Städtisches Gymnasium zu Marienburg.

Zu der

Montag, den 26. März 1866

stattfindenden

öffentlichen Prüfung aller Klassen

ladet

im Namen des Lehrer-Collegiums ein

Dr. Fr. Strehlke,
Dir. Gymn.

Inhalt:

1) Mathematische Abhandlung von Prof. Doerk.
2) Schulnachrichten vom Director.

Marienburg,
Druck von M. Kanter.

Sammlung

stufenmässig geordneter und vollständig berechneter Aufgaben aus der reinen Differenzialrechnung

von

H. G. Doerk,

Königl. Professor.

Vorwort.

Nachstehenden Blättern bin ich gewissermassen gezwungen einige Zeilen voranzuschicken, da sie so vereinzelt zur Herausgabe durch den Druck nicht bestimmt waren. Habent sua fata libelli. Für die wissenschaftliche Abhandlung zu dem diesjährigen Programme hatte ich nämlich ein Manuscript der reinen Differenzialrechnung übergeben, bei deren Bearbeitung die Absicht vorwaltete, sie so darzustellen, dass sie sich unmittelbar an den im Gymnasium ertheilten mathematischen Unterricht anreihe und so eine Uebergangsstufe zu den Vorlesungen bilde, welche auf Universitäten, Akademien und Fachschulen über diesen Gegenstand gehalten werden, dass sie ferner geeignet sei, von Jünglingen, welche nach beendigtem Cursus das Gymnasium verlassen haben und sie erlernen wollen, ohne einen mündlichen Vortrag gefasst und verstanden zu werden, und dass sie endlich bei ihnen auch einige Sicherheit im Differenziren selbst hervorrufe. Diesen Zweck zu erreichen schien es mir nicht nur rathsam, sondern sogar nothwendig zu sein, eine grosse Menge von Beispielen (gegen 200) zu sammeln und zu ordnen, die Aufgaben nicht nackt hinzustellen und höchstens das Resultat beizufügen, sondern sie vollständig zu berechnen, denn nur durch vielfache Uebung in der Anwendung der allgemeinen Lehrsätze auf specielle Fälle gelangt man zur technischen Fertigkeit im Rechnen; um sie zu erreichen, müssen sehr viele Aufgaben behandelt werden; giebt man sie nackt, nur höchstens noch dabei das Resultat, so kann es oft selbst dem strebsamen Jünglinge ergehen, dass er viele kostbare Zeit unnütz verschwende, weil hier und da doch leicht ein Fehler gemacht werden kann. Liegt nun keine ausführliche Berechnung zur Seite, nach welcher der Lernende die Aufsuchung des Fehlers in seiner eigenen Rechnung anstellen kann, ist keine Persönlichkeit vorhanden, an welche er sich um Belehrung im speciellen Falle wenden kann und wenden mag, so kann für ihn ausser dem Verluste an Zeit auch noch ein grösserer Nachtheil hervorgehen, dass die für dieses Studium so nothwendige Lust verloren geht.

Durch die Behandlungsweise der Differenzialrechnung von diesem Gesichtspunkte aus wuchs das Manuscript zu einer solchen Bogenzahl heran, dsss es die Grenzen einer Programm-Abhandlung weit überschritt und da keine Zeit mehr mir übrig war, einen anderen Gegenstand für dieselbe zu wählen, so erachtete ich es für gemessen, aus jenem Manuscripte die §§ 14 und 39 auszuwählen, welche die Beispielsammlung enthalten, und hoffe bei einzelnen Jünglingen, welche sich mit der Differenzialrechnung zu beschäftigen anfangen, meinen Zweck zu erreichen.

D.

§ 14. Beispiele zur Differenziation der algebraischen Functionen.

1) Gegeben sei $f(x) = a x \pm b$, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = a.$$

2) Gegeben sei $f(x) = a x + b (c \pm e x)$, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = a \pm b e.$$

3) Gegeben sei $f(x) = a x - b (c - e x)$, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = a + b e.$$

4) Gegeben sei $f(x) = 3 x + 7$, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = 3.$$

5) Gegeben ist $f(x) = 5 x + 3 (4 \pm 2 x)$, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = 5 \pm 6 = \begin{cases} +11 \\ -1 \end{cases}.$$

6) Wenn $f(x) = x^2$ ist, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = 2 x.$$

7) Ist $f(x) = 3 x^7$, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = 21 x^6.$$

8) Ist $f(x) = a x^n$, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = a n x^{n-1}.$$

9) Wenn $f(x) = a^2 x + b^2 x^2$ ist, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = a^2 + 2 b^2 x.$$

10) Wenn $f(x) = a^2 + b x - c x^2 + e x^3$ ist, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = b - 2 c x + 3 e x^2.$$

11) Wenn $f(x) = 6 - 3 x + 4 x^2 - 5 x^4$ ist, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = -3 + 8 x - 20 x^3.$$

12) Ist $f(x) = \frac{a x^4}{b}$, so ist
$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{4 a x^3}{b}.$$

13) Ist $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, so ist

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -1 \,.\, x^{-2} = \frac{-1}{x^2}.$$

14) Wenn $f(x) = \frac{a}{b\,x^4} = \frac{a}{b} \,.\, x^{-4}$ ist, so ist

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -4 \,.\, \frac{a}{b}\, x^{-5} = -\frac{4\,a}{b\,x^5}.$$

15) Ist $f(x) = \frac{a}{b\,x^n} = \frac{a}{b} \,.\, x^{-n}$, so ist

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -n \,.\, \frac{a}{b} \,.\, x^{-n-1} = -\frac{n\,a}{b\,x^{n+1}}.$$

16) Wenn $f(x) = (1 + x)(1 - x)$ ist, so ist

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = (1 - x) \,.\, 1 + (1 + x)(-1) = 1 - x - 1 - x = -2\,x$$

oder $f(x) = 1 - x^2$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -2\,x.$$

17) $f(x) = (2 + 3\,x - 4\,x^2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{4}\,x^2\right)$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{4}\,x^2\right)(3 - 8\,x) + (2 + 3\,x - 4\,x^2)\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,x\right)$$
$$= \frac{3}{2} - 5\,x + \frac{41}{12}\,x^2 - 2\,x^3 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{17}{6}\,x^2 - 2\,x^3\right)$$
$$= \frac{5}{6} - 5\,x + \frac{25}{4}\,x^2 - 4\,x^3,$$

oder $f(x) = 1 + \frac{5}{6}\,x - \frac{5}{2}\,x^2 + \frac{25}{12}\,x^3 - x^4$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{5}{6} - 5\,x + \frac{25}{4}\,x^2 - 4\,x^3.$$

18) Ist $f(x) = (a + b\,x - c\,x^2)(e - g\,x^2 + h\,x^4)$, so ist

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = (e - g\,x^2 + h\,x^4)(b - 2\,c\,x) + (a + b\,x - c\,x^2)(-2\,g\,x + 4\,h\,x^3)$$
$$= b\,e - 2\,c\,e\,x - b\,g\,x^2 + 2\,c\,g\,x^3 + b\,h\,x^4 - 2\,c\,h\,x^5$$
$$- 2\,a\,g\,x - 2\,b\,g\,x^2 + (2\,c\,g + 4\,a\,h)\,x^3 + 4\,b\,h\,x^4 - 4\,c\,h\,x^5$$
$$= b\,e - 2\,(a\,g + c\,e)\,x - 3\,b\,g\,x^2 + 4\,(a\,h + c\,g)\,x^3 + 5\,b\,h\,x^4 - b\,c\,h\,x^5$$

oder $f(x) = a\,e + b\,e\,x - (a\,g + c\,e)\,x^2 - b\,g\,x^3 + (a\,h + c\,g)\,x^4 + b\,h\,x^5 - c\,h\,x^6$

mithin $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = b\,e - 2\,(a\,g + c\,e)\,x - 3\,b\,g\,x^3 + 4\,(a\,h + c\,g)\,x^3 + 5\,b\,h\,x^4 - 6\,c\,h\,x^5.$

19) Wenn $f(x) = \frac{a + b\,x - c\,x^2}{e - g\,x^2 + h\,x^4}$ ist, so ist

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{(e - g\,x^2 + h\,x^4)(b - 2\,c\,x) - (a + b\,x - c\,x^2)(-2\,g\,x^2 + 4\,h\,x^3)}{(e - g\,x^2 + h\,x^4)^2}$$
$$= \frac{b\,e - 2\,(c\,e - a\,g)\,x + b\,g\,x^2 - 4\,a\,h\,x^3 - 3\,b\,h\,x^3 + 2\,c\,h\,x^5}{(e - g\,x^2 + h\,x^4)^2}$$

20) Ist $f(x) = \frac{3 + 7\,x - 4\,x^3}{5 + 4\,x^4}$, so ist

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{(5 + 4\,x^4)(7 - 12\,x^2) - (3 + 7\,x - 4\,x^3)\,16\,x^3}{(5 + 4\,x^4)^2}$$
$$= \frac{35 - 60\,x^2 + 28\,x^4 - 48\,x^6 - (48\,x^3 + 112\,x^4 - 64\,x^6)}{(5 + 4\,x^4)^2}$$
$$= \frac{35 - 60\,x^2 - 48\,x^3 - 84\,x^4 + 16\,x^6}{(5 + 4\,x^4)^2}.$$

21) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(1+x)(-1) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

22) Wenn $f(x) = \frac{a + b x + e x^2}{m - n x^p}$ ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(m - n x^p)(b + 2 c x) - (a + b x + e x^2)(- n p x^{p-1})}{(m - n x^p)^2}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} b m + 2 c m x - b n x^p - 2 c n x^{p+1} \\ + a n p x^{p-1} + b n p x^p + c n p x^{p+1} \end{matrix} \right\} : (m - n x^p)^2$$

$$= \frac{b m + 2 c m x + a n p x^{p-1} + b n (p-1) x^p + c n (p-2) x^{p+1}}{(m - n x^p)^2}$$

23) Ist gegeben $f(x) = (a + x)^n$, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = n (a + x)^{n-1} \frac{d (a + x)}{d x} = n (a + x)^{n-1}.$$

24) $f(x) = (a^2 - x^2)^4$

$$\frac{d f(x)}{d x} = 4 (a^2 - x^2)^3 \frac{d (a^2 - x^2)}{d x} = 4 (a^2 - x^2)^3 (-2 x)$$

$$= - 8 x (a^2 - x^2)^3.$$

25) Wenn $f(x) = \frac{a x}{a - x} - \frac{a^2}{a + x}$ gegeben ist, so ist

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(a - x) a + a x}{(a - x)^2} - \frac{a^2}{(a + x)^2}$$

$$= \frac{a^2}{(a - x)^2} + \frac{a^2}{(a + x)^2}$$

$$= a^2 \left\{ \frac{1}{(a - x)^2} + \frac{1}{(a + x)^2} \right\}$$

$$= a^2 \left\{ \frac{a^2 + 2 a x + x^2 + a^2 - 2 a x + x^2}{(a^2 - x^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{2 a^2 (a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^2}$$

oder $f(x) = \frac{- a^3 + 2 a^2 x + a x^2}{a^2 - x^2}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(a^2 - x^2)(2 a^2 + 2 a x) - (- a^3 + 2 a^2 x + a x^2)(- 2 x)}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2 a^4 + 2 a^3 x - 2 a^2 x^2 - 2 a x^3 - 2 a^3 x + 4 a^2 x^2 + 2 a x^3}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2 a^4 + 2 a^2 x^2}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2 a^2 (a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^2}$$

26) $f(x) = \frac{(a^2 + x^2)^3}{(a^2 - x^2)^4}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{(a^2 - x^2)^4 \cdot 3 (a^2 + x^2)^2 \cdot 2 x - (a^2 + x^2)^3 \cdot 4 (a^2 - x^2)^3 \cdot (- 2 x}{(a^2 - x^2)^8}$$

$$= \frac{6 x (a^2 + x^2)^2 (a^2 - x^2)^4 + 8 x (a^2 + x^2)^3 (a^2 - x^2)^3}{(a^2 - x^2)^8}$$

$$= \frac{2 x (a^2 + x^2)^2 (a^2 - x^2)^3 \left\{ 3 (a^2 - x^2) + 4 (a^2 + x^2) \right\}}{(a^2 - x^2)^8}$$

$$= \frac{2\,x\,(a^2 + x^2)^2\,(3\,a^2 - 3\,x^2 + 4\,a^2 + 4\,x^2)}{(a^2 - x^2)^5}$$

$$= \frac{2\,x\,(a^2 + x^2)^2\,(7\,a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^5}.$$

27) $$f\,(x) = \frac{(a^2 - x^2)^3}{a^4 + a^2\,x^2 - x^4}$$

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = \frac{(a^4 + a^2\,x^2 - x^4)\,.\,3\,(a^2 - x^2)^2\,\frac{d\,(a^2 - x^2)}{d\,x} - (a^2 - x^2)^3\,(2\,a^2\,x - 4\,x^3)}{(a^4 + a^2\,x^2 - x^4)^2}$$

$$= (a^2 - x^2)^2 \left\{ \frac{3\,(a^4 + a^2\,x^2 - x^4)\,(-\,2\,x) - (a^2 - x^2)\,(a^2 - 2\,x^2)\;2\,x}{(a^4 + a^2\,x^2 - x^4)^2} \right\}$$

$$= \frac{(a^2 - x^2)^2\,(-\,2\,x)\,\{3\,a^4 + 3\,a^2\,x^2 - 3\,x^4 + a^4 - 3\,a^2\,x^2 + 2\,x^4\}}{(a^4 + a^2\,x^2 - x^4)^2}$$

$$= \frac{(a^2 - x^2)^2\,(-\,2\,x)\,(4\,a^4 - x^4)}{(a^4 + a^2\,x^2 - x^4)^2}$$

$$= \frac{(2\,x\,(a^2 - x^2)^2\,(x^4 - 4\,a^4)}{(a^4 + a^2\,x^2 - x^4)^2}.$$

28) Es sei gegeben: $f\,(x) = (a + x)\,(b - x)\,(x - c)$, so ist

$$\frac{1}{f\,(x)}\cdot\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = \frac{1}{a + x}\cdot\frac{d\,(a + x)}{d\,x} + \frac{1}{b - x}\cdot\frac{d\,(b - x)}{d\,x} + \frac{1}{x - c}\cdot\frac{d\,(x - c)}{d\,x}$$

$$\frac{1}{f\,(x)}\cdot\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = \frac{1}{a + x} - \frac{1}{b - x} + \frac{1}{x - c}$$

