Königliches Gymnasium zu Marienburg.

Bericht

über das Schuljahr 1886/87

erstattet vom

Director Dr. Martens.

Die zu diesem Jahresbericht gehörige mathematische Abhandlung von Professor *Rautenberg:*
„Ueber diophantische Gleichungen des zweiten Grades“
ist besonders erschienen.

1887. Progr. No. 35.

Marienburg.
Druck von L. Giesow.
1887.

I. Die allgemeine Lehrverfassung der Schule.

1. Uebersicht über die einzelnen Lehrgegenstände und die für jeden derselben bestimmte Stundenzahl.

Lehrgegenstände.	A. Gymnasium.									B. Vorschule.		
	I.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.	Sa.	I	II.	Sa.
Religion: evangel.	2.	2.	2	2.	2.	2.	2.	3.	17.	2.	2.	4.
„ kathol.	1.	1.	1.	1.	1	1	1.	1.	4.	1.	1.**	
„ jüdische.	1.	1.	1.	2.	2.	2.	2.	2.	5.	2.	2.**	
Deutsch.	3.	2.	2.	2.	2.	2.	2	3.	18	8.	6.	14.
Lateinisch.	8.	8.	8.	9.	9.	9.	9.	9.	69.			
Griechisch.	6.	7.	7.	7.	7.				34.			
Französisch.	2.	2.	2	2.	2.	5.	4.		19.			
Hebräisch. f.*	2.	2.	2.						4. f.			
Englisch. f.	2	2.							2. f.			
Geschichte u. Geographie.	3	3.	3.	3.	3.	4.	3.	3.	25.			
Mathematik u. Rechnen.	4.	4.	4.	3.	3.	4.	4.	4.	30.	5.	5.	10.
Physik.	2.	2.	2.						6.			
Naturgeschichte.				2.	2.	2.	2.	2	10.			
Schreiben.							2.	2.	4.	4.	5.	9.
Zeichnen.				2. f.	2. f.	2.	2.	2.	6. 2. f.			
Singen.	2.	2.	2.	2. resp. 1	2 resp. 1	2. resp. 1	2. resp. 1	2. resp. 1	4.	2.	2. ***	2.
Turnen.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	6.	1.	1.	1.

* Der Buchstabe f. bedeutet facultativ. ** combiniert mit Sexta. *** Im Sommer haben die beiden Vorschulklassen umgekehrt 2 Turnen und 1 Singen.

2a. Verteilung der Lehrgegenstände im Sommersemester 1886.

<table>
<tr><th>No.</th><th>Lehrer.</th><th>Ord.</th><th>I.</th><th>IIa.</th><th>IIb.</th><th>IIIa.</th><th>IIIb</th><th>IV.</th><th>V.</th><th>VI</th><th>I. Vorschulklasse.</th><th>II Vorschulklasse</th><th>Zahl der Stunden.</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Dr. Martens,
Director.</td><td>I.</td><td>6Griech.</td><td>3 Gesch und Geogr.</td><td>2 Homer</td><td></td><td></td><td></td><td>2 Geogr.</td><td></td><td></td><td></td><td>13.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Prof. Bock,
1. Oberlehrer.</td><td>IIa.</td><td>3 Dtsch.</td><td>8 Latein.</td><td></td><td>(4griech. Gr.)
3 Xen.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>18.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Prof. Rautenberg,
2. Oberlehrer.</td><td></td><td>4 Math.
2 Phys.</td><td>4 Math.
(2Phys.)</td><td>4 Math.
2 Phys.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>18.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Kirschstein,
3. Oberlehrer.</td><td>IIb.</td><td>2 Franz.</td><td>2 Franz.</td><td>6 Latein.
2 Franz</td><td></td><td></td><td>5 Franz.</td><td>2 Relig.</td><td></td><td></td><td></td><td>19.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Schmidt,
4. Oberlehrer.</td><td></td><td>3 Gesch. und Geogr.</td><td></td><td></td><td>3 Gesch. und Geogr.</td><td>2 Dtsch.
(2 Ovid.)
3 Gesch. u. Gegr.</td><td>2 Dtsch.
2 Gesch.</td><td>2 Dtsch.
1 Gesch.</td><td></td><td></td><td></td><td>20.</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Oberlehrer Gruber,
1. ord. Lehrer.</td><td>IIIa.</td><td>2 Relig.
2 Hebr.</td><td colspan="2">2 Dtsch.
2Homer.
2 Religion.
2 Hebräisch.</td><td colspan="2">7 Latein.
2 Religion.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>21.</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Witte,
2. ord. Lehrer.</td><td>IIIb.</td><td>8 Latein.</td><td>5Griech.</td><td></td><td></td><td>7 Latein.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>20.</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Entz,
3. ord. Lehrer.</td><td>IV.</td><td></td><td></td><td>(2Dsch.)
3 Gesch. und Geogr.</td><td></td><td></td><td>2 Relig.
9 Latein.
2 Geogr.</td><td></td><td>3 Geogr. u.Gesch.</td><td></td><td></td><td>21.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="13">4. ord. Lehrerstelle vacat.</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Dr. Strehlke,
5. ord. Lehrer</td><td>V.</td><td></td><td></td><td>5Griech.</td><td></td><td>7Griech.</td><td>2Zeichn.</td><td>9 Latein.</td><td></td><td></td><td></td><td>23.</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>Momber,
5. ord. Lehrer.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2 Dtsch.
3 Math.
2Naturg.</td><td>(3Math.)
2Naturg.</td><td>4 Math.
2Naturg</td><td>4 Math.
2Naturg.</td><td>(2 Ntg.)</td><td></td><td></td><td>26.</td></tr>
<tr><td>11.</td><td>Jeckstein,
Wissenschaftl. Hilfslehrer.</td><td>VI.</td><td></td><td></td><td>2 Vergil.</td><td>2 Ovid.
2 Franz.</td><td>2 Franz.</td><td></td><td>(4Franz)</td><td>9 Latein.
3 Dtsch.</td><td></td><td></td><td>24.</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>Himmel,
cand. prob.</td><td></td><td></td><td>2 Phys.</td><td></td><td></td><td>3 Math.</td><td></td><td></td><td>2Naturg.</td><td></td><td></td><td>7.</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>Dr. Karsten,
cand. prob.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>4 griech. Gr.</td><td>2 Ovid.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6.</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>Reinecke,
cand. prob.</td><td></td><td></td><td></td><td>2 Dtsch.</td><td></td><td></td><td></td><td>4 Franz.</td><td></td><td></td><td></td><td>6.</td></tr>
<tr><td>15.</td><td>Blumberg,
1. Vorschullehrer.</td><td>I. Vorschulklasse</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2 Schrb.</td><td>3 Relig.
4 Rechn.</td><td>8 Dtsch.
5 Rechn.
4 Schrb.</td><td></td><td>26.</td></tr>
<tr><td>16.</td><td>Kranz,
2. Vorschullehrer.</td><td>II. Vorschulklasse.</td><td colspan="3">2 Turnen.</td><td colspan="2">2 Zeichnen. f.</td><td>2 Turnen.</td><td>2Zeichn.
2 Turnen.</td><td>2Zeichn.
2Schrb.</td><td>2 Religion.
1 Singen.
2 Turnen.</td><td>6 Dtsch.
5 Rechn.
5 Schrb.</td><td>27 und 8Turn.</td></tr>
<tr><td>17.</td><td>Kantor Grabowski,
Gesanglehrer.</td><td></td><td colspan="6">1 Singen.
2 Singen. (Chorklasse.)</td><td colspan="2">1 Singen.</td><td></td><td></td><td>4.</td></tr>
<tr><td>18.</td><td>Kaplan Zett,
kathol. Religionslehrer.</td><td></td><td colspan="3">1 Religion.</td><td colspan="3">1 Religion.</td><td>1 Relig.</td><td colspan="3">1 Religion.</td><td>4.</td></tr>
<tr><td>19.</td><td>Dr. Singer,
jüd. Religionslehrer.</td><td></td><td colspan="3">1 Religion.</td><td colspan="3">2 Religion.</td><td colspan="4">2 Religion.</td><td>5.</td></tr>
</table>

2b. Verteilung der Lehrgegenstände im Wintersemester 1886/87.

No.	Lehrer.	Ord.	I.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.	I. Vorschulklasse.	II Vorschulklasse.	Zahl der Stunden.
1.	**Dr. Martens,** Director.	I.	6Griech.	3 Gesch und Geogr.	2 Homer				2 Geogr.				13.
2.	**Prof. Bock,** 1. Oberlehrer	IIa.	3 Dtsch.	8 Latein.		7Griech.							18.
3	**Prof. Rautenberg,** 2. Oberlehrer.		4 Math. 2 Phys.	4 Math. 2 Phys.	4 Math. 2 Phys.								18.
4.	**Kirschstein,** 3. Oberlehrer.	IIb.	2 Franz.	2 Franz.	8 Latein. (2 Frnz.)			5 Franz.					19.
5.	**Schmidt,** 4. Oberlehrer.		3 Gesch. und Geogr.			3 Gesch. und Geogr.	2 Dtsch. 2 Ovid. 3 Gesch. u. Geogr.	2 Dtsch. (2Gsch.)	2 Dtsch. 1 Gesch.				20.
6.	Oberlehrer **Gruber,** 1. ord. Lehrer.	IIIa.	2 Relig. 2 Hebr.	2 Dtsch. 2Homer. — 2 Religion. 2 Hebräisch. (IIa. u. IIb.)		7 Latein. — 2 Religion. (IIIa. u. IIIb.)							21.
7.	**Witte,** 2. ord. Lehrer.	IIIb.	8 Latein.	5Griech.			7 Latein.						20.
8.	**Entz,** 3. ord. Lehrer.	IV.			2 Dtsch. 3 Gesch. und Geogr.			2 Relig. 9 Latein. 2 Geogr.		3 Geogr. u. Gesch.			21.
	4. ord. Lehrerstelle vacat.												
9.	**Dr. Strehlke,** 5. ord. Lehrer	V.			5Griech.		7Griech.	2Zeichn.	9 Latein.				23.
10.	**Momber,** 5. ord. Lehrer.					2 Dtsch. 3 Math. 2Naturg.	3 Math. 2Naturg.	4 Math. 2Naturg	4 Math. 2Naturg.	2Naturg.			26.
11.	**Dr. Karsten,** Wissenschaftl. Hilfslehrer i. V.	VI.				2 Ovid. 2 Franz.	(2 Frnz.)		2 Relig. 4 Franz.	9 Latein. 3 Dtsch.			24.
12.	**Grimme,** cand. prob.				2 Franz.		2 Franz.	2 Gesch.					6.
13.	**Blumberg,** 1. Vorschullehrer.	I. Vorschulklasse							2 Schrb.	3 Relig. 4 Rechn.	8 Dtsch. 5 Rechn. 4 Schrb.		26.
14.	**Kranz,** 2. Vorschullehrer.	II. Vorschulklasse.	2 Turnen. (I.–IIb.)			2 Zeichnen. f. (IIIa. u. IIIb.)	2 Turnen. (IIIb. u. IV.)		2Zeichn. — 2 Turnen. (V. u. VI.)	2Schrb. 2Zeichn.	2 Religion. 2 Singen. 1 Turnen. (I. u. II. Vorschulklasse)	6 Dtsch. 5 Rechn. 5 Schrb.	28 und 7 Turn.
15.	**Kantor Grabowski,** Gesanglehrer.		2 Singen. (Chorklasse.) (I.–IV.)			1 Singen. (IIIa.–IV.)			1 Singen. (V. u. VI.)				4.
16.	**Kaplan Zett,** kathol. Religionslehrer.		1 Religion. (I.–IIb.)			1 Religion. (IIIa.–IV.)			1 Relig.	1 Religion. (VI.–II. Vorschulklasse)			4.
17.	**Dr. Singer,** jüd. Religionslehrer.		1 Religion. (I.–IIb.)			2 Religion. (IIIa.–IV.)			2 Religion. (V.–II. Vorschulklasse)				5.

3. Uebersicht

über die während des abgelaufenen Schuljahres absolvierten Pensa.

Prima.

Ordinarius: Der Director.

Religion. a. evangelische. 2 St. Kirchengeschichte von 800—1580. Lectüre des Römerbriefes. Confessio Augustana Art. I—X. (Hollenberg Hilfsbuch für den Religionsunterricht). Oberlehrer Gruber.

b. katholische. 1 St. Kirchengeschichte: Die Zeit vom Anfang der Kirche bis Constantin d. Gr. nach Thiel Abriss der Kirchengeschichte. Lehre von den Sacramenten, Sacramentalien und vom Gebet nach dem Leitfaden von Dubelman. Kaplan Zett.

Deutsch. 3 St. Lectüre: Lessings Laokoon und Hamburgische Dramaturgie. Klopstocks Oden. Dramen von Lessing und Shakespeare Dispositionen und Aufsätze. Freie Vorträge über privatim gelesene Werke der Poesie und Prosa. Prof. Bock.

Themata der deutschen Aufsätze.

1) a. Darf die Fürstin in Schillers Braut von Messina eine zweite Niobe genannt werden?
   b. Zeigt Cicero schon in der Rede für Roscius aus Ameria die Eigenschaften eines grossen Redners?
2) a. Die Rede des Brutus und Antonius an Cäsars Leiche in Shakespeares Julius Cäsar ein Spiegelbild von dem Wesen und Charakter beider Männer.
   b. Hat Shakespeare es verstanden, in seiner Tragödie „Julius Cäsar" ein lebendig anschauliches Bild von der römischen Plebs der damaligen Zeit zu entwerfen?
3) a. Dürfen wir Lessing beistimmen, wenn er im vierzehnten Abschnitt seines Laokoon sagt: „Müsste, so lange ich das leibliche Auge hätte, die Sphäre desselben auch die Sphäre des inneren Auges sein, so würde ich, um von dieser Einschränkung frei zu werden, einen grossen Wert auf den Verlust des ersteren legen."
   b. Weist auch das Nibelungenlied nach Inhalt und Darstellung Eigenschaften auf, welche mit Homers Poesie wetteifern dürfen? (Dargestellt mit Berücksichtigung von Lessings Laokoon.)
4. Klassenarbeit.
   a. Was hat besonders unser Interesse erregt bei der Lectüre der griechischen Dichter?
   b. Wie haben Asien und Europa in der Entwickelung einer höheren geistigen und sittlichen Bildung gegenseitig auf sich eingewirkt?
5. a. Lessings Vorzug feiner und lebenswahrer Charakteristik nachgewiesen an der Darstellung des Prinzen und Marinellis in dem Trauerspiel „Emilia Galotti."
   b. Zeichnet sich Lessings Trauerspiel „Emilia Galotti" durch eine spannende Handlung und einen lebendigen, scharfen Dialog aus?
6. a. Klopstock's Dichtersprache dargestellt nach seinen Oden.
   b. Klopstock's Vaterlandsliebe dargestellt nach den beiden Oden „Mein Vaterland" und „Hermann und Thusnelda."
7. Durfte Lessing in seinem Laokoon den Thersites des Homer als Beispiel des Lächerlichen anführen?
8. Klassenarbeit.
   Wie wird das von Stolz und Hass erfüllte Herz des Koriolan in Shakespeares Trauerspiel zum Edelmut und zur Vaterlandsliebe zurückgeführt?

Themata der Abiturientenaufsätze.

Michaelis 1886.

Was hat besonders unser Interesse erregt bei der Lectüre der griechischen Dichter?

Ostern 1887.

Wie wird das von Stolz und Hass erfüllte Herz des Koriolan in Shakespeares Trauerspiel zum Edelmut und zur Vaterlandsliebe zurückgeführt?

Latein. 8 St. Im Sommer: Cicero Brutus, in Verrem IV.; privatim pro Murena. Im Winter: Tacitus ab excessu D. Aug. II und Germania; priv. Livius I. Repetitionen aus dem Gebiet der gesamten Grammatik nach Ellendt-Seyffert Lat. Grammatik. Aufsätze, wöchentliche Exercitien oder Extemporalien. Uebungen im Lateinsprechen. 6 St. Gymnasiallehrer Witte. — Horaz Carm. III u. IV, ausgewählte Epoden, Episteln und Satiren. 2 St. Gymnasiallehrer Witte.

Themata der lateinischen Aufsätze.

1. a. Quam recte dixerit Tacitus divum Julium posse videri ostendisse Britanniam posteris, non tradidisse.
   b. Inopiae plebis levandae studium multis Romanis perniciosum fuisse.
2. Quid Horatius spectaverit in tribus carminibus, quae prima sunt libri tertii, scribendis.
3. Quid Cicero in eo libro, qui inscribitur Brutus, de prima aetate oratorum Romanorum retulerit.
4. Romanos saepe victos, nunquam fractos esse. (Klassenarbeit.)
5. De Q. Hortensio Hortalo oratore.
6. De veterum Germanorum cultu deorum
7. Belli primi Punici eventus, secundi causae et quales fuerint et quomodo inter se cohaereant, brevi disputatione explicetur. (Klassenaufsatz.)
8. Fabiorum ad Cremeram clades cum Lacedaemoniorum nece in Thermopylis conferatur.

Themata der Abiturientenaufsätze.

Michaelis 1886.

Romanos saepe victos, nunquam fractos esse.

Ostern 1887.

Belli primi Punici eventus, secundi causae et quales fuerint et quomodo inter se cohaereant, brevi disputatione explicetur.

Griechisch. 6 St. Im Sommer: Thucydides VII 1--44. Plato Apologie und Krito, Homer Ilias XIV—XIX, zum Teil privatim. — Im Winter: Sophokles Oedipus rex, priv. Homer Ilias XX — XXII und XXIV. Grammatische Repetitionen, namentlich der Syntax nach Koch, griechische Grammatik. Extemporalien, resp. Versionen (vierzehntägig). Der Director.

Französisch. 2 St. Nouvelles pittoresques. Racine Phèdre. Wiederholungen aus der Grammatik (Plötz, Schulgrammatik), Extemporalien und Versionen, Sprechübungen. — Oberlehrer Kirschstein.

