# Anwendung der Differentiation
## mit beliebigem reellen Index
auf die
# Integration linearer Differentialgleichungen.

## 2. Teil.

Von

Oberlehrer **v. Schaewen.**

Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Königlichen Gymnasiums zu Strasburg Westpr. Ostern 1882.

**Königsberg i. Ostpr.**

Druck der Universitäts-Buch- und Steindruckerei von E. J. Dalkowski.

# Anwendung der Differentiation mit beliebigem reellen Index auf die Integration linearer Differentialgleichungen.

## II. Teil.

(Fortsetzung aus dem Osterprogramm, Strasburg 1881.)

---

Als Resultat der Entwicklungen des ersten Teils hatte sich ergeben, dass die Differentialgleichung 23):

$$f_n \frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \sum_{n-2}^{0} h (-1)^{n-h-1} \binom{\mu+n-h-2}{n-h-1} \frac{d^{n-h-1}\left(f_{n-1} + \frac{\mu-1}{n-h}(n-h-1) f_n'\right)}{dx^{n-h-1}} \frac{d^h y}{dx^h} = 0,$$

in welcher

$$f_n = (x-a_1)(x-a_2)\,..\,(x-a_n),$$

$$f_{n-1} = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\left[\frac{\lambda_1}{x-a_1} + \frac{\lambda_2}{x-a_2} + \,..\, + \frac{\lambda_n}{x-a_n}\right] \qquad \text{ist,}$$

durch Differentiation mit beliebigem Index keine Formveränderung erleidet und durch ein System von $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Partikularlösungen, die sich unter dem Symbol $(a_k a_\lambda)$ darstellten, gelöst wird.

Dieses Symbol war definiert durch

$$(a_k a_\lambda) = \left(e^{2i\pi\alpha_\lambda} - 1\right) \int (a_k) f(z)\, dz - \left(e^{2i\pi\alpha_k} - 1\right) \int (a_\lambda) f(z)\, dz.$$

Es bedeuteten $a_k$, $a_\lambda$ irgend zwei von den Unstetigkeitspunkten $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_n$, $x$, $\infty$ der Funktion

$$f(z) = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\,..\,(z-a_n)^{\alpha_n}(z-x)^{\alpha},$$

deren Exponenten beliebige reelle Zahlen vorstellten und mit den Grössen $\lambda$ und $\mu$ durch die Gleichungen:

$$\alpha_1 = -\lambda_1 - \mu, \quad \alpha_2 = -\lambda_2 - \mu, \quad ..\,\alpha_n = -\lambda_n - \mu, \quad \alpha = n + \mu - 2$$

zusammenhingen.

Durch die Zeichen $\int(a_k)$, $\int(a_\lambda)$ sollte die Integration auf geschlossenem imaginären Wege beziehungsweise um die Punkte $a_k$, $a_\lambda$ angedeutet werden, die bei sämtlichen Integralen von dem nämlichen Punkte $z_1$ zu beginnen und in demselben Sinne auszuführen war.

Für den Anfangspunkt $z_1$ sollten behufs eindeutiger Bestimmung alle Differenzen $(z - a_1)$, $(z - a_2)$, $(z - a_n)$, $(z - x)$ positive reelle Teile, und die zu integrierende Funktion $f(z)$ den Wert: $(z_1 - a_1)^{\alpha_1} (z_1 - a_2)^{\alpha_2} \ldots (z_1 - a_n)^{\alpha_n} (z_1 - x)^{\alpha}$ ohne einen oder mehrere Faktoren von der Form $e^{2i\pi m \alpha_k}$ haben.

Über den Integrationsweg um $a_k$ wurde bei sonst willkürlichem Verlauf nur festgesetzt, dass er eine Umwandlung zuliess in einen anderen Weg auf den Ufern der geraden Linie $z_1 a_k$ und auf einem kleinen Kreise um $a_k$.

Zwischen den Lösungen endlich bestanden die $\frac{n(n+1)}{2}$ linearen Relationen 17) (S. 16 T. I)

$$\left(e^{2i\pi\alpha_\lambda} - 1\right)(x a_k) - \left(e^{2i\pi\alpha_k} - 1\right)(x a_\lambda) = \left(e^{2i\pi\alpha} - 1\right)(a_\lambda a_k),$$

in denen zu den $a$'s noch $\infty$ mit zugehörigem Exponenten $-\sum\limits_0^n \alpha_h$ genommen werden muss, und die lineare Relation 22):

$$\sum_1^{n+1} e^{2i\pi(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_k - 1)} (x a_k) = 0.$$

Es konnten daher durch irgend welche $n$ Lösungen die übrigen linear ausgedrückt werden.

Aus diesen allgemeinen Resultaten sollen jetzt speziellere abgeleitet werden, indem wir über die $\alpha$'s, über die $a$'s, über $n$ besondere Annahmen machen.

Sei zunächst der Grad der Differentialgleichung ein beliebiger, und mögen unter den $a$'s irgend welche komplexe Zahlen verstanden werden, dann stellen wir die Forderung, dass die Exponenten $\alpha$ die Ausdehnung der Integration bis zu den Punkten $x$, $a_1$, $a_2$, $a_n$, $\infty$ gestatten. Hiezu sind folgende Bedingungen notwendig:

24) $\quad \alpha + 1 > 0, \quad \alpha_1 + 1 > 0, \quad \alpha_2 + 1 > 0, \quad \ldots \alpha_n + 1 > 0, \quad \Sigma\alpha < -1.$

Aus den ersten $n + 1$ Bedingungen ergiebt sich:

$$\Sigma\alpha > -(n+1),$$

mithin folgt:

$$-1 > \Sigma\alpha > -(n+1),$$

d. h. für die Exponenten $\alpha$ sind solche über $-1$ liegende Zahlenwerte zu wählen, deren Summe zwischen $-1$ und $-(n+1)$ eingeschlossen ist.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich nun jedes der in den obigen Lösungen vorkommenden Integrale $\int(a_k)$ in ein auf der Verbindungsgeraden $z_1 a_k$ zwischen den Grenzen $z_1$ und $a_k$ genommenes Integral transformieren. Denn wir können das Integral von $z_1$ um $a_k$ herum nach $z_1$ in folgende drei Teile zerlegen: ein Integral von $z_1$ auf der Geraden $z_1 a_k$ bis $a_k + \varepsilon$, wo unter $\varepsilon$ eine kleine Grösse verstanden wird, ein Integral von $a_k + \varepsilon$ auf einem kleinen Kreise um den Punkt $a_k$, ein Integral von $a_k + \varepsilon$ bis $z_1$ zurück. Dies soll ja nach unserer früheren Annahme über den Integrationsweg möglich sein. Sobald wir nun $\varepsilon = 0$ setzen, verschwindet wegen der Exponentialbedingung das Integral um den kleinen Kreis, das dritte Integral lässt sich aber mit dem ersten zusammenfassen, da es das Entgegengesetzte des ersten wird, welches noch ausserdem wegen Umgehung des Punktes $a_k$ den Faktor $e^{2i\pi\alpha_k}$ erhalten hat. Man gelangt folglich zu

$$\int(a_k) f(z)\,dz = \left(1 - e^{2i\pi\alpha_k}\right) \int_{z_1}^{a_k} f(z)\,dz.$$