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = (a + x)\,(b - x)\,(x - c)\left\{\frac{1}{a + x} - \frac{1}{b - x} + \frac{1}{x - c}\right\}$$

$$= (b - x)\,(x - c) - (a + x)\,(x - c) + (a + x)\,(b - x)$$

$$= -\,b\,c + (b + c)\,x - x^2$$

$$+\,a\,c + (c - a)\,x - x^2$$

$$+\,a\,b + (b - a)\,x - x^2$$

$$= a\,b + a\,c - b\,c + 2\,(b + c - a)\,x - 3\,x^2$$

oder $f\,(x) = (a + x)\,(b - x)\,(x - c)$

$$= -\,a\,b\,c + (a\,b + a\,c - b\,c)\,x + (b + c - a)\,x^2 - x^3,$$

also $\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = a\,b + a\,c - b\,c + 2\,(b + c - a)\,x - 3\,x^2.$

29) $$f\,(x) = m\,x^{-\,n}$$

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = -\,m\,n\,x^{-\,n\,-\,1} = \frac{-\,m\,n}{x^{n\,+\,1}}.$$

30) $$f\,(x) = (a + b\,x^{-\,n})^p$$

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = p\,(a + b\,x^{-\,n})^{p\,-\,1}\,\frac{d\,(a + b\,x^{-\,n})}{d\,x}$$

$$= p\,(a + b\,x^{-\,n})^{p\,-\,1}\,(-\,b\,n\,x^{-\,n\,-\,1})$$

$$= \frac{-\,b\,n\,p\,(a + b\,x^{-\,n})^{p\,-\,1}}{x^{n} + 1}.$$

31) Gegeben sei $f\,(x) = a\,\sqrt[n]{x^p} = a\,x^{\frac{p}{n}}$, so ist

$$\frac{d\,f\,(x)}{d\,x} = \frac{p}{n}\,a\,x^{\frac{p}{n}\,-\,1}$$

$$= \frac{a\,p}{n}\,x^{\frac{p\,-\,n}{n}}$$

$$= \frac{a\,p}{n} \sqrt[n]{x^{p-n}}.$$

32) $f(x) = \sqrt{x^n} = x^{\frac{n}{2}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{n}{2}\,x^{\frac{n}{2}-1} = \frac{n}{2}\sqrt{x^{n-2}}.$$

33) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

34) $f(x) = \sqrt{a + b\,x^n} = (a + b\,x^n)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}\,(a + b\,x^n)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{d\,(a + b\,x^n)}{d\,x}$$

$$= \frac{1}{2}\,(a + b\,x^n)^{-\frac{1}{2}}\,.\,n\,b\,x^{n-1}$$

$$= \frac{b\,n\,x^{n-1}}{2\sqrt{a + b\,x^n}}.$$

35) $f(x) = x^4 \sqrt[3]{x^2} = x^4 . x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{14}{3}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{14}{3}\,x^{\frac{11}{3}} = \frac{14}{3}\sqrt[3]{x^{11}} = \frac{14}{3}\,x^3 \sqrt[3]{x^2}$$

36) $f(x) = x + \sqrt{a^2 + x^2} = x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = 1 + \frac{1}{2}\,(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,2\,x$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

37) $f(x) = (x + 4)\sqrt[3]{3\,x^2 - 6} = (x + 4)\,(3\,x^2 - 6)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = (3x^2 - 6)^{\frac{1}{3}} + (x + 4)\,.\,\frac{1}{3}\,.\,(3\,x^2 - 6)^{-\frac{2}{3}}\,.\,6\,x$$

$$= \sqrt[3]{3\,x^2 - 6} + \frac{(x + 4)\,2\,x}{\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3\,x^2 - 6}\,\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2} + 2\,x\,(x + 4)}{\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2}}$$

$$= \frac{3\,x^2 - 6 + 2\,x^2 + 8\,x}{\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2}}$$

$$= \frac{5\,x^2 + 8\,x - 6}{\sqrt[3]{(3\,x^2 - 6)^2}}.$$

38) $f(x) = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x} = a + b\,x^{\frac{1}{2}} - c\,x^{-1}$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}\,b\,x^{-\frac{1}{2}} + c\,x^{-2}$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}.$$

39) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{d x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x}}{(1-x)\,(1+x)^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)\,(1+x)^2}$$

$$\text{oder} = \frac{-\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+x}}{(1+x)^2\,\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}} = -\frac{(1+x)}{(1-x)^2\,\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1+x)\,\sqrt{1-x^2}}.$$

40) $f(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\,\sqrt{e + g x^n} - m x$

$$= a x^{-\frac{1}{2}} + b + c\,(e + g x^n)^{\frac{1}{2}} - m x$$

$$\frac{d f(x)}{d x} = -\frac{1}{2}\,a x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\,c\,(e + g x^n)^{-\frac{1}{2}} \cdot n g x^{n-1} - m$$

$$= -\frac{\frac{1}{2} a}{\sqrt{x^3}} + \frac{\frac{1}{2} c g n x^{n-1}}{\sqrt{e + g x^n}} - m$$

$$= -\frac{a}{2 x \sqrt{x}} + \frac{c g n x^{n-1}}{2\sqrt{e + g x^n}} - m.$$

41) $f(x) = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} - \frac{g}{x x}$

$$= a + b x^{-\frac{2}{3}} - c x^{-\frac{4}{3}} - g x^{-2}$$

$$\frac{d f(x)}{d x} = -\frac{2}{3}\,b x^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}\,c x^{-\frac{7}{3}} + 2 g x^{-3}$$

$$= -\frac{2 b}{3 x \sqrt[3]{x^2}} + \frac{4 c}{3 x^2 \sqrt[3]{x}} + \frac{2 g}{x^3}.$$

42) $f(x) = \sqrt{a - b x + 2 c x^2}$

$$= (a - b x + 2 c x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{1}{2}\,(a - b x + 2 c x^2)^{-\frac{1}{2}}(-b + 4 c x)$$

$$= \frac{-b + 4 c x}{2\sqrt{a - b x + 2 c x^2}}.$$

43) $f(x) = \frac{a}{\sqrt{1 - x^2}} = a\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = -\frac{1}{2}\,a\,(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{a x}{(1 - x^2)\,\sqrt{1 - x^2}}.$$

44) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{a x^2 - b}{x^5}} = (a x^2 - b)^{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{5}{3}}$

$$\frac{d f(x)}{d x} = x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{3}\,(a x^2 - b)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 a x - \frac{5}{3}\,(a x^2 - b)^{\frac{1}{3}}\,x^{-\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{2 a x}{3\sqrt[3]{x^5}\,\sqrt[3]{(a x^2 - b)^2}} - \frac{5\sqrt[3]{a x^2 - b}}{3\sqrt[3]{x^8}}.$$

$$= \frac{2\,a\,x^2}{3\,x^2\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{(a\,x^2-b)^2}} - \frac{5\sqrt[3]{a\,x^2-b}\,\sqrt[3]{(a\,x^2-b)^2}}{3\,x^2\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{(a\,x^2-b)^2}}$$

$$= \frac{2\,a\,x^2 - 5\,(a\,x^2 - b)}{3\,x^2\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{(a\,x^2-b^2)}}$$

$$= \frac{-3\,a\,x^2 + 5\,b}{3\,x^2\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{(a\,x^2-b)^2}}$$

$$= \frac{(5\,b - 3\,a\,x^2)\sqrt[3]{x}}{3\,x^3\sqrt[3]{(a\,x^2-b)^2}}$$

45) $$f(x) = \sqrt[3]{\left(a - x\sqrt{x} + \frac{b}{x^2\sqrt{x}}\right)^2} = (a - x^{\frac{3}{2}} + b\,x^{-\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{2}{3}\,(a - x^{\frac{3}{2}} + b\,x^{-\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}\,b\,x^{-\frac{7}{2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{\frac{5}{2}\,b}{x^3\sqrt{x}}\right)}{\sqrt[3]{a - x^{\frac{3}{2}} + b\,x^{-\frac{5}{2}}}} = \frac{-x^4 - \frac{5}{3}\,b}{x^3\sqrt{x}\sqrt[3]{a - x\sqrt{x} + \frac{b}{x^2\sqrt{x}}}},$$

$$= -\frac{3\,x^4 + 5\,b}{3\,x^3\sqrt{x}\sqrt[3]{a - x\sqrt{x} + \frac{b}{x^2\sqrt{x}}}}.$$

46) $$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = (x + \sqrt{a^2 - x^2})^{-1}$$

$$= \{x + (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-1}$$

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = -1\,\{x + (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-2}\,\{1 + \frac{1}{2}\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(-2\,x)\}$$

$$= -(x + \sqrt{a^2 - x^2})^{-2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$$

$$= \frac{-1}{(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2} + \frac{x}{(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2\,\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}\,(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2}.$$

47) $$f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d f(x)}{d\,x} = \frac{x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x\,\{1 + \frac{1}{2}\,(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}.\,2\,x\}}{(x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$= \frac{x + \sqrt{1 + x^2} - x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}$$

$$= \frac{x + \sqrt{1 + x^2} - x\left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}$$

$$= \frac{(x+\sqrt{1+x^2})\left\{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right\}}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$= \frac{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(\sqrt{1+x^2}+x)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2x.$$

oder $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{x(\sqrt{1+x^2}-x)}{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}$

$$= x\sqrt{1-x^2} - x^2 = x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2$$

$$\frac{d f(x)}{d x} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 2x$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2x$$

$$= \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2x.$$

48) $f(x) = \frac{x-\sqrt[3]{x^5}}{a-a\sqrt[3]{x}} = \frac{x-x\sqrt[3]{x^2}}{a-a\sqrt[3]{x}}$

$$= \frac{x}{a}\left(\frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{x}{x}\,\frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x})}{1-\sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{x}{a}(1+\sqrt[3]{x}) = \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt[3]{x}}{a} = \frac{x}{a} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{a}$$

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{1}{a} + \frac{4}{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{a}$$

$$= \frac{3+4\sqrt[3]{x}}{3a}.$$

49) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x^2+\sqrt{1+x}}}{\sqrt[3]{1+x^2+\sqrt{1-x}}}.$

Man setze I) $1-x^2+\sqrt{1+x} = v = 1-x^2+(1+x)^{\frac{1}{2}}$

und II) $1+x^2+\sqrt{1-x} = w = 1+x^2+(1-x)^{\frac{1}{2}}$,

so ist III) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[3]{w}} = v^{\frac{1}{3}} \cdot w^{-\frac{1}{3}}$

also IV) $\frac{d f(x)}{d x} = \frac{1}{3}\, w^{-\frac{1}{3}} \cdot v^{-\frac{2}{3}} \frac{d v}{d x} + v^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{3}\, w^{-\frac{4}{3}}\right)\frac{d w}{d x}.$

Aus I folgt V) $\frac{d\,v}{d\,x} = -\,2\,x + \frac{1}{2}\,(1 + x)^{-\frac{1}{2}}$

„ II „ VI) $\frac{d\,w}{d\,x} = 2\,x + \frac{1}{2}\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\,1) = 2\,x - \frac{1}{2}\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$.

Substituirt man die Werthe von v, w, $\frac{d\,v}{d\,x}$ und $\frac{d\,w}{d\,x}$ in Gleichung IV, so erhält man:

$$\text{VII)}\ \frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{3}\,(1 + x^2 + (1 - x)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\,(1 - x^2 + (1 + x)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}\,(-\,2\,x + \frac{1}{2}\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}})$$

$$-\,\frac{1}{3}\,(1 - x^2 + (1 + x)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}}\,(1 + x^2 + (1 - x)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{4}{3}}\,(2\,x - \frac{1}{2}\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{-\,2\,x + \dfrac{1}{2\,\sqrt{1 + x}}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{1}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{1}{3}}} - \frac{\left(2\,x - \dfrac{1}{2\,\sqrt{1 - x}}\right)(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{1}{3}}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{\left(-\,2\,x + \dfrac{1}{2\,\sqrt{1 + x}}\right)(1 + x^2 + \sqrt{1 - x}) - \left(2\,x - \dfrac{1}{2\,\sqrt{1 - x}}\right)(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \left\{\begin{matrix} -\,2\,x - 2\,x^3 - 2\,x\sqrt{1 - x} + \dfrac{1 + x^2}{2\sqrt{1 + x}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}} \\ -\,2\,x + 2\,x^3 - 2\,x\sqrt{1 + x} + \dfrac{1 - x^2}{2\sqrt{1 - x}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} \end{matrix}\right\} : \begin{matrix} 3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}} \\ (1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}} \end{matrix}$$

$$= \frac{-\,4\,x - 2\,x\,(\sqrt{1 - x}) + \sqrt{1 + x} + \dfrac{1 + x^2 + \sqrt{1 - x}}{2\,\sqrt{1 + x}} + \dfrac{1 - x^2 + \sqrt{1 + x}}{2\,\sqrt{1 - x}}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-\,4\,x\,\sqrt{1 - x^2} - 2\,x\,\{(1 - x)\sqrt{1 + x} + (1 + x)\sqrt{1 - x}\} + \dfrac{1 + x^2}{2}\sqrt{1 - x} + \dfrac{1 - x^2}{2}\sqrt{1 + x} + \dfrac{1 + x}{2} + \dfrac{1 - x}{2}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}\,\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 - 4\,x\,\sqrt{1 - x^2} - 2\,x\,(1 - x)\,\sqrt{1 + x} + \left(\dfrac{1 - x^2}{2}\right)\sqrt{1 + x} - 2\,x\,(1 + x)\,\sqrt{1 - x} + \left(\dfrac{1 + x^2}{2}\right)\sqrt{1 - x}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}\,\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 - 4\,x\,\sqrt{1 - x^2} + (-\,2\,x + 2x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,x^2)\,\sqrt{1 + x} + (-\,2x - 2x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x^2)\,\sqrt{1 - x}}{3\,(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^{\frac{4}{3}}\,(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^{\frac{2}{3}}\,\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 - 4\,x\,\sqrt{1 - x^2} + (\frac{1}{2} - 2\,x + \frac{3}{2}\,x^2)\,\sqrt{1 + x} + (\frac{1}{2} - 2\,x - \frac{3}{2}\,x^2)\,\sqrt{1 - x}}{3\,\sqrt[3]{(1 + x^2 + \sqrt{1 - x})^4}\,\sqrt[3]{(1 - x^2 + \sqrt{1 + x})^2}\,\sqrt{1 - x}}.$$

50) $f(x) = \sqrt[4]{\left\{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right\}^3}$.

Man setze $y = \frac{b}{\sqrt{x}} = b\,x^{-\frac{1}{2}}$

also $\frac{d\,y}{d\,x} = -\,\frac{1}{2}\,b\,x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-\,b}{2\,\sqrt{x^3}}$

und $z = \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2} = (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}$

folglich $\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{2}{3}\,(c^2 - x^2)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-\,2\,x)$

$= \frac{-\,4\,x}{3\,\sqrt[3]{c^2 - x^2}}$,

dann ist $f(x) = \sqrt[4]{(a - y + z)^3} = (a - y + z)^{\frac{3}{4}}$

$$\text{also } \frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{3}{4}\,(a - y + z)^{-\frac{1}{4}}\left(-\frac{d\,y}{d\,x} + \frac{d\,z}{d\,x}\right)$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\left(-\frac{d\,y}{d\,x} + \frac{d\,z}{d\,x}\right)}{(a - y + z)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{\frac{3\,b}{2\sqrt{x^3}} - \frac{4\,x}{\sqrt[3]{c^2 - x^2}}}{4\sqrt[4]{\left\{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right\}^3}}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}\,b\,\sqrt[3]{c^2 - x^2} - x^2\,\sqrt{x}}{x\,\sqrt{x}\,\sqrt[3]{c^2 - x^2}\,\sqrt[4]{\left\{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right\}^3}}.$$

---

§ 39. Beispiele zur Differenziation der transcendenten Functionen.

a) Logarithmische und Exponential-Functionen.