Hebräisch f. 2 St. Lehre vom Substantiv, Adjectiv etc. bis zur Syntax des Nomen und Verbi nach Vosen, Hebräische Grammatik. Uebersetzen historischer Stücke, des Buches Ruth, Psalm 1—10. Oberlehrer Gruber.

Englisch. f. 2 St. Erweiterung der Grammatik nach dem Lehrbuch von Georg. Im Quartal 4—5 schriftliche Arbeiten. Gelesen wurden ausgewählte Gedichte aus Ritter's Lesebuch und Bulwer The Pilgrims on the Rhine. Oberlehrer Kirschstein.

Geschichte und Geographie. 3 St. Von der Reformation bis zur neuen Zeit, nach Herbst Hilfsbuch für den Geschichtsunterricht. Wiederholungen aus den Gebieten des Altertums und des Mittelalters (nach Herbst), sowie aus der politischen, physischen und mathematischen Geographie (nach Seydlitz Schulgeographie). Oberlehrer Schmidt.

Mathematik. 4 St. Die Lehre der Kettenbrüche und der Congruenzen nach Gauss und deren Anwendung, speciell zur Lösung von diophantischen Gleichungen. Gleichungen dritten Grades. Erweiterung der Trigonometrie. Ausgewählte Capitel aus der neueren Geometrie. Nach Kambly, Mathematisches Lehrbuch. Dreiwöchentliche Exercitien oder Extemporalien. — Prof. Rautenberg.

Mathematische Arbeiten der Abiturienten.

Michaelis 1886

1. Die Gleichung: $0,5781\,x^2 - 3,427\,x - 1,279 = 0$ soll mit Hilfe der Trigonometrie gelöst werden.
2. Zur Construction eines Dreiecks ist gegeben: der Inhalt $J = p^2$, die Höhe $= h$ und das Verhältniss der beiden Seiten $a : b = m : n$.
3. Von einer vierseitigen graden Pyramide kennt man die 4 Grundkanten a, b, c, d und die Seitenkante s; wie gross ist ihr Volumen? Zahlenbeispiel $a = 6$; $b = 5$; $c = 8$; $d = 7$; $s = 10$.

4. Zur Berechnung eines Dreiecks ist gegeben: Summa der Seiten $a + b = s$, Differenz der Segmente $m - n = d$ und Differenz der Winkel an der Grundlinie $\alpha - \beta = \mu$. Zahlenbeispiel $s = 12$; $d = 2$; $\mu = 15^0\ 22'\ 40''$.

Ostern 1887.

1. Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben: der Radius des umgeschriebenen Kreises r, der Winkel an der Spitze γ und das Verhältnis der auf der Grundlinie durch die Höhe gebildeten Abschnitte m : n.

2. Einer Kugel vom Radius r ist ein Cylinder eingeschrieben, dessen Höhe $2^2/_3$ mal so gross als der Grundkreisradius ist. Wie gross ist 1. das Volumen des Cylinders 2. das Volumen des den Mantel umgebenden ringförmigen Raumes, 3. das Verhältnis der Gesamtoberfläche des Cylinders zur Oberfläche der Kugel.

3. Von einem Dreieck kennt man einen Winkel $\gamma = 76^0\ 57'$, das Verhältnis der ihn einschliessenden Seiten $= m : n = 27 : 19$ und den Inhalt $J = 235{,}68$ qm. Es sollen die beiden andern Winkel und die Seiten berechnet werden.

4. $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + 1 = \dfrac{25}{12} \cdot \dfrac{x}{y} \\ x^2 + y^2 = 5xy - 140. \end{cases}$$

Physik. 2 St. Optik; mathematisch-physikalische Aufgaben mit Berücksichtigung der mathemathischen Geographie. Nach Koppe Lehrbuch der Physik. Professor Rautenberg.

Ober-Sekunda.

Ordinarius: Professor Bock.

Religion. a. evangelische. 2 St. Lectüre des Lucas-Evangeliums. Einleitung in die Schriften des alten Testamentes. Symbole der lutherischen Kirche. Nach Hollenberg. Oberlehrer Gruber.

b. katholische. 1 St. Combiniert mit Prima. Kaplan Zett.

Deutsch. 2 St. Lessings, Goethes, Schillers Leben und Werke; gelesen und besprochen wurden Nibelungenlied, Gudrun, Walter v. d. Vogelweide, Minna v. Barnhelm, Götz v. Berlichingen; priv. Tell, Wallenstein, Egmont, der 30jährige Krieg, Abfall der Niederlande. — Dispositionen, Aufsätze. Vorträge über Themata aus der Lectüre. Deklamationen. Oberlehrer Gruber.

Themata der deutschen Aufsätze.

1) Die österreichischen Vögte der Schweiz und ihr Verfahren. Nach Schillers Wilhelm Tell.
2) a) Die Gastfreundschaft in der Odyssee.
   b) Die Gastfreundschaft im Nibelungenliede.
3) Dem Jüngling gehört die Zukunft, dem Manne die Gegenwart, dem Greise die Vergangenheit.
4) Woraus erkennen wir in Wallensteins Lager und den beiden Piccolomini die Wallenstein drohende Gefahr?
5) a) Die Schlacht am trasimenischen See. Nach Livius XXII, 1—7.
   b. Brutus und seine Söhne. Nach Livius I, 56 u. II, 5ff.
6) Ueber welche Punkte aus dem äussern Leben Walters von der Vogelweide erhalten wir Auskunft aus seinen Gedichten?
7) Tellheim und Riccaut de la Marlinière in Lessings Minna von Barnhelm. Zwei Gegensätze.
8) Wie fasst Götz von Berlichingen in dem gleichnamigen Götheschen Drama sein Verhältniss zu Kaiser und Reich auf?
9) Probearbeit.

Latein. 8 St. Cicero pro Milone, Livius I u. II, Privatlektüre: Sallustius de coniur. Catilinae. 4 St. Vergil Aen: VII, IX, X, römische Elegie mit Auswahl nach Volz. 2 St. Wöchentliche Exercitien oder Extemporalien. Aufsätze. 2 St. Der Ordinarius.

Themata der lateinischen Aufsätze.

1) Quomodo Priamus rex Troia capta interierit, ex illo Vergilii carmine narratur.
2) Antiqui Romanorum mores quomodo paulatim corrupti atque depravati sint, ex iis, quae apud Sallustium legimus, breviter narratur.
3) Tarquinii Superbi, ultimi! Romanorum regis, facta ex primo Livii de rebus Romanis libro narrantur.
4) Quomodo Cicero Milonem caedis accusatum praeclarissima illa oratione defenderit.

Griechisch. 7 St. Lysias in Eratosthenem, in Philonem, pro Mantitheo; Xenophons Memorabilien, I u. II, 1; Herodot I, 1—92. Moduslehre, Infinitiv, Participium, Gebrauch der Negationen nach Koch. Uebersetzen aus Böhme Aufgaben. Exercitien u. Extemporalien (vierzehntägig). 5 St. Gymnasiallehrer Witte. Homer Odyssee XII—XIX, privatim XXII—XXIV. Oberlehrer Gruber

Französisch. 2 St. Thiers Bonaparte en Egypte, Béranger Chansons. — Plötz Schulgrammatik, Lektion 66 bis 75 Exercitien und Extemporalien (dreiwöchentlich). Oberlehrer Kirschstein.

Hebräisch f. 2 St. combiniert mit Unter-Secunda Oberlehrer Gruber.

Englisch. f. 2 St combiniert mit Prima. Oberlehrer Kirschstein.

Geschichte und Geographie 3 St. Römische Geschichte, nach Herbst, Hilfsbuch für den Geschichtsunterricht Geographie der aussereuropäischen Erdteile nach Seydlitz. Der Direktor.

Mathematik. 4 St Trigonometrie. Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Aehnlichkeitslehre. Nach Kambly. Dreiwöchentliche Exercitien oder Extemporalien. Professor Rautenberg.

Physik. 2 St. Wärmelehre und Akustik. Nach Koppe. Im Sommer cand. prob. Himmel, im Winter Professor Rautenberg.

Unter-Sekunda.

Ordinarius: Oberlehrer Kirschstein.

Religion. a. evangelische combiniert mit Ober-Sekunda. 2 St. Oberlehrer Gruber.
b. katholische combiniert mit Prima und Ober-Sekunda. 1 St. Kaplan Zett.

Deutsch. 2 St. Göthe Hermann und Dorothea, Schiller ausgewählte Gedichte, Maria Stuart, Jungfrau von Orleans Uebungen im Disponieren, Vorträge und Deklamationen, Aufsätze. Im Sommer Cand. Reinecke, im Winter Gymnasiallehrer Entz.

Themata zu den deutschen Aufsätzen :

1) Auf welche Weise sucht Soliman Szigeth in seine Gewalt zu bringen?
2) Die Familie d'Arc nach dem Prologe der „Jungfrau von Orleans."
3) Was hat alles dazu beigetragen, Karl VII. geneigt zu machen, die Hülfe der Jungfrau von Orleans anzunehmen?
4) Philipp der Gute von Burgund nach Schillers Jungfrau von Orleans.
5) Probeaufsatz: Entwickelung der Kultur nach Schillers „Eleusischem Fest."
6) Früh übt sich, was ein Meister werden will (Chrie).
7) Die Entwickelung Ulrichs von Rudenz, nach Tell.
8) Undank ist der Welt Lohn (Chrie.)
9) Talbot als Verteidiger der Maria Stuart

Latein. 8 St Cicero Cato maior, Livius XXIII. — Wiederholung und Erweiterung des Pensums von Ober-Tertia nach Ellendt-Seyffert. Wöchentliche Exercitien oder Extemporalien. Mündliches Uebersetzen aus Süpfle II. 6 St. Der Ordinarius. — Vergil Aeneis I, II. 2 St. Im Sommer Wissenschaftlicher Hilfslehrer Jeckstein, im Winter der Ordinarius.

Griechisch. 7 St. Xenophon Anabasis I, Hellenica I—II; Lysias περὶ σηκοῦ. — Repetition der Formenlehre nach Franke-Bamberg. Kasuslehre, die wichtigsten Regeln der Tempus- und Moduslehre nach Koch. Exercitien resp. Extemporalien 14tägig. Mündliches Uebersetzen aus Böhme II. 5 St. Dr. Strehlke. — Homer Odyssee V—VIII. 2 St. Der Direktor.

Französisch 2 St. Voltaire Charles XII livre 3, Choix de Poésies narratives. Plötz Schulgrammatik Abschnitt 5—7. Im Sommer der Ordinarius, im Winter Candidat Grimme.

Hebräisch f. 2 St. Formenlehre bis zum unregelmässigen Verbum incl. nach Vosen. Gelesen Genesis 1—3 und die Lesestücke aus Vosen. Oberlehrer Gruber.

Geschichte und Geographie. 3 St. Griechische Geschichte nach Herbst I. Deutschland nach Seydlitz. Gymnasiallehrer Entz.

Mathematik. 4 St. Potenz- und Wurzellehre, Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten, Logarithmen. Exponentialgleichungen, Gleichheit der Figuren. Kreisausmessung. Constructionsaufgaben. Lehrbuch von Kambly. Prof. Rautenberg.

Physik. 2 St. Die allgemeinen Eigenschaften der Körper. Magnetismus Electricität. Nach Koppe. Professor Rautenberg.

Ober-Tertia

Ordinarius: Oberlehrer Gruber.

Religion. a. evangelische. 2 St. Geschichte des Volkes Israel vom Exil bis zur Unterjochung durch die Römer. Das Leben Jesu nach dem Matthäus-Evangelium. Viertes und fünftes Hauptsück. Besprechung von Perikopen und messianischen Stellen. Der Ordinarius.

b. katholische. 1 St. Kirchengeschichte: Geschichte der Apostel nach Kabath-Austen. Zweites Hauptstück: Von den Geboten nach Deharbe. Kaplan Zett.

Deutsch. 2. St. Lectüre und Erklärung von Gedichten und Prosastücken aus dem Lesebuch von Hopf und Paulsieck. Aufsätze, Dispositionen, Uebungen im Deklamieren (besonders Balladen von Schiller und Uhland). Gymnasiallehrer Momber.

Latein. 9 St. Caesar de bello Gallico I u. II, de bello civili III. Im Sommer 3, im Winter 4 St. Wiederholung und Erweiterung des Pensums der Unter-Tertia: Tempuslehre, Moduslehre, Infinitiv, Participia, Gerundium und Supinum, nach Ellendt-Seyffert. Uebersetzen aus Gruber's Uebungsbuche. Wöchentliche Exercitien oder Extemporalien. Im Sommer 4, im Winter 3 St. Der Ordinarius. Auswahl aus Ovids Metamorphosen. 2 St. Im Sommer Wissenschaftl. Hilfslehrer Jeckstein, im Winter Dr. Karsten.

Griechisch. 7 St. Xen. Anabasis I, II u. III im Sommer 3, im Winter 4 St. Repetition und Abschluss der Formenlehre. Gebrauch der Präpositionen. Wöchentliche Exercitien oder Extemporalien. 4 resp. 3 St. Im Sommer Dr. Karsten, im Winter Prof. Bock.

Französisch. 2 St. Fleury: histoire de la découverte de l'Amérique. Wiederholung der unregelmässigen Verba und Abschnitt III und IV der Schulgrammatik von Plötz. Im Sommer Wissenschaftlicher Hilfslehrer Jeckstein, im Winter Dr. Karsten.

Geschichte und Geographie. 3 St. Deutsch-preussische Geschichte vom westfälischen Frieden bis zur Gegenwart. Nach Eckertz. 2 St. Physische und politische Geographie Deutschlands. Nach Seydlitz. Oberlehrer Schmidt.

Mathematik. 3 St. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Potenzen und Wurzeln. Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Gleichheit der Figuren, Berechnung derselben. Constructions- u. Verwandlungs-Aufgaben. Gymnasiallehrer Momber.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer Botanik Bail Cursus 5–6, Anthropologie Bail Cursus 6. Gymnasiallehrer Momber.

Unter-Tertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Witte.

Religion. a. evangelische 2 St. combiniert mit Ober-Tertia. Oberlehrer Gruber.

b. katholische 1 St. combiniert mit Ober-Tertia. Kaplan Zett.

Deutsch. 2 St. Lektüre und Erklärung von Prosastücken und Gedichten aus dem Lesebuch von Hopf und Paulsieck. Aufsätze, Dispositionen und Uebungen im Deklamieren. Oberlehrer Schmidt.

Latein. 9 St. Caesar de bello Gallico I—IV, im Sommer 3, im Winter 4 St. Grammatik: Repetition und Abschluss der Kasuslehre, das Wichtigste aus der Tempus- und Moduslehre nach Ellendt-Seyffert. Uebersetzen aus Ostermann. Wöchentliche Exercitien resp. Extemporalien.

4 resp. 3 Stunden. Der Ordinarius. — 2 St. Ovid Perseus, Pentheus und Bacchus. Im Sommer Dr. Karsten, im Winter Oberlehrer Schmidt.

Griechisch. 7 St. Das Nomen. Das Verbum bis incl. der Verba liquida. Nach Koch. Lesebuch von Wesener. Wöchentliche Extemporalien oder Exercitien Dr. Strehlke.

Französisch. 2 St. Plötz Schulgrammatik Lection 1—23. Repetition der früheren Lehrpensa. Alle 14 Tage ein Exercitium resp. Extemporale. Im Sommer Jeckstein, im Winter Grimme.

Geschichte und Geographie. 3 St Mittelalter von der Völkerwanderung bis zum Auftreten Luthers und neue Geschichte bis zum Augsburger Religionsfrieden. Nach Eckertz. Phys. und polit. Geographie der ausserdeutschen Staaten Europas. Nach Seydlitz B. Oberlehrer Schmidt.

Mathematik. 3 St. Die 4 Species der Buchstabenrechnung. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. Die Lehre vom Viereck und Kreis. Constructionsaufgaben. Nach Kambly. Im Sommer cand. prob. Himmel, im Winter Gymnasiallehrer Momber.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer Botanik, im Winter Zoologie. Nach Bail. Cursus 4. Gymnasiallehrer Momber.

Quarta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Entz.

Religion. a. evangelische. 2 St. Die ersten drei Hauptstücke. Evangelium Lucae. Das Kirchenjahr. Geographie von Palästina. Lieder und Sprüche. Der Ordinarius.

b. katholische. 1 St. Combiniert mit Tertia. Kaplan Zett.

Deutsch. 2 St. Diktate und Aufsätze, im Anschluss daran Satz- und Interpunktionslehre. Lectüre aus dem Lesebuche von Hopf und Paulsieck. Uebungen im Declamieren und mündlichen Erzählen. Oberlehrer Schmidt.

Latein. 9 St. Cornelius Nepos 13 Viten. Im Sommer 4 St., im Winter 5 St. Repetition der Formenlehre. Casuslehre nach Ellendt-Seyffert. Uebersetzen aus dem Uebungsbuche von Ostermann. Wöchentliche Extemporalien, resp. Exercitien. Im Sommer 5, im Winter 4 St. Der Ordinarius.

Französisch. 5 St. Repetition des Pensums der Quinta. Plötz Elementargrammatik von Lection 61 bis zum Schluss. Wöchentliche Extemporalien oder Exercitien, zuweilen ein Dictat. Oberlehrer Kirschstein

Geschichte und Geographie. 4 St. Im Sommer griechische, im Winter römische Geschichte nach Jäger. 2 St. Im Sommer Oberlehrer Schmidt, im Winter Grimme. Das Notwendigste aus der allgemeinen Geographie; die aussereuropäischen Erdteile nach Seydlitz B, 2 St. Der Ordinarius

Mathematik und Rechnen. 4 St. Repetition der Decimalbrüche, Zins-, Gesellschafts-, Disconto- und Rabattrechnung. Anfangsgründe der Planimetrie. Die Lehre der Parallelen und des Dreiecks nach Kambly. Gymnasiallehrer Momber.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer Botanik nach Bail Cursus III, im Winter systematische Uebersicht der Wirbeltiere Bail Cursus III. Gymnasiallehrer Momber.