Da früher festgesetzt ist, welchen Anfangswert die Funktion $f(z)$ im Punkte $z_1$ haben soll, so hat dieses Integral einen eindeutig bestimmten Wert. Dies ist auch der Fall, wenn unter $a_k$ der Punkt $\infty$ verstanden wird. Denn der Zweifel darüber, welchen Weg man von $z_1$ bis $\infty$ einzuschlagen hat, wird dadurch gelöst, dass den früheren Auseinandersetzungen zufolge das Integral von $z_1$ auf einer geraden Linie nur bis zu einer solchen Stelle des unendlich grossen Kreises genommen werden darf, welche nicht innerhalb des kleinsten von $z_1$ ausgehenden, sämtliche übrigen Unstetigkeitspunkte $x$, $a_1$, $a_2$, . . $a_n$ enthaltenden geradlinigen Winkels liegt. Alle Integrale aber, die ich von $z_1$ bis zu solchen Stellen nehme, sind gleich, da zwischen ihren Wegen kein Unstetigkeitspunkt liegt und die Integrale auf den Strecken des unendlich grossen Kreises wegen der Exponentialbedingung verschwinden. Demnach sind wir im Stande, unsere sämtlichen Lösungen durch geradlinige, eindeutig bestimmte Integrale von $z_1$ bis zu den Unstetigkeitspunkten auszudrücken. Es wird:

$$(a_k a_\lambda) = \left(e^{2i\pi a_\lambda} - 1\right)\left(e^{2i\pi a_k} - 1\right)\left[\int_{z_1}^{a_\lambda} f(z)\,dz - \int_{z_1}^{a_k} f(z)\,dz\right].$$

Die Differenz der Integrale in der Klammer bedeutet aber nichts anderes als ein einziges Integral auf dem geradlinigen Winkel $a_k z_1 a_\lambda$. Dies wird ersichtlich, wenn man bei dem zweiten Integral die Grenzen umkehrt, also schreibt:

$$(a_k a_\lambda) = \left(e^{2i\pi a_\lambda} - 1\right)\left(e^{2i\pi a_k} - 1\right)\left[\int_{z_1}^{a_\lambda} f(z)\,dz + \int_{a_k}^{z_1} f(z)\,dz\right].$$

Für die untere Grenze $z_1$ des ersten Integrals und die obere $z_1$ des zweiten hat man alsdann denselben Wert von $f(z)$ zu nehmen. Die Funktionswerte schliessen sich also in $z_1$ stetig an, man bekommt mithin wirklich ein Integral von $a_k$ über $z_1$ nach $a_\lambda$. Natürlich muss nun in $a_k$ die Integration mit demjenigen Werte der Funktion $f(z)$ beginnen, der durch stetige Fortsetzung von $f(z_1)$ auf der geraden Linie $z_1 a_k$ entstanden ist.

Wir können hienach alle unsere Lösungen $(a_k a_\lambda)$ durch Integrale auf den Schenkeln von Winkeln mit demselben Scheitelpunkt $z_1$ ausdrücken. Dies wird uns sofort zu dem Resultate führen, dass unser gefundenes Lösungssystem darstellbar ist durch ein zweites System, bei welchem die Integrale auf den Verbindungsgeraden $a_k a_\lambda$ genommen werden. Sobald innerhalb des Dreiecks $a_k z_1 a_\lambda$ kein weiterer Unstetigkeitspunkt liegt, ist sofort ersichtlich, dass das Integral von $a_k$ über $z_1$ nach $a_\lambda$ zu dem geradlinigen Integral von $a_k$ bis $a_\lambda$ führt. Lägen ein oder mehrere Unstetigkeitspunkte auf der Geraden $a_k a_\lambda$, so bekäme man für das Integral um den Winkel $a_k z_1 a_\lambda$ eine Summe von Integralen zwischen je zwei auf einander folgenden Unstetigkeitspunkten der Linie $a_k a_\lambda$. Es mag sich endlich innerhalb des Dreiecks $a_k z_1 a_\lambda$ etwa der Punkt $a_p$ befinden. Dann erhellt, dass die Lösung $(a_k a_p)$ auf dem Winkel $a_k z_1 a_p$ zu dem geradlinigen Integral von $a_k$ bis $a_p$ führt, da das Dreieck $a_k z_1 a_p$ keinen Unstetigkeitspunkt enthält. Ebenso muss die Lösung $(a_p a_\lambda)$ durch das geradlinige Integral von $a_p$ bis $a_\lambda$ ausdrückbar sein. Nun besteht aber gemäss 18) und 19) (S. 16 T. I) eine lineare Relation zwischen den drei Lösungen $(a_k a_p)$, $(a_p a_\lambda)$, $(a_k a_\lambda)$, also ist die Lösung $(a_k a_\lambda)$ linear ausdrückbar durch geradlinige Integrale von $a_k$ bis $a_p$ und von $a_p$ bis $a_\lambda$. Dass in gleicher Weise geschlossen werden kann, wenn innerhalb des Dreiecks $a_k z_1 a_\lambda$ mehrere Unstetigkeitspunkte liegen, versteht sich von selbst.

Das Resultat ist folglich, dass unter den Bedingungen 24) für die Exponenten unser System von $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Partikularlösungen durch ein System von ebensoviel geradlinigen Integralen auf den Verbindungsgeraden der Unstetigkeitspunkte linear ausdrückbar ist. Die nähere Untersuchung der betreffenden Beziehungen und die Aufstellung des Integralsystems würde die Kenntnis der $a$'s zur Voraussetzung haben. Von allen speziellen Fällen, welche hier betrachtet werden könnten, erwähne ich nur einen, der deshalb von vorzüglicher Wichtigkeit ist, weil sich für ihn die Resultate sehr einfach gestalten. Ich meine den Fall, wenn sämtliche Unstetigkeitspunkte auf einer Geraden liegen, die eine beliebige Lage haben kann. Dann kommen wir nur zu Integralen zwischen zwei auf einander folgenden Unstetigkeitspunkten dieser Geraden, die sich sofort auf Integrale transformieren lassen, welche auf reellem Wege genommen werden.