1) $y = log\ nat\ x^p = p\,.\,log\ nat\ x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = p\,.\,\frac{1}{x}.$$

2) $y = log\ nat\ \sqrt[n]{x^p} = log\ nat\ x^{\frac{p}{n}} = \frac{p}{n}\ log\ nat\,.\,x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{p}{n}\,.\,\frac{1}{x}.$$

3) $y = log\ nat\ (a + b\,x + c\,x^2)$. Anwendung des § 28

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{b + 2\,c\,x}{a + b\,x + c\,x^2}$$

4) $y = log\ nat\ (a^2 \quad x^2)$. Anwendung der § 28

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{a^2 - x^2}\,.\,(-\,2\,x) = -\,\frac{2\,x}{a^2 - x^2}.$$

5) $y = log\,nat\ \sqrt{a + b\,x - c\,x^2} = log\ nat\ (a + b\,x - c\,x^2)^{\frac{1}{2}}$

Anwendung des § 28 und § 12

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a + b\,x - c\,x^2}}\,.\,\frac{1}{2}\,(a + b\,x - c\,x^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(b - 2\,c\,x)$$

$$= \frac{b - 2\,c\,x}{2\,(a + b\,x - c\,x^2)}.$$

6) $y = log\ nat\ (x + \sqrt{1 + x^2}) = log\ nat\ \left\{x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$

Anwendung des § 28

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\,.\,\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

7) $y = log\ nat\ \frac{1 + x}{1 - x}$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1 - x}{1 + x}\left\{\frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x^2)}\right\} = 2\,.\,\frac{1}{1 - x^2}.$$

6) $y = log\ nat\ (x + \sqrt{a^2 + x^2})$

Man setze $x + \sqrt{a^2 + x^2} = z = x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, so ist nach § 21, da

$$y = log\ nat\ z \text{ und } z = x + (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ ist,}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist nun $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$ und $\frac{d\,z}{d\,x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2} + x}\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right);$$

mithin $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2} + x}\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

7) Gegeben sei I) $y = log\ nat\ \frac{a\,x}{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}}$, man soll $\frac{d\,y}{d\,x}$ berechnen.

Man setze II) $\frac{a\,x}{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}} = z = a\,x\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)^{-\frac{1}{2}}$, so ist

III) $y = log\ nat\ z$ und IV) $z = \varphi\,(x)$.

Also ist nach § 21

$$\text{V)}\ \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Ferner ist VI) $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}}{a\,x}$

und nach § 13. 8 ist

$$\text{VII)}\ \frac{d\,z}{d\,x} = a\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)^{-\frac{1}{2}} + a\,x \,.\, -\frac{1}{2}\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)^{-\frac{3}{2}}\,(2\,c\,x - 3\,g\,x^2)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}} - \frac{a\,x\,(2\,c\,x - 3\,g\,x^2)}{2\,\sqrt{(b + c\,x^2 - g\,x^3)^3}}$$

also VIII) $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}}{a\,x}\left\{\frac{a}{\sqrt{b + c\,x^2 - g\,x^3}} - \frac{a\,x\,(2\,c\,x - 3\,g\,x^2)}{2\,\sqrt{(b + c\,x^3 - g\,x^3)^3}}\right\}$

$$= \frac{1}{x}\left\{1 - \frac{2\,c\,x^2 - 3\,g\,x^3}{2\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)}\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\left\{\frac{2\,b + 2\,c\,x^2 - 2\,g\,x^3 - 2\,c\,x^2 + 3\,g\,x^3}{2\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)}\right\}$$

$$= \frac{2\,b + g\,x^3}{2\,x\,(b + c\,x^2 - g\,x^3)}.$$

8) $y = log\ nat\ \frac{x}{b - c\,x} = log\ nat\ x - log\ nat\ (b - c\,x)$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x} + \frac{c}{b - c\,x} = \frac{b - c\,x + c\,x}{x\,(b - c\,x)}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{b}{x\,(b - c\,x)}.$$

9) $y = log\ nat\ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = log\ nat\ (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\,log\ nat\ (1 - x^2)$.

Man setze $1 - x^2 = z$, so ist

$$y = -\frac{1}{2}\,log\ nat\ z.$$

Da y also eine Function von z, und z wieder eine Function von x ist, so ist nach § 21

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist aber $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$ und $\frac{dz}{dx} = -2x$,

mithin $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2z} \cdot -2x = \frac{x}{z} = \frac{x}{1-x^2}$.

10) $y = log\ nat\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Man setze $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = z$, so ist

$$y = log\ nat\ z.$$

Mithin y eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Es ist aber $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}$ und $\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}x \cdot \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

$$= \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}};$$

folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

11) $y = \frac{a}{\sqrt{b}}\ log\ nat\ \frac{\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}}{\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}}$.

Man setze $\frac{\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}}{\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}} = z$,

dann ist $y = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot log\ nat\ z$,

also y eine Function von z, und z wieder eine Function von x, mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Nun ist $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}}{\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}}$

und $\frac{dz}{dx} = \frac{(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b+cx}} - (\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b+cx}}}{(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}$

$$= \frac{c\left[\sqrt{b+cx} + \sqrt{b} - \sqrt{b+cx} + \sqrt{b}\right]}{2\sqrt{b+cx}\,(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}$$

$$= \frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{b+cx}\,(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}.$$

Folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{b}}\ \frac{\sqrt{b+cx} + \sqrt{b}}{\sqrt{b+cx} - \sqrt{b}} \cdot \frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{b+cx}\,(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}$

$$= \frac{ac}{(\sqrt{b+cx} - \sqrt{b})\sqrt{b+cx}\,(\sqrt{b+cx} + \sqrt{b})^2}$$

$$= \frac{a}{x\sqrt{b+cx}}.$$

12) $y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \, log \; nat \, (x \sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2})$

Man setze $x \sqrt{-1} = z$

also $- x^2 = z^2$, so ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \, log \; nat \, (z + \sqrt{1 + z^2})$$

Nach § 28 Zus. oder § 38, 7 ist:

$$\frac{d \, log \; nat \; \varphi(x)}{d\,x} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{d \, \varphi(x)}{d\,x},$$

$$\text{also } \frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{z + \sqrt{1 + z^2}} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{z + \sqrt{1 + z^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + z^2} + z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$$

$$\text{und } \frac{d\,z}{d\,x} = \sqrt{-1}.$$

Da y eine Function von z, und z eine Function von x, also y auch eine Function von x ist, so ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

$$\text{Also } \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

13) Ist $y = log \; nat \, \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$ gegeben, so ist

$$y = log \; nat \, \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}. \text{ Warum?}$$

Nun setze man $\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} = z$, so ist

$y = log \; nat \; z$,

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

$$\text{Es ist aber } \frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{z} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{und } \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{\frac{- x^2}{\sqrt{1 - x^2}} - (1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2}$$

$$= \frac{- x^2 - (\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$= - \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{und also } \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{-(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

14) $y = log\ nat \sqrt{\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+a^2}-x}\right\}}$

$$y = log\ nat \left\{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}\ log\ nat \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}.$$

Nun setze man: $\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x} = z$, so ist

$$y = \frac{1}{2}\ log\ nat\ z$$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z}\cdot\frac{z}{d\,x}.$$

Ferner ist $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$

und $$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - (\sqrt{1+x^2}+x)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)\,(\sqrt{1+x^2}+x) + (\sqrt{1+x^2}+x)\,(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2}-x)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2}-x)^2}$$

Mithin $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2}-x)^2}$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

15) $y = log\,nat\,(e^x + e^{-x})$

Man setze $e^x + e^{-x} = u$,

so ist $y = log\ nat\ u$

und also y eine Function von u, und u eine Function von x, und folglich ist nach § 21

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,u}\cdot\frac{d\,u}{d\,x}.$$

Es ist aber $\frac{d\,y}{d\,u} = \frac{1}{u} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ (§ 27)

und $\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{d\,e^x}{d\,x} + \frac{d\,e^{-x}}{d\,x}$ (§ 4)

$= e^x + e^{-x}\,.\,(-1)$ (§ 25 Zus. 5 und § 26 Zus. 1)

$= e^x - e^{-x}.$

Mithin ist $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,.\,(e^x - e^{-x})$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

16) $y = x - a \; log \; nat \; x + x \,.\, e^x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 1 - \frac{a}{x} + \frac{d\,x\,.\,e^x}{d\,x} \text{ (§ 4 und § 27).}$$

Man setze $x \,.\, e^x = u$, so ist nach § 6 nur § 25 Zus. 5

$$\frac{d\,u}{d\,x} = e^x + x \,.\, e^x\,,$$

$$\text{also } \frac{d\,y}{d\,x} = 1 - \frac{a}{x} + e^x + x \,.\, e^x.$$

17) $y = \dfrac{x^3 - 6\,a^2\,x - \frac{9}{2}\,a^3}{(a+x)^2} - 3\,a \; log \; nat \; (a + x)$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{(a+x)^2\,(3\,x^2 - 6\,a^2) - (x^3 - 6\,a^2\,x - \frac{9}{2}\,a^3)\,.\,2\,(a+x)}{(a+x)^4} - \frac{3\,a}{a+x}$$

$$= \frac{(a+x)\,(3\,x^2 - 6\,a^2) - 2\,(x^3 - 6\,a^2\,x - \frac{9}{2}\,a^3) - 3\,a\,(a+x)^2}{(a+x)^3}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{3\,a\,x^2 + 3\,x^3 - 6\,a^3 - 6\,a^2\,x - 2\,x^3 + 12\,a^2\,x + 9\,a^3 - 3\,a^3 - 6\,a^2\,x - 3\,a\,x^2}{(a+x)^3}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{x^3}{(a+x)^3}$$

$$= \left(\frac{x}{a+x}\right)^3.$$

18) Gegeben sei $y = \sqrt{1 - x^2} \,.\, log \; nat \; x + \sqrt{1 - e^x} \,.\, log \; nat \; x^2$, man soll $\dfrac{d\,y}{d\,x}$ berechnen. Es ist

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \; log \; nat \; x + 2\,(1 - e^x)^{\frac{1}{2}} \; log \; nat \; x.$$

Anwendung von § 4, § 6, § 12, § 27

$$\frac{d\,y}{d\,x} = log \; nat \; x \,.\, \frac{1}{2}\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \,.\, (-2\,x) + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \,.\, \frac{1}{x}$$

$$+ \, 2 \; log \; nat \; x \,.\, \frac{1}{2}\,(1 - e^x)^{-\frac{1}{2}} \,.\, (e^x) + 2\,(1 - e^x)^{\frac{1}{2}} \,.\, \frac{1}{x}$$

$$= \frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} - x\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \; log \; nat \; x$$

$$+ \frac{2\,(1 - e^x)^{\frac{1}{2}}}{x} - e^x \; log \; nat \; x \,.\, (1 - e^x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} - \frac{x \; lag \; nat \; x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{2\,\sqrt{1 - e^x}}{x} - \frac{e^x \; log \; nat \; x}{\sqrt{1 - e^x}}$$

19) $y = \dfrac{1}{2\,\sqrt{a\,c}} \,.\, log \; nat \; \dfrac{\sqrt{a} + x\,\sqrt{c}}{\sqrt{a} - x\,\sqrt{c}}\,.$

Man setze $\dfrac{\sqrt{a} + x\,\sqrt{c}}{\sqrt{a} - x\,\sqrt{c}} = u,$

so ist $y = \dfrac{1}{2\,\sqrt{a\,c}} \,.\, log \; nat \; u.$

Nun ist $\dfrac{d\,y}{d\,x} = \dfrac{d\,y}{d\,u} \,.\, \dfrac{d\,u}{d\,x}$

$$\frac{d\,y}{d\,u} = \frac{1}{2\,\sqrt{a\,c}} \,.\, \frac{1}{u} = \frac{1}{2\,\sqrt{a\,c}} \,.\, \frac{\sqrt{a} - x\,\sqrt{c}}{\sqrt{a} + x\,\sqrt{c}}$$

$$\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{(\sqrt{a} - x\,\sqrt{c})\,\sqrt{c} + (\sqrt{a} + x\,\sqrt{c})\,\sqrt{c}}{(\sqrt{a} - x\,\sqrt{c})^2} = \frac{2\,\sqrt{a\,c}}{(\sqrt{a} - x\,\sqrt{c})^2}$$

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{\sqrt{a} - x\sqrt{c}}{\sqrt{a} + x\sqrt{c}} \cdot \frac{2\sqrt{ac}}{(\sqrt{a} - x\sqrt{c})^2}$$
$$= \frac{1}{a - c\,x^2}.$$

20) $y = (log\ nat\ x)^m$

Man setze $log\ nat\ x = z$,

so ist $y = z^m$

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = \frac{dz^m}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$
$$= m\,z^{m-1}\frac{dz}{dx}.$$

Da nun $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$ ist,

so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{m\,(log\ nat\ x)^{m-1}}{x}$.

21) $y = \left\{log\ nat\ (x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3\right\}^m$.

Man setze $log\ nat\ (x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3) = z$,

$y = z^m$,

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = m\,z^{m-1}\frac{dz}{dx}.$$

Nun ist $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3} \cdot (1 + x + x^2)$,

folglich $\frac{dy}{dx} = m\,\left\{log\ nat\ (x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3)\right\}^{m-1} \cdot \frac{1 + x + x^2}{x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3}$

22) $y = x^m\ (log\ nat\,x)^n$

$$\frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1}(log\ nat\ x)^n + \frac{n\ (log\ nat\ x)^{n-1}}{x} \cdot x^m$$
$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1}\ \{m\ (log\ nat\ x)^n + n\ (log\ nat\ x)^{n-1}\}$$
$$= x^{m-1}\ (log\ nat\ x)^{n-1}\ (m\ log\ nat\ x + n)$$

23) $y = e^{e^x}$.

Man setze $e^x = z$, so ist

$y = e^z$.

Dann ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$\frac{dy}{dz} = e^z$ und $\frac{dz}{dx} = e^x$,

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = e^z \cdot e^x = e^x \cdot e^{e^x}$$
$$= e^{(x + e^x)}.$$

24) $y = e^{e^{\sqrt{1+x}}}$.