Zeichnen. 2 St. Zeichnen aus freier Hand nach Vorlegeblättern. Gymnasiallehrer Dr. Strehlke.

Quinta.

Ordinarius: Dr. Strehlke.

Religion. a evangelische. 2 St. Biblische Geschichte des neuen Testaments nach Preuss. Erstes und zweites Hauptstück mit Luthers Erklärung. Lieder u. Sprüche. Im Sommer Oberlehrer Kirschstein, im Winter Dr. Karsten.

b. katholische. 1 St. Die 10 Gebote Gottes und die 5 Gebote der Kirche. Nach Deharbe. Das neue Testament nach Austen, Biblische Geschichte. Kaplan Zott.

Deutsch. 2 St. Satzbildung und Interpunktion Uebungen im Lesen, mündlichen Erzählen und Deklamieren nach dem Lesebuche von Hopf und Paulsieck. Dictate und Aufsätze. Oberlehrer Schmidt.

Latein. 9. St. Wiederholung und Erweiterung des Pensums der Sexta bis zum Abschluss der Formenlehre. Accusativus c. Inf, Ablat. absol., Konstr. der Städtenamen und andere Regeln der Syntax. Lectüre aus Ostermann's Uebungsbuch für Quinta. Wöchentliche Extemporalien resp Exercitien Der Ordinarius.

Französisch. 4 St. Elementargrammatik Lection 1—60. Exercitien und Extemporalien (10tägig). Im Sommer cand. prob. Reinecke, im Winter Dr. Karsten

Geschichte. 1 St. Biographische Erzählungen aus der Sage und der Geschichte. Oberlehrer Schmidt.

Geographie. 2 St. Geographie der europäischen Länder, besonders von Deutschland. Nach Seydlitz B. Der Director.

Rechnen. 4. St. Einfache und zusammengesetzte Regel de tri und die sich daran anschliessenden Rechnungen des bürgerlichen Lebens. Im Winter 2 St. geometrische Vorbegriffe. Gymnasiallehrer Momber.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer Botanik, im Winter Zoologie, nach Bail Cursus 2. Gymnasiallehrer Momber.

Schreiben. 2 St. Deutsche und lateinische Schrift nach Henzes Vorlegeheften. Lehrer Blumberg.

Zeichnen. 2 St. Grad- und krummlinige Figuren nach Vorlegeblättern. Lehrer Kranz.

Sexta.

Ordinarius: im Sommer Wissenschaftlicher Hilfslehrer Jeckstein, im Winter Dr. Karsten,

Religion. a. evangelische. 3 St. Biblische Geschichten des alten Testaments nach Preuss. Das erste und zweite Hauptstück. Lehrer Blumberg.

b. katholische. Combiniert mit den Vorschulklassen. 1 St. Biblische Geschichte von Erschaffung der Welt bis zum Einzug in's gelobte Land, nach Austen. Kaplan Zott.

Deutsch. 3 St. Flexion und Satzbildung. Diktate, Lesen und Uebungen im Wiedererzählen des Gelesenen sowie im Deklamieren nach dem Lesebuche von Hopf und Paulsieck. Im Sommer Wissenschaftlicher Hilfslehrer Jeckstein, im Sommer Dr. Karsten.

Latein. 9. St. Regelmässige Deklination und Conjugation. Wöchentliche Extemporalien. Nach Ellendt-Seyffert. Lesebuch und Vokabularium von Ostermann. Im Sommer Wissenschaftlicher Hilfslehrer Jeckstein, im Winter Dr. Karsten.

Geschichte. 1 St. Sagen von Hercules, Argonauten, Trojanischer Krieg, Odysseus. Gymnasiallehrer Entz.

Geographie. 2 St. Die aussereuropäischen Erdteile nach Seydlitz B. Gymnasiallehrer Entz.

Rechnen. 4 St. Bruchrechnen. Lehrer Blumberg.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer Pflanzen, im Winter Säugetiere und Vögel nach Bail II. Gymnasiallehrer Momber.

Schreiben. 2 St. Deutsche und lateinische Schrift nach Henzes Vorlegeheften. Lehrer Kranz.

Zeichnen. 2 St. Uebungen nach Vorzeichnung an der Tafel u. Vorlegeblättern. Lehrer Kranz.

Erste Vorschulklasse.

Ordinarius: Lehrer Blumberg.

Religion a. evangelische. 2 St. Ausgewählte biblische Geschichten. Erlernung des ersten und dritten Hauptstücks ohne Luthers Erklärung sowie einige Kirchenlieder. Lehrer Kranz.

b. katholische. Combiniert mit Sexta. Kaplan Zett.

Deutsch. 8 St. Grammatik nach Rohn: Die Redeteile. Uebungen im Satzbilden mit den verschiedenen Redeteilen. Deklination und Konjugation. Lesen in dem Lesebuche von Hopf und Paulsieck. Diktate. Lehrer Blumberg.

Rechnen. 5 St. Die vier Species in unbenannten ganzen Zahlen, dann dieselben in einfach und mehrfach benannten Zahlen. Lehrer Blumberg.

Schreiben. 4. St. Deutsche und lateinische Schrift nach Vorschrift des Lehrers. Lehrer Blumberg.

Zweite Vorschulklasse.

Ordinarius: Lehrer Kranz.

Religion a evangelische. 2 St. Combiniert mit Septima. Lehrer Kranz.

b. katholische 1 St. Combiniert Sexta und Septima. Kaplan Zett.

Deutsch. 6 St. Lautierübungen an Wandtafeln. Lesen im Lesebuche von Hopf und Paulsieck. Abschreiben aus dem Lesebuche und leichte Diktate. Das Hauptwort, Geschlechtswort, Eigenschaftswort und Zeitwort. Deklination des Hauptworts. Lehrer Kranz.

Rechnen. 5. St. Uebungen im Zahlenkreise von 1—100. Schriftlich die vier Species in unbenannten Zahlen. Lehrer Kranz.

Schreiben. 5 St. Nach Vorschrift des Lehrers. Lehrer Kranz.

Weder vom evangelischen noch vom katholischen Religionsunterricht waren Schüler dispensiert.

4. Mitteilungen über den facultativen jüdischen Religionsunterricht.

Der Unterricht wird von Rabbiner Dr. Singer erteilt.

Prima und Secunda: Geschichte der Makkabäer bis zum Untergange des jüdischen Staates. Die prophetische Litteratur Tiefere Begründung der Glaubensartikel. Religionssystematik. Jüdische Kalender-Berechnung. 1 St.

Tertia und Quarta: Biblische Geschichte von Samuel bis zum Untergange des Reiches Israel. Die Bücher Hiob, Ruth und Jona. Erklärung der 10 Gebote. Glaubensartikel und Geschichte des Maimonides. Die Heiligkeit des Eides. Wiederholungen. 2 St.

Quinta, Sexta und Septima: Biblische Geschichte von der Weltschöpfung bis zur Offenbarung Gottes am Sinai. Einleitung in die Bücher der hl. Schrift. Die zehn Gebote. Ueber Gott, seine Eigenschaften und Werke. Moralgesetze. 2 St.

5. Mitteilungen über den technischen Unterricht.

1. Turnen.

Abteilung I. (Prima bis Ober-Tertia incl.) 2 St. Frei- und Rüstübungen. Lehrer Kranz.
Dispensiert waren 6 Schüler.

Abteilung II. (Unter-Tertia und Quarta) 2 St. Frei- und Rüstübungen. Lehrer Kranz. Dispensiert waren 2 Schüler.

Abteilung III. (Quinta und Sexta) 2 St. Frei- und Rüstübungen. Lehrer Kranz. Dispensiert war Niemand.

Abteilung IV. Vorschule, im Sommer 2, im Winter 1 St. Freiübungen und leichte Gerätübungen. Lehrer Kranz. Es nahmen sämtliche Schüler teil.

2. *Gesang.*

a. Prima bis Sexta (4stimmiger Chor) 2 St. Choräle, liturgische Chöre, Volkslieder, Motetten, Cantaten und Chöre aus Oratorien. Kantor Grabowski.

b. Ober-Tertia bis Quarta. 1 St. Choräle und 3stimmige Lieder. Derselbe.

c. Quinta und Sexta. 1 St. Die musikalischen Vorbegriffe und Vorübungen. Choräle und 2stimmige Lieder. Derselbe.

d. Vorschule im Sommer 1, im Winter 2 St. Choräle und leichtere Lieder. Lehrer Kranz.

3. *Zeichnen.* (f.)

Nach Vorbildern, Modellen und Ornamenten in Gyps 2 St Lehrer Kranz. Es nahmen im Sommer 3, im Winter 2 Schüler aus Ober- und Unter-Tertia teil.

In den Lehrbüchern treten zu Ostern d. J. Veränderungen nicht ein; doch sind den Schülern bei der Lectüre der altklassischen Schriftsteller fortan nur Teubnersche Textausgaben gestattet.

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

11. Mai 1886. Das Königl. Provinzial-Schulkollegium in Königsberg im Einverständnis mit demjenigen in Danzig giebt Kenntnis, dass die Konferenz der Directoren und Rectoren der Gymnasial- und Realanstalten der Provinzen Ost und Westpreussen in Insterburg am 16., 17. und 18, Juni stattfindet.

9. Juni. „ Das Königl. Provinzial-Schulkollegium in Danzig teilt den Erlass des Herrn Ministers der geistlichen p. p. Angelegenheiten mit, wonach in dem einzelnen Etatsjahr die Schulgeldbefreiungen den Betrag von 10 % nicht überschreiten dürfen. „Würde eine solche Ueberschreitung bei Fortführung der zu Beginn des Etatsjahres gewährten Befreiungen in Folge Frequenzrückganges eintreten, so ist eine Reduction im Verlauf des Jahres nicht zu vermeiden, und wird alsdann für die Entziehung des Beneficiums bei gleicher Würdigkeit der Schüler in erster Linie die grössere oder geringere Bedürftigkeit entscheidend sein.

19. Aug. „ Dasselbe teilt den Erlass des Herrn Ministers der geistlichen pp. Angelegenheiten mit, wonach den Requisitionen der in Kurzem in's Leben tretenden Ansiedelungskommission für Westpreussen und Posen und ihres Vorsitzenden Folge zu geben ist.

15. Oct. „ Dasselbe weist auf den Circular-Erlass des Herrn Ministers der geistlichen p. p. Angelegenheiten enthalten im Juli/August-Heft des diesjährigen Centralblattes (Seite 469 ff.) hin betr. „Ausflüge von Schülern höherer Lehranstalten unter der Führung von Lehrern.“

11. Dec. 1886. Dasselbe macht Mitteilung, dass durch Allerhöchsten Erlass vom 23. Juli d. Js. den Oberlehrern und ordentlichen Lehrern an den staatlichen höheren Unterrichts-Anstalten der Rang der fünften Klasse der höheren Beamten der Provinzialbehörden verliehen worden ist, und dass demnach der Herr Minister der geistlichen p. p. Angelegenheiten die Zahlung des höheren Wohnungsgeldzuschusses der Tarifklasse III an die etatsmässigen ordentlichen Lehrer vom 1. Juli d. Js. ab angeordnet habe.

20. „ „ Dasselbe bestimmt die Ferien des Jahres 1887 derart, dass

zu Ostern	der Schulschluss	am	2 April,	der Schulanfang	am	18. April,
„ Pfingsten	„	„	27. Mai,	„	„	2 Juni,
im Sommer	„	„	2. Juli,	„	„	1. August,
zu Michaelis	„	„	1. October,	„	„	17. October,
„ Weihnacht	„	„	21. December	„	„	5. Januar

stattfindet.

III. Chronik der Schule.

Das Schuljahr begann am 29. April. Während desselben ist das Lehrerkollegium in seinen ordentlichen Stellen unverändert geblieben Zu Michaelis beendigten ihr Probejahr die Herren Himmel und Dr. Karsten, die schon im Winter 1885/86 hier fungiert hatten, und der Wissenschaftliche Hilfslehrer an der hiesigen Landwirtschaftschule Herr Reinecke, dem die Ableistung der zweiten Hälfte desselben an unserer Anstalt gestattet worden. Während Herr Himmel, dem für die Leitung des Turn-Unterrichts der ersten Abteilung ein besonderer Dank gebührt, sich zur Vollendung seiner turnerischen Ausbildung nach Berlin begab, und Herr Reinecke sich wieder ausschliesslich der Landwirtschaftsschule widmete, übernahm Herr Dr. Karsten, der während der Monate August und September einen erkrankten Lehrer am Königl. Gymnasium in Elbing vertreten hatte, zu Michaelis die Funktionen des auf 6 Monate zur Turnlehrer-Bildungsanstalt nach Berlin einberufenen Wissenschaftlichen Hilfslehrers Herrn Jeckstein. Zugleich wurde dem Wissenschaftlichen Hilfslehrer an der hiesigen Landwirtschaftsschule Herrn Grimme vom Königl. Provinzial-Schulkollegium gestattet, sein Probejahr an unserer Anstalt zu absolvieren.

Eine eingehende Revision der Anstalt fand am 4. und 5. Juni durch den Geh. Ober-Regierungsrat Herrn Dr. Wehrenpfennig aus Berlin und den Provinzial-Schulrat Herrn Dr. Kruse aus Danzig statt. Im August inspicierte im Auftrage des Herrn Ministers der geistlichen p. p. Angelegenheiten Herr Oberlehrer Eckler aus Berlin den Turn-Unterricht. Am 13. November besuchte der Ministerialdirector im Cultusministerium Excellenz Greiff die Anstalt, besichtigte ihre Räume und Sammlungen und erkundigte sich eingehend nach ihren Verhältnissen.

Die Abiturientenprüfung des Michaelistermins fand am 11. September statt, wobei der Unterzeichnete als Königlicher Kommissar fungierte; die des Ostertermins wurde am 28. Februar unter dem Vorsitz des Provinzial-Schulrats Herrn Dr. Kruse abgehalten.

Die patriotischen Gedenktage wurden in der üblichen Weise durch Festrede, Gesang und Deklamation gefeiert. Am Sedantage sprach Herr Oberlehrer Schmidt, am 90. Geburtstage Sr. Majestät des Kaisers Herr Oberlehrer Gruber. Daran schloss sich die Entlassung der Abiturienten durch den Direktor. Eine grössere musikalische Aufführung unter freundlicher Mitwirkung der Pelz'schen Kapelle gestaltete diese Feier besonders erhebend.

Für den Sommerausflug hatten die Primaner sich Danzig erbeten, wohin der Direktor sie am 7. Juni führte. Es wurden an diesem Tage alle grösseren Bauwerke besichtigt und am nächsten eine Fusstour durch die Wälder bis Zoppot hin gemacht. Freudig erregt durch Alles, was Natur und Kunst ihnen geboten, kehrten die Schüler am Abend des 8. Juni zurück und vereinigten sich auf dem Dirschauer Bahnhof mit den Commilitonen der Ober- und Unter-Secunda, sowie der Sexta und Quinta, die in der Gegend von Dirschau und Pr. Stargardt gewesen waren. Quarta, Unter- und Ober-Tertia hatten, von gleichem Wetterglück begünstigt, die Umgegend von Elbing durchstreift. Die Vorschüler begingen diesen Tag als Ruhetag und hatten ihr hergebrachtes Fest unter Teilnahme der Eltern und Lehrer am 10. Juni. Der Spätsommer brachte nur noch eine Marschübung der ersten Turnerabteilung mit weiterem Ziel am Nachmittag des Sedantages.

Im Uebrigen konnte der Unterricht ohne Unterbrechungen fortgeführt werden Der Gesundheitszustand sowohl der Lehrer als der Schüler war vorzüglich.

IV. Statistische Mitteilungen.

A. Frequenztabelle für das Schuljahr 1886/87.

	A. Gymnasium.										B. Vorschule.		
	O.I.	U.I.	O II.	U II.	O III	U III	IV.	V.	VI.	Sa	1.	2.	Sa.
1. Bestand am 1. Februber 1886.	17	11	15	22	32	31	25	37	37	227	31	9	40
2. Abgang bis z. Schlus d. Schuljahres 1885/86.	17	–	3	6	3	2	3	4	3	41	3	—	3
3a. Zagang durch Versetzung zu Ostern.	8	11	15	26	18	17	23	26	23	167	8	–	9
3b. „ „ Aufnahme zu Ostern.	—	1	—	—	3	4	2	2	5	17	8	4	12
4. Frequenz am Anfang d. Schuljahres 1886/87.	8	15	16	27	24	32	30	38	36	226	21	5	26
5. Zugang im Sommersemester.	—	1	1	1	—	—	—	—	1	4	—	—	—
6. Abgang im Sommersemester.	1	1	1	—	—	2	2	3	5	15	1	—	1
7a. Zugang durch Versetung zu Michaelis.	2	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—
7b. „ „ Aufnahme zu Michaelis.	—	—	—	—	—	—	—	1	2	3	2	1	3
8. Frequenz im Anfang des Wintersemesters.	9	13	16	28	24	30	28	36	34	218	22	6	28
9. Zugang im Wintersemesters.	—	—	—	1	—	—	2	1	—	4	—	—	—
10. Abgang im Wintersemester.	—	—	—	—	—	—	1	1	2	4	—	—	—
11. Frequenz am 1 Februar 1887.	9	13	16	29	24	30	29	36	32	218	22	6	28
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1887.	20	18,5	17,5	16,7	15,7	14,2	13,2	12,3	10,7	—	9,2	7,5	—

B. Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	A. Gymnasium.							B. Vorschule.						
	Evg.	Kath.	Diss.	Jud.	Einh.	Ausw	Aus.	Evg.	Kath.	Diss.	Jud	Einh	Ausw	Ausl.
1. Am Anfang des Sommersem.	177	30	—	19	105	121	—	18	3	—	5	21	5	—
2. Am Anfang des Wintersem.	167	31	—	20	100	118	—	18	4	—	6	22	6	—
3. Am 1. Februar 1887.	168	30	—	20	103	115	—	18	4	—	6	22	6	—

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben erhalten Ostern 1886: 21 Schüler, Michaelis: keiner; davon sind zu einem praktischen Beruf abgegangen: 6 Schüler.