Sei zunächst diese Gerade die reelle $x$-Achse. Die $a$'s mögen sich ihrer Grösse nach folgendermassen anordnen:

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n < +\infty.$$

Die unabhängige Variabele $x$ der Differentialgleichung, welche gleichfalls auf dieser Geraden liegen, also reell sein soll, kann sich dann in den $n-1$ Intervallen zwischen den $a$'s und den Intervallen $a_n$ bis $+\infty$, $a_1$ bis $-\infty$ befinden. Wir nehmen an, dass sie zwischen $a_k$ und $a_{k+1}$ liege. Indem wir dann für $k$ irgend eine der Grössen 0 bis $n$ wählen und unter $a_0$ und $a_{n+1}$ beziehungsweise $-\infty$ und $+\infty$ verstehen, haben wir alle möglichen Intervalle in Betrachtung gezogen. Es ist klar, dass wir es in diesem Falle nur mit den $n+2$ Lösungen zu thun haben werden, welche entstehen, wenn wir zwischen zwei auf einander folgenden Unstetigkeitspunkten aus der Reihe

$$-\infty,\ a_1,\ a_2 \ldots a_k,\ x,\ a_{k+1},\ \ldots a_n,\ +\infty$$

integrieren. Denn alle Integrale zwischen zwei nicht auf einander folgenden Punkten zerfallen in Aggregate von soviel Integralen der ersten Art, als die um 1 vermehrte Anzahl der übersprungenen Unstetigkeitspunkte angiebt, wie dies auch aus den Gleichungen 17) folgen würde. Wir behalten also unter Weglassung von konstanten Faktoren nur die $n+2$ Lösungen:

25)
$$(\infty\, a_n) = \int_{\infty}^{a_n} (z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_n)^{\alpha_n} (z-x)^{\alpha}\, dz$$

$$(a_n a_{n-1}) = \int_{a_n}^{a_{n-1}} (z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (a_n-z)^{\alpha_n} (z-x)^{\alpha}\, dz$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(a_{k+1} x) = \int_{a_{k+1}}^{x} (z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_k)^{\alpha_k} (a_{k+1}-z)^{\alpha_{k+1}} \ldots (a_n-z)^{\alpha_n} (z-x)^{\alpha}\, dz$$

$$(x a_k) = \int_{x}^{a_k} (z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_k)^{\alpha_k} (a_{k+1}-z)^{\alpha_{k+1}} \ldots (a_n-z)^{\alpha_n} (x-z)^{\alpha}\, dz$$

$$(a_2 a_1) = \int_{a_2}^{a_1} (z - a_1)^{\alpha_1} (a_2 - z)^{\alpha_2} \dots (a_n - z)^{\alpha_n} (x - z)^{\alpha} dz$$

$$(a_1 - \infty) = \int_{a_1}^{-\infty} (a_1 - z)^{\alpha_1} (a_2 - z)^{\alpha_2} \dots (a_n - z)^{\alpha_n} (x - z)^{\alpha} dz.$$

Zwischen denselben bestehen aber zwei lineare Relationen, die wir auf folgende Art erhalten. Wir integrieren erstens auf der oberen Seite der $x$-Achse von $+\infty$ bis $-\infty$, indem wir die Punkte $a_n, a_{n-1}, \dots a_{k+1}, x, a_k \dots a_1$ auf kleinen Halbkreisen direkt umgehen, und kehren auf dem oberhalb der $x$-Achse liegenden unendlich grossen Halbkreise von $-\infty$ nach $+\infty$ zurück. Da von diesem Wege kein Unstetigkeitspunkt der zu integrierenden Funktion umschlossen wird, so muss Null herauskommen. Wegen der Exponentialbedingungen sind aber die Integrale auf dem unendlich grossen und den unendlich kleinen Halbkreisen $= 0$, und während wir auf einem unendlich kleinen Halbkreise an dem Punkte $a_\lambda$ vorbeigehen, bekommt die zu integrierende Funktion den Faktor $e^{i\pi\alpha_\lambda}$. Daher folgt die lineare Relation

26) $$0 = (\infty a_n) + e^{i\pi\alpha_n}(a_n a_{n-1}) + \dots + e^{i\pi(\alpha_n + + \alpha_{k+1})}(a_{k+1} x) + e^{i\pi(\alpha_n + + \alpha_{k+1} + \alpha)}(x a_k) + \dots + e^{i\pi(\alpha_n + + \alpha_2 + \alpha)}(a_2 a_1) + e^{i\pi(\alpha_n + + \alpha)}(a_1 - \infty).$$

Dass in gleicher Weise auch unterhalb der reellen $x$-Achse integriert werden kann, leuchtet ein. Zu bemerken ist hiebei nur, dass beim Vorübergehen an dem Punkte $a_\lambda$ die zu integrierende Funktion den Faktor $e^{-i\pi\alpha_\lambda}$ erhält, da die Integration invers ist. Wir erhalten also noch die zweite Relation

27) $$0 = (\infty a_n) + e^{-i\pi\alpha_n}(a_n a_{n-1}) + \dots + e^{-i\pi(\alpha_n + + \alpha_{k+1})}(a_{k+1} x) + e^{-i\pi(\alpha_n + + \alpha_{k+1} + \alpha)}(x a_k) + \dots + e^{-i\pi(\alpha_n + + \alpha_2 + \alpha)}(a_2 a_1) + e^{-i\pi(\alpha_n + + \alpha)}(a_1 - \infty).$$

Diese beiden Relationen treten an Stelle der einen Relation 22). Es ist das auch ganz natürlich, da wir ja jetzt zwei bis $\infty$ erstreckte Integrale eingeführt haben. Durch Elimination des Integrals von $a_1$ bis $-\infty$ entsteht aus den beiden Relationen 26) und 27) sofort die Relation 22).

Da sich nun aus den beiden Relationen 26) und 27) irgend zwei Lösungen durch die $n$ übrigen ausdrücken lassen, so sind wir zu dem Resultate gekommen, dass unter den gemachten Voraussetzungen über die $a$'s, die $\alpha$'s und $x$ unsere Differentialgleichung 23) ein System von $n$ von einander unabhängigen Lösungen 25) in Form von bestimmten Integralen, die auf reellem Wege genommen werden, besitzt.