Man setze $e^{\sqrt{1+x}} = z$ und $\sqrt{1+x} = u$,

so ist $y = e^z$, $z = e^u$ und $u = (1+x)^{\frac{1}{2}}$,

also y eine Function von z, z eine Function von u und u eine Function von x, mithin ist nach § 21 Zusatz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

$$\text{Nun ist } \frac{dy}{dz} = e^z$$

$$\frac{dz}{du} = e^u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = e^z \cdot e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{e^{\sqrt{1+x}}} \cdot \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1+x}}$$

25) $y = \log nat\, (\log nat\, x)$.

Man setze $\log nat\, x = z$,

so ist $y = \log nat\, z$,

also $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

$$\text{Es ist aber } \frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\log nat\, x}$$

$$\text{und } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\text{folglich } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log nat\, x}.$$

26) $y = \log nat\, \{\log nat\, (\log nat\, x)\}$

Man setze $\log nat\, (\log nat\, x) = u$, $\log nat\, x = z$, also

$u = \log nat\, z$,

so ist $y = \log nat\, u$.

Es ist mithin $y = F(u)$, $u = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

$$\text{Nun ist } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}, \frac{du}{dz} = \frac{1}{z} \text{ und } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Also } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\log nat\, (\log nat\, x)} \cdot \frac{1}{\log nat\, x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x \log nat\, x \,.\, \log nat\, (\log nat\, x)}.$$

27) $y = x^x$, folglich

$$\log nat\, y = x \log nat\, x.$$

$$\text{Mithin } \frac{d \log nat\, y}{dx} = \log nat\, x + x \cdot \frac{d \log nat\, x}{dx}$$

$$\frac{d \log nat\, y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \log nat\, x + 1$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \log nat\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\,(1 + \log nat\, x)$$

$$\frac{d\,x^x}{dx} = x^x\,(1 + \log nat\, x).$$

28) $y = (a + b\,x - c\,x^2)^{\alpha\,x^n + \beta\,x^{n-1} - \gamma\,x^{n-2}}$.

Man setze $a + b\,x - c\,x^2 = f(x)$ und $\alpha\,x^n + \beta\,x^{n-1} - \gamma\,x^{n-2} = \varphi(x)$,

so ist $y = f(x)^{\varphi(x)}$

Nach § 29 ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = (f(x))^{\varphi(x)} \left\{ log\ nat\ f(x) \cdot \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x} \right\}.$$

Es ist aber

$$\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} = \alpha\,n\,x^{n-1} + \beta\,(n-1)\,x^{n-2} - \gamma\,(n-2)\,x^{n-3}$$

und $\frac{d\,f(x)}{d\,x} = b - 2\,c\,x$,

also $$\frac{d\,y}{d\,x} = (a + b\,x - c\,x^2)^{\alpha\,x^n + \beta\,x^{n-1} - \gamma\,x^{n-2}}$$

$$\left\{ log\,nat\,(a + b\,x - c\,x^2)\,[\alpha\,n\,x^{n-1} + \beta\,(n-1)\,x^{n-2} - \gamma\,(n-2)\,x^{n-3}] + \frac{\alpha x^n + \beta\,x^{n-1} - \gamma\,x^{n-2}}{a + b\,x - c\,x^2}\,(b + 2\,c\,x) \right\}$$

29) $y = (\sqrt{1 - x^2})^{\sqrt{1 + x^2}}$

Man setze $\sqrt{1 - x^2} = f(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

und $\sqrt{1 + x^2} = \varphi(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$,

so ist $y = f(x)^{\varphi(x)}$.

Nach § 29 ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f(x)^{\varphi(x)} \left\{ log\ nat\ f(x) \cdot \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x} \right\}.$$

Es ist aber

$$\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}\,(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\,x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

und $$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{2}\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2\,x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

und folglich

$$\frac{d\,y}{d\,x} = (\sqrt{1 - x^2})^{\sqrt{1 + x^2}} \left\{ log\ nat\ \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right\}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,(\sqrt{1 - x^2})^{\sqrt{1 + x^2}} \left\{ log\ nat\ \sqrt{1 - x^2} - \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \right\}.$$

30) $y = a^{b^x}$.

Man setze $b^x = z = f(x)$, so ist $y = a^z$, also

$log\ nat\ y = z\ log\ nat\ a$

und $log\ nat\ z = x\ log\ nat\ b$.

Da y eine Function von z, und z eine Function von x ist, so ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,x} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist aber $\frac{d\ log\ nat\ y}{d\,z} = \frac{d\ log\ nat\ y}{d\,y} \cdot \frac{d\,y}{d\,z} = log\ nat\ a$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{d\,y}{d\,z} = y\ log\ nat\ a$$

$$\frac{d\,y}{d\,z} = y \log nat\, a$$
$$= a^{b^x} \log nat\, a.$$

Ferner ist

$$\frac{d \log nat\, z}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x} = \log nat\, b$$
$$\frac{d\,z}{d\,x} = z \log nat\, b = b^x \log nat\, b$$

und folglich

$$\frac{d\,y}{d\,x} = a^{b^x} \log nat\, a \,.\, b^x \log nat\, b$$
$$= a^{b^x} . b^x \log nat\, a \,.\, \log nat\, b$$

31) $y = F(x)^{f(x)^{\varphi x}}$

Man setze $f(x)^{\varphi(x)} = F(x)$, also

$$y = F(x)^{\mathrm{F}(x)},$$

so ist nach § 29

$$\frac{d\,y}{d\,x} = F(x)^{\mathrm{F}(x)} \left\{\log nat\, F(x) \,.\, \frac{d\,\mathrm{F}(x)}{d\,x} + \frac{\mathrm{F}(x)}{F(x)} \cdot \frac{d\,F(x)}{d\,x}\right\}.$$

Es ist jedoch

$$\frac{d\,F(x)}{d\,x} = f(x)^{\varphi(x)} \left\{\log nat\, f(x) \,.\, \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x}\right\}.$$

Mithin

$$\frac{d\,y}{d\,x} = F(x)^{f(x)^{\varphi(x)}} \left\{\log nat\, F(x) \,.\, f(x)^{\varphi(x)} \left[\log nat\, f(x) \,.\, \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{d f(x)}{d\,x}\right] + \frac{f(x)^{\varphi(x)}}{F(x)} \cdot \frac{d\,F(x)}{d\,x}\right\}$$
$$= F(x)^{f(x)^{\varphi(x)}} \left\{f(x)^{\varphi(x)} \log nat\, F(x) \,.\, \log nat\, f(x) \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + f(x)^{\varphi(x)} \,.\, \frac{\varphi(x)}{f(x)} \log nat\, F(x) \,.\, \frac{d\,f(x)}{d\,x} \right.$$
$$\left. + \frac{f(x)^{\varphi(x)}}{F(x)} \cdot \frac{d\,F(x)}{d\,x}\right\}$$
$$= F(x)^{f(x)^{\varphi(x)}} . f(x)^{\varphi(x)} \left\{\log nat\, F(x) \,.\, \log nat\, f(x) \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x} + \log nat\, F(x) \,.\, \frac{\varphi(x)}{f(x)} \frac{d f(x)}{d\,x} + \frac{1}{F(x)} \cdot \frac{d\,F(x)}{d\,x}\right\}.$$

b. Goniometrische Functionen.

32) $y = \sin x + \operatorname{tang} x$

$$\frac{d\,x}{d\,x} = \cos x + \sec^2 x$$
$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\cos^3 x + 1}{\cos^2 x}.$$

33) $y = \cos x + \sec x$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\sin x + \operatorname{tang} x \,.\, \sec x$$
$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \sin x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$$
$$= \sin x \,.\, \operatorname{tang}^2 x.$$

34) $y = \sin x + \operatorname{cosec} x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \cos g x \, . \, \operatorname{cosec} x$$

$$= \cos x - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, .$$

$$= - \cos x \left\{ \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right\}$$

$$= - \cos x \, . \, \operatorname{cotg}^2 x.$$

35) $y = x - \sin x \, . \, \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$= \sin^2 x + \sin^2 x$$

$$= 2 \sin^2 x.$$

36) $y = \frac{1}{8} (x - \sin x \, . \, \cos x + 2 \sin^3 x \, . \, \cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8} (1 - \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos x \, . \, 3 \sin^2 x \, . \, \cos x - 2 \sin^3 x \, . \, \sin x)$$

$$= \frac{1}{8} (2 \sin^2 x + 6 \sin^2 x \, . \, \cos^2 x - 2 \sin^4 x)$$

$$= \frac{1}{8} (2 \sin^2 x + 6 \sin^2 x \, (1 - \sin^2 x) - 2 \sin^4 x)$$

$$= \frac{1}{8} (8 \sin^2 x - 8 \sin^4 x)$$

$$= \sin^2 x \, (1 - \sin^2 x)$$

$$= \sin^2 x \, . \, \cos^2 x.$$

37) $y = 1 + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tang} x} + \sin 2x$

$$y = 1 + (1 + 2 \operatorname{tang} x)^{\frac{1}{2}} + \sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + 2 \operatorname{tang} x)^{-\frac{1}{2}} \, . \, 2 \sec^2 x + 2 \cos 2x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + 2 \operatorname{tang} x}} + 2 \cos 2x.$$

38) $y = \sin x^{\cos x}$.

Setzt man $\sin x = f(x)$ und $\cos x = \varphi(x)$, so ist

$$y = f(x)^{\varphi(x)}$$

also $\frac{dy}{dx} = f(x)^{\varphi(x)} \left\{ \log nat \, f(x) \, . \, \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \, . \, \frac{df(x)}{dx} \right\}$.

Es ist nun $\frac{d\varphi(x)}{dx} = - \sin x$ und $\frac{df(x)}{dx} = \cos x$, also

$$\frac{dy}{dx} = \sin x^{\cos x} \left\{ \log nat \, (\sin x) \, . \, (- \sin x) + \frac{\cos x}{\sin x} \, . \, \cos x \right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x^{\cos x} \left\{ \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x} \log nat \, (\sin x) \right\}$$

$$= \sin x^{\cos x - 1} \left\{ \cos^2 x - \sin^2 x \log nat \, (\sin x) \right\}.$$

Da nach § 14. XXX der Ebenen Trigonometrie

$$\cos x - 1 = - 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$$

ist, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \, . \, \log nat \, (\sin x)}{\sin x^{2 \sin^2 \frac{1}{2} x}} \, .$$

39) $y = \cos x^{\sin x}$.

Setzt man wieder $\cos x = f(x)$ und $\sin x = \varphi(x)$, so ist

$$y = f(x)^{\varphi(x)}$$

und also

$$\frac{dy}{dx} = f(x)^{\varphi(x)} \left\{ \log nat\, f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \right\}$$

und $\frac{d\varphi(x)}{dx} = \cos x$, $\frac{df(x)}{dx} = -\sin x$.

Mithin

$$\frac{dy}{dx} = \cos x^{\sin x} \left\{ \log nat\, (\cos x) \cdot \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x \right\}$$

$$= \cos x^{\sin x - 1} \left\{ \cos^2 x \cdot \log nat\, (\cos x) - \sin^2 x \right\}.$$

40) $y = \log nat\, (\tang x)$.

Man setze $\tang x = z$, so ist

$$y = \log nat\, z$$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Es ist jedoch

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} \text{ und } \frac{dz}{dx} = \sec^2 x,$$

mithin $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tang x} \cdot \sec^2 x$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{2}{\sin 2x}.$$

41) $y = \log nat \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

Man setze $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = z = f(x) = \frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \sin x)^{\frac{1}{2}}}$, so ist

$$y = \log nat\, z$$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Es ist aber $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x}}$

und $\frac{dz}{dx} = \frac{(1 - \sin x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x - (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 - \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\cos x)}{1 - \sin x}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos x}{1 - \sin x} \left\{ \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x}} + \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} \right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos x}{1 - \sin x} \left\{ \frac{1 - \sin x + 1 + \sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \right\}$$

$$= \frac{1}{1 - \sin x}.$$

Folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x}} \cdot \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}\, \sqrt{1 - \sin x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\cos x}$$
$$= \sec x.$$

42) $y = \log nat \sqrt{\frac{1 - \cos n x}{1 + \cos n x}}.$

Man setze $\sqrt{\frac{1 - \cos n x}{1 + \cos n x}} = z = f(x) = \frac{(1 - \cos n x)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \cos n x)^{\frac{1}{2}}}$, so ist

$$y = \log nat\, z$$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Es ist aber $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{1 + \cos n x}}{\sqrt{1 - \cos n x}}$.

Ferner ist

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{(1 + \cos n x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos n x)^{-\frac{1}{2}}\, n \sin n x + (1 - \cos n x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos n x)^{-\frac{1}{2}} \cdot n \sin n x}{1 + \cos n x}$$

$$= \frac{n \sin n x}{2(1 + \cos n x)} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \cos n x}}{\sqrt{1 - \cos n x}} + \frac{\sqrt{1 - \cos n x}}{\sqrt{1 + \cos n x}} \right\}$$

$$= \frac{n \sin n x}{2(1 + \cos n x)} \left\{ \frac{1 + \cos n x + 1 - \cos n x}{\sqrt{1 - \cos^2 n x}} \right\}$$

$$= \frac{n \sin n x}{2(1 + \cos n x)} \cdot \frac{2}{\sin n x}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{n}{\sin n x}.$$

Zweite Auflösung. $y = \log nat \sqrt{\frac{1 - \cos n x}{1 + \cos n x}}$.

Nach § 14 XXXIII der Ebenen Trigonometrie ist

$$\sqrt{\frac{1 - \cos n x}{1 + \cos n x}} = \tang \frac{1}{2}\, n x,$$

also $y = \log nat (\tang \frac{1}{2}\, n x)$.

