Jahresbericht

über

das Königliche Katholische Gymnasium

in

Conitz

in dem Schuljahre 1850–51,

mit welchem

zu der öffentlichen Prüfung am 1. August

und

zu den Schlußfeierlichkeiten am 2. August c.

ergebenst einladet

der Director des Gymnasiums

Dr. F. Brüggemann.

Ueber die bestimmten Integrale von der Form u. s. w.
Von dem Oberlehrer A. Wichert.

Conitz.
Gedruckt in der Buchdruckerei bei F. F. Harich.

1851.

Ueber
die bestimmten Integrale
von der Form

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N},$$

in denen

$$N = l + l' \cos^2\varphi + l'' \sin^2\varphi + 2m \cos\varphi \sin\varphi + 2m' \sin\varphi + 2m'' \cos\varphi$$

ist.

Von

A. Wichert.

CONITZ.
Gedruckt in der Buchdruckerei von F. F. Harich.
1851.

Die Integration des Ausdruckes $\int \frac{d\varphi}{N}$ giebt gleichzeitig die Werthe von

$$\int \frac{\cos\varphi \,.\, d\varphi}{N}, \int \frac{\sin\varphi \,.\, d\varphi}{N}, \int \frac{\cos^2\varphi \,.\, d\varphi}{N}, \int \frac{\sin^2\varphi \,.\, d\varphi}{N}, \text{ u. } \int \frac{\cos\varphi \sin\varphi \,.\, d\varphi}{N},$$

in welchen N die angegebene Form hat:

$$N = l + l^{\text{I}} \cos^{\text{I}} \varphi + l^{\text{II}} \sin^2 \varphi + 2\, m \cos\varphi \sin\varphi + 2\, m^{\text{I}} \sin\varphi + 2\, m^{\text{II}} \cos\varphi;$$

es sollen durch Folgendes die Werthe dieser sechs Integrale in den bestimmten Grenzen von 0 bis 2π für den Fall gefunden werden, dass N für keinen reellen Werth von φ verschwindet und die Mittel angegeben werden um allgemein

$$\int \frac{\cos i\varphi \,.\, d\varphi}{N^k}, \quad \int \frac{\sin i\varphi \,.\, d\varphi}{N^k}$$

zu finden, wenn i und k ganze positive Zahlen sind. Die Methode der Lösung dieser Aufgabe ist eine dreifache, da jene Werthe einmal durch Transformation des Ausdruckes N, dann durch Zerfällung desselben in seine Faktoren und durch Reihen-Entwickelung gegeben werden können. Jede dieser Methoden wollen wir anwenden und die Identität der gefundenen Resultate nachzuweisen versuchen.

Die Integration der angegebenen sechs Ausdrücke bietet nach den gewöhnlichen Regeln der Integralrechnung keine Schwierigkeiten mehr dar, wenn N unter die Form gebracht worden

$$N = k + k^{\text{I}} \sin^2 \psi + k^{\text{II}} \cos^2 \psi;$$

eine Transformation, wie wir sie von C. G. J. Jacobi im Crelleschen Journal B. 2 und 8 angegeben finden. Es sei zu dem Ende

$$\cos\varphi = \frac{y}{x}, \qquad \sin\varphi = \frac{z}{x}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dann wird

$$N = \frac{1}{x^2}\left(l\,x^2 + l^{\mathrm{I}}\,y^2 + l^{\mathrm{II}}\,z^2 + 2\,m\,y\,z + 2\,m^{\mathrm{I}}\,x\,z + 2\,m^{\mathrm{II}}\,y\,x\right).$$

Um diesen Ausdruck unter die Form

$$N = g - g^{\mathrm{I}}\cos^2\psi - g^{\mathrm{II}}\sin^2\psi$$

zu bringen, sei auch für ihn

$$\cos\psi = \frac{v}{u}, \qquad \sin\psi = \frac{w}{u}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wodurch wir

$$g - g^{\mathrm{I}}\cos^2\psi - g^{\mathrm{II}}\sin^2\psi = \frac{1}{u^2}\left(g\,u^2 - g^{\mathrm{I}}\,v^2 - g^{\mathrm{II}}\,w^2\right)$$

erhalten, und es ist dann die Aufgabe dieser Transformationen keine andere, als die Gleichung der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen zu reduziren. Es geschieht dieses durch die bekannte Substitution:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha\,u - \beta\,v - \gamma\,w \\ y &= \alpha^{\mathrm{I}}\,u - \beta^{\mathrm{I}}\,v - \gamma^{\mathrm{I}}\,w \\ z &= \alpha^{\mathrm{II}}\,u - \beta^{\mathrm{II}}\,v - \gamma^{\mathrm{II}}\,w, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

bei welcher aus der Gleichung

$$y^2 + z^2 - x^2 = v^2 + w^2 - u^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

die zwischen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ sowie zwischen $\cos\psi$ und $\sin\psi$ Statt findet, folgende zwei Systeme von Gleichungen abgeleitet werden:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\mathrm{I}\,2} + \alpha^{\mathrm{II}\,2} - \alpha^2 &= -1 \\ \beta^{\mathrm{I}\,2} + \beta^{\mathrm{II}\,2} - \beta^2 &= 1 \\ \gamma^{\mathrm{I}\,2} + \gamma^{\mathrm{II}\,2} - \gamma^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \ldots (5) \qquad \left.\begin{aligned} \alpha^{\mathrm{I}}\beta^{\mathrm{I}} + \alpha^{\mathrm{II}}\beta^{\mathrm{II}} - \alpha\beta &= 0 \\ \alpha^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{I}} + \alpha^{\mathrm{II}}\beta^{\mathrm{II}} - \alpha\gamma &= 0 \\ \beta^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{I}} + \beta^{\mathrm{II}}\gamma^{\mathrm{II}} - \beta\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

Um nun die Grössen u, v, w durch x, y, z auszudrücken, wollen wir die erste der Gleichungen (3) mit α, die zweite mit α^{I}, die dritte mit α^{II} multipliziren und von der Summe der beiden letztern die erste abziehen, und dieses Verfahren wiederholen, nachdem wir die erste mit β, die zweite mit β', die dritte mit β'' und die erste mit γ, die zweite mit γ' und die drittte mit γ'' multiplizirt haben; dann erhalten wir mit Hülfe der Bedingungsgleichungen (5) und (6):

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha x - \alpha' y - \alpha'' z \\ v &= \beta x - \beta' y - \beta'' z \\ w &= \gamma x - \gamma' y - \gamma'' z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und aus (4) die ähnlichen Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 &= -1 \\ \beta'^2 + \gamma'^2 - \alpha'^2 &= 1 \\ \beta''^2 + \gamma''^2 - \alpha''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \ldots (8) \qquad \left.\begin{aligned} \beta\beta' + \gamma\gamma' - \alpha\alpha' &= 0 \\ \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' - \alpha'\alpha'' &= 0 \\ \beta''\beta + \gamma''\gamma - \alpha''\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

Setzt man dagegen

$$\varepsilon = \alpha(\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'') + \beta(\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'') + \gamma(\beta'\alpha'' - \alpha'\beta''), \quad \ldots \quad (10)$$

so giebt die Auflösung der Gleichungen (3)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon u &= (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')x + (\gamma\beta'' - \beta\gamma'')y + (\beta\gamma' - \gamma\beta')z \\ \varepsilon v &= (\gamma''\alpha' - \alpha''\gamma')x + (\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'')y + (\gamma'\alpha - \alpha\gamma')z \\ \varepsilon w &= (\alpha''\beta' - \beta''\alpha')x + (\beta''\alpha - \alpha''\beta)y + (\alpha'\beta - \alpha\beta')z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

und die Vergleichung der Coëffizienten der Gleichungen (7) und (11) folgende neun Bedingungsgleichungen unter den Substitutionsgrössen α, α', α'', β, β', β'', γ, γ' und γ'':

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\alpha &= \beta'\gamma'' - \gamma'\beta''; & \varepsilon\beta &= \gamma''\alpha' - \gamma'\alpha''; & \varepsilon\gamma &= \alpha''\beta' - \beta''\alpha' \\ -\varepsilon\alpha' &= \gamma\beta'' - \beta\gamma''; & -\varepsilon\beta' &= \gamma\alpha'' - \alpha\gamma''; & -\varepsilon\gamma' &= \alpha\beta'' - \beta\alpha'' \\ -\varepsilon\alpha'' &= \beta\gamma' - \gamma\beta'; & -\varepsilon\beta'' &= \gamma'\alpha - \alpha'\gamma; & -\varepsilon\gamma'' &= \alpha'\beta - \beta'\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

Wenn wir je drei von diesen Gleichungen quadriren so erhält man mit Rücksicht auf (5)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\varepsilon &= (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 - (\gamma\beta'' - \beta\gamma'')^2 - (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 \\ &= (\beta^2 - \beta'^2 - \beta''^2)(\gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2) - (\beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'')^2 = 1, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

und $\varepsilon = \pm 1$,

wo wir von diesen willkührlichen Zeichen das $+$ wählen wollen.

Wenn man nun u, v und w durch x, y, z ausgedrückt in den Ausdruck $g\,u^2 - g'\,v^2 - g''\,w^2$ substituirt und die einzelnen Coëffizienten denen in

$lx^2 + l^{\prime} y^2 + l^{\prime\prime} z^2 + 2myz + 2m^{\prime} zx + 2m^{\prime\prime} xy$ gleich setzt, so erhält man folgende sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & g\alpha^2 - g^{\prime}\beta^2 - g^{\prime\prime}\gamma^2 = l \\ 2) & g\alpha^{\prime 2} - g^{\prime}\beta^{\prime 2} - g^{\prime\prime}\gamma^{\prime 2} = l^{\prime} \\ 3) & g\alpha^{\prime\prime 2} - g^{\prime}\beta^{\prime\prime 2} - g^{\prime\prime}\gamma^{\prime\prime 2} = l^{\prime\prime} \\ 4) & g\alpha^{\prime}\alpha^{\prime\prime} - g^{\prime}\beta^{\prime}\beta^{\prime\prime} - g^{\prime\prime}\gamma^{\prime}\gamma^{\prime\prime} = m \\ 5) & -g\alpha\alpha^{\prime\prime} + g^{\prime}\beta\beta^{\prime\prime} + g^{\prime\prime}\gamma\gamma^{\prime\prime} = m^{\prime} \\ 6) & -g\alpha^{\prime}\alpha + g^{\prime}\beta^{\prime}\beta + g^{\prime\prime}\gamma^{\prime}\gamma = m^{\prime\prime}, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

die, verbunden mit den sechs unabhängigen Bedingungs-Gleichungen zwischen den Substitutionsgrössen, von denen die übrigen nur eine Folge waren, sowohl die neun Coëffizienten der Substitution, wie die drei Grössen g, $g^{\prime}$, $g^{\prime\prime}$ geben.

Wir können nämlich die Gleichungen (14) folgender Massen zu je drei schreiben: 1), 6), 5); dann 6), 2), 4); dann 5), 4), 3) und erhalten:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha . g\alpha - \beta . g^{\prime}\beta - \gamma . g^{\prime\prime}\gamma = l & -\alpha . g\alpha^{\prime} + \beta . g^{\prime}\beta^{\prime} + \gamma . g^{\prime\prime}\gamma^{\prime} = m^{\prime\prime} \\ -\alpha^{\prime} . g\alpha + \beta^{\prime} . g^{\prime}\beta + \gamma^{\prime} . g^{\prime\prime}\gamma = m^{\prime\prime} & \alpha^{\prime} . g\alpha^{\prime} - \beta^{\prime} . g^{\prime}\beta^{\prime} - \gamma^{\prime} . g^{\prime\prime}\gamma^{\prime} = l^{\prime} \\ -\alpha^{\prime\prime} . g\alpha + \beta^{\prime\prime} . g^{\prime}\beta + \gamma^{\prime\prime} . g^{\prime\prime}\gamma = m^{\prime}, & \alpha^{\prime\prime} . g\alpha^{\prime} - \beta^{\prime\prime} . g^{\prime}\beta^{\prime} - \gamma^{\prime\prime} . g^{\prime\prime}\gamma^{\prime} = m, \\ \multicolumn{2}{c}{-\alpha . g\alpha^{\prime\prime} + \beta . g^{\prime}\beta^{\prime\prime} + \gamma . g^{\prime\prime}\gamma^{\prime\prime} = m^{\prime}} \\ \multicolumn{2}{c}{\alpha^{\prime} . g\alpha^{\prime\prime} - \beta^{\prime} . g^{\prime}\beta^{\prime\prime} - \gamma^{\prime} . g^{\prime\prime}\gamma^{\prime\prime} = m} \\ \multicolumn{2}{c}{\alpha^{\prime\prime} . g\alpha^{\prime\prime} - \beta^{\prime\prime} . g^{\prime}\beta^{\prime\prime} - \gamma^{\prime\prime} . g^{\prime\prime}\gamma^{\prime\prime} = l^{\prime\prime}.} \end{array}\right\} . \; (15)$$

Jedes System dieser Gleichungen kann man, cfr. (5) und (8), umkehren und es giebt dann ein neues in folgender Gestalt:

$$\left.\begin{array}{ll} g\alpha = \alpha l + \alpha^{\prime} m^{\prime\prime} + \alpha^{\prime\prime} m^{\prime} & -g\alpha^{\prime} = \alpha m^{\prime\prime} + \alpha^{\prime} l^{\prime} + \alpha^{\prime\prime} m \\ g^{\prime}\beta = \beta l + \beta^{\prime} m^{\prime\prime} + \beta^{\prime\prime} m^{\prime} & -g^{\prime}\beta^{\prime} = \beta m^{\prime\prime} + \beta^{\prime} l^{\prime} + \beta^{\prime\prime} m \\ g^{\prime\prime}\gamma = \gamma l + \gamma^{\prime} m^{\prime\prime} + \gamma^{\prime\prime} m^{\prime}, & -g^{\prime\prime}\gamma^{\prime} = \gamma m^{\prime\prime} + \gamma^{\prime} l^{\prime} + \gamma^{\prime\prime} m, \\ \multicolumn{2}{c}{-g\alpha^{\prime\prime} = \alpha m^{\prime} + \alpha^{\prime} m + \alpha^{\prime\prime} l^{\prime\prime}} \\ \multicolumn{2}{c}{-g^{\prime}\beta^{\prime\prime} = \beta m^{\prime} + \beta^{\prime} m + \beta^{\prime\prime} l^{\prime\prime}} \\ \multicolumn{2}{c}{-g^{\prime\prime}\gamma^{\prime\prime} = \gamma m^{\prime} + \gamma^{\prime} m + \gamma^{\prime\prime} l^{\prime\prime}.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (16)$$

Diese Gleichungen lassen sich so schreiben, dass die ersten, zweiten und dritten aus jedem System zusammengestellt werden können, oder dass sie die Form bekommen:

$$\left.\begin{array}{ll} (l-g)\alpha+m''\alpha'+m'\alpha''=0 & (l-g')\beta+m''\beta'+m'\beta''=0 \\ m''\alpha+(l'+g)\alpha'+m\alpha''=0 & m''\beta+(l'+g')\beta'+m\beta''=0 \\ m'\alpha+m\alpha'+(l''+g)\alpha''=0, & m'\beta+m\beta'+(l''+g')\beta''=0, \\ \multicolumn{2}{c}{(l-g'')\gamma+m''\gamma'+m'\gamma''=0} \\ \multicolumn{2}{c}{m''\gamma+(l'+g'')\gamma'+m\gamma''=0} \\ \multicolumn{2}{c}{m'\gamma+m\gamma'+(l''+g'')\gamma''=0.} \end{array}\right\} \quad ..\ (17)$$

Eliminirt man aus dem ersten Systeme der Gleichungen (17) die Grössen α, α', und α'', aus dem zweiten die Grössen β, β' und β'' und aus dem dritten γ, γ' und γ'', so erhält man jedes Mal dieselbe Gleichung, aus welcher g, g' und g'' bestimmt werden; oder, mit andern Worten, es sind diese drei Grössen die drei Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$(l-x)(l'+x)(l''+x)-m^2(l-x)-m'^2(l'+x)-m''^2(l''+x)+2mm'm''=0, \quad (18)$$

die entwickelt die Form hat:

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0,$$

und in welcher

$$\left.\begin{array}{l} A=l-l'-l'' \\ B=m'^2+m''^2-m^2+l'l''-ll'-ll'' \\ C=ll'l''-m^2l-m'^2l'-m''^2l''+2m'm''m \end{array}\right\} \quad ....\ (19)$$

ist.

Wir wollen vorläufig die Reellität der drei Wurzeln dieser Gleichung für den Fall, dass N für keinen reellen Werth von φ verschwindet, voraussetzen und durch dieselben und die Coëffizienten von N die Substitutionsgrössen α, α' etc. ausdrücken.

Aus drei Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} Ax+cy+bz=0 \\ cx+By+az=0 \\ bx+ay+Cz=0 \end{array}\right\} \quad ....\ (20)$$

kann man leicht aus je zweien die Proportionen entwickeln:

$$x:y:z=ac-Bb:bc-Aa:AB-c^2$$
$$x:y:z=ab-Cc:AC-b^2:bc-Aa$$
$$x:y:z=BC-a^2:ab-Cc:ac-Bb;$$

aus welchen dann, wenn die erste mit z, die zweite mit y, die dritte mit x in ihren unbekannten Theilen multiplizirt wird, resultirt:

$$x^2:y^2:z^2:yz:zx:xy = BC-a^2 : AC-b^2 : AB-c^2 : bc-Aa : ca-Bb : ab-Cc. \quad (21)$$

Wenn wir dieses bei den Gleichungen (17) anwenden, bei welchen

$$\left.\begin{array}{ll} A = l - g & c = m^{\prime\prime} \\ B = l^{\prime} + g & b = m^{\prime} \\ C = l^{\prime\prime} + g & a = m \end{array}\right\}$$

ist, und in denen wir mit ϱ den konstanten Faktor bezeichnen wollen, in den α, $\alpha^{\prime}$ und $\alpha^{\prime\prime}$ multiplizirt sind; so folgen daraus die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho^2\,\alpha\alpha = (l^{\prime}+g)\,(l^{\prime\prime}+g) - m^2 \\ \varrho^2\,\alpha^{\prime}\alpha^{\prime} = (l-g)\,(l^{\prime\prime}+g) - m^{\prime 2} \\ \varrho^2\,\alpha^{\prime\prime}\alpha^{\prime\prime} = (l-g)\,(l^{\prime}+g) - m^{\prime\prime 2} \\ \varrho^2\,\alpha^{\prime}\alpha^{\prime\prime} = m^{\prime}m^{\prime\prime} - (l-g)\,m \\ \varrho^2\,\alpha^{\prime\prime}\alpha = m m^{\prime\prime} - (l^{\prime}+g)\,m^{\prime} \\ \varrho^2\,\alpha\alpha^{\prime} = m m^{\prime} - (l^{\prime\prime}+g)\,m^{\prime\prime}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Die Grösse ϱ lässt sich aber leicht mit Hülfe der Gleichungen (5) bestimmen; denn subtrahirt man von der Summe der zweiten und dritten die erste der Gleichungen (22), so giebt dies

$$-\varrho^2 = (l-g)\,(l^{\prime\prime}+g) - m^{\prime 2} + (l-g)\,(l^{\prime}+g) - m^{\prime\prime 2} - (l^{\prime}+g)\,(l^{\prime\prime}+g) + m^2. \quad (23)$$

Die Vergleichung dieses Werthes von $-\varrho^2$ mit der kubischen Gleichung (18) zeigt, dass er das Differentiale derselben ist, wenn man nach der Differentiation $x = g$ setzt; und bezeichnet man mit g, $g^{\prime}$, $g^{\prime\prime}$ die drei Wurzeln dieser Gleichung, so können wir derselben auch die Form geben

$$-1\,.\,(x-g)\,(x-g^{\prime})\,(x-g^{\prime\prime}) = 0;$$

deren Differentiale:

$$-1\,[(x-g^{\prime})\,(x-g^{\prime\prime}) + (x-g^{\prime\prime})\,(x-g) + (x-g^{\prime})\,(x-g)]$$

ist, so dass wir, für $x = g$ eingesetzt, erhalten:

$$\varrho^2 = (g-g^{\prime})\,(g-g^{\prime\prime}). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Ein ähnliches Raisonnement giebt, wie man sich leicht überzeugen kann, aus dem zweiten Systeme der Gleichungen (17) für die Verhältnisse

$$\beta\beta : \beta'\beta' : \beta''\beta'' : \beta'\beta'' : \beta''\beta : \beta\beta'$$

dieselben Ausdrücke in g' und den Coëffizienten von N und ist ϱ' der konstante Faktor, in welchen die Substitutionsgrössen β, β' und β'' multiplizirt sind, so ist:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho'^2\beta\beta &= (l'+g')(l''+g') - m^2\\
\varrho'^2\beta'\beta' &= (l''+g')(l-g') - m'^2\\
\varrho'^2\beta''\beta'' &= (l-g')(l'+g') - m''^2\\
\varrho'^2\beta'\beta'' &= m'm'' - (l-g')m\\
\varrho'^2\beta''\beta &= m''m - (l'+g')m'\\
\varrho'^2\beta\beta' &= mm' - (l''+g')m'',
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

wo ϱ' das Differentiale der kubischen Gleichung (18) ist, doch nach der Differentiation darin g' für x gesetzt, oder $\qquad \varrho'^2 = -(g'-g'')(g'-g)$. ..... (26)

Auf dieselbe Weise folgen aus dem dritten Systeme der Gleichungen (17), wenn ϱ'' dieselbe Beziehung zu γ, γ', γ'' hat wie ϱ zu α, α' und α'', für die Substitutionsgrössen γ, γ' und γ'' so wie für ϱ'' die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho''^2\gamma\gamma &= (l'+g'')(l''+g'') - m^2\\
\varrho''^2\gamma'\gamma' &= (l''+g'')(l-g'') - m'^2\\
\varrho''^2\gamma''\gamma'' &= (l-g'')(l'+g'') - m''^2\\
\varrho''^2\gamma'\gamma'' &= m'm'' - (l-g'')m\\
\varrho''^2\gamma''\gamma &= mm'' - (l'+g'')m'\\
\varrho''^2\gamma\gamma' &= mm' - (l''+g'')m'',
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

und für ϱ

$$\varrho''^2 = -(g''-g')(g''-g). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Um nun die vorgelegten bestimmten Integrale in dieser transformirten Gestalt zu erhalten, war aus den Substitutionsgleichungen (1), (2) und (3)

$$d.\cos\varphi = d.\,\frac{\alpha' - \beta'\cos\psi - \gamma'\sin\psi}{\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi},$$

oder $$-\sin\varphi\,.\,d\varphi = \frac{-\alpha' + \beta''\cos\psi + \gamma'\sin\psi}{(\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi)^2}\,d\psi,$$

woraus $$d\varphi = \frac{d\psi}{\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

so dass

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{d\varphi}{N}&=\int\frac{\alpha-\beta\cos\psi-\gamma\sin\psi}{g-g^{\prime}\cos^{2}\psi-g^{\prime\prime}\sin^{2}\psi}\,d\psi\\ \int\frac{\cos\varphi\,.\,d\varphi}{N}&=\int\frac{\alpha^{\prime}-\beta^{\prime}\cos\psi-\gamma^{\prime}\sin\psi}{g-g^{\prime}\cos^{2}\psi-g^{\prime\prime}\sin^{2}\psi}\,d\psi\\ \int\frac{\sin\varphi\,.\,d\varphi}{N}&=\int\frac{\alpha^{\prime\prime}-\beta^{\prime\prime}\cos\psi-\gamma^{\prime\prime}\sin\psi}{g-g^{\prime}\cos^{2}\psi-g^{\prime\prime}\sin^{2}\psi}\,d\psi\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\quad(30)$$

wird, und $\int\frac{\sin^2\varphi\,.\,d\varphi}{N}$, $\int\frac{\cos^2\varphi\,.\,d\varphi}{N}$, $\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,.\,d\varphi}{N}$ auf die ersten drei Integrale reduzirt werden können, wie dieses später nachgewiesen werden soll.