Dies ergiebt sich aber auch ferner dann, wenn die $a$'s und $x$ nicht mehr reell sind, sondern auf einer beliebigen durch den Anfangspunkt gehenden Geraden liegen. Ist der Winkel, welchen diese Gerade mit der reellen $x$-Achse bildet $= \varphi$, so haben wir

$$z = \varrho e^{i\varphi},\ a_1 = \varrho_1 e^{i\varphi},\ \dots a_n = \varrho_n e^{i\varphi},\ x = \zeta e^{i\varphi}$$

zu setzen, wo unter $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_n, \zeta$ reelle Grössen verstanden werden. Dann verwandelt sich

$$\int f(z)\, dz = \int (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_n)^{\alpha_n} (z - x)^{\alpha} dz$$

in: $$e^{i\varphi(\Sigma\alpha+1)}\int(\varrho-\varrho_1)^{\alpha_1}(\varrho-\varrho_2)^{\alpha_2}\ldots(\varrho-\varrho_n)^{\alpha_n}(\varrho-\zeta)^{\alpha}\,d\varrho,$$
wo die Integration auf reellem Wege verläuft. Indem wir den konstanten Faktor, auf den es ja nicht ankommt, weglassen, finden wir dann durch ganz analoge Betrachtungen wie früher die $n+2$ Partikularlösungen in Form von bestimmten Integralen auf reellem Wege:

28)
$$(\infty\varrho_n)=\int_{\infty}^{\varrho_n}(\varrho-\varrho_1)^{\alpha_1}\ldots(\varrho-\varrho_n)^{\alpha_n}(\varrho-\zeta)^{\alpha}d\varrho$$

$$(\varrho_n\varrho_{n-1})=\int_{\varrho_n}^{\varrho_{n-1}}(\varrho-\varrho_1)^{\alpha_1}\ldots(\varrho_n-\varrho)^{\alpha_n}(\varrho-\zeta)^{\alpha}d\varrho$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\varrho_{k+1}\zeta)=\int_{\varrho_{k+1}}^{\zeta}(\varrho-\varrho_1)^{\alpha_1}\ldots(\varrho-\varrho_k)^{\alpha_k}(\varrho_{k+1}-\varrho)^{\alpha_{k+1}}\ldots(\varrho_n-\varrho)^{\alpha_n}(\varrho-\zeta)^{\alpha}d\varrho$$

$$(\zeta\varrho_k)=\int_{\zeta}^{\varrho_k}(\varrho-\varrho_1)^{\alpha_1}\ldots(\varrho-\varrho_k)^{\alpha_k}(\varrho_{k+1}-\varrho)^{\alpha_{k+1}}\ldots(\varrho_n-\varrho)^{\alpha_n}(\zeta-\varrho)^{\alpha}d\varrho.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\varrho_2\varrho_1)=\int_{\varrho_2}^{\varrho_1}(\varrho-\varrho_1)^{\alpha_1}(\varrho_2-\varrho)^{\alpha_2}\ldots(\varrho_n-\varrho)^{\alpha_n}(\zeta-\varrho)^{\alpha}d\varrho$$

$$(\varrho_1-\infty)=\int_{\varrho_1}^{-\infty}(\varrho_1-\varrho)^{\alpha_1}(\varrho_2-\varrho)^{\alpha_2}\ldots(\varrho_n-\varrho)^{\alpha_n}(\zeta-\varrho)^{\alpha}d\varrho.$$

Die zwischen denselben stattfindenden beiden Relationen folgen aus 26) und 27) durch Vertauschung der $\alpha$'s und $x$ mit den $\varrho$'s und $\zeta$.

Die gleiche Transformation ist endlich möglich, wenn die Gerade, welche die Unstetigkeitspunkte enthält, gar nicht mehr durch den Anfangspunkt geht. Schneidet sie z. B. die imaginäre $y$-Achse in dem Punkte $i\eta$ und bildet sie mit der reellen $x$-Achse wieder den Winkel $\varphi$, so setzen wir

$$z=i\eta+\varrho e^{i\varphi},\quad a_1=i\eta+\varrho_1 e^{i\varphi},\quad \ldots a_n=i\eta+\varrho_n e^{i\varphi},\quad x=i\eta+\zeta e^{i\varphi}.$$

Da nun aus den Differenzen $(z-a_1)\ldots(z-a_n)$, $(z-x)$ die Grösse $i\eta$ herausgeht, so ist ersichtlich, dass wir das vorige Resultat erhalten müssen.

Die Bedingungen 24) führten lediglich zu einer Vereinfachung der aufgestellten Partikularlösungen, indem sie eben nur die Ausdehnung der Integration bis zu den Unstetigkeitsstellen ermöglichten. Die Differentialgleichung 23) selbst wird aber durch dieselben, was ihre Form anbetrifft, nicht weiter berührt, da durch sie die $\alpha$'s nur in gewisse Grenzen eingeschlossen werden, im übrigen jedoch ganz beliebige Werte haben können. Dies geschieht indessen augenblicklich, sobald wir den $\alpha$'s spezielle Werte beilegen. Wir können dann zu einer beliebig grossen Anzahl von besonderen Differentialgleichungen gelangen, die aus der allgemeinen Form 23) entstehen, und für welche wir sofort jedes Mal das entsprechende System von Partikularlösungen hinzuzuschreiben im Stande sind. Ich hebe hier nur einen Fall hervor, der sich uns als ein ganz besonders wichtiger aufdrängt, weil bei ihm eine ganz erhebliche Vereinfachung der Differentialgleichung eintritt. Es ist dies der Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_n$, wofür wir den Wert $\beta$ einführen wollen. Unter dieser Annahme muss nämlich den Gleichungen

$$-\lambda_1 - \mu = \alpha_1, \quad -\lambda_2 - \mu = \alpha_2, \quad \ldots - \lambda_n - \mu = \alpha_n$$

zufolge auch $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ldots = \lambda_n$ werden. Bezeichnen wir nun den gleichen Wert aller $\lambda$'s mit $\lambda$, so folgt

$$f_{n-1} = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)\left[\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \ldots + \frac{1}{x - a_n}\right]\lambda.$$

Da aber
$$f_n = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

war, so ergiebt sich
$$f_{n-1} = \lambda . f_n'$$

Hienach wird aus

$$8) \qquad f_h = (-1)^{n-h-1}\binom{\mu + n - h - 2}{n - h - 1}\left[\overset{n-h-1}{f_{n-1}} + \frac{\mu - 1}{n - h}(n - h - 1)\overset{n-h}{f_n}\right]$$

$$f_h = (-1)^{n-h-1}\binom{\mu + n - h - 2}{n - h - 1}\left(\lambda + \frac{\mu - 1}{n - h}(n - h - 1)\right)\overset{n-h}{f_n}.$$

Mit Benutzung der früheren Substitution $\alpha = n + \mu - 2$ und der Substitution $\beta = -\lambda - \mu$ geht dies schliesslich über in

$$f_h = (-1)^{n-h}\binom{\alpha - h}{n - h - 1}\left(\beta + \frac{\alpha - h + 1}{n - h}\right)\overset{n-h}{f_n}.$$

Demnach erhalten wir in diesem Falle aus 23) die Differentialgleichung:

$$29) \qquad f_n \overset{n}{y} + A_{n-1} f_n' \overset{n-1}{y} + A_{n-2} f_n'' \overset{n-2}{y} + \ldots + A_h \overset{n-2}{f_n} \overset{h}{y} + \ldots$$
$$+ A_1 \overset{n-1}{f_n} y' + A_0 \overset{n}{f_n} y = 0,$$

wo
$$A_h = (-1)^{n-h}\binom{\alpha - h}{n - h - 1}\left(\beta + \frac{\alpha - h + 1}{n - h}\right)$$

oder
$$A_h = \binom{n - \alpha - 2}{n - h - 1}\left(\frac{h - \alpha - 1}{n - h} - \beta\right)$$
ist.