Nun setze man $\tang \frac{1}{2}\, n x = z$, so ist

$$y = \log nat\, z;$$

da $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}$

$\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{z}$ und $\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{1}{2}\, n \sec^2 \frac{1}{2}\, n x$

ist, so ist $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\tang \frac{1}{2}\, n x} \cdot \frac{1}{2}\, n \sec^2 \frac{1}{2}\, n x$

$$= \frac{1}{2}\, n \frac{\cos \frac{1}{2}\, n x}{\sin \frac{1}{2}\, n x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\, n x}$$

$$= n \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}\, n x \cdot \cos \frac{1}{2}\, n x}$$

$$= \frac{n}{\sin n x}.$$

43) $y = \log nat \sqrt{\frac{\cos n x - i \sin n x}{\cos n x + i \sin n x}}.$

Erste Auflösung. Man setze $\sqrt{\frac{\cos n x - i \sin n x}{\cos n x + i \sin n x}} = z = \frac{(\cos n x - i \sin n x)^{\frac{1}{2}}}{(\cos n x + i \sin n x)^{\frac{1}{2}}}.$

Dann ist $y = log\ nat\ z = f(z)$ und $z = \varphi(x)$,

mithin $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{\cos nx + i \sin nx}{\cos nx - i \sin nx}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} (\cos nx + i \sin nx)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (\cos nx - i \sin nx)^{-\frac{1}{2}} (-n \sin nx - i n \cos nx) \\ -(\cos nx - i \sin nx)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (\cos nx + i \sin nx)^{-\frac{1}{2}} (-n \sin nx + i n \cos nx) \end{array} \right\} : (\cos nx + i \sin nx)$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} n \frac{\sqrt{\cos nx + i \sin nx}}{\sqrt{\cos nx - i \sin nx}} (\sin nx + i \cos nx) + \frac{1}{2} n \frac{\sqrt{\cos nx - i \sin nx}}{\sqrt{\cos nx + i \sin nx}} (\sin nx - i \cos nx)}{\cos nx + i \sin nx}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} n [(\sin nx + i \cos nx)(\cos nx + i \sin nx) - (\sin nx - i \cos nx)(\cos nx - i \sin nx)]}{(\cos nx + i \sin nx) \sqrt{\cos nx - i \sin nx} \sqrt{\cos nx + i \sin nx}}.$$

Also $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\cos nx + i \sin nx}}{\sqrt{\cos nx - i \sin nx}} \cdot \frac{-\frac{1}{2} n [(\sin nx + i \cos nx)(\cos nx + i \sin nx) - (\sin nx - i \cos nx)(\cos nx - i \sin nx)]}{(\cos nx + i \sin nx) \sqrt{\cos nx - i \sin nx} \sqrt{\cos nx + i \sin nx}}$

$$= -\frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \sin nx . \cos nx + i \cos^2 nx + i \sin^2 nx - \sin nx . \cos nx \\ -(\sin nx . \cos nx - i \cos^2 nx - \sin^2 nx - \sin nx . \cos nx) \end{array} \right] : \cos^2 nx + \sin^2 nx$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} n \{ i (\cos^2 nx + \sin^2 nx + i (\cos^2 nx + \sin^2 nx) \}}{\cos^2 nx + \sin^2 nx}$$

$$= -\frac{1}{2} n (i + i)$$

$$= -ni.$$

Zweite Auflösung. $y = log\ nat \sqrt{\frac{\cos nx - i \sin nx}{\cos nx + i \sin nx}}$

oder $y = log\ nat \sqrt{\frac{1 - i\ tang\ nx}{1 + i\ tang\ nx}}$.

Nun setze man $\sqrt{\frac{1 - i\ tang\ nx}{1 + i\ tang\ nx}} = z = \frac{(1 - i\ tang\ nx)^{\frac{1}{2}}}{(1 + i\ tang\ nx)^{\frac{1}{2}}}$, so ist

$y = log\ nat\ z$

eine Function von z, und z eine Function von x, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Es ist $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{1 + i\ tang\ nx}}{\sqrt{1 - i\ tang\ nx}}$

und $\frac{dz}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} (1 + i\ tang\ nx)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (1 - i\ tang\ nx)^{-\frac{1}{2}} . (-i n \sec^2 nx) \\ -(1 - i\ tang\ nx)^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2} (1 + i\ tang\ nx)^{-\frac{1}{2}} . (+ i n \sec^2 nx) \end{array} \right\} : (1 + i\ tang\ nx)$

$$= \frac{-\frac{1}{2} i n \sec^2 nx}{1 + i\ tang\ nx} \left\{ \frac{\sqrt{1 + i\ tang\ nx}}{\sqrt{1 - i\ tang\ nx}} + \frac{\sqrt{1 - i\ tang\ nx}}{\sqrt{1 + i\ tang\ nx}} \right\}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} i n \sec^2 nx}{1 + i\ tang\ nx} \left\{ \frac{1 + i\ tang\ nx + 1 - i\ tang\ nx}{\sqrt{1 + tang^2 nx}} \right\}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} i n \sec^2 nx}{1 + i\ tang\ nx} \cdot \frac{2}{\sec nx} = -\frac{i n \sec nx}{1 + i\ tang\ nx}.$$

Also $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 + i\ tang\ nx}}{\sqrt{1 - i\ tang\ nx}} \cdot -\frac{i n \sec nx}{1 + i\ tang\ nx}$

$$= -\frac{i n \sec nx}{\sqrt{1 - i\ tang\ nx} \sqrt{1 + i\ tang\ nx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\,i\,n\,sec\,n\,x}{\sqrt{1 + tang^2\,n\,x}}$$
$$= -\,i\,n.$$

Dritte Auflösung. $y = log\ nat \sqrt{\frac{cos\,n\,x - i\,sin\,n\,x}{cos\,n\,x + i\,sin\,n\,x}}$

$y = log\ nat \sqrt{\left(\frac{cos\,x - i\,sin\,x}{cos\,x + i\,sin\,x}\right)^n}$. Ebene Trigonometrie § 25

$$y = \frac{n}{2}\,log\ nat\ \frac{cos\,x - i\,sin\,x}{cos\,x + i\,sin\,x}.$$

Anwendung des § 27 der Ebenen Trigonometrie

$$y = \frac{n}{2}\,log\ nat\ e^{-2ix}$$
$$y = \frac{n}{2}\,.\,-2\,i\,x = -\,n\,i\,x$$

also $\frac{dy}{dx} = -\,n\,i.$

44) $y = Ang\,(sin = 2\,x\sqrt{1 - x^2}).$

Man setze $2\,x\sqrt{1 - x^2} = z$, so ist

$$y = Ang\ (sin = z).$$

Also ist y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,.\,\frac{dz}{dx}.$$

Da $z = 2\,x\sqrt{1 - x^2}$ ist, so ist

$$z^2 = 4\,x^2\,(1 - x^2)$$
$$1 - z^2 = 1 - 4\,x^2 + 4\,x^4$$
$$\sqrt{1 - z^2} = 1 - 2\,x^2.$$

Nach § 34. 1 ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,Ang\,(sin = z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} = 1 - 2\,x^2.$$

Ferner ist

$$\frac{dz}{dx} = 2\sqrt{1 - x^2} + \frac{2\,x\,.\,\frac{1}{2}\,(-2\,x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2\,(1 - x^2) - 2\,x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$= \frac{2\,(1 - 2\,x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - 2\,x^2}\,.\,\frac{2\,(1 - 2\,x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

45) $y = \frac{1}{\sqrt{a\,b}}\,.\,Ang\,\left(tang = x\sqrt{\frac{b}{a}}\right).$

Man setze $x\sqrt{\frac{b}{a}} = z$, so ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{a\,b}}\,.\,Ang\ (tang = z),$$

also y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\,.\,\frac{dz}{dx}.$$

Es ist $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{\sqrt{a\,b}} \cdot \frac{1}{1+z^2}$. (§ 35. 1).

Da $z = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ist, so ist

$$1 + z^2 = 1 + \frac{b\,x^2}{a} = \frac{a + b\,x^2}{a},$$

folglich $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{\sqrt{a\,b}} \cdot \frac{a}{a + b\,x^2}$

und $\frac{d\,z}{d\,x} = \sqrt{\frac{b}{a}}$,

mithin $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a\,b}} \cdot \frac{a}{a + b\,x^2} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{b}}{a\sqrt{b}\,(a + b\,x^2)}$

$$= \frac{1}{a + b\,x^2}.$$

46) $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Ang\left(tang = \frac{2\,x + 1}{\sqrt{3}}\right)$.

Man setze $\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}} = z$, so ist $z^2 = \frac{4\,x^2 + 4\,x + 1}{3}$.

$$1 + z^2 = \frac{4\,x^2 + 4\,x + 4}{3} = \frac{4\,(x^2 + x + 1)}{3}$$

und $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot Ang\,(tang = z)$.

Es ist also y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Nach § 35. 1 ist

$$\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + z^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4\,(x^2 + x + 1)}.$$

und $\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

folglich $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4\,(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

47) $y = Ang\left(cos = \frac{b + a\,cos\,x}{a + b\,cos\,x}\right)$

Man setze $z = \frac{b + a\,cos\,x}{a + b\,cos\,x}$, so ist

$$y = Ang\,(cos = z).$$

Da y eine Function von z, und z eine Function von x ist, so ist

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Nach § 34. 2 ist

$$\frac{d\,y}{d\,z} = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Aus der Bedingungsgleichung für z folgt

$$z^2 = \frac{b^2 + 2\,a\,b\,cos\,x + a^2\,cos^2\,x}{a^2 + 2\,a\,b\,cos\,x + b^2\,cos^2\,x}$$

$$\text{also } 1 - z^2 = \frac{a^2 + 2\,a\,b\cos x + b^2\cos^2 x - b^2 - 2\,a\,b\cos x - a^2\cos^2 x}{(a + b\cos x)^2}$$
$$= \frac{a^2 - b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 x}{(a + b\cos x)^2}$$
$$= \frac{(a^2 - b^2)\,(1 - \cos^2 x)}{(a + b\cos x)^2}$$
$$= \frac{(a^2 - b^2)\sin^2 x}{(a + b\cos x)^2}$$

und mithin

$$\sqrt{1 - z^2} = \frac{\sin x}{a + b\cos x} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{a + b\cos x}{\sin x \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}$$
$$\frac{d\,y}{d\,z} = -\frac{a + b\cos x}{\sin x \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Da $z = \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$ ist, so ist

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{(a + b\cos x)\,(-a \cdot \sin x) - (b + a\cos x)\,(-b\sin x)}{(a + b\cos x)^2}$$
$$= \frac{b\,(b + a\cos x) - a\,(a + b\cos x)}{(a + b\cos x)^2} \cdot \sin x$$
$$= \frac{b^2 + a\,b\cos x - a^2 - a\,b\cos x}{(a + b\cos x)^2} \cdot \sin x$$
$$= \frac{(b^2 - a^2)\sin x}{(a + b\cos x)^2}.$$

$$\text{Folglich } \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{a + b\cos x}{\sin x\,\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{(b^2 - a^2)\sin x}{(a + b\cos x)^2}$$
$$= \frac{-(b^2 - a^2)}{\sqrt{a^2 - b^2}\,(a + b\cos x)}$$
$$= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}\,(a + b\cos x)}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}.$$

48) $y = 2\sqrt{a^2 - b^2} \cdot Ang\left(tang = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \cdot tang\,\frac{x}{2}\right).$

Man setze $\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \cdot tang\,\frac{x}{2} = z$, dann ist

$$y = 2\sqrt{a^2 - b^2} \cdot Ang\,(tang = z),$$

also y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Nach § 35. 1 ist

$$\frac{d\,y}{d\,z} = 2\sqrt{x^2 - b^2} \cdot \frac{1}{1 + z^2}$$

und aus der Bedingungsgleichung für z folgt

$$1 + z^2 = 1 + \frac{a - b}{a + b} \cdot tang^2\,\frac{x}{2}$$
$$= \frac{(a + b) + (a - b)\,tang^2\,\frac{x}{2}}{a + b}$$

Ferner ist

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{cos^2\,\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \text{ (§ 31 Zusatz 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{a-b}}{2\,cos^2\,\frac{x}{2}\,\sqrt{a+b}}.$$

Mithin ist

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{2\,\sqrt{a^2-b^2}\,(a+b)}{(a+b)+(a-b)\,tang\,\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sqrt{a-b}}{2\,cos^2\,\frac{x}{2}\,\sqrt{a+b}}$$

$$= \frac{2\,\sqrt{a+b}\,\sqrt{a-b}\,(a+b)\,\sqrt{a-b}}{2\,cos^2\,\frac{x}{2}\,\sqrt{a+b}\left\{(a+b)+(a-b)\,tang^2\,\frac{x}{2}\right\}}$$

$$= \frac{(a+b)\,(a-b)}{(a+b)\,cos^2\,\frac{x}{2} + (a-b)\,\dfrac{sin^2\,\frac{x}{2}}{cos^2\,\frac{x}{2}} \cdot cos^2\,\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a\,cos^2\,\frac{x}{2} + b\,cos^2\,\frac{x}{2} + a\,sin^2\,\frac{x}{2} - b\,sin^2\,\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a\left(cos^2\frac{x}{x} + sin^2\,\frac{x}{2}\right) + b\left(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\,\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a+b\,cos\,x}.$$

49) $$y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot Ang\left(tang = \frac{sin\,x\,\sqrt{a^2-b^2}}{b+a\,cos\,x}\right).$$

Man setze $z = \dfrac{sin\,x\,\sqrt{a^2-b^2}}{b+a\,cos\,x}$, so ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot Ang\,(tang = z),$$

also y eine Function von z, und z eine Function von x, mithin

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z} \cdot \frac{d\,z}{d\,x}.$$

Nun ist $\dfrac{d\,y}{d\,z} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \dfrac{1}{1+z^2}$ (§ 35. 1)

Aus der Bedingungsgleichung für z folgt

$$z^2 = \frac{sin^2\,x\,(a^2-b^2)}{(b+a\,cos\,x)^2}$$

$$1+z^2 = \frac{b^2+2\,a\,b\,cos\,x + a^2\,cos^2\,x + a^2\,sin^2\,x - b^2\,sin^2\,x}{(b+a\,cos\,x)^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2+2\,a\,b\,cos\,x - b^2\,sin^2\,x}{(b+a\,cos\,x)^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2\,(1-sin^2\,x) + 2\,a\,b\,cos\,x}{(b+a\,cos\,x)^2}$$

$$= \frac{a^2+2\,a\,b\,cos\,x + b^2\,cos^2\,x}{(b+a\,cos\,x)^2}$$

$$= \frac{(a+b\,cos\,x)^2}{(b+a\,cos\,x)^2}.$$

Folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{(b + a\cos x)^2}{(a + b\cos x)^2}$.

Ferner ist $\frac{dz}{dx} = \frac{(b + a\cos x)\cos x\sqrt{a^2 - b^2} + \sin x\sqrt{a^2 - b^2} \,.\, a\sin x}{(b + a\cos x)^2}$

$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,\{b\cos x + a\cos^2 x + a\sin^2 x\}}{(b + a\cos x)^2}$

$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,(b\cos x + a)}{(b + a\cos x)^2}$.

Also $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{(b + a\cos x)^2}{(a + b\cos x)^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,(b\cos x + a)}{(b + a\cos x)^2}$

$= \frac{1}{a + b\cos x}$.

50) $y = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \log nat\, \frac{\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$.

Man setze $z = \frac{\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$, so ist

$y = \frac{1}{\cos\alpha} \,.\, \log nat\, z.$

Da y eine Function von z, und z eine Function von x ist, so ist

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$.

Es ist $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)}$

und $\frac{dz}{dx} = \frac{\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$

$= \frac{\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\right\}}{\cos^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$.

Anwendung von § 17. IV. der Ebenen Trigonometrie

$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x+\alpha}{2} - \frac{x-\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\cos\alpha}{\cos^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$.

Folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2}\cos x}{\cos^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$

$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$.

