# ZUR THEORIE

# DER TRIGONOMETRISCHEN REIHE

VON

PROF. E. HOSSENFELDER.

---

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE ZUM XXVII. JAHRESBERICHT
DES KÖNIGL. GYMNASIUMS ZU STRASBURG (WESTPR.) ÜBER DAS SCHULJAHR 1899/1900.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1900.

1900. Progr. Nr. 40.

Bei der Beschäftigung mit der Theorie der trigonometrischen Reihe und verwandten Gegenständen hatte ich bisweilen Gelegenheit zu bemerken, wie durch eine etwas modifizierte Darstellung in Ausdruck und Beweis gewisse überlieferte Theoreme an Anschaulichkeit und überzeugender Kraft gewinnen; ja es ergab sich bei einer zusammenhängenden Reihe von Sätzen über das Wünschenswerte hinaus die *Notwendigkeit*, zu Gunsten der Strenge und der damit zusammenhängenden Forderung, die Voraussetzungen möglichst einzuschränken, Änderungen eintreten zu lassen. Während ich in § 1 der vorliegenden Arbeit den ersten Satz aus Art. 8 der Riemann'schen Abhandlung über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe in einer andern Weise, als du Bois-Reymond, verallgemeinere, wodurch auch, abgesehen von der veränderten Darstellung, das Resultat ein etwas anderes, nämlich der in Rede stehende Limes in einen engeren Spielraum eingeschlossen wird, dienen die §§ 2 und 3 dazu, um die grundlegenden Sätze, die sich um den bekannten von Schwarz bewiesenen Hilfssatz vom zweiten Differentialquotienten gruppieren, nicht nur anschaulich darzustellen, sondern auch von gewissen wesentlichen Mängeln zu befreien, die sich, wie ich zeigen werde, bei du Bois-Reymond und Harnack vorfinden, wobei ich Gewicht darauf lege, daſs ich gerade den direkten vom ersten und dann auch vom zweiten der eben genannten Autoren eingeschlagenen Weg weiter verfolgt habe. — In § 4 gebe ich über das Verhältnis der Methode des arithmetischen Mittels des Herrn C. Neumann zur Fourier'schen Reihe eine ältere Aufzeichnung wieder (aus dem Jahre 1890), in welcher unter Vermeidung jeder *weiteren* Voraussetzung über die in Rede stehende darzustellende stetige Funktion gezeigt wird, wie die Fourier'sche Reihe ganz direkt aus der Methode des arithmetischen Mittels folgt. Einige hier sich anschlieſsende Bemerkungen haben zum Gegenstande die Beziehungen der Fourier'schen Reihe zum Poisson'schen Integral. —

## § 1. Die Erweiterung des ersten Satzes aus Art. 8 der Riemann'schen Abhandlung in andrer Form.

Die zu Grunde liegende trigonometrische Reihe sei

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_h (a_h \cos hx + b_h \sin hx) = \sum_0^\infty{}_h A_h.$$

Wir bilden mit Riemann die Reihe, welche aus dieser durch zweimalige Integration der einzelnen Glieder entsteht, und setzen

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{a_h \cos hx + b_h \sin hx}{h^2} = \frac{A_0 x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{A_h}{h^2}.$$

Dieselbe ist für alle Werte von $x$ gleichmäſsig konvergent, falls die $A_h$ unter einer endlichen Zahl liegen, und stellt also eine *stetige* Funktion von $x$ dar. Wegen der gleichmäſsigen Konvergenz ist die Integration gliedweise gestattet. Nachdem festgestellt ist, daſs man sich bei dieser letzten Reihe auf völlig sicherem Boden befindet, handelt es sich darum, den Rückweg zu jener ersten zu finden, welche eigentlich zur Diskussion steht.

Zu dem Ende wird der zweite mittlere Differenzenquotient gebildet, also

$$\frac{F(x+2\varepsilon) - 2F(x) + F(x-2\varepsilon)}{4\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}.$$

Man erhält:

$$\frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2} = A_0 + \sum_1^\infty A_h \left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2.$$

Der Riemann'sche Satz lautet:

*Für jeden Wert $x$, für welchen die ursprüngliche Reihe konvergiert, konvergiert auch der* $\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\, \frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}$, *und zwar nach demselben Werte.*

Ich will nun die von P. du Bois-Reymond*) aufgeworfene und beantwortete Frage, was aus dem Riemann'schen Satze wird, wenn die Reihe $f(x)$ unbestimmt zwischen den Grenzen $U(x)$ und $O(x)$ angenommen wird, in etwas anderer Weise behandeln und beantworten.

