frac{1}{m\sqrt{2}} \sqrt{m\,(m - \varrho)} \text{ daher:}$$

$$OE : OQ = MO : OT \text{ und:}$$

$$\sphericalangle\, QEO = OMT = 1R \text{ folglich:}$$

$$\triangle\, QOE \sim MOT \text{ mithin:}$$

$$\sphericalangle\, QOE = TOM.$$

Daraus folgt, dafs Q, O, T auf einer Geraden liegen müssen.

Es hat daher die Potenz des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises in Bezug auf den umbeschriebenen Kreis den Wert:

$$OQ \,.\, OT = \varrho \sqrt{2} \,.\, m \sqrt{2} = 2 m \varrho = R \varrho.$$

„Die Potenz des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises in Bezug auf den umbeschriebenen Kreis ist gleich dem Produkt der Radien des einbeschriebenen und des Kreises um das Viereck, dessen Ecken die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise sind.“

Bezeichnen wir die Abschnitte, in welche der Durchmesser des umbeschriebenen Kreises durch O geteilt wird, den gröfseren mit e_1 und den kleineren mit e_2, so ist nach dem Sehnensatze: $e_1 e_2 = OQ \,.\, OT = R\varrho$.

Nun ist: $e_1 = r + MO$ und $e_2 = r - MO$, folglich:

$$r^2 - MO^2 = R\varrho$$
$$MO^2 = r^2 - R\varrho.$$

Diese Formel gilt auch für das Dreieck. Sie gibt den Wert des Abstandes der Mittelpunkte in der einfachsten Form an. Setzt man für das Dreieck $R = 2r$, so erhält man $MO^2 = r^2 - 2r\varrho = r(r - 2\varrho)$ und setzt man für das bicentrische Viereck den Wert nach III $R = \sqrt{\varrho^2 + 4r^2} - \varrho$, so findet man wieder:

$$MO^2 = r^2 - (\sqrt{\varrho^2 + 4r^2} - \varrho)\varrho$$
$$= r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{\varrho^2 + 4r^2}.$$

Wir wollen nun die Lage des Ähnlichkeitspunktes P der Vierecke FGHJ und $O_a O_b O_c O_d$ näher bestimmen. Aus dem Vorhergehenden folgt, da O und M_1 ähnlichliegende Punkte beider Vierecke sind:

$$PO : PM_1 = \varrho : 2m \text{ oder:}$$
$$(PM_1 - 2MO)\, 2m = PM_1 \varrho.$$
$$PM_1 = \frac{4mMO}{2m - \varrho}.$$

Ferner ist: $$M_1 E_1 = 2\,MO + OE_1 \text{ und da } OE_1 = \frac{m\varrho}{MO}$$

$$M_1 E_1 = 2\,MO + \frac{m\varrho}{MO}$$
$$= \frac{2\,MO^2 + m\varrho}{MO}$$

Nach II ist: $$MO^2 = m(m - \varrho), \text{ also:}$$

$$M_1 E_1 = \frac{m(2m - \varrho)}{MO}$$

Daraus ergibt sich:

$$M_1 P \,.\, M_1 E_1 = 4\,m^2$$

Nun ist $2\,m$ der Radius des umbeschriebenen Kreises des Vierecks $O_a O_b O_c O_d$ und M_1 sein Mittelpunkt. Folglich mufs P und E_1 durch diesen Kreis harmonisch getrennt sein, und da die äufsere Doppelpolare auf $M_1 E_1$ in E_1 senkrecht steht, so ist P ihr Pol in Bezug auf den Kreis M_1. Man erhält daher den Satz:

„Der Ähnlichkeitspunkt des Berührungsvierecks und des Vierecks, dessen Ecken die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise sind, ist der Pol der äufseren Doppelpolaren in Bezug auf den dem letzteren umbeschriebenen Kreis."

Zieht man durch O_a, O_b, O_c, O_d Tangenten an den Kreis M_1, so müssen sie der ähnlichen Lage wegen parallel den Seiten des bicentrischen Vierecks laufen und ein neues bicentrisches Viereck bilden. Die Radien $M_1 O_a$, $M_1 O_b$, $M_1 O_c$ und $M_1 O_d$ stehen auf den Tangenten senkrecht, also auch auf den Seiten des bicentrischen Vierecks, welche ihnen parallel sind. Auf denselben stehen aber auch die Radien nach den Berührungspunkten $O_a F_a$, $O_b G_b$, $O_c H_c$, $O_d J_d$ senkrecht, folglich müssen $M_1 O_a$, $M_1 O_b$, $M_1 O_c$, $M_1 O_d$ durch die Berührungspunkte F_a, G_b, H_c, J_d gehen. Es ist mithin: $M_1 F_a = M_1 O_a - O_a F_a = 2\,m - \varrho_a$ und entsprechend $M_1 G_b$, $M_1 H_c$, $M_1 J_d$ daher: $M_1 F_a + M_1 G_b + M_1 H_c + M_1 J_d = 4\,m = 2\,R$. Zieht man im Trapez $M_1 F_a F O$ die Mittellinie, so ist sie die vom Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises auf die Seite AB gefällte Senkrechte. Bezeichnen wir die vom Mittelpunkte M auf die Seiten gefällten Senkrechten mit p_a, p_b, p_c, p_d, so ist daher p_a das arithmetische Mittel zu OF und $M_1 F_a$ oder zu ϱ und $2\,m - \varrho_a$, folglich: $p_a = m - \frac{\varrho_a - \varrho}{2}$, ebenso erhält man p_b, p_c, p_d. Es wird: $p_a + p_b + p_c + p_d = 4\,m - \frac{4\,m - 4\,\varrho}{2} = 2\,m + 2\,\varrho = 2\,\varrho + R$.