C. Uebersicht über die Abiturienten.

a. Zu Michaelis 1886 wurde entlassen:

243. Otto Rübsamen, geb. 19. Dec. 1864, evang., Sohn des Superintendenten gl. N. zu Mockrau Kr. Konitz, $2^1/_2$ Jahre auf dem Gymnasium und in I. Kaufmann.

b. Zu Ostern 1887 wurden entlassen:

244. Gustav Hell, geb. 27. Dec. 1866, evang., Sohn des Bäckermeisters gl. N. in Marienburg, 14 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in I. Postfach
245. Fritz Kutzky, geb. 6. Jan. 1867, evang., Sohn des Kreisbaumeisters gl. N. in Neumark, Kr. Löbau, 2 Jahre auf dem Gymnasium und in I. Jura.
246. Hugo Philipsen,* geb. 20. März 1868, evang., Sohn des Rittergutsbesitzers gl. N. auf Barlewitz bei Stuhm, 10 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in I. Jura.
247. Heinrich Schucht,* geb. 30. Jan. 1868, evang., Sohn des Gutsbesitzers gl. N. zu Liebwalde bei Christburg, $9^1/_2$ Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in I. Philologie
248. Max von Szczepański, geb. 2. Novbr. 1867, evang., Sohn des Oberstlieutenants und Bezirkskommandeurs gl. N. zu Marienburg, $3^1/_4$ Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in I. Officier.
249. Johannes Zürn,* geb. 19 Nov. 1866, evang., Sohn des Pfarrers gl. N. in Belschwitz Kr. Rosenberg, 9 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in I. Theologie.

Die mit * bezeichneten Abiturienten wurden von der mündlichen Prüfung dispensiert.

V. Sammlungen von Lehrmitteln.

Die Lehrer-Bibliothek erhielt folgende Geschenke: Vom Königlichen Kultusministerium Pierluigi da Palestrina's Werke Band 18 (Messen IX) — vom Königl. Prov. Schulkollegium Verhandlungen der elften Directoren-Versammlung in den Provinzen Ost- und Westpreussen — von einem Leseverein Deutsche Rundschau April 1886—März 1887 und die Publikationen des Westpreussischen Geschichtsvereins. — Angeschafft wurden die Fortsetzungen der in den früheren Programmen genannten Zeitschriften und Werke, nämlich Centralblatt für die Unterrichtsverwaltung — Literarisches Centralblatt — Jahrbücher für Philologie und Pädagogik nebst Supplementen — Zeitschrift für Gymnasialwesen, — Archiv für das Studium der neueren Sprachen, — Historische Zeitschrift ed. Sybel — Internationale Zeitschrift für Sprachwissenschaft — Preussische Jahrbücher — Altpreussische Monatsschrift — Frick-Richter Lehrproben — Grimm Wörterbuch — Herbst Historische Encyklopädie — Ranke Weltgeschichte (Band 7) — Statistisches Jahrbuch für höhere Schulen. — Preller Odyssee-Landschaften — Wiese Lebenserinnerungen und Amtserfahrungen — Wiese-Kübler Verordnungen und Gesetze I. — K. G. Gossler Biographie ed. W. Schrader — Schiller Handbuch der praktischen Pädagogik — Paulsen Geschichte des gelehrten Unterrichts — Monumenta Germaniae paedagogica I ed. Koldewey — J. H. Schmidt Griechische Synonynik IV. — Horaz Oden und Satiren ed. Kiessling — Martial ed Friedländer — Vietor Elemente der Phonetik, Aussprache — Rambeau Der französische Unterricht — Schiller Geschichte der römischen Kaiserzeit — Pisanski Preussische Litterärgeschichte ed. Philippi — Julian Schmidt Geschichte der deutschen Litteratur I u. II — Friedrich der Grosse Denkwürdigkeiten — Bellermann Deutsches Lesebuch.

Die Schüler-Bibliothek erhielt von Herrn Kommerzienrat Martens zum Geschenk mehrere Schulbücher als Süpfle Aufgaben, Braune Attiche Syntax, Herrig Lectures Françaises, Ploetz Lectures Choisies, Kambly Planimetrie, Paulig Der siebenjährige Krieg und Shakespeares Dramen ed. Böttger. — Die Verlagsbuchhandlung G. Freytag schenkte Vergil Aeneis und Cicero Orationes. — Angeschafft wurden Biernatzki-Ohlert Deutsche Küstenländer — Scherenberg Fürst Bismarck — Frommel In des Königs Rock — Wägner Deutsche Heldensagen — Zöller Römische Altertümer — Arndt Leben, Thaten und Meinungen ed. Bauer — Pederzani-Weber Die Marienburg Nibelungenlied ed. Freytag — Parzival ed. Bötticher — Namenlose Lieder aus des Minnesangs Frühling — Behaghel Die deutsche Sprache — Zöller-Seiler Der schwarze Erdteil — Werner Deutsche Flotte — Georg Eliot Biographie ed. Conrad — Wichert Der grosse Kurfürst in Preussen und Heinrich von Plauen (drittes Exemplar) — Lübker Kunstgeschichte (Jubiläums-Ausgabe).

Für die Naturalien-Sammlung wurden angeschafft: von der Königlichen Anatomie zu Königsberg ein menschliches Skelet und ein gesprengter Schädel; ferner die Fortsetzungen der Gerold'schen Wandtafeln (8. und 9. Lieferung.). Geschenkt erhielt die Sammlung von den Schülern Pelz (IIIa) eine Haut von Pelias berus und von Jackschath (V) einen Hasenschädel.

Der Kartenapparat wurde vermehrt um die Wagner'sche Karte von Deutschland 3. Aufl. (2. Exemplar) und die Kiepertschen Karten von Spanien und Portugal, politisch und physisch-stumm.

Für alle freundlichen Zuwendungen spricht der Unterzeichnete den Dank der Anstalt aus.

VI. Stiftungen und Unterstützungen von Schülern.

a. Für Studierende:

Das Stipendium der Bliewerniz-Stiftung (M. 90. Curatoren: Bürgermeister Schaumburg und Pfarrer Felsch) bezieht stud. theol. Corsepius.

Die beiden Stipendien der Conwentz-Stiftung (à M. 150. Curatoren: Bürgermeister Schaumburg und der Unterzeichnete) beziehen stud. phil. Gehrt und stud. phil. Krisp.

b. Für Schüler:

Die vom Königlichen Provinzial-Schulkollegium in Danzig zu vergebenden 6 Gymnasial-Stipendien (und zwar 4 à M. 180, 1 à 31,50, 1 à M. 20) bezogen der Primaner Schucht, die Obersecundaner Flöder, Kranz, Simonsohn, die Untersecundaner Rindfleisch, Theile.

Das Schulgeld anlangend: 4 Schüler genossen Immunität; ausserdem wurden 18 Freistellen vergeben.

Das vierteljährlich praenumerando zu zahlende Schulgeld beträgt im Gymnasium M. 90 pro Jahr, dazu 3 M. Turngeld. In der Vorschule wird Turngeld nicht erhoben; das vierteljährlich zu zahlende Schulgeld beträgt hier M. 84 pro Jahr.

VII. Mitteilungen an die Schüler und an deren Eltern.

Die **öffentliche Prüfung** fällt dies Mal aus; es wird statt ihrer eine Prüfung sämtlicher Gymnasialklassen in der lateinischen Grammatik veranstaltet.

Das Schuljahr schliesst am 2. April mit Censur und Versetzung; das neue beginnt am 18 April. Zur Prüfung und Aufnahme neuer Schüler werde ich am 16. April, vormittags von 9 Uhr ab, im Gymnasialgebäude bereit sein. Die Prüfung wird bedeutend erleichtert und gekürzt, wenn alle Aufzunehmenden pünktlich zur angegebenen Zeit erscheinen. Dieselben haben ein Impf-, und wenn sie das 12. Lebensjahr zurückgelegt haben, ein Wiederimpfungs-Attest, den Geburts- oder Taufschein, und, falls sie bereits eine andere höhere Schule besucht haben, ein Abgangszeugnis derselben vorzulegen und Schreibmaterial mitzubringen.

Die Schule ist darauf bedacht, durch die den Schülern aufgegebene häusliche Beschäftigung den Erfolg des Unterrichts zu sichern und die Schüler zu selbstständiger Thätigkeit anzuleiten, aber nicht einen der körperlichen und geistigen Entwickelung nachteiligen Anspruch an die Zeitdauer der häuslichen Arbeit der Schüler zu machen. In beiden Hinsichten hat die Schule auf die Unterstützung des elterlichen Hauses zu rechnen. Es ist die Pflicht der Eltern und deren Stellvertreter, auf den regelmässigen häuslichen Fleiss und die verständige Zeiteinteilung ihrer Kinder selbst zu halten; aber es ist ebenso sehr ihre Pflicht, wenn die Forderungen der Schule das zuträgliche Mass der häuslichen Arbeitszeit ihnen zu überschreiten scheinen, davon Kenntnis zu geben. Die Eltern oder deren Stellvertreter werden ausdrücklich ersucht, in solchen Fällen dem Director oder dem Klassen Ordinarius persönlich oder schriftlich Mitteilung zu machen und wollen überzeugt sein, dass eine solche Mitteilung dem betreffenden Schüler in keiner Weise zum Nachteil gereicht, sondern nur zu eingehender und unbefangener Untersuchung der Sache führt.

Dr. R. Martens,
Königl. Gymnasialdirector.

Ueber diophantische Gleichungen

des zweiten Grades.

Von

Professor Rautenberg.

Programmabhandlung des Königlichen Gymnasiums zu Marienburg.

1887. *Progr. No. 35.*

Marienburg.
Druck von L. Giesow.
1887.

Über diophantische Gleichungen zweiten Grades.

Derselbe Zweck, der mich bei meinen beiden letzten Programmabhandlungen („Ueber die Anwendung der Trigonometrie auf die Arithmetik und Algebra", und „Ueber Gleichungen des dritten Grades") geleitet, liegt auch dieser Arbeit zu Grunde. Es soll durch sie dem strebsamen und wissbegierigen Primaner nicht nur eine Gelegenheit zur Recapitulation, sondern hauptsächlich auch ein Hülfsmittel für ein weiteres und tieferes Eindringen in den in der Klasse verarbeiteten Stoff geboten werden.

Bei der diesjährigen Behandlung der diophantischen Gleichungen des ersten Grades in der Prima, wobei ausser der elementaren Divisionsmethode auch die Lösung mit Hülfe der Kettenbrüche und der Gauss'schen Congruenzen berücksichtigt wurde, konnte ich mich der schon wiederholt gemachten Beobachtung nicht verschliessen, dass einerseits die Theorie der Gauss'schen Congruenzen für die Schüler einen gewissen Reiz besitze, und dass andererseits viele Schüler das löbliche Streben bekunden, auch diejenigen diophantischen Gleichungen des zweiten Grades zu lösen, welche in der dem hiesigen mathematischen Unterrichte zu Grunde gelegten Aufgabensammlung von Ed Heis enthalten sind.

Da ferner in den mathematischen Elementarlehrbüchern gar nicht, oder doch nur nebenbei auf die Zahlentheorie und die diophantischen Gleichungen des zweiten Grades Rücksicht genommen wird, eine langjährige Erfahrung mich aber belehrt hat, dass dieser Stoff sowohl objectiv, was das geistbildende Element desselben, als auch subjectiv, was das Interesse des Schülers betrifft, einer der dankbarsten des mathematischen Schulunterrichts ist, so entschloss ich mich zu der nachfolgenden kleinen Abhandlung.

„Ueber die Lösung der allgemeinsten Form einer diophantischen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten."

Die allgemeinste Form einer diophantischen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten ist: $a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + m = o$, die man stets reduzieren kann auf: $y = A \pm \sqrt{B x^2 + C x + D}$, wo B, C, D bekannte Grössen sind, A dagegen eine rationale Funktion von x ist.

Soll diese Gleichung für x und y in rationalen Werthen gelöst werden, so muss $B x^2 + C x + D$ ein Quadrat sein. Die Lösung der Aufgabe, den Ausdruck $B x^2 + C x + D$ durch eine richtige

Wahl von x rational zu machen, ist oft sehr schwierig, bisweilen unmöglich. Je nachdem von den drei Grössen B, C, D die eine oder die andere gleich Null ist, oder dieselben in einem gewissen Abhängigkeitsverhältniss zu einander stehen, gestaltet sich die Aufgabe mehr oder weniger einfach.

Es sollen im Folgenden die hauptsächlichsten dieser Modalitäten behandelt werden.

Aufgabe 1: Die Gleichung: $y^2 = a^2 x^2 + b$ soll in rationalen Wurzeln gelöst werden. (Heis § 79 No. 36).

Lösung: Setzt man $a^2 x^2 + b = (ax + m)^2$, so ist: $a^2 x^2 + b = a^2 x^2 + 2\,am\,x + m^2$, und $x = \frac{b - m^2}{2\,a\,m}$; setzt man für m irgend einen rationalen Wert in diese Gleichung ein, so erhält man eine Wurzel für x und demnächst auch für y. Sollen x und y ganze Zahlen sein, so muss 2 a m ein Factor von $b - m^2$ sein. Setzt man in der Gleichung: $y = \sqrt{a^2 x^2 + b}$ für x den Werth $\frac{b - m^2}{2\,a\,m}$ ein, so ist $y = \frac{b + m^2}{2\,a\,m}$

Zahlenbeispiel: $y^2 = 9\,x^2 + 37$; $x = \frac{b - m^2}{2\,a\,m} = \frac{37 - m^2}{6\,m}$;

ist $m = 1$, so ist $x = 6$ und $y = 19$;

ist $m = 2$, so ist $x = \frac{11}{4}$ und $y = \frac{41}{4}$ u. s. w.

Aufgabe 2: Die Gleichung: $y^2 = a^2 x^2 + b\,x + c$ in rationalen Wurzeln zu lösen. (Heis § 79 Nr. 38)

Lösung: Setzt man $a^2 x^2 + b\,x + c = (a\,x + k)^2$, so ist:

$$a^2 x^2 + b\,x + c = a^2 x^2 + 2\,a\,k\,x + k^2 \text{ und } x = \frac{k^2 - c}{b - 2a\,k}$$

Zahlenbeispiel: $y^2 = 16\,x^2 + 17\,x - 26$

$$x = \frac{k^2 + 26}{17 - 8\,k}; \text{ für } k = 1 \text{ ist: } x = \frac{27}{9} = 3 \text{ und } y = \sqrt{169} = 13.$$

Anmerkung: In den obigen zwei Aufgaben gestaltete sich die Lösung deshalb so einfach, weil der Factor von x^2 ein Quadrat war, wodurch durch entsprechende Substitution die zweite Potenz von x zum Wegfall gebracht werden konnte.

Aufgabe 3: $y^2 = a\,x^2 + b\,x + c^2$ (Heis § 79 Nr. 40).

Lösung: Setzt man $a\,x^2 + b\,x + c^2 = (p\,x + c)^2 = p^2 x^2 + 2\,c\,p\,x + c^2$ so fällt auf beiden Seiten c^2 weg und die Gleichung kann durch x dividiert werden; also:

$$a\,x + b = p^2 x + 2\,c\,p \qquad x = \frac{2c\,p - b}{a - p^2}$$

Zahlenbeispiel: $y^2 = 10\,x^2 + 3\,x + 25 \qquad x = \frac{10\,p - 3}{10 - p^2}$

Setzt man für p irgend einen reellen Werth, so erhält man die entsprechenden Wurzeln für x und y;

ist z. B. $p = 1$, so ist $x = \frac{7}{9}$; $y = \frac{52}{9}$

Anmerkung 1: Die leichte Lösbarkeit der vorigen Aufgabe hat ihren Grund in dem quadratischen Absolutgliede c^2, indem bei der oben angegebenen Substitution c^2 auf beiden Seiten wegfällt, wodurch die Gleichung, nach ausgeführter Division durch x, in Bezug auf x vom ersten Grade wird.

Anmerkung 2: Die drei bis dahin behandelten Aufgaben sind schon von dem griechischen Mathematiker Diophantus gelöst worden, während die nun folgende Aufgabe erst in der Neuzeit durch Euler ihre Lösung gefunden hat.

Aufgabe 4: Die Gleichung: $y^2 = B x^2 + C x + D$ soll in rationalen Zahlen gelöst werden, wenn $C^2 - 4 B D$ das Quadrat einer positiven Zahl ist.

Lösung: Setzt man $B x^2 + C x + D = 0$, also: $x^2 + \frac{C}{B} x = - \frac{D}{B}$, so ist:

$$x = - \frac{C}{2 B} \pm \frac{\sqrt{C^2 - 4 B D}}{2 B}$$

Ist nun laut Bedingung der Aufgabe $C^2 - 4 B D$ das Quadrat einer positiven Zahl, etwa $= m^2$, so ist $x = - \frac{C}{2 B} \pm \frac{m}{2 B}$ und $x_1 = - \frac{C - m}{2 B}$; $x_{11} = - \frac{C + m}{2 B}$

Hieraus ergiebt sich aus der Theorie der Gleichungen:

$$\left(x + \frac{C - m}{2 B}\right) \left(x + \frac{C + m}{2 B}\right) = 0, \text{ oder:}$$

$$(2 B x + C - m) \; (2 B x + C + m) = 0$$

Da aber $B x^2 + C x + D = y^2$ sein soll, so ist: $(2 B x + C - m) \; (2 B x + C + m) = y^2$ oder: $4 B^2 x^2 + 4 B C x + C^2 - m^2 = y^2$

Soll diese Gleichung in rationalen Werthen gelöst werden, so muss der Ausdruck linker Hand ein Quadrat sein. Man setzt also: $4 B^2 x^2 + 4 B C x + C^2 - m^2 = (2 B x + k)^2$ (cf. die ersten beiden Aufgaben) $4 B^2 x^2 + 4 B C x + C^2 - m^2 = 4 B^2 x^2 + 4 B k x + k^2$

$$x = \frac{k^2 + m^2 - C^2}{4 B (C - k)}$$

Anmerkung. Euler behandelt noch die beiden Fälle 1) wenn eine Wurzel durch Probieren gefunden werden kann, 2) wenn $B x^2 + C x + D$ unter der Form $(m x + p) \; (n x + q)$ oder $(m x + p) \; (n x + q) + k^2$ dargestellt werden kann.