Um die Untersuchung über die Reellität der drei Wurzeln der kubischen Gleichung jetzt aufzunehmen, wollen wir den Ausdruck N in zwei reelle Faktoren zerfällen. Es sei zu dem Ende in ihm $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, wodurch er die Gestalt bekommt

$$N=l\left\{1+\frac{l^{\prime}}{l}\,x^2+\frac{l^{\prime\prime}}{l}\,y^2+\frac{2m}{l}\,x\,y+\frac{2m^{\prime}}{l}\,y+\frac{2m^{\prime\prime}}{l}\,x\right\}$$

und der in Parenthese gesetzte Theil sofort in seine Faktoren $1+\alpha x+\beta y$ und $1+\alpha^{\prime}x+\beta^{\prime}y$ zerlegt werden könnte, wenn nicht x und y durch die Bedingungsgleichung $x^2+y^2-1=0$ mit einander verbunden wären. Wenn man jedoch dieselben mit dem Faktor λ multiplizirt und dem zu zerlegenden Ausdrucke addirt, so erhält man aus der Vergleichung der Coëffizienten der jetzt als unabhängig zu betrachtenden Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung

$$(1+\alpha x+\beta y)(1+\alpha^{\prime}x+\beta^{\prime}y)=1+\frac{l^{\prime}+\lambda}{l-\lambda}x^2+\frac{l^{\prime\prime}+\lambda}{l-\lambda}y^2+\frac{2m}{l-\lambda}xy+\frac{2m^{\prime}}{l-\lambda}y+\frac{2m^{\prime\prime}}{l-\lambda}x\quad(31)$$

folgende fünf Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha\alpha^{\prime}=\frac{l^{\prime}+\lambda}{l-\lambda},\qquad \beta\beta^{\prime}=\frac{l^{\prime\prime}+\lambda}{l-\lambda},\qquad \alpha\beta^{\prime}+\beta\alpha^{\prime}=\frac{2m}{l-\lambda},\\ &(\alpha+\alpha^{\prime})=\frac{2m^{\prime\prime}}{l-\lambda},\qquad \beta+\beta^{\prime}=\frac{2m^{\prime}}{l-\lambda},\end{aligned}\right\}\;.\quad(32)$$

durch welche α, $\alpha^{\prime}$, β, $\beta^{\prime}$ und λ bestimmt werden können.

Man findet nämlich unter α, $\alpha^{|}$, β und $\beta^{|}$ folgende Bedingungsgleichung:

$$(\alpha\beta^{|}+\beta\alpha^{|})(\alpha+\alpha^{|})(\beta+\beta^{|})+4\alpha\alpha^{|}\beta\beta^{|}=(\alpha\beta^{|}+\beta\alpha^{|})^2+(\beta+\beta^{|})^2\alpha\alpha^{|}+(\alpha+\alpha^{|})^2\beta\beta^{|},$$

welche, darin aus (32) die entsprechenden Werthe gesetzt, die Form annimmt:

$$\frac{8mm^{|}m^{||}}{(l-\lambda)^3}+\frac{4(l^{|}+\lambda)(l^{||}+\lambda)}{(l-\lambda)^2}=\frac{4m^2}{(l-\lambda)^2}+\frac{4m^{|2}(l^{|}+\lambda)}{(l-\lambda)^3}+\frac{4m^{||2}(l^{||}+\lambda)}{(l-\lambda)^3},$$

und dieselbe kubische Gleichung von (18) ist, nachdem sie mit 4 dividirt und mit $(l-\lambda)^3$ multiplizirt worden, oder

$$2mm^{|}m^{||}-m^2(l-\lambda)-m^{|2}(l^{|}+\lambda)-m^{||2}(l^{||}+\lambda)+(l-\lambda)(l^{|}+\lambda)(l^{||}+\lambda)=0 \quad (33)$$

geworden ist.

Da diese Gleichung wenigstens eine reelle Wurzel haben muss, so sei dieselbe λ und dazu angewendet, die Grössen α, $\alpha^{|}$, β und $\beta^{|}$ aus (32) zu bestimmen. Wir finden dann:

$$\left.\begin{array}{ll}
\alpha=\dfrac{m^{||}\pm\sqrt{m^{||2}-(l^{|}+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda}, & \beta^{|}=\dfrac{m^{|}\mp\sqrt{m^{|2}-(l^{||}+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda}, \\
\alpha^{|}=\dfrac{m^{||}\mp\sqrt{m^{||2}-(l^{|}+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda}, & \alpha\beta^{|}=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-(l^{||}+\lambda)(l^{|}+\lambda)}}{l-\lambda}, \\
\beta=\dfrac{m^{|}\pm\sqrt{m^{|2}-(l^{||}+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda}, & \beta\alpha^{|}=\dfrac{m\mp\sqrt{m^2-(l^{||}+\lambda)(l^{|}+\lambda)}}{l-\lambda}.
\end{array}\right\} \quad (34)$$

Es sei

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{m^{||2}-(l^{|}+\lambda)(l-\lambda)}=\sqrt{R^{||}} \\
\sqrt{m^{|2}-(l^{||}+\lambda)(l-\lambda)}=\sqrt{R^{|}} \\
\sqrt{m^2-(l^{|}+\lambda)(l^{||}+\lambda)}=\sqrt{R},
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

so bestimmen sich die Zeichen von $\sqrt{R^{||}}$ und $\sqrt{R^{|}}$ so, dass sie entgegengesetztes Zeichen haben, wenn $m^{|}m^{||}-m(l-\lambda)$ negativ ist, im entgegengesetzten Falle haben sie gleiche Zeichen; denn jene kubische Gleichung (33) ist auch eine Folge von

$$m^{|}m^{||}-m(l-\lambda)=\sqrt{R^{|}}\,\sqrt{R^{||}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

wie man sich leicht überzeugt, wenn man diese Gleichung ins Quadrat erhebt, auf beiden Seiten $m^{|2}m^{||2}$ subtrahirt und den übrigen Theil durch $(l-\lambda)$ dividirt. Ist dieses bestimmt, so ist es gleichgültig, ob man dem α oder $\alpha^{|}$, dem β oder $\beta^{|}$ das positive Zeichen der Quadratwurzel giebt, weil dadurch nur die Ordnung der Faktoren verändert wird.

Auch die Grössen $\sqrt{R^{I}}$, $\sqrt{R^{II}}$ und $\sqrt{R}$ lassen sich immer als reelle Grössen darstellen. Hat man eine Gleichung $u = 0$ vom vierten Grade

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

so lässt sich dieselbe durch die bekannte Substitution von $x = x^{I} - \frac{a}{4}$ in die Gestalt bringen

$$x^{I\,4} + Gx^{I\,2} + Hx^{I} + I = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} G &= b - \frac{3}{8}a^2 \\ H &= \frac{a^3}{8} - \frac{ba}{2} + c \\ I &= -\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

ist. Die Gleichung (38) können wir nun immer in die beiden reellen Faktoren zerlegen

$$(x^{I\,2} + px^{I} + q)(x^{I\,2} - px^{I} + q^{I}),$$

wo p durch die Gleichung gegeben wird

$$p^6 + 2Gp^4 + (G^2 - 4I)p^2 - H^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

welche, da das letzte Glied immer negativ ist, wenigstens eine positive Wurzel für p^2 d. h. p reell geben muss, durch welches q und q^{I} lineär ausgedrückt werden.

Auch ohne das zweite Glied fortzuschaffen kann man dem Ausdrucke $u = 0$ die Form geben

$$(x^2 + \frac{1}{2}ax + r)^2 - (sx + t)^2 = 0,$$

und erhält dann durch Vergleichung der Coëffizienten der Potenzen von x

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}a^2 - s^2 + 2r &= b \\ ar - rst &= c \\ r^2 - t^2 &= d, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

aus welchen drei Gleichungen r, s und t durch a, b, c und d gefunden werden können. Es ist nämlich aus der ersten und dritten Gleichung

$$s^2 = -b + \tfrac{1}{4}a^2 + 2r$$
$$t^2 = r^2 - d$$

und aus der zweiten $4s^2t^2 = (ar - c)^2$, woraus zur Bestimmung von r die kubische Gleichung resultirt:

$$8r^3 - 4br^2 + (2ac - 8d)r - a^2d + 4bd - c^2 = 0. \quad \ldots \quad (42)$$

Will man diese Gleichung mit der von (40) vergleichen, so wird dieselbe, für G, H und I die Werthe aus (39) eingesetzt,

$$p^6 + (2b - \tfrac{3}{4}a^2)p^4 + (b^2 - a^2b + \tfrac{3}{16}a^4 + ca - 4d)p^2$$
$$-\left(\frac{a^6}{64} + \frac{b^2a^2}{4} + c^2 - \frac{a^4b}{8} - bac + \frac{a^3c}{4}\right) = 0.$$

Setzen wir $p^2 = p_{\mathrm{I}}^2 + \frac{a^2}{4}$, so wird sie

$$p_{\mathrm{I}}^6 + 2bp_{\mathrm{I}}^4 + (b^2 + ca - 4d)p_{\mathrm{I}}^2 + bac - a^2d - c^2 = 0,$$

und für $p_{\mathrm{I}}^2 = p_{\mathrm{II}}^2 - b$ gesetzt,

$$p_{\mathrm{II}}^6 - bp_{\mathrm{II}}^4 + (ac - 4d)p_{\mathrm{II}}^2 + 4bd - a^2d - c^2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

eine Gleichung, welche die Form von (42) erhält, wenn man darin $p_{\mathrm{II}}^2 = 2r$ nimmt. Verfolgt man hier die Substitutionen $r = \frac{p_{\mathrm{II}}^2}{2} = \frac{p_{\mathrm{I}}^2 + b}{2}$, so ist $p_{\mathrm{I}}^2 = 2r - b$. Da aber p^2 eine positive Grösse sein muss, so bleibt es auch $p_{\mathrm{I}}^2 + \frac{a^2}{4}$, also auch $\frac{a^2}{4} + 2r - b$ oder der Werth von s^2, d. h. auch s muss reell sein und also auch t. Die direkte Zerfällung des Ausdruckes $u = o$ in zwei reelle Faktoren des zweiten Grades $(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha' x + \beta') = 0$ führt durch die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \alpha' &= a \\ \beta + \beta' + \alpha\alpha' &= b \\ \alpha\beta' + \beta\alpha' &= c \\ \beta\beta' &= d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

zu der kubischen Gleichung

$$y^3 - 2by^2 + (b^2 - 4d + ca)y + da^2 - cab + c^2 = 0, \quad \ldots \quad (45)$$

in welcher $y = \alpha\alpha'$ gesetzt worden, die ebenfalls auf die Gleichung (42) reduzirt werden kann, wenn man $y = y' + b$ substituirt und $y' = -2r$ setzt, und also reelle

Werthe für α, α', β und β' giebt, da nach demselben Schlusse $\frac{a^2}{4} - y$ eine positive Grösse sein muss.

Wir können ferner N durch $tg\frac{1}{2}\varphi$ ausdrücken, in welchem Falle N ein Ausdruck vom vierten Grade wird und nach Analogie von $u = 0$ in zwei reellen Faktoren des zweiten Grades zerlegt werden, und die Integration der gegebenen Formeln auf die Integration der Partialbrüche zurückgeführt werden kann.

Setzt man $x = tg\frac{1}{2}\varphi$, wodurch
$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{2x}{1+xx} \\ \cos\varphi &= \frac{1-xx}{1+xx} \\ d\varphi &= \frac{2dx}{1+xx}, \end{aligned}\right\}$$
so wird
$$N = \frac{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4}{(1+xx)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$
wo die Grössen a', b', c', d' und e' so bestimmt sind, dass
$$\left.\begin{aligned} a' &= l + l' + 2m'' \\ b' &= 4m + 4m' \\ c' &= 2l - 2l' + 4l'' \\ d' &= 4m + 4m' \\ e' &= l + l' - 2m'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$
wird. Um die Coëffizienten des Ausdrucks N mit denen von $u = 0$ zu vergleichen, ist $a = \frac{d'}{e'}$, $b = \frac{c'}{e'}$, $c = \frac{b'}{e'}$, $d = \frac{a'}{e'}$.

Diese wollen wir uns in die Gleichung (45) gesetzt denken und erhalten aus ihr
$$y^3 - 2\frac{c'}{e'}y^2 + \left(\frac{c'^2}{e'^2} + \frac{d'b'}{e'^2} - \frac{4a'}{e'}\right)y - \frac{d'c'b'}{e'^3} + \frac{d'^2a'}{e'^3} + \frac{b'^2}{e'^2} = 0$$
und für $y = \frac{y'}{e'}$ substituirt
$$y'^3 - 2c'y'^2 + (c'^2 - 4a'e' + b'd')y' + b'^2e' - d'c'b' + d'^2a' = 0$$
nachdem mit e'^3 multiplizirt ist.

Diese Gleichung kann aber auf unsere bekannte kubische Gleichung (18) oder (33) wieder zurückgeführt werden, wenn man in sie die Coëffizienten von N durch die Substitutionsgleichungen (47) zurück bringt, wodurch sie die Form erhält:

$$y'^3 - 4(l - l' + 2l'')\,y'^2 + [4(l - l' + 2l'')^2 - 4(l + l' + 2m'')(l + l' - 2m'')$$
$$+ 16(m'^2 - m^2)]\,y + 16(m + m')^2(l + l' - 2m'') + 16(m' - m)^2(l + l' + 2m'')$$
$$- 16(m'^2 - m^2)\,2(l - l' + 2l'') = 0$$

oder:

$$y'^3 - 4(l - l' + 2l'')\,y'^2 + 16(m'^2 + m''^2 - m^2 + l''^2 - l'l'' - ll' + ll'')\,y'$$
$$+ 64[(m^2(l + l'') + m'^2(l' - l'') + 2mm'm''] = 0.$$

In dieser Gleichung verschwinden die Zahlen-Coëffizienten, wenn $y' = 4y''$ gesetzt, durch 64 dividirt und dann $y'' = y''' + l''$ substituirt wird. Es erscheint dann die Gleichung

$$y'''^3 - (l - l' - l'')\,y'''^2 + (m'^2 + m''^2 - m^2 + l'l'' - ll' - ll'')\,y'''$$
$$- (ll'l'' - m^2 l - m'^2 l' - m''^2 l'' + 2mm'm'') = 0, \qquad \ldots\ldots \quad (48)$$

die uns schon durch die frühere Transformation bekannt ist.

Aus den Substitutionsgleichungen, durch welche wir die Gleichung (45) in die Gestalt von (48) brachten, nämlich aus

$$y = \frac{y'}{e'}, \quad y' = 4y'', \quad y'' = y''' + l'', \text{ folgt } y = 4\,\frac{(y''' + l'')}{e'}$$

und, da die Wurzel der kubischen Gleichung, die reell ist, mit λ bezeichnet wurde, so ist $y = 4\,\dfrac{(\lambda + l'')}{e'}$.

Es war aber bewiesen, dass bei der Zerfällung des biquadratischen Ausdrucks $u = 0$ die Grösse $\dfrac{a^2}{4} - y$ immer eine positive Grösse sein muss; dieses gestaltet sich für N dahin, dass $\dfrac{d'^2}{4e'2} - 4\,\dfrac{(\lambda + l'')}{e'}$, oder $\frac{1}{4}(d'^2 - 16(\lambda + l'')e')$

d. h. $4(m'^2 - 2mm' + m^2 + (l'' + \lambda)m'' - (l'' + \lambda)(l - \lambda) - (l'' + \lambda)(l' + \lambda))$

eine positive Grösse sein muss. Wenn wir den Ausdruck so umformen

$$m'^2 - (l'' + \lambda)(l - \lambda) + m^2 - (l'' + \lambda)(l' + \lambda) - (2mm' - 2m''(l'' + \lambda)),$$

so ist derselbe ein quadratischer, da wir früher (36) gesehen haben, dass

$$m m' - m''(l'' + \lambda) = \sqrt{m'^2 - (l'' + \lambda)(l - \lambda)}\,\sqrt{m^2 - (l' + \lambda)(l'' + \lambda)}$$

und, da er positiv sein muss, so ist $\sqrt{R'} - \sqrt{R}$ reell, und wir können die Reellität aller drei Wurzeln der kubischen Gleichung nachweisen.

Wir hatten den Ausdruck $\frac{N}{l}$ in die beiden Faktoren zerlegt

$$1 + \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi \text{ und } 1 + \alpha' \cos\varphi + \beta' \sin\varphi.$$

Setzt man

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = r\cos\psi & \alpha' = r'\cos\psi' \\ \beta = r\sin\psi & \beta' = r'\cos\psi' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

wo ψ und ψ' konstante Grössen sind, so erhält man

$$\left.\begin{array}{ll} r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & r' = \sqrt{\alpha'^2 + \beta^2} \\ \cos\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \cos\psi' = \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} \\ \sin\psi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \sin\psi' = \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

und $\frac{N}{l} = (1 + r\cos(\varphi - \psi))\ ((1 + r'(\cos\varphi - \psi')).$

Soll N für keinen reellen Werth von φ verschwinden, so darf keiner der beiden Faktoren $= 0$ werden, oder, wenn ich sie $= 0$ setze, muss $\cos(\varphi - \psi)$, wie $\cos(\varphi - \psi')$ imaginär werden, d. h. $r > 1$ und $r' > 1$ so wie $r^2 > 1$ und $r'^2 > 1$; und es muss $r^2 - 1$ so wie $r'^2 - 1$ eine positive Grösse werden, und also auch das Produkt dieser Grössen.

Das Produkt der beiden Ausdrücke ist aber mit Hülfe der beiden Gleichungen (50):

$$1 - \alpha^2 - \alpha'^2 - \beta^2 - \beta'^2 + \alpha^2\alpha'^2 + \beta^2\beta'^2 + \alpha^2\beta'^2 + \beta^2\alpha'^2;$$

und setzen wir für α, α', β und β' deren Werthe aus den Gleichungen (34), jeden multiplizirt mit $(l - \lambda)$, so wird dasselbe

$$(l-\lambda)^2 + (l' + \lambda)^2 + (l'' + \lambda)^2 - 4m'^2 - 4m''^2 + 4m^2 + 2(l' + \lambda)(l - \lambda)$$
$$+ 2(l'' + \lambda)(l - \lambda) - 2(l' + \lambda)(l'' + \lambda)$$

und lässt sich folgender Maassen in drei Theile schreiben:

$$\left.\begin{array}{l}-3\lambda^2-2(l'+l''-l)\lambda+(l'l+ll''-l'l''-m'^2-m''^2+m^2\\+l'^2+l''^2+l^2-2m'^2-2m''^2+2m^2\\+ll'+ll''-l'l''-m'^2-m''^2+m^2.\end{array}\right\} \quad . \quad (51)$$

Die kubische Gleichung (48) giebt aber, wenn man die Relationen zwischen ihren Coëffizienten und Wurzeln betrachtet, die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}l-l'-l''=\lambda+\lambda'+\lambda''\\m'^2+m''^2-m^2+l'l''-ll'-ll''=\lambda\lambda'+\lambda\lambda''+\lambda'\lambda''\\ll'l''-m^2l-m'^2l'-m''^2l''+2mm'm''=\lambda\lambda'\lambda''\end{array}\right\} \quad . \; . \quad (52)$$

wenn λ, λ' und λ'' ihre 3 Wurzeln bedeuten. Sie zeigen uns, dass der erste Theil des Ausdruckes (51) das negative Differentiale derselben Gleichung ist, nach der Differentiation jedoch λ für x gesetzt, der zweite Theil die Summe der Quadrate der drei Wurzeln, der dritte Theil die negative Summe ihrer Verbindungen zu je zweien, oder dass jenes Produkt auch die Form haben kann:

$$-(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')+\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2-\lambda\lambda'-\lambda\lambda''-\lambda'\lambda''$$

d. h. $(\lambda'-\lambda''^2)$.

Da nun dieser Ausdruck positiv sein soll, so können λ' und λ'' nicht imaginär sein d. h. nicht die Form haben $u+t\sqrt{-1}$ und $u-t\sqrt{-1}$.

Um die Relation des biquadratischen Ausdrucks N mit unserer kubischen Gleichung hier gleich zusammen zu fassen, ergiebt sich, dass, wenn N für vier reelle Werthe von φ verschwinden, oder $=0$ gesetzt, vier reelle Wurzeln haben soll, jeder der beiden Faktoren zwei reelle Wurzeln haben muss; d. h. $1-r^2$ wie $1-r'^2$ so wie das Produkt dieser Grössen, welches wir nach allen Umformungen als das Quadrat der Differenz zweier Wurzeln gefunden haben, muss positiv sein oder die kubische Gleichung muss drei reelle Wurzeln haben. Hat N dagegen zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln, so muss von beiden Faktoren $1-r^2$ und $1-r'^2$ der eine immer positiv der andere negativ, oder das Quadrat der Differenz zweier Wurzeln negativ sein; d. h. die kubische Gleichung hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Diesen Zusammenhang können wir auch so aussprechen, dass die kubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat, wenn N für keinen oder vier reelle Werthe von φ verschwindet, dagegen nur eine, wenn N für zwei reelle Werthe von $\varphi=0$ wird.