Anwendung von § 17. VI der Ebenen Trigonometrie

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x + \sin\alpha}$.

Jahresbericht

über das Schuljahr von Ostern 1865 bis Ostern 1866.

A. Lehrverfassung.

I. Prima.

Ordinarius: Der Director.

Latein. 8 St. Cic. in Verrem. Act. II lib. IV u. Orator. (das letztere meist privatim). Tac Annal. III u. IV bis Cap. 10, 3 St. Hor. Od. IV. Epod. Sat. I. 3. 5. II. 1. de arte poëtica. 2 St. Exerc. und Extemp. Aufsätze [1]). Mündliche Uebungen und Controlle der Privatlectüre. 3 St. — Der Director.

Griechisch. 6 St. Demosth. orat. pro corona. Homeri. Ilias. XIII—XVI (XV privatim). Thucyd. lib. II. Soph. Ajax. Syntax nebst Uebersetzen der betreffenden Stücke in Böhme's Uebungsbuch. — Exercitien und Extemporalien. Oberlehrer Dr. Botzon.

Deutsch. 3 St. Geschichte der deutschen Literatur von Opitz bis zur Jugendzeit Göthe's. — Die Grundbegriffe der Aesthetik. Logik. Freie Vorträge. Dispositionsübungen und Aufsätze [2]). — Dr. Gerss.

[1]) Themata. 1. Quid sit futurum cras, fuge quaerere. 2. Versate diu quid ferre recusent, quid valeant humeri. 3. Croesi et Solonis colloquium. 4. Quaeritur quibus temporibus Athenienses maxime admirabiles fuerint. 5. Quae potissimum differentiae in Atheniensibus et Lacedaemoniis fuerint. 6. De pugna apud Zamam commissa. 7. De vita Taciti. 8. Potest ex casa vir magnus exire. 9. Quae munia regum heroicis temporibus fuerint. 10. Quaeritur utrum in bello contra Persos gesto et in bello Peloponnesiaco Athenienses an Lacedemonii majore admiratione digni fuerint. 11. Qui viri apud Graecos et Romanos eo pervenerunt, ut non minus libris a se scriptis quam rebus bene gestis floruerint. 12. Argumentum nonnullarum Sophoclis, Racinii, Goethii tragoediarum. (Meistens wurden mehrere Themata zur Wahl gestellt.)

[2]) 1. Sperat infestis metuit secundis alteram sortem bene praeparatum pectus. 2. Ueber die Gründe der Todesfurcht. 3. Sollen dich die Dohlen nicht umschrein, Musst du nicht Knopf auf dem Kirchthurme sein. 4. Charakteristik Nathan des Weisen oder die vier christlichen Charaktere aus Lessings Nathan dem Weisen. 5. Was ist von dem Ausspruch zu halten: Nun schau, der Geist nicht vorwärts, nicht zurück — die Gegenwart sei unser Glück? 6. Welcher Unterschied ist zwischen den Völkern des klassischen Alterthums und den modernen Culturvölkern in Religion, Kunst und Wissenschaft? 7. In wiefern können die Dichter Lehrer der Menschheit genannt werden?

Französisch. 2 St. De l'Allemagne par Me. de Staël. Exerc. Extemp. und mündliche Uebungen. — Der Director.

Hebräisch. 2 St. Die unregelmässigen Verba und das Nothwendigste aus der Syntax. Lectüre in Gesenius Lesebuch S. 21—66, 89—100. — Prof. Doerk.

Religion. 2 St. Lectüre des Evangeliums Johannis. Kirchengeschichte bis zur Reformation. — Dr. Steinwender.

Mathematik. 4 St. Von den Cubikzahlen und Cubikwurzeln, den Potenzen mit Bruchexponenten, den Reihen höherer Grade. Logarithmen, Permutationen, Combinationen und Variationen. Binomischer Lehrsatz. Gleichungen des zweiten und dritten Grades. — Repetition und Erweiterung der Trigonometrie. Stereometrie. Vierwöchentliche Arbeiten, bestehend in Aufgaben aus allen Gebieten der Mathematik und Extemporalien. — Prof. Doerk.

Physik. 2 St. Akustik. Optik. Lehre von der Wärme. — v. Lühmann.

Geschichte und Geographie. 3 St. Neuere Geschichte bis 1789. Gesammtrepetition der alten, mittleren und neueren Geschichte. Geographie von Europa. — Dr. Eckerdt.

II. Secunda.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Botzon.

Latein. 10 St. Cicero de senect. pro Murena. Liv. lib. XXII und XXVII. 4 St. — Virg. Aen. II, III, IV und VI. 2 St. Repetition der gesammten Grammatik und Stilübungen, wöchentlich eine Stunde Extemporalien und mündliches Uebersetzen aus Süpfle. Alle 14 Tage ein Exercitium, in Ober-Secunda 4 Aufsätze[1]), zusammen 4 St. — Dr. Braut.

Griechisch. 6 St. Xenoph. Hellen. lib. IV. Herodot lib. VI. 2 St. — Casuslehre und Präpositionen nebst Einübung der betreffenden Stücke in Boehme's Lesebuch. Extemporalien und alle 14 Tage ein Exercitium. 2 St. Oberl. Dr. Botzon. — Homeri Odyss. XI, XII, XIII. Ilias I—III. privatim. Odyss. XXIII u. XXIV. Ilias XIII. — 2 St. — Der Director.

Deutsch. 2 St. Schiller's Wilhelm Tell. Jungfrau von Orleans. Maria Stuart. Dispositionslehre und mündliche Vorträge. Vierwöchentlich ein Aufsatz[2]). Im Sommer Dr. Eckerdt, im Winter Oberlehrer Reichau.

Französisch. Dumas Voyage en Orient. Uebersetzungen aus Fränkels Uebungsbuch. Extemporalien und alle 14 Tage ein Exercitium. — Oberl. Dr. Botzon.

Hebräisch. 2 St. Elementargrammatik bis zum regelmässigen Verbum incl. Lectüre in Gesenius Lesebuch. S. 1—18. — Prof. Doerk.

[1]) 1. Thrasybulus quomodo in libertatem vindicaverit Athenienses. 2. Epaminondas quam bene de civibus suis meruerit. 3. Quae sint Solonis in patriam suam merita. 4. Honos alit artes omnesque incenduntur ad studia gloria jacentque ea semper quae apud quosque improbantur.

[2]) 1. Ueber die Heiligkeit des Eides bei den Alten. 2. In deiner Brust sind deines Schicksals Sterne. 3. Die ersten Entschliessungen sind nicht immer die klügsten, aber gewöhnlich die redlichsten. 4. Ueber die Persönlichkeit des Freiherrn v. Attinghausen und des Rudenz (nach Schillers Tell). 5. Charakter Leicesters (nach Schiller). 6. Des Menschen Engel ist die Zeit. 7. Hoffnungen und Blüthen (Vergleich). 8. Bis dat qui cito dat. 9. Ueber die Frauen in Schillers Tell. 10. Charakteristik Elisabeths. 11. Hilf dir selbst, so hilft dir Gott. 12. Welcher Wunsch ist vernünftiger, die Zukunft zu wissen oder die Vergangenheit? 13. Welches sind die Bande, die uns an das Vaterland knüpfen? 14. Welche Annehmlichkeiten und Vortheile haben die Bewohner des Küstenlandes von der Nähe des Meeres? 15. Der Strom ein Bild des Lebens. 16. Was gehört dazu, um mit Vortheil zu reisen? (Meistens waren mehre Themata zur Auswahl gestellt.)

Religion. 2 St. Lectüre des Evangeliums Lucae. Einleitung in die Bücher des alten Testaments nebst Repetition der Geschichte des Volkes Israel. — Dr. Steinwender.

Mathematik. 4 St. Potenzen. Quadratzahlen und Quadratwurzeln. Verhältnisse und Proportionen. Arithmetische wie geometrische Reihen und Logarithmen. Gleichungen des ersten und zweiten Grades. — Von der Aehnlichkeit und vom Kreise. Trigonometrie. Alle 4 Wochen eine Arbeit, enthaltend Aufgaben aus der Planimetrie. Trigonometrie. Arithmetik und Algebra. — Extemporalien. — Prof. Doerk.

Physik. 1 St. Magnetismus, Electricität und Galvanismus. — Oberl. Lastig.

Geschichte und Geographie. 3 St. Römische Geschichte bis auf Augustus. Repetition der früheren Pensa. Geographische Repetitionen. — Dr. Eckerdt.

III. Ober-Tertia.

Ordinarius: Dr. Eckerdt.

Latein. 10 St. Curt. lib. III u. IV, V privatim. Caes. bellum civile. lib. I. 3 St. Ovid. Metamorph. lib. V, VI und VII mit Auswahl, verbunden mit metrischen Uebungen. 2 St. Repetition und Absolvirung der gesammten Grammatik nach Moiszisstzig. Schultz Uebungsbuch mündlich, zum Theil auch schriftlich. Exercitien und Extemporalien. 4 St. Von diesen gab im Sommer 2 St. mit Unter-Tertia combinirt der Director, die übrigen und im Winter alle 10 Stunden Dr. Braut.

Griechisch. 6 St. Arrian. Expedit. Alex. lib. II und III. 2 St. Repetition des Cursus der früheren Klassen. Verba anomala. Aus der Syntax die Hauptregeln über Artikel und Pronomina. Exercitien und Extemporalien. 2 St. — Dr. Eckert. — Homeri Odyss. lib. VII, VIII, IX. 2 St. Im Sommer Dr. Eckerdt, im Winter der Director.

Deutsch. 2 St. Die Dichtungsarten wurden durchgenommen, an Beispielen erläutert und einzelne Stücke aus Hannsen's prosaischen Musterstücken gelesen. Vierwöchentlich ein Aufsatz. Dr. Eckerdt.

Fransösisch. 2 St. Biard Voyage au Brésil. Grammatik nach Ploetz. Wöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale. — Dr. Eckerdt.

Religion. 2 St. Erklärung der 5 Hauptstücke des lutherischen Katechismus und der bezüglichen Schriftstellen. Sprüche. Lieder. — Dr. Steinwender.

Mathematik. 3 St. Repetition des Cursus der Unter-Tertia. — Von der Congruenz der Dreiecke und der Polygone. Von der Gleichheit und vom Flächeninhalte der Figuren. Alle 4 Wochen eine Arbeit, enthaltend planimetrische, arithmethische und algebraische Aufgaben. Extemporalien. — Prof. Doerk.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer combinirt mit Unter-Tertia Botanik. Im Winter allein Mineralogie. — v. Lühmann.

Geschichte u. Geographie. 3 St. Repetition der ganzen Geschichte. Preuss. Geschichte. Ausführliche Geographie von Deutschland. Die Ostsee und ihre Küstenländer. — Dr. Eckerdt.

IV. Unter-Tertia.

Ordinarius: Dr. Gerss.

Latein. 10 St. Caes. de bello. Gallico lib. VI, VII, I. 4 St. Ovid. Metamorph. lib. III, IV, V, VII mit Auswahl nebst den Anfangsgründen der Metrik. 2 St. Lehre von den Temporibus und Modis, von den Eigenthümlichkeiten im Gebrauch der Adject., Pron. und Praeposit. Uebersetzen aus dem Uebungsbuch von Schulz. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. 4 St. Von diesen im Sommer 2 St. mit Ober-Tertia combinirt der Director, die übrigen 8 und im Winter alle 10 St. — Dr. Gerss.

Griechisch. 6 St. Im Sommer: Spiess Uebungsbuch; im Winter Xen. Anab. lib. I. — Verba auf μι und die anomala sowie Repetition der gesammten Formenlehre. Alle 14 Tage ein Exercitium, gelegentlich Extemporalien. — Oberl. Dr. Botzon.

Deutsch. 2 St. Erklärung und Einübung Schillerscher Gedichte. Alle 4 Wochen ein Aufsatz. — Dr. Gerss.

Französisch. 2 St. Lectüre in Plötz Lesebuch. Bildung des Pluriel. Adj., Adverb., Zahlwörter, Pronom, Unregelmässige Verba. Alle 14 Tage ein Exercitium. — Dr. Gerss.

Religion. 2 St. Im Sommer combinirt mit Ober-Tertia. — Dr. Steinwender. Im Winter: Wiederholung des Katechismus, Erklärung des 2. und 3. Hauptstücks. Das Kirchenjahr. Sprüche und Lieder. — Oberl. Lastig.

Mathematik. 3 St. Die 4 einfachen Rechnungsverbindungen in ganzen Zahlen und Brüchen. Potenzen mit ganzen Exponenten; von den dekadischen Zahlen im Allgemeinen und den Dezimalbrüchen insbesondere. Quadratwurzeln. Gleichungen des 1. und 2. Grades mit einer und mehren gesuchten Grössen. Alle 4 Wochen Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Extemporalien. — Prof. Dörk.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer combinirt mit Ober-Tertia Botanik, im Winter Mineralogie. — v. Lühmann.

Geschichte und Geographie. Im Sommer combinirt mit Ober-Tertia. Preussische Geschichte und Geographie von Deutschland. Im Winter Deutsche Geschichte bis 1648. Geographie von Süd- und Westeuropa. — Dr. Eckerdt.

V. Quarta.

Ordinarius: Oberlehrer Lastig.

Latein. 10 St. Corn. Nepos I—VI, VIII, IX, XXIII. 4 St. Repetition des etymologischen Theils der Grammatik. Casuslehre. Uebersetzen aus dem Uebungsbuche von Schulz. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. 6 St. — Oberl. Lastig.

Griechisch. 6 St. Elementargrammatik bis zu den Verb. liquid. incl. Uebersetzen aus dem Uebungsbuch von Spiess. Alle 14 Tage ein Exercitium. — Dr. Gerss.

Deutsch. 2 St. Satzlehre. Uebungen im Declamiren und Erzählen. Alle 14 Tage ein Aufsatz. Oberl. Reichau.

Französisch. 2 St. Das regelmässige Verb. und Pron. Unregelmässige Verba nach Plötz 2. Cursus. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. — Oberlehrer Reichau.

Religion. 2 St. Kurze Erklärung der 3 ersten Hauptstücke. Erlernung des 4. und 5. Hauptstücks; das Kirchenjahr. Das Leben des Herrn nach Lucas. Sprüche und Lieder. — Oberl. Lastig.

Mathematik. 3 St. Im Sommer: Planimetrie nach Doerks Lehrbuch § 1—40. — Oberlehrer Lastig. Im Winter: Prof. Doerk.

Geschichte und Geographie. 3 St. Griechische und Römische Geschichte nach Cauer's Tabellen. Geographie der aussereuropäischen Erdtheile. Kartenzeichnen. — Oberl. Reichau.

Zeichnen. 2 St. Uebungen nach Vorbildern mit Anfängen der Schattenrisse und Umrisse nach Körpern in Holz. — Naudieth.

VI. Quinta.

Ordinarius: Dr. Steinwender.