„Die Summe der von dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises eines bicentrischen Vierecks auf die Seiten gefällten Senkrechten ist gleich der Summe des Durchmessers des einbeschriebenen Kreises und des Radius des Kreises, auf dem die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise liegen."

Die äufseren Ähnlichkeitspunkte der Kreise O_a und O und der Kreise O_b und O sind die Punkte S und S_1. Daher mufs nach dem Satz von Monge: „Bei drei Kreisen liegen sowohl die drei äufseren Ähnlichkeitspunkte, als auch je ein äufserer und zwei ihm nicht zugehörige innere auf je einer Geraden." auch der äufsere Ähnlichkeitspunkt der Kreise O_a und O_b auf SS_1 liegen, d. h. die Centrale $O_a O_b$ schneidet die äufsere Doppelpolare im äufseren Ähnlichkeitspunkt beider Kreise X. Dasselbe kann von je zwei anderen anbeschriebenen Kreisen bewiesen werden. Die Schnittpunkte der Centralen der anbeschriebenen Kreise und der äufseren Doppelpolaren X, X_1, Y, Y_1, S, S_1 sind die äufseren Ähnlichkeitspunkte der anbeschriebenen Kreise. Diese Punkte werden aber auch durch den Durchschnitt der äufseren Doppelpolaren mit den Gegenseiten des aus den Centralen gebildeten vollständigen Vierecks erhalten und bilden drei Punktpaare, die sich in Involution befinden, nach dem Satze: „Die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von jeder Transversalen in den drei Paaren einer Involution geschnitten." Wir haben somit den Lehrsatz erhalten:

„Die 6 äufseren Ähnlichkeitspunkte der anbeschriebenen Kreise eines bicentrischen Vierecks liegen auf der äufseren Doppelpolaren des ein- und umbeschriebenen Kreises und bilden auf derselben Punktpaare, die sich in Involution befinden."

Aus dem Satz von Monge folgt ferner, dafs der äufsere Ähnlichkeitspunkt der Kreise O_a und O_b sich mit den inneren der Kreise O_a und O_d, O_b und O_d auf einer geraden Linie befinden mufs. Nun ist A der innere Ähnlichkeitspunkt der Kreise O_a und O_d, folglich mufs der Strahl XA durch U_1, den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise O_b und O_d, gehen, ebenso läfst sich zeigen, dafs der Strahl XC durch U, den inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise O_a und O_c, gehen mufs. Diese Strahlen bilden mit den Strahlen XE und XZ ein harmonisches Büschel, weil A, E, C, Z harmonische Punkte sind. X_1 ist gleichfalls der Mittelpunkt eines harmonischen Büschels, welches zum ersteren perspektivisch liegt. Auf YD und Y_1 B liegt nach dem Satz von Monge der innere Ähnlichkeitspunkt U_1, auf YB und Y_1 D der innere Ähnlichkeitspunkt U. Y und Y_1 sind die Mittelpunkte perspektivischer harmonischer Strahlenbüschel, deren Strahlen durch B, E, D und Z_1 gehen. Verbinden wir U_1 mit U und verlängern wir diese Verbindungslinie bis zum Durchschnitt mit der äufseren Doppelpolaren U_2, so müssen die harmonischen Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte X und Y sind, diese Verbindungslinie in harmonischen Punkten treffen. Nun gehen drei dieser Strahlen durch U_1, U und U_2, folglich müssen die Strahlen XE und YE, welche den Strahlen XU_2 und YU_2 zugeordnet sind, durch den U_2 zugeordneten harmonischen Punkt auf der Verbindungslinie der inneren Ähnlichkeitspunkte U_1 und U gehen Das ist aber nur möglich, wenn E dieser Punkt ist. Daraus ergibt sich der Lehrsatz:

„Die Verbindungslinie der inneren Ähnlichkeitspunkte der den Gegenseiten eines bicentrischen Vierecks anbeschriebenen Kreise geht durch den Schnittpunkt der Diagonalen und wird durch ihn und die äufsere Doppelpolare harmonisch geteilt.“

Aus der Ableitung folgt auch, dafs sämtliche betrachtete harmonische Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die äufseren Ähnlichkeitspunkte der den anstofsenden Seiten des bicentrischen Vierecks anbeschriebenen Kreise sind, perspektivisch liegen.

Da die harmonischen Strahlen OU_1, OE, OU und OU_2 die äufsere Doppelpolare in den harmonischen Punkten S_1, E_1, S, U_2 schneiden und Z_1, Z nach dem Satze vom Vierseit $S_1 S$ gleichfalls harmonisch teilt, so bilden die Punktpaare $S_1 S$, $Z_1 Z$ und $E_1 U_2$ eine hyperbolische Involution, deren Doppelpunkte S und S_1 sind. Der Centralpunkt dieser Involution ist der Mittelpunkt der Diagonalen S_1 S, K_2, also ein Punkt der Gauss'schen Geraden K K_1, auf welcher sich die Mitten der Diagonalen eines Vierseits befinden. Auf dieser liegt, nebenbei bemerkt, auch der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises des bicentrischen Vierecks. (Vergl. die Sammlung von Gandtner und Junghans Teil I Lehrsatz 510.)