Um nun die drei reduzirten Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{N} = \int \frac{\alpha - \beta \cos\psi - \gamma \sin\psi}{g - g^{\prime} \cos^2\psi - g^{\prime\prime} \sin^2\psi}\, d\psi$$

$$\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} = \int \frac{\alpha^{\prime} - \beta^{\prime} \cos\psi - \gamma^{\prime} \sin\psi}{g - g^{\prime} \cos^2\psi - g^{\prime\prime} \sin^2\psi}\, d\psi$$

$$\int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N} = \int \frac{\alpha^{\prime\prime} - \beta^{\prime\prime} \cos\psi - \gamma^{\prime\prime} \sin\psi}{g - g^{\prime} \cos^2\psi - g^{\prime\prime} \sin^2\psi}\, d\psi$$

in ihren Grenzen von 0 bis 2π zu finden, müssen wir noch wissen, wie ψ sich verändert, wenn φ von 0 bis 2π wächst.

Es war $\alpha^{\prime}\alpha^{\prime} + \alpha^{\prime\prime}\alpha^{\prime\prime} = \beta\beta + \gamma\gamma = \alpha\alpha - 1 = \delta^2$; ferner folgt aus den Gleichungen (3), (6) und (12)

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\prime} \cos\varphi + \alpha^{\prime\prime} \sin\varphi &= \frac{\delta^2 - \alpha(\beta\cos\psi + \gamma\sin\psi)}{\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi} \\ \alpha^{\prime\prime} \cos\varphi - \alpha^{\prime} \sin\varphi &= \frac{\beta\sin\psi - \gamma\cos\psi}{\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

setzt man in dieselbe

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\prime} &= \delta\cos\varphi^{\prime} \qquad & \beta &= \delta\cos\psi^{\prime} \\ \alpha^{\prime\prime} &= \delta\sin\varphi^{\prime} & \gamma &= \delta\sin\psi^{\prime} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

wo $\varphi^{\prime}$ und $\psi^{\prime}$ konstante Grössen sind und welche Substitution sich immer annehmen lässt, da die Quadrate dieser Grössen sich zu δ^2 ergänzen, so werden die beiden Gleichungen (53) folgende Gestalt bekommen:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\varphi^{\prime} - \varphi) &= \frac{\delta - \alpha\cos(\psi - \psi^{\prime})}{\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi} = \frac{\delta - \alpha\cos(\psi - \psi^{\prime})}{\alpha - \delta\cos(\psi - \psi^{\prime})} \\ \sin(\varphi^{\prime} - \varphi) &= \frac{\sin(\psi - \psi^{\prime})}{\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi} = \frac{\sin(\psi - \psi^{\prime})}{\alpha - \delta\cos(\psi - \psi^{\prime})}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (55)$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \cos(\varphi^{\prime} - \varphi) &= \frac{(\alpha - \delta)(1 + \cos(\psi - \psi^{\prime}))}{\alpha - \delta\cos(\psi - \psi^{\prime})} \\ 1 + \cos(\varphi^{\prime} - \varphi) &= \frac{(\alpha + \delta)(1 - \cos(\psi - \psi^{\prime}))}{\alpha - \delta\cos(\psi - \psi^{\prime})}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

und aus ihnen durch Division die Gleichung

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)\,tg\,\tfrac{1}{2}(\psi - \psi') = \frac{\alpha - \delta}{\alpha + \delta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

durch welche der Winkel ψ aus φ leicht berechnet werden kann. Auch folgt aus ihr, dass die Winkel $\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$ und $\frac{1}{2}(\psi - \psi')$ in derselben Zeit wachsen oder abnehmen und beide zugleich um π oder 2π vermehrt werden. Wir können also in den transformirten Integralen die Grenzen ebenfalls von 0 bis 2π nehmen.

Es wird also

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I.} & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi}{g - g'\cos^2\psi - g''\sin^2\psi}\,d\psi \\[2ex]
\text{II.} & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\,.\,d\varphi}{N} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha' - \beta'\cos\psi - \gamma'\sin\psi}{g - g'\cos^2\psi - g''\sin^2\psi}\,d\psi \\[2ex]
\text{III.} & \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\,.\,d\varphi}{N} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha'' - \beta''\cos\psi - \gamma''\sin^2\psi}{g - g'\cos\psi - g''\sin^2\psi}\,d\psi
\end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (58)$$

Wenn man jeden der drei Ausdrücke in seinen Theilen integrirt, so sei in I. $tg\,\psi = x$ gesetzt, woraus

$$\left.\cos^2\psi = \frac{1}{1 + xx},\quad \sin^2\psi = \frac{xx}{1 + xx},\quad d.\,tg\,\psi = \frac{d\psi}{\cos^2\psi}\ \text{u.}\ d\psi = \frac{dx}{1 + xx}\right\} \quad (59)$$

sich ergiebt und der erste Theil des Integrals I. erhält die Form:

$$\alpha \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(g - g') + (g - g'')\,xx}.$$

Wenn aber der Ausdruck N für keinen reellen Werth von φ verschwindet, so gilt dieses auch von $g - g'\cos^2\psi - g''\sin^2\psi$ und es haben $g - g'$ und $g - g''$ dasselbe Zeichen, wie man dieses auch daraus sieht, dass wenn $\psi = 0$ und $= \pi$ gesetzt wird, der Ausdruck immer auf derselben Seite des Zeichens bleiben muss.

Da nun

$$\alpha\int\frac{dx}{g-g^{\text{I}}+(g-g^{\text{II}})\,xx}=\alpha\int\frac{dx}{(g-g^{\text{I}})\left(1+\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}\,xx\right)}$$

$$=\frac{\alpha}{\sqrt{(g-g^{\text{I}})\,(g-g^{\text{II}})}}\int\frac{dx\,\sqrt{\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}}}{1+\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}\,xx},$$

nachdem ich mit $\sqrt{\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}}$ multiplizirt habe, so wird sein Werth

$$=\frac{\alpha}{\sqrt{(g-g^{\text{I}})\,(g-g^{\text{II}})}}\cdot arc.\left(tg=\sqrt{\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}}\,tg\,\psi\right)$$

und in den angegebenen Grenzen wird dieser Bogen $2\,\pi$, so dass

$$\left.\alpha\int_0^{2\pi}\frac{d\,\psi}{g-g^{\text{I}}cos^2\psi-g^{\text{II}2}sin^2\psi}=\frac{\alpha\,2\pi}{\sqrt{(g-g^{\text{I}})(g-g^{\text{II}})}}=\frac{2\,\pi\sqrt{(l^{\text{I}}+g)\,(l^{\text{I}}+g)-m^2}}{(g-g^{\text{I}})\,(g-g^2),}\right\}\quad(60)$$

nachem für α dessen Werth aus (22) gesetzt worden.

Um die zweiten Theile der Integralausdrücke (58) zu integriren, sei in

$$\beta\int\frac{cos\,\psi\,d\,\psi}{g-g^{\text{I}}\,cos^2\psi-g^{\text{II}}\,sin^2\psi}$$

x für $sin\,\psi$ gesetzt, wodurch das Integral die Form erhält

$$-\beta\int\frac{dx}{(g-g^{\text{I}})+(g^{\text{I}}-g^{\text{II}})\,xx}=\frac{-\beta}{g-g^{\text{I}}}\int\frac{dx}{1+\frac{g^{\text{I}}-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}\,x\,x.}$$

Hier ist der doppelte Fall zu berücksichtigen, ob $g^{\text{I}}-g^{\text{II}}$ und $g-g^{\text{I}}$ dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen haben, d. h. ob ihre Auflösung auf Kreisbogen oder Logarithmen führt. Für beide Fälle lässt sich nachweisen, dass der Ausdruck in den gegebenen Grenzen verschwindet.

1) Haben $g^{\text{I}}-g^{\text{II}}$ und $g-g^{\text{I}}$ entgegengesetzte Zeichen; so lässt sich

$$-\int\frac{dx}{1-\frac{g^{\text{II}}-g^{\text{I}}}{g-g^{\text{I}}}}$$

in die beiden Theile zerlegen

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{g''-g'}{g-g'}}}\left\{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-\sqrt{\frac{g''-g'}{g-g'}}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+\sqrt{\frac{g''-g'}{g-g'}}}\right\},$$

die nach der Integration geben:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{g''-g'}{g-g'}}}\;log\left(\frac{\sqrt{g-g'}+x\sqrt{g''-g'}}{\sqrt{g-g'}-x\sqrt{g''-g'}}\right);$$

oder es wird der zweite Theil der Ausdrücke (58), wenn $g'-g''$ und $g-g$ verschiedene Zeichen haben:

$$\beta\int\frac{\cos\psi\,d\psi}{g-g'\cos^2\psi-\sin^2\psi}$$

$$=\frac{\sqrt{(l'+g')(l''+g')-m^2}}{\sqrt{(g'-g)(g'-g'')}}\;log\left(\frac{\sqrt{g-g'}+\sin\psi\sqrt{g''-g'}}{\sqrt{g-g'}-\sin\psi\sqrt{g''-g'}}\right),$$

welcher Theil in den gegebenen Grenzen verschwinden muss.

2) Bei der zweiten Voraussetzung, dass $g'-g''$ und $g-g'$ gleiche Zeichen haben, ist $\int\frac{dx}{1+\frac{g'-g''}{g-g'}xx}$ auf dieselbe Form gebracht, wie der erste Theil und wir erhalten also

$$\beta\int\frac{\cos\psi\,d\psi}{g-g'\cos^2\psi-g''\sin^2\psi}=\frac{\beta}{\sqrt{(g-g')(g'-g'')}}\;arc\left[tg=\sqrt{\frac{g'-g''}{g-g'}}\sin\psi\right];\quad(62)$$

der Bogen aber, dessen Tangente $=\sqrt{\frac{g'-g''}{g-g'}}\sin\psi$ ist, wird 0 für $\psi=0$, wächst bis $\psi=90^0$ im Positiven, nimmt von da ab bis $\psi=180^0$, wo der Bogen wieder 0 wird. Eben so ist sein Wachsen auf der negativen Seite bis $\psi=270^0$ wird und sein Abnehmen von da ab. Es ist also der Bogen $=0$, wenn ψ von 0 bis 2π gewachsen ist.

Dasselbe Raisonnement lässt sich Schritt vor Schritt auf den dritten Theil der Integralausdrücke I. (58) anwenden und giebt auch die aus diesem Theile resultirende Grösse $=0$ und es ist überflüssig zu bemerken, dass auch II. und III. nur durch die Integrationen ihres ersten Theiles erhalten werden.

Somit werden die drei Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\text{I.} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N} = \frac{2\pi \sqrt{(l^{\prime} + g)(l^{\prime\prime} + g) - m^2}}{(g - g^{\prime})(g - g^{\prime\prime})} \\
\text{II.} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{N} = \frac{2\pi \sqrt{(l - g)(l^{\prime\prime} + g) - m^{\prime 2}}}{(g - g^{\prime})(g - g^{\prime\prime})} \\
\text{III.} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{N} = \frac{2\pi \sqrt{(l - g)(l^{\prime} + g) - m^{\prime\prime 2}}}{(g - g^{\prime})(g - g^{\prime\prime})},
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (63)$$

auf welche sich auch die drei anderen Integrale, wie dieses noch nachgewiesen werden soll, zurückführen lassen.

Obgleich der erste Theil der vorgelegten Aufgabe durch Vorstehendes in allen Theilen gelöst ist, so wollen wir doch der Vollständigkeit wegen diese Integrale durch Zerfällung des Ausdruckes $\frac{1}{N}$ in seine Partialbrüche und durch die Integration derselben aufsuchen und zeigen, wie sich diese Resultate unter die Gestalt der gegebenen bringen lassen.

Es war zu dem Zwecke:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{N} &= \frac{1}{l - \lambda} \left[\frac{1}{(1 + \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)(1 + \alpha^{\prime}\cos\varphi + \beta^{\prime}\sin\varphi)} \right] \\
&= \frac{1}{l - \lambda} \left[\frac{1}{(1 + r\cos(\varphi - \psi))(1 + r^{\prime}\cos(\varphi - \psi^{\prime}))} \right]
\end{aligned}\right\} . (64)$$

und α, $\alpha^{\prime}$, β, $\beta^{\prime}$ r und $r^{\prime}$ durch die Gleichungen (34) und (50) bestimmt wurden als

$$\alpha = \frac{m^{\prime\prime} + \sqrt{m^{\prime\prime 2} - (l^{\prime} + \lambda)(l - \lambda)}}{(l - \lambda)}, \quad \alpha^{\prime} = \frac{m^{\prime\prime} - \sqrt{m^{\prime\prime 2} - (l^{\prime} + \lambda)(l - \lambda)}}{(l - \lambda)},$$

$$\beta = \frac{m^{\prime} + \sqrt{m^{\prime 2} - (l^{\prime\prime} + \lambda)(l - \lambda)}}{l - \lambda}, \quad \beta^{\prime} = \frac{m^{\prime} - \sqrt{m^{\prime 2} - (l^{\prime\prime} + \lambda)(l - \lambda)}}{l - \lambda},$$

$$\alpha = r\cos\psi, \quad \alpha^{\prime} = r^{\prime}\cos\psi^{\prime}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$
$$\beta = r\sin\psi, \quad \beta^{\prime} = r^{\prime}\sin\psi^{\prime}, \quad \alpha^{\prime 2} + \beta^{\prime 2} = r^{\prime 2}.$$

Wir wollen nun

$$\left.\begin{array}{ll} e^{i\varphi} = z, & a^{|} = \frac{r^{|}}{2} e^{-i\psi^{|}}, \\ a = \frac{r}{2} e^{-i\psi}, & b^{|} = \frac{r^{|}}{2} e^{i\psi^{|}}, \\ b = \frac{r}{2} e^{i\psi}, & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

setzen, wo z die Basis des natürlichen Logarithmensystems und $i = \sqrt{-1}$ ist, so wird, da

$$\left.\begin{array}{l} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \\ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

ist,

$$\frac{1}{(1 + r\cos(\varphi - \psi))(1 + r^{|}\cos(\varphi - \psi))} = \frac{z^2}{(z + az^2 + b)(z + a^{|}z^2 + b^{|})} \Big\} \quad \ldots \quad (67)$$

Wenn man diesen Ausdruck in die beiden Partialbrüche zerlegt

$$\frac{p + qz}{z + az^2 + b} + \frac{p^{|} + q^{|}z}{z + a^{|}z^2 + b^{|}}, \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

so dienen zur Bestimmung von p, $p^{|}$, q und $q^{|}$ folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} pb^{|} + bp^{|} = 0 \\ qb^{|} + bq^{|} + p + p^{|} = 0 \\ pa^{|} + p^{|}a + q + q^{|} = 1 \\ qa^{|} + aq^{|} = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Aus der ersten und vierten derselben fliesst $p = -p^{|}\frac{b}{b^{|}}$, und $q = -q^{|}\frac{a}{a^{|}}$, und dieses in die zweite und dritte gesetzt, giebt die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} q^{\prime}\,\frac{(b\,a^{\prime}-a\,b^{\prime})}{a^{\prime}}+p^{\prime}\,\frac{(b^{\prime}-b)}{b^{\prime}}&=0\\ q^{\prime}\,\frac{(a^{\prime}-a)}{a^{\prime}}-p^{\prime}\,\frac{(b\,a^{\prime}-a\,b^{\prime})}{b^{\prime}}&=1,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(70)$$

woraus dann die Grössen p, $p^{\prime}$, q und $q^{\prime}$ sich ergeben:

$$\left.\begin{aligned} q^{\prime}&=\frac{(b^{\prime}-b)\,a^{\prime}}{(b\,a^{\prime}-a\,b^{\prime})^{2}+(a^{\prime}-a)\,(b^{\prime}-b)}\\ q&=\frac{(b-b^{\prime})\,a}{(b\,a^{\prime}-a\,b^{\prime})^{2}+(a^{\prime}-a)\,(b^{\prime}-b)}\\ p^{\prime}&=\frac{(a\,b^{\prime}-b\,a^{\prime})\,b^{\prime}}{(a^{\prime}b-b^{\prime}a)^{2}+(a^{\prime}-a)\,(b^{\prime}-b)}\\ p&=\frac{(a^{\prime}b-a\,b^{\prime})\,b}{(a^{\prime}b-b^{\prime}a)^{2}+(a^{\prime}-a)\,(b^{\prime}-b)}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(71)$$

Nun wollen wir die Werthe der Grössen a, $a^{\prime}$, b und $b^{\prime}$ aus (65) zurück substituiren und für e^{ix} u. e^{-ix} resp. schreiben $\cos x+i\sin x$ und $\cos x-i\sin x$, so dass

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,(\cos\varphi-i\sin\varphi)=1;\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(72)$$

dann wird der Nenner der Grössen p, $p^{\prime}$, q und $q^{\prime}$, wenn er mit $N^{\prime}$ bezeichnet worden

$$N^{\prime}=r^{\prime\,2}+r^{2}-2rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})-(rr^{\prime})^{2}\sin^{2}(\psi-\psi^{\prime});\quad\ldots\quad(73)$$

sie selbst bekommen folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} q&=\frac{r^{2}-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})+i\,rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})}{N^{\prime}}\\ q^{\prime}&=\frac{r^{\prime\,2}-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})-i\,rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})}{N^{\prime}}\\ \frac{p}{z}&=\frac{r^{2}\,r^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})\,(\sin(\varphi-\psi)+i\cos(\varphi-\psi))}{N^{\prime}}\\ \frac{p^{\prime}}{z}&=\frac{-r^{\prime\,2}\,r\sin(\psi-\psi^{\prime})\,(\sin(\varphi-\psi^{\prime})+i\cos(\varphi-\psi^{\prime})).}{N^{\prime}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(74)$$

Diese Ausdrücke wollen wir in N substituiren und zwar in der Form wie sie (68) giebt, so wird

$$\frac{l-\lambda}{N}=\frac{1}{N^{\prime}}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{r^2-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})+rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})(i+r\sin(\varphi-\psi)+ir\cos(\varphi-\psi))}{1+r\cos(\varphi-\psi)}\\ \dfrac{+r^{\prime 2}-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})-rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})(i+r^{\prime}\sin(\varphi-\psi^{\prime})+ir^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime}))}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\end{array}\right\}.\quad(75)$$

Der imaginäre Theil in diesem Ausdrucke verschwindet, denn er ist

$$i\,rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})\left[\frac{1+r\cos(\varphi-\psi)}{1+r\cos(\varphi-\psi)}-\frac{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})},\right]$$

und es bleibt also:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{l-\lambda}{N}=\dfrac{1}{N^{\prime}}\left[\dfrac{r^2-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})}{1+r\cos(\varphi-\psi)}+\dfrac{r^{\prime 2}-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\right.\\ \left.+rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})\left\{\dfrac{r\sin(\varphi-\psi)}{1+r\cos(\varphi-\psi)}-\dfrac{r^{\prime}\sin(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\right\}\right].\end{array}\right\}\quad(76)$$

Wenn wir diesen Ausdruck (76) mit $d\varphi$ multipliziren, so giebt er das erste der vorgelegten Integrale $\int\frac{d\varphi}{N}$. Eine genauere Betrachtung seines zweiten Theiles zeigt aber, dass

$$\left[\frac{r\sin(\varphi-\psi)}{1+r\cos(\varphi-\psi)}-\frac{r^{\prime}\sin(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\right]d\varphi=d.\log\frac{\left[\dfrac{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r\cos(\varphi-\psi)}\right]}{d\varphi}d\varphi$$

oder

$$\int\left[\frac{r\sin(\varphi-\psi)}{1-r\cos(\varphi-\psi}-\frac{r^{\prime}\sin(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\right]d\varphi=\log\frac{1+r^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})}{1+r\cos(\varphi-\psi)}+C\ \Big\}\ (77)$$

ist, welches in den gegebenen Grenzen von 0 bis 2π verschwindet. Es bleiben also von $\int\frac{d\varphi}{N}$ nur die beiden ersten Theile übrig, von denen der zweite sich aus dem ersten durch die Vertauschung der Indices von r und ψ ergiebt.

Hat man ein Integral von der Form: $\int\frac{dz}{a+b\cos z}$, so sei $tg\frac{1}{2}z=x$, also

$$\cos z=\frac{1-xx}{1+xx},\quad \sin z=\frac{2x}{1+xx}\ \text{und}\ dz=\frac{2dx}{1+xx};$$

so wird dadurch

$$\int\frac{dz}{a+b\cos z}=2\int\frac{dx}{a+b+(a-b)xx},$$

und ist $b < a$ und beide Grössen positiv, so erhält man:

$$\int \frac{dz}{a + b\cos z} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arc\,.\left(tg = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right) + C. \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

Nach dieser Analogie wird, wenn

$$\begin{array}{ll} a = 1 & \text{und } a^| = 1 \\ b = r & b^| = r^| \\ z = \varphi - \psi & z = \varphi - \psi^| \end{array}$$

gesetzt wird, aus dem Ausdrucke (78)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{d\varphi}{1 + r\cos(\varphi - \psi)} = \frac{2}{\sqrt{1 - r^2}}\, arc\, \left(tg = \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\, tg\, \frac{(\varphi - \psi)}{2}\right) + C \\ \displaystyle\int \frac{d\varphi}{1 + r^|\cos(\varphi - \psi^|)} = \frac{2}{\sqrt{1 - r^{|2}}}\, arc\, \left(tg = \sqrt{\frac{1-r^|}{1+r^|}}\, tg\, \frac{(\varphi - \psi^|)}{2}\right) + C \end{array}\right\}. \quad (79)$$

Die Bogen aber, dessen Tangenten resp.

$$\sqrt{\frac{1-r}{1-r}}\, tg\, \frac{\varphi - \psi}{2} \text{ und } \sqrt{\frac{1-r^|}{1+r^|}}\, tg\, \frac{(\varphi - \psi^|)}{2}$$

sind, werden wenn φ von 0 bis 2π wächst, π und wir erhalten also:

$$\text{I.} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N} = \frac{2\pi}{(l - \lambda) N^|} \left\{ \frac{r^2 - rr^|\cos(\psi - \psi^|)}{\sqrt{1 - r^2}} + \frac{r^{|2} - rr^|\cos(\psi - \psi^|)}{\sqrt{1 - r^{|2}}} \right\}. \quad (80)$$

Auf dieses Integral lassen sich aber

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} \text{ und } \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

zurückführen, wie dieses in Folgendem bewiesen werden soll.