Es ist zu vermuten, dass mit dieser Vereinfachung der Differentialgleichung auch eine solche der zugehörigen Lösungen Hand in Hand gehen muss, und in der That lässt sich auch hiefür der Nachweis führen Denken wir uns in 29) unter $\alpha$ zunächst eine positive oder negative ganze Zahl, so werden in der gemäss der Entwicklung Seite 9 Teil I unter Substitution der neuen Bezeichnung sich ergebenden partikulären Lösung:

$$30) \qquad y = \int^{\alpha+1} (f_n)^\beta \, dx^{\alpha+1}$$

folgende drei Fälle zu unterscheiden sein:

$$\alpha + 1 > 0, \quad \alpha + 1 < 0, \quad \alpha + 1 = 0$$

Im ersten Falle bekommen wir als Lösung stets das $(\alpha + 1)$fach wiederholte gewöhnliche Integral von $(f_n)^\beta$, im zweiten den $(\alpha + 1)$ten gewöhnlichen Differentialquotienten von $(f_n)^\beta$, die sich beide nach der Definitionsgleichung $a)$ (S. 4 T. I) durch ein einfaches Integral auf imaginärem Wege darstellen lassen, im letzten Falle wird $(f_n)^\beta$ selbst die Lösung, Behauptungen, die sehr leicht auch direkt nachgewiesen werden können, wie folgt.

Im Falle $\alpha + 1 > 0$ setzen wir $\alpha + 1 = p$. Sobald nun $p + 1 \leqq n$ ist, so verkürzt sich die Differentialgleichung um $p$-Glieder, da die Zahlenkoeffizienten von $y^{p-1}, y^{p-2} \dots y', y$ verschwinden, und wir erhalten aus 29)

$$31)\qquad f_n y^{n} + P_{n-1} f_n' y^{n-1} + \dots + P_h \overset{n-h}{f_n} y^{h} + \dots + P_p \overset{n-p}{f_n} y^{p} = 0$$

$$P_h = \binom{n-p-1}{n-h-1}\left(\frac{h-p}{n-h} - \beta\right).$$

Mittelst des Theorems $b)$ (S. 6 T. I) lässt sich dies aber transformieren auf die Gleichung:

$$\frac{d^{n-p-1}\left(f_n y^{p+1} - \beta f_n' y^{p}\right)}{dx^{n-p-1}} = 0,$$

für welche aus der speziellen Annahme

$$f_n y^{p+1} - \beta f_n' y^{p} = 0$$

offenbar als partikuläres Integral entspringt

$$32)\qquad y = \int^{p} (f_n)^{\beta}\, dx^{p},$$

wie es nach 30) vorauszusehen war. Dies Resultat bleibt auch bestehen, wenn $p + 1 > n$ etwa $= n + r$ ist. Die Differentialgleichung, welche in diesem Falle nicht verkürzt wird, lautet dann:

$$34)\qquad f_n y^{n} + R_{n-1} f_n' y^{n-1} + \dots + R_h \overset{n-h}{f_n} y^{h} + \dots + R_0 \overset{n}{f_n} y = 0$$

$$R_h = \binom{-r}{n-h-1}\left(\frac{h-n-r-1}{n-h} - \beta\right)$$

und wird gelöst durch

$$35)\qquad y = \int^{n+r-1} (f_n)^{\beta}\, dx^{n+r-1}.$$

Ist $\alpha + 1 < 0$, so mag es $= -q$ gesetzt werden. Dann ergiebt sich die Differentialgleichung

$$36)\qquad f_n y^{n} + Q_{n-1} f_n' y^{n-1} + \dots + Q_h \overset{n-h}{f_n} y^{h} + \dots + Q_0 \overset{n}{f_n} y = 0$$

$$Q_h = \binom{n+q-1}{n-h-1}\left(\frac{h+q}{n-h} - \beta\right),$$

welche dem Theorem $b)$ (S. 6 T. I) gemäss umgeformt werden kann in

$$\frac{d^{n+q-1}\left(f_n \int^{q-1} y\, dx^{q-1} - \beta f_n' \int^{q} y\, dx^{q}\right)}{dx^{n+q-1}} = 0.$$

Durch die besondere Annahme

$$f_n \int^{q-1} y\, dx^{q-1} - \beta f_n' \int^{q} y\, dx^{q} = 0$$

findet man hieraus entsprechend 30)

$$\int^{q} y\, dx^{q} = (f_n)^{\beta}$$

37) $$y = \frac{d^{q}(f_n)^{\beta}}{dx^{q}}$$

Für $\alpha + 1 = 0$ hat man die Differentialgleichung

38) $$f_n y^{n} + \left(\frac{n-1}{1} - \beta\right) f_n^{'} y^{n-1} + \frac{n-1}{1}\left(\frac{n-2}{2} - \beta\right) f_n^{''} y^{n-2} + \dots$$
$$+ \binom{n-1}{n-2}\left(\frac{1}{n-1} - \beta\right) f_n^{n-1} y' + \binom{n-1}{n-1}\left(\frac{0}{n} - \beta\right) f_n^{n} y = 0,$$

wofür man wieder ebenso wie oben durch das Theorem $b$) die Lösung finden kann

39) $$y = (f_n)^{\beta}.$$

Es ist zu bemerken, dass für ein ganzzahliges $\alpha$ in ganz gleicher Weise auch im allgemeinen Falle, wo nicht $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_n = \beta$ ist, verfahren werden kann. Die direkte Ableitung gestaltet sich dann nur nicht so einfach wie in diesem besonderen Fall.