Diese Lagenverhältnisse gelten aber nicht blos für das bicentrische Viereck, sondern auch für jedes Tangentenviereck, weil die Eigenschaften des Vierecks ABCD, die ihm als Tangentenviereck zukommen, allein benutzt wurden. Daher lässt sich den vorstehenden Sätzen folgende allgemeinere Fassung geben:

„In jedem Tangentenviereck liegen die äufseren Ähnlichkeitspunkte der anbeschriebenen Kreise in einer Geraden, nämlich in der Polaren des Schnittpunktes der Diagonalen in Bezug auf den einbeschriebenen Kreis, und bilden auf derselben drei Punktpaare einer Involution. Die Verbindungslinie der inneren Ähnlichkeitspunkte der den Gegenseiten anbeschriebenen Kreise geht durch den Schnittpunkt der Diagonalen und wird durch ihn und die Polare harmonisch geteilt.“

Zum Schluss des ersten Teils meiner Arbeit stelle ich eine Reihe metrischer Relationen zusammen, die ich der Kürze wegen nicht ableiten will. Die Ableitungen sind zum gröfsten Teil leicht und würden sich für Schülerarbeiten eignen. Zur Übersicht füge ich die gefundenen Relationen hinzu. Die Bezeichnungsweise der Stücke der Vierecks ist die allgemein gebräuchliche, unter ε ist der Diagonalwinkel AEB, unter U der Umfang, unter g die dritte Diagonale SS_1 zu verstehen. Auch mache ich nochmals darauf aufmerksam, dafs $\frac{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d}{4} = m$ gesetzt ist.

1. $\varrho_a : \varrho = a : c,\ \varrho_b : \varrho = b : d,\ \varrho_c : \varrho = c : a,\ \varrho_d : \varrho = d : b$
   $\varrho_a : \varrho = \varrho : \varrho_c,\ \varrho_b : \varrho = \varrho : \varrho_d,\ \varrho_a : \varrho_b = \varrho_d : \varrho_c.$
   $\varrho_a : \varrho_c = a^2 : c^2,\ \varrho_b : \varrho_d = b^2 : d^2,\ \varrho_a\, \varrho_b\, \varrho_c\, \varrho_d = \varrho^4.$
2. $AF = AJ = BF_a = BJ_a = DH_d = DJ_d = \frac{2\,ad}{U} = \sqrt{\varrho_a\, \varrho_d}$
   analog die entsprechenden Abschnitte der Seiten.
   $AF : BF = BF_a : AF_a = d : b = \sqrt{\varrho_d} : \sqrt{\varrho_b}$
3. $GG_a = JJ_a = a = \sqrt{\varrho_a}\,(\sqrt{\varrho_b} + \sqrt{\varrho_d}) = 4\, r \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\varepsilon}{2}$
   $HH_b = FF_b = b = \sqrt{\varrho_b}\,(\sqrt{\varrho_a} + \sqrt{\varrho_c}) = 4\, r \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\varepsilon}{2}$
   $GG_c = JJ_c = c = \sqrt{\varrho_c}\,(\sqrt{\varrho_b} + \sqrt{\varrho_d}) = 4\, r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\varepsilon}{2}$
   $FF_d = HH_d = d = \sqrt{\varrho_d}\,(\sqrt{\varrho_a} + \sqrt{\varrho_c}) = 4\, r \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\varepsilon}{2}$
   $FF_a = \frac{a\,(b - d)}{b + d} = \sqrt{\varrho_a}\,(\sqrt{\varrho_b} - \sqrt{\varrho_d})$ entsprechend: $GG_b,\ HH_c,\ JJ_d$
4. $F_b\, F_d = H_b\, H_d = J_a\, J_c = G_a\, G_c = \frac{U}{2} = a + c = b + d = (\sqrt{\varrho_a} + \sqrt{\varrho_c})\,(\sqrt{\varrho_b} + \sqrt{\varrho_d}) =$
   $4\, r \sin\frac{\varepsilon}{2} \sin\frac{\alpha + \beta}{2} = 4 r \cos\frac{\varepsilon}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$
5. $ab = (\varrho + \varrho_a)\,(\varrho + \varrho_b)$ entsprechend cd, ad, bc, dagegen:
   $ac = \varrho\,(\varrho_b + \varrho_d + 2\varrho)$
   $bd = \varrho\,(\varrho_a + \varrho_c + 2\varrho)$
6. $ef = ac + bd = 4\varrho\,(m + \varrho) = 4\, r^2 \sin\alpha \sin\beta$
7. $F = \sqrt{abcd} = \sqrt{(\varrho + \varrho_a)\,(\varrho + \varrho_b)\,(\varrho + \varrho_c)\,(\varrho + \varrho_d)} = 2\, r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\varepsilon$
8. $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad}} = \sqrt{\frac{\varrho_c}{\varrho_d}} = \sqrt{\frac{\varrho_b}{\varrho_a}}$
   $\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{cd}{ab}} = \sqrt{\frac{\varrho_d}{\varrho_a}} = \sqrt{\frac{\varrho_c}{\varrho_b}}$
   $\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{bd}{ac}} = \frac{\sqrt{\varrho_a} + \sqrt{\varrho_c}}{\sqrt{\varrho_b} + \sqrt{\varrho_d}}$

9. $\sin\alpha \,.\, \sin\beta = \frac{\varrho}{m} = \cot MEA \,.\, \cot MEB$

10. $\varrho = \frac{r \sin\alpha \sin\beta \sin\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$\varrho_a = \frac{4 r \cos^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\beta}{2} \sin\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ ähnlich $\varrho_b, \varrho_c, \varrho_d$

11. $4m = \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d = \frac{4 r \sin\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{4 r \cos\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$

12. $\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$

13. $\operatorname{tang} OS_1S = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$