Es sei

$$P = 1 + \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi$$
$$P^| = 1 + \alpha^|\cos\varphi + \beta^|\sin\varphi,$$

so giebt dieses:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\frac{d.\log P}{d\varphi} = -\frac{\alpha\sin\varphi}{P} + \frac{\beta\cos\varphi}{P} \\ \displaystyle 1 - \frac{1}{P} = \frac{\alpha\cos\varphi}{P} + \frac{\beta\sin\varphi}{P} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

und zwei entsprechende Gleichungen zwischen α', β' und P'. Wenn wir die erste derselben mit α, die zweite mit β und wiederum die erste mit β, die zweite mit α multipliziren und im ersten Falle beide subtrahiren, im zweiten addiren, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \beta - \frac{\beta}{P} - \alpha\,\frac{d\,.\,log\,P}{d\varphi} &= (\alpha^2+\beta^2)\,\frac{sin\,\varphi}{P} \\ \alpha - \frac{\alpha}{P} + \frac{\beta\,d\,.\,log\,P}{d\varphi} &= (\alpha^2+\beta^2)\,\frac{cos\,\varphi}{P} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Diese Grössen haben wir mit $d\varphi$ zu multipliziren und in den gegebenen Grenzen zu integriren, um

$$\int_0^{2\pi}\frac{cos\,\varphi\,d\varphi}{P} \text{ und } \int_0^{2\pi}\frac{sin\,\varphi\,d\varphi}{P}$$

zu haben.

Dieses giebt:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\frac{sin\,\varphi\,d\varphi}{1+r\,cos\,(\varphi-\psi)} &= \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}d\varphi - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+r\,cos\,(\varphi-\psi)} \\ &\quad - \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\,.\,log\,(1+r\,cos\,(\varphi-\psi))}{d\varphi}\,d\varphi \\ \int_0^{2\pi}\frac{cos\,\varphi\,d\varphi}{1+r\,cos(\varphi-\psi)} &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}d\varphi - \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+r\,cos\,(\varphi-\psi)} \\ &\quad + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\,.\,log\,(1+r\,cos\,(\varphi-\psi))}{d\varphi}\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Von diesen drei Theilen verschwindet immer der dritte in den Grenzen von 0 bis 2π, der erste wird 2π und der zweite nach Anwendung von (79) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-r^2}}$, so dass wir auch schreiben können:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)}&=2\pi\frac{\sin\psi}{r}\left\{\frac{\sqrt{1-r^2}-1}{\sqrt{1-r^2}}\right\}\\ \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)}&=2\pi\frac{\cos\psi}{r}\left\{\frac{\sqrt{1-r^2}-1}{\sqrt{1-r^2}}.\right\}\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\;(84)$$

Setzen wir für r und ψ jetzt $r^{\prime}$ und $\psi^{\prime}$ so erhalten wir die entsprechenden Formeln für

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\text{ und }\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}.$$

Der zweite Theil der Ausdrücke II. und III. besteht aus Integralen von der Form

$$\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)},\;\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)},\text{ und }\int\frac{\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)}$$

und den entsprechenden, wenn man r und ψ mit $r^{\prime}$ und $\psi^{\prime}$ vertauscht. Um diese zu finden, können wir wieder die identischen Gleichungen aufnehmen

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi-\frac{\sin\varphi}{P}&=\frac{\alpha\cos\varphi\sin\varphi}{P}+\beta\,\frac{\sin^2\varphi}{P}\\ \cos\varphi-\frac{\cos\varphi}{P}&=\frac{\alpha\cos^2\varphi}{P}+\beta.\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{P}\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(85)$$

und erhalten, wenn die erste mit α, die zweite mit β, dann die erste mit β und die zweite mit α multiplizirt wird, im ersten Falle durch Addition, im zweiten durch Subtraction

$$\left.\begin{aligned}\alpha\sin\varphi+\beta\cos\varphi-\alpha\frac{\sin\varphi}{P}-\beta\frac{\cos\varphi}{P}&=(\alpha^2+\beta^2)\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{P}+\frac{\alpha\beta}{P}\\ \beta\sin\varphi-\alpha\cos\varphi-\beta\frac{\sin\varphi}{P}+\alpha\frac{\cos\varphi}{P}&=-\frac{\alpha^2}{P}+(\alpha^2+\beta^2)\frac{\sin^2}{P}\\ &=\frac{\beta^2}{P}-(\alpha^2+\beta^2)\frac{\cos^2\varphi}{P}.\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(86)$$

Diese Ausdrücke sind mit $d\varphi$ zu multipliziren und zu integriren und wir erhalten dann

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int\left(\sin\varphi+\frac{\beta}{\alpha}\cos\varphi\right)d\varphi-\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int\frac{\sin\varphi}{P}d\varphi \\
&\quad -\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{P}-\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int\frac{d\varphi}{P}. \\
\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha^2\int\frac{d\varphi}{P}+\beta\int\sin\varphi\,d\varphi-\alpha\int\cos\varphi\,d\varphi\right. \\
&\quad \left.+\alpha\int\frac{\cos\varphi}{P}d\varphi-\beta\int\frac{\sin\varphi}{P}d\varphi\right] \\
\int\frac{\cos^2\varphi\,.\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[\beta^2\int\frac{d\varphi}{P}-\beta\int\sin\varphi\,d\varphi+\alpha\int\cos\varphi\,d\varphi\right. \\
&\quad \left.-\alpha\int\frac{\cos\varphi}{P}d\varphi+\beta\int\frac{\sin\varphi}{P}d\varphi\right].
\end{aligned}\right\}(87)$$

Drei ähnliche Gleichungen giebt die Vertauschung von r und ψ mit $r^{\prime}$ und $\psi^{\prime}$ für die Integralausdrücke

$$\int\frac{\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})},\quad\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})},\quad\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}.$$

In dieser Zusammensetzung sind keine neuen Integralausdrücke hinzugekommen, die nicht schon durch die früheren (84) und (79) gegeben waren, ausser

$$\int\sin\varphi\,d\varphi \quad \text{und} \quad \int\cos\varphi\,d\varphi.$$

Beide verschwinden aber in den gegebenen Grenzen von 0 bis 2π und es lassen sich also II. und III. in allen ihren Theilen jetzt zusammensetzen.

Um

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{N}$$

auf diese Art zu entwickeln, wollen wir (76) mit $\sin\varphi\,d\varphi$ multipliziren und integriren und bei der Integration Anwendung machen von den eben entwickelten Gleichungen (79), (84) und (87), nachdem zu denselben die entsprechenden in $r^{\prime}$ $\psi^{\prime}$ gebildet worden sind.

Dieses giebt uns:

$$\text{II.} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'} \left\{ \begin{array}{l} (r^2 - rr' \cos(\psi - \psi')) \dfrac{\sin\psi}{r} \dfrac{(\sqrt{1-r^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}} \\ + (r'^2 - rr' \cos(\psi - \psi')) \dfrac{\sin\psi'}{r'} \dfrac{(\sqrt{1-r'^2}-1)}{\sqrt{1-r'^2}} \\ + rr' \sin(\psi - \psi') \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{r\cos\psi(\sqrt{1-r^2}\cos^2\psi + \sin^2\psi)}{\sqrt{1-r^2}\,(1+\sqrt{1-r^2})} \\ + \dfrac{r\sin^2\psi\cos\psi(\sqrt{1-r^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}\,(1+\sqrt{1-r^2})} \\ \dfrac{-r'\cos\psi'(\sqrt{1-r'^2}\cos^2\psi' + \sin^2\psi')}{\sqrt{1-r'^2}\,(1+(\sqrt{1-r'^2})} \\ \dfrac{-r'\sin^2\psi'\cos\psi'(\sqrt{1-r'^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}\,(1+\sqrt{1-r'^2})}. \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (88)$$

Der zweite Theil dieses Ausdruckes reduzirt sich, wie man gleich sieht, in die einfache Gestalt von:

$$rr' \sin(\psi - \psi') \left(\frac{r\cos\psi}{1+\sqrt{1-r^2}} - \frac{r'\cos\psi'}{1+\sqrt{1-r'^2}} \right);$$

oder, da

$$(1+\sqrt{1-r^2})(1-\sqrt{1-r^2}) = r^2$$

ist, in

$$r' \sin(\psi - \psi') \cos\psi + \frac{r^2 r' \sin(\psi - \psi') \cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r' \sin(\psi - \psi)}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$- r \sin(\psi - \psi') \cos\psi' - \frac{r'^2 r \sin(\psi - \psi') \cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} + \frac{r \sin(\psi - \psi') \cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}.$$

Von diesen Gliedern vereinigen sich mehrere mit den aus dem ersten Theile, wenn wir denselben so zerlegen:

$$r \sin\psi - r' \sin\psi \cos(\psi - \psi') - \frac{r \sin\psi}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r' \cos(\psi - \psi') \sin\psi}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$+ r' \sin\psi' - r \sin\psi' \cos(\psi - \psi') - \frac{r' \sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} + \frac{r \cos(\psi - \psi') \sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}},$$

und es wird jetzt:

$$\text{II.} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda) N'} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{r' (\cos(\psi - \psi') \sin\psi - \sin(\psi - \psi') \cos\psi)(1 - \sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} \\ \quad + \dfrac{r (\cos(\psi - \psi') \sin\psi' - \sin(\psi - \psi') \cos\psi')(1 - \sqrt{1-r'^2})}{\sqrt{1-r'^2}} \\ + \dfrac{r \sin\psi (\sqrt{1-r^2} - 1)}{\sqrt{1-r^2}} + \dfrac{r' \sin\psi' (\sqrt{1-r'^2} - 1)}{\sqrt{1-r'^2}} \\ \qquad + r r' \sin(\psi - \psi') \left(\dfrac{r \cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \dfrac{r' \cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} \right) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda) N'} \left\{ \begin{array}{l} (r' \sin\psi' - r \sin\psi) \dfrac{(1 - \sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} + (r \sin\psi - r' \sin\psi') \dfrac{(1 - \sqrt{1-r'^2})}{\sqrt{1-r'^2}} \\ \qquad + r r' \sin(\psi - \psi') \left(\dfrac{r \cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \dfrac{r' \cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} \right) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda) N'} \left\{ \begin{array}{l} (r' \sin\psi' - r \sin\psi) \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-r'^2}} \right) \\ \quad + r r' \sin(\psi - \psi') \left(\dfrac{r \cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \dfrac{r' \cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} \right). \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (89)$$

Auf demselben Wege gelangt man aus der Gleichung (76) nach der Multiplication von $\cos\varphi\, d\varphi$ zu:

$$\text{III.} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N^{\prime}} \left\{ \begin{array}{l} (r^2 - rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime}))\dfrac{\cos\psi}{r}\dfrac{(\sqrt{1-r^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}} \\ \quad + (r^{\prime 2} - rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime}))\dfrac{\cos\psi^{\prime}}{r^{\prime}}\dfrac{(\sqrt{1-r^{\prime 2}}-1)}{\sqrt{1-r^{\prime 2}}} \\ \quad + rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime}) \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{r\cos^2\psi\sin\psi(\sqrt{1-r^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})} \\ -\dfrac{r\sin\psi(\sqrt{1-r^2}\sin^2\psi+\cos^2\psi)}{\sqrt{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})} \\ +\dfrac{r^{\prime}\cos^2\psi^{\prime}\sin\psi^{\prime}(\sqrt{1-r^{\prime 2}}-1)}{\sqrt{1-r^{\prime 2}}(1+\sqrt{1-r^{\prime 2}})} \\ +\dfrac{r^{\prime}\sin\psi^{\prime}(\sqrt{1-r^{\prime 2}}\sin^2\psi^{\prime}+\cos^2\psi^{\prime})}{\sqrt{1-r^{\prime 2}}(1+\sqrt{1-r^{\prime 2}})}, \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

und nach derselben Reduktion wird dieser Ausdruck:

$$\text{III.} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N^{\prime}} \left\{ \begin{array}{l} -r^{\prime}(\cos(\psi-\psi^{\prime})\cos\psi + \sin(\psi-\psi^{\prime})\sin\psi)\dfrac{(\sqrt{1-r^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r(\cos(\psi-\psi^{\prime})\cos\psi^{\prime} - \sin(\psi-\psi^{\prime})\sin\psi^{\prime})\dfrac{(\sqrt{1-r^{\prime 2}}-1)}{\sqrt{1-r^{\prime 2}}} \\ +r\cos\psi\dfrac{(\sqrt{1-r^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}} + r^{\prime}\cos\psi^{\prime}\dfrac{(\sqrt{1-r^{\prime 2}}-1)}{(\sqrt{1-r^{\prime 2}})} \\ \quad + rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})\left[\dfrac{r^{\prime}\sin\psi^{\prime}}{\sqrt{1-r^{\prime 2}}} - \dfrac{r\sin\psi}{\sqrt{1-r^2}}\right] \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N^{\prime}} \left\{ \begin{array}{l} (r^{\prime}\cos\psi^{\prime} - r\cos\psi)\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-r^{\prime 2}}}\right] \\ \quad + rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})\left[\dfrac{r^{\prime}\sin\psi^{\prime}}{\sqrt{1-r^{\prime 2}}} - \dfrac{r\sin\psi}{\sqrt{1-r^2}}\right]. \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

Wir wollen nun die drei Resultate zusammenstellen, die jede der beiden Methoden gegeben hat und dann untersuchen, wie die einen auf die anderen zurückgeführt werden können.

Es war aus (63), (80), (89) und (90)

$$\left.\begin{aligned}
\text{I.} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l'+g)(l''+g)-m^2}}{(g-g')(g-g'')} = \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'}\left[\frac{r^2-rr'\cos(\psi-\psi')}{\sqrt{1-r^2}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{r'^2-rr'\cos(\psi-\psi')}{\sqrt{1-r'^2}}\right].\\
\text{II.} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l-g)(l'+g)-m''^2}}{(g-g')(g-g'')}\\
&= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'}\left[(r'\sin\psi'-r\sin\psi)\left\{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-r'^2}}\right\}\right.\\
&\qquad\left.+rr'\sin(\psi-\psi')\left\{\frac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{r'\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}\right\}\right].\\
\text{III.} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l-g)(l''+g)-m'^2}}{(g-g')(g-g'')}\\
&= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'}\left[(r'\cos\psi'-r\cos\psi)\left\{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-r'^2}}\right\}\right.\\
&\qquad\left.+rr'\sin(\psi-\psi')\left\{\frac{r'\sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}-\frac{r\sin\psi}{\sqrt{1-r^2}}\right\}\right],
\end{aligned}\right\}\quad(91)$$

wo der allgemeine Nenner N' sich ergab (73)

$$N' = r'^2 + r^2 - 2rr'\cos(\psi-\psi') - r^2 r'^2 \sin^2(\psi-\psi')$$

oder, für r, r', $\cos\psi$, $\cos\psi'$, $\sin\psi$, $\sin\psi'$ ihre Werthe gesetzt, wie sie in den Gleichungen (50) enthalten sind,

$$N' = \frac{(\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2 - (\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}{(l-\lambda)^2}.$$

Nach der Substitution von (34) wird der Zähler dieses Ausdruckes

$$[m''^2 - (l'+\lambda)(l-\lambda) + m'^2 - (l''+\lambda)(l-\lambda) - m^2 + (l''+\lambda)(l'+\lambda)]\,4.$$

d. h. das Differentiale unserer früheren kubischen Gleichung in ihrer geordneten Gestalt, wenn nach der Differentiation $x=\lambda$ gesetzt wird, so dass also

$$N^{\prime} = \frac{(\lambda - \lambda^{\prime})(\lambda - \lambda^{\prime\prime})4}{(l - \lambda)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

wird. Wir haben in dem Früheren eben so gesehen, dass

$$\pm \sqrt{(1 - r^2)(1 - r^{\prime 2})} = \frac{\lambda^{\prime} - \lambda^{\prime\prime}}{l - \lambda};$$

es muss also auch

$$\sqrt{\beta^{\prime 2} - \alpha^2 \beta^{\prime 2} - \beta^2 \beta^{\prime 2}} . \sqrt{\beta^2 - \alpha^{\prime 2} \beta^2 - \beta^{\prime 2} \beta^2} = \beta\beta^{\prime} \sqrt{(1 - r^2)(1 - r^{\prime 2})} = \pm \frac{(\lambda^{\prime\prime} + \lambda)(\lambda^{\prime} - \lambda^{\prime\prime})}{(l - \lambda)(l - \lambda)} \quad (93)$$

und

$$\left.\begin{aligned} &\left(\beta \sqrt{1 - \alpha^{\prime 2} - \beta^{\prime 2}} + \beta^{\prime} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}\right)^2 \\ &= \frac{4m^{\prime 2} - 2(l^{\prime\prime} + \lambda)(l - \lambda) - 4m^2 + 2(l^{\prime\prime} + \lambda)(l^{\prime} + \lambda) - 2(l^{\prime\prime} + \lambda)^2 + 2(l^{\prime\prime} + \lambda)(\lambda^{\prime} - \lambda^{\prime\prime})}{(l - \lambda)^2} \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

$$= \frac{4m^{\prime 2} - 4m^2 - 2(l^{\prime\prime} + \lambda)(l - \lambda - l^{\prime} - \lambda + l^{\prime\prime} + \lambda + \lambda^{\prime\prime} - \lambda^{\prime})}{(l - \lambda)^2}$$

$$= \frac{4m^{\prime 2} - 4m^2 - 4(l^{\prime\prime} + \lambda)(l^{\prime\prime} + \lambda^{\prime})}{(l - \lambda)^2},$$

weil $l - l^{\prime} - l^{\prime\prime} = \lambda + \lambda^{\prime} + \lambda^{\prime\prime}$ war; woraus:

$$\beta \sqrt{1 - \alpha^{\prime 2} - \beta^{\prime 2}} + \beta^{\prime} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{4\left[m^{\prime 2} - m^2 - (l^{\prime\prime} + \lambda)(l^{\prime\prime} + \lambda^{\prime})\right]}. \quad (95)$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir:

$$\alpha^{\prime} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \; . \; \alpha \sqrt{1 - \alpha^{\prime 2} - \beta^{\prime 2}} = \frac{(l + \lambda)(l^{\prime} + \lambda^{\prime\prime})}{(l - \lambda)^2};$$

also

$$\left(\alpha^{\prime} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} + \alpha \sqrt{1 - \alpha^{\prime 2} - \beta^{\prime 2}}\right)^2$$

$$= \frac{4m^{\prime\prime 2} - 4m^2 - 2(l^{\prime} + \lambda)(l - \lambda) + 2(l^{\prime\prime} + \lambda)(l^{\prime} + \lambda) - 2(l^{\prime} + \lambda)^2 + 2(l^{\prime} + \lambda)(\lambda^{\prime} - \lambda^{\prime\prime})}{(l - \lambda)^2}$$

$$= \frac{4m^{\prime\prime 2} - 4m^2 - 2(l^{\prime} + \lambda)(l - \lambda - l^{\prime\prime} - \lambda + l^{\prime} + \lambda + \lambda^{\prime\prime} - \lambda^{\prime})}{(l - \lambda)^2}$$

$$= \frac{4m^{\prime\prime 2} - 4m^2 - 4(l^{\prime} + \lambda)(l^{\prime} + \lambda^{\prime\prime})}{(l - \lambda)^2},$$

woraus

$$\alpha^{\prime} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} + \alpha \sqrt{1 - \alpha^{\prime 2} - \beta^{\prime 2}} = \frac{\sqrt{4(m^{\prime\prime 2} - m^2 - (l^{\prime} + \lambda)(l^{\prime} + \lambda^{\prime\prime}))}}{(l - \lambda)}. \quad (96)$$

Eben so ist

$$(\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}+\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2})^2$$
$$=\frac{2(l-\lambda)^2-4m'^2-4m''^2+2(l'+\lambda)(l-\lambda)+2(l-\lambda)(l''+\lambda)+2(l-\lambda)(\lambda'-\lambda'')}{(l-\lambda)^2}$$
$$=\frac{2(l-\lambda)(l-\lambda+l'+\lambda+l''+\lambda+\lambda'-\lambda'')-4m'^2-4m''^2}{(l-\lambda)^2},$$

woraus

$$\sqrt{1-r^2}+\sqrt{1-r'^2}=\frac{\sqrt{4[(l-\lambda)(l-\lambda')-m'^2-m''^2]}}{(l-\lambda)}. \quad \ldots \quad (97)$$

Es war, was die kubische Gleichung anbetraf,

$$(x-\lambda)(x-\lambda')(x-\lambda'')$$
$$=-1[(l-x)(l'+x)(l''+x)-m^2(l-x)-m'^2(l'+x)-m''^2(l''+x)+2mm'm''];$$

die Differentiation dieser Gleichung giebt:

$$(x-\lambda)(x-\lambda')+(x-\lambda)(x-\lambda'')+(x-\lambda')(x-\lambda'')$$
$$=m'^2+m''^2-m^2+(l'+x)(l''+x)-(l-x)(l'+x)-(l''+x)(l-x), \qquad (98)$$

und setzen wir hier $x=-l''$, so verwandelt sich der Ausdruck in folgenden:

$$(l''+\lambda)(l''+\lambda')+(l''+\lambda)(l''+\lambda'')+(l''+\lambda')(l''+\lambda'')=m'^2+m''^2-m^2-(l+l'')(l'-l'').$$

Hieraus wird mit Hülfe der Gleichungen (19)

$$(l''+\lambda)(l''+\lambda'')=m'^2+m''^2-m^2+l''^2-l''(l'-l+\lambda+\lambda'+\lambda''+\lambda')-2l''^2-\lambda'(\lambda+\lambda''),$$

oder

$$\left.\begin{aligned}&(l''+\lambda)(l''+\lambda'')\\&=m'^2+m''^2-m^2-l''^2-\lambda'(l-l'-l''-\lambda')-l''(-\lambda'-\lambda''-l''+2\lambda'+\lambda'')\\&=m'^2+m''^2-m^2-(l-\lambda')(l'+\lambda').\end{aligned}\right\} \quad (99)$$

Setzt man aber in die Gleichung (98) $x=-l'$, so gelangt man durch dieselbe Transformation zu dem Ausdrucke $(l'+\lambda)(l'+\lambda'')$; es wird mämlich

$$\left.\begin{aligned}&(l'+\lambda)(l'+\lambda'')\\&=m'^2+m''^2-m^2-(l'+l)(l''-l')-(l'+\lambda)(l'+\lambda')-(l'+\lambda')(l'+\lambda'')\\&=m'^2+m''^2-m^2-l''l-l\lambda'+l''\lambda'+\lambda'^2\\&=m'^2+m''^2-m^2-(l-\lambda')(l''+\lambda').\end{aligned}\right\} \quad (100)$$

Auf dieselbe Weise giebt $x=l$ gesetzt die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}(l-\lambda)(l-\lambda'') &= m'^2+m''^2-m^2+(l'+l)(l''+l)-(l-\lambda')(l-\lambda'')-(l-\lambda)(l-\lambda')\\ &= m'^2+m''^2-m^2+(l'+\lambda')(l''+\lambda')\end{aligned}\right\}\quad(101)$$

Durch diese drei Formeln (99), (100) und (101) werden die drei Ausdrücke (95), (96) und (97) nun folgende:

$$\left.\begin{aligned}\beta'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} &= \frac{2\sqrt{(l-\lambda')(l'+\lambda')-m''^2}}{(l-\lambda)}\\ \alpha'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}+\alpha\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} &= \frac{2\sqrt{(l-\lambda')(l''-\lambda')-m'^2}}{(l-\lambda)}\\ \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}+\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} &= \frac{2\sqrt{(l'+\lambda')(l''+\lambda')-m^2}}{(l-\lambda)},\end{aligned}\right\}\quad(102)$$

und durch die Substitution dieser irrationalen Ausdrücke erhalten die Integrale I. II. und III. in beiden Entwickelungsmethoden dieselbe Form.