Während der Fall eines ganzzahligen $\alpha$ dadurch charakterisiert ist, dass wir in ihm für die Differentialgleichung 29) nur zu einem partikulären Integral in der Form eines gewöhnlichen Differentialquotienten oder eines wiederholten Integrals gelangen, wird die Annahme eines beliebigen reellen $\alpha$ dadurch gekennzeichnet, dass für sie nach den früheren Entwicklungen eine ganze Reihe von Partikularlösungen auftritt, die aus 16) und 17) (S. 15 und 16 T. I) folgt, wenn man darin $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_n = \beta$ setzt, und die sich insbesondere, wenn gemäss 24) den Bedingungen genügt wird: $\alpha + 1 > 0$, $\beta + 1 > 0$, $\alpha + n\beta < -1$, in Form von lauter bestimmten Integralen darstellt. Sobald die Werte der $a$'s bekannt sind, ist dieses System von Partikularlösungen sofort hinzuschreiben. Es ergiebt sich unter der früheren Voraussetzung, dass die $a$'s und $x$ auf einer Geraden liegen, aus 25) oder 28), sobald $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \dots = \alpha_n = \beta$ gesetzt wird. Von besonderem Interesse wird hierbei der Fall, dass auch $\beta = \alpha$ ist. Die Differentialgleichung 29) geht dann über in

40) $$f_n y^{n} + A_{n-1}^{'} f_n^{'} y^{n-1} + \dots + A_h^{'} f_n^{n-h} y^{h} + \dots A_0^{'} f_n^{n} y = 0$$
$$A_h^{'} = \binom{n-\alpha-2}{n-h-1}\left(\frac{h-1-\alpha(n-h+1)}{n-h}\right).$$

Aus den Bedingungen 24) folgt: $-1 < \alpha < -\frac{1}{n+1}$ und für den Fall reeller $a$'s und $x$ aus 25) das Lösungssystem

41) $$(\infty\, a_n) = \int_{\infty}^{a_n} \left[(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)(z-x)\right]^{\alpha} dz$$

$$(a_n\, a_{n-1}) = \int_{a_n}^{a_{n-1}} \left[(z-a_1)\dots(a_n-z)(z-x)\right]^{\alpha} dz$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(a_{k+1}\, x) = \int_{a_{k+1}}^{x} \left[(z-a_1)\dots(z-a_k)(a_{k+1}-z)\dots(a_n-z)(z-x)\right]^{\alpha} dz$$

$$(x a_k) = \int_x^{a_k} \left[(z-a_1)\ldots(z-a_k)(a_{k+1}-z)\ldots(a_n-z)(x-z)\right]^\alpha dz$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(a_2 a_1) = \int_{a_2}^{a_1} \left[(z-a_1)(a_2-z)\ldots(a_n-z)(x-z)\right]^\alpha dz$$

$$(a_1 - \infty) = \int_{a_1}^{-\infty} \left[(a_1-z)(a_2-z)\ldots(a_n-z)(x-z)\right]^\alpha dz$$

mit den beiden linearen Relationen 26) und 27). Falls die $a$'s und $x$ auf einer beliebigen imaginären Geraden liegen, gestaltet sich das System 28) entsprechend um, indem die $a$'s und $x$ durch die $\varrho$'s und $\zeta$ zu ersetzen sind.

In der bisherigen Betrachtung sind nur besondere Annahmen gemacht über die $a$'s und die $\alpha$'s, der Grad der Differentialgleichung ist aber stets beliebig gelassen. Es steht uns indessen frei, über denselben gleichfalls in geeigneter Weise zu verfügen. Von hervorragender Bedeutung ist hierbei der Fall $n = 2$, da er auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe führt, welche also nur als ein ganz spezieller Fall unserer allgemeinen Differentialgleichung 23) anzusehen ist. Setzen wir $n = 2$, so wird aus

23) $(x-a_1)(x-a_2)y'' + \left((x-a_2)\lambda_1 + (x-a_1)\lambda_2\right) y' - \mu(\lambda_1+\lambda_2+\mu-1)y = 0,$

eine Differentialgleichung, der man leicht durch die lineare Substitution $x = a_1 + (a_2 - a_1)x'$ die Form geben kann

42) $$x'(1-x')\frac{d^2y}{dx'^2} + \left(\gamma' - (\alpha'+\beta'+1)x'\right)\frac{dy}{dx'} - \alpha'\beta' y = 0,$$

wo $\alpha' = -\mu,\quad \beta = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu - 1,\quad \gamma' = \lambda_1$ ist.

Für dieselbe folgen nach 16) (S. 15 T. I) die Lösungen

43) $$(x'0) = \left(e^{2i\pi(\alpha'-\gamma')} - 1\right)\int(x')f(z)\,dz - \left(e^{-2i\pi\alpha'} - 1\right)\int(0)f(z)\,dz$$

$$(x'1) = \left(e^{2i\pi(\gamma'-\beta')} - 1\right)\int(x')f(z)\,dz - \left(e^{-2i\pi\alpha'} - 1\right)\int(1)f(z)\,dz$$

$$(x'\infty) = \left(e^{2i\pi\beta'} - 1\right)\int(x')f(z)\,dz - \left(e^{-2i\pi\alpha'} - 1\right)\int(\infty)f(z)\,dz$$

$$fz = z^{\alpha'-\gamma'}(z-1)^{\gamma'-\beta'-1}(z-x')^{-\alpha'}$$

Zwischen denselben besteht die Relation 22) (S. 17 T. I). Mit ihnen hängen den Relationen 17) (S. 16 T. I) gemäss die drei Lösungen zusammen:

$$(1\infty) = \left(e^{2i\pi\beta'} - 1\right)\int(1)f(z)\,dz - \left(e^{2i\pi(\gamma'-\beta')} - 1\right)\int(\infty)f(z)\,dz$$

$$(0\infty) = \left(e^{2i\pi\beta'} - 1\right)\int(0)f(z)\,dz - \left(e^{2i\pi(\alpha'-\gamma')} - 1\right)\int(\infty)f(z)\,dz$$

$$(01) = \left(e^{2i\pi(\gamma'-\beta')} - 1\right)\int(0)f(z)\,dz - \left(e^{2i\pi(\alpha'-\gamma')} - 1\right)\int(1)f(z)\,dz$$

Diese 6 Lösungen haben die Eigenschaft, uns 24 Lösungen der Differentialgleichung 42) durch hypergeometrische Reihen zu liefern. Es folgen nämlich aus jeder derselben vier Lösungen durch hypergeometrische Reihen. Um dieses nachzuweisen, wollen wir zeigen, dass der Integralausdruck