14. $\cot MEA = \operatorname{tang}\beta \cos\alpha = \operatorname{tang} EZZ_1$

$\cot MEB = \operatorname{tang}\alpha \cos\beta = \operatorname{tang} EZ_1Z$

$\sin MEA = \frac{\varrho_a + \varrho_b - \varrho_c - \varrho_d}{16\,(m^2 - \varrho^2)}$

$\sin MEB = \frac{\varrho_a + \varrho_d - \varrho_b - \varrho_c}{16\,(m^2 - \varrho^2)}$

15. $AE = \sqrt{\varrho_a \varrho_d} \cdot \sqrt{\frac{m+\varrho}{m}}$ entsprechend: CE, BE, DE

16. $e = (\sqrt{\varrho_a \varrho_d} + \sqrt{\varrho_b \varrho_c}) \sqrt{\frac{m+\varrho}{m}}$

$f = (\sqrt{\varrho_a \varrho_b} + \sqrt{\varrho_c \varrho_d}) \sqrt{\frac{m+\varrho}{m}}$

$g = \frac{4\varrho \sqrt{m\,(m-\varrho)}}{(\sqrt{\varrho_a} - \sqrt{\varrho_c})(\sqrt{\varrho_b} - \sqrt{\varrho_d})}$

17. $AO = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_a \varrho_d}$ entsprechend: BO, CO, DO.

18. $OO_a = 2\sqrt{m\,\varrho_a}$, $O_a O_b = 2\sqrt{m\,(\varrho_a + \varrho_b)}$, $O_a O_c = 2\sqrt{m}\,(\sqrt{\varrho_a} + \sqrt{\varrho_c})$

19. $FH = \frac{\varrho\sqrt{m}}{m}(\sqrt{\varrho_a} + \sqrt{\varrho_c}) = 2 r \sin\alpha \sin\beta \sin\frac{\varepsilon}{2}$

$JG = \frac{\varrho\sqrt{m}}{m}(\sqrt{\varrho_b} + \sqrt{\varrho_d}) = 2 r \sin\alpha \sin\beta \cos\frac{\varepsilon}{2}$

20 $FH^2 + GJ^2 = \frac{4\varrho^2}{m}(m + \varrho)$

21. $EF = \frac{\varrho}{m}\sqrt{m\varrho_a}$ entsprechend: EH, EG, EJ.

$FG = \frac{\varrho}{m}\sqrt{m(\varrho_a + \varrho_b)}$ entsprechend: GH, HJ, JF.

$EF : EH = \sqrt{\varrho_a} : \sqrt{\varrho_c} = a : c$

$EJ : EG = \sqrt{\varrho_b} : \sqrt{\varrho_d} = b : d.$

22. $p_a = m - \frac{\varrho_a - \varrho}{2}$ entsprechend: p_b, p_c, p_d.

23. $p_a + p_b + p_c + p_d = 2m + 2\varrho = R + 2\varrho$

24. $M_1F_a = 2m - \varrho_a$ entsprechend: M_1G_b, M_1H_c, M_1J_d.

25. $M_1F_a + M_1G_b + M_1H_c + M_1J_d = 4m = \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d = 2R.$

26. $MO^2 = 2m^2 - r^2 = m(m - \varrho) = r^2 - 2m\varrho = r^2 - R\varrho.$

27. $r^2 = m(m + \varrho),$

$R = \frac{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d}{2} = 2m = \sqrt{\varrho^2 + 4r^2} - \varrho.$

28. $OE = \frac{\varrho}{m}\sqrt{m(m - \varrho)}$

$OE_1 = \frac{\varrho}{m - \varrho}\sqrt{m(m - \varrho)}$

29. $g(f - e) = \pm\frac{4r\varrho}{m}\sqrt{m(m - \varrho)}$

30. $EF \,.\, EH = EG \,.\, EJ = \frac{\varrho^3}{m}$

31. $AE \,.\, CE = BE \,.\, DE = \frac{\varrho^2(m + \varrho)}{m}$

32. $OQ \,.\, OT = 2m\varrho = R\varrho$

33. $OO_a \,.\, OO_c = OO_b \,.\, OO_d = 4m\varrho$

34. $O_aO_b \,.\, O_bO_c \,.\, O_cO_d \,.\, O_dO_a = 64m^3\varrho$

35. $OA \,.\, OB \,.\, OC \,.\, OD = 4m\varrho^3$

36. $FJ \,.\, FG \,.\, GH \,.\, HJ = \frac{4\varrho^5}{m}$

Die gefundenen Lagenverhältnisse und metrischen Relationen könnten zur Lösung einer grofsen Zahl von Aufgaben über das bicentrische Viereck dienen. Eine Zusammenstellung derselben mufs ich mir versagen, um den Rahmen der Arbeit nicht zu überschreiten.

II. Die bicentrische Vierecksschar.

Um von dem einzelnen bicentrischen Viereck zur Gesamtheit aller Vierecke, welche man um einen Kreis und zugleich in einen anderen beschreiben kann, zu gelangen, benutze ich den Poncelet'schen Satz: „Wenn irgend ein Vieleck zu gleicher Zeit einem Kegelschnitt einbeschrieben und einem anderen umbeschrieben ist, so gibt es eine unendliche Anzahl von Vielecken gleicher Seitenzahl, welche dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die beiden Curven haben." Dieser Satz würde, auf unsere Verhältnisse übertragen, lauten: Wenn zwei Kreise eine solche Lage haben, dafs ein Viereck, welches dem einen umbeschrieben ist, zugleich dem anderen einbeschrieben ist, so gibt es unendlich viele Vierecke, welche dieselbe Eigenschaft haben, und zwar läfst sich von jedem Punkte des einen Kreises aus ein Viereck zeichnen, welches dem einen Kreis umbeschrieben und dem anderen einbeschrieben ist." Diesen Satz setze ich voraus und will der Gesamtheit derartiger Vierecke die Bezeichnung bicentrische Vierecksschar geben.