Es war nämlich

$$\text{I.}=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{N}$$

$$=\frac{2\pi}{(l-\lambda)N'}\left\{\frac{r^2-rr'\cos(\psi-\psi')}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{r'^2-rr'\cos(\psi-\psi')}{\sqrt{1-r'^2}}\right\}$$

$$=\frac{2\pi(l-\lambda)}{4(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')}\left\{\frac{-(1-r^2)+1-\alpha\alpha'-\beta\beta'}{\sqrt{1-r^2}}+\frac{1-\alpha\alpha'-\beta\beta'-(1-r'^2)}{\sqrt{1-r'^2}}\right\}$$

$$=\frac{2\pi(l-\lambda)}{4(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')}\left\{1-\alpha\alpha'-\beta\beta'-\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r'^2}\right\}\left\{\frac{\sqrt{1-r^2}+\sqrt{1-r'^2}}{\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r'^2}}\right\}$$

$$=\frac{2\pi(l-\lambda)}{4(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')}\left\{\frac{l-\lambda-l'-\lambda-l''-\lambda-\lambda'+\lambda''}{l-\lambda}\right\}\frac{2\sqrt{(l'+\lambda')(l''+\lambda')-m^2}}{\lambda'-\lambda''},$$

und also

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{N}=\frac{2\pi\sqrt{(l'+\lambda')(l''+\lambda')-m^2}}{(\lambda'-\lambda)(\lambda'-\lambda'')}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(103)$$

Wenn man in dem Integralausdrucke

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

für r, $r^{\prime}$, ψ und $\psi^{\prime}$ ihre Werthe in α, $\alpha^{\prime}$, β und $\beta^{\prime}$ setzt, so hat derselbe die Form:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$=\frac{2\pi}{\frac{4(l-\lambda)(\lambda-\lambda^{\prime})(\lambda-\lambda^{\prime\prime})}{(l-\lambda)^2}}\left\{(\beta^{\prime}-\beta)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right)\right.$$

$$\left.+(\beta\alpha^{\prime}-\alpha\beta^{\prime})\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}-\frac{\alpha^{\prime}}{\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right)\right\}.$$

Multiplizirt man den in Parenthesen eingeschlossenen Ausdruck in Zähler und Nenner mit $\beta\beta^{\prime}$, so wird er

$$(\beta\beta^{\prime 2}-\beta^2\beta^{\prime})\left\{\frac{1}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}-\frac{1}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right\}$$

$$+(\beta\alpha^{\prime}-\alpha\beta^{\prime})\quad\left\{\frac{\alpha\beta\beta^{\prime}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}-\frac{\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}},\right\}$$

oder

$$[\beta^{\prime 2}-\beta\beta^{\prime}-\alpha^2\beta^{\prime 2}+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\left\{\frac{\beta}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right\}$$

$$+[\beta^2-\beta\beta^{\prime}-\beta^{\prime 2}\beta^2+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\frac{\beta^{\prime}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}.$$

Hier kann man in jedem Theile $\beta^2\beta^{\prime 2}-\beta^2\beta^{\prime 2}$ addiren und gelangt durch

$$[\beta^{\prime 2}(1-\alpha^2-\beta^2)+\beta^2\beta^{\prime 2}-\beta\beta^{\prime}+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\frac{\beta}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}$$

$$+[\beta^2(1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2})+\beta^2\beta^{\prime 2}-\beta\beta^{\prime}+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\frac{\beta^{\prime}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}$$

zu folgenden Transformationen:

$$[\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}+\beta^2\beta^{\prime 2}-\beta\beta^{\prime}$$

$$+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\left\{\frac{\beta\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}+\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right\},$$

d. h. nach (102) zu

$$\frac{(\lambda^{\prime}-\lambda^{\prime\prime}+l^{\prime\prime}+\lambda-l+\lambda+l^{\prime}+\lambda)\, 2\sqrt{(l-\lambda^{\prime})(l^{\prime}+\lambda^{\prime})-m^{\prime\prime 2}}}{(l-\lambda)(\lambda^{\prime}-\lambda^{\prime\prime})},$$

und

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}=\frac{2\pi(\lambda-\lambda^{\prime\prime})\sqrt{(l-\lambda^{\prime})(l^{\prime}+\lambda^{\prime})-m^{\prime\prime 2}}}{(\lambda-\lambda^{\prime})(\lambda-\lambda^{\prime\prime})(\lambda^{\prime}-\lambda^{\prime\prime})}$$
$$=\frac{2\pi\sqrt{(l-\lambda^{\prime})(l^{\prime}+\lambda^{\prime})-m^{\prime\prime 2}}}{(\lambda^{\prime}-\lambda)(\lambda^{\prime\prime}-\lambda^{\prime})}.$$

Dieselbe Reihe von Umformungen führt den Ausdruck

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

auf eine ähnliche einfache Form.

Es war derselbe

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}=\frac{2\pi}{N^{\prime}(l-\lambda)}\left\{(\alpha^{\prime}-\alpha)\left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right]\right.$$
$$\left.+(\beta\alpha^{\prime}-\alpha\beta^{\prime})\left[\frac{\beta^{\prime}}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}-\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right]\right\},$$

und wird, wenn man den in Parenthesen eingeschlossenen Faktor mit $\alpha\alpha^{\prime}$ im Zähler und Nenner multiplizirt, beide Theile die in

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}$$

multiplizirt sind, absondert und ihnen $-\alpha^2\alpha^{\prime 2}+\alpha^2\alpha^{\prime 2}$ addirt,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}=\frac{2\pi}{N^{\prime}(l-\lambda)}\left\{\left(\alpha\alpha^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}+\alpha^2\alpha^{\prime 2}-\alpha\alpha^{\prime 2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}\right)\left\{\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}+\alpha^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}{\alpha\alpha^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right\}\right.$$
$$=\frac{2\pi}{N^{\prime}(l-\lambda)}\,\frac{(\lambda^{\prime}-\lambda^{\prime\prime}+l^{\prime}+\lambda-l+\lambda+l^{\prime}+\lambda)}{(l-\lambda)}\,\frac{2\sqrt{(l-\lambda^{\prime})(l^{\prime\prime}+\lambda^{\prime})-m^{\prime 2}}}{(\lambda^{\prime}-\lambda^{\prime\prime})},$$

woraus sich ergiebt

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi \sqrt{(l-\lambda^{\prime})(l^{\prime\prime}+\lambda^{\prime}) - m^{\prime 2}}}{(\lambda^{\prime}-\lambda^{\prime\prime})(\lambda-\lambda^{\prime})} \ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

Die Ausdrücke (103), (104) und (105) sind aber dieselben wie in (63), da λ, $\lambda^{\prime}$ und $\lambda^{\prime\prime}$ und g, $g^{\prime}$, $g^{\prime\prime}$ die Wurzeln derselben kubischen Gleichung sind; doch ist in (104) und (105) das Zeichen der Quadratwurzel negativ in [103] positiv zu nehmen, wenn die Ausdrücke auch in den Zeichen übereinstimmen sollen.

Um die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{N}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{N}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, \cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

auf I., II. und III. zurück zu führen, wollen wir aus N die identische Gleichung bilden:

$$\frac{(l^{\prime}-l^{\prime\prime})}{2} \cos 2\varphi + m \sin 2\varphi = N - \frac{(l^{\prime}+2l+l^{\prime\prime})}{2} - 2m^{\prime} \sin\varphi - 2m^{\prime\prime} \cos\varphi. \quad (106)$$

Nachdem dieselbe differentiirt und durch $2\,d\varphi$ dividirt worden, wird sie

$$m \cos 2\varphi - \frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2} \sin 2\varphi = \tfrac{1}{2} \frac{dN}{d\varphi} + m^{\prime\prime} \sin\varphi - m^{\prime} \cos\varphi. \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

Von den Gleichungsn (106) und (107) können wir die erste mit $\frac{(l^{\prime}-l^{\prime\prime})}{2}$, die zweite mit m multipliziren und addiren, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\varphi = \frac{1}{\left(\frac{(l^{\prime}-l^{\prime\prime})}{2}\right)^2 + m^2} \Bigg\{ & N \left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2}\right\} - \left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2}\right\} \left\{\frac{l^{\prime}+2l+l^{\prime\prime}}{2} + \frac{m}{2}\frac{dN}{d\varphi}\right\} \\ & + [m^{\prime\prime} m - m^{\prime}(l^{\prime}-l^{\prime\prime})] \sin\varphi - [m^{\prime} m + m^{\prime\prime}(l^{\prime}-l^{\prime\prime}) \cos\varphi] \Bigg\} \end{aligned}\right)$$

und auf ähnliche Weise:

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\varphi = \frac{1}{\left(\frac{(l^{\prime}-l^{\prime\prime})}{2}\right)^2 + m^2} \Bigg\{ & m N - m \left\{\frac{l^{\prime}+2l+l^{\prime\prime}}{2}\right\} - \left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{4}\right\} \frac{dN}{d\varphi} \\ & - \left[2mm^{\prime} + m^{\prime\prime} \left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2}\right\}\right] \sin\varphi + \left[m^{\prime} \left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2}\right\} - 2mm^{\prime\prime}\right] \cos\varphi. \Bigg\} \end{aligned}\right) \quad (108)$$

Die Gleichungen (108) geben mit $d\varphi$ multiplizirt und durch N dividirt die Werthe von

$$\ldots\ldots\ldots\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{N} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

durch schon bekannte Integrale ausgedrückt, bis auf die Form

$$\int\frac{\frac{dN}{d\varphi}.d\varphi.}{N} \quad \text{Dieses ist aber} \quad \int\frac{d.\log N\, d\varphi}{d\varphi} \quad \text{oder } \log N,$$

welches in den gegebenen Grenzen von 0 bis 2φ verschwindet; und somit sind endlich, da

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{N}+\tfrac{1}{2}\int\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{N}=\int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{N},$$

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{N}-\tfrac{1}{2}\int\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{N}=\int\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{N},$$

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{N}=\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{N},$$

wird, auch die drei letzten der vorgelegten Integrale entwickelt, als

$$\left.\begin{aligned}
&\text{IV.}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi.d\varphi}{N}=\frac{\pi}{\left(\frac{l'-l''}{2}\right)^2+m^2}\left\{\frac{l'-l''}{2}+\left(m^2-\frac{(l'-l'')(l+l'')}{2}\right)\text{I.}\right.\\
&\qquad\left.-\left(m'(l'-l'')-m''m\right)\text{II.}+\left(\frac{(l'-l'')}{2}m''-mm'\right)\text{III.}\right\}\\
&\text{V.}=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi.d\varphi}{N}=\frac{\pi}{\left(\frac{l'-l''}{2}\right)^2+m^2}\left\{-\left(\frac{l'-l''}{2}\right)+\left[m^2+\frac{(l'-l'')(l+l')}{2}\right]\text{I.}\right.\\
&\qquad\left.-\left(m''m-m'(l'-l'')\right)\text{II.}+\left[mm'-\left(\frac{l'-l''}{2}\right)m''\right]\text{III.}\right\}\\
&\text{VI.}=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi.d\varphi}{N}=\frac{\pi}{\left(\frac{l'-l''}{2}\right)^2+m^2}\left\{m-\frac{m(l'+2l+l'')}{2}\text{I.}\right.\\
&\qquad\left.-2\left[m'm+m''\left(\frac{l'-l''}{2}\right)\right]\text{II.}+\left[m'\left[\frac{l'-l''}{2}\right]-2mm''\right]\text{III.}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (109)$$

Die Grenzen 0 und 2π geben ferner eine bequeme Integration der gegebenen Integralausdrücke durch Reihen. Man braucht zu dem Ende nur

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)} \text{ und } \frac{1}{1+r'\cos(\varphi-\psi)}$$

in Reihen nach den Vielfachen der Bogen $(\varphi-\psi)$ und $(\varphi-\psi')$ so zu entwickeln, dass sie konvergiren.

Es sei also

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)} = \frac{1}{1+\frac{r}{2}\left[e^{i(\varphi-\psi)}+e^{-i(\varphi-\psi)}\right]},$$

wo $i=\sqrt{-1}$ gesetzt worden, so wird, wenn y für $e^{i(\varphi-\psi)}$ geschrieben worden, der zu verwandelnde Ausdruck:

$$\frac{1}{1+\frac{r}{2}\left[y+\frac{1}{y}\right]} = \frac{\frac{2y}{r}}{\frac{2}{r}y+y^2+1}.$$

Wenn $-a$ und $-b$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$y^2+\frac{2}{r}y+1=0$ bezeichnen, so dass

$$a=\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r},\quad b=\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}$$

sind, so giebt die Zerfällung in die Partialbrüche

$$\frac{\alpha}{y+a} \text{ und } \frac{\beta}{y+b},\quad \alpha=\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r\sqrt{1-r^2}}=\frac{a}{\sqrt{1-r^2}} \text{ und } \beta=\frac{-(1-\sqrt{1-r^2})}{r\sqrt{1-r^2}}=\frac{-b}{\sqrt{1-r^2}},$$

aus den beiden Gleichungen: $\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta=\frac{2}{r}\\ \alpha b+\beta a=0\end{array}\right\}$ und es wird also

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left\{\frac{a}{y+a}-\frac{b}{y-b}\right\}.$$

Die beiden Wurzeln sind hier reziprok und also $a=\frac{1}{b}$. Entwickelt man denjenigen Theil nach absteigenden Potenzen von y, in welchem die Wurzel < 1 ist, hier den zweiten Theil, da $r<1$, den zweiten nach aufsteigenden Potenzen von y so wird

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{y}{a}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{y^3}{a^3}+\frac{y^4}{a^4}-\ldots\ldots \\ \quad -\frac{b}{y}+\frac{b^2}{y^2}-\frac{b^3}{y^3}+\frac{b^4}{y^4}-\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left\{1-b\left\{y+\frac{1}{y}\right\}+b^2\left\{y^2+\frac{1}{y^2}\right\}-b^3\left\{y^3+\frac{1}{y^3}\right\}+\ldots\ldots\right\}$$

und für y den Werth zurück substituirt,

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\begin{array}{l} 1-2b\cos(\varphi-\psi)+2b^2(\cos^2(\varphi-\psi) \\ \quad -2b^3\cos 3(\varphi-\psi))+\ldots\ldots \end{array}\right) \qquad (110)$$

Dieselbe Entwickelung muss für den Faktor $\frac{1}{1+r'\cos(\varphi-\psi')}$ eine ähnliche Reihe geben:

$$\frac{1}{1+r'\cos(\varphi-\psi')} = \frac{1}{\sqrt{1-r'^2}}\left(\begin{array}{l} 1-2b'\cos(\varphi-\psi')+2b'^2\cos 2(\varphi-\psi') \\ \quad -2b'^3\cos 3(\varphi-\psi')+\ldots\ldots \end{array}\right) \qquad (111)$$

Diese Reihen wollen wir in die Ausdrücke

$$\int\frac{d\varphi}{N}, \qquad \int\frac{\sin\varphi\,.\,d\varphi}{N}, \qquad \int\frac{\cos\varphi\,.\,d\varphi}{N}$$

einführen und die Integration in den gegebenen Grenzen ausführen. Es wird dadurch nach (76)

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{N} = \frac{1}{(l-\lambda)N'}\left\{\begin{array}{l} \int_0^{2\pi}(r^2-rr'\cos(\psi-\psi'))\frac{d\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\left\{\begin{array}{l}1-2b\cos(\varphi-\psi) \\ +2b^2\cos 2(\varphi-\psi)-\ldots\ldots\end{array}\right\} \\ +\int_0^{2\pi}(r'^2-rr'\cos(\psi-\psi'))\frac{d\varphi}{\sqrt{1-r'^2}}\left\{\begin{array}{l}1-2b'\cos(\varphi-\psi') \\ +2b'^2\cos(\varphi-\psi)-\ldots\ldots\end{array}\right\} \\ +\int_0^{2\pi}\frac{d.\left\{\log\frac{1+r'\cos(\varphi-\psi')}{1+r\cos(\varphi-\psi)}\right\}}{d\varphi,}d\varphi \end{array}\right\}$$

wo der dritte Theil nach der oben gemachten Bemerkung verschwindet; aber auch in dem ersten und zweiten Theile haben in den gegebenen Grenzen nur diejenigen Terme Werthe, wo φ unter *sin* oder *cos* verschwindet, da im Allgemeinen sowohl

$$\int_0^{2\pi} sin\,(p\,\varphi + p\,\psi)\,d\varphi \text{ als } \int_0^{2\pi} cos\,(p\,\varphi \pm p\,\psi)\,d\varphi$$

verschwindet, wenn p eine ganze positive oder negative Zahl ist. Es wird deshalb

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N} = \frac{2\pi}{N'(l-\lambda)} \left[\frac{r^2 - rr' cos(\psi - \psi')}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r'^2\, rr' cos(\psi - \psi')}{\sqrt{1-r'^2}} \right] \Bigg\}, \quad (112)$$

wie wir dieses schon (80) gefunden haben.

Mit Hülfe jener Reihen wird nun aus

$$\int \frac{sin\,\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{1}{N'(l-\lambda)} \left\{ \begin{aligned} &\int sin\,\varphi\, d\varphi \left[\frac{r^2 - rr' cos(\psi-\psi') + rr' sin(\psi-\psi')\, r\, sin(\varphi-\psi)}{\sqrt{1-r^2}}\right] [1 \\ &\qquad - 2b\, cos(\varphi-\psi) + 2b^2 cos\, 2(\varphi-\psi) - \ldots\ldots] \\ &+ \int sin\,\varphi\, d\varphi \left[\frac{r'^2 - rr' cos(\psi-\psi') - rr' sin(\psi-\psi')\, r' sin(\varphi-\psi')}{\sqrt{1-r'^2}}\right] [1 \\ &\qquad - 2b' cos(\varphi-\psi') + 2b'^2 cos\, 2(\varphi-\psi') - \ldots\ldots], \end{aligned} \right.$$

und, wenn man die Produkte der trigonometrischen Funktionen in die Summen und Differenzen zerlegt und die oben gemachte Bemerkung über die Grenzen festhält:

$$\int_0^{2\pi} \frac{sin\,\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi}{N'(l-\lambda)} \left\{ \begin{aligned} &- \left[\frac{r^2 - rr' cos\,(\psi - \psi')\, b\, sin\,\psi}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{rr' sin\,(\psi - \psi')\, r\, cos\,\psi}{2\sqrt{1-r^2}}\right. \\ &- \frac{rr' sin\,(\psi - \psi')\, r\, b^2 cos\,\psi}{2\sqrt{1-r^2}} - \frac{r' - rr\, cos\,(\psi - \psi')\, b'\, sin\,\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} \\ &- \left.\frac{rr' sin\,(\psi - \psi')\, r' cos\,\psi'}{2\sqrt{1-r'^2}} + \frac{rr' sin\,(\psi - \psi')\, r'\, b'^2 cos\,\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}\right], \end{aligned} \right.$$

und durch die Zurückführung der Werthe

$$\frac{1 - \sqrt{1-r^2}}{r} \text{ und } \frac{1 - \sqrt{1-r'^2}}{r'} \text{ für } b \text{ und } b'$$

und der Quadrate dieser Ausdrücke

$$\frac{2\,(1 - \sqrt{1-r^2})}{r^2} - 1 = b^2 \text{ und } \frac{2\,(1 - \sqrt{1-r'^2})}{r'^2} - 1 = b'^2$$

gelangt man zu

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$=\frac{2\pi}{N'(l-\lambda)}\left\{\begin{array}{l} \frac{r'(1-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}[\sin\psi\cos(\psi-\psi')-\sin(\psi-\psi')\cos\psi] \\ +\frac{r(1-\sqrt{1-r'^2})}{\sqrt{1-r'^2}}[\cos(\psi-\psi')\sin\psi'+\sin(\psi-\psi')\cos\psi'] \\ -\frac{r(1-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}\sin\psi-\frac{r'(1-\sqrt{1-r'^2})}{\sqrt{1-r'^2}}\sin\psi' \\ \quad +rr'\sin(\psi-\psi')\left[\frac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{r'\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}\right] \end{array}\right\} \quad . \quad (113)$$

$$=\frac{2\pi}{N'(l-\lambda)}\left\{\begin{array}{l} (r\sin\psi-r'\sin\psi')\left[\frac{1}{\sqrt{1-r'^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right] \\ \quad +rr'\sin(\psi-\psi'\left[\frac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{r'\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}\right]. \end{array}\right\}$$

Dieses ist derselbe Ausdruck, wie ihn die endliche Integration (89) gegeben hat. Auf analoge Weise findet man die Identität des durch die Integration vermittelst unendlicher Reihen gefundenen Ausdruckes von

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

und des endlichen oben angegebenen (90). Es ist nämlich

$$\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$=\frac{1}{N'(l-\lambda)}\left\{\begin{array}{l} \int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-r^2}}[r^2-rr'\cos(\psi-\psi')+r^2r'\sin(\psi-\psi')\sin(\varphi-\psi)]\,[1 \\ \qquad\qquad -2b\cos(\varphi-\psi)+2b^2\cos 2(\varphi-\psi)-\ldots\ldots] \\ +\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-r'^2}}[r'^2-rr'\cos(\psi-\psi')-rr'^2\sin(\psi-\psi')\sin(\varphi-\psi)]\,[1 \\ \qquad\qquad -2b'\cos(\varphi-\psi')+2b'^2\cos 2(\varphi-\psi')-\ldots\ldots]. \end{array}\right\}$$

Von diesen Theilen bleiben nach den Integrationen in den bestimmten Grenzen und nach der Zerfällung der Produkte in die Summen und Differenzen der trigonometrischen Funktionen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{N^{|}(l-\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(r^2 - rr^{|} \cos(\psi - \psi^{|}) \cos\psi . b}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{1}{2} \frac{r^2 r^{|} \sin(\psi - \psi^{|}) \sin\psi (1-b^2))}{\sqrt{1-r^2}} \\ - \frac{(r^{|2} - rr^{|} \cos(\psi - \psi^{|}) \cos\psi^{|} b^{|}}{\sqrt{1-r^{|2}}} + \frac{r^{|2} r \sin(\psi - \psi^{|}) \sin\psi^{|} (1-b^{|2}))}{\sqrt{1-r^{|2}}} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{N^{|}(l-\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{r^{|} (1-\sqrt{1-r^2}) [\sin(\psi-\psi^{|}) \sin\psi + \cos(\psi-\psi^{|}) \cos\psi]}{\sqrt{1-r^2}} \\ \quad + \frac{r (1-\sqrt{1-r^{|2}}) [\sin(\psi-\psi^{|}) \sin\psi^{|} - \cos(\psi-\psi^{|}) \cos\psi^{|}]}{\sqrt{1-r^{|2}}} \\ - r \frac{(1-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} \cos\psi - r^{|} \frac{(1-\sqrt{1-r^{|2}})}{\sqrt{1-r^{|2}}} \cos\psi^{|} \\ \quad + rr^{|} \sin(\psi-\psi^{|}) \left(\frac{r \sin\psi}{\sqrt{r-r^2}} - \frac{r^{|} \sin\psi^{|}}{\sqrt{1-r^{|2}}} \right), \end{array} \right\}$$

und hieraus

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi}{N^{|}(l-\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} (r\cos\psi - r^{|}\cos\psi^{|}) \left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-r^{|2}}} \right] \\ + rr^{|} \sin(\psi-\psi^{|}) \left[\frac{r \sin\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r^{|} \sin\psi^{|}}{\sqrt{1-r^{|2}}} \right]. \end{array} \right\} \quad (114)$$

Wie diese Resultate in die einfache Gestalt durch die Wurzeln der kubischen Gleichung gebracht werden, ist oben schon gezeigt; wie auch, auf welche Weise von ihnen die Ausdrücke

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{N}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{N} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

abhängig sind.