44) $y = \left(e^{2i\pi b}-1\right)\int(1) z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}(1-xz)^{-a}dz - \left(e^{2i\pi(c-b)}-1\right)\int(0) z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}(1-xz)^{-a}dz$

unter der Bedingung, dass der Modul von $x$ oder von $\frac{x}{x-1}$ ein echter Bruch ist, bis auf einen konstanten Faktor wird

$$= F(a,\ b,\ c,\ x)$$

oder $$= (1-x)^{c-a-b}\, F(c-a,\ c-b,\ c,\ x)$$

oder $$= (1-x)^{-a}\, F\left(c-b,\ a,\ c,\ \frac{x}{x-1}\right)$$

oder $$= (1-x)^{-b}\, F\left(c-a,\ b,\ c,\ \frac{x}{x-1}\right)$$

Sei der Modul von $x < 1$, so können wir in dem Ausdrucke 44) den Weg der Integration immer so einrichten, dass die Grösse $(1-xz)^{-a}$ unter dem Integralzeichen nach steigenden Potenzen von $xz$ entwickelbar ist. Führen wir die Entwicklung aus, so wird

$$y = C_0 + \frac{a}{1} C_1 x + \frac{a(a+1)}{1.2} C_2 x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{1.2.3} C_3 x^3 + \text{etc.}$$

$$C_h = \left(e^{2i\pi b}-1\right)\int(1) z^{b+h-1}(1-z)^{c-b-1}dz - \left(e^{2i\pi(c-b)}-1\right)\int(0) z^{b+h-1}(1-z)^{c-b-1}dz$$

Die Koeffizienten $C_1$, $C_2$, $C_3$ etc. lassen sich nun alle durch $C_0$ ausdrücken. Wenn man nämlich die Gleichung

$$\frac{dz^{b+h-1}(1-z)^{c-b}}{dz} = (b+h-1)z^{b+h-2}(1-z)^{c-b-1} - (c+h-1)z^{b+h-1}(1-z)^{c-b-1}$$

einmal von $z_1$ auf einem beliebigen Wege um den Punkt 1 herum nach $z_1$ und dann von $z_1$ auf einem beliebigen Wege um den Punkt 0 herum bis $z_1$ integriert, so gelangt man zu den beiden Gleichungen:

$$\left(e^{2i\pi (c-b)}-1\right) z_1^{b+h-1}(1-z_1)^{c-b}$$
$$= (b+h-1)\int(1) z^{b+h-2}(1-z)^{c-b-1}dz - (c+h-1)\int(1) z^{b+h-1}(1-z)^{c-b-1}dz$$

$$\left(e^{2i\pi b}-1\right) z_1^{b+h-1}(1-z_1)^{c-b}$$
$$= (b+h-1)\int(0) z^{b+h-2}(1-z)^{c-b-1}dz - (c+h-1)\int(0) z^{b+h-1}(1-z)^{c-b-1}dz$$

Es ist aber leicht zu übersehen, dass man durch Elimination von $z_1^{b+h-1}(1-z_1)^{c-b}$ aus diesen beiden Gleichungen gelangen muss zu

$$(b+h-1)\, C_{h-1} = (c+h-1)\, C_h.$$

Durch successive Anwendung dieser Formel findet man dann

$$C_h = \frac{b(b+1)..(b+h-1)}{c(c+1)..(c+h-1)} C_0$$

und somit auch das Resultat

$$y = C_0\left(1 + \frac{a}{1}\frac{b}{c}x + \frac{a(a+1)}{1.2}\frac{b(b+1)}{c(c+1)}x^2 + \text{etc.}\right)$$

d. h. $$y = C_0 F(a,\ b,\ c,\ x).$$

Wenn man jetzt in 44) nach einander die Substitutionen macht

$$z = \frac{1-u}{1-xu},\quad z = 1-u,\quad z = \frac{u}{1-x+xu}$$

so gelangt man zu drei neuen Integralausdrücken, von denen sich ebenso nachweisen lässt, dass sie werden:

$$= C_0 (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, x)$$
$$= C_0 (1-x)^{-a} F\left(c-b, a, c, \frac{x}{x-1}\right)$$
$$= C_0 (1-x)^{-b} F\left(c-a, b, c, \frac{x}{x-1}\right)$$

Die beiden letzteren Darstellungen haben natürlich nur einen Sinn, wenn der Modul von $\frac{x}{x-1} < 1$ ist.

Nach diesem Resultat ist es nun leicht, aus jeder unserer 6 Lösungen 43) vier hypergeometrische Reihen abzuleiten. Man darf nur jede Lösung durch Transformation der Integrale mittelst linearer Substitutionen in die Form des Ausdruckes 44) bringen.

Alsdann ergiebt sich

aus $(x'0)$:

$$x'^{1-\gamma'} F(\alpha'-\gamma'+1, \beta'-\gamma'+1, 2-\gamma', x')$$
$$(1-x')^{\gamma'-\alpha'-\beta'} x'^{1-\gamma'} F(1-\alpha', 1-\beta', 2-\gamma', x')$$
$$(1-x')^{\gamma'-\beta'-1} x'^{1-\gamma'} F\left(\beta'-\gamma'+1, 1-\alpha', 2-\gamma', \frac{x'}{x'-1}\right)$$
$$(1-x')^{\gamma'-\alpha'-1} x'^{1-\gamma'} F\left(\alpha'-\gamma'+1, 1-\beta', 2-\gamma', \frac{x'}{x'-1}\right)$$

aus $(x'1)$:

$$(1-x')^{\gamma'-\alpha'-\beta'} F(\gamma'-\alpha', \gamma'-\beta', 1+\gamma'-\alpha'-\beta', 1-x')$$
$$x'^{1-\gamma'} (1-x')^{\gamma'-\alpha'-\beta'} F(1-\alpha', 1-\beta', 1+\gamma'-\alpha'-\beta', 1-x')$$
$$x'^{\alpha'-\gamma'} (1-x')^{\gamma'-\alpha'-\beta'} F\left(1-\alpha', \gamma'-\alpha', 1+\gamma'-\alpha'-\beta', \frac{x'-1}{x'}\right)$$
$$x'^{\beta'-\gamma'} (1-x')^{\gamma'-\alpha'-\beta'} F\left(1-\beta', \gamma'-\beta', 1+\gamma'-\alpha'-\beta', \frac{x'-1}{x'}\right)$$

aus $(x'\infty)$:

$$x'^{-\beta'} F\left(\beta', \beta'-\gamma'+1, \beta'+1-\alpha', \frac{1}{x'}\right)$$
$$(x'-1)^{\gamma'-\alpha'-\beta'} x'^{\alpha'-\gamma'} F\left(\gamma'-\alpha', 1-\alpha', \beta'+1-\alpha', \frac{1}{x'}\right)$$
$$(x'-1)^{-\beta'} F\left(\beta', \gamma'-\alpha', \beta'+1-\alpha', \frac{1}{1-x'}\right)$$
$$x'^{1-\gamma'} (x'-1)^{\gamma'-\alpha'-1} F\left(\alpha'-\gamma'+1, 1-\beta', \beta'+1-\alpha', \frac{1}{1-x'}\right)$$