Dreht man das bicentrische Viereck ABCD um die Centrale MO bis es wieder in dieselbe Ebene fällt, so erhält man ein zweites bicentrisches Viereck, dessen Ecken die Gegenpunkte des ursprünglichen in Bezug auf MO als Symmetrieachse sind. Je zwei der Vierecke der bicentrischen Vierecksschar sind daher kongruent und liegen zu MO symmetrisch. Die Centrale MO ist die Symmetrieachse der Vierecksschar. Zwei Vierecke dieser Vierecksschar haben eine ausgezeichnete Lage. Ihre Ecken sind Gegenpunkte. Sie fallen daher nach der Drehung auf einander. Es ist erstens das bicentrische Viereck, dessen Ecken durch die Durchschnittspunkte der Achse und die Durchschnittspunkte der inneren Doppelpolaren QE mit dem umbeschriebenen Kreis bestimmt werden. Dasselbe hat je zwei gleiche anstofsende Seiten und zwei rechte Winkel, welche durch die ungleichen Seiten gebildet werden, und werde bicentrisches Deltoid genannt. Es ist das einzige bicentrische Viereck der Schar, dessen Diagonalen auf einander senkrecht stehen. Die Ecken des anderen Vierecks erhält man, wenn man in den Schnittpunkten des einbeschriebenen Kreises und der Achse auf dieser Senkrechte bis zum Durchschnitt mit dem umbeschriebenen Kreis errichtet. Die Endpunkte dieser Senkrechten bilden ein bicentrisches Viereck, in dem zwei Seiten parallel und die beiden anderen gleich sind. Wir nennen es das bicentrische Trapez. Für alle Vierecke der Vierecksschar hat nach der Erklärung derselben r und ϱ denselben Wert und haben M und O dieselbe Lage. Alle Punkte und Linien, welche hierdurch allein bestimmt sind, liegen für sämtliche Vierecke der Vierecksschar fest. Folglich ist die äufsere und die innere Doppelpolare, der äufsere und der innere Doppelpol sämtlichen Vierecken gemeinschaftlich, ebenso auch der Mittelpunkt M_1 des Kreises, auf welchem die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise liegen. Der innere Doppelpol ist aber der Schnittpunkt der Diagonalen sämtlicher Vierecke. Daraus ergibt sich der Satz:

„Sämtliche Diagonalen der Vierecke einer bicentrischen Vierecksschar gehen durch denselben Punkt auf der Symmetrieachse, nämlich durch den inneren Doppelpol des umbeschriebenen und einbeschriebenen Kreises."

Alle Gröfsen sind für die Vierecke der Schar konstant, deren Wert nur von r und ϱ mittelber oder unmittelbar abhängig ist. Nun folgt aus der Formel 27, dafs $m = \frac{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + \varrho_d}{4}$

aus r und ϱ berechnet werden kann, mithin hat m für sämtliche Vierecke der Viereckssschar denselben Wert. Der Radius des Kreises, auf dem die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise liegen, hat aber den Wert 2 m. Er ist somit auch für sämtliche Vierecke konstant, und da auch der Mittelpunkt dieses Kreises M_1, wie oben bemerkt, für sämtliche Vierecke der Schar dieselbe Lage hat, so erhalten wir den Satz:

„Die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise sämtlicher Vierecke einer bicentrischen Viereckssschar liegen auf einem Kreise.“

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dafs sämtliche Gröfsen, deren Wert durch die angegebenen Formeln nur durch m, r und ϱ ausgedrückt ist, für die Vierecke der Schar konstant sind. Es ist also z. B. $\sin\alpha \sin\beta$ konstant, weil $\sin\alpha \sin\beta = \frac{\varrho}{m}$ nach Formel 9 ist, nicht aber F, weil F auch von $\sin\varepsilon$ abhängig ist, und $\sin\varepsilon$ sich mit den Vierecken ändert, ebenso auch nicht U, weil es nach der Formel $F = \frac{U\varrho}{2}$ aufser von ϱ, auch von F abhängt. Suchen wir festzustellen, welche Vierecke der Schar den gröfsten und den kleinsten Umfang und daher auch den gröfsten und den kleinsten Inhalt haben! Es ist nach Formel 4:

$$U = 8\,r \sin\frac{\varepsilon}{2} \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und nach Formel 12:

$$\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \text{oder:}$$

$$\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Durch Umformungen erhält man:

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 + \sin\alpha \sin\beta \text{ folglich:}$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sqrt{1+\sin\alpha\sin\beta}}$$

Setzt man den Wert in die obige Gleichung ein, so wird:

$$U = \frac{8\,r \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sqrt{1+\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{4\,r\,(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sqrt{1+\sin\alpha\sin\beta}}$$

Für sämtliche Vierecke hat $\frac{4\,r}{\sqrt{1+\sin\alpha\sin\beta}}$ einen konstanten Wert. Mithin ist das Wachsen und Abnehmen von U nur von dem Wachsen und Abnehmen von $\sin\alpha + \sin\beta$ abhängig. U erreicht sein Maximum oder Minimum, wenn $\sin\alpha + \sin\beta$ zum Maximum oder Minimum wird. Dabei ist zu berücksichtigen, dafs stets $\sin\alpha \sin\beta = \frac{\varrho}{m}$ sein mufs. Die beiden anstofsenden Winkel α und β wählen wir im bicentrischen Viereck so, dafs α nicht kleiner als β und keiner von ihnen stumpf ist. Es ist, wenn wir für $\sin\beta$ den Wert $\frac{\varrho}{m \sin\alpha}$ einsetzen:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\alpha + \frac{\varrho}{m \sin\alpha}$$