Nachdem wir die Auflösung der 6 vorgelegten Integrale auf dreifachem Wege gegeben und die Uebereinstimmung der Resultate nachgewiessn haben, bleibt uns noch übrig, die Mittel anzudeuten, wie auf diese Ausdrücke jedes andere Integral von der Gestalt

$$\int \frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{N^k} \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{N^k}$$

zurückgeführt werden kann, so lange i und k ganze Zahlen sind; jedoch erlaubt die Beschränktheit des Raumes bei diesem Theile der Aufgabe nur andeutungsweise zu verfahren.

Es können nämlich

$$\int \frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{N^k} \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{N^k}$$

mit Hülfe der Gleichungen, durch welche man $\sin m\varphi$ und $\cos m\varphi$ durch kleinere Vielfache von φ ausdrückt, leicht auf die Integration von

$$\int \frac{\sin \varphi\, d\varphi}{N^k}, \quad \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{N^k} \quad \text{und} \quad \int \frac{d\varphi}{N^k}$$

zurückgeführt werden, wie wir dies schon bei

$$\int \frac{\sin^2 \varphi\, d\varphi}{N} \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos^2 \varphi\, d\varphi}{N}$$

zum Theil gezeigt haben, als sie durch

$$\int \frac{\sin \varphi\, d\varphi}{N}, \quad \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{N} \quad \text{und} \quad \int \frac{d\varphi}{N}$$

ausgedrückt und entwickelt wurden.

Auch der Exponent k des Nenners lässt sich durch folgendes Verfahren für diese verschiedenen Ausdrücke um die Einheit unter dem Integralzeichen verringern, oder

$$\int \frac{d\varphi}{N^k}, \text{ auf die entsprechenden Formen von } \int \frac{d\varphi}{N^{k-1}} \text{ etc.}$$

zurückführen. Es wird dieses jedes Mal erreicht werden, wenn man sich die Gleichungen bildet:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d.\left\{\frac{1}{\mathrm{N}^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{a}{\mathrm{N}^k} + \frac{b\cos\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{c\sin\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{d\sin 2\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{e\cos 2\varphi}{\mathrm{N}^k} \\
\frac{d\left\{\frac{\cos\varphi}{\mathrm{N}^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{-\sin\varphi}{\mathrm{N}^{k-1}} = \frac{a_1}{\mathrm{N}^k} + \frac{b_1\cos\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{c_1\sin\varphi}{\mathrm{N}^k}\,\frac{d_1\sin 2\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{e_1\cos 2\varphi}{\mathrm{N}^k} \\
\frac{d\left\{\frac{\sin\varphi}{\mathrm{N}^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{\cos\varphi}{\mathrm{N}^{k-1}} + \frac{a_2}{\mathrm{N}^k} + \frac{b_2\cos\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{c_2\sin\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{d_2\sin 2\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{e_2\cos 2\varphi}{\mathrm{N}^k} \\
\frac{d\left\{\frac{\sin 2\varphi}{\mathrm{N}^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{2\cos 2\varphi}{\mathrm{N}^{k-1}} + \frac{a_3}{\mathrm{N}^k} + \frac{b_3\cos\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{c_3\sin\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{d_3\sin 2\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{e_3\cos 2\varphi}{\mathrm{N}^k} \\
\frac{d\left\{\frac{\cos 2\varphi}{\mathrm{N}^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{-2\sin 2\varphi}{\mathrm{N}^{k-1}} + \frac{a_4}{\mathrm{N}^k} + \frac{b_4\cos\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{c_4\sin\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{d_4\sin 2\varphi}{\mathrm{N}^k} + \frac{e_4\cos 2\varphi}{\mathrm{N}^k}.
\end{aligned}\right\} \quad (115)$$

Bezeichnet man

$$\int\frac{d\varphi}{N^k} = A,\ \int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N^k} = B,\ \int\frac{\sin\varphi . d\varphi}{N^k} = C,\ \int\frac{\sin 2\varphi . d\varphi}{N^k} = D,\ \int\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{N^k} = E,$$

so geben jene fünf Gleichungen (115), nachdem sie mit $d\varphi$ multiplizirt worden, ein Mittel, die fünf unbekannten Grössen A, B, C, D, E durch Integralformeln, bei denen der Exponent um die Einheit verringert ist, und durch die ähnliche Formeln ohne das Integralzeichen auszudrücken; eine Aufgabe, deren Lösung nur Schwierigkeiten in der Rechnung darbietet.

Conitz, den 1. Juni 1851.

A. Wichert.

Schulnachrichten.

Erster Abschnitt.
Allgemeine Lehrverfassung.

Prima.
Ordinarius: Herr Professor Lindemann.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Aeltere Litteratur-Geschichte nach Hüppe. Gelesen und erklärt wurden Göthe's Hermann und Dorothea, Tasso und einzelne Gedichte anderer neuern Dichter. Leitung der freien Vorträge, deren Inhalt sich größtentheils auf die vaterländische Litteratur bezog. Besserung der deutschen Aufsätze. 2 St. Hr. Prof. Lindemann.

II. Lateinische Sprache. Cic. de Off. l. I. II. III. Die Erklärung zum Theil lateinisch. — Cursorisch wurden gelesen Cic. oratt. pro Murena und pro Milone. — Wöchentlich ein schriftliches Extemporale aus neuern Latinisten; Correctur der freien lateinischen Aufsätze und der Exercitien. 5 St. In einer außerordentlichen wöchentlichen Stunde wurden einige Monate hindurch Puncte aus Zumpt's syntaxis ornata erklärt und einige freie Vorträge gehalten. Privatlectüre: Cic. oratt.

pro Roscio Amerino, in Caecilium, in Catilinam; Liv. l. XXX. XXXI. XXXII. Hr. Gymnasial-Lehrer Dr. Peters.

Horat. Carm. l. III. IV. Sat. l. I. 6; Wiederholung der 4. Satire des ersten Buches; Epist. l. II. 2. Die Erklärung theils lateinisch, theils deutsch. Mehrere Oden wurden von den Schülern auswendig gelernt und vorgetragen. 2 St. Brüggemann.

III. Griechische Sprache. Plat. Crito und Euthyphro; Demosth. orat. Olynth. II; Soph. Aiax von Vers 500 an. Privatlectüre: Menexenus und Io des Plato. 4 St. Brüggemann.

Hom. Iliad. l. VI. IX. XII.—XVII. Privatlectüre: Hom. Iliad. l. I.—V. Memoriren geeigneter Stellen; Grammatik nach Buttmann; Extemporalien; Correctur der schriftlichen Arbeiten. 2 St. Hr. Gymnasial-Lehrer Dr. Moiszisstzig.

IV. Französische Sprache. Athalie par Racine; acte I—III. — Grammatik nach Müller: Gebrauch und Folge der Tempora; Indicativ und Conjunctiv; Correctur der schriftlichen Arbeiten. 2 St. Hr. Gymnasial-Lehrer Raabe.

V. Polnische Sprache. 1.) Für die Schüler polnischer Abkunft. Die Hauptepochen der Litteratur-Geschichte. Lesung und Erklärung der Satiren des Krasicki; Correctur der Aufsätze. Prima und Secunda combinirt. 2 St. 2.) Für die Schüler deutscher Abkunft. Die Formenlehre und Syntax nach Popliński; Erklärung prosaischer und poetischer Stücke aus den Nowe Wypisy Polskie. Prima und Secunda combinirt. 2 St. Hr. Gymnasial-Hülfslehrer Lowiński.

VI. Hebräische Sprache. Nach der Grammatik von Gesenius der zweite Haupttheil der Formenlehre und Syntax, verbunden mit practischen Uebungen nach Maurer. Erklärt wurden I. Mos. 3; 7; 8. Psalm. 72; 104; 128; 137. 2 St. Hr. Religionslehrer Lic. von Prądzyński.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. Die Glaubenslehre nach dem Lehrbuche von Dr. Martin. Der Römerbrief nach dem Urtexte. Die Schüler der Prima und Secunda erhielten, nach Nationalitäten getrennt, in je zwei wöchentlichen Stunden den Unterricht in ihrer Muttersprache. Hr. Religionslehrer Lic. von Prądzyński. 2.) Für die evangelischen Schüler. Erklärung des Evangeliums Matthaei und der Pastoralbriefe nach dem Grundtexte; Einleitung in die biblischen Bücher A. und N. T.; Glaubenslehre nach Schmieder. 2 St. Hr. Superintendent Annecke.

II. Philosophische Propädeutik. Logik nach Esser. 2 St. Hr. Prof. Lindemann.

III. Mathematik. Wiederholung der Lehre von den Kettenbrüchen und deren Anwendung bei der Auflösung unbestimmter Gleichungen; Theorie der Permutationen, Combinationen und Variationen sowie deren Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung; das binomische Theorem für ganze, positive wie negative und gebrochene Exponenten; Auflösung der quadratischen Gleichungen mit Hülfe der Trigonometrie; die kubischen Gleichungen. — Wiederholung der Stereometrie und die sphärische Trigonometrie. 4 St. Hr. Oberlehrer Wichert.

Lehrbücher: der Leitfaden von Matthias und Grunert's Lehrbuch der Mathematik. — Den Schülern der drei oberen Classen wurden außer manchen bei Gelegenheit der vorgetragenen Sätze sich entwickelnden Aufgaben auch schwierigere zur häuslichen Lösung regelmäßig gestellt und von dem Lehrer corrigirt.

IV. Geschichte und Geographie. Geschichte der neuern Zeit nach Pütz. Wiederholung der alten und neuen Geographie. 2 St. Hr. Prof. Lindemann.

V. Physik. Die Lehre von dem Schalle und dem Lichte. Handbuch: August's Auszug aus Fischer's mechanischer Naturlehre. Experimente, soweit es der physikalische Apparat gestattete. Im Winter-S. 2 St.; im Sommer-S. 1 St. Hr. Oberlehrer Wichert.

VI. Naturgeschichte. Wiederholung der Naturgeschichte. 1 St. während des Sommer-S. Hr. Gymnasial-Lehrer Haub.

Ober- und Unter-Secunda.

Ordinarius: Herr Gymnasial-Lehrer *Dr.* Moiszisstzig.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Poetik. Gelesen wurden Schiller's Wallenstein und Wilhelm Tell. Declamiren theils gewählter, theils gegebener Stücke; Leitung der freien Vorträge und Disputir-Uebungen; Revision der Privatlectüre; Correctur der Aufsätze. 3 St. Hr. G.-L. Dr. Moiszisstzig.

II. Lateinische Sprache. A. In der vereinigten Secunda Syntaxis verbi und die Lehre von den Conjunctionen nach Zumpt; Extemporalien; Correctur der schriftlichen Arbeiten; Revision der Privatlectüre: Caes. commentt. de B. G. 3 St. In einer außerordentlichen wöchentlichen Stunde wurde Cic. orat. pro Archia übersetzt, in grammatischer, stilistischer, historischer und antiquarischer Rücksicht durchgenommen und memorirt. Die Erklärung in lateinischer Sprache. Hr. G.-L. Dr. Moiszisstzig.

B. In der Ober-Secunda. Liv. l. XXV. und l. XXVI. nach Vorausschickung des Nothwendigsten über Leben und Werke des Schriftstellers. 2 St. Hr. G.-L. Dr. Moiszisstzig.

Ausgewählte Stellen aus den Georgicis und die erste Ecloge Virgil's. 2 St. Brüggemann.

C. In der Unter-Secunda. Cic. Laelius sowie Cicero's Rede pro lege Manilia und die erste in Catilinam. Vorher ein kurzer Bericht über Cicero's Leben und Werke. 2 St. Hr. G.-L. Dr. Moiszisstzig.

Virg. Aeneid. l. I. und l. II. Mehrere Stellen wurden auswendig gelernt. 2 St. Hr. Prof. Lindemann.

III. Griechische Sprache. A. In der vereinigten Secunda. Xenoph. Mem. l. I. und l. II. — Wiederholung der unregelmäßigen Zeitwörter, die Lehre von der Wortbildung und die Syntax bis zur

Lehre von den modis. Alle vierzehn Tage ein Extemporale und Exercitium. 4 St. Hr. Prof. Lindemann.

B. In der Ober-Secunda. Hom. Iliad. l. II.—VI. Mehrere Stellen wurden memorirt. Privatlectüre: Hom. Iliad. l. I. und l. XII. 2 St. Hr. Prof. Lindemann.

C. In der Unter-Secunda. Hom. Odyss. l. XVI. und l. XVII. Einiges wurde auswendig gelernt. 2 St. Brüggemann.

IV. Französische Sprache. Voltaire: histoire de Charles XII, l. V, VI. — Grammatik nach Müller: allgemeine Regeln von der Wortstellung; die Lehre von der Concretion, vom Artikel, Nominativ und Genitiv. Correctur der schriftlichen Arbeiten. 2 St. Hr. G.-L. Raabe.

V. Polnische Sprache. S. Prima.

VI. Hebräische Sprache. Elementar- und Formenlehre bis zum unregelmäßigen Zeitwort nach Gesenius, verbunden mit practischen Uebungen nach Maurer. Gelesen wurden I. Mos. 1. und 2. 2 St. Hr. Religionslehrer Lic. von Prądzyński.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. S. Prima. 2.) Für die evangelischen Schüler. S. Prima.

II. Mathematik. Wiederholung der Lehre von den Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten und der Lehre von den quadratischen Gleichungen; die arithmetischen und geometrischen Progressionen und die Rechnung mit Logarithmen. — Wiederholung der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke und Figuren; die Berechnung ebener Figuren und die Trigonometrie. 4 St. Hr. Oberlehrer Wichert.

III. Geschichte und Geographie. Geschichte der Griechen nach Pütz. Neuere Geographie von Asien und America. 3 St. Hr. Prof. Lindemann.

IV. Physik. Allgemeine Einleitung in die Physik; allgemeine Eigenschaften der Körper; die Hauptdefinitionen aus der Chemie und die Lehre von der Luft. 2 St. Hr. Oberlehrer Wichert.

Ober-Tertia.

Ordinarius: Herr Gymnasial-Lehrer *Dr.* Peters.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Lesen und Erklären prosaischer und poetischer Stücke aus Hülstett; Vortragen memorirter Stücke; Correctur der schriftlichen Arbeiten. 3 St. Hr. G.-L. Haub.

II. Lateinische Sprache. Caes. de B. G. l. V. und VI. De B. C. l. II. Grammatik nach Moiszisstzig: Wiederholung des ganzen Pensums der Unter-Tertia; darauf syntaxis verbi. Die Schüler lernten aus Caes. de B. G. l. V. Cap. 6. 7. 44. und aus der Syntax zu jeder Regel ein Beispiel auswendig. Correctur der wöchentlichen schriftlichen Arbeiten. 6 St. Hr. G.-L. Dr. Peters. — Ovid. Metam. l. XII. 5—145. XIII. 408—575; 904—968. XV. 60—412 nach der Ausgabe von Nadermann. Memoriren passender Stellen. Vorher Einführung in den Dichter und Lehre des heroischen Hexameters. 2 St. Hr. G.-H.-L. Lowiński.

III. Griechische Sprache. Aus Jacobs der erste Abschnitt der Länder- und Völkerkunde. Xenoph. Anab. l. VI. und VII. cap. 1. und 2. Aus beiden Schriften ist Einiges memorirt worden. — Grammatik nach Buttmann: Wiederholung der regelmäßigen Conjugation; darauf die gesammte unregelmäßige Conjugation und zuletzt das Wesentlichste aus der Wortbildungslehre. Nach Pfingsten wurden die Schüler in die Odyssee eingeführt und lernten aus derselben einige Verse auswendig. Correctur der wöchentlichen schriftlichen Uebersetzungen aus dem Deutschen in das Griechische. 6 St. Hr. G.-L. Dr. Peters.

IV. Französische Sprache. Florian: Numa Pompilius l. V. — Grammatik nach Müller: von den unregelmäßigen Zeitwörtern; von den Partikeln. Correctur der schriftlichen Arbeiten. 2 St. Hr. G.-L. Raabe.

V. Polnische Sprache. 1.) Für die Schüler polnischer Abkunft in der Ober- und Unter-Tertia. Grammatik nach Szostakowski; Lectüre der Spiewy historyczne des Niemcewicz. Declamiren ausgewählter Gedichte; Correctur der schriftlichen Arbeiten. 2 St. Hr. G.-H.-L. Lowiński. 2.) Für die Schüler deutscher Abkunft in der Ober- und Unter-Tertia. Die Formenlehre und Syntax nach dem Elementarbuche von Popliński nebst Uebersetzung entsprechender Stücke. Die Schüler wurden in zwei Abtheilungen unterrichtet. 2 St. Hr. G.-L. Dr. Peters und Hr. G.-H.-L. Lowiński.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. Die Sittenlehre nach Ontrup. Biblische Geschichte des A. und N. T. — Erklärung der sonn- und festtäglichen Evangelien nebst besonderer Erläuterung der kirchlichen Zeiten und Gebräuche. Die Schüler der Ober-Tertia, der Unter-Tertia und der Quarta wurden, nach ihrer Muttersprache geschieden, in je zwei wöchentlichen Stunden unterrichtet. Hr. Relig. Lic. von Prądzyński. 2.) Für die evangelischen Schüler der Ober- und Unter-Tertia. Glaubenslehre nach Kniewel. Die drei letzten Hauptstücke des Katechismus mit den Erklärungen Luthers. Biblische Geschichte des N. T. nach Preuß. 2 St. Hr. Superint. Annecke.

II. Mathematik. Wiederholung der Potenzenlehre; Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln; Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. — Wiederholung der Lehre von der Gleichheit der Figuren aus Grundlinie und Höhe und von der Verwandlung derselben; die Lehre von dem Kreise und einzelne Sätze aus der Aehnlichkeit der Dreiecke. 4 St. Hr. Oberlehrer Wichert.

IV. Geschichte und Geographie. Geschichte Deutschlands bis zur Kirchentrennung; Grundzüge der brandenburgisch-preußischen Geschichte nach Pütz. — Geographie Deutschlands und des nord-osteuropäischen Tieflandes nach Nieberding. 3 St. Hr. G.-L. Raabe.

IV. Naturgeschichte. Im Winter-S. die Mineralogie; im Sommer-S. die Botanik. Erläuterung des Linné'schen Geschlechts-Systems und des natürlichen Systems an lebenden Pflanzen. Excursionen. 2 St. Hr. G.-L. Haub.

Unter-Tertia.

Ordinarius des Coetus A: Herr Gymnasial-Lehrer Haub.
Ordinarius des Coetus B: Herr Gymnasial-Lehrer Raabe.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Grammatik nach Hoffmann: von dem einfachen und zusammengesetzten Satze. Declamations- und Leseübungen aus der Hülstett'schen Sammlung. Correctur der alle drei Wochen gelieferten Arbeiten. 3 St.

In dem Coetus A: Hr. G.-H.-L. Sommer.
In dem Coetus B: Hr. G.-L. Raabe.

II. Lateinische Sprache. Grammatik nach Moiszisstzig: Wortbildung der Nomina und Verba; Adverbia; Präpositionen; Uebereinstimmung der Wörter im Satze; syntaxis casuum. Correctur der schriftlichen Arbeiten. Aus Caesar de B. G. in dem Coetus A: lib. I. und IV. von cap. 20 bis zu Ende; in dem Coetus B: lib. I. und II. 6 St.

In dem Coetus A: Hr. G.-L. Haub.
In dem Coetus B: Hr. G.-L. Raabe.

Lehre von der Quantität und Einiges aus der Lehre vom Verse. Aus Ovid. Metam. in dem Coet. A: lib. III. 1—130; 511—733. lib. IV. 416—562. lib. VI. 146—183; in dem Coet. B: lib. V. VI. VII. In beiden Abtheilungen wurden mehrere Stellen memorirt. 2 St.

In dem Coet. A: Hr. G.-L. Haub.

In dem Coet. B: Hr. G.-L. Dr. Moiszisstzig.

III. Griechische Sprache. Wiederholung und Erweiterung des grammatischen Pensums der Quarta, die Verba auf $\mu\iota$ und die unregelmäßigen Zeitwörter mit Auswahl nach Buttmann. Correctur der schriftlichen Arbeiten; Extemporalien. Gelesen und erklärt wurden in dem Coetus A: aus dem Elementarbuche von Jacobs die aesopischen Fabeln, Anekdoten von Philosophen, Dichtern, Rednern und Königen. Die aesopischen Fabeln wurden memorirt und sorgfältigst wiederholt und erklärt. In dem Coetus B: aus dem zweiten Cursus des Jacobs die Anekdoten von Lakedämoniern, die vermischten Anekdoten, Einiges aus der Naturgeschichte und die mythologischen Notizen und Erzählungen bis zum Herakles inclus. Memoriren besonders sorgfältig durchgenommener Stücke. 6 St.

In dem Coetus A: Hr. G.-H.-L. Lowiński.

In dem Coetus B: Hr. G.-L. Dr. Moiszisstzig.