Die nachfolgenden Beispiele sollen zur Einübung der oben entwickelten Theorien dienen.

Aufgabe 5: Einen Bruch von der Beschaffenheit zu suchen, dass, wenn man entweder 1 zu demselben addiert oder von demselben subtrahiert, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt. (Heis § 79 No. 32)

Lösung: Nennt man den gesuchten Bruch A, so ist $A + 1 = x^2$ und $A - 1 = y^2$, also: $x^2 - 1 = y^2 + 1$; oder $x^2 - y^2 = 2$; es sollen also zwei Quadratzahlen gesucht werden, deren Differenz 1 ist

Anmerkung. Es ist einleuchtend, dass die Aufgabe in ganzen Zahlen nicht lösbar ist.

Erste Methode: Aus $x^2 - y^2 = 2$ folgt $(x + y) \; (x - y) = 2$; setzt man $x + y = a$ und $x - y = \frac{2}{a}$, so genügen diese Annahmen der Aufgabe, und es ist:

$$x = \frac{a^2 + 2}{2 a}; \; y = \frac{a^2 - 2}{2 a}$$

Die gesuchte Zahl A selbst ist $= x^2 - 1 = \frac{a^4 + 4 a^2 + 4}{4 a^2} - 1 = \frac{a^4 + 4}{4 a^2}$

Setzt man für a irgend eine beliebige rationale Zahl, so erhält man die verlangte Zahl A.

Ist $a = 1$, so ist $A = \frac{5}{4}$ und es ist sowohl $\frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$, als auch $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$ eine Quadratzahl. Ist $a = 3$, so ist $A = \frac{85}{36}$, ist $a = 4$, so ist $A = \frac{260}{64}$ u. s. w.

Zweite Methode: Setzt man $y = a - x$, so geht die Gleichung $x^2 - y^2 = 2$ über in: $x^2 - a^2 + 2\,a\,x - x^2 = 2$; $\quad x = \frac{a^2 + 2}{2\,a}$ und $y = \frac{a^2 - 2}{2\,a}$

Dritte Methode: Aus $A + 1 = x^2$ und $A - 1 = y^2$ folgt $(A + 1)(A - 1) = (A^2 - 1) = x^2\,y^2$; man sieht hieraus, dass $A^2 - 1$ ein Quadrat sein muss. Setzt man $A^2 - 1 = (A - m)^2$, so ist $A = \frac{1 + m^2}{2\,m}$; für $m = 2$, ist $A = \frac{5}{4}$ u. s. w.

Aufgabe 6. Einen Bruch zu finden so dass, wenn man denselben zu 1 addiert oder von 1 subtrahiert, in beiden Fällen ein Quadrat entsteht (Heis § 79 No. 33)

Lösung: Ist A der gesuchte Bruch, so ist $1 + A = x^2$ u. $1 - A = y^2$, also $x^2 + y^2 = 2$.

Erste Methode: Aus $x^2 + y^2 = 2$ folgt: $x^2 - 1 = 1 - y^2$ oder $(x + 1)(x - 1) = (1 + y)(1 - y)$, wofür man auch schreiben kann:

$$(x + 1)\,(x - 1) = a\,(1 - y) \cdot \frac{1 + y}{a},$$

woraus die beiden Bestimmungsgleichungen 1) $x + 1 = \frac{1 + y}{a}$ und 2) $x - 1 = (1 - y)\,a$ entnommen werden können; hieraus resultiert:

$$x = \frac{a^2 + 2\,a - 1}{a^2 + 1} \text{ und } A = x^2 - 1 = \frac{4\,a\,(a^2 - 1)}{(a^2 + 1)^2}$$

setzt man z. B. $a = 2$, so ist $x = \frac{7}{5}$ und $A = \frac{24}{25}$, und es ist sowohl $1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$, als auch $1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}$ ein Quadrat.

Zweite Methode: Aus $x^2 + y^2 = 2$ folgt:

$$y^2 = 1 + (1 + x)(1 - x) = [1 + a\,(1 - x)]^2; \text{ und es ist: } (1 + x)(1 - x) =$$
$$2\,a\,(1 - x) + a^2\,(1 - x)^2; \quad 1 + x = 2\,a + a^2\,(1 - x)$$
$$x = \frac{a^2 + 2\,a - 1}{a^2 + 1} \text{ und } A = \frac{4\,a\,(a^2 - 1)}{(a^2 + 1)^2}$$

Dritte Methode: In der Gleichung $x^2 + y^2 = 2$ setze man $x = 1 - a$, so ist $x^2 = 1 - 2\,a + a^2$ und $A = a^2 - 2\,a$, ferner $y^2 = 2 - x^2 = 1 + 2\,a - a^2$. Da aber $1 + 2a - a^2$ ein Quadrat sein muss, so setze man $1 + 2\,a - a^2 = (1 + a\,z)^2$, woraus sich ergiebt:

$$a = \frac{2\,(1 - z)}{z^2 + 1} \text{ und } A = a^2 - 2\,a = \frac{4\,z\,(z^2 - 1)}{(z^2 + 1)^2},$$

welches Resultat mit dem früher gefundenen übereinstimmt.

Anmerkung. Ehe ich weitere Beispiele vorführe, soll zunächst die Aufgabe $x^2 = y^2 + z^2$ für ganze Zahlen zu lösen, oder drei pythagoreïsche Zahlen zu finden, behandelt werden, weil man bei vielen der nachfolgenden Aufgaben mit Vortheil von denselben Gebrauch machen kann.

Aufgabe. Die Gleichung $x^2 = y^2 + z^2$ für ganze Zahlen zu lösen.

Erste Methode: Aus $x^2 - y^2 = z^2$ folgt, wenn man $\frac{x + y}{2} = u$ und $\frac{x - y}{2} = v$ setzt,

$(u + v)^2 - (u - v)^2 = z^2$ oder: $u\,v = \frac{z^2}{4}$, woraus sich ergiebt, dass $u\,v$ eine Quadratzahl sein muss.

Setzt man also für u und v beliebige Werte, doch so, dass ihr Produkt eine Quadratzahl ist, so erhält man richtige Werthe für x, y, z.

Ist z. B. $u \, . \, v = 26$, so kann $u = 16$ und $v = 4$ angenommen werden, woraus $x = u + v = 20$ und $y = u - v = 12$ und $z = 16$ sich ergiebt; zerlegt man 64 in $2 \, . \, 32$, so ist $x = 34$; $y = 30$ und $z = 16$ u. s. w.

Zweite Methode (nach Leslie): Aus $x^2 - y^2 = z^2$ folgt: $(x + y)(x - y) = z \, . \, z$ oder $\frac{x + y}{m} \, . \, m\,(x - y) = z \, . \, z$.

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn $\frac{x + y}{m} = z$ und $m\,(x - y) = z$ ist; hieraus ergiebt sich nach verschiedenen Umformungen:

$$\left(\frac{m^2 + 1}{2\,m} \, . \, z\right)^2 - \left(\frac{m^2 - 1}{2\,m}\; z\right)^2 = z^2; \text{ oder: } (m^2 + 1)^2 - (m^2 - 1)^2 = (2\,m)^2.$$

Setzt man für m. irgend eine beliebige ganze Zahl, so erhält man jedesmal drei zusammengehörige pythagoreïsche Zahlen. Ist z. B. $m = 2$, so ist $x = 5$; $y = 3$; $z = 4$. Ist $m = 3$, so ist $x = 10$; $y = 8$; $z = 6$ u. s. w.

Von der zuletzt erhaltenen Form: $x = m^2 + 1$; $y = m^2 - 1$; $z = 2\,m$ werden wir in den folgenden Beispielen öfter Gebrauch machen.

Dritte Methode: Aus $x^2 - y^2 = z^2$ folgt: $(x + y)(x - y) = z^2$. Da $(x + y)(x - y)$ ein Quadrat sein muss, so setze man $x + y = 2\,m^2$ und $x - y = 2\,n^2$, wodurch $(x + y)(x - y) = 4\,m^2\,n^2 = z^2$ und $x = m^2 + n^2$, $y = m^2 - n^2$, $z = 2\,m\,n$ wird.

$$(m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2 = (2\,m \, . \, n)^2.$$

Anmerkung: Setzt man für m und n verschiedene ganze Zahlen, doch so dass $m > n$ ist, so erhält man jedesmal drei zusammengehörige pythagoreïsche Zahlen. Setzt man ein für allemal $n = 1$, so geht die obige Form in die vorige über.

Vierte Methode: Da $(x + y)(x - y)$ ein Quadrat sein muss, so setze man

$$(x + y)(x - y) = \frac{n^2}{m^2}(x + y)^2, \text{ also } x - y = \frac{n^2}{m^2}(x + y) \text{ und es ist dann}$$

$(m^2 - n^2)\,x = (m^2 + n^2)\,y$ und es kann $x = m^2 + n^2$ und $y = m^2 - n^2$ gesetzt werden, wobei $z = 2\,m \, . \, n$ wird.

Fünfte Methode: Aus $z^2 = x^2 - y^2$ folgt, dass $\sqrt{x^2 - y^2}$ rational sein muss; es sei $\sqrt{x^2 - y^2} = x - \frac{n}{m}\,y$, woraus sich ergiebt: $x^2 - y^2 = x^2 - 2\,\frac{n}{m}\,x\,y + \frac{n^2}{m^2}\,y^2$ oder nach Umformungen: $2\,m \, . \, n\,x = (m^2 + n^2)\,y$. Dieser Gleichung kann genügt werden, wenn $x = m^2 + n^2$ und $y = 2\,m\,n$ gesetzt wird.

Aufgabe 7. Eine gegebene Quadratzahl a^2 in zwei andere Quadratzahlen zu zerlegen.

Lösung. Erste Methode: Aus $x^2 + y^2 = a^2$ folgt: $a^2 - x^2 = y^2$; setzt man $y = b\,x - a$, so ist $a^2 - x^2 = b^2\,x^2 - 2\,a\,b\,x + a^2$ und $x = \frac{2\,a\,b}{1 + b^2}$; $y = \frac{a\,b^2 - a}{1 + b^2}$

Zahlenbeispiel. $x^2 + y^2 = 49$. Da $x = \frac{14\,b}{1 + b^2}$ u $y = \frac{7\,b^2 - 7}{1 + b^2}$, so ist, wenn

$b = 2$ gesetzt wird: $x = \frac{28}{5}$ und $y = \frac{21}{5}$, und es ist $\left(\frac{28}{5}\right)^2 + \left(\frac{21}{5}\right)^2 = \frac{1215}{25} = 49$;

setzt mann $b = 3$, so ist $x = \frac{42}{10}$ und $y = \frac{56}{10}$, welche Werthe mit den vorigen übereinstimmen

ist $b = 4$, so ist $x = \frac{56}{17}$ und $y = \frac{105}{17}$ u. s. w.

Zweite Methode: Nennt man die Wurzel der einen Quadratzahl $a - x$, die der anderen $b\,x$; so ist $(a - x)^2 + (b\,x)^2 = a^2$, also $a^2 - 2\,a\,x + x^2 + b^2\,x^2 = a^2$ und: $x = \frac{2\,a}{1 + b^2}$

Ist z. B. $x^2 + y^2 = 16$ und setzt man $b = 2$, so ist $x = \frac{8}{5}$, $a - x = \frac{12}{5}$, $b\,x = \frac{16}{5}$

und es ist $\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \frac{400}{25} = 16$.

Dritte Methode: (Mit Hülfe pythagoreïscher Zahlen.) Nimmt man drei beliebige zusammengehörige pythagoreïsche Zahlen m, n, b, so dass $m^2 + n^2 = b^2$ ist und multipliciert diese Gleichung mit $\frac{a^2}{b^2}$, so ist $\left(m \cdot \frac{a}{b}\right)^2 + \left(n \cdot \frac{a}{b}\right)^2 = a^2$

Ist z. B. die Gleichungen $x^2 + y^2 = 36$ zu lösen, so nehme man drei pythagoreïsche Zahlen, etwa $m = 3$, $n = 4$, $b = 5$, und man erhält $x = m\,\frac{a}{b} = \frac{18}{5}$; $y = n \cdot \frac{a}{b} = \frac{24}{5}$

Anmerkung. Sollen x u y ganze Zahlen sein, so muss $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl sein; ist z. B. $x^2 + y^2 = 100$ und man nimmt $m = 3$, $n = 4$, $b = 5$, so ist $x = 6$ und $y = 8$.

Aufgabe 8. $x^2 - y^2 = a$; d. h. $x = \sqrt{a + y^2}$ soll einen rationalen Wert erhalten.

Lösung: Es sei $a + y^2 = (y + b)^2 = y^2 + 2\,by + b^2$

$$y = \frac{a - b^2}{2\,b};\quad x = \frac{a + b^2}{2\,b}$$

Zahlenbeispiel: $x^2 - y^2 = 15$; $x = \frac{15 + b^2}{2\,b}$; $y = \frac{15 - b^2}{2\,b}$; sollen x und y ganze Zahlen, so muss $2\,b$ ein Factor von $a + b^2$ sein, weil es dann auch ein Factor von $a - b^2$ ist; dies ist z. B. in obiger Aufgabe der Fall, wenn $b = 1$ ist, alsdunn ist $x = 8$ und $y = 7$, und es ist $64 - 49 = 15$.

Anmerkung 1: Ist $a + b^2$ theilbar durch $2\,b$, so ist auch $a - b^2$ theilbar durch $2\,b$.

Beweis: Es sei $\frac{a + b^2}{2\,b} = k$, wo k eine ganze Zahl bedeutet, dann ist:

$a + b^2 = 2\,b\,k$ und $a - b^2 = 2\,b\,k - 2\,b^2$, d. h. $a - b^2 = 2\,b\,(k - b)$;
da nun die rechte Seite durch $2\,b$ theilbar ist, so ist es auch die linke.

Anmerkung 2: Der obigen Aufgabe hätte man auch folgende Fassung geben können: „Man bestimme alle rechtwinkligen Dreiecke, deren eine Kathe a (15) gegeben ist, und deren Hypotenuse und andere Kathete rationale Grössen sind.“

Ein besonderer Fall der vorigen Aufgabe ist der, wenn $a = 1$ ist.

Aufgabe 9: $x^2 = 1 + y^2$.

Erste Methode: Es sei $1 + y^2 = (y + k)^2$, dann ist: $y = \frac{1 - k^2}{2\,k}$

Ist $k = \frac{1}{2}$, so ist $y = \frac{3}{4}$ und $x = \frac{5}{4}$ u. s. w.

Zweite Methode: Da $\sqrt{1 + y^2} > y$ und $< y + 1$ ist, so setze man

$\sqrt{1 + y^2} = y + \frac{1}{n}$; dann ist: $1 + y^2 = y^2 + \frac{2\,y}{n} + \frac{1}{n^2}$ und $y = \frac{n^2 - 1}{2\,n}$;

$$x = \frac{n^2 + 1}{2\,n}.$$

Ist z. B. $n = 5$, so ist $x = \frac{13}{5}$ und $y = \frac{12}{5}$, und es ist $\frac{169}{25} = \frac{25}{25} + \frac{144}{25}$.

Dritte Methode (mit Hilfe pythagoreïscher Zahlen):

Aus $(p^2 + 1)^2 = (2\,p)^2 + (p^2 - 1)^2$ folgt:

$\left(\frac{p^2 + 1}{2\,p}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p^2 - 1}{2\,p}\right)^2$ und es ist: $x = \frac{p^2 + 1}{2\,p}$; $y = \frac{p^2 - 1}{2\,p}$.

Anmerkung: Ebenso einfach wird die analoge Aufgabe: $x^2 + y^2 = 1$ gelöst. Die Lösungsmethode mit Hilfe der pythagoreïschen Zahlen empfiehlt sich auch hier:

$\left(\frac{p^2 + 1}{p^2 + 1}\right)^2 = \left(\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{2\,p}{p^2 + 1}\right)^2$ und es ist: $x = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$; $y = \frac{2\,p}{p^2 + 1}$;

ist $p = 2$, so ist $x = \frac{3}{5}$; $y = \frac{4}{5}$; und es ist $\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$.

Aufgabe 10: Es sollen zwei Quadratzahlen gesucht werden, so dass ihre Summe gleich ihrem Produkte ist.

Lösung: $x^2\,y^2 = x^2 + y^2$ oder $x^2\,y^2 - x^2 = y^2$;

hieraus ergiebt sich: $y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1}$; es muss also $x^2 - 1$ eine Quadratzahl sein;

setzt man daher $x^2 - 1 = (x - m)^2 = x^2 - 2\,m\,x + m^2$, so ist $x = \frac{m^2 + 1}{2\,m}$;

ist $m = 2$, so ist $x = \frac{5}{4}$; $y = \frac{5}{3}$;

die Zahlen selbst sind $\frac{25}{16}$ und $\frac{25}{9}$, und es ist $\frac{25}{16} \cdot \frac{25}{9} = \frac{25}{16} + \frac{25}{9} = \frac{625}{144}$.

Aufgabe 11: Man soll eine Zahl finden so beschaffen, dass eine Quadratzal entsteht, sowohl wenn man a dazu zählt, als auch wenn man a davon abzieht.

Lösung: Es sei
$$x + a = (p + 1)^2 = p^2 + 2\,p + 1$$
$$x - a = (p - 1)^2 = p^2 - 2\,p + 1$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Substruction:

$2\,a = 4\,p$ und $p = \frac{a}{2}$, und durch Addition $x = p^2 + 1$.

Zahlenbeispiel: Ist $a = 6$ und soll sowohl $x + 6$, als auch $x - 6$ eine Quadratzahl sein, so setze man $p = \frac{a}{2} = 3$, dann ist $x = 10$ und es ist $10 + 6$ sowohl, als auch $10 - 6$ eine Quadratzahl.

Aufgabe 12: Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe der Cuben gleich der Summe der Quadrate ist.

Lösung: Am einfachsten nenne man die eine Zahl x, die andere m x, dann ist:

$$x^3 + m^3 x^3 = x^2 + m^2 x^2, \text{ also } x + m^3 x = 1 + m^2$$

$$x = \frac{1 + m^2}{1 + m^3} \text{ und } y = m \cdot \frac{1 + m^2}{1 + m^3}.$$

Ist $m = 2$, so ist $x = \frac{5}{9}$ und $y = \frac{10}{9}$ und es ist $\left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{10}{9}\right)^3 = \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2$

Aufgabe 13: Zwei rationale Zahlen zu suchen, deren Summe der Quadrate gleich der Summe der Zahlen selbst ist.

Lösung: Nennt man die eine x, die andere a x, so ist $x^2 + a^2 x^2 = x + a x$

$$x = \frac{1 + a}{1 + a^2}, \text{ die andere Zahl ist } = a \cdot \frac{1 + a}{1 + a^2}$$

Ist $a = 3$, so ist die eine Zahl $\frac{2}{5}$, die andere $\frac{6}{5}$.

Aufgabe 14: Die Gleichung $x^2 + x y = a x + b y + c$ soll in ganzen Zahlen gelöst werden.

Lösung: Aus der obigen Gleichung folgt:

$$y = \frac{-x^2 + a x + c}{x - b} = -x + a - b + \frac{a b - b^2 + c}{x - b},$$

es muss also $x - b$ ein Factor von $a b - b^2 + c$ sein. Zerlegt man nun $a b - b^2 + c$ in Factoren, und heissen dieselben F_1, F_{11}, F_{111} u. s. w., so findet man x aus den Bestimmungsgleichungen $x - b = F_1$; $x - b = F_{11}$ u s. w.

Zahlenbeispiel: $x^2 + x y = 3 x + 5 y + 37$; $y = - x - 2 + \frac{27}{x - 5}$

Da $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ ist, so ist 27 theilbar durch 1, 3, 9, 27; ist $x = 6$, so ist $y = -6 - 2 + 27 = 19$; ist $x = 8$, so ist $y = -8 - 2 + 9 = -1$ u. s. w. Es findet sich überhaupt nur ein brauchbarer Wurzelwerth $x = 6$ und $y = 19$.

Aufgabe 15: Drei Zahlen zu suchen, die eine arith. Progression bilden und deren Summe gleich ihrem Produkte ist.

Lösung: Am praktischsten nennt man die drei Zahlen $x - y$, x, $x + y$; es ergiebt sich dann die Gleichung: $3 x = x^3 - x y^2$ oder $3 = x^2 - y^2$ (cf. $x^2 - y^2 = 1$ und $x^2 - y^2 = 2$).

Erste Methode: Setzt man $y = x - z$, so ist $3 = 2 x z - z^2$ und $x = \frac{3 + z^2}{2 z}$;

Ist $z = \frac{1}{2}$, so ist $x = 3 \frac{1}{4}$ und $y = 2 \frac{3}{4}$; die Zahlen sind also $\frac{1}{2}$, $3 \frac{1}{4}$, 6.

Probe: $\frac{1}{2} + \frac{13}{4} + 6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{4} \cdot 6 = \frac{39}{4}$

Zweite Methode: Man setze $x = u + v$ u $y = u - v$, dann ist:

$$(u + v)^2 - (u - v)^2 = 3$$

$$4 u v = 3$$

$$v = \frac{3}{4 u}$$

Ist $u = 1$, so ist $v = \frac{3}{4}$ und $x = 1\frac{3}{4}$ und $y = \frac{1}{4}$; die drei Zahlen selbst sind

$$1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4},\ 2$$

Probe: $1\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + 2 = 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{21}{4}$

Aufgabe 16. Zwei Quadrate zu suchen, deren Differenz ein Cubus ist.

Lösung: $x^2 - y^2 = z^3$.

Setzt man $x = a\,z$ und $y = b\,z$, so ist $a^2 z^2 - b^2 z^2 = z^3$ und $a^2 - b^2 = z$, also $x = a\,(a^2 - b^2)$ und $y = b\,(a^2 - b^2)$. Ist z. B. $a = 4$ und $b = 3$, so ist $x = 28$ und $y = 21$ $28^2 + 21^2 = 343 = 7^3$.

Aufgabe 17. Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe gleich ist der Summe ihrer Cuben.

$$x^3 + y^3 = x + y$$

Dividiert man die Gleichung durch $x + y$, so ist: $x^2 - x\,y + y^2 = 1$ oder $x^2 - x\,y = 1 - y^2$ d. h. $x\,(x - y) = (1 + y)\;(1 - y)$; $\frac{x}{m} \cdot m\,(x - y) = (1 + y)\;(1 - y)$; es kann also $\frac{x}{m} = 1 + y$ und $m\,(x - y) = 1 - y$ sein, aus welchen beiden Bestimmungsgleichungen für x und y sich leicht die Werthe berechnen lassen;

es ist $y = \frac{1 - m^2}{m^2 - m + 1}$ und $x = \frac{2\,m - m^2}{m^2 - m + 1}$.

Zahlenbeispiel: Ist $m = \frac{1}{3}$, so ist $y = \frac{8}{7}$ und $x = \frac{5}{7}$

Probe: $\frac{8}{7} + \frac{5}{7} = \left(\frac{8}{7}\right)^3 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{13}{7}$

Zweite Methode: Setzt man in der Gleichung: $x^2 - x\,y + y^2 = 1$ für y den Werth $1 + m\,x$, so ist $x^2 - x - m\,x^2 + 1 + 2\,m\,x + m^2 x^2 = 1$, und:

$$x = \frac{1 - 2\,m}{1 - m + m^2} \text{ u. s. w.}$$

Aufgabe 18. Die Summe zweier Quadrate in die Summe zweier anderer Quadrate zu zerlegen.

Lösung: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

$y^2 - b^2 = a^2 - x^2$ oder

$(a + x)\;(a - x) = (y + b)\;(y - b)$.

$(a + x)\;(a - x) = \frac{(y + b)}{k}(y - b)\,k$; es geschieht der Gleichung Genüge, wenn $a + x = k\,(y - b)$ und $a - x = \frac{y + b}{k}$ ist. Hieraus ergeben sich die Werthe für x und y sehr einfach.

Anmerkung: Ist $a = b = 1$, so geht die Gleichung über in: $x^2 + y^2 = 2$, so dass sich die früher behandelte Aufgabe als ein Spezialfall der obigen allgemeinen Aufgabe darstellt.

Aufgabe 19. Zwei ganze Zahlen zu suchen von der Beschaffenheit, dass, wenn man zu ihrem Producte die Quadrate derselben addiert, diese Summe ein Quadrat ist.

Lösung: $x\,y + x^2 + y^2 = z^2 = (x - a\,y)^2$; $x\,y + x^2 + y^2 = x^2 - 2\,a\,x\,y + a^2 y^2$ $x + y = -\,2\,a\,x + a^2 y$; $x = \frac{a^2 y - y}{1 + 2\,a} = \frac{(a^2 - 1)\,y}{1 + 2\,a}$

Setzt man $1 + 2a = y$, so ist $x = a^2 - 1$

Ist $a = 2$, so ist $x = 3$ und $y = 5$, und es ist: $3 \cdot 5 + 3^2 + 5^2 = 49 = 7^2$ u. s. w.

Aufgabe 20. Zwei Zahlen zu finden, so dass ihre Summe sowohl mit der einen als mit der andern multipliciert Quadrate giebt

Lösung: $(x + y)\, x = z^2$ und $(x + y)\, y = u^2$; hieraus folgt:

$x^2 + xy = z^2$ und $xy + y^2 = u^2$; also: $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = z^2 + u^2$

Hiernach sind also $x + y, z, u$ drei pythagoreïsche Zahlen; nimmt man daher irgend einen beliebigen Complex dreier pythagoreïscher Zahlen, etwa $x + y = 5$, $z = 4$, $u = 3$, so ist $5x = 16$ und $x = \frac{16}{5}$; desgleichen $5y = 9$ und $y = \frac{9}{5}$.

Probe: $5 \cdot \frac{9}{5}$ sowohl, als auch $5 \cdot \frac{16}{5} = 16$ sind Quadratzahlen.

Anmerkung 1. Will man die Lösung in ganzen Zahlen haben, so verfahre man etwa folgendermassen: Man nehme drei pythagoreïsche Zahlen p, q, m, so dass $p^2 + q^2 = m^2$ ist, dann ist sowohl $(p^2 + q^2)\, p^2$ als auch $(p^2 + q^2)\, q^2$ ein Quadrat Z. B. $5^2 + 12^2 = 13^2$; und es ist: $x = p^2 = 25$; $y = q^2 = 144$.

Probe: $(25 + 144)\, 25 = 169 \cdot 25$ ist ein Quadrat, desgleichen $(25 + 144) \cdot 144 = 169 \cdot 144$.

Anmerkung 2. Analog würde sich die Lösung der Aufgabe $(x - y)\, x = z^2$ und $(x - y)\, y = u^2$ gestalten.

Aufgabe 21. $x^3 - y^3 = x - y$ (Diophantes IV, 12) dividiert man die Gleichung durch $x - y$ so erhält man: $x^2 + xy + y^2 = 1$ oder: $x\,(x + y) = (1 + y)\,(1 - y)$, wofür, man auch schreiben kann: $mx \cdot \left(\frac{x + y}{m}\right) = (1 + y)\,(1 - y)$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn $mx = 1 + y$ und $\frac{x + y}{m} = 1 - y$ ist;

$$y = \frac{m^2 - 1}{1 + m + m^2}; \quad x = \frac{1 + 2m}{1 + m + m^2}$$

Für $m = 2$, ist $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{3}{7}$ und es ist $\left(\frac{5}{7}\right)^3 - \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{125}{343} - \frac{27}{343} = \frac{98}{343} = \frac{2}{7}$

Anmerkung. Setzt man in der Gleichung $x^2 + xy + y^2 = 1$ für y den Werth $1 + mx$ ein, so gelangt man gleichfalls zur Lösung.

Aufgabe 22. Welche Zahl hat die Eigenschafft, dass ihr Quadrat vermehrt um ihren Cubus wiederum ein Quadrat giebt?

Lösung: $x^2 + x^3 = y^2$.

Aus der obigen Bestimmungsgleichung folgt: $x^2\,(1 + x) = y^2$; es muss also $1 + x$ ein Quadrat sein; man setze daher $1 + x = n^2$. Für jeden beliebigen Werth von n erhält man also einen Werth für x Ist z. B. $n = 2$, so ist $x = 3$, und es ist: $3^2 + 3^3 = 36 = 6^2$; ist $n = 3$ so ist $x = 8$, und es ist $8^2 + 8^3 = 576 = 24^2$.

Anmerkung. Man kann aus dem Resultate den Satz aus der Zahlentheorie aufstellen: „Jede Zahl von der Form $n^2 - 1$ enthält das Quadrat und den Cubus ein und derselben Zahl.“

Aufgabe 23. Man löse die Gleichung $x^2 + y^2 = 13$ in rationalen Werthen (cf. Aufgabe No. 7)

Lösung: Weil 13 sich in zwei Quadratzahlen 3^2 und 2^2 zerlegen lässt, so wird man einfach zum Ziele gelangen, wenn man $x = 3 + az$ und $y = 2 - bz$ setzt.

Es ist alsdann: $9 + 6\,a\,z + a^2 z^2 + 4 - 4\,b\,z + b^2 z^2 = 13$

$z = \frac{4\,b - 6\,a}{a^2 + b^2}$; nimmt man für a und b beliebige Werthe an, so erhält man die entsprechenden Werthe für x und y. Ist z. B. $a = 1$; $b = 2$, so ist $z = \frac{2}{5}$; $x = \frac{17}{5}$; $y = \frac{6}{5}$

Probe: $\left(\frac{17}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{325}{25} = 13$

Aufgabe 24. Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe sowohl als auch deren Differenz ein Quadrat ist.

Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe gelangt man durch folgende Manipulation sehr einfach:

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2\,a\,b$$
$$(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - 2\,a\,b$$

Es ist also $x = a^2 + b^2$ und $y = 2\,a\,b$, da sowohl $a^2 + b^2 + 2\,a\,b$ als auch $a^2 + b^2 - 2\,a\,b$ Quadrate sind. Ist z B. $a = 3$ und $b = 2$, so ist $x = 13$ und $y = 12$; und es ist sowohl $13 + 12 = 25$, als auch $13 - 12 = 1$ ein Quadrat; ist $a = 5$ und $b = 1$, so ist $x = 26$; $y = 10$ u s. w.

Aufgabe 25. Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe sowohl als auch deren Differenz ein Cubus ist.

Lösung: Diese Aufgabe wird analog wie die vorige gelöst.

Es ist $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$

Man ordne diese beiden Gleichungen folgendermassen:

$$(a + b)^3 = (a^3 + 3\,a\,b^2) + (3\,a^2\,b + b^3)$$
$$(a - b)^3 = (a^3 + 3\,a\,b^2) - (3\,a^2\,b + b^3) \text{ d. h.}$$
$$x = a^3 + 3\,a\,b^2;\ y = 3\,a^2\,b + b^3$$

Zahlenbeispiel: Ist $a = 2$; $b = 1$, so ist: $x = 14$; $y = 13$ und sowohl $14 + 13 = 27$, als auch $14 - 13 = 1$ sind Cubikzahlen; ist $a = 4$; $b = 1$, so ist $x = 76$; $y = 49$ und es ist sowohl $76 + 49 = 125$ als auch 27 eine Cubikzahl.

Aufgabe 26. Man sucht zwei Zahlen, deren Summe der Quadrate gleich dem Cubus der zweiten Zahl ist.

Lösung: Giebt man der Bestimmungsgleichung $x^2 + y^2 = y^3$ die Form: $x^2 = y^2\,(y - 1)$ so ergiebt sich für deren Lösung in rationalen Werthen, dass $y - 1$ ein Quadrat sein muss; setzt man also, um nur ganze Zahlen als Wurzeln zu erhalten, für $y - 1$ irgend ein Quadrat einer der natürlichen Zahlen, also, 1, 4, 9, 16 u. s. w. so erhält man Werthe für x und y.

Setzt man z. B. $y - 1 = 9$, so ist $y = 10$ und $x = 30$; $30^2 + 10^2 = 1000 = 10^3$

Aufgabe 27. $x^2 + y^2 = z^3$.

Lösung: Setzt man $x = a\,z$ und $y = b\,z$, so ist: $a^2 z^2 + b^2 z^2 = z^3$ und $a^2 + b^2 = z$; hieraus: $x = a\,(a^2 + b^2)$. $y = b\,(a^2 + b^2)$

Für $a = 3$ und $b = 2$, ist $x = 39$; $y = 26$, und es ist: $39^2 + 26^2 = 2196 = 13^3$.

Aufgabe 28: Man sucht eine Zahl x so beschaffen, dass sowohl $x + a$, als auch $x + b$ Quadrate sind.

Lösung: Man setzt $x + a = (m + n)^2$ und $x + b = (m - n)^2$.

Aus $x + a = (m + n)^2 = m^2 + 2\,m\,n + n^2$ und $x + b = (m - n)^2 = m^2 - 2\,m\,n + n^2$ folgt: $a - b = 4\,m\,.\,n$.

Zahlenbeispiel: Soll z. B. sowohl $x + 50$, als auch $x + 2$ ein Quadrat sein, indem $a = 50$, $b = 2$ ist, so muss $50 - 2 = 4\,m\,.\,n$ und $m\,n = 12$ sein. Zerlegt man 12 in zwei beliebige Factoren, so ist der eine derselben m, der andere n. Um ganze Werthe für m und n und demnächst auch für x zu erhalten, zerlege man 12 in 12 . 1 oder 6 . 2 oder 4 . 3; im ersten Falle ist $x = 169 - 50 = 119$ und es ist $119 + 50$ sowohl, als auch $119 + 2$ ein Quadrat; im zweiten Falle ist $x = 64 - 50 = 14$, und es ist sowohl $14 + 50$, als auch $14 + 2$ ein Quadrat; im letzten Falle ist $x = 49 - 50 = -1$, und es ist sowohl $-1 + 50$, als auch $-1 + 2$ ein Quadrat. Zerlegt man 12 in zwei andere zum Theil gebrochene Factoren, so erhält man für x richtige reelle Bruchwerthe.

Anmerkung: Analog ist die Lösung der Aufgabe: $x + a = z^2$ und $x - b = u^2$, indem man als Bestimmungsgleichung erhält: $a + b = 4\,m\,n$ u. s. w.

Soll z. B. sowohl $x + 50$ als auch $x - 30$ ein Quadrat sein, so ist $a + b = 80$ und $m \cdot n = 20$.

$$\text{Für } m = 20 \text{ und } n = 1 \text{ ist } x = 391$$
$$m = 10, \quad n = 2 \text{ ist } x = 94$$
$$m = 5, \quad n = 4 \text{ ist } x = 31$$

Aufgabe 29: Welche Grösse muss zu a^2 addiert werden, damit wieder ein Quadrat entsteht?

Lösung: Da $a^2 + x = y^2$ sein soll und $a^2 + 2\,a\,b + b^2$ ein Quadrat ist, so hat man nur nöthig $x = 2\,a\,b + b^2$ zu setzen, indem jeder beliebige rationale Werth von b einen Werth für x liefert

Zahlenbeispiel: Soll $81 + x$ ein Quadrat werden, so ist, $b = 1$ gesetzt, $x = 19$; ist $b = 2$, so ist $x = 40$ u. s. w.

Anmerkung: Aehnlich ist die Lösung der Aufgabe:

$$x^2 - a = y^2, \text{ wo } x = 2\,a\,b - b^2 \text{ ist.}$$

Aufgabe 30: Von welchen zwei Zahlen ist die Differenz der Quadrate gleich der Summe der Zahlen selbst?

Lösung: $x^2 - y^2 = x + y$.

Dividiert man die Gleichung durch $x + y$, so ist $x - y = 1$.

Es entsprechen demnach je zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen den Werthen von x und y, z. B. $5^2 - 4^2 = 9 = 5 + 4$ u. s. w.

Anmerkung: Die Lösung obiger Aufgabe liefert uns zugleich den bekannten Satz der Zahlentheorie: „Die Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist gleich der Summe der Zahlen."

Beweis: Ist die eine Zahl a und die nächst grössere $a + 1$, so ist

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2\,a + 1 = a + (a + 1).$$

Aufgabe 31: Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe der Quadrate gleich der Differenz der Zahlen selbst ist.

Lösung: $x^2 + y^2 = x - y$, oder umgeformt: $y^2 + y = x - x^2$, oder $(y + 1)\,y = x \cdot (1 - x)$;

hierfür kann man auch setzen: $m\,y\,\dfrac{(y + 1)}{m} = x \cdot (1 - x)$.

Dieser Gleichung wird genügt, wenn $x = m\,y$ und $1 - x = \dfrac{y + 1}{m}$ gesetzt wird.

Nach einigen Umformungen erhält man: $y = \dfrac{m - 1}{m^2 + 1}$; $x = m\,\dfrac{(m - 1)}{m^2 + 1}$

Zahlenbeispiel: Ist z. B. $m = 2$, so ist $y = \frac{1}{5}$; $x = \frac{2}{5}$ und es ist:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 32: Zwei Zahlen zu suchen, dass sowohl ihre Summe, als auch die Summe ihrer Cuben Quadratzahlen sind.

Lösung: Zunächst soll $x + y = z^2$ sein; setzt man $x = m z^2$, so ist $y = z^2 - m z^2 = z^2 (1 - m)$; es ist dann ferner: $x^3 + y^3 = m^3 z^6 + z^6 (1 - m)^3$, oder $x^3 + y^3 = z^6 [m^3 + (1 - m)^3] = z^6 (1 - 3 m + 3 m^2)$.

Da nach dem Wortlaute der Aufgabe $x^3 + y^3$, also auch $z^6 (1 - 3 m + 3 m^2)$ ein Quadrat sein soll, so setze man $1 - 3 m + 3 m^2 = (1 - m q)^2 = 1 - 2 m q + m^2 q^2$, woraus sich $m = \frac{2 q - 3}{q^2 - 3}$ ergiebt.

Da $x = m z^2$ ist, so ist $x = \frac{2q - 3}{q^2 - 3} z^2$; $y = \frac{q (q-2)}{q^2 - 3} z^2$

Zahlenbeispiel: Ist z. B. $q = 4$ und $z = 1$, so ist $x = \frac{5}{13}$; $y = \frac{8}{13}$; und es ist sowohl $\frac{5}{13} + \frac{8}{13} = 1$, als auch $\left(\frac{5}{13}\right)^3 + \left(\frac{8}{13}\right)^3 = \frac{49}{169}$ eine Quadratzahl.

Aufgabe 33: Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe der Quadrate gleich der Summe ihrer Cuben ist.

Lösung: Substituirt man in der Gleichung: $x^2 + y^2 = x^3 + y^3$ die Grösse $y = m x$, dann ist $x^2 + m^2 x^2 = x^3 + m^3 x^3$ und es ist: $x = \frac{1 + m^2}{1 + m^3}$; $y = m \frac{(1 + m^2)}{1 + m^3}$.

Zahlenbeispiel: Setzt man z. B. $m = 2$, so ist $x = \frac{5}{9}$; $y = \frac{10}{9}$ und es ist

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{125}{81}, \text{ desgleichen } \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{10}{9}\right)^3 = \frac{1125}{729} = \frac{125}{81}$$

Aufgabe 34: Zwei Cubikzahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat ist.

Lösung: $x^3 + y^3 = k^2$; man setze $x = m z$, $y = n z$ und $k^2 = z^4$, dann ist $m^3 z^3 + n^3 z^3 = z^4$ oder: $m^3 + n^3 = z$; hieraus ergiebt sich $x = m (m^3 + n^3)$; $y = n (m^3 + n^3)$.

Für $m = 2$ und $n = 1$, ist $x = 18$; $y = 9$, und es ist $18^3 + 9^3 = 6561 = 81^2$.

Aufgabe 35: Drei Cubikzahlen zu finden, deren Summe gleichfalls ein Cubus ist.

Lösung: $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$.

Die Lösung dieser scheinbar schwierigen Aufgabe setzt als bekannt voraus, dass die drei pythagoreischen Zahlen 3, 4, 5 die Eigenschaft haben, dass die Summe ihrer Cuben wieder ein Cubus ist, und zwar $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ indem $27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$ ist.
Man kann also allgemein setzen: $(3 m)^3 + (4 m)^3 + (5 m)^3 = (6 m)^3$ und es ist $x = 3 m$; $y = 4 m$; $z = 5 m$; setzt man für m irgend eine rationale Grösse, so erhält man die gesuchten drei Grössen. Ist z. B. $m = 2$, so ist $x = 6$; $y = 8$; $z = 10$ und es ist $6^3 + 8^3 + 10 z = 1728 = 12^3$.

Augabe 36: Eine Zahl zu finden so beschaffen, dass das Quadrat derselben vermehrt oder vermindert um die Zahl selbst jedesmal ein Quadrat giebt.

Lösung: Es soll sein: I) $x^2 + x = z^2$ und II) $x^2 - x = u^2$.

Setzt man $x^2 + x = \frac{m^2}{n^2} x^2$, so ist $x + 1 = \frac{m^2}{n^2} x$, und $x = \frac{1}{\frac{m^2}{n^2} - 1} = \frac{n^2}{m^2 - n^2}$;

setzt man diesen Werth von x in Gleichung II) ein, so ist: $\left(\frac{n^2}{m^2 - n^2}\right)^2 - \frac{n^2}{m^2 - n^2} = u^2 =$

$$\frac{n^4}{(m^2 - n^2)^2} - \frac{n^2\,(m^2 - n^2)}{(m^2 - n^2)^2}$$

oder: $u^2 = \frac{2\,n^4 - m^2\,n^2}{(m^2 - n^2)^2} = \frac{n^2\,(n^2 - m^2 + n^2)}{(m^2 - n^2)^2} = \frac{n^2\,[n^2 - (m + n)\,(m - n)]}{(m^2 - n^2)^2}$;

hieraus ergiebt sich, dass $n^2 - (m + n)\,(m - n)$ eine Quadratzahl sein muss. Setzt man $n^2 - (m + n)\,(m - n) = \left[n - (m + n)\,\frac{a}{b}\right]^2$, so ist $n^2 - (m + n)\,(m - n) = n^2$

$- 2\,n\,(m + n)\,\frac{a}{b} + (m + n)^2 \,.\, \frac{a^2}{b^2}$, oder nach weiteren Umformungen: $m\,(b^2 + a^2) =$ $n(b^2 + 2\,a\,b - a^2)$; dieser Gleichung endlich geschieht Genüge, wenn man $n = a^2 + b^2$ und $m = b^2 + 2\,a\,b - a^2$ setzt.

Es ist alsdann $n^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2\,a^2\,b^2 + b^4$ und

$$m^2 = (b^2 + 2\,a\,b - a^2)^2 = b^4 + a^4 + 2\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 - 4\,a^3\,b$$

$$m^2 - n^2 = 4\,a\,b\,(b^2 - a^2) \text{ und:}$$

$$x = \frac{n^2}{m^2 - n^2} = \frac{a^4 + 2\,a^2\,b^2 + b^4}{4\,a\,b\,(b^2 - a^2)} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4\,a\,b\,(b^2 - a^2)}$$

Zahlenbeispiel: Ist $a = 1$ und $b = 2$, so ist: $x = \frac{25}{24}$; und es ist sowohl

$$\left(\frac{25}{24}\right)^2 + \frac{25}{24} = \frac{1225}{576}, \text{ als auch } \left(\frac{25}{24}\right)^2 - \frac{25}{24} = \frac{25}{576} \text{ ein Quadrat.}$$

Aufgabe 37: Eine Zahl x zu finden, dass sowohl a x, als auch b x ein Quadrat wird.

Lösung: Es sei $a\,x = y^2$ und $b\,x = z^2$, also $x = \frac{y^2}{a} = \frac{z^2}{b}$, oder $y^2 = \frac{a}{b}\,z^2$, woraus folgt, dass $y = z\sqrt{\frac{a}{b}}$ d. h. die Aufgabe ist in rationalen Werthen nur lösbar, wenn $\frac{a}{b}$ eine Quadratzahl ist. Ist z. B. $a = 128$ und $b = 2$, so ist $\frac{a}{b} = 64$ und $y^2 = 64\,z^2$; daraus folgt: $x = \frac{y^2}{a} = \frac{64\,z^2}{128} = \frac{z^2}{2}$.

Ist z. B. $z = 2$, so ist $x = 2$ und es ist sowohl $a\,x = 2 \,.\, 128 = 256$ als auch $b\,x = 2 \,.\, 2 = 4$ ein Quadrat.

Aufgabe 38: Wenn a und b Rationalzahlen sind, welche Werthe können für a und b angenommen werden, so dass $a^2\,x^2 + b\,y^2$ ein vollständiges Quadrat wird? (Heis § 79 No. 37.)

Lösung: Setzt man $a^2\,x^2 + b\,y^2 = (a\,x + y)^2$,

so ist $a^2\,x^2 + b\,y^2 = a^2\,x^2 + 2\,a\,x\,y + y^2$, oder: $2\,a\,x = (b - 1)\,y$;

dieser Gleichung entspricht I) $x = b - 1$; II) $y = 2\,a$.

Zahlenbeispiel: $16\,x^2 + 2\,y^2 = z^2$. Da $a = 4$; $b = 2$ ist, so ist $x = 1$; $y = 8$, und es ist: $16 \,.\, 1 + 2 .\, 64 = 144$.

Anmerkung. Analog wird die Aufgabe gelöst: $a^2\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2$ soll rational gemacht werden. (Heïs § 79 No. 39.)

Aufgabe 39: Man soll zwei ganze Zahlen x und y finden, so dass ihr harmonisches Mittel einer gegebenen ganzen Zahl n gleich wird. (Heis § 79 Nr. 43.)

Erklärung: Das harmonische Mittel n zwischen zwei Grössen x und y findet man aus der Proportion : $x - n : n - y = x : y$ oder

$$x\,y - n\,y = n\,x - x\,y \text{ und es ist:}$$

$$n = \frac{2\,x\,y}{x + y}$$

Lösung: Nach der Aufgabe hat man die Gleichung: $\frac{2\,x\,y}{x + y} = n$ zu lösen; es ist:

$$2\,x\,y = n\,x + n\,y \text{ und } x = \frac{n\,y}{2\,y - n}$$

Soll z. B. 36 das harmonische Mittel zwischen x und y sein, so setze man in die Formel

$$x = \frac{36\,y}{2\,y - 36} = \frac{18\,y}{y - 18}$$

für y die Zahlen 19, 20, 21 u. s. w. ein; ist $y = 19$, so ist $x = 18 \cdot 19 = 342$ und es ist $342 - 36 : 36 - 19 = 342 : 19$; ist $y = 20$, so ist $x = 180$; ist $y = 21$. so ist $x = 126$ u. s. w.

Anmerkung Um die ganzen Werthe für x und y einfacher zu finden, berücksichtige man, dass

$$x = \frac{18\,y}{y - 18} = 18 + \frac{324}{y - 18} \text{ ist.}$$

Zerlegt man 324 in die kleinsten Factoren: $324 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ und bestimmt die Theiler von 324, welche 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 324 sind, so findet man $y = 19, 20, 21, 22, 24, 27, 30, 36, 45, 54, 72, 99, 126, 180, 342$ und dem entsprechend die Werthe für x, wobei noch zu bemerken ist, dass die Werthe von x und y sich vertauschen lassen, weil $n = \frac{2\,x\,y}{x + y}$ eine reziproke Gleichung ist.

Die correspondierenden Werthe von x sind der Reihe nach 342, 180, 126, 99, 72, 54, 45, 36, 30, 27, 24, 22, 21, 20, 19.

Die allgemeine Lösung der Aufgabe kann in folgender Weise geliefert werden:

Aus $\frac{2\,x\,y}{x + y} = n$ oder $2\,x\,y = n\,x + n\,y$; folgt: $x\,(n - y) = y\,(x - n)$, wofür man auch setzen kann: $a\,b\,x\,(n - y) = a\,b\,y\,(x - n)$.

Dieser Gleichung genügen die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$\text{I) } b\,x = a\,(x - n)$$

$$\text{II) } b\,y = a\,(n - y)\text{; hieraus folgt:}$$

$$x = \frac{a\,n}{a - b};\ y = \frac{a\,n}{a + b},\ \text{ oder } x = n + \frac{b\,n}{b - b};\ y = n - \frac{b\,n}{a + b}.$$

Auch diese beiden Formeln für x und y genügen der Aufgabe, können aber noch zum praktischen Berechnen passender umgeformt werden. Man berücksichtige, dass jede Grösse n in ein Product von der Form $(a + b)\,(a - b)$ zerlegt werden kann; es ist nämlich

$$\left(\frac{n + m^2}{2\,m}\right)^2 - \left(\frac{n - m^2}{2\,m}\right)^2 = n = a^2 - b^2$$

Es ist jetzt $x = \frac{a\,.\,(a^2 - b^2)}{a - b} = a\,(a + b)$ und und $y = \frac{a\,(a^2 - b^2)}{a + b} = a\,(a - b)$;

setzt man noch für a und b die Werthe $\frac{n + m^2}{2\,m}$ und $\frac{n - m^2}{2\,m}$ ein, so ist

$$x = n\,.\,\frac{n + m^2}{2\,m^2} \text{ und } y = \frac{n + m^2}{2}$$

Setzt man in dem obigen Zahlenbeispiel, in welchem $n = 36$ ist, $m = \sqrt{2}$, so ist $y = 19$; $x = 342$; für $m = \sqrt{4}$ ist $y = 20$; $x = 180$; für $m = \sqrt{6}$ ist $y = 21$; $x = 126$; für $m = \sqrt{8}$ ist $y = 22$; $x = 99$; für $m = \sqrt{10}$ wird zwar $y = 23$ aber x wird keine ganze Zahl u. s. w.

Anmerkung. Die Zahl der zu behandelnden Aufgaben könnte noch erheblich vermehrt werden, und noch manche interessante Auflösungsmethode müsste in einer vollständigen Abhandlung über diophantische Gleichungen des zweiten Grades enthalten sein; allein dies würde den Rahmen, den ich mir bei dieser kleinen Abhandlung gezogen, bedeutend überschreiten.

Zum Schluss folgen noch einige allgemeine Sätze aus der Zahlentheorie, namentlich über Quadrate, wie dieselben entweder aus den behandelten Aufgaben resultieren, oder auch umgekehrt bei der Lösung derartiger Aufgaben nützliche Anwendung finden.

„Zusammenstellung von Sätzen aus der Zahlentheorie".

Satz 1: Die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist stets ungrade und gleich der Summe der Zahlen

Beweis: Heisst die eine Zahl a und demnach die darauffolgenden $a + 1$, so ist

$$(a + 1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1,$$

welche Zahl ungrade und gleich $a + (a + 1)$ ist.

Anmerkung. Dieser Satz kann praktisch verwerthet werden bei der Anfertigung von Tabellen der Quadrate der natürlichen Zahlen; ist z. B. $25^2 = 625$, so ist

$$26^2 = 25^2 + 25 + 26 = 625 + 51 = 676.$$

Satz 2: Jede grade Zahl, welche eine Quadratzahl ist, ist durch 4 theilbar.

Beweis: Ist die Wurzel der Quadratzahl grade, also $= 2a$, so ist ihr Quadrat $4a^2$, also durch 4 theilbar, ist sie dagegen ungrade, also $2a + 1$, so ist ihr Quadrat $= 4a^2 + 4a + 1$, also eine ungrade Zahl und nicht durch 4 theilbar.

Anmerkung. Die Umkehrung dieses Satzes, dass eine grade Zahl, die nicht durch 4 theibar ist, keine Quadratzahl sein kann, findet bisweilen bei der Auflösung quadratischer diophantischer Gleichungen Anwendung.

Satz 3: Sowohl die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgender grader als auch die Differenz zweier aufeinander folgender ungrader Zahlen ist durch 4 theilbar.

Beweis: Heisst die eine grade Zahl $2a$ und daher die darauffolgende $2a + 2$, so ist $(2a + 2)^2 - (2a)^2 = 4a^2 + 8a + 4 - 4a^2 = 8a + 4$, ist also durch 4 theilbar; heisst die eine ungrade Zahl $2a + 1$ und die darauffolgende $2a + 3$, so ist $(2a + 3)^2 - (2a + 1)^2 = 4a^2 + 12a + 9 - 4a^2 - 4a - 1 = 8a + 8$ und gleichfalls durch 4 theilbar.

Satz 4: Jede Quadratzahl um ihre Wurzel vermehrt oder vermindert, giebt eine grade Zahl.

Beweis: Heisst die Wurzel a und daher ihr Quadrat a^2, so ist $a^2 \pm a = a(a \pm 1)$; ist nun a grade, so ist auch $a(a \pm 1)$ grade, ist dagegen a ungrade, so muss $a \pm 1$ und demnach auch $a(a \pm 1)$ grade sein.

Anmerkung. Zahlen von der Form $a^2 \pm a$ heissen Pronikzahlen.

Satz 5: Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist grösser als ihr doppeltes Product.

Beweis: Aus den verschiedenen Beweisen obiger Behauptung wähle ich den einfachsten:

Heissen die beiden Zahlen a und b, so ist $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b$; da die linke Seite positiv ist, muss es auch die rechte sein, woraus die Richtig der Behauptung folgt.

Satz 6: Die Summe der Quadrate dreier Zahlen ist grösser als die Summe der Producte zu je zweien

Beweis: Heissen die drei Zahlen a, b, c, so folgt aus dem vorigen Satze;

$$a^2 + b^2 > 2\,a\,b$$
$$a^2 + c^2 > 2\,a\,c$$
$$b^2 + c^2 > 2\,b\,c$$

$$\text{folglich: } 2\,(a^2 + b^2 + c^2) > 2\,(a\,b + a\,c + b\,c)$$
$$\text{daher } a^2 + b^2 + c^2 > a\,b + b\,c.$$

Satz 7: Theilt man die Einheit in zwei ungleiche Theile, so ist die Summe aus dem ersten Theile und dem Quadrate des zweiten gleich der Summe aus dem zweiten Theile und dem Quadrate des ersten.

Beweis: Heisst der erste Theil $\frac{a}{a+b}$ und demnach der zweite $\frac{b}{a+b}$, so ist

$$\frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 = \frac{b}{a+b} + \left(\frac{a}{a+b}\right)^2,$$

wovon man sich leicht durch Rechnung überzeugen kann.

Satz 8: Jede Quadratzahl ist gleich der Summe einer bestimmten Anzahl der aufeinanderfolgenden ungraden Zahlen von 1 angefangen.

Beweis: Die Summe der n ersten ungraden Zahlen ist, wie aus den arithmetischen Reihen bekannt ist, $\frac{n}{2}\,(1 + z)$, wo $z = 1 + (n - 1)\,2 = 2\,n - 1$ ist; also $s = 2\,n\,.\,\frac{n}{2} = n^2$.

Satz 9: Jede Quadratzahl ist gleich einem Vielfachen von 2 nebst der Wurzel der Zahl.

Beweis: Jede Quadratzahl kann dargestellt werden unter der Form $a^2 + 2\,a + 1 = a^2 + a + (a + 1) = a\,(a + 1) + (a + 1)$; da aber $a\,(a + 1)$ nach einem früheren Satze durch 2 theilbar ist, so ist es ein Vielfaches von 2 und auch $a + 1$ ist die Wurzel der Quadratzahl.

Satz 10: Jede ungrade Quadratzahl lässt bei der Division durch 8 den Rest 1.

Beweis: Jede ungrade Quadratzahl hat auch eine ungrade Wurzel, daher kann man, wenn x^2 die ungrade Quadratzahl ist, $x^2 = (2\,a + 1)^2 = 4\,a^2 + 4\,a + 1$ setzen, daher

$$\frac{x^2}{8} = \frac{a^2 + a}{2} + \frac{1}{8} = \frac{a\,(a + 1)}{2} + \frac{1}{8};$$

da aber $a\,(a + 1)$ durch 2 theilbar ist, so lässt x^2 durch 8 dividiert 1 zum Reste.

Anmerkung. Man kann daher jede ungrade Quadratzahl unter der Form $8\,n + 1$ darstellen.

Satz 11: Bilden drei Zahlen eine stetige geometrische Proportion, oder, was dasselbe ist, sind drei Zahlen drei aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Progression, so ist die Summe ihrer Quadrate theilbar durch ihre Summen.

Beweis: Heissen die drei Zahlen a, a b, a b^2, so ist

$$\frac{a^2 + a^2\,b^2 + a^2\,b^4}{a + a\,b + a\,b^2} = a\,\left(\frac{1 + b^2 + b^4}{1 + b + b^2}\right);$$

da aber $1 + b^2 + b^4 = \frac{b^6 - 1}{b^2 - 1}$ und $1 + b + b^2 = \frac{b^3 - 1}{b - 1}$ ist,

$$\text{so ist } a\left(\frac{1+b^2+b^4}{1+b+b^2}\right)=a\left(\frac{b^3+1}{b+1}\right)=a\,(b^2-b+1)$$

Anmerkung. Es mögen hier die Beweise dreier Sätze der Zahlentheorie, die häufiger Anwendung finden, eingeschaltet werden.

1) Die Differenz gleich hoher Potenzen ist stets theilbar durch die Differenz ihrer Basen.

2) Die Differenz gleich hoher Potenzen ist theilbar durch die Summen ihrer Basen bei gradem Exponenten.

3) Die Summe gleich hoher Potenzen ist theilbar durch die Summe ihrer Basen bei ungradem Exponenten.

Beweis ad 1: Aus $a \equiv b \pmod{a-b}$ folgt nach einem bekannten Satze der Congruenzlehre $a^n \equiv b^n \pmod{a-b}$ d. h. $\frac{a^n - b^n}{a-b}$ ist eine ganze Zahl.

Beweis ad 2 und 3: Aus $\equiv -b \pmod{a+b}$ folgt, dass sowohl $a^{2n} \equiv b^{2n} \pmod{a+b}$, als auch $a^{2n\pm 1} \equiv -b^{2n\pm 1} \pmod{a+b}$ ist, d. h sowohl

$$\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a+a} \text{ als auch } \frac{a^{2n\pm 1}+b^{2n\pm 1}}{a+b} \text{ sind ganze Zahlen.}$$

Satz 12: Ist von drei aufeinanderfolgen Zahlen des natürlichen Zahlensystems die mittlere ein Quadrat, so bilden die erste, die dritte und die vierfache Wurzel der zweiten einen Complex pythagoreïscher Zahlen.

Beweis: Heissen dis drei Zahlen m, $m+1$, $m+2$, so setze man für $m+1$, welche Zahl ein Quadrat ist, p^2; dann ist $m = p^2 - 1$ und $m + 2 = p^2 + 1$.

Da nun aus dem Früheren bekannt ist, dass $p^2 + 1$, $p^2 - 1$ und $2\,p$ drei pythagoreïsche Zahlen sind und $4\sqrt{p^2} = 2\,p$ ist, so ergiebt sich hieraus sofort die Richtigkeit obiger Behauptung.

Satz 13: Jede Quadratzahl lässt sich unter einer der Formen $4\,n$ oder $4\,n+1$ darstellen.

Beweis: Jede Zahl, sei sie grade oder ungrade, lässt sich unter der Form $2\,a$ oder $2\,a+1$ darstellen, ihre Quadrate also unter der Form $4\,a^2$ oder $4\,a^2 + 4\,a + 1$; es kann aber sowohl $4\,a^2 = 4\,n$ als auch $4\,a^2 + 4\,a + 1 = 4\,n, + 1$ stets dargestellt werden.

Anmerkung. Der obige Satz lässt sich nicht umkehren, da eine Zahl von der Form $4\,n+1$ nur dann eine Qudratzahl ist, wenn sie sich zugleich unter der Form $8\,n+1$ darstellen lässt. (cf. Satz 10)

Satz 14: Die Summe zweier ungrader Quadratzahlen ist ein Nichtquadrat, ebenso die Differenz zwischen einer graden und ungraden Quadratzahl

Beweis: Da die beiden ungraden Quadratzahlen unter der Form $4\,n+1$ und $4\,n_1+1$ darstellbar sind, so ist ihre Summe $4\,(n+n_1)+2$ oder $4\,n_{11}+2$, welche Form nie ein Quadrat darstellen kann; die Differenz zwischen einer graden und ungraden Quadratzahl kann dargestellt werden als $4\,n - (4\,n_1 + 1) = 4\,(n - n_1) - 1 = 4\,n_{11} - 1 = 4\,n_{111} + 3$, unter welcher Form gleichfalls kein Quadrat darstellbar ist.

Satz 15: Von je zwei Quadratzahlen ist wenigstens eine oder die Differenz derselben durch 4 theilbar.

Beweis: Ist keine von beiden durch 4 theilbar, so ist, wie früher bewiesen, ihre Differenz $4\,n + 1 - (4\,n_1 + 1) = 4\,(n - n_1)$, also durch 4 theilbar.

Satz 16: Das Produkt dreier pythagoreïscher Zahlen ist theilbar durch ihre Summe.

Beweis: Heissen die drei pythagoreïsche Zahlen $p^2 + q^2$, $p^2 - q^2$ und $2\,p\,q$, so ist ihr Produkt $(p^2 + q^2)(p^2 - q^2) \cdot 2\,p\,q = 2\,p\,q\,(p^2 + q^2)(p + q)(p - q)$; ihre Summe ist $= 2\,p^2 + 2\,p\,q = 2\,p\,(p + q)$; es leuchtet sofort ein, dass das Produkt durch die Summe theilbar ist und dass das Resultat $(p^2 + q^2)(p - q)\,q$ ist.

Satz 17: Die Summe zweier aufeinanderfolgender Trigonalzahlen ist eine Quadratzahl, und zwar ist die n^{ten} nebst der $n + 1^{ten}$ Trigonalzahl $= (n + 1)^2$.

Beweis: Aus der Lehre von den figurierten Zahlenreihen ist bekannt, dass die Trigonal- oder Dreieckszahlen eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, deren erste Differenzreihe die Reihe der natürlichen Zahlen ist; ferner erinnere ich an den Satz, dass die n^{te} figurierte Zahl gleich ist den n ersten Zahen in der vorhergehenden Reihe. Hieraus ergiebt sich, dass die n^{te} Trigonalzahl gleich ist der Summe der n ersten natürlichen Zahlen, also $= \frac{n\,(n + 1)}{2}$, und

die $n + 1^{te}$ figurierte Zahl $= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$;

es ist aber $\frac{n\,(n + 1)}{2} + \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = (n + 1)(n + 1) = (n + 1)^2$.

Satz 18: Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Zahlen vermehrt um das Produkt ihrer Quadrate giebt wieder ein Quadrat.

Beweis: Sind n und $n + 1$ die Wurzeln der beiden aufeinanderfolgenden Quadrate, so ist $n^2 + (n + 1)^2 + n^2\,(n + 1)^2 = n^4 + 2\,n^3 + 3\,n^2 + 2\,n + 1 = (n^2 + n + 1)^2$.

Satz 19: Unter je drei pythagoreïschen Zahlen ist wenigstens eine durch 5 und von den beiden kleineren wenigstens eine durch 3 theilbar.

Beweis: Dieser Satz kann nach verschiedenen Methoden bewiesen werden; der Abwechselung halber möge der Beweis mit Hülfe der Gauss'schen Congruenzen geführt werden. Die drei pythagoreïschen Zahlen mögen $p^2 + 1$, $p^2 - 1$ und $2\,p$ heissen. Ist p durch 5 theilbar, so ist auch $2\,p$ durch 5 theilbar, und der erste Theil obiger Behauptung wäre bewiesen; ist dies nicht der Fall, so lässt p bei der Theilung durch 5 einen der Reste 1, 2, 3, 4; es kann also sein: $p \equiv 1 \pmod 5$, woraus folgt, dass auch $p^2 \equiv 1 \pmod 5$ ist d. h. $p^2 - 1$ ist durch 5 theilbar; ist $p \equiv 2 \pmod 5$, so ist auch $p^2 \equiv 4 \pmod 5$ oder $p^2 \equiv -1 \pmod 5$, d. h. $p^2 + 1$ ist durch 5 theilbar; ist $p \equiv 3 \pmod 5$, also $p^2 \equiv 9 \pmod 5$ oder $p^2 \equiv -1 \pmod 5$, so ist $p^2 + 1$ durch 5 theilbar; ist endlich $p \equiv 4 \pmod 5$, so ist, wie wir schon gesehen, $p^2 + 1$ durch 5 theilbar.

Um noch zu beweisen, dass von den beiden Zahlen $2\,p$ und $p^2 - 1$ wenigstens eine durch 3 theilbar sei, berücksichtige man, dass jede Zahl bei der Theilung durch 3, die Reste 1,2, 3 lässt; ist $p \equiv 1 \pmod 3$, so ist auch $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, d. h. $p^2 - 1$ ist durch 3 theilbar; ist $p \equiv 2 \pmod 3$, so ist $p^2 \equiv 4 \pmod 3$, oder $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, d. h. $p^2 - 1$ ist durch 3 theilbar. $p \equiv 3 \pmod 3$, so ist $p \equiv 0 \pmod 3$, d. h p und daher auch $2\,p$ ist durch 3 theilbar.

Satz 20: Sind in der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ die drei Grössen ganze Zahlen, so sind entweder alle drei grade, oder zwei ungrade.

Beweis: Setzt man in der allgemeinen Auflösungsformel $(p^2 - q^2)^2 + (2\,p\,q)^2 = (p^2 + q^2)^2$ für p und q grade Werthe, so sind nicht nur ihre Quadrate p^2 und q^2, sondern auch die Summe und Differenz dieser Quadrate $p^2 + q^2$ und $p^2 - q^2$, desgleichen $2\,p\,q$ grade; nimmt man für p und q ungrade Werthe, so ist zwar $2\,p\,q$ stets grade, aber sowohl p^2 und q^2, als auch $p^2 + q^2$ und $p^2 - q^2$ sind ungrade; ist endlich p grade und q ungrade, oder umgekehrt, so ist p^2 grade und q^2 ungrade, oder umgekehrt, und es muss sowohl $p^2 + q^2$ als auch $p^2 - q^2$ ungrade sein.

Satz 21: Setzt man in der allgemeinen Auflösungsformel $(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2) + (2\,p\,q)^2$ für p und q zwei aufeinanderfolgende Trigonalzahlen, so ist $p^2 - q^2$ eine rationale Cubikzahl.

Beweis: Die n^{te} Trigonalzahl ist $\frac{n\,(n+1)}{2}$, die $n + 1^{te}$ ist $\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$; es ist also

$$p^2 - q^2 = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4} - \frac{n^2\,(n+1)^2}{4},$$

oder

$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left[(n+2)^2 - n^2\right] = \frac{(n+1)^2}{4}\,(4\,n + 4) = (n+1)^3 = n_1^3.$$

Nachtrag.

In der Aufgabe Nr. 4 ist durch ein Versehen in der Gleichung

$$\left(x + \frac{C - m}{2 B}\right)\left(x + \frac{C + m}{2 B}\right) = y^2$$

auf der linken Seite die Multliplikation mit B vergossen worden; die Lösung ist dann folgende:

$$\left(B x + \frac{C - m}{2 B}\right)\left(x + \frac{C + m}{2 B}\right) = y^2.$$

Diese Aufgabe lässt sich am leichsten nach der Methode von Leslie lösen, indem man

$$\frac{B x + \frac{C - m}{2}}{k} = y \text{ und } k\left(x + \frac{C + m}{2 B}\right) = y \text{ setzt.}$$

Hieraus ergiebt sich nach einigen Umformungen

$$x = \frac{k^2 C + k^2 m - B C + B m}{2 B^2 - 2 B k^2} \text{ oder } x = \frac{k^2 (C + m) + B (m - C)}{2 B (B - k^2)}.$$

Zahlenbeispiel: $y^2 = 8 x^2 + 10 x + 2$; hier ist $B = 8$; $C = 10$; $D = 2$ und $m = 6$; also $x = \frac{k^2 - 2}{8 - k^2}$; wird $k = 2$ angenommen, so ist $x = \frac{1}{2}$ und $y = \sqrt{9} = 3$; ist $k = 3$, so ist $x = - 7$ und $y = \sqrt{324} = 8$ u. s. w.

Die Behandlung der Aufgabe $y^2 = B x^2 + C x + D$ zu lösen, wenn $B x^2 + C x + D = a^2 x^2 + (b x + c)(d x + e)$, oder $= (a x + b)(c x + d) + e^2$ ist, oder wenn eine Wurzel für x bekannt ist, möge gleichfalls noch Platz finden.

Aufgabe: Die Gleichung $x^2 = B x^2 + C x + D$ in rationalen Werthen zu lösen, wenn $B x^2 + C x + D = a^2 x^2 + (b x + c)(d x + e)$ ist.

Lösung: Setzt man für den Ausdruck rechter Hand $[a x + m (b x + c)]^2$, so wird nach einigen Umformungen: $x = \frac{e - m^2 c}{2 a m + b m^2 - d}$.

Zahlenbeispiel: $y^2 = 5 x^2 - 7 x + 12 = 4 x^2 + (x - 3)(x - 4)$, wo $a = 2$, $b = 1$, $c = - 3$, $d = 1$, $e = - 4$ und $x = - \frac{1}{4}$; $y = \frac{15}{4}$ ist.

Aufgabe: $y^2 = B x^2 + C x + D$ in rationalen Werthen zn lösen, wenn $B x^2 + C x + D = (a x + b) (c x + d) + e^2$ ist.

Lösung: Setzt man für den Audruck rechter Hand $[e + n (a x + b)]^2$, so erhält man nach einigen Umformungen $x = \frac{2 e n + b n^2 - d}{c - a n^2}$.

Zahlenbeispiel: $y^2 = x^2 - 7 x + 37 = (x - 3) (x - 4) + 25$, wo $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$, $d = -4$, $e = 5$ und $x = -4$: $y = 9$ ist.

Aufgabe: $y^2 = B x^2 + C x + D$ in rationalen Werthen zu lösen, wenn eine Wurzel für x bekannt ist.

Lösung: Heisst die bekannte Wurzel k, so setze man $x = k + z$ und es ist: $y^2 = B (k^2 + 2 k z + z^2) + C k + C z + D$, oder $y^2 = B z^2 + (2 k B + C) z + B k^2 + C k + D$; weil aber das Absolutglied $B k^2 + C k + D$ ein Quadrat ist, welches p heissen mag, so ist $y^2 = B z^2 + (2 k B + C) z + p^2$, wodurch diese Aufgabe auf einen früheren Fall zurückgeführt ist, in welchem das Absolutglied ein Quadrat ist.