Wir setzen den Wert $\sin\alpha + \frac{\varrho}{m \sin\alpha} = y$ und untersuchen, welchen gröfsten und kleinsten Wert y annehmen kan. Es ist dann:

$$\sin^2\alpha - y \sin\alpha = -\frac{\varrho}{m}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{\varrho}{m}}$$

Die beiden Werte der Quadratwurzel geben die Werte des Sinus der beiden Winkel α und β an. Soll α der gröfsere Winkel sein, so haben wir zu setzen:

$$\sin\alpha = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{\varrho}{m}}$$

Soll also $\sin\alpha$ einen reellen Wert erhalten, so darf y nicht kleiner sein als $2\sqrt{\frac{\varrho}{m}}$

Für den kleinsten Wert von y wird:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\varrho}{m}} \text{ und auch } \sin\beta = \sqrt{\frac{\varrho}{m}} \text{ d. h. } \alpha = \beta.$$

Von allen bicentrischen Vierecken hat aber nur das Trapez zwei anstofsende gleiche Winkel.

y könnte bis ins Unendliche wachsen, ohne dafs die Wurzel imaginär wird. Es wird ihm jedoch eine Grenze gesetzt durch den gröfsten Wert, den $\sin\alpha$ höchstens annehmen kann.

Der gröfste Wert von y wird erhalten, wenn y die Gleichung erfüllt:

$$1 = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{\varrho}{m}}. \text{ Daraus folgt:}$$

$$y = 1 + \frac{\varrho}{m}$$

$$\sin\alpha = 1, \ \sin\beta = \frac{\varrho}{m}$$

Das bicentrische Viereck der Vierecksschar mufs, weil es rechte Winkel enthält, ein Deltoid sein. Aus der Formel $F = \frac{U\varrho}{2}$ folgt, da ϱ einen konstanten Wert hat, dafs das Maximum und Minimum von U auch F zum Maximum und Minimum macht.

Daher der Satz:

„Von sämtlichen Vierecken der bicentrischen Vierecksschar hat das Trapez den kleinsten und das Deltoid den gröfsten Umfang und Inhalt."

Kehren wir nach der Lösung dieser Aufgabe zu den Lagenverhältnissen in der bicentrischen Vierecksschar zurück. Die Fufspunkte der Senkrechten, welche man von den beiden Punkten M_1 und O auf die Centralen der den anstofsenden Seiten sämtlicher Vierecke der Vierecksschar anbeschriebenen Kreise fällt, liegen auf dem umbeschriebenen Kreise der Vierecksschar. Zeichnet man nun eine Ellipse, welche den umbeschriebenen Kreis zum Hauptkreis und die beiden Punkte M_1 und O zu Brennpunkten hat, so berühren sämtliche Centralen die Ellipse nach der Umkehrung des Satzes: „Die Fufspunkte der von den Brennpunkten auf die Tangenten einer Ellipse gefällten Senkrechten liegen auf dem Hauptkreise.“ Da das Berührungsviereck dem Viereck aus den Centralen ähnlich ist und zu ihm perspektivisch liegt, so berühren auch die Seiten des Berührungsvierecks eine ähnlich liegende Ellipse.

Die Centralen des einbeschriebenen und der anbeschriebenen Kreise bilden ein Strahlenbüschel mit Strahlenpaaren, die auf einander senkrecht stehen. Ein solches Strahlenbüschel ist aber stets ein involutorisches und zwar ein elliptisches Dies folgt auch daraus, dafs die Punktpaare S und S_1, durch welche die Strahlen dieses Büschels gehen, eine elliptische Involution bilden, weil für alle diese Punktpaare $E_1 S_1 . E_1 S = OE_1{}^2$ und OE_1 für alle Vierecke der Schar denselben Wert hat.

Die äufseren Ähnlichkeitspunkte sämtlicher anbeschriebenen Kreise der Vierecksschar müssen auf der gemeinschaftlichen äufseren Doppelpolaren liegen, während die Verbindungslinien der inneren Ähnlichkeitspunkte der den Gegenseiten der bicentrischen Vierecksschar anbeschriebenen Kreise sämtlich durch den inneren Doppelpol, dem Schnittpunkte sämtlicher Diagonalen der Schar, gehen. Beides folgt aus den im ersten Teil der Arbeit entwickelten Sätzen mit Rücksicht darauf, dafs alle Vierecke der Vierecksschar dieselbe äufsere Doppelpolare und denselben inneren Doppelpol haben.

Es ist nun noch zu untersuchen, was für eine Curve durch die inneren Ähnlichkeitspunkte U und U_1 der Vierecksschar gebildet wird. Da die beiden Ähnlichkeitspunkte S und U die Centrale $O_a O_c$ harmonisch teilen, wird S von U durch den Kreis M_1 harmonisch getrennt, ebenso auch S von P, weil P der Pol der äufseren Doppelpolaren in Bezug auf den Kreis M_1 ist, wie im ersten Teile bewiesen wurde. Die Verbindungslinie PU mufs daher die Polare des Punktes S in Bezug auf den Kreis M_1 sein. Für alle Vierecke der Schar bilden die Punkte S eine Punktreihe auf der äufseren Doppelpolaren und die Verbindungslinien PU ein Strahlenbüschel von zugehörigen Polaren.