Wenn es sich darum handelt,

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\, \frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2} = \mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \sum_0^\infty A_h \left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2$$

zu bestimmen, so ist die Reihe bei von 0 verschiedenem positiven $\varepsilon$ ins Unendliche fortzusetzen und *dann erst* der Limes für $\varepsilon = 0$ zu bilden. Andrerseits steht es frei, da man eine unendliche Reihe *auf beliebige Weise* in Partialsummen zerlegen kann, für jedes $\varepsilon$ eine andere Zerlegung vorzunehmen, d. h. also die Grenzen der *Teil*summen bei dem Übergang zur Grenze $\varepsilon = 0$ als von $\varepsilon$ abhängig anzunehmen.

Die Reihe $a_0 + \sum_0^\infty a_h \cos hx + b_h \sin hx$ schwanke für den in Rede stehenden Wert von $x$ zwischen $O(x)$ und $U(x)$, sie sei also enthalten in der Form $\frac{O+U}{2} + j\,\frac{O-U}{2}$ (das $x$ lasse ich jetzt aus). Was läfst sich von dem $\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\, \frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}$ aussagen? Während in dem Riemann'schen Falle an Stelle der Reste die Partialsummen ohne Änderung des Resultats hätten eingeführt werden können, ist in dem allgemeineren Falle, wie er hier vorliegt, die *Einführung der Summen vorzuziehen* und zwar aus mehreren Gründen. Zunächst kann man hier sogleich die Gliederzahl der in Rede stehenden Reihe unendlich setzen, was bei du Bois-Reymond wegen der Unbestimmtheit der Reste der *unendlichen* Reihe nicht angeht (vgl. seine Abhandlung S. 18 oben); ferner schwanken die Summen schliefslich zwischen $O$ und $U$ (Differenz $O - U$), die Reste zwischen $O - U$ und $-(O - U)$, also in doppelt so weiten Grenzen. Den Vorteil aber, welchen bei Multiplikation mit unbekannten Zahlen die Rechnung mit Null hat, bezw. mit Unbestimmtheitsgrenzen, welche gleichweit über und unter Null liegen, kann man sich bei Summen auch verschaffen, wenn man statt der obigen Reihen diejenigen untersucht, welche durch Subtraktion der Grösse $\frac{O+U}{2}$ vom Anfangsgliede $a_0$ oder $A_0$ entstehen. Nach Voraussetzung schwankt die Reihe

$$\left(a_0 - \frac{O+U}{2}\right) + \sum_1^\infty a_h \cos hx + b_h \sin hx = A_0' + \sum_1^\infty A_h$$

zwischen $\frac{O-U}{2}$ und $-\frac{O-U}{2}$; es wird gefragt, was hieraus für den

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\, \frac{\Delta^2 F'}{4\varepsilon^2} = \mathrm{Lim}_{\varepsilon=0} \left[A_0' + \sum_1^\infty A_h \left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2\right]$$

folgt, wo

$$A_0' = A_0 - \frac{O+U}{2} = a_0 - \frac{O+U}{2}$$

gesetzt ist?

Ich führe die Teilsummen der ursprünglichen Reihe ein und setze:

---

*) Abhandlungen der bayerischen Akademie d. W. II. Cl. XII. Bd. I. Abt.