Latein. 9 St. Wiederholung und Erweiterung des Pensums von Sexta bis zum Abschluss der Formenlehre. Acc. c. Inf. und Abl. absol. und Einzelnes aus der Syntax. Uebungen im Uebersetzen aus dem Uebungsbuche von Spiess Theil II. Wöchentlich ein Exercitium und ein Extemporale. — Dr. Steinwender.

Deutsch. 3 St. Aufsätze. Lese-, Declamations- und Erzählungsübungen. — Dr. Steinwender.

Französisch. 3 St. Elementargrammatik bis zum regelmässigen Verbum incl. nach Plötz, Th. I. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. — Oberl. Reichau.

Religion. 3 St. Geschichten des alten und neuen Testaments nach den Calwer bibl. Geschichten mit Memoriren der hauptsächlichsten Jahreszahlen. Geographie von Palästina. Sprüche, Lieder und die drei ersten Hauptstücke wurden erlernt. — Dr. Steinwender.

Rechnen. 3 St. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri und die sich anschliessenden Rechnungen des bürgerlichen Lebens. — Look.

Geographie. 2 St. Asien, Africa, America und Europa. Kartenzeichnen. Im Sommer: Cantor Grabowski, im Winter: Oberlehrer Reichau.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer: Anfangsgründe der Botanik, aus der Betrachtung einzelner Pflanzen entwickelt. — v. Lühmann. — Im Winter: Cantor Grabowski.

Schreiben. 3 St. Nach Lesshaft's Vorlegeheften. — Look.

Zeichnen. 2 St. Uebungen nach Wandtafeln und geometrisches Zeichnen mit Zirkel und Lineal. — Naudieth.

Singen. 1 St. Combinirt mit Sexta. Die musikalischen Vorbegriffe und Vorübungen, Choräle und zweistimmige Lieder. — Cantor Grabowski.

VII. Sexta.

Ordinarius: v. Lühmann.

Latein. 2 St. Elementargrammatik, namentlich Declination und Conjugation bis zum Deponens. Lectüre in Spiess Uebungsbuch. 3 schriftliche Arbeiten wöchentlich, ausserdem Extemporalien. — v. Lühmann.

Deutsch. 3 St. Wiederholung der Anfangsgründe der Grammatik nebst schriftlichen und mündlichen Uebungen. — v. Lühmann.

Religion. 3 St. Ausgewählte Geschichten des alten und des neuen Testaments. — Die 3 ersten Hauptstücke wurden gelernt. Sprüche und Lieder. — Dr. Steinwender.

Rechnen. 3 St. Bruchrechnung. Einfache Beispiele nach der Regeldetri. — Look.

Geographie. 2 St. Topographische Uebersicht der 5 Erdtheile. — Oberl. Reichau.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer: Anfangsgründe der Botanik. Im Winter: Aus der Zoologie die Säugethiere und Vögel. — v. Lühmann.

Schreiben. 3 St. Nach Lesshaft's Vorlegeheften. — Look.

Zeichnen. 2 St. Die ersten Anfänge des Zeichnens nach der Wandtafel. — Naudieth.

Singen. 1 St. Combinirt mit Quinta. — Cantor Grabowski.

VIII. Erste Vorbereitungsklasse (Septima).

Ordinarius: Lehrer Look.

Religion. 3 St. Combinirt mit Octava. Ausgewählte bibl. Geschichten. Erlernung des Katechismus ohne die lutherische Erklärung, sowie einiger Lieder. — Lehrer Semrau.

Deutsch. 11 St. Grammatik nach Bohm und Steinert. Kenntniss der Wörterklassen: Geschlechtswort, Hauptwort, Eigenschaftswort, Zahlwort, Fürwort, Verhältnisswort und Zeitwort. Uebungen im Satzbilden mit diesen Redetheilen. Die wichtigsten Regeln der Orthographie wurden an Beispielen geübt; auch mussten die Schüler wöchentlich ein gewisses Pensum abschreiben, das nachher in der Klasse durchgenommen wurde. Dictirübungen. Lesen im Kinderfreund. Uebungen in schriftlicher Darstellung des Erzählten. 10 St. — Look. 1 St. Uebungen im mündlichen Erzählen. — Semrau.

Geographie. 2 St. Europa. — Semrau.

Rechnen. 5 St. Die 4 Species in unbenannten ganzen Zahlen, dann dieselben mit einfach und mehrfach benannten Zahlen. — Look.

Schreiben. 3 St. Nach Lesshaft's Vorlegeheften. — Look.

Singen. 3 St. Combinirt mit Octava. Choräle und leichte Volkslieder. — Semrau.

IX. Zweite Vorbereitungsklasse (Octava).

Ordinarius: Lehrer Semrau (in Vertretung des Lehrers Post).

Religion. 3 St. Combinirt mit Septima.

Deutsch. 7 St. Schreibleseunterricht. Anschauungsunterricht nach Wandbildern. — Semrau.

Rechnen. 6 St. Uebungen im Zahlenkreise von 1—100. — Semrau.

Schreiben. 6 St. — Semrau.

Singen. 3 St. Combinirt mit Septima.

Ausserdem ertheilte Lehrstunden.

1. **Katholischer Religionsunterricht.** — Caplan Conradt.
   a) Prima und Secunda 2 St. Die allgemeine Sittenlehre. Kirchengeschichte von Carl dem Grossen bis auf die Zeit der Reformation nach Siemers. Einige Kapitel des Römerbriefs wurden im Griechischen Texte gelesen und erklärt.
   b) Ober- und Unter-Tertia. 1 St. Die Lehre von den Sacramenten mit besonderer ausführlicher Erklärung des heiligen Messopfers. — In der Kirchengeschichte: Vom Mönchthum.
   c) Quarta, Quinta, Sexta (bis Michaeli auch Septima. 1 St.) Von den 7 Sacramenten nach dem Diöcesan-Katechismus von Deharbe No. 2. Biblische Geschichten im alten Testament von der Gesetzgebung auf Sinai bis auf David, im Neuen Testament vom Anfange bis zum Einzuge Jesu in Jerusalem.
2. **Englisch.** (Die Theilnahme ist nur für diejenigen Schüler verbindlich, welche vom Griechischen dispensirt sind.)
   a) Prima und Secunda. 2 St. Fortsetzung der Lectüre von Macaulay. History of England. Shakespeare's Richard II. — Grammatische Repetitionen. — Dr. Eckerdt.
   b) Ober- und Unter-Tertia. 2 St. Formenlehre mit schriftl. und mündl. Uebungen nach Fölsing. — Lectüre. Christmas Carol of Ch. Dickens. — Dr. Braut.

3. **Naturkunde.** 4 St. (Nur im Sommer und für die vom Griechischen dispensirten Schüler.) Erklärung verschiedener Naturerscheinungen. — Die wichtigsten Apparate und Erfindungen. — Oberl. Lastig.
Mathematik. 4 St. (Nur im Winter und für dieselben.) Praktisches Rechnen. Decimalbrüche. Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzeln. — Oberl. Lastig.
Zeichnen. 2 St. (Für dieselben.) Zeichnen nach Vorbildern u. Modellen in Gips. — Naudieth.
4. **Zeichnen.** — Naudieth.
   a) Prima und Secunda. (Mit freiwilliger Betheiligung.) 1 St. Zeichnen nach Vorbildern und Modellen in Gips mit Erklärung der Perspective.
   b) Ober- und Unter-Tertia. (Desgleichen freiwillig.) 2 St. Zeichnen nach Vorbildern und Ornamenten in Gips.
5. **Singen.** — Cantor Grabowski.
   a) Chorgesang (Prima bis Unter-Tertia). 1 St. Choräle. Liturgische Chöre. Volkslieder. Motetten. Cantaten und Chöre aus Oratorien.
   b) Ober-Tertia bis Quarta. 1 St. Choräle und dreistimmige Lieder.
6. **Turnen.** — Oberl. Dr. Botzon.
   Frei- und Rüstübungen an 2 Nachmittagen im Sommer.

Abiturienten Prüfungs-Themata im Lateinischen, im Deutschen und der Mathematik.

Im Lateinischen: Virtutem in adversa fortuna enitere maxime et argumentis probetur et exemplis illustretur.

Im Deutschen: Mit welchem Rechte haben die Alten die Mässigung für eine der höchsten Tugenden gehalten und wie haben sie dieselbe in Kunst und Leben geübt?

In der Mathematik: 1. Es sollen zwei Zahlen gesucht werden, welche so beschaffen sind, dass deren Produkt $a = 182736$ beträgt und dass sich die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen zum Cubus der Differenz derselben wie $b = 6769 : 1$ verhält. Die Aufgabe ist zunächst in allgemeinen und dann in bestimmten Zahlen zu berechnen.

2. Es ist ein Quadrat und eine gerade Linie gegeben, man soll ein Rechteck construiren, dessen Flächeninhalt gleich dem gegebenen Quadrate und dessen Diagonale gleich der gegebenen Linie ist.

3. In einem Dreiecke ABC trifft eine von A aus gezogene gerade Linie die Seite BC in dem Punkte D so, dass sich $BD : DC = 2 : 3$ verhält; $\angle BAD = \alpha = 17^0\ 12'$ und $\angle CAD = \beta = 26^0\ 4'$ sind gegeben. Wie gross sind die Winkel des Dreiecks?

4. Zwei Kugeln würden, wenn man ihre Volumina vereinigte, einen Cylinder bilden, dessen Höhe so gross wäre als die Summe der Kugelradien, während der Radius seines Grundflächenkreises a Fuss lang wäre. Wenn man aber die kleinere Kugel von der grösseren wegnähme, so würde das übrig gebliebene Volumen noch einen Cylinder ausfüllen, dessen Grundflächen 6 Fuss lang, und dessen Höhe gleich der Differenz der beiden Kugelradien wäre. Wie gross sind die beiden Kugelradien?

B. Aus den Verfügungen der Behörden.

1. Vom 21. März 1865. Das Unterrichts-Ministerium verfügt, dass die Religionslehrer der Prima, welche reglementsmässig Mitglieder der Prüfungs-Commission sind, sich der Abstim-

mung zu enthalten haben, wenn es sich um einen Schüler handelt, der an ihrem Unterrichte nicht theilnimmt.

2. Vom 3. Mai 1865. Das Prov.-Schul-Colleg. fordert den Director auf für die Besetzung einer Beneficiatenstelle im Alumnat des Joachimsthalschen Gymnasiums in Berlin eine Präsentation zu machen.

3. Vom 4. Mai 1865. Genehmigung des Lectionsplans für 1865/66.

4. Vom 15. Mai 1865. Die Ferienverfügung vom 12. December 1865 wird für dies Jahr zurückgenommen.

5. Vom 13. Juli 1865. Das Prov.-Schul-Colleg. übersendet einen Ministerialerlass betr. die Ausbildung von Lehrern für den Turnunterricht.

6. Vom 5. August 1865. Die vollständige Theilung der Tertia wird genehmigt.

7. Vom 24. October 1865. Der Magistrat bewilligt pro Semester 132 Thlr. für die durch die vollständige Theilung der Tertia nothwendig gewordenen neuen Lehrstunden.

8. Vom 28. October 1865. Anweisung des Unterrichts-Ministeriums, wie in Zukunft Zeugnisse zum Zwecke des einjährigen Militärdienstes und Abgangszeugnisse überhaupt auszustellen sind.

9. Vom 28. November 1865. Das Prov.-Schul-Colleg. zeigt an, dass die beiden vacanten Stipendien an den Primaner Reichau und den Sekundaner Flater verliehen sind.

10. Vom 10. Januar 1866. Das Prov.-Schul-Colleg. übersendet 2 Exemplare der Verhandlungen der in diesem Jahre abgehaltenen Directoren-Conferenz.

C. Chronik der Anstalt.

Das Gymnasium hat am Anfange der Anstalt wesentliche Veränderungen in Beziehung auf das Lehrerpersonal erfahren. Zunächst schied Herr Director Dr. *Breiter* aus, der die Anstalt seit Michaelis 1860 geleitet hatte, um das Directorat des Königl. Gymnasiums in Marienwerder zu übernehmen. Welche Verdienste er sich durch seine hier entwickelte Thätigkeit erworben hat, ist allen denen bekannt, die sich für das Gedeihen des Gymnasiums interessirt oder mit demselben in irgend einer Verbindung gestanden haben. Gleichzeitig verliess auch Herr Dr. *Hoburg* die Anstalt, der er seit einem Jahre seine Kräfte gewidmet hatte, um zunächst eine wissenschaftliche Reise nach England und Frankreich anzutreten. Zum Director hatte schon am 30. December 1864 das Patronat den Unterzeichneten gewählt und diese Wahl wurde durch Allerhöchste Kabinetsordre vom 27. März 1865 bestätigt. In Beziehung auf seine früheren Lebensverhältnisse erlaubt sich derselbe auf das Danziger Jubiläumsprogramm von 1858 zu verweisen. Da aber für das neue Schuljahr eine Trennung der beiden Abtheilungen der Tertia bereits vorbereitet war, so wurde für das Patronat die Berufung von noch zwei neuen Lehrern nothwendig. Die Wahl fiel auf Herrn Dr. *Steinwender* und Herrn *v. Lühmann*. Der erste, geboren am 12. December 1841, auf dem Gymnasium zu Elbing sowie der Universität zu Königsberg vorgebildet, war später auf dem Prediger-Seminar zu Wittenberg. Nachdem er bereits früher die beiden theologischen Examina absolvirt hatte, erwarb er während seines hiesigen Aufenthalts den philosophischen Doctorgrad durch eine Dissertation „de imputatione peccati Adamitici“ und legte in Königsberg das Examen pro facultate docendi ab. Seine hiesige Thätigkeit bezog sich vorzugsweise auf den Religionsunterricht in den oberen und unteren Klassen sowie auf das Ordinariat und den damit verbundenen Sprachunterricht in Quinta. Leider hat indessen sein erfolgreiches und aller Anerkennung würdiges Wirken für unsere Anstalt schon jetzt ein Ende, da er auf Ostern als Divisionsprediger nach Posen berufen ist. — Der zweite, geboren am 18. Februar 1841 hat, nachdem er das Gymnasium zu Stralsund, sowie die Universitäten zu Greifswalde, Heidelberg und Berlin besucht, im November 1865 das Examen pro fac. docendi gemacht und ist seit dem 15. Mai an unserer Anstalt vorzugsweise für physikalischen und naturhistorischen Unterricht, sowie als Ordinarius der Sexta thätig gewesen. — Auch für die Stelle des, wie bereits im vorjährigen Programme angegeben wurde, erkrankten Lehrers *Post* war das ganze Jahr hindurch eine Vertretung nothwendig und leider sehen wir seiner Genesung noch immer vergeblich entgegen. Seine Stellvertreter waren die Zöglinge des Königl. Seminar's hieselbst *Böge, Reinberger, Wenrich, Podgurske*, seit Januar c. und für die Folgezeit ist es der Lehrer *Semrau.*

Das Schuljahr begann am 20. April, am 24. erfolgte die Einführung des Directors durch den Provinzial-Schulrath Herrn Dr. *Schrader* in Gegenwart der Vertreter der Königlichen und städtischen Behörden. Derselbe sprach über die stetigen Zwecke der Gymnasial-Erziehung, welche durch die Beschäftigung mit dem Alterthum unmittelbar zu Vaterlandsliebe und Pflichttreue bilde, während sie zugleich dadurch auf die richtige Auffassung der Religion vorbereite. Der Unterzeichnete drückte in seiner Erwiederung seinen Dank für das ihm von Seiten der Königl. und städtischen Behörden bewiesene Vertrauen aus, bat seine künftigen Collegen ihn in seinem Amte zu unterstützen und wandte sich endlich an die Schüler, die er an die Hindernisse erinnerte, die einem gedeihlichen Erfolge der Gymnasialstudien entgegenstehen. In der Ausführung des Lehrplans trat noch die Veränderung ein, dass Ober- und Unter-Tertia, die im ersten Semester noch in 10 Stunden combinirt unterrichtet wurden, im 2. Semester ganz getrennt werden konnten, indem das Patronat für die auf diese Weise nothwendig gewordene Mehrzahl von Stunden eine Remuneration bewilligte.