Nach einem Satze der synthetischen Geometrie bilden die Polaren sämtlicher Punkte einer geraden Punktreihe in Bezug auf einen Kegelschnitt, also auch in Bezug auf einen Kreis ein mit der Punktreihe projektivisches Strahlenbüschel. Es müssen mithin die Polaren PU ein zur Punktreihe S projektivisches Strahlenbüschel erzeugen. Das Strahlenbüschel OU liegt aber zur Punktreihe S perspektivisch. Daraus ergibt sich, dafs die beiden Strahlenbüschel PU und OU mit den Mittelpunkten P und O projektiv sind. Sämtliche Punkte U der Vierecksschar sind daher die Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen zweier projektiver Strahlenbüschel. Diese Durchschnittspunkte bilden nach den Fundamentalsätzen der synthetischen Geometrie einen Kegelschnitt. In unserem Falle entsteht eine Ellipse, weil die Punkte U auf einer im Endlichen geschlossenen Curve innerhalb des Kreises M_1 liegen. Auf derselben Curve befinden sich auch die Punkte U_1, denn sie entstehen durch den Durchschnitt derselben projektivischen Strahlenbüschel. Beim bicentrischen Trapez fällt U mit P und U_1 mit O zusammen. Die zugehörigen Strahlen durch P und O berühren die Ellipse und stehen auf PO senkrecht. PO mufs eine Achse der Ellipse sein. Beim bicentrischen Deltoid fällt U_1 U mit der inneren Doppelpolaren zusammen. Da in diesem Falle die Sehne der Ellipse $U_1 U$, welche von O aus allemal unter einem rechten Winkel erscheint, auf PO senkrecht steht und PO so teilt, dafs der kleinere Abschnitt an P liegt, kann die Ellipse kein Kreis sein und mufs PO zur kleinen Achse haben. $U_1 U$ wird in jeder Lage durch E und F_2 harmonisch geteilt. Folglich sind sämtliche Punkte der äufseren Doppelpolaren vom inneren Doppelpol durch die Ellipse harmonisch getrennt Mithin ist die äufsere Doppelpolare auch in Bezug auf diese Ellipse Polare zum inneren Doppelpol E.

Zum Schlufs will ich die bei der Betrachtung der bicentrischen Vierecksschar gefundenen Lagenverhältnisse in einen Satz zusammenfassen:

„Bewegen sich die Ecken der bicentrischen Vierecke auf dem umbeschriebenen Kreise fort, während die Seiten den einbeschriebenen Kreis umhüllen, so beschreiben die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise einen Kreis, umhüllen die Centralen der zu den anstofsenden Seiten gehörigen anbeschriebenen eine Ellipse und bilden die Centralen des einbeschriebenen und der anbeschriebenen ein elliptisches Strahlensystem, dessen Strahlenpaare aufeinander senkrecht stehen. Sämtliche äufseren Ähnlichkeitspunkte der anbeschriebenen Kreise liegen auf einer Geraden, nämlich auf der äufseren Doppelpolaren, sämtliche inneren Ähnlichkeitspunkte der den Gegenseiten anbeschriebenen auf einer Ellipse, während die Verbindungslinien der letzteren und die Diagonalen der Schar sämtlich durch einen Punkt, den inneren Doppelpol, gehen.“

Es ist mir nicht möglich meine Arbeit zu schliefsen, ohne auf Verallgemeinerungen hingewiesen zu haben, deren die in derselben gewonnenen Resultate fähig sind. Wir haben im ersten Teile der Arbeit ein Problem für das Viereck elementar gelöst, welches in der neueren Zeit hervorragende Mathematiker beschäftigte, ich meine das Problem, die Bedingungsgleichung aufzustellen, welche zwischen den Radien zweier Kreise und der Entfernung ihrer Mittelpunkte bestehen mufs, damit dem einen Kreis ein n-Eck umschrieben werden kann, welches dem anderen einbeschrieben ist.

Dieses Problem ist zuerst für das Dreieck von Euler elementar gelöst worden, für das Viereck, Fünfeck, Sechseck und Achteck von Steiner und allgemein für ein beliebiges n-Eck mit Hilfe von elliptischen Funktionen von Jacobi. In meiner Arbeit habe ich Sätze gefunden, die für das Dreieck und das bicentrische Viereck Giltigkeit haben. So liegen z. B. in beiden die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt erhalten wird, wenn man die Verbindungslinie der Mittelpunkte des um- und einbeschriebenen Kreises MO über M hinaus um sich selbst verlängert. Es ist nun die Frage, ob diese Sätze allgemeine Giltigkeit haben, d. h. auch für jedes bicentrische n-Eck gelten.

Hierdurch wurde ich zu Untersuchungen angeregt, als deren Ergebnis ich folgende Sätze anführen will, für welche ich einfache elementare Beweise gefunden habe:

1. Der umbeschriebene Kreis eines bicentrischen n-Ecks halbiert die Centralen der den anstofsenden Seiten anbeschriebenen Kreise.

2. Die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise einer bicentrischen n-Ecksschar liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich auf der Centrale des um- und einbeschriebenen befindet. Der Abstand des Mittelpunktes dieses Kreises vom Mittelpunkte des einbeschriebenen wird durch den Mittelpunkt des umbeschriebenen halbiert.

3. Die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise eines bicentrischen n-Ecks bilden ein n-Eck, welches zum Berührungs-n-Eck perspektivisch ähnlich liegt.