$$S_0 = A_0'$$
$$S_n = A_0' + \sum_1^n A_h,$$
also
$$A_h = S_h - S_{h-1},$$
so dass
$$A_0' + \sum_1^N A_h \left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 = S_0 + (S_1 - S_0)\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 + \cdots + (S_N - S_{N-1})\left(\frac{\sin N\varepsilon}{N\varepsilon}\right)^2$$
$$= S_0\left(1 - \left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\right) + \cdots + S_{N-1}\left(\left(\frac{\sin(N-1)\varepsilon}{(N-1)\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin N\varepsilon}{N\varepsilon}\right)^2\right) + S_N\left(\frac{\sin N\varepsilon}{N\varepsilon}\right)^2.$$
Wir lassen jetzt $N$ ins Unendliche wachsen: die Reihe links konvergiert jedenfalls für jedes $\varepsilon > 0$, wie sowohl aus ihrer Entstehung aus der durchweg konvergenten Reihe für $F(x)$, als auch aus dem Faktor $h^2$ im Nenner jedes Gliedes und der Endlichkeit sämtlicher $A_h$ folgt. Demzufolge darf man auch rechts $N = \infty$ setzen und erhält, da bei der vorausgesetzten Endlichkeit sämtlicher $S_N$ $\lim_{N=\infty} S_N\left(\frac{\sin N\varepsilon}{N\varepsilon}\right)^2 = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$, folgende Gleichung:
$$\frac{\Delta^2 F'}{4\varepsilon^2} = A_0' + \sum_1^\infty A_h\left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 = \sum_0^\infty S_h\left(\left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin(h+1)\varepsilon}{(h+1)\varepsilon}\right)^2\right),$$
wo $F'$ aus $F$ entsteht, wenn man $A_0$ durch $A_0'$ ersetzt. In dieser Reihe soll $\varepsilon$ gegen 0 konvergieren. Ich mache die Riemann'sche Einteilung, welche die Thatsache benutzt, dafs $\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2$ von 0 an bis $\pi$ monoton ist. Die Teilung richtet sich nach der Gröfse von $\varepsilon$ (s. oben); die erste Summe gehe von 0 bis $s$, wo $s\varepsilon < \pi \leqq (s+1)\varepsilon$, die zweite von $s+1$ bis $\infty$. Die erste Summe erhalte eine Unterabteilung von 0 bis $m-1$ und von $m$ bis $s$, *wobei $m$ zur Verfügung bleibt.*

Hierdurch wird:
$$A_0' + \sum_1^\infty A_h\left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 = \sum_0^{m-1} S_h\left(\left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin(h+1)\varepsilon}{(h+1)\varepsilon}\right)^2\right) + \sum_m^s + \sum_{s+1}^\infty.$$
In den beiden ersten Summen rechter Hand ist die Funktion in der Klammer positiv, also der Mittelwertsatz anwendbar. Bezeichnen wir mit du Bois-Reymond durch $[S_h]_0^{m-1}$ einen Mittelwert der Gröfsen $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$, entsprechend durch $[S_h]_m^s$ einen solchen der Gröfsen $S_m, \ldots S_s$ u. s. w., so entsteht:
$$A_0' + \sum_1^\infty A_h\left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 = [S_h]_0^{m-1}\left(1 - \left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2\right) + [S_h]_m^s\left(\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin(s+1)\varepsilon}{(s+1)\varepsilon}\right)^2\right)$$
$$+ \sum_{s+1}^\infty S_h\left(\left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin(h+1)\varepsilon}{(h+1)\varepsilon}\right)^2\right).$$
Die letzte Summe zerlegen wir mit Riemann in folgender Weise:
$$\left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin(h+1)\varepsilon}{(h+1)\varepsilon}\right)^2 = \left[\left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin h\varepsilon}{(h+1)\varepsilon}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{\sin h\varepsilon}{(h+1)\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin(h+1)\varepsilon}{(h+1)\varepsilon}\right)^2\right]$$
und wenden die Formel an:
$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y).$$
Hierdurch erhalten wir:
$$A_0' + \sum_1^\infty A_h\left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 = [S_h]_0^{m-1}\left(1 - \left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2\right) + [S_h]_m^s\left(\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin(s+1)\varepsilon}{(s+1)\varepsilon}\right)^2\right)$$
$$+ \sum_{s+1}^\infty S_h \sin^2 h\varepsilon\left(\frac{1}{h^2\varepsilon^2} - \frac{1}{(h+1)^2\varepsilon^2}\right) - \sum_{s+1}^\infty S_h\frac{1}{(h+1)^2\varepsilon^2}\sin(2h+1)\varepsilon\sin\varepsilon.$$
Diese Gleichung gilt *für jedes* $\varepsilon > 0$.