Am 7. September wurde das Turnfest gefeiert.

Am 14. December war der Provinzial-Schulrath Herr Dr. Schrader anwesend und wohnte dem Unterrichte im Lateinischen, der Religion und Physik in den Klassen I, II, V und VI bei.

Zwei Schüler sind uns im Laufe des Schuljahrs durch den Tod entrissen. Am 16. Januar starb der Octavaner Paul Nouvel, nachdem er die Anstalt nur wenige Tage besucht hatte, am 20. Januar der Obersecundaner Oscar Peter, der ihr schon seit 1860 angehörte. Lehrer und Schüler der Anstalt folgten bei dem Begräbniss derselben.

Die schriftliche Prüfung der Abiturienten fand vom 8. bis 14. Februar statt, die mündliche unter dem Vorsitze des Herrn Provinzial-Schulraths Dr. Schrader am 9. März. Die 6 Abiturienten, die an der letzten theilnahmen, erhielten sämmtlich das Zeugniss der Reife; zweien wurde die mündliche Prüfung erlassen.

Am 22. März feierte die Anstalt den Geburtstag Sr. Maj. des Königs. Die Festrede hielt Herr Dr. Braut.

D. Statistische Nachrichten.

a. Lehrer.

Am Gymnasium waren in dem verflossenen Jahre thätig den Director mit eingerechnet 8 ordentliche Lehrer, 2 wissenschaftliche Hülfslehrer, 2 Elementarlehrer, 1 Zeichenlehrer, 1 Gesangslehrer, ausserdem der katholische Religionslehrer.

b. Schüler.

Die Schlussfrequenz im März 1865 ergab eine Anzahl von 259 Schülern für das Gymnasium und 91 für die Vorklassen. Die Anfangsfrequenz Ostern ergab die Zahlen 310 und 82, die Anfangsfrequenz Michaelis 295 und 80; jetzt am 9. März 1866 sind im Gymnasium 295, in den Vorklassen 85. Dieselben theilen sich nach Klassen, Religion und Wohnort in folgender Weise:

		evang.	kath.	isr.	einheim.	ausw.
I.	29	23	5	1	12	17
II.	28	27	0	1	5	23
III A.	21	16	2	3	6	15
III B.	37	32	3	2	13	24
IV.	56	48	3	5	18	38
V.	61	53	3	5	23	38
VI.	63	55	1	7	34	29
	295	254	17	24	111	184
VII.	44	36	4	4	34	10
VIII.	41	36	0	5	34	7
	85	72	4	9	68	17

Neu aufgenommen sind in die Anstalt im Laufe des Schuljahrs 103, abgegangen 73. Ausser diesen gehen zu Ostern mit dem Zeugnisse der Reife noch ab die Abiturienten:

1. Louis Jaehner aus Marienburg, geb. am 4. Juni 1847, ev. Conf., $5^3/_4$ J. a. d. Gymn. 2 Jahr in Prima, Berlin, Philologie und Theologie.

2. Wilhelm Jakstein aus Marienburg, geb. 8. Sept. 1846, ev. Conf., $5^1/_2$ J. a. d. Gymn. 3 Jahr in Prima, Bonn, Medicin.

3. Gustav Klauss aus Marienburg, geb. am 3. April 1846, ev. Conf., $5^1/_2$ J. a. d. Gymn. 2 Jahr in Prima, Königsberg, Philologie.

4. Rudolph Kunigk aus Comainen bei Wormditt, geb. am 16. December 1844, kath. Conf., $3^1/_2$ J. a. d. Gymn. 2 Jahr in Prima, zur Intendantur.

5. Louis Leistikow aus Darsow bei Lauenburg i. P., geb. am 24. Januar 1847, ev. Conf., $5^1/_2$ J. a. d. Gymn. 2 Jahr in Prima, Berlin, Medicin.

6. Paul Wilczewski aus Marienburg, geb. am 26. November 1845, kath. Conf., $5^1/_2$ J. a. d. Gymn. 3 Jahr in Prima, Breslau, Medicin.

c. Lehrmittel.

Die Lehrerbibliothek umfasst 1232 Werke, 19 mehr als im vorigen Jahre. Angeschafft wurden ausser den Fortsetzungen von Herzog's Realencyklopädie: Koberstein deutsche Literaturgeschichte; Stein-Wappaeus, Handbuch der Geographie; Acron. Schol. Hor. ed. Hauthal; Grimm, deutsches Wörterbuch; Pfeiffer, deutsche Classiker d. Mittelalters, Bd. I. II.; Briefwechsel zwischen Schiller und Göthe, 2. Aufl.; Krüger, Hist. phil. Studien; Friedländer, Darstellungen aus Roms Sittengesch.; Mureti Opp. ed. Ruhnken, Vita Ruhnk. et Hemsterhus ed. Wyttenbach; Gervinus, Gesch. des 19. Jahrh., Bd. 3 flgd.; Häusser, deutsche Geschichte, 3. Aufl.; Klein, Geschichte d. Dramas; Lobecks academ. Reden; Autenheimer, Differential- und Integralrechnung. — An Geschenken erhielt dieselbe: Von Einem hohen Unterrichtsministerium: Bouterwek Geschichte der Lat. Schule zu Elberfeld nebst der Einladungsschrift zur Feier des Wohlthäterfestes im Berliner Gymnasium zum grauen Kloster 1865, von Herrn Buchhändler Kozer hieselbst: Frei, Ludwig Kossuth und Ungarns neuste Geschichte, von den Gymnasien zu Braunsberg und Stettin, ebenso von dem Director der Realschule zu St. Johann Dr. Löschin Festprogramme; ferner Fr. Strehlke, Martin Opitz und Andreas Gryphius, Olivetum; E. Höpfner, Weckherlins Oden und Gesänge; sowie Parey, Der Marienburger Kreis, Th. I. sämmtlich von den Verfassern der betreff. Schriften.

Für die Schülerbibliothek konnten nur 8 Werke in 15 Bänden angeschafft werden, da die Einnahme zum grösten Theil zur Bezahlung der Rechnungen des vorigen Jahres verwendet werden musste.

Das Naturalienkabinet ist in diesem Jahre durch Geschenke des Sekundaners Ziehm und der Untertertianer Kaufmann und Wölke um einen Thurmfalken, das Gebiss eines Delphins und eine Blindschleiche vermehrt worden, dagegen hat die Sammlung physikalischer Apparate keinen Zuwachs erhalten.

Für die Sammlung von Vorbildern zum Zeichnen sind mehre neue Stücke angeschafft worden.

d. Milde Stiftungen, Stipendien, Unterstützungen für Schüler.

1. Der durch das Schulzsche Legat begründete Stiftungsfonds zur Verbesserung der Lehrergehälter beträgt jetzt 2769 Thlr. 4 Pf.

2. Der Fonds der Lehrer-, Wittwen- und Waisen-Unterstützung-Kasse hat sich von 284 Thlr. auf 327 Thlr. 3 Sgr. 4 Pf. vermehrt, die auf der städtischen Sparkasse untergebracht sind.

3. Die 4 älteren Schulstipendien zu 60 Thlr. haben jetzt die Primaner Klauss und Reichau und die Secundaner Knauff und Gehrmann inne, das neuere zu $10^1/_2$ Thlr. der Secundaner Flater. Zur Gründung eines 6. Stipendiums, für welches ein Grundstück von 52 Thlr. 14 Sgr. 9 Pf. vorhanden war, sind neue Beiträge eingegangen und zwar von II. 2 Thlr., von IIIA. 1 Thlr. 15 Sgr., von IIIB. 3 Thlr. $2^1/_2$ Sgr., von IV. 2 Thlr. $12^1/_2$ Sgr., von V. 1 Thlr. 20 Sgr., von VI. 1 Thlr. $8^1/_2$ Sgr., von VII. 2 Thlr., von VIII. 20 Sgr. Dazu kommen Zinsen 1 Thlr. 27 Sgr. 4 Pf., so dass jetzt 68 Thlr. 23 Sgr. 7 Pf. vorhanden sind, die auf der städtischen Sparkasse liegen.

4. An Schulgeld sind von den städtischen Behörden auch in diesem Jahre 10 Proc. des Gesammtbetrages erlassen.

5. Zur Unterstützung der diesjährigen Abiturienten traten mit dem Unterzeichneten die Herren Dr. Botzon, Dr. Gerss, Bauinspector Gersdorff, Kantor Grabowski, Rechtsanwalt Horn, Dr. Marschall, Kaufmann Schwager und Director Tietz zusammen. Die von denselben an 4 Abenden gehaltenen Vorlesungen in Verbindung mit musikalischen Aufführungen brachten einen Ertrag von 217 Thlr. 25 Sgr., während die Kosten 52 Thlr. 25 Sgr. betrugen. Von der übrig gebliebenen Summe sind jetzt 3 Unterstützungen von 50, 50 und 40 Thlr. verliehen, der Rest ist für den Michaelistermin aufbewahrt worden. Ich sage daher allen, die das Unternehmen in irgend einer Weise gefördert haben, im Namen der Anstalt den wärmsten Dank.

Vertheilung

der Lehrgegenstände unter die Lehrer im Winter 1865/66.

	Lehrer.	Ordin.	I.	II.	III. A.	III. B.	IV.	V.	VI.	Realklasse.	Vorklasse VII.	Vorklasse VIII.	
1.	**Dr. Fr. Strehlke,** Direktor.	I.	8 Lat. 2 Franz.	2 Grch.	2 Grch.								14
2.	Professor **Doerk.**		4 Math. 2 Hebr.	4 Math. 2 Hebr.	3 Math.	3 Math.	3 Math.						21
3.	Oberlehrer **Dr. Botzon.**	II.	6 Grch.	4 Grch. 2 Franz.		6 Grch.							18
4.	Oberlehrer **Reichau.**			2 Dtsch.			2 Dtsch. 2 Franz. 3 Gesch.	3 Franz. 2 Geogr.	2 Geogr.				16
5.	Oberlehrer **Lastig.** 1. ordentl. Lehrer.	IV.		1 Phys.		2 Relig.	2 Relig. 10 Lat.			4 Natk.			19
6.	**Dr. Eckerdt.** 2. ordentl. Lehrer.	III A.	3 Gesch. 2 Engl.	3 Gesch.	4 Grch. 3 Gesch. 2 Franz. 2 Dtsch.	3 Gesch.							22
7.	**Dr. Braut.** 3. ordentl. Lehrer.			10 Lat.	10 Lat. 2 Engl.								22
8.	**Dr. Gerss.** 4. ordentl. Lehrer.	III B.	3 Dtsch. u. phil. Propädeutik.			10 Lat. 2 Franz. 2 Dtsch.	6 Grch.						23
9.	**Dr. Steinwender.**	V.	2 Relig.	2 Relig.	2 Relig.			9 Lat. 3 Dtsch 3 Relig.	3 Relig.				24
10.	**v. Lühmann.**	VI.	2 Phys.		2 Natg.	2 Natg.			9 Lat. 3 Dtsch. 4 Rechn. 2 Natg.				24
11.	**Look.** Lehrer der Vorklasse.	VII.						3 Rechn. 3 Schrb.	3 Schrb.		1 Dtsch 5 Rechn. 3 Schrb.		27
12.	**Kant. Grabowski.** Gesanglehrer.		2 Choralstunden		1 Singen			2 Natg. 1 Singen					6
13.	**Post.** Lehrer der Vorklasse vertreten von **Semrau.**	VIII.									3 Religion 3 Singen 3 Geogr. 1 Uebungen im Erzähl.	7 Dtsch. 5 Rechn. 6 Schrb.	28
14.	**Naudieth.** Zeichenlehrer.		2 Zeichnen.		2 Zeichnen.		2 Zeich.	2 Zeich.	2 Zeich.	2 Zeich.			12
15.	**Kaplan Conradt.** Kathol. Religionslehrer.		2				2						4

Anordnung der Prüfung am 26. März 1866.

Vormittags von 8 — 1 Uhr.

Choral und Gebet.

Quarta.	Französisch. Oberlehrer Reichau.
	Latein. Oberlehrer Lastig.
	Declamationen.
Unter-Tertia.	Geschichte. Dr. Eckerdt.
	Latein. Dr. Gerss.
Ober-Tertia.	Deutsch. Dr. Eckerdt.
	Griechisch. Der Director.
Secunda.	Latein. Dr. Braut.
	Französisch. Dr. Botzon.

Reden des Primaners Rentel und des Abiturienten Jaehner.

Prima.	Latein. Der Director.
	Deutsche Literatur. Dr. Gerss.

Entlassung der Abiturienten.

Schluss-Choral.

Nachmittags von 3 — 5½ Uhr.

Octava.	Lesen.	Lehrer Semrau.
	Rechnen.	
Septima.	Deutsch.	Lehrer Look.
	Rechnen.	
Sexta.	Latein. v. Lühmann.	
	Religion. Dr. Steinwender.	
Quinta.	Naturgeschichte. Cantor Grabowski.	
	Latein. Dr. Steinwender.	

Schluss-Choral.

Die Censur und die Versetzung zugleich mit dem Schluss des Schuljahres findet am 27. März statt. Der neue Kursus beginnt Donnerstag den 12. April. Zur Aufnahme neuer Schüler ist der Unterzeichnete am 9., 10. und 11. April von 8 Uhr Morgens in seiner Wohnung bereit, ebenso jederzeit zu mündlicher und schriftlicher Auskunft über zweckmässige Pensionen für die neu eintretenden Schüler.

Dr. Fr. Strehlke,
Gymnasial-Director.

Danzig, A. W. Kafemann