IV. Französische Sprache. Grammatik nach Müller: Formenlehre bis zu den unregelmäßigen Zeitwörtern mit Uebungen an der Tafel. — Lesen und Uebersetzen aus Numa Pompilius par Florian: l. II. 2 St. Hr. G.-L. Raabe.

V. Polnische Sprache. S. Ober-Tertia.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. S. Ober-Tertia. 2.) Für die evangelischen Schüler. S. Ober-Tertia.

II. Mathematik. Wiederholung der Dezimalbrüche; die Rechnungsarten mit entgegengesetzten und allgemeinen Zeichen; die Potenzenlehre. — Wiederholung der Formenlehre; die Congruenz der Dreiecke mit den dahin gehörenden Sätzen; die Gleichheit der Figuren aus Grundlinie und Höhe und Verwandlung derselben. 4 St. Hr. Oberlehrer Wichert.

III. Geschichte und Geographie. Römische Geschichte bis auf Cäsar nach Pütz. Alte und neue Geographie des ehemaligen römischen Reiches und der angrenzenden Länder. 3 St. Hr. G.=H.=L. Sommer.

IV. Naturgeschichte. Im Winter=S.: Glieder= und Schleimthiere; im Sommer=S.: Botanik. Erläuterung des Linné'schen Systems. Beschreibung der Conitzer Flora. 2 St. Hr. G.=L. Haub.

Quarta.

Ordinarius des Coetus A: Herr Gymnasial=Lehrer Kattner.
Ordinarius des Coetus B: Herr Professor Dr. Junker.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Grammatik: Einübung der Interpunctionslehre. Vortragen und Erklären von Musterstücken aus der Hülstett'schen Sammlung. Correctur der schriftlichen Arbeiten. 3 St.

In dem Coetus A: Hr. G.=H.=L. Lowiński.
In dem Coetus B: Hr. G.=H.=L. Lindenblatt.

II. Lateinische Sprache. Grammatik nach Moiszisstzig: nach wiederholter Einübung der regelmäßigen und unregelmäßigen Conjugation die Satz= und Casuslehre, die Lehre von dem Accusativ mit dem Infinitiv, von dem ablativus absolutus, von den Conjunctionen, Zeiten und Moden. — Aus dem Cornelius Nepos wurden gelesen und erklärt in dem Coetus A: Epaminondas, Pelopidas und einige Capitel des Agesilaus; in dem Coetus B: de regibus, Hamilcar, Hannibal und Agesilaus. In beiden Coetus wurden mehrere Abschnitte des Gelesenen von den Schülern memorirt. — Correctur der schriftlichen Uebersetzungen. Die Lehre von der Quantität, von den Versfüßen und von dem Senar; hierauf die Fabeln des Phaedrus und zwar in beiden Abtheilungen die des ersten Buches mit Auswahl und auch einige des zweiten. 8 St.

In dem Coetus A: Hr. G.-L. Kattner.
In dem Coetus B: Hr. Prof. Dr. Junker.

III. Griechische Sprache. Die Formenlehre bis zu den Zeitwörtern auf μι nach Buttmann; schriftliche und mündliche Uebungen. Die entsprechenden Stücke aus Jacobs wurden übersetzt und erklärt und einzelne durchgenommene Sätze memorirt. 5 St.
In dem Coetus A: Hr. G.-L. Kattner.
In dem Coetus B: Hr. Prof. Dr. Junker.

V. Polnische Sprache. 1.) Für die Schüler polnischer Abkunft. Grammatik nach Szostakowski; Lectüre mehrerer Stücke aus dem Wybór von Popliński und aus Wieczory pod lipą. 2 St. Hr. G.-H.-L. Sommer. 2.) Für die Schüler deutscher Abkunft. Grammatik nach Popliński: die Lehre von den Präpositionen, Fürwörtern und Zahlwörtern; die Conjugation. Uebungen im Lesen und Uebersetzen aus Popliński. 2 St. Hr. G.-H.-L. Sommer.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. S. Ober-Tertia. 2.) Für die evangelischen Schüler. Das erste Hauptstück des Katechismus Luther's; Auswendiglernen von Kernstellen der Bibel, von Liederversen und auch von ganzen Liedern nach Weiß. Biblische Geschichte des A. T. vom Anfange bis zum Zeitalter der Richter nach Preuß. 2 St. Hr. Superint. Annecke.

II. Mathematik. Dezimalbrüche; einfache und zusammengesetzte Proportionen; Kettenregel; Gesellschafts- und Alligationsrechnung. — Aus Euclid's Elementen der größte Theil des ersten Buches. 3 St.
In dem Coetus A: Hr. G.-L. Kattner.
In dem Coetus B: Hr. Prof. Dr. Junker.

III. Geschichte und Geographie. Geschichte der Orientalen und Griechen nach Pütz. Geographie der außereuropäischen Erdtheile nach Nieberding. 3 St.

In dem Coetus A: Hr. G.=H.=L. Lowiński.
In dem Coetus B: Hr. G.=L. Dr. Peters.

IV. Naturgeschichte. Im Winter=S.: Rückgratthiere. Im Sommer=S.: Bestimmen und Beschreiben der Pflanzen der Conitzer Flora nach dem Linné'schen System.

In dem Coetus A: 2 St. Hr. G.=L. Haub.
In dem Coetus B: 2 St. Hr. G.=L. Haub.

Quinta.

Ordinarius: Herr Gymnasial=Hülfslehrer Sommer.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Practische Einübung der Redetheile und ihrer Flexion, der Orthographie, der einfachen Satzconstruction und der Grundzüge der syntaxis casuum. Lese= und Declamations=Uebungen; Correctur der schriftlichen Arbeiten. 4 St. Hr. G.=H.=L. Sommer.

II. Lateinische Sprache. Wiederholung des ganzen Pensums der vorhergehenden Classe; hierauf die unregelmäßige Formenlehre; Erläuterung der wichtigsten und faßlichsten Regeln der Syntax. Alles dieses nach der Grammatik von Moiszisstzig. — Uebersetzen aus Litzinger's Uebungsbuche; Memoriren durchgenommener Sätze; Correctur der schriftlichen Arbeiten. 8 St. Hr. G.=H.=L. Sommer.

III. Polnische Sprache. Declination der Substantiva; Pronomina; Zahlwörter; Verba. Uebersetzen und Erklären aus Popliński's Elementarbuche; Auswendiglernen kleiner Gedichte. 2 St. Hr. G.=H.=L. Sommer.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. Die Lehre vom Glauben, vom Gebete, von den Geboten und von den heiligen

Sacramenten nach dem Diöcesan-Katechismus. Biblische Geschichte des A. und N. T. nach Mathias. Die vereinigten Schüler der Quinta und Sexta wurden in je zwei wöchentlichen Stunden in ihrer Muttersprache unterrichtet. Hr. Religionslehrer Lic. von Prądzyński. 2.) Für die evangelischen Schüler. Die beiden ersten Hauptstücke des Katechismus Luther's nebst Erklärungen wurden wiederholt hergesagt und dem Wortsinne nach erklärt. Auswendiglernen von Liederversen. Biblische Geschichte des A. T. mit Auswahl nach Preuß. 2 St. Hr. Superint. Annecke.

II. Rechnen. Die Bruchrechnung; die einfache und zusammengesetzte Regel von Dreien. 4 St. Hr. G.-L. Kattner.

III. Geschichte und Geographie. Lebensbeschreibungen berühmter Männer aus dem Mittelalter nach Welter. — Geographie der einzelnen Länder Europa's nach Nieberding; Chartenzeichnen. 3 St. Hr. G.-L. Raabe.

IV. Naturgeschichte. Im Winter-S.: Vorbegriffe der Zoologie; Säugethiere. Im Sommer-S.: Uebung im Aufsuchen und Bestimmen der Pflanzen unserer Flora. 2 St. Hr. G.-L. Haub.

Sexta.

Ordinarius: Herr Gymnasial-Hülfslehrer Lindenblatt.

A. Sprachen.

I. Deutsche Sprache. Lese- und Declamations-Uebungen; schriftliches und mündliches Nacherzählen; Einüben der Declination, Conjugation und Orthographie; Zergliedern und Bilden des einfachen Satzes; Correctur der wöchentlich gelieferten Arbeiten. 4 St. Hr. G.-H.-L. Lindenblatt.

II. Lateinische Sprache. Die regelmäßige Formenlehre nach Moiszisstzig. Uebersetzen und Erklären aus Litzinger's Uebungsbuche. Memorir-Uebungen. Correctur der schriftlichen Arbeiten. 8 St. Hr. G.=H.=L. Lindenblatt.

III. Polnische Sprache. Das Adjectivum, Substantivum und Hülfszeitwort nach Popliński's Elementarbuche nebst Uebersetzen entsprechender Stücke. Uebungen an der Tafel in der Rechtschreibung. Memoriren kleiner Gedichte. 2 St. Hr. G.=H.=L. Lowiński.

B. Wissenschaften.

I. Religionslehre. 1.) Für die katholischen Schüler. S. Quinta. 2.) Für die evangelischen Schüler. Die zehn Gebote und die drei Glaubensartikel; ganze Lieder und einzelne Liederverse sowie kleine Gebete wurden auswendig gelernt, nachdem die nöthigen Erklärungen gegeben worden waren. Einzelne Erzählungen aus der biblischen Geschichte des A. T. wurden vorgetragen und von den Schülern nacherzählt. 2 St. Hr. Superint. Annecke.

II. Rechnen. Die vier Species in benannten und unbenannten Zahlen; Bruchrechnung; Kopfrechnen. 4 St. Hr. G.=H.=L. Lindenblatt.

III. Geschichte und Geographie. Die Schöpfungs= und israelitische Geschichte nach Welter. — Elemente der mathematischen Geographie; Lage der Erdtheile und Hauptmeere; Uebersicht von Europa, besonders von Deutschland. 3 St. Hr. G.=H.=L. Lindenblatt.

Fertigkeiten.

I. Gesangunterricht in Sexta, Quinta und Quarta in je zwei wöchentlichen Stunden. Größere und schwierigere Gesangstücke wurden mit einem aus den geübtesten Sängern aller Classen gebildeten Chore in einer wöchentlichen Stunde durchgenommen. — Die katholischen Schüler dieses Sänger=Chores übten wöchentlich einmal katholische Kirchengesänge ein.

II. Zeichnen in Sexta, Quinta und Quarta in je zwei wöchentlichen Stunden nach Schmid's und Breysig's Methode und nach Vorlegeblättern.

III. Schönschreiben nach Heinrig's Vorschriften in Sexta in fünf und in Quinta in drei wöchentlichen Stunden.

IV. Gymnastische Uebungen Nachmittags von 4—5 respect. von 7—8 Uhr Abends an 4 Tagen in der Woche.

Hr. Gymnasial-Hülfslehrer Ossowski.

Verfügungen.

1. Das Gymnasium wird zum Berichte darüber aufgefordert, ob und in welchen Formen der jüngste Geburtstag Sr. Majestät des Königs in der hiesigen Anstalt gefeiert worden. Königsberg, den 31. October 1850.

2. Gesuche der Lehrer und aller dem Königlichen Provinzial-Schul-Collegium untergeordneter Beamten um Unterstützung u. s. w. sollen jedesmal an die vorgesetzte Provinzial-Behörde und nicht unmittelbar an den Herrn Minister gerichtet werden. Königsberg, den 7. Februar 1851.

3. Mittheilung einer Abschrift des an das hiesige Königliche Landrathsamt in Betreff der landwehrpflichtigen Lehrer der Anstalt gerichteten Schreibens. Königsberg, den 14. März 1851.

4. Die Kaiserlich-Oesterreichische Regierung hat den Wunsch ausgesprochen, auch ihrer Seits an dem Austausch der Programme deutscher Gymnasien sich zu betheiligen und schon in dem laufenden Jahre das Programm des Kaiserlichen Theresianischen Gymnasiums in Wien gegen die Programme der diesseitigen Anstalten auszutauschen. Zu diesem Zwecke und zu anderweitigem Bedarf sollen überhaupt 283 Exemplare des Programms der hiesigen Lehranstalt eingereicht werden. Königsberg, den 26. März 1851.

5. Der Director wird aufgefordert, eine Nachweisung über die persönlichen Verhältnisse der Lehrer der Anstalt einzureichen und am Schlusse des Jah-

res etwaige Veränderungen zur Berichtigung der Nachweisung anzuzeigen. Königsberg, den 4. April 1851.

6. Das Stimm-Organ der Schüler soll in den Pubertätsjahren bei dem Gesangunterrichte geschont werden. Königsberg, den 10. April 1851.

7. Der Director wird zum Berichte über die Privatlectüre der Schüler veranlaßt. Königsberg, den 19. April 1851.

8. Von dem Zustande und der Wirksamkeit der bei dem hiesigen Gymnasium errichteten Schüler-Kranken-Casse wird mit Befriedigung Kenntniß genommen. Königsberg, den 5. Mai 1851.

9. Gymnasiasten und Zöglinge anderer Lehranstalten sollen sich bei öffentlichen Gerichtsverhandlungen, namentlich der Schwurgerichtshöfe, nicht einfinden. Königsberg, den 7. Juni 1851.

Zweiter Abschnitt.

Chronik des Gymnasiums.

Das Schuljahr wurde am 26. September v. J., nachdem an den drei vorhergehenden Tagen die Aufnahme neuer Zöglinge in die Lehranstalt durch den Director Statt gefunden hatte, Morgens 8 Uhr mit einem feierlichen Gottesdienste in der Gymnasial-Kirche eröffnet. Hierauf wurde der neue Stundenplan dictirt, das weiter Erforderliche für die Constituirung der einzelnen Classen angeordnet und am 27. September pr. der Unterricht vollständig begonnen.

Am 15. October pr. feierte die Lehranstalt den hohen Geburtstag Sr. Majestät des Königs durch solennen Gottesdienst in der Gymnasial-Kirche unter Aufführung einer musicalischen Messe von Mozart und durch Vorträge und Gesänge der Schüler in dem größeren Classenzimmer der Quarta. Die Festrede hielt der Herr Gymnasial-Hülfslehrer Sommer. Auch in diesem Jahre erfreute sich die Lehranstalt der lebhaftesten Theilnahme von Seiten des geehrten Magistrates, der hochachtbaren Herren Stadtverordneten, der hochansehnlichen Schützengilde und vieler Bewohner der Stadt und Umgegend, welchen allen der wärmste und ergebenste Dank für die Förderung und Hebung des patriotischen Sinnes in den jugendlichen Herzen unserer Schüler dargebracht wird. Leider fehlt es noch immer an einem geräumigen und der hohen Bedeutung des Tages würdigen Locale!

Mit dem Schlusse des vorigen Schuljahres verließ uns der Herr Candidat Oestreich, um an einer andern Lehranstalt der Provinz seine amtliche Thätigkeit fortzusetzen. Die hiesigen Verhältnisse machten jedoch eine Verstärkung der Lehrkräfte dringend nothwendig und eine solche wurde uns durch die Fürsorge der hohen Behörde in der Person des Herrn Candidaten M. Lindenblatt zu Theil, welcher sogleich mit dem beginnenden Schuljahre hier eintraf und seine dienstlichen Functionen übernahm. Herr Candidat Lindenblatt ist uns allen als ein Mann der edelsten Gesinnung und der pflichttreuesten Thätigkeit willkommen gewesen, welchen wir der Lehranstalt gern erhalten sehen möchten.

Wie früher der Berichterstatter, so mußten im Anfange dieses Schuljahres die Herren Professor Lindemann und Oberlehrer Wichert und in den jüngsten Tagen der Herr Gymnasial-Lehrer Haub während ihrer Theilnahme als Geschworene bei den hiesigen Schwurgerichtssitzungen durch die übrigen Mitglieder des Lehrer-Collegiums vertreten werden. Schwieriger aber, weil andauernder, war für die Lehranstalt die Abwesenheit der zur Landwehr einberufenen Herren Lehrer Raabe und Sommer, deren Functionen vom 10. November pr. bis zum 12. Februar c. theils durch Classen-Combinationen theils durch Uebertragung auf die vorhandenen Lehrkräfte gedeckt wurden. Es gereicht mir zur Freude und zur Ehre, meinen Herren Collegen das aufrichtige Anerkenntniß geben zu müssen, daß sie bei ihrer durch die große Schülerzahl unserer Anstalt und durch anderweitige Momente an und für sich schon so sehr in Anspruch genommenen Berufsthätigkeit mit Liebe und Unverdrossenheit sich den Mühen und Anstrengungen der Stellvertretung unterzogen und redlich für das Wohl und Heil der Schule gearbeitet haben.

Dreien Lehrern der Anstalt ist laut Verfügung des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums vom 28. November pr. eine Remuneration im Gesammtbetrage von 119 Thlrn. aus Staatsfonds bewilligt worden.

Seine Majestät der König haben durch Allerhöchste Cabinetsordre vom 6. Januar c. zu genehmigen geruhet, daß die bisherige erste wissenschaftliche Hülfslehrerstelle bei dem hiesigen Gymnasium in eine ordentliche Lehrerstelle mit 400 Thlrn. verwandelt, die Besoldung der vierten ordentlichen Lehrerstelle von 400 Thlrn. auf 450 Thlr. und die Besoldung der bisherigen zweiten wissenschaftlichen Hülfslehrerstelle von 300 Thlrn. auf 350 Thlr. erhöht werde. Demgemäß ist durch Ministerial-Rescript vom 23. Januar c. die errichtete neue Lehrerstelle (S. Programm d. J. 1850 S. 41.) mit 500 Thlrn. als die zweite ordentliche Lehrerstelle in den Etat aufgenommen und dem Lehrer Haub verliehen worden, indem gleichzeitig in die dritte ordentliche Lehrerstelle der Lehrer Dr. Moiszisstzig, in die vierte ordentliche Lehrerstelle der Lehrer Dr. Peters und in die fünfte ordentliche Lehrerstelle der Hülfslehrer Raabe aufgerückt ist. Die sechste ordentliche Lehrerstelle verwaltet provisorisch der Candidat Lowiński und die wissenschaftliche Hülfslehrerstelle bekleidet definitiv der Lehrer Sommer, welcher am 17. Februar c. im Auftrage der vorgesetzten Behörde durch den Director verpflichtet und in sein neues Amt eingeführt worden ist.

Den 18. Januar c., den Erinnerungstag an die vor hundert und fünfzig Jahren Statt gefundene bedeutungsvolle Erhebung Preußens zur Königswürde, feierte die Lehranstalt, nachdem schon vorher in den einzelnen Classen eine dem Standpuncte der Schüler entsprechende Darlegung der historischen Momente durch die betreffenden Herren Lehrer gegeben worden war, durch eine an die versammelten Zöglinge gerichtete Ansprache des Directors und durch ein von dem Herrn Religionslehrer Lic. von Prądzyński celebrirtes Hochamt in der Gymnasial-Kirche.

Am 25. April c. beehrte der Oberpräsident der Provinz Preußen und Chef des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums, Herr Dr. Eichmann, das Gymnasium mit seinem hohen Besuche, nahm von sämmtlichen Gebäuden und Sammlungen desselben genaue und bis in das Einzelnste gehende Kenntniß und ließ sich durch den Berichterstatter in dem Conferenzzimmer das gesammte Lehrer-Collegium vorstellen, vor welchem sich der hohe Vorgesetzte in ermunternden und belehrenden Worten sowohl über verschiedene Lehrobjecte als auch über die Haupttendenzen des höhern Jugendunterrichts aussprach.

Die h. h. Sacramente der Buße und des Altars wurden den katholischen Schülern der Anstalt am 30. November und 1. Dezember pr., am 5. und 6. April und am 5. und 6. Juli c. gespendet. Außerdem wurden 46 Schüler, welche in außerordentlichen Lectionen die nöthige Vorbereitung erhalten hatten, am 5. Juli c. zur ersten h. Beichte angenommen. Den bei diesen heiligen Handlungen gütigst mitwirkenden Herren Geistlichen sage ich im Namen der Lehranstalt den ergebensten Dank.

Der Gymnasial-Musikverein setzte auch in diesem Schuljahre seine regelmäßigen Uebungen unter der Aufsicht des Herrn Religionslehrers und unter der technischen Leitung des Secundaners Mazurowski fort und legte bei mehreren Kirchen- und Schulfeierlichkeiten Proben seines regsamen und anerkennenswerthen Strebens ab. Zur Förderung desselben wurden in den einzelnen Classen ungezwungene Sammlungen veranstaltet, welche die Summe von 39 Thlrn. 28 Sggn. ergaben. Der ehemalige Zögling unserer Anstalt und Mitglied des Vereins, der jetzige Studiosus der Theologie, Herr Heimann, schenkte demselben ein Gesangbuch, welches betitelt ist: „Sechszig auserlesene katholische Choräle von F. J. Kunkel."

In Betreff des Badens der Schüler haben die bereits früher angeordneten Vorsichtsmaaßregeln auch in diesem Schuljahre Statt gefunden.

Dritter Abschnitt.

Statistische Uebersicht.

In dem verflossenen Schuljahre haben an dem Unterrichte Theil genommen in

Prima	37	Schüler
Ober-Secunda . . .	23	"
Unter-Secunda . .	31	"
Ober-Tertia . . .	61	"
Unter-Tertia A. . .	40	"
Unter-Tertia B. . .	41	"
Quarta A. . . .	36	"
Quarta B. . . .	35	"
Quinta	83	"
Sexta	80	"
Summa	467	Schüler.

Im Laufe des verflossenen Schuljahres wurden 99 neue Schüler in die Lehranstalt aufgenommen; 38 Schüler gingen entweder zu einem andern Berufe oder in andere Unterrichtsanstalten über und fünf Schüler mußten wegen ihres tadelnswerthen Betragens durch Conferenz-Beschluß verwiesen werden. Auch in diesem Schuljahre haben wir über einen herben und schmerzlichen Todesfall zu berichten. Es unterlag am 1. Januar d. J. in der Blüthe seiner Jahre der Primaner August Panske aus Granau im Conitzer Kreise nach kurzem Krankenlager bei den Seinigen einem heftigen Nervenfieber und wurde am 7. desselben Monats von seinen Mitschülern und Lehrern an seine Ruhestätte in unserem benachbarten Lichnau geleitet, nachdem an heiliger Stelle das feierliche Todtenopfer für die Seele des Entschlafenen dargebracht und von mehreren geehrten Priestern in beredter Weise die in Wahrheit in so hohem Grade vorhandenen lobenswerthen Eigenschaften unseres stets geistig regsamen, fleißigen, frommen und zu den schönsten Hoffnungen berechtigenden Schülers besprochen worden waren. Mögen die braven Eltern, gekräftigt durch den himmlischen Trost, in ihrem gerechten Schmerze Linderung finden und mit gläubigem Gemüthe den thränenvollen Blick nach dem Lande des Wiedersehens richten! Der Lehranstalt wird das Andenken an ihren geliebten Zögling ein theures und unvergeßliches seyn.