Beim dritten und vierten Gliede kann nunmehr auch der Mittelwertsatz angewandt werden, so dafs unsere Reihe wird

$$= [S_h]_0^{m-1}\left(1-\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2\right)+[S_h]_m^s\left(\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2-\left(\frac{\sin (s+1)\varepsilon}{(s+1)\varepsilon}\right)^2\right)+[S_h \sin^2 h\varepsilon]_{s+1}^{\infty}\cdot\frac{1}{(s+1)^2\varepsilon^2}$$
$$-\left[S_h \sin(2h+1)\varepsilon\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right]_{s+1}^{\infty}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{1}{(s+3)^2}+\cdots\right),$$

wo die Ausdrücke in den eckigen Klammern immer Mittelwerte sind. Es ist bekanntlich

$$\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{1}{(s+3)^2}+\cdots<\frac{1}{s+1}<\frac{1}{s},\quad \text{also} = \Theta_s\cdot\frac{1}{s},$$

wo $\Theta_s < 1$; somit erhalten wir:

$$\frac{\Delta^2 F'}{4\varepsilon^2}=[S_h]_0^{m-1}\left(1-\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2\right)+[S_h]_m^s\left(\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2-\left(\frac{\sin (s+1)\varepsilon}{(s+1)\varepsilon}\right)^2\right)$$
$$+[S_h \sin^2 h\varepsilon]_{s+1}^{\infty}\cdot\frac{1}{(s+1)^2\varepsilon^2}-\left[S_h \sin(2h+1)\varepsilon\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right]_{s+1}^{\infty}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\Theta_s\cdot\frac{1}{s}.$$

Jetzt möge $\varepsilon$ zur 0, also gleichzeitig $s$ gegen $\infty$ konvergieren. Links entsteht der zweite mittlere Differentialquotient der Funktion $F'$. Die erste Klammer wird 0 für $\varepsilon = 0$. In der zweiten Klammer wird das erste Glied 1, das zweite Glied wird, da sich der Festsetzung gemäfs $(s+1)\varepsilon$ bei kleiner werdendem $\varepsilon$ der Gröfse $\pi$ immer mehr nähert, 0. Demgemäfs wird

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\frac{\Delta^2 F'}{4\varepsilon^2}=[S_h]_m^{\infty}+[S_h\sin^2 h\varepsilon]_{\infty}\frac{1}{\pi^2}-\left[S_h\sin(2h+1)\varepsilon\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right]_{\infty}\Theta\cdot\frac{1}{\pi},$$

wo $\Theta$ unbestimmt zwischen 0 und 1. Links kommt $m$ nicht vor; man darf daher rechts das zur Verfügung stehende $m$ beliebig und unendlich grofs werden lassen. Wenn man dann berücksichtigt, dass die $S_h$ für unendlich grofse $h$ der Voraussetzung nach zwischen $\frac{O-U}{2}$ und $-\frac{O-U}{2}$ schwanken, so erhält man:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\frac{\Delta^2 F'}{4\varepsilon^2}=j\,\frac{O-U}{2}+j'\,\frac{O-U}{2}\cdot\frac{1}{\pi^2}+j''\,\frac{O-U}{2}\cdot\frac{1}{\pi},$$

wo $j$, $j'$, $j''$ Faktoren objektiver Unbestimmtheit zwischen $+1$ und $-1$ bedeuten. Demzufolge ist, wie aus der Beziehung zwischen $F'$ und $F$ folgt:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}=\frac{O+U}{2}+j\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right)\frac{O-U}{2}.$$

Wir haben also den Satz:

*Wenn die Reihe*

$$f(x)=\sum_0^{\infty} a_h\cos hx + b_h \sin hx$$

*zwischen den endlichen Unbestimmtheitsgrenzen $O(x)$ und $U(x)$ schwankt, so sind die Unbestimmtheitsgrenzen von*

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon=0}\frac{F(x+\varepsilon)-2F(x)+F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

*wo*

$$F(x)=a_0\frac{x^2}{2}-\sum_1^{\infty}\frac{a_h\cos hx+b_h\sin hx}{h^2},$$

*enthalten zwischen*

$$\frac{O(x)+U(x)}{2}+\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right)\frac{O(x)-U(x)}{2}$$

*und*

$$\frac{O(x)+U(x)}{2}-\left(1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right)\frac{O(x)-U(x)}{2}.$$