aus $(1\infty)$:

$$F(\alpha', \beta', \gamma', x')$$
$$(1-x')^{\gamma'-\alpha'-\beta'} F(\gamma'-\alpha', \gamma'-\beta', \gamma', x')$$
$$(1-x')^{-\alpha'} F\left(\gamma'-\beta', \alpha', \gamma', \frac{x'}{x'-1}\right)$$
$$(1-x')^{-\beta'} F\left(\gamma'-\alpha', \beta', \gamma', \frac{x'}{x'-1}\right)$$

aus $(0\,\infty)$:
$$F(\alpha', \beta', 1+\alpha'+\beta'-\gamma', 1-x')$$
$$x'^{1-\gamma'} F(1+\beta'-\gamma', 1+\alpha'-\gamma', 1+\alpha'+\beta'-\gamma', 1-x')$$
$$x'^{-\alpha'} F\left(\alpha', \alpha'-\gamma'+1, 1+\alpha'+\beta'-\gamma', \frac{x'-1}{x'}\right)$$
$$x'^{-\beta'} F\left(\beta', \beta'-\gamma'+1, 1+\alpha'+\beta'-\gamma', \frac{x'-1}{x'}\right)$$

aus $(0\,1)$:
$$x'^{-\alpha'} F\left(\alpha', \alpha'-\gamma'+1, \alpha'+1-\beta', \frac{1}{x'}\right)$$
$$x'^{\beta'-\gamma'}(x'-1)^{\gamma'-\alpha'-\beta'} F\left(\gamma'-\beta', 1-\beta', \alpha'+1-\beta', \frac{1}{x'}\right)$$
$$(x'-1)^{-\alpha'} F\left(\alpha', \gamma'-\beta', \alpha'+1-\beta', \frac{1}{1-x'}\right)$$
$$x'^{1-\gamma'}(x'-1)^{\gamma'-\alpha'-1} F\left(\alpha'-\gamma'+1, 1-\beta', \alpha'+1-\beta', \frac{1}{1-x'}\right)$$

Die Lösungen 43) können unter Umständen noch eine andere Form annehmen. Sobald die Exponenten in $f(z)$ es gestatten, d. h. sobald die Bedingungen 24) erfüllt werden, die in der neuen Bezeichnung lauten:
$$-\alpha'+1>0, \quad -\gamma'+\alpha'+1>0, \quad \gamma'-\beta'>0, \quad \beta'>0,$$
können wir bis an die Unstetigkeitspunkte heran integrieren und kommen zu bestimmten Integralen, die im allgemeinen auf imaginärem Wege zu nehmen sind. Wird $x$ reell und liegt es etwa zwischen 0 und 1, so ergeben sich die betreffenden Lösungen aus

25)
$$(\infty\,1) = \int_{\infty}^{1} z^{\alpha'-\gamma'}(z-1)^{\gamma'-\beta'-1}(z-x)^{-\alpha'}\,dz$$
$$(1\,x') = \int_{1}^{x} z^{\alpha'-\gamma'}(1-z)^{\gamma'-\beta'-1}(z-x')^{-\alpha'}\,dz$$
$$(x'0) = \int_{x}^{0} z^{\alpha'-\gamma'}(1-z)^{\gamma'-\beta'-1}(x'-z)^{-\alpha'}\,dz$$
$$(0-\infty) = \int_{0}^{-\infty} (-z)^{\alpha'-\gamma'}(1-z)^{\gamma'-\beta'-1}(x'-z)^{-\alpha'}\,dz$$

und zwischen ihnen nach 26) und 27) zwei Relationen, aus denen durch Sonderung des reellen und imaginären Teils die beiden Relationen
$$(\infty\,1)+\cos\pi(\gamma'-\beta')(1\,x')+\cos\pi(\gamma'-\alpha'-\beta')(x'0)+\cos\pi\beta'(0-\infty)=0$$
$$\sin\pi(\gamma'-\beta')(1\,x')+\sin\pi(\gamma'-\alpha'-\beta')(x'0)-\sin\pi\beta'(0-\infty)=0$$
hervorgehen.

Die Differentialgleichung 23) gestattet ausser der Spezialisierung, welche oben in einigen besonders wichtigen Fällen versucht ist, auch noch eine zum Schluss zu erwähnende Verallgemeinerung. Um dies zu zeigen, führen wir statt $x$ die Bezeichnung $a$ ein, betrachten $y$ als eine Funktion von $a, a_1, a_2, \ldots a_n$ und haben mithin in der Differentialgleichung das Zeichen für die partielle Differentiation zu benutzen Wird dann

$$\varphi u = (u-a)(u-a_1)\ldots(u-a_n)$$

gesetzt, so nimmt 23) die Form an:

$$\varphi'(a)\frac{\partial^n y}{\partial a^n} + \sum_{n-1}^{0} h(-1)^{n-h-1}\binom{\alpha-h}{n-h-1}\frac{\partial^{n-h-1}\left[\varphi'(a)\sum_1^n r\,\frac{n-2-\alpha-\alpha_r}{a-a_r} + \frac{\alpha-n+1}{n-h}(n-h-1)\varphi'' a\right]}{\partial a^{n-h-1}}\frac{\partial^h y}{\partial a^h} = 0$$

Diese Gleichung wird integriert durch sämtliche Lösungen $(a_k a_\lambda)$. Aus der Form dieser Lösungen ist aber sofort zu schliessen, dass sie auch genügen müssen irgend einer von den Differentialgleichungen

$$\varphi'(a_m)\frac{\partial^n y}{\partial a_m^n} + \sum_{n-1}^{0} h(-1)^{n-h-1}\binom{\alpha_m-h}{n-h-1}\frac{\partial^{n-h-1}\left[\varphi'(a_m)\sum r\,\frac{n-2-\alpha_m-\alpha_r}{a_m-a_r} + \frac{\alpha_m-n+1}{n-h}(n-h-1)\varphi''(a_m)\right]}{\partial a_m^{n-h-1}}\frac{\partial^h y}{\partial a_m^h} = 0$$

wo dem Index $m$ irgend einer der Werte 1, 2, 3 . . $n$ zu geben ist. Wir finden demnach, dass unser Lösungssystem einem System von $n+1$ partiellen Differentialgleichungen, mithin auch irgend einer partiellen Differentialgleichung, welche aus diesen $n+1$ Gleichungen etwa durch Elimination gewisser Grössen abgeleitet ist, genüge leistet.

Berichtigung: Auf dem Titelblatt des ersten Teils ist statt „gebrochenem“ zu lesen: „beliebigem reellen“.