Der diesjährigen Abiturienten-Prüfung unterwarfen sich neunzehn Oberprimaner, welche nach vollendeten schriftlichen Arbeiten am 14. 15. 16. und

17. Juli c. unter dem Vorsitze des Königlichen Provinzial-Schul- und Regierungsrathes, Herrn Dr. Dillenburger, mündlich geprüft wurden. Im Laufe der mündlichen Prüfung traten zwei Schüler zurück, vierzehn Primanern wurde das Zeugniß der Reife zugesprochen, zwei wurden für unreif erklärt und über einen Abiturienten mußten die Prüfungs-Verhandlungen der hohen Behörde zur weitern Entscheidung vorgelegt werden. Die Namen derjenigen, welche das Zeugniß der Reife erhalten, sind folgende:

Namen.	Alter.	Geburtsort.	Confess.	war in Prima.	Studium.	Ort des Studiums.
1. Bartholomäus Gierszewski	$21\frac{3}{4}$ J.	Koślinka im K. Conitz.	kath.	2 J.	Theologie.	Breslau.
2. Joseph Hillar	$24\frac{1}{4}$ J.	Raikau im K. Pr. Starg.	kath.	2 J.	Theologie.	Breslau.
3. Eduard Klawitter	$24\frac{3}{4}$ J.	Tütz im K. Dt. Crone.	kath.	2 J.	Theologie.	Breslau.
4. Johannes Kowalkowski	$24\frac{3}{4}$ J.	Mestin im K. Pr. Starg.	kath.	2 J.	Theologie.	Breslau.
5. Leopold Lowiński	$21\frac{1}{2}$ J.	Fordon im K. Bromberg.	kath.	$1\frac{1}{2}$ J.	Medizin.	Breslau.
6. Franz Mey	$20\frac{1}{4}$ J.	Gemlitz im K. Danzig.	kath.	2 J.	Mathemat.	Breslau.
7. Wilhelm Michalski	$21\frac{3}{4}$ J.	Dt. Cekzin im K. Conitz.	kath.	2 J.	Theologie.	Breslau.
8. Johannes v. Perkowski	23 J.	Perki im K. Lomża im K. Polen.	kath.	2 J.	Theologie.	Breslau.
9. Johannes Polachowski	$26\frac{1}{2}$ J.	Zakrzewo im K. Flatow.	kath.	2 J.	Theologie.	Breslau.
10. August v. Raabe	21 J.	Laubnitz im K. Pr. Holl.	kath.	2 J.	Rechtswiss.	Breslau.
11. Dionysius Schmidt	20 J.	Carthaus.	kath.	2 J.	Theologie.	Pelplin.

Namen.	Alter.	Geburtsort.	Confess.	war in Prima.	Studium.	Ort des Studiums.
12. Rudolph v. Schuckmann	20 J.	Oebelitz i. K. Franzburg.	evang.	2 J.	Rechtswiss.	Greifswalde.
13. Johannes Schwalm	22 J.	Neustadt.	kath.	2 J.	Theologie.	Münster.
14. Joseph Wegner	$25\frac{3}{4}$ J.	Dt. Cekzin im K. Conitz.	kath.	2 J.	Theologie.	Pelplin.

Der Lehrapparat der Anstalt hat auch in diesem Schuljahre seine etatsmäßige Erweiterung gefunden und außerdem hat sich die Bibliothek folgender Geschenke zu erfreuen gehabt:

I. Von den hohen Behörden:

1.) Ein Exemplar des 2. Bandes der Indischen Alterthumskunde von Lassen. Geschenk des hohen Vorgesetzten Ministeriums.

2.) Ein Exemplar von Lange's Geschichten aus dem Herodot. 2. Auflage.

3.) Ein Exemplar der von dem Professor Dr. Forchhammer herausgegebenen Karte und Beschreibung der Ebene von Troja.

4.) Ein Exemplar des 39. und 40. Bandes von Crelle's Journal für Mathematik.

5.) Ein Exemplar der 1. Lieferung des von der Alterthumsgesellschaft Prussia in Königsberg herausgegebenen 2. Theiles der Litterärgeschichte von Pisanski.

6.) Ein Exemplar des 2. Heftes des 8. Bandes der Zeitschrift für deutsches Alterthum von Haupt.

7.) Ein Exemplar des von dem Prediger und Rector Dr. Borkenhagen bearbeiteten lateinischen Uebungsbuches.

8.) Ein Exemplar der Abhandlung des Prof. Anger: „Zur Theorie der Perspective für krumme Bildflächen, mit besonderer Berücksichtigung einer genauen Construction der Panoramen.“

9.) Ein Exemplar der 4. Lieferung des von dem Prof. Dr. Kosegarten in Greifswalde herausgegebenen Codex Pomeraniae diplomaticus.

10.) Ein Exemplar des 7. Bandes des Rheinischen Museums für Philologie.

11.) Ein Exemplar des 8. Jahrganges der von dem Prof. Dr. Gerhard herausgegebenen archäologischen Zeitschrift.

12.) Ein Exemplar des fasc. 9. vol. II. von Suidae lexicon ed. Bernhardy.

Die unter Nro. 2. bis 12. angegebenen Werke sind dem Gymnasium durch das Königliche Vorgesetzte Provinzial-Schul-Collegium zugegangen.

II. **Von dem Herrn Buchhändler Unger in Königsberg:**

13.) Ein Exemplar der von dem Director Dr. Thiersch herausgegebenen Uebersicht der Homerischen Formen für Schüler u. s. w. 3. Auflage.

III. **Von dem Herrn Regierungs- und Schulrath Kellner in Marienwerder:**

14.) Ein Exemplar des von Mößler herausgegebenen und von Reichenbach gänzlich umgearbeiteten Handbuches der Gewächskunde. Dritte Auflage.

15.) Ein Exemplar des altdeutschen Lesebuches von W. Wackernagel. Zweite Ausgabe.

IV. **Von dem Herrn Buchhändler Reichardt in Eisleben:**

16.) Ein Exemplar des deutsch-lateinischen Taschen-Wörterbuches von Dr. Schmalfeld.

Für diese gütigen Geschenke spricht die Lehranstalt ihren ergebensten Dank aus.

Die Schüler-Lese-Bibliothek ist aus der durch freiwillige Beiträge der Schüler aufgebrachten Summe von 50 Thlrn. 25 Sggn. vermehrt worden. Der Quintaner Th. Bluthardt schenkte: 1.) Der Wundarzt. Von dem Verfasser der Ostereier. 2.) M. Erdner. Neue Blumenkränze für das blühende Alter. 3.) Th. Nelk. Der Staar.

Die polnische Schüler-Lese-Bibliothek hat einen Zuwachs aus der

Summe von 8 Thlrn. 12 Sggn. 6 Pfn. erhalten, welche ebenfalls aus freiwilligen Gaben der Schüler herrührt.

Die Schüler-Lehrbücher-Bibliothek ist durch Anschaffungen aus dem Betrage von 10 Thlrn. 19 Sggn. 6 Pfn. erweitert worden. Außerdem hat der Herr Dekan und Schulinspector Kloka in Neuenburg unter dem 23. April c. dem Berichterstatter zehn Thaler mit dem Ersuchen zugestellt, für diesen Betrag einige in den oberen Classen des Gymnasiums besonders gebräuchliche Werke anschaffen und dieselben der Lehrbücher-Bibliothek einverleiben zu lassen. Indem ich dem edlen Geber im Namen der Anstalt aufrichtig danke, bemerke ich zugleich, daß angemessene Bücher angekauft und sofort ihrem Zwecke übergeben worden sind. Ferner schenkte der Abiturient Lowiński: Euclid's Elemente der Mathematik und der Abiturient von Schuckmann: Elemente der Mathematik von Kiesewetter. 4 Bde.

Für die Gymnasial-Kirche sind im Verlaufe des vorigen und jetzigen Schuljahres für die aus dem disponiblen Cassenbestande der Anstalt höhern Orts bewilligte Summe von 95 Thlrn. 5 Sggn. ein weißes und ein schwarzes Pluviale, eine vergoldete Krankenpatene, ein neusilbernes Weihrauchfaß nebst Weihrauchschale und eine Communiondecke angeschafft worden.

Die confirmirten evangelischen Schüler der Lehranstalt empfingen nach Anleitung ihres Seelsorgers im Laufe des Schuljahres wiederholt das h. Abendmahl.

Die durch das Ausscheiden der Abiturienten Nathanael Fritz, Thomas Gatz, Joseph Grünholz, Martin Meier und Franz Reimann erledigten Convictstellen wurden den Primanern Johann Polachowski, Anton Sauer, Paul Warmke, August Posnański und dem Ober-Secundaner Theodor Wenglikowski verliehen. Bei dieser Gelegenheit verfehle ich nicht, das nachstehende Ministerial-Rescript unter dem Bemerken zur öffentlichen Kenntniß zu bringen, daß das Gymnasium durch Verfügung des Vorgesetzten Provinzial-Schul-Collegiums d. d. Königsberg, den 1. September 1850 zur Ausführung der nachfolgenden neuen Bestimmungen veranlaßt worden ist.

„Auf den Bericht des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums vom 4. d. Mts. (Nro. 1935.) will ich das nach erfolgter Verhandlung mit dem Herrn Bischofe von Culm für das Convictorium bei dem Gymnasium zu Conitz in Vorschlag gebrachte Regulativ unter Aufhebung der entgegenstehenden Bestimmungen des Erlasses vom 23. Juni 1825 (Nro. 23521.) genehmigen und hiermit Folgendes festsetzen:

§. 1. Die Aspiranten müssen katholischer Religion, unbemittelt, von guten Sitten und mit dem erforderlichen vorzüglichen Talent versehen sein.

§. 2. Die Freistellen sind nach dem Verhältnisse von zwei Dritteln solcher Schüler bestimmt, welche die Absicht haben, sich dem geistlichen Stande zu widmen. Auf den Ueberrest haben diejenigen vorzüglich Anspruch, welche sich dem höheren Lehrfache widmen wollen.

§. 3. Zur Besetzung der für zukünftige Geistliche bestimmten Stellen gelten folgende Bestimmungen:

a. Das gesammte Lehrer-Collegium des Gymnasiums zu Conitz hat, wenn eine dieser Stellen zur Erledigung kommt, durch einen Conferenz-Beschluß wenigstens zwei seiner Ansicht nach würdige Gymnasiasten mit Angabe der Stimmenzahl, welche sich für dieselben entschieden hat, dem hochwürdigsten Bischofe von Culm in Vorschlag zu bringen.

b. In der Regel sind nur Gymnasiasten der beiden oberen Gymnasial-Classen dazu auszuwählen, jedoch bleibt es zuläßig, auch Schüler anderer Classen vorzuschlagen, wenn entweder ganz besondere Gründe für deren Berücksichtigung sprechen, oder in den oberen Classen sich entweder keine bedürftige oder keine ganz würdige Aspiranten befinden.

c. Aus den in Vorschlag gebrachten Aspiranten überträgt der Herr Bischof von Culm die erledigte Stelle demjenigen, welcher ihm den Vorzug zu verdienen scheint.

d. Dem Herrn Bischof von Culm bleibt es vorbehalten, selbst Gymnasiasten dem Lehrer-Collegium zur Uebertragung erledigter Stellen namhaft zu machen. Sollte in einem solchen Falle das Lehrer-Collegium nicht zustimmen können, so hat dasselbe seine Ablehnungsgründe dem Herrn Bischof ausführlich mitzutheilen.

e. Falls ein Convictorist vor dem Uebergange zu dem eigentlichen theologischen Studium sich einem andern Stande widmen oder als Geistlicher in eine andere Diöcese übertreten sollte, so bleibt derselbe verpflichtet, die genossene Unterstützung nach einer im richtigen Verhältnisse zu dem Convictoriums-Etat stehenden Summe zu erstatten. Bei der Aufnahme ist der Recipiend von dieser Verpflichtung in Kenntniß zu setzen, und kann diese Summe auf Grund einer ebenfalls bei der Aufnahme abzufassenden protokollarischen Erklärung der Eltern, resp. Vormünder der Recipienden zurückgefordert werden.

f. Dem Herrn Bischofe sind die halbjährigen Censuren der Inhaber der geistlichen Convictstellen zur Kenntnißnahme durch die Gymnasial-Direction in beglaubigter Abschrift mitzutheilen, auch steht dem Herrn Bischofe das Recht zu, sich persönlich oder durch Commissarien von der Lebensweise der betreffenden Convictoristen in Kenntniß zu setzen, um sich die Ueberzeugung zu verschaffen, ob dieselbe mit denjenigen Anforderungen im Einklang steht, welche an Aspiranten des geistlichen Standes zu machen sind.

§. 4. Zur Besetzung derjenigen Stellen, welche vorzugsweise zukünftigen Lehrern höherer Lehranstalten vorbehalten bleiben, schlägt das Lehrer-Collegium nach der im §. 3. a. b. bezeichneten Weise dem Königlichen Provinzial-Schul-Collegium geeignete Schüler zur Auswahl vor.

§. 5. Sollten sich keine Schüler vorfinden, welche sich dem höhern Lehrerfache zu widmen gedenken, oder unter diesen keine der Empfehlung würdige Individuen befinden, so haben auch für diese Stellen zukünftige Theologen den Vorzug und werden zu dem Ende dem Königlichen Provinzial-Schul-Collegium geeignete Schüler des Gymnasiums zu Conitz durch den Herrn Bischof von Culm in Vorschlag gebracht.

§. 6. In dem Convictorium befinden sich neun Freistellen. Die zehnte Stelle, welche in Folge des Ministerial-Rescriptes vom 22. Februar 1831 Nro. 500. eröffnet, dann der Theuerung halber im Jahre 1847 eingezogen und durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums vom 1. Februar 1849 auf so lange hergestellt wurde, als die im Etat von 1848—50 ausgesetzte Summe zur vollständigen Unterhaltung und Bedienung von 10 Convictoristen ausreichen werde, wird für die Zeit ihres Bestehens durch den Herrn Bischof mit einem Aspiranten des geistlichen Standes besetzt.

Hiernach hat das Königliche Provinzial-Schul-Collegium das weiter Erforderliche zu veranlassen.

Berlin, den 23. August 1850.

Der Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten.
(gez.) von Ladenberg.

An
Das Königliche Provinzial-Schul-Collegium zu Königsberg."

Dem Ober-Secundaner Paul Balachowski ist von Sr. Bischöflichen Gnaden, dem hochwürdigsten Herrn Bischofe von Culm, eine Unterstützung von 30 Thlrn. zu Theil geworden.

Das hochwürdige General-Vicariat-Amt in Pelplin hat die Summe von 135 Thlrn. 18 Sggn. 7 Pfn. als Unterstützung für geeignete Aspiranten des priesterlichen Standes dem Berichterstatter zugehen lassen.

Auch in diesem Schuljahre sind die Zinsen der Professor Derengowski'schen Stiftung dem Unter-Secundaner Johann Nagórski bewilligt worden.

Ueber die bereits in dem vorjährigen Programme S. 49. angedeutete Schenkung kann auch gegenwärtig noch nicht umständlicher berichtet werden, weil diese Angelegenheit auf dem gerichtlichen Wege noch nicht zur Entscheidung gelangt ist.

Der Unterstützungs-Verein in Culm ertheilte in diesem Schuljahre durch den Herrn Religionslehrer Lic. von Prądzyński mehreren dürftigen Schülern der Anstalt Stipendien und zwar im Betrage von 158 Thlrn.

Der Rittergutsbesitzer Dominicus von Radziecki hat in seinem Testamente d. d. Mühlenkawel, den 5. October 1850 dem hiesigen Gymnasium die Summe von ein tausend Thalern unter der Bedingung vermacht, daß die Zinsen dieses Capitals als Unterstützung einem hülfsbedürftigen Abiturienten katholisch-polnischer Abkunft während seiner Studien auf der Universität zufließen sollen. In Ermangelung eines Polen tritt ein katholischer Abiturient an dessen Stelle. Die näheren Erläuterungen des Testamentes sind durch eine gerichtliche Verhandlung d. d. Zempelburg, den 13. Januar 1851 von

Seiten der bevollmächtigten Testaments-Executoren, der Herren von Prądzyński auf Waldau, von Komiorowski auf Komiorowo und des Religionslehrers Lic. von Prądzyński festgestellt worden.

Das neu erbaute Alumnats-Gebäude an der Stelle des frühern sogenannten Paupernhauses, über welches ich bereits im vorjährigen Programm S. 49. Bericht erstattet habe, ist mit dem 3. Januar c. bezogen worden und haben zwanzig Schüler in demselben Wohnung gefunden. Mit dem Oeconomen des Convictes hat wegen Beköstigung, Aufwartung und Feuerung für die Alumnen ein schriftliches Abkommen, welches höhern Orts unter dem 5. April c. genehmigt worden ist, Platz gegriffen und wird dieses bis zu einer etwaigen anderweitigen Anordnung in Geltung bleiben. Die von dem Königlichen Provinzial-Schul-Collegium durch Verfügung vom 18. Februar c. vorläufig gut geheißenen „Statuten über die Aufnahme in das hiesige Alumnat ad St. Augustinum" sind folgende:

§. 1. In das Alumnat ad St. Augustinum in Conitz werden unbemittelte, sittliche, fleißige und mit hinreichenden Anlagen versehene katholische Schüler des hiesigen Gymnasiums aufgenommen.

§. 2. Die schriftlichen Eingaben um Aufnahme sind dem Director des Gymnasiums einzureichen, welcher dieselben der Lehrer-Conferenz zur weitern Prüfung und Beschlußnahme vorlegt.

§. 3. Die Stellen des Alumnats werden jedesmal nur auf ein Jahr verliehen. Unsittliches Betragen aber oder Unfleiß zieht mit dem Ablaufe des Tertials oder nach Umständen den sofortigen Verlust der Stelle nach sich.

§. 4. Die Alumnen sind strenge an die bestehende Hausordnung gebunden, in welcher auch die Bestimmungen über ihr gegen den Wirth des Hauses zu beobachtendes Benehmen enthalten sind.

§. 5. Schüler, welche ihren Tisch bei dem Wirthe des Hauses nicht nehmen oder überhaupt die mit dem Wirthe in einem besondern Contracte über die Verpflegung festgestellten Bedingungen nicht erfüllen wollen, können in das Alumnat nicht aufgenommen werden resp. in demselben nicht länger bleiben.

§. 6. In der Regel werden nur Schüler der untern und mittlern Classen in das Alumnat aufgenommen; jedoch bleibt der Entscheidung des Lehrer-Collegiums überlassen, auch einzelnen, besonders geeigneten Schülern der obern Classen die Aufnahme in das Institut zu bewilligen.

§. 7. Der jedesmalige Religionslehrer ist auch zugleich Inspector des Alumnates, welcher die nothwendigen Mittheilungen dem Director des Gymnasiums zur weitern Veranlassung zugehen läßt.

Ueber die von dem Herrn Gymnasial-Lehrer Dr. Moiszissztzig speciell verwaltete Gymnasial-Kranken-Casse mögen folgende Notizen hier ihre Stelle finden:

Bestand von 1849—50	28 Thlr.	9 Sggn.	5 Pfe.
Einnahme von 1850—51 . . .	93 "	4 "	4 "
Summa	121 Thlr.	13 Sggn.	9 Pfe.
Gezahlt im J. 1850—51 . . .	21 "	20 "	9 "
Effectivbestand am Schlusse des Schuljahres 1850—51 . . .	99 Thlr.	23 Sggn.	— Pfe.,

welche zu $4\frac{1}{2}$ resp. 5 pCt. angelegt sind.

Außer den Schülern des Gymnasiums haben in dem verflossenen Schuljahre zu der Kranken-Casse Beiträge zu liefern die Gewogenheit gehabt:

1. Am 7. Januar c. Herr Pfarrer Malinowski in Waldau 2 Thlr.
2. Am 11. Juni c. Herr Pfarrer Nitsch in Lichnau 1 Thlr.
3. Am 1. Juli c. Herr Kaufmann von Podiaski in Conitz 5 Thlr. 20 Sggn.

Dank den edlen Männern für ihre unserer hülfsbedürftigen Jugend zugewendete liebethätige Gesinnung! Möchten solche Erscheinungen recht eifrige Nachahmung finden!

Aber auch den Herren Aerzten und allen geehrten Familien sowie einzelnen Personen sowohl in als außer der Stadt, welche unbemittelten oder kranken Schülern unserer Anstalt Hülfe und Trost haben zufließen lassen, bringe ich im Namen des Gymnasiums den tiefgefühltesten und ergebensten Dank dar.

Vierter Abschnitt.

Oeffentliche Prüfungen.

Die öffentlichen Prüfungen der Gymnasial-Schüler werden Freitag, den 1. August c., von 8 Uhr Morgens und von 3 Uhr Nachmittags ab in dem größeren Classenzimmer der Quarta in folgender Ordnung Statt finden:

Vormittag.

Gesang.

Sexta: Lateinisch und Geographie.
Quinta: Lateinisch und Deutsch.
Quarta: evangelische Religionslehre, Griechisch und Mathematik.
Unter-Tertia: Lateinisch und Geschichte.

Nachmittag.

Gesang.

Ober-Tertia: Polnisch und Griechisch.
Secunda: katholische Religionslehre, Mathematik und Lateinisch.
Prima: Geschichte, Französisch und Griechisch.

Sonnabend, den 2. August c., Morgens 8 Uhr: musikalisches Hochamt und Dankgebet in der Gymnasial-Kirche als Schluß des Schuljahres. Hierauf in dem größeren Classenzimmer der Quarta: Gesang, Abschiedsrede der Abiturienten und deren Erwiederung; Entlassung der Abiturienten; Versetzung; Gesang. — Die Censur-Austheilung in den einzelnen Classen ist ein Privatact.

Montag, den 15. September c., Morgens 8 Uhr wird das neue Schuljahr durch einen kirchlichen Act eröffnet. Die Anmeldung neuer Schüler wird am 11. 12. und 13. September c. in den Morgenstunden von 8 bis 12 Uhr und Nachmittags von 2 bis 5 Uhr Statt finden. Bei dieser Gelegenheit sey es ausdrücklich bemerkt, daß während des Laufes des Schuljahres, also auch nicht Weihnachten und Ostern, neue Schüler in das Gymnasium und namentlich in die Sexta nicht mehr aufgenommen werden, da der Lehrcursus in allen Classen mit dem Anfange des Schuljahres beginnt und ein späterer Eintritt in dieselben störend und nachtheilig ist.

Conitz, den 31. Juli 1851.

Dr. F. Brüggemann.