Über die Koeffizienten $A_h$ ist hierbei nur dasjenige vorausgesetzt, was aus der Oscillation der Reihe zwischen endlichen Grenzen folgt, nämlich dafs sie sämtlich numerisch unter einer endlichen Zahl liegen. Wenn die ursprüngliche Reihe, wie bei Riemann, konvergiert, so werden die Koeffizienten eo ipso als unendlich klein vorausgesetzt. Werden solche Voraussetzungen für ganze Intervalle gemacht, so übertragen sich nach dem Satze des Herrn G. Cantor die Angaben von den $A_h$, welche von $x$ abhängen, auf die $a_h$ und $b_h$, wie hier nur ganz im allgemeinen erinnert werden mag. Die in dem eben ausgesprochenen Satze angegebenen Grenzen sind natürlich durchaus nicht die du Bois-Reymond'schen Unbestimmtheitsgrenzen des in Rede stehenden Limes, doch sind diese letzteren sicherlich in dem angegebenen Spielraum enthalten. Die gröfsere Unbestimmtheit rührt daher, dafs wir notgedrungen statt der Grenzen der rechten Seite die Grenzen *der einzelnen Glieder* der rechten Seite schätzten, wodurch sich die Unbestimmtheiten, welche sich unter Umständen in der Wirklichkeit wegheben, in der Rechnung summieren.

Es soll jetzt auch der Fall in Betracht gezogen werden, *dafs die Summe der ursprünglichen Reihe unendlich wird,* nehmen wir an $+\infty$. Führt man wiederum die Partialsummen ein, jetzt aber (ohne jene Gröfse zu subtrahieren)

$$S_0 = A_0 = a_0$$

$$S_n = A_0 + \sum_1^n A_h = \sum_0^n a_h \cos hx + b_h \sin hx,$$

so darf man jetzt jenes Glied $S_N\left(\frac{\sin N\varepsilon}{N\varepsilon}\right)^2$ nicht für $N=\infty$ verschwinden lassen, sondern wird setzen dürfen, wobei die vorhergehenden Betrachtungen zum Teil in Kraft bleiben,

$$\frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2} = [S_h]_0^{m-1}\left(1-\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2\right) + [S_h]_m^s\left(\left(\frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin(s+1)\varepsilon}{(s+1)\varepsilon}\right)^2\right) + S_s\left(\frac{\sin s\varepsilon}{s\varepsilon}\right)^2$$

$$+ [A_h]_s^\infty \sum_{s+1}^\infty \left(\frac{\sin h\varepsilon}{h\varepsilon}\right)^2 = I + II + III + IV.$$

Läfst man wieder $\varepsilon$ gegen 0, $s$ gegen $\infty$ konvergieren, so jedoch, dafs $s\varepsilon < \pi \leq (s+1)\varepsilon$ bleibt, so wird $I$ gegen 0 konvergieren, $II$ gegen $[S_h]_m^\infty$, $III$ gegen $\frac{1}{\pi^2}\lim_{\substack{s=\infty \\ s\varepsilon=\pi}}(S_s \sin^2 s\varepsilon)$, $IV$ gegen $\frac{1}{\pi^2}\lim_{s=\infty}\{s[A_h]_s^\infty \cdot \Theta_s\}$, wo $\Theta_s < 1$.

In $II$ darf man wieder die Gröfse $m$, welche links nicht vorkommt, unendlich grofs werden lassen, so dafs $II = +\infty$ wird nach unsrer jetzigen Voraussetzung; durch $III$, welches positiv ist, wird hieran nichts geändert, so dafs, wenn $IV$ endlich bleibt, sicherlich also, wenn $\lim_{s=\infty}(sa_s)$ und $\lim_{s=\infty}(sb_s)$ endlich bleiben, $\lim_{\varepsilon=0}\frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2} = +\infty$ wird. Das Entsprechende gilt, wenn die Summe der Reihe $\sum_0^\infty A_h = -\infty$ wird.

*Unter der Voraussetzung, dafs* $\lim(na_n)$ *und* $\lim(nb_n)$ *für unendliche* $n$ *endlich bleiben, wird* $\lim_{\varepsilon=0}\frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}$ *gleichzeitig mit der Summe der ursprünglichen trigonometrischen Reihe* $+\infty$ *bezw.* $-\infty$.

*Wenn* $na_n$ *und* $nb_n$ *mit wachsendem* $n$ *unendlich klein werden,* so bleibt übrig:

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2} = S_\infty + \frac{1}{\pi^2}\lim_{\substack{s=\infty \\ s\varepsilon=\pi}}(S_s \sin^2 s\varepsilon)$$

ohne jede Voraussetzung für $S_\infty$. Da das zweite Glied für endlich bleibende $S$ verschwindet, so folgt: $\lim_{\varepsilon=0}\frac{\Delta^2 F}{4\varepsilon^2}$ *schwankt, wenn* $\lim(na_n) = \lim(nb_n) = 0$, *