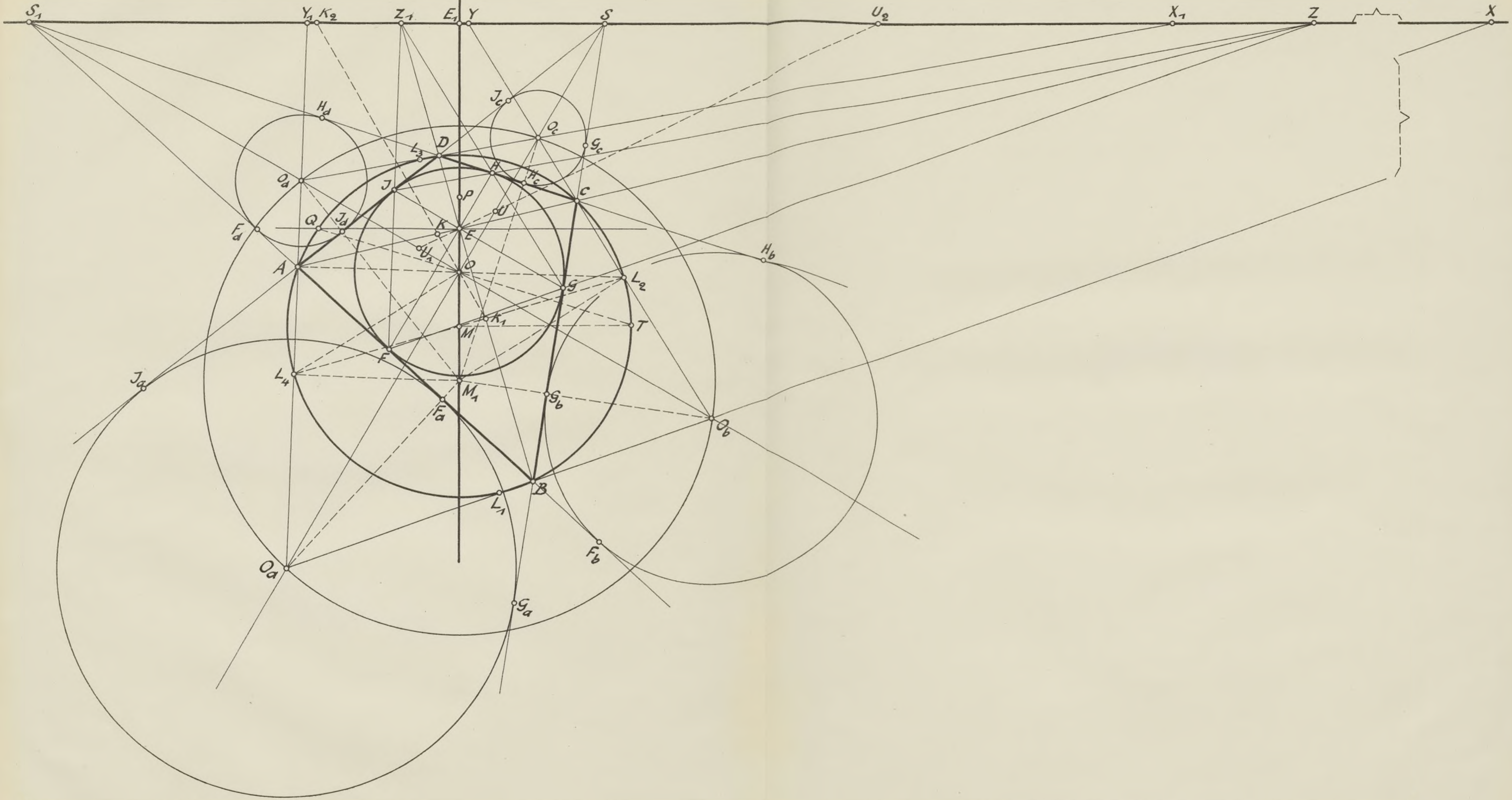
4. Sämtliche Centralen der den anstofsenden Seiten einer bicentrischen n-Eckschar anbeschriebenen Kreise umhüllen die Ellipse, welche den Mittelpunkt des einbeschriebenen und den Mittelpunkt des Kreises, auf dem die Mittelpunkte der anbeschriebenen liegen, zu Brennpunkten und den umbeschriebenen Kreis zum Hauptkreis hat.

5. Die Potenz des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises eines bicentrischen n-Ecks in Bezug auf den umbeschriebenen ist gleich dem Produkt des Radius des einbeschriebenen und des Radius des Kreises, auf welchem die Mittelpunkte der anbeschriebenen liegen.

Für das oben genannte Problem ist namentlich der letzte Satz wichtig. Aus ihm ergibt sich, dafs für sämtliche bicentrische n-Ecke die im ersten Teile der Arbeit entwickelte Formel:

$$MO^2 = r^2 - R\varrho$$

Giltigkeit hat. Wir haben also das Problem zurückgeführt auf die Bestimmung des Radius R eines Kreises, auf welchem die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise liegen. Gelingt es für jedes bicentrische n-Eck die Gleichung aufzustellen, welche die Beziehung zwischen den drei Radien R, r und ϱ ausdrückt, so ist eine neue allgemeine Lösung des Problems gefunden.


S_1
Y_1
K_2
Z_1
E_1
Y
S
U_2
X_1
Z
X
J_c
H_d
O_c
G_c
D
L_3
H
H_c
O_d
J
P
C
U
Q
J_d
K
E
F_d
U_1
O
A
L_2
G
H_b
K_1
T
M
F
J_a
L_4
M_1
G_b
F_a
O_b
B
L_1
F_b
O_a
G_a