ÜBER DIE

# REIHENFOLGE GEWISSER GRENZOPERATIONEN

IN DER

# INTEGRALRECHNUNG

VON

**EMIL HOSSENFELDER,**
OBERLEHRER.

---

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE ZUM XVII. JAHRESBERICHT
DES KÖNIGL. GYMNASIUMS ZU STRASBURG I. WESTPR. ÜBER DAS SCHULJAHR 1890/91.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1891.

**1891. Progr. Nr. 41.**

Die in den folgenden Zeilen zu behandelnden Aufgaben der Integralrechnung beziehen sich auf die Bedingungen, unter welchen es erlaubt ist, die Operation des Integrierens und eine andere Grenzoperation in ihrer Reihenfolge zu vertauschen. In allen diesen Untersuchungen ist ein Begriff von entscheidender Wichtigkeit, der Begriff der gleichmäſsigen Konvergenz, welcher vor nicht langer Zeit in die Analysis eingeführt worden ist. Nicht nur die Reihenlehre, in der Seidel zuerst die Thatsache der ungleichmäſsigen Konvergenz entdeckt hat, sondern auch die Integralrechnung hat in verschiedenen Kapiteln durch diesen neuen Begriff eine Umgestaltung erfahren. Mir handelte es sich beim Studium dieser Gegenstände um Anschaulichkeit, sowie um möglichst einheitliche Darstellung. Aus diesem Bestreben ist die folgende Abhandlung entstanden.

## § 1. Der Satz $\operatorname{Lim}\int f(x,q)dx = \int \operatorname{Lim} f(x,q)\,dx$.

Der in dem folgenden zu behandelnde Satz der Integralrechnung giebt Bedingungen an, unter welchen der Grenzwert eines bestimmten Integrals gleich ist dem Integral des Grenzwerts der Funktion unter dem Integralzeichen, falls beiderseits ein Parameter $q$ einen bestimmten Grenzübergang ausführt. Ich werde gewisser Anwendungen wegen den $\lim q = +\infty$ bevorzugen; es versteht sich von selbst, daſs das Gesagte für jeden andern Limes ebenfalls gültig ist, wenn man die Ausdrucksweise entsprechend abändert. —

Der in Rede stehende Satz giebt Auskunft über häufig zu vollziehende Operationen, so unter andern über die Integration einer unendlichen Reihe durch Integration der einzelnen Glieder derselben, also über Vertauschung von Summation und Integration, über die Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter, über Vertauschung der Aufeinanderfolge der Integrationen. Ich meine also, daſs die hierüber handelnden Kapitel der Integralrechnung an Übersichtlichkeit gewinnen würden, wenn man den Satz

$$\lim\int f(x,q)dx = \int dx \lim f(x,q)$$

zum Mittelpunkt der Darstellung machte. Derselbe ist bisher selten ausdrücklich ausgesprochen, wenn auch vielfach angewandt; formuliert findet er sich in keinem der mir bekannten Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung auſser in der „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung“ des Herrn M. Pasch. Er findet sich ferner in einer Abhandlung des Herrn Stolz über gleichmäſsige Konvergenz der Funktionen von mehreren Veränderlichen, Math. Ann. Bd. 26, S. 83, wenn auch, den dortigen Zwecken gemäſs, nicht in der möglichen Allgemeinheit. Das daselbst und auch sonst vielfach angeführte Werk des Herrn U. Dini: Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali ist mir nicht zugänglich. —

Es sei $f(x,q)$ eine eindeutige Funktion von $x$ und $q$, welche für $a \leq x \leq b$ und für alle Werte von $q$, welche gröſser sind, als eine gegebene Zahl, definiert ist. — Wir nehmen ferner an, es sei:

$$\lim_{q=+\infty} f(x,q) = \varphi(x), \qquad a \leqq x \leqq b,$$

d. h. es lasse sich, wenn eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben ist, bei jedem $x$ eine Zahl $G$ finden, so daſs

$$\operatorname{abs}\big(f(x,q) - \varphi(x)\big) < \varepsilon,$$

falls nur $q > G$ ist.

Damit überhaupt der in Rede stehende Satz bestehen könne, mufs von vornherein angenommen werden, dafs für alle soeben angegebenen Werte $f(x, q)$ sowohl wie $\varphi(x)$ integrierbar seien. Diese Voraussetzung ist notwendig. Aufserdem möge angenommen werden, dafs für dieselben $x$ und $q$ alle Werte der Funktion $f(x, q)$ unter einer endlichen Zahl $D$ liegen, woraus dann folgt, dafs auch $\varphi(x)$ diese Zahl nicht übersteigt. $x$ ist die Integrationsvariable, während die andere Variable, *der Parameter*, den Grenzübergang $\lim q = +\infty$ ausführen soll. Der Anschaulichkeit wegen denken wir uns $f(x, q)$ für ein beliebiges $q$ in der üblichen Weise zwischen den Abscissen $a$ und $b$ dargestellt. Diese Darstellung erfolge für jeden Wert des Parameters; nehmen wir denselben der leichteren Vorstellung wegen etwa ganzzahlig über alle Grenzen wachsend an. Auf diese Weise erhalten wir eine Schar Kurven zwischen denselben Abscissenwerten, welche sich der Kurve $y = \varphi(x)$ immer mehr nähern. Diese Kurve $y = \varphi(x)$ wollen wir die *Grenzkurve* nennen. Denken wir uns zwei Nachbarkurven konstruiert $y = \varphi(x) - \varepsilon$ und $y = \varphi(x) + \varepsilon$, unter $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Gröfse verstanden, so wird der Voraussetzung nach bei jedem Werte von $x$ eine Zahl, welche wir wegen ihrer Abhängigkeit von $x$ $G_x$ nennen, existieren, so dafs für den betreffenden Wert von $x$ die Ordinaten sämtlicher Kurven, bei denen $q > G_x$, zwischen die beiden Ordinaten $\varphi(x) - \varepsilon$ und $\varphi(x) + \varepsilon$ fallen. — Es wäre nun falsch, hieraus schliefsen zu wollen, dafs sämtliche *Kurven* $f(x, q)$ von einem bestimmten hinlänglich grofsen $q$ an auf Grund der gemachten Voraussetzung zwischen den beiden Nachbarkurven $y = \varphi(x) - \varepsilon$ und $y = \varphi(x) + \varepsilon$ verlaufen müssen. Dies würde nur dann der Fall sein, wenn für alle $x (a \leqq x \leqq b)$ *ein und dasselbe* $G$ bewirken würde, dafs

$$\text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x)) < \varepsilon,$$

falls nur $q > G$ ist, was aus unserer Voraussetzung durchaus nicht folgt. —

*Wenn aber für das ganze Intervall $a \leqq x \leqq b$ eine Zahl $G$ existiert, so dafs*

$$\text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x)) < \varepsilon$$

*ist für alle $q > G$, wo $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl ist, so sagt man, $f(x, q)$ konvergiere gleichmäfsig für das ganze Intervall nach $\varphi(x)$.* In diesem Falle allein werden schliefslich sämtliche Kurven $f(x, q)$ zwischen den beiden Nachbarkurven $\varphi(x) + \varepsilon$ und $\varphi(x) - \varepsilon$ verlaufen. Dieses Verhalten ist also ein ganz besonderes; die Aufdeckung des Unterschiedes zwischen gleichmäfsiger und nicht gleichmäfsiger Konvergenz ist epochemachend für die Analysis gewesen. —

Hierbei möge folgender Satz seine Stelle finden*): Wenn für alle $a \leq x \leq b$ die Funktion $f(x, q)$ bei konstantem $q$ für alle $q$, die gröfser sind als eine bestimmte Zahl $Q$, eine stetige Function von $x$ ist und *gleichmäfsig* bei

$$\lim q = +\infty$$

zum Grenzwerte $\varphi(x)$ konvergiert, so ist für ebendieselben Werte von $x$ $\varphi(x)$ eine stetige Funktion von $x$. —

Man hat nämlich auf Grund der gleichmäfsigen Konvergenz:

$$\text{(a)} \qquad \text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{(b)} \qquad \text{abs}\,(f(x_0, q) - \varphi(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3},$$

wenn $q > G$ und $x, x_0$ zwei beliebige Werte des Intervalls sind. Da ferner $f(x, q)$ für ein bestimmtes $q, q'$, eine stetige Funktion von $x$ im ganzen Intervall mit Einschlufs der Grenzen ist, so läfst sich eine Gröfse $\delta$ angeben, so dafs

$$\text{(c)} \qquad \text{abs}\,(f(x, q') - f(x_0, q')) < \frac{\varepsilon}{3}$$

vorausgesetzt, dafs $q' > Q$ und

$$\text{abs}\,(x - x_0) < \delta.$$

Nimmt man nun $q'$ auch $> G$ und in (a) und (b) $q'$ für $q$, so folgt durch Kombination der drei Relationen (a), (b), (c)

---

*) Stolz, Allgemeine Arithmetik Bd. I, S. 200.

(d) $$\text{abs}\,(\varphi(x) - \varphi(x_0)) < \varepsilon,$$

falls $\text{abs}\,(x - x_0) < \delta$.

Dies ist aber die Stetigkeitsbedingung.

Wollte man versuchen, aus der Stetigkeit der Funktionen auf die gleichmäſsige Konvergenz zu schlieſsen, so könnte man aus den dann stattfindenden Relationen:

$$\text{abs}\,(f(x, q') - \varphi(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{abs}\,(f(x, q') - f(x_0, q')) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{abs}\,(\varphi(x) - \varphi(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3},$$

welche beide letzteren stattfinden, wenn $\text{abs}\,(x - x_0)$ kleiner als ein gewisses $\delta$ ist, schlieſsen, daſs

$$\text{abs}\,(f(x_0, q') - \varphi(x_0)) < \varepsilon,$$

wenn nur $x_0$ in der angegebenen Nähe von $x$ liegt. Diese Ungleichung, welche sich nur auf ein bestimmtes $q'$ bezieht, sagt aber durchaus nichts aus über die Gröſse der Differenz linker Hand für gröſsere Werte, als $q'$. Diese könnte sehr wohl für gröſsere Werte des Parameters wieder gröſser werden. Nur wenn man anderweitig wüſste, daſs in der Umgebung der Stelle $x$ die Differenz $f(x, q) - \varphi(x)$ mit gröſser werdendem $q$ abnimmt, könnte man aus der Stetigkeit auf die gleichmäſsige Konvergenz in der Umgebung dieser Stelle schlieſsen. Es werde aber ausdrücklich hervorgehoben, und Beispiele werden dies bestätigen, daſs im allgemeinen dieser Schluſs falsch wäre. —

Wir gehen nun an die Aufsuchung von Bedingungen, unter welchen der Satz gilt:

$$\lim_{q=+\infty} \int_a^b f(x, q)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Nach dem Begriff des Grenzwerts gilt diese Gleichung dann, wenn zu jeder beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $G$ gehört, welche bewirkt, daſs

$$\text{abs} \int_a^b (f(x, q) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon,$$

wenn nur $q > G$. —

Wenn $f(x, q)$ in dem ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichmäſsig nach $\varphi(x)$ konvergiert, so ist diese Relation sicher erfüllt; denn alsdann läſst sich eine Zahl $G$ bestimmen, so daſs für das ganze Intervall:

$$\text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x)) < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Hieraus folgt dann, daſs

$$\text{abs} \int_a^b (f(x, q) - \varphi(x))\,dx \leqq \int_a^b \text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a),$$

also kleiner als $\varepsilon$ ist.

Geometrisch bedeutet dies folgendes. Nach der gemachten Voraussetzung verlaufen alle Kurven $f(x, q)$ schlieſslich zwischen den beiden Nachbarkurven $y = \varphi(x) + \varepsilon$ und $y = \varphi(x) - \varepsilon$. Das Integral

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x, q) - \varphi(x))\,dx$$

bedeutet alsdann einen Flächeninhalt, welcher kleiner ist, als ein endlicher Streifen von beliebig kleiner Breite, kann also unter jede noch so kleine Zahl herabgedrückt werden. —

Wenn wir statt der Bedingung

$$\operatorname{abs}\int_a^b (f(x,q) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon$$

die andere

$$\int_a^b \operatorname{abs}(f(x,q) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon$$

aufstellen, so nehmen wir statt der notwendigen eine hinreichende Bedingung; denn, da

$$\operatorname{abs}\int_a^b (f(x,q) - \varphi(x))\,dx \leq \int_a^b \operatorname{abs}(f(x,q) - \varphi(x))\,dx,$$

so ist es denkbar, dafs die erstere erfüllt sei, nicht aber die zweite. —

Um zu erfahren, unter welchen weiteren Voraussetzungen die Bedingung

$$\int_a^b \operatorname{abs}(f(x,q) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon$$

etwa noch erfüllbar sei, untersuchen wir, in welcher Weise Ausnahmen von der gleichmäfsigen Konvergenz durch das ganze Intervall stattfinden können. Dafs eine Funktion $f(x,q)$ in dem ganzen Intervall gleichmäfsig gegen $\varphi(x)$ konvergiere mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten, etwa der Endpunkte, ist ausgeschlossen. Denn da einerseits zu jedem ausgenommenen Punkte, andrerseits zu der ganzen Strecke mit Ausschlufs dieser Punkte je eine Zahl gehört, welche, kurz gesagt, die verlangte Annäherung leistet, so erfüllt die gröfste unter diesen Zahlen für die ganze Strecke ohne jede Ausnahme die obige Bedingung. Wenn Ausnahmen *punktuell* stattfinden, so können sie also nur in einer unendlichen Anzahl von Punkten, in einer *Punktmenge* stattfinden. Andrerseits kann die gleichmäfsige Konvergenz stattfinden für die ganze Strecke von $a$ bis $b$ mit Ausschlufs der beliebig kleinen Umgebung eines bestimmten Punktes oder auch der Umgebungen mehrerer Punkte oder einer Punktmenge. Unter den Punktmengen ist besonders bei Aufgaben der Integralrechnung hervorzuheben die *diskrete Punktmenge* (Harnack) oder die *Punktmenge mit der Intervallsumme Null* (Stolz). Diese wird in folgender Weise definiert: Nennt man das Intervall von $x - \varepsilon$ bis $x + \varepsilon$ die Umgebung des Punktes $x$, wobei $\varepsilon$ eine beliebig kleine Gröfse ist, so soll eine unendliche Menge von Punkten eine diskrete Mannigfaltigkeit heifsen, wenn es möglich ist, sämtliche Punkte dieser Menge in Umgebungen einzuschliefsen, deren Summe kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig kleine Zahl, während die Anzahl der Umgebungen dabei beliebig wachsen kann. Die Benennung „diskrete Punktmenge“ ist von Harnack eingeführt worden, um auszudrücken, dafs eine solche Menge für die Probleme der Integralrechnung dieselbe Eigenschaft hat, wie eine endliche Anzahl diskreter Punkte. Durch die zweite Bezeichnung „Punktmenge mit der Intervallsumme Null“ wird die eben definierte den *linearen* Punktmengen entgegengesetzt, bei denen die in gleicher Weise gebildete Intervallsumme nicht gegen 0, wie hier, sondern gegen eine andere Zahl konvergiert, welche $\leq b - a$ sein kann, wenn $b - a$ das ganze in Rede stehende Intervall ist. Dafs aber zu jeder definierten Mannigfaltigkeit von Punkten eine und nur eine bestimmte Intervallsumme gehört, hat Herr O. Stolz bewiesen.*)

Soll nun

$$\int_a^b \operatorname{abs}(f(x,q) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon$$

dadurch werden, dafs $q$ gröfser als eine Zahl $G$ genommen wird, so müssen die Stellen, an denen es nicht möglich ist, den Integrandus

*) Math. Ann. Bd. 23, S. 152.

$$\text{abs}\,(f(x,q) - \varphi(x))$$

durch Annahme einer hinlänglich grofsen unteren Grenze für $q$ unter eine beliebig kleine Zahl herabzudrücken, eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden. In diesem Falle nämlich läfst es sich erreichen, dafs in dem ganzen Intervall mit Ausnahme einer Intervallsumme $s$

$$\text{abs}\,(f(x,q) - \varphi(x)) < \eta$$

und in dem übrigen Teil $s$

$$\text{abs}\,(f(x,q) - \varphi(x)) \geqq \eta$$

wird, in welchem letzteren aber durchweg wegen der Voraussetzung, dafs $f(x,q)$ unter einer endlichen Zahl $D$ liegt,

$$\text{abs}\,(f(x,q) - \varphi(x)) < 2D$$

ist. Es ist somit

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x,q) - \varphi(x))\,dx < \eta(b-a) + s \cdot 2D.$$

Nimmt man nun

$$\eta < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{und} \qquad s < \frac{\varepsilon}{4D},$$

was durch Wahl eines hinlänglich grofsen $G$ möglich ist, so wird

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x,q) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon.$$

Wir wollen sagen, dafs in diesem Falle die Funktion $f(x,q)$ *im allgemeinen gleichmäfsig* gegen die Grenzfunktion $\varphi(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ konvergiert und können dann den Satz aussprechen:

*Wenn $f(x,q)$ bei allen Werten von $q > Q$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ endlich und nach $x$ integrierbar ist, wenn ferner $f(x,q)$ bei $\lim q = +\infty$ zum Grenzwerte $\varphi(x)$ im allgemeinen gleichmäfsig für alle Werte von $x$ in dem angegebenen Intervall konvergiert, wenn endlich $\varphi(x)$ ebenfalls in demselben integrierbar ist, so ist:*

$$\lim_{q=+\infty} \int_a^b f(x,q)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Wenn $f(x,q)$ nicht im allgemeinen gleichmäfsig zum Grenzwerte $\varphi(x)$ konvergiert, sondern wenn die Stellen, an denen

$$\text{abs}\,(f(x,q) - \varphi(x))$$

nicht kleiner als eine beliebig kleine Zahl gemacht werden kann, eine lineare Punktmannigfaltigkeit bilden, so konvergiert

$$\int_a^b \text{abs}\,(f(x,q) - \varphi(x))\,dx$$

nicht gegen 0. Trotzdem könnte

$$\text{abs} \int_a^b (f(x,q) - \varphi(x))\,dx$$

sehr wohl gegen 0 konvergieren, dadurch nämlich, dafs sich positive und negative Teile zerstörten. Wenn aber $f(x,q) - \varphi(x)$ von einem bestimmten $q$ ab im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stets dasselbe Zeichen behielte, so würde beides auf dasselbe herauskommen; der obige Satz würde für solche Funktionen zugleich die notwendige Bedingung angeben. Aber nicht nur in diesem Falle, sondern auch in einem etwas allgemeineren würde dies zutreffen. Nehmen wir an, das Intervall $a$ bis $b$ lasse sich in eine Reihe von Strecken zerlegen, in deren jeder schliefslich die obige Differenz — die Restfunktion könnten wir sie nennen — einerlei Zeichen hat, nehmen wir ferner an, es werde verlangt, der Satz solle auch *für jedes Teilintervall* gelten, so ist ebenfalls die in dem obigen Satze gestellte Bedingung, dafs die Ausnahmen von der gleichförmigen Konvergenz sich nur auf die Umgebungen diskreter Punkte beziehen, eine notwendige, — im entgegengesetzten Falle gilt dann der Satz nicht. Übrigens wird man zugeben, dafs, wenn von der Gültigkeit des Satzes die Rede ist, stillschweigend darunter auch die Gültigkeit für jedes Teilintervall verstanden wird.

Es möge wiederholt bemerkt werden, dafs der Grenzübergang $\lim q = +\infty$ durch jeden andern ersetzt werden kann. Hängt die Funktion unter dem Integralzeichen von einem Parameter in der Weise ab, dafs zu jedem Werte desselben nicht ein Funktionswert, sondern unendlich viele gehören, so wird sich in den angestellten Betrachtungen nichts wesentlich ändern. In dieser Weise hängt die Produktensumme

$$\sum_1^n{}^p \Delta\alpha_p\, F(x, \alpha_p),$$

welche gegen das bestimmte Integral

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha F(x, \alpha)$$

konvergiert, von einer Gröfse $\delta$ ab. Alle Intervalle $\Delta\alpha_p$ nämlich sollen, während sie dabei der Bedingung

$$\sum_1^n{}^p \Delta\alpha_p = \alpha_1 - \alpha_0$$

genügen, kleiner genommen werden, als eine gegen 0 konvergierende Gröfse $\delta$. Da auch diese Art der Abhängigkeit die Anwendung unsres Satzes meiner Meinung nach nicht ausschliefst, so habe ich weiter unten dasjenige, was sich in diesem Falle ergiebt, anführen zu dürfen geglaubt. —

Wenn eine Integrationsgrenze $\infty$ wird, so treten, falls der Satz:

$$\lim \int_a^\infty f(x, q)\,dx = \int_a^\infty \lim f(x, q)\,dx = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

auch dann bestehen soll, noch weitere Bedingungen hinzu.*)

Teilt man das Integrationsintervall $a$ bis $\infty$ in die beiden Teile $a$ bis $a'$ und $a'$ bis $\infty$, so ist:

$$\int_a^\infty f(x, q)\,dx - \int_a^\infty \varphi(x)\,dx = \int_a^{a'} [f(x, q) - \varphi(x)]\,dx + \int_{a'}^\infty f(x, q)\,dx - \int_{a'}^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Es mufs vorausgesetzt werden, dafs das Integral

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

existiere, womit gesagt ist, dafs durch ein gehörig grofses $a'$

$$\int_{a'}^\infty \varphi(x)\,dx$$

beliebig klein wird. Auch soll der Satz für ein beliebiges endliches Intervall bestehen bleiben.

*) Stolz, Math. Ann. Bd. 26, S. 84.

Wenn dann

$$\int_{a'}^{\infty} f(x, q)\, dx$$

für alle $q$ gröfser als eine gewisse Zahl gleichmäfsig für $\lim a' = +\infty$ zu Null konvergiert, so gilt der Satz; denn man kann dann $a'$ so grofs annehmen, dafs

$$\text{abs} \int_{a'}^{\infty} f(x, q)\, dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

ferner

$$\text{abs} \int_{a'}^{\infty} \varphi(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

(die gröfsere der Zahlen für $a'$, die bei den beiden einzelnen Integralen die erforderliche Annäherung an 0 ergiebt, leistet dieselbe bei beiden gemeinschaftlich), endlich $G$ so grofs, dafs für $q > G$

$$\text{abs} \int_{a}^{a'} [f(x, q)\, dx - \varphi(x)]\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ist dies geschehen, so ist auch

$$\text{abs} \int_{a}^{\infty} [f(x, q) - \varphi(x)]\, dx < \varepsilon$$

und man kann den Satz aussprechen:

*Gilt der in Rede stehende Satz für jedes Intervall von $a$ bis $a' > a$, konvergiert*

$$\int_{a'}^{\infty} f(x, q)\, dx$$

*bei $\lim a' = +\infty$ gleichmäfsig zu 0 für alle $q$ gröfser als eine gewisse Zahl und existiert auch:*

$$\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\, dx,$$

*so hat man auch:*

$$\lim_{q = +\infty} \int_{a}^{\infty} f(x, q)\, dx = \int_{a}^{\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Bei dem nun folgenden Beispiele werden wir einen Parameter zu $+0$ konvergieren lassen. Das Integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

ist bekanntlich $= \frac{\pi}{2}$ für $\alpha > 0$, somit ist auch

$$\lim_{\alpha = +0} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Hingegen ist

$$\int_0^\infty \lim_{\alpha=+0} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = 0.$$

Für jede endliche obere Grenze $h$ gilt:

$$\lim_{\alpha=+0} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^h \lim_{\alpha=+0} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = 0,$$

denn die Funktion $\frac{\sin \alpha x}{x}$, welche absolut genommen durchweg $< \alpha$ ist, konvergiert gleichmäfsig zu 0 in jedem endlichen Intervall. Für eine unendliche obere Grenze gilt also der Satz deswegen nicht, weil das Integral

$$\int_u^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

für $\lim u = +\infty$ nicht gleichmäfsig zu 0 konvergiert. In der That ist, wie sich durch Einführung einer neuen Variablen ergiebt:

$$\int_u^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{\alpha u}^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Da nun das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ einen endlichen Wert hat, so läfst sich $\alpha u$ so grofs annehmen, dafs

$$\text{abs} \int_{\alpha u}^\infty \frac{\sin x}{x} dx < \varepsilon$$

wird. Wenn $\alpha u$ in dieser Weise fixiert ist, so ergiebt sich, dafs das zugehörige $u$, während $\alpha$ gegen 0 konvergiert, über alle Grenzen wächst.

## § 2. Über die Integration einer unendlichen Reihe.

Sei
$$f(x, q) = u_0 + u_1 + \cdots + u_q,$$

wo $u_0$, $u_1$ u. s. w. Funktionen von $x$ seien, die wir als durchweg endlich und integrierbar in dem betreffenden Intervall ansehen. Der Grenzwert dieser Summe für $q = \infty$ sei $\varphi(x)$. Soll die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$

also $\varphi(x)$ im Intervall von $a$ bis $b$ integriert werden, so entsteht die Frage, unter welchen Bedingungen ist

$$\int_a^b \sum_0^\infty {}_h\, u_h \, dx = \sum_0^\infty {}_h \int_a^b u_h dx?$$

Es ist

$$\sum_0^\infty {}_h \int_a^b u_h dx = \lim_{q=+\infty} \sum_0^q {}_h \int_a^b u_h dx,$$

wie aus der Definition der Summe einer unendlichen Reihe folgt. Da nun für jeden endlichen Wert von $q$

$$\sum_0^q{}_h \int_a^b u_h\,dx = \int_a^b \sum_0^q{}_h\, u_h\,dx,$$

so ist

$$\sum_0^\infty{}_h \int_a^b u_h\,dx = \lim_{q=+\infty} \int_a^b \sum_0^q{}_h\, u_h\,dx,$$

und es frägt sich also, unter welchen Bedingungen die Gleichung gilt:

$$\lim_{q=+\infty} \int_a^b \sum_0^q{}_h\, u_h\,dx = \int_a^b \lim_{q=+\infty} \sum_0^q{}_h\, u_h\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Unser Satz giebt, auf diesen Fall angewendet, folgende Antwort:

*Wenn die Partialsummen $u_0 + u_1 + \cdots + u_q$ in dem Intervall $a \leq x \leq b$ im allgemeinen gleichmäſsig gegen den Reihenwert $\varphi(x)$ konvergieren und wenn die Restfunktionen für beliebig groſse $q$ unter einer endlichen Zahl bleiben, so erhält man, die Integrierbarkeit der betreffenden Funktionen vorausgesetzt, das Integral der unendlichen Reihe in demselben Intervall durch Integration der einzelnen Glieder.*

Es möge hervorgehoben werden, daſs aus der im allgemeinen gleichmäſsigen Konvergenz der Reihe gegen die endliche Funktion $\varphi(x)$ durchaus nicht folgt, daſs sämtliche Partialsummen und Restfunktionen unter einer endlichen Zahl liegen, so daſs diese Voraussetzung weggelassen werden könnte. Wenn man *durchweg* gleichmäſsige Konvergenz voraussetzt, ist dieser Zusatz freilich überflüssig. Die Bedingung, daſs die Reihe im allgemeinen gleichmäſsig gegen den Grenzwert konvergiert, ist gleichbedeutend mit der, daſs die Restfunktion im allgemeinen gleichmäſsig gegen 0 konvergiert. Wenn die Partialsummen sämtlich unter einer endlichen Zahl liegen, so gilt dasselbe für die Restfunktionen, und umgekehrt, denn es ist

$$\varphi(x) - f(x, q)$$

die Restfunktion und $\varphi(x)$ ist als endlich vorausgesetzt. Man kann sich also an die Untersuchung der Restfunktion kalten.

Als Beispiel diene zunächst die Reihe*):

$$\frac{x}{x^2+1} = \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{nx}{n^2x^2+1} - \frac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+1}\right).$$

Die Restfunktion ist hier $\frac{qx}{q^2x^2+1}$, da $\lim_{n=\infty} \frac{nx}{n^2x^2+1} = 0$. Diese konvergiert gegen 0, aber in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nicht gleichmäſsig. Die Funktion

$$R_q(x) = \frac{qx}{q^2x^2+1}$$

hat nämlich bei $x = \frac{1}{q}$ einen Maximalwert $= \frac{1}{2}$; sie ist $= 0$ für $x = 0$, auch für $x = \infty$. Eine Kurve $R_q(x)$ steigt also von 0 an bis zu der Höhe $\frac{1}{2}$, welche sie bei $x = \frac{1}{q}$ erreicht, um dann wieder bis 0 zu fallen. Je gröſser $q$ wird, desto mehr nähert sich der Maximalwert, dessen Gröſse ungeändert $= \frac{1}{2}$ bleibt, dem Werte $x = 0$, während sich alle übrigen Teile der Kurve der Abscissenaxe mehr und mehr anschmiegen. Da die Ausnahme von der gleichmäſsigen Konvergenz sich demnach nur auf die Umgebung eines Punktes bezieht, und da ferner die Werte von $R_q(x)$ die Zahl $\frac{1}{2}$ nie übersteigen, so gilt für jedes endliche Intervall der Satz von der Vertauschung der Summation

*) Harnack, Lehrbuch der Diff.- u. Integralrechnung S. 238.

und Integration. In der That erhält man durch Integration der einzelnen Glieder von 0 bis $x$ folgende Reihe:

$$\sum_1^{\infty}{}_n \left[\frac{1}{2n} l(n^2 x^2 + 1) - \frac{1}{2(n+1)} l((n+1)^2 x^2 + 1)\right],$$

welche $= \frac{1}{2} l(x^2 + 1)$, also gleich

$$\int_0^x \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

ist. —

Die von Herrn Weierstraſs aufgestellte Reihe

$$\varphi(x) = \sum_0^{\infty}{}_n b^n \cos(a^n x \pi)$$

konvergiert, wenn $0 < b < 1$. Dieselbe konvergiert gleichmäſsig, da die Reihe aus den numerisch gröſsten Werten der einzelnen Glieder $\sum_0^{\infty}{}_n b^n$ konvergiert. Sie ist also eine stetige Funktion von $x$, als solche integrierbar. (Von dieser stetigen Funktion hat Herr Weierstraſs gezeigt, daſs sie, wenn $a$ ungerade und $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, nirgends einen bestimmten Wert des Differentialquotienten hat.*)) Die Integration läſst sich durch Integration der einzelnen Glieder nach unserem Satz ausführen; in der That konvergiert die dadurch entstehende Reihe:

$$\sum_0^{\infty}{}_n \frac{b^n}{a^n \pi} \sin(a^n x \pi),$$

wenn $0 < b < 1$; wenn $a \geqq 1$, so ist dies von vornherein klar; wenn $a < 1$, so ist zu berücksichtigen, daſs der Faktor $\frac{\sin(a^n x \pi)}{a^n \pi} < x$ ist.

Herr Darboux hat eine Reihe aufgestellt, welche für alle Werte von $x$ konvergiert und eine stetige Funktion von $x$ darstellt, bei welcher auch die Reihe der Integralfunktionen konvergiert, welche aber doch nicht gliedweise integriert werden kann. Diese Reihe ist

$$\varphi(x) = xe^{-x^2} = \sum_1^{\infty}{}_n \left(nxe^{-nx^2} - (n+1)xe^{-(n+1)x^2}\right).$$

Es ist instruktiv, das Beispiel etwas allgemeiner zu fassen und die Art, wie die Restfunktion zu 0 konvergiert, zu betrachten. Man hat auch:

$$xe^{-x^2} = \sum_1^{\infty}{}_n \left(n^{\mu} xe^{-nx^2} - (n+1)^{\mu} xe^{-(n+1)x^2}\right).$$

Wir wollen auſser dem Fall $\mu = 1$ auch den Fall $\mu < 1$ berücksichtigen. Die Restfunktion ist:

$$R_q(x) = q^{\mu} xe^{-qx^2}.$$

Dieselbe hat ein Maximum bei $x = \frac{1}{\sqrt{2q}}$, dessen Wert ist $\frac{q^{\mu - \frac{1}{2}}}{\sqrt{2e}}$. Ist $\mu > \frac{1}{2}$, so wächst das Maximum mit $q$ über alle Grenzen, die Bedingung der Endlichkeit, welche in dem zu Grunde gelegten Satz gemacht wurde, ist nicht erfüllt, und es fragt sich, ob trotzdem die Integration der

*) Journal für Math. Bd. 79, S. 29.

Reihe gliedweise ausgeführt werden darf. Die Restfunktion steigt von 0 bis $\frac{q^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2e}}$ und fällt wieder bis zu 0. Bei wachsendem $q$ werden die Maxima, die bei $x=\frac{1}{\sqrt{2q}}$ stattfinden, immer näher an $x=0$ heranrücken; dabei werden die Erhebungen immer höher, steiler und schmäler, während der übrige Teil der Kurve sich immer näher an die Abscissenaxe anschmiegt. Schliefslich ist das Maximum über jede Stelle hinweggeschritten und die Grenzkurve ist die Abscissenaxe selbst. Man sieht, die gleichmäfsige Konvergenz findet nur statt mit Ausschlufs der Umgebung des Punktes $x=0$. Da die Maxima über alle Grenzen wachsen, so ist das Integral

$$\int_0^x (\varphi(x)-f(x,q))\,dx=\int_0^x R_q(x)\,dx$$

direkt zu untersuchen. Es ist

$$\int_0^x R_q(x)\,dx=\int_0^x q^\mu x e^{-qx^2}\,dx=\frac{1}{2}\,q^{\mu-1}(1-e^{-qx^2}).$$

Dieses Integral kann, wenn $\mu<1$, beliebig klein gemacht werden, also darf in diesem Falle die Reihe gliedweise integriert werden. Ist dagegen $\mu=1$, so nähert sich das Integral bei gröfser werdendem $q$ der Grenze $\frac{1}{2}$, die Reihe darf nicht gliedweise integriert werden. In der That ist für $\mu=1$ die Reihe der Integralfunktionen:

$$\sum_1^\infty{}_n\Big(\int_0^x nxe^{-nx^2}\,dx-\int_0^x (n+1)\,xe^{-(n+1)x^2}\,dx\Big)=\sum_1^\infty{}_n\Big(-\frac{1}{2}\,e^{-nx^2}+\frac{1}{2}\,e^{-(n+1)x^2}\Big);$$

dieselbe ist $=-\frac{1}{2}\,e^{-x^2}$ im allgemeinen, für $x=0$ dagegen 0, also unstetig. Das Integral der Reihe dagegen ist:

$$\int_0^x xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,(1-e^{-x^2}).$$

Andrerseits hat sich ergeben, dafs die Reihe:

$$xe^{-x^2}=\sum_1^\infty{}_n\,(n^\mu x e^{-nx^2}-(n+1)^\mu x e^{-(n+1)x^2})$$

für $1>\mu>\frac{1}{2}$ gliedweise integriert werden darf, obgleich die Maxima der Restfunktion auch hier über jede Grenze wachsen. Die Reihe der Integralfunktionen ist hier:

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty{}_n\Big(\int_0^x n^\mu xe^{-nx^2}\,dx-\int_0^x (n+1)^\mu xe^{-(n+1)x^2}\,dx\Big)&=\sum_1^\infty{}_n\Big(-\frac{1}{2}\,n^{\mu-1}e^{-nx^2}+\frac{1}{2}\,n^{\mu-1}\\&\qquad+\frac{1}{2}\,(n+1)^{\mu-1}e^{-(n+1)x^2}-\frac{1}{2}\,(n+1)^{\mu-1}\Big)\\&=\frac{1}{2}\,(1-e^{-x^2}),\end{aligned}$$

da sich die beiden Glieder $\frac{1}{2}\,n^{\mu-1}$ und $\frac{1}{2}\,(n+1)^{\mu-1}$ hier nicht wegheben, wie bei $\mu=1$.

Ist $\mu=\frac{1}{2}$, so konvergiert die Reihe in der Umgebung von $x=0$ zwar auch ungleichmäfsig, jedoch sind die Maxima der Restfunktion endlich. Für $\mu<\frac{1}{2}$ nehmen die Maxima, während sie sich dem Punkte $x = 0$ nähern, über alle Grenzen ab; die Restfunktion konvergiert durchweg gleichmäfsig zu 0. In diesen Fällen ist das Integral der Reihe unmittelbar nach unserem Satz gleich der Reihe der Integralfunktionen.

### § 3. Die Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter.

Es handle sich um die Differentiation eines Integrals

$$\int_a^b f(x, \alpha) dx$$

nach $\alpha$. Jedenfalls ist

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \lim_{\Delta \alpha = 0} \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta \alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta \alpha} dx.$$

Wenn zwischen dem vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten unterschieden werden soll, so ist die Grenze zu nehmen für $\lim \Delta \alpha = + 0$ oder $\lim \Delta \alpha = - 0$. Ist es gestattet, mit dem Zeichen lim unter das Integralzeichen zu gehen, so wird der Differentialquotient des bestimmten Integrals nach dem Parameter durch Differentiation unter dem Integralzeichen gebildet. Hierfür ergiebt sich also folgender Satz:

*Wenn der an der Stelle $\alpha$ und für das Inkrement $\Delta \alpha$ gebildete Differenzenquotient für $0 < \Delta \alpha < \Delta$ und alle $a \leq x \leq b$ unter einer endlichen Zahl verbleibt und im allgemeinen gleichmäfsig gegen den Differentialquotienten konvergiert, wenn aufserdem der letztere für den angenommenen Wert von $\alpha$ in dem Intervall integrierbar ist, so ist:*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} dx.$$

Ein Beispiel, in welchem die Differentiation unter dem Integralzeichen unzulässig ist, bietet das Integral

$$\int_0^x x e^{-\frac{x^2}{\alpha}} dx = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$$

an der Stelle $\alpha = 0$. Es bedarf indessen gerade für $\alpha = 0$ eines erläuternden Zusatzes, weil die Funktion $e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ hierfür die Bedeutung verliert. Da $\lim_{\alpha = +0} e^{-\frac{x^2}{\alpha}} = 0$ ist für beliebige von 0 verschiedene Werte von $x$, so möge der Wert 0 als Funktionswert für $\alpha = 0$ gelten, auch dann, wenn $x = 0$ ist. Wenngleich nun auch $e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ an der Stelle $x = 0$, $\alpha = 0$ unstetig ist, — denn es ist auf der $x$-Axe durchweg 0, auf der positiven $\alpha$-Axe hingegen 1 —, so sind doch die Funktionen $\alpha e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ und $x e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ auf der positiven Halbebene $\alpha > 0$ inkl. der Begrenzung stetige Funktionen beider Variabeln. Die Gleichung gilt auch für $\alpha = 0$, während wir negative $\alpha$ von der Betrachtung ausschliefsen, wie wir auch nur den vorwärts genommenen Differentialquotienten bilden wollen.

Der Differenzenquotient von $x e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ für $\alpha = 0$ ist

$$\frac{x e^{-\frac{x^2}{\Delta \alpha}}}{\Delta \alpha}.$$

Derselbe hat ein Maximum für $x = \sqrt{\frac{\Delta \alpha}{2}}$, dessen Wert ist $\frac{1}{\sqrt{2e\Delta\alpha}}$. Der Differentialquotient ist allenthalben 0, weil $e^{-\frac{x^2}{\Delta\alpha}}$ in höherer Ordnung für $\Delta\alpha = 0$ verschwindet, als eine beliebig hohe Potenz von $\Delta\alpha$. Die Betrachtungen aus dem vorigen Paragraphen wiederholen sich. Die Differentiation unter dem Integralzeichen ergiebt also 0, während das richtige Resultat $\frac{1}{2}$ ist, wie aus der Differentiation der rechten Seite obiger Gleichung folgt.

Wenn das bestimmte Integral eine solche Funktion der oberen Grenze $x$ und des Parameters $\alpha$ ist, für welche der Satz von der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen besteht, so ist jedenfalls die Differentiation unter dem Integralzeichen gestattet.*) Denn wenn für die Funktion:

$$F(x, \alpha) = \int_a^x f(x, \alpha)\, dx$$

die Gleichung gilt:

$$\frac{\partial^2 F(x, \alpha)}{\partial x\, \partial \alpha} = \frac{\partial^2 F(x, \alpha)}{\partial \alpha\, \partial x},$$

so ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} \int_a^x f(x, \alpha)\, dx = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha},$$

und durch Integration ergiebt sich:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^x f(x, \alpha)\, dx = \int_a^x \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Daraus geht hervor, dafs man überall da, wo die Differentiation unter dem Integralzeichen unstatthaft ist, gleichzeitig das Beispiel einer Funktion hat, bei der die Reihenfolge der Differentiationen nicht vertauscht werden darf. Um dies in dem vorstehenden Beispiel zu bestätigen, bemerke man, dafs

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial x} = \lim_{\Delta\alpha = 0} \lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x + \Delta x, \alpha + \Delta\alpha) - F(x + \Delta x, \alpha) - F(x, \alpha + \Delta\alpha) + F(x, \alpha)}{\Delta x\, \Delta\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial \alpha} = \lim_{\Delta x = 0} \lim_{\Delta\alpha = 0} \frac{F(x + \Delta x, \alpha + \Delta\alpha) - F(x + \Delta x, \alpha) - F(x, \alpha + \Delta\alpha) + F(x, \alpha)}{\Delta x\, \Delta\alpha}.$$

Die Funktion, von der die zweiten Differentialquotienten gebildet werden sollen, ist $\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$; wir berücksichtigen nur $\alpha e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$ und bilden den Quotienten für die Stelle $x = 0$, $\alpha = 0$, und zwar nur für positive $\Delta\alpha$. Der Differenzenquotient, in welchem $\Delta\alpha$ und $\Delta x$ nacheinander in verschiedener Reihenfolge zu 0 konvergieren sollen, ist

$$\frac{\Delta\alpha e^{-\frac{\Delta x^2}{\Delta\alpha}} - \Delta\alpha}{\Delta\alpha\, \Delta x} = \frac{e^{-\frac{\Delta x^2}{\Delta\alpha}} - 1}{\Delta x}.$$

Setzt man zuerst $\Delta\alpha = 0$, so ergiebt sich $-\frac{1}{\Delta x}$, welches mit verschwindendem $\Delta x$ *unendlich* wird. Läfst man dagegen zuerst $\Delta x$ zu 0 konvergieren, so giebt die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$\frac{-\frac{\Delta x^2}{\Delta\alpha} + \frac{\Delta x^4}{2\Delta\alpha^2} - \text{etc.}}{\Delta x}$$

als Resultat 0.

*) Harnack, Lehrbuch, S. 283.

In dem Harnack'schen Lehrbuch ist (S. 282) folgendes Beispiel gegeben, bei welchem der Differenzenquotient ein etwas anderes Verhalten zeigt. Es sei:

$$\int_0^x f(x, \alpha)\,dx = x \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}\right),$$

so ist

$$f(x, \alpha) = \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}\right) - \frac{4\alpha x}{x^2 + \alpha^2} \cos\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}\right).$$

$f(0, \alpha)$ soll 0 sein. Der Differenzenquotient ist für $\alpha = 0$:

$$\frac{\sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\Delta\alpha}{x}\right)}{\Delta\alpha} - \frac{4x}{x^2 + \Delta\alpha^2} \cos\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\Delta\alpha}{x}\right),$$

der Differentialquotient also 0. Sucht man die Maxima und Minima des Differenzenquotienten, so findet sich ein Minimum zwischen $x = 0$ und $x = \Delta\alpha \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{8}$, ein Maximum zwischen $x = \Delta\alpha$ und $x = \Delta\alpha \operatorname{cotg} \frac{\pi}{8}$. Das erstere wächst negativ, das zweite positiv mit abnehmendem $\Delta\alpha$ über alle Grenzen, was hier nicht weiter ausgeführt werden möge. Die Differentiation unter dem Integralzeichen giebt 0, während

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(x \sin\left(4 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x}\right)\right)_{\alpha=0} = 4$$

ist. —

Wenn $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}$ bei jedem Werte von $x$ eine stetige Funktion von $\alpha$ ist, so ist nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\partial f(x, \alpha + \Theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha},$$

wo $\Theta$ ein unbekannter echter Bruch ist. Läſst sich nun bei dem gegebenen Werte von $\alpha$ ein Intervall von $\alpha$ bis $\alpha + h$ angeben, so daſs im Gebiete von $\alpha$ bis $\alpha + h$ und von $x = a$ bis $x = b$ $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}$ eine im allgemeinen stetige Funktion*) von $x$ und $\alpha$ ist, so konvergiert auch nach einem bekannten Satz von den stetigen Funktionen

$$\frac{\partial f(x, \alpha + \Theta\Delta\alpha)}{\partial\alpha} \quad \text{gegen} \quad \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}$$

im allgemeinen gleichmäſsig und die Differentiation unter dem Integralzeichen ist sicherlich gestattet. —

Ist eine Integrationsgrenze unendlich, so ist von vornherein natürlich die Integrierbarkeit des Differentialquotienten bis $\infty$ zur Gültigkeit des Satzes erforderlich. Hierauf wird man, um den Satz S. 9 anwenden zu können, zu untersuchen haben, ob das Integral des Differenzenquotienten:

$$\int_u^\infty \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx$$

für $\lim u = \infty$ *gleichmäſsig* zu 0 konvergiert. —

### § 4. Über die Integration nach einem Parameter.

Die Frage, ob ein Integral nach einem Parameter integriert wird, dadurch, daſs man den Integrandus in Bezug auf denselben integriert, ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Vertauschbarkeit der Integrationen bei einem zweifachen Integral. Es ist also zu untersuchen, unter welchen Bedingungen bei einer stets endlichen Funktion $f(x, y)$ der Satz gilt

---

*) D. h. stetig mit Ausnahme allenfalls einer Reihe von Kurven, deren Anfangselemente eine diskrete Punktmenge bilden.

$$\int_a^\beta dy \int_a^b dx f(x,y) = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y)\,?$$

Bekanntlich ist ein bestimmtes Integral in folgender Weise definiert:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha\, F(\alpha) = \lim \sum_1^n{}_p \Delta\alpha_p\, F(\alpha_p),$$

wo $\sum_1^n{}_p \Delta\alpha_p = \alpha_1 - \alpha_0$ und $F(\alpha_p)$ *irgend einen* Funktionswert in dem Intervall $\Delta\alpha_p$ vorstellt, falls man diesen Grenzwert so bildet, daſs man die Gröſse jedes Intervalls unter jede beliebig kleine Gröſse sinken und $n$ dabei über jede Zahl hinaus wachsen läſst. — Hiernach ist

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b dx f(x,y) = \lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p \int_a^b dx f(x, y_p),$$

wo $\sum_1^n{}_p \Delta y_p = \beta - \alpha$ ist und $y_p$ irgend einen Wert im Intervall $\Delta y_p$ bedeutet.

Nach derselben Definition ist:

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y) = \int_a^b dx \lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p).$$

Die an der Spitze dieses Paragraphen stehende Gleichung wird also gelten, wenn

$$\lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p \int_a^b f(x, y_p)\, dx = \int_a^b dx \lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p),$$

wobei der limes in obigem Sinne zu nehmen ist. Da $n$ eine endliche Zahl bedeutet, welche man beliebig wachsen lassen will, so darf man links die Reihenfolge der Summation und Integration vertauschen und erhält folgende Bedingungsgleichung:

$$\lim \int_a^b dx \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p) = \int_a^b dx \lim \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$$

oder

$$\lim \int_a^b dx \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p) = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y),$$

welche nun in der Form des obigen Satzes erscheint. Dieser ergiebt also folgendes:

„Die Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter ist durch Integration unter dem Integralzeichen gestattet, oder, was dasselbe ist, die Reihenfolge der Integrationen bei einem zweifachen Integral darf vertauscht werden, wenn auſser der Endlichkeit der zu integrierenden Funktion und der Integrationsgrenzen noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $\sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$ konvergiert im allgemeinen gleichmäſsig gegen den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_\alpha^\beta dy f(x,y),$$

d. h. es existiert für sämtliche $x$ im Intervall $a$ bis $b$ dieselbe obere Grenze für die $\Delta y_p$, so dafs bis auf eine diskrete Mannigfaltigkeit von Punkten

$$\operatorname{abs}\left(\sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p) - \int_\alpha^\beta dy f(x, y)\right) < \delta,$$

wenn nur jedes $\Delta y_p <$ jene obere Grenze ist;

2) dieses Integral $\int_\alpha^\beta dy\, f(x, y)$ ist als Funktion von $x$ zwischen den Grenzen $a$ und $b$ integrierbar;

3) $\sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$ ist für hinlänglich grofse $n$ ebenfalls nach $x$ zwischen den Grenzen $a$ und $b$ integrierbar.“ —

Dafs sowohl $\sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$ als $\int_\alpha^\beta dy f(x, y)$ zwischen endlichen Grenzen liegen, folgt aus der Endlichkeit der Funktion $f(x, y)$. —

Hierzu einige Bemerkungen. Die Bedingungen 2) und 3) besagen durchaus nicht, dafs

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \qquad \text{oder} \qquad \sum_1^n{}_p \Delta y_p f(x, y_p)$$

durchweg, d. h. für alle Werte von $x$ bestimmte Werte seien. Zur Integrierbarkeit einer durchweg endlichen Funktion ist nur erforderlich, dafs die Stellen, an denen die Schwankungen derselben gröfser sind, als eine beliebig kleine Zahl, eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden. Eine integrierbare Funktion kann also unter Umständen in unendlich vielen Punkten, welche nicht eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, unstetig oder unbestimmt zwischen endlichen Grenzen sein oder sie kann an unendlich vielen Stellen in noch so kleinem Intervalle unendlich viele Maxima und Minima mit Schwankungen von endlicher Gröfse besitzen, — solche Punkte können *pantachisch* (Du Bois-Reymond) oder *überall dicht* (Cantor) über das ganze Intervall verteilt sein*), — *wenn nur die Punkte, in welchen die Schwankungen* $> \sigma$ *sind, die Intervallsumme Null haben.* Diese Bemerkungen werden wir zu berücksichtigen haben bei einem interessanten, von Du Bois-Reymond aufgestellten Beispiel.**)

Die zu integrierende Funktion $f(x, y)$ sei in dem Rechteck mit den Diagonalecken $x = 0$, $y = 0$ und $x = 1$, $y = 1$ allenthalben Null aufser für dyadische Werte von $x$ und $y$. Für $x = \frac{2m+1}{2^p}$, $y = \frac{2n+1}{2^p}$ sei $f(x, y) = \frac{1}{2^p}$.

Verfolgt man also die Funktion auf einer der Abscissenaxe parallelen Geraden, so ist sie daselbst entweder allenthalben Null, wenn nämlich die zugehörige Ordinate kein dyadischer Wert, d. h. also kein Wert von der Form $\frac{2n+1}{2^p}$ ist, oder sie hat, wenn $y = \frac{2n+1}{2^p}$, auf einer solchen Linie in jedem beliebig kleinen Intervall Unstetigkeiten; sie ist für $x = \frac{1}{2}$ selbst $= \frac{1}{2}$, für $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, für $x = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8}$ u. s. w., — für alle nicht dyadische Werte dagegen Null. Die Unstetigkeitssprünge werden also für dyadische Werte höherer Ordnung immer kleiner und sinken unter jede noch so kleine Zahl, dergestalt, dafs die Stellen, an denen die Sprünge

---

*) D. h. in jedem beliebig kleinen Intervalle liegen Punkte der Mannigfaltigkeit, oder die Punkte haben zur Intervallsumme die ganze Strecke.

**) Journal für Mathematik Bd. 94, S. 278.

eine beliebig kleine Zahl $\sigma$ übertreffen, von endlicher Anzahl sind. Ebenso verhält sich die Funktion auf jeder anderen der Abscissenaxe parallelen Linie, sofern sie daselbst überhaupt Unstetigkeiten besitzt. — Verfolgen wir dagegen die Funktion auf einer der Ordinatenaxe parallelen Geraden, so ist sie daselbst entweder überall $= 0$, wenn nämlich das zugehörige $x$ keine dyadische Zahl ist, oder sie besitzt für alle dyadischen Werte von $y$ Unstetigkeitssprünge, welche jetzt aber im Gegensatze zu dem Verhalten auf einer der Abscissenaxe parallelen Linie von derselben Gröfse sind, nämlich $\frac{1}{2^p}$, wenn das zugehörige $x$ von der Form $\frac{2m+1}{2^p}$ ist. —

Nach dem Gesagten ist die Funktion auf jeder der $x$-Axe parallelen Geraden integrierbar, — denn die Anzahl der Stellen, an welchen die Schwankungen gröfser sind, als eine beliebig kleine Zahl $\sigma$, ist endlich. Dagegen ist die Funktion auf keiner Geraden integrierbar, welche der $y$-Axe parallel ist und zu einem $x = \frac{2m+1}{2^p}$ gehört. Auf einer solchen Geraden sind die Unstetigkeitssprünge sämtlich von derselben Gröfse, nämlich $\frac{1}{2^p}$; die Produktensumme, wie das Integral:

$$\sum_1^n {}_p\, f(x, y_p)\Delta y_p \qquad \text{und} \qquad \int_\alpha^\beta dy\, f(x, y)$$

sind unbestimmt zwischen den Grenzen $\frac{1}{2^p}$ und 0. Auf allen übrigen der Ordinatenaxe parallelen Geraden ist Produktensumme wie Integral Null. In diesem Falle also wird man sagen können, dafs

$$\sum_1^n {}_p\, f(x, y_p)\Delta y_p \qquad \text{gegen} \qquad \int_\alpha^\beta dy\, f(x, y)$$

im allgemeinen gleichmäfsig konvergiert; denn die Stellen, an welchen der Wert dieser Differenz $>$ als ein beliebig kleines $\sigma$ bleibt, sind von endlicher Anzahl. Gleichzeitig sieht man, dafs Summe wie Integral als Funktionen von $x$ nach $x$ integrierbar sind. Die Reihenfolge der Integrationen ist ohne Einflufs auf den Wert des zweifachen Integrals. Bei

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy\, f(x, y)$$

ist der Wert des inneren Integrals für Werte von $x$ der Form $\frac{2m+1}{2^p}$ unbestimmt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2^p}$, im übrigen 0; das zweimalige Integral selbst ist daher 0. Bei

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b dx\, f(x, y)$$

ist das innere Integral 0, daher auch das zweifache.

## § 5. **Über das eigentliche Doppelintegral.**

Es besteht bekanntlich ein begrifflicher Unterschied zwischen einem eigentlichen Doppelintegral und einem zweimaligen Integral, bei welchem letzteren die Reihenfolge der Integrationen angegeben sein mufs; es ist also zu unterscheiden zwischen dem Doppelintegral

$$\int\int dx\, dy\, f(x, y),$$

bei welchem das Gebiet, auf welches es sich beziehen soll, angegeben sein mufs, und den successiven Integralen

$$\int dx \int dy\, f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \int dy \int dx\, f(x, y),$$

bei welchen die Angabe der Grenzen, zwischen denen die einzelnen Integrale genommen werden sollen, erforderlich ist. Von gröfster Wichtigkeit ist die Frage, ob und unter welchen Umständen das Doppelintegral durch ein zweimaliges ersetzt werden darf; beruht doch auf dieser Gleichsetzung im wesentlichen die Auswertung der Doppelintegrale. — Während früher bei endlichen Funktionen und endlichen Gebieten aus der Existenz des Doppelintegrals die Ersetzbarkeit desselben durch eines der wiederholten Integrale geschlossen zu werden pflegte, — auf diese Weise wurde das Doppelintegral eben berechnet — sind in neuerer Zeit Bedenken dagegen geltend gemacht worden. Ich erlaube mir, auf diesen so wichtigen Punkt einzugehen und will die Kontroverse zwischen Herrn O. Stolz und A. Harnack*) hier besprechen. Hierzu bedarf es aber der Wiedergabe derjenigen Definition des Doppelintegrals, welche unbestritten zu Recht besteht.

Damit eine überall endliche Funktion $f(x, y)$ ein eigentliches Doppelintegral in einem durch eine gegebene Randkurve umgrenzten endlichen Gebiete zulasse, sind folgende Bedingungen, notwendig und hinreichend, zu erfüllen:

Es bedeuten $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau^n$ ein System geradlinig begrenzter Flächenstücke, welche das Gebiet gänzlich überdecken, dergestalt, dafs eine Anzahl derselben durch die Randkurve zerschnitten ist. $f(x_p, y_p)$ sei ein beliebiger innerhalb oder an der Grenze eines solchen Polygons, aber jedenfalls innerhalb des Gebietes gelegener Funktionswert. Diese Polygone denkt man sich nun fortwährend verkleinert, so dafs der gröfste Durchmesser eines jeden schliefslich unter eine beliebig kleine Zahl sinkt. Wenn dann

$$\sum_1^n{}_p\, f(x_p, y_p)\tau_p$$

bei unbegrenzter Abnahme sämtlicher Polygone in der angegebenen Weise einem endlichen Grenzwert $J$ zustrebt, dergestalt, dafs zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gehört, welche bewirkt, dafs

$$\text{abs}\left(\sum_1^n{}_p\, f(x_p, y_p)\tau_p - J\right) < \varepsilon,$$

falls nur sämtliche gröfsten Durchmesser der Polygone $< \delta$ sind, so sagt man, die Funktion $f(x, y)$ lasse ein Doppelintegral über das in Rede stehende Gebiet zu. Hierbei kommen die durch die Randkurve zerschnittenen Polygone nur soweit in Anrechnung, als sie innerhalb des vorgeschriebenen Gebietes liegen. Soll nun die Summe

$$\sum_1^n{}_p\, f(x_p, y_p)\tau_p,$$

wie auch die Einteilung gewählt sei, und wo auch die Funktionswerte in den einzelnen Polygonen gelegen sein mögen, eine und nur eine Grenze haben, so mufs

$$\lim \sum_1^n{}_p\, (G^p - g_p)\tau_p = 0$$

sein, wobei $G_p$ und $g_p$ die obere und untere Grenze der Funktionswerte in den Polygonen bedeuten. Diese Bedingung, welche der alten von Riemann zuerst für das einfache Integral aufgestellten Bedingung nachgebildet ist, ist notwendig und hinreichend.

Folgt nun aus der Existenz eines in der angegebenen Weise definierten Doppelintegrals (bei einer in geeigneter Weise beschränkten Randkurve) *ohne weiteres* die Zurückführbarkeit desselben auf ein wiederholtes Integral, oder sind hierzu noch weitere Bedingungen zu erfüllen? Harnack vertritt den ersten Standpunkt (in seinem Lehrbuche der Differential- und Integralrechnung, seiner Bearbeitung

---

*) Leipziger Math. Ann. Bd. 26, S. 93 und S. 566.

des Serret'schen Werkes über denselben Gegenstand, sowie in einer Notiz im 26. Bd. der mathematischen Annalen), während Herr Stolz an der angeführten Stelle folgenden Satz ausspricht und beweist:

„Wenn die endliche Funktion $f(x, y)$ in dem Gebiete $F$ (das eine konvexe Fläche mit den äufsersten Abscissen $a < a'$ und den äufsersten Ordinaten $b < b'$ sein möge) ein eigentliches Doppelintegral zuläfst *und* wenn $f(x, y)$ als Funktion von $x$ auf jeder zur $X$-Axe parallelen Sehne von $F$ (mit Ausnahme allenfalls der einem System von Werten $Y$, das im Intervalle $(b, b')$ den Inhalt 0 hat, entsprechenden Sehnen) integrierbar ist, so ist die auf solche Weise erhaltene Funktion von $y$

$$\Phi(y) = \int_{x'}^{x''} f(x, y) dx,$$

wo $x', x''$ die Abscissen der zur Ordinate $y$ gehörigen Punkte des Randes von $F$ bedeuten, im Intervalle $(b, b')$ integrierbar und zwar hat man

$$\int_{b}^{b'} \Phi(y) dy = J.\text{“}$$

In dem Harnack'schen Lehrbuch findet sich (p. 313) die Behauptung, dafs, wenn die Funktion $f(x, y)$ ein Doppelintegral zuläfst, dieselbe *im allgemeinen* (d. h. mit Ausnahme allenfalls eines diskreten Wertsystems von $y$) hinsichtlich $x$ integrierbar sein müsse. Hieraus wird dann geschlossen, dafs

$$\int\int dx\, dy\, f(x, y) = \int dx \int dy\, f(x, y) = \int dy \int dx\, f(x, y).$$

Herr Stolz widerlegt diese Behauptung mit dem Hinweis auf jenes (S. 19 dieser Abhandlung) von Du Bois-Reymond gegebene Beispiel einer doppelt integrierbaren Funktion, welche trotzdem für beliebige dyadische, also nicht diskrete Werte von $x$ in Bezug auf $x$ nicht integrierbar ist.*) Diesem Einwand begegnet alsbald Harnack mit der Richtigstellung seiner früheren nur inkorrekten Ausdrucksweise, welche durch folgende zu ersetzen sei:

*Aus der Existenz des Doppelintegrals folgt, dafs nur für eine diskrete Mannigfaltigkeit von Werten der einen Variabeln das nach der andern Variabeln genommene Integral derart unbestimmt wird, dafs die Differenz seiner Unbestimmtheitsgrenzen oberhalb irgend einer bestimmten, beliebig kleinen Gröfse liegt.*

Mit dieser Behauptung ist das Du Bois-Reymond'sche Beispiel in völliger Übereinstimmung, da zwar für alle dyadischen Werte von $x$ das Integral

$$\int dy\, f(x, y)$$

unbestimmt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2^p}$ ist, da aber andrerseits nur für eine endliche Zahl von Werten die Differenz dieser Unbestimmtheitsgrenzen gröfser ist, als eine beliebig kleine Zahl.

Nach dieser Richtigstellung ist der Satz ohne weitere Voraussetzung beweisbar, und ich will den Beweis desselben mit dem Beweise dieses Hilfssatzes mitteilen.

Das Resultat dieser Kontroverse ist also ein sehr erwünschtes; der Satz von der Zurückführung des Doppelintegrals auf wiederholte Integrale ist in seiner alten Einfachheit erhalten geblieben und lautet:

*Jedes Doppelintegral ist bei endlichen Werten der Funktion und bei hinreichend einfacher Gestalt der Randkurve auf zwei successive Integrationen zurückführbar.*

Das gegebene Gebiet sei ein Rechteck, gebildet von den Seiten $x = a$, $x = b$, $y = \alpha$, $y = \beta$. Der Beweis wird für ein anderes, konvexes, Gebiet umständlicher, bleibt aber im wesentlichen derselbe. Aus der Existenz des Doppelintegrals folgen die beiden Gleichungen:

---

*) $x$ und $y$ haben in diesem Beispiel die Rolle von $y$ und $x$ in der Darstellung des Textes.

$$J = \lim \Sigma\Sigma f(x, y) \Delta x \Delta y$$

und

$$0 = \lim \Sigma\Sigma (G - g) \Delta x \Delta y,$$

wobei wir uns das Rechteck durch Parallele zur Abscissen- und Ordinatenaxe in ein Netz von kleinen Rechtecken geteilt denken. $f(x, y)$ sei ein beliebiger Funktionswert, $G$ und $g$ seien obere und untere Grenze sämtlicher Werte in einem solchen Rechtecke. Es wird für das ganze Gebiet ein Wert $\Delta$, welchen die $\Delta x$, und ein Wert $\mathsf{E}$, welchen die $\Delta y$ nicht überschreiten dürfen, ausreichen, damit die Doppelsumme von ihrem Grenzwerte einen beliebig kleinen Unterschied habe. — Es gilt die Relation*)

$$\text{(a)} \qquad \Sigma g \Delta y \leqq \Sigma f(x, y) \Delta y \leqq \Sigma G \Delta y$$

auf jeder der $y$-Axe parallelen Geraden, wenn jetzt $G$ und $g$ obere und untere Grenze in einem Intervall $\Delta y$ für dasselbe $x$, also Funktionen von $x$ sind. Diese Relation bleibt bestehen, wenn wir im mittleren Gliede die Gröfsen $\Delta y$ beliebig verkleinern, dagegen in den äufseren Gliedern die $\Delta y$ und dementsprechend auch $G$ und $g$ beibehalten. Der Grenzwert, welchem sich $\Sigma f(x, y) \Delta y$ bei beliebiger Verkleinerung von $\Delta y$ nähert, mag derselbe ein bestimmter sein oder zwischen endlichen Grenzen schwanken, werde mit

$$\int_\alpha^\beta f(x, y) dy$$

bezeichnet; er liegt jedenfalls zwischen den einmal fixierten Grenzen. Es ist also

$$\text{(b)} \qquad \Sigma g \Delta y \leqq \int_\alpha^\beta f(x, y) dy \leqq \Sigma G \Delta y.$$

Die beiden Grenzen können durch Verkleinerung von $\Delta y$ einander bis zu einem gewissen Abstande genähert werden, den wir mit $U_x$ bezeichnen, um seine Abhängigkeit von $x$ zu markieren. Ist $U_x = 0$, so existiert das Integral für diesen Wert von $x$, andernfalls ist es unbestimmt und $U_x$ die Differenz seiner Unbestimmtheitsgrenzen. Es läfst sich nun zeigen**), *dafs die Stellen, an welchen die Differenzen der Unbestimmtheitsgrenzen des Integrals*

$$\int_\alpha^\beta dy f(x, y)$$

*gröfser sind, als eine beliebig kleine Zahl, eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden.*

Wäre dieses nicht der Fall, so könnte $\Sigma U_x \Delta x$ nicht beliebig klein gemacht werden. Dann könnte aber auch

$$\Sigma \Delta x \Sigma (G - g) \Delta y$$

nicht beliebig klein werden; denn es ist

$$\Sigma (G - g) \Delta y \geqq U_x.$$

Auch folgt aus der Voraussetzung, dafs

$$\Sigma \Delta x \Sigma \Delta y (G - g)$$

durch Wahl einer oberen Grenze für sämtliche $\Delta x$ und $\Delta y$ beliebig klein gemacht werden kann, dafs

$$\Sigma \Delta y (G - g)$$

nur für eine diskrete Mannigfaltigkeit von Punkten $x$ gröfser bleiben kann, als eine beliebig kleine Zahl, dafs also, weil aus (a) und (b) folgt:

---

*) Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung II., S. 282.

**) Math. Ann. Bd. 26, S. 568.

$$\text{(c)} \qquad \operatorname{abs}\left[\Sigma \Delta y f(x,y) - \int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right] \leqq \Sigma \Delta y\,(G-g),$$

die Produktensumme im allgemeinen gleichmäfsig nach dem bestimmten Integral konvergiert. —

Aus (c) folgt nun weiter

$$\operatorname{abs}\left[\Sigma \Delta x \Sigma f(x,y)\Delta y - \Sigma \Delta x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy\right] \leqq \Sigma \Delta x \Sigma \Delta y (G-g).$$

Die rechte Seite kann aber der Voraussetzung nach kleiner gemacht werden, als eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon$; also kann auch für hinlänglich kleine $\Delta x$ und $\Delta y$

$$\operatorname{abs}\left[\Sigma \Delta x \Sigma f(x,y)\Delta y - \Sigma \Delta x \int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right] < \varepsilon$$

gemacht werden. Läfst man hierin $\Delta x$ und $\Delta y$ gegen 0 konvergieren, so ergiebt sich:

$$\lim \Sigma \Delta x \Sigma f(x,y)\Delta y = \lim \Sigma \Delta x \int_\alpha^\beta f(x,y)dy,$$

oder

$$J = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy.$$

Während also, die Existenz des Doppelintegrals vorausgesetzt, das Integral nach $y$ für unendlich viele Punkte unbestimmt sein konnte, ist dann

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)dy$$

bestimmt und gleich dem Werte des Doppelintegrals. Natürlich durften die Integrationen auch in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt werden. —

### § 6. Unendliche Grenzen beim zweifachen Integral.

Es werde angenommen, dafs in dem von den Geraden $x=a$, $x=X$, $y=\alpha$, $y=\beta$ gebildeten Rechteck die Funktion $f(x,y)$ endlich sei und dafs man setzen dürfe:

$$\int_a^X dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y) = \int_\alpha^\beta dy \int_a^X dx f(x,y);$$

auch möge diese Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integrationen bestehen bleiben, wie grofs auch die obere Grenze $X > a$ genommen werde. Hiermit ist gleichzeitig gesagt, dafs $\int_a^X dx f(x,y)$ nach $y$ und $\int_\alpha^\beta dy f(x,y)$ nach $x$ zwischen den angegebenen Grenzen integrierbar sei. Es handelt sich um die Aufstellung von Bedingungen, unter welchen man auch berechtigt ist, zu setzen:

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta dy f(x,y) = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty dx f(x,y).$$

Jedenfalls darf man auf Grund der bereits gemachten Voraussetzung die Gleichung bilden:

$$\lim_{X=+\infty} \int_{\alpha}^{X} dx \int_{\alpha}^{\beta} dy f(x, y) = \lim_{X=+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\alpha}^{X} dx f(x, y),$$

wenn sich überhaupt ein bestimmter Grenzwert ergiebt. Damit man den limes rechter Hand dadurch bilden könne, daſs man den limes der Funktion unter dem Integralzeichen nimmt, ist zuvörderst die Voraussetzung notwendig, daſs

$$\int_{a}^{\infty} dx f(x, y)$$

eine nach $y$ zwischen den Grenzen $\alpha$ und $\beta$ integrierbare Funktion sei, womit nicht gesagt ist, daſs das genannte Integral für *jeden* Wert von $y$ in dem Intervall $\alpha \leqq y \leqq \beta$ als bestimmter Wert existieren müsse (vgl. die beiden vorhergehenden Paragraphen). Ferner aber werden wir, um unsern Satz anwenden zu können, annehmen müssen, daſs

$$\int_{a}^{X} dx f(x, y)$$

für beliebig groſse $X$ endlich sei und für das Intervall $\alpha \leqq y \leqq \beta$ im allgemeinen gleichmäſsig gegen

$$\int_{a}^{\infty} dx f(x, y)$$

konvergiere. Hat man aber diese Annahmen gemacht, so ist dadurch die Existenz des limes rechter Hand, — also auch des limes linker Hand — festgestellt und zugleich bewiesen, daſs man denselben durch den entsprechenden Grenzübergang unter dem Integralzeichen bilden kann. Wir können dann also beiderseits $X = \infty$ setzen und erhalten den Satz*):

*Wenn in dem von den Geraden $x = a$, $x = X$ (wo $X$ irgend ein endlicher Wert $> a$), $y = \alpha$, $y = \beta$ gebildeten Rechteck die Funktion $f(x, y)$ endlich ist und die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen gestattet, wenn ferner das Integral $\int_{a}^{X} dx f(x, y)$ für beliebig groſse $X$ durchweg endlich bleibt und im allgemeinen gleichmäſsig für $\alpha \leqq y \leqq \beta$ gegen das Integral $\int_{a}^{\infty} dx f(x, y)$ konvergiert, wenn endlich dies letztere Integral als Funktion von $y$ in dem genannten Intervall integrierbar ist, so existiert auch $\int_{a}^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} dy f(x, y)$ und es ist:*

$$\int_{a}^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} dy f(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{\infty} dx f(x, y).$$

Man wird sich nun naturgemäſs die weitere Frage vorlegen, unter welchen Bedingungen es gestattet ist, auch die obere Grenze $\beta$ beiderseits durch $\infty$ zu ersetzen. Hierfür ist der Satz (S. 9 dieser Abhandlung) maſsgebend, welcher Bedingungen angiebt, unter welchen man mit dem Zeichen limes unter das Integralzeichen gehen kann, wenn eine Grenze $\infty$ ist. Ersetzt man die obere Grenze $\beta$ durch $Y$, so möge zunächst vorausgesetzt werden, daſs für jedes beliebige $Y > \alpha$ die Gleichung gelte

*) Vgl. Stolz, Math. Ann. Bd. 26, S. 89.

$$\text{(a)} \qquad \int_a^\infty dx \int_\alpha^Y dy f(x, y) = \int_\alpha^Y dy \int_a^\infty dx f(x, y),$$

wofür in dem obigen Satze, in welchem $\beta$ durch $Y$ zu ersetzen ist, hinreichende Bedingungen angegeben sind. Es handelt sich nun weiter darum, Bedingungen anzugeben, unter welchen

$$\lim_{Y=+\infty} \int_a^\infty dx \int_\alpha^Y dy f(x, y) = \int_a^\infty dx \lim_{Y=+\infty} \int_\alpha^Y dy f(x, y).$$

Unter denselben ist dann auch mit Zuhilfenahme der Gleichung (a)

$$\int_\alpha^\infty dy \int_a^\infty dx f(x, y) = \int_a^\infty dx \int_\alpha^\infty dy f(x, y).$$

Jener Satz setzt zuerst voraus, dafs für jedes $X > a$ die Vertauschung von lim und $\int$ vollzogen werden darf, d. h. dafs für jedes $X > a$:

$$\lim_{Y=+\infty} \int_a^X dx \int_\alpha^Y dy f(x, y) = \int_a^X dx \lim_{Y=+\infty} \int_\alpha^Y dy f(x, y) = \int_a^X dx \int_\alpha^\infty dy f(x, y).$$

Mit (a) ist bereits angenommen (vgl. den vorigen Satz), dafs für jedes $X > a$ und $Y > \alpha$ die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden darf, dafs also

$$\int_a^X dx \int_\alpha^Y dy f(x, y) = \int_\alpha^Y dy \int_a^X dx f(x, y);$$

somit kann die letzte Gleichung auch so geschrieben werden:

$$\text{(b)} \qquad \int_\alpha^\infty dy \int_a^X dx f(x, y) = \int_a^X dx \int_\alpha^\infty dy f(x, y).$$

Diese Gleichung korrespondiert mit der Gleichung (a), und es gelten für dieselbe also auch die in dem obigen Satz aufgestellten Bedingungen, in denen nur $x$ und $y$ ihre Rolle vertauschen.

Weiter setzt jener Satz voraus, dafs

$$\text{(c)} \qquad \int_u^\infty dx \int_\alpha^Y dy f(x, y)$$

bei $\lim u = +\infty$ gleichmäfsig für alle $Y$, welche gröfser sind, als eine bestimmte Zahl, gegen Null konvergiert. Endlich ist noch vorauszusetzen, dafs

$$\text{(d)} \qquad \int_a^\infty dx \int_\alpha^\infty dy f(x, y)$$

existiert.

Sammelt man die nach einander gemachten Voraussetzungen (a), (b), (c), (d), so ergiebt sich der Satz:

*Wenn in dem von den Geraden $x = a$, $x = X$, $y = \alpha$, $y = Y$ gebildeten Rechteck, wo $X > a$, $Y > \alpha$ irgend welche endliche Werte seien, die Funktion $f(x, y)$ endlich ist und die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen gestattet, wenn das Integral $\int_a^X dx f(x, y)$ für beliebig grofse $X$ durchweg endlich bleibt und im allgemeinen gleichmäfsig für $\alpha \leq y \leq Y$ gegen das Integral $\int_a^\infty dx f(x, y)$ konvergiert,* *wenn ebenso das Integral* $\int_a^Y dy f(x,y)$ *für beliebig grofse Y durchweg endlich bleibt und im allgemeinen gleichmäfsig für* $a \leqq x \leqq X$ *gegen das Integral* $\int_a^\infty dy f(x,y)$ *konvergiert, wenn* $\int_a^\infty dx f(x,y)$ *als Funktion von y in dem Intervall von* $a$ *bis Y integrierbar ist, desgleichen* $\int_a^\infty dy f(x,y)$ *als Funktion von x in dem Intervall a bis X, wenn ferner* $\int_u^\infty dx \int_a^Y f(x,y)$ *bei* $\lim u = +\infty$ *gleichmäfsig für alle Y, die gröfser sind, als eine bestimmte endliche Zahl, gegen* 0 *konvergiert und* $\int_a^\infty dx \int_a^\infty dy f(x,y)$ *existiert, so existiert auch* $\int_a^\infty dy \int_a^\infty dx f(x,y)$ *und es ist:*

$$\int_a^\infty dx \int_a^\infty dy f(x,y) = \int_a^\infty dy \int_a^\infty dx f(x,y). \tag{e}$$

Dies sind freilich recht viele Bedingungen, welche zu erfüllen sind, indessen es ist zu bemerken, dafs gewisse derselben sich eigentlich von selbst verstehen, da andernfalls die Behauptung keinen Sinn hätte. So ist es vor jeder Untersuchung über die Giltigkeit der Gleichung (e) klar, dafs man anzunehmen hat, dafs die inneren Integrale bis zu beliebig grofsen, aber endlichen, oberen Grenzen integrierbar seien, dies mufs der Fall sein, damit der in der Integration bis $\infty$ liegende Grenzübergang beiderseits an einem bestimmten Ausdruck vollzogen werde. Ebenso wird man das Bestehen der Gleichung

$$\int_a^X dx \int_a^Y dy f(x,y) = \int_a^Y dy \int_a^X dx f(x,y)$$

für jedes endliche $X > a$ und $Y > a$ von vornherein annehmen. Die Bedingungen, welche dann noch übrig bleiben, sind zum Teil nicht symmetrisch in Bezug auf die beiden Integrationsvariabeln. Da der Satz nicht umkehrbar ist, werden diese Bedingungen für die eine Variable erfüllt sein können, ohne dafs sie für die andere erfüllt sind. —

Macht man die entsprechenden Annahmen für eine Grenze $-\infty$, so erhält man durch Zusammenfassung und durch Addition der Integrale Sätze über die Giltigkeit der Gleichungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_a^{+\infty} dy f(x,y) = \int_a^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x,y),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x,y).$$

In der Theorie der Fourier'schen Integralformel handelt es sich um folgende Gleichung*):

$$\int_0^q dq \int_a^\infty dx f(x) \cos q(x - x_1) = \lim_{X=+\infty} \int_0^q dq \int_a^X dx f(x) \cos q(x - x_1).$$

---

*) Vgl. C. Neumann: Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen (Leipzig 1881), pag. 54—70; ferner Serret-Harnack, Lehrbuch II, pag. 375.

Für die Giltigkeit derselben lassen sich gewisse hinreichende Bedingungen angeben. In dem von Harnack seiner Bearbeitung des Serret'schen Lehrbuchs hinzugefügten Abriſs finden sich folgende drei:

*Erstens:* Wenn $f(x)$ bei beliebig wachsenden Werten von $x$ schlieſslich keine Oscillationen mehr macht, sondern von einem bestimmten Werte für $x$ an entweder beständig wachsend oder beständig abnehmend für $x = \infty$ *nach Null* konvergiert und dabei integrierbar ist;

*Zweitens:* Wenn $f(x)$ zwar für $x = \infty$ unendlich viele Maxima und Minima hat, dabei aber absolut integrierbar ist;

*Drittens:* Wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, die für $x = \infty$ nach Null konvergiert und deren Ableitung absolut integrierbar ist. —

Ohne hierauf einzugehen, knüpfe ich nur hieran die Bemerkung, daſs der Stolz'sche Satz (Math. Ann. Bd. 26, S. 89 und diese Abhdlg. S. 24) in den beiden ersten Fällen direkt anwendbar ist, weil das Integral

$$\int_a^X f(x) \cos q(x - x_1) dx$$

für alle $q$ zwischen 0 und einem bestimmten Werte gleichmäſsig gegen

$$\int_a^\infty f(x) \cos q(x - x_1) dx$$

konvergiert. Anders im dritten Falle, in welchem die gleichmäſsige Konvergenz nur bis in beliebige Nähe von $q = 0$ stattfindet, so daſs es einer direkten Untersuchung bedarf, wegen deren ich auf das Serret-Harnack'sche Werk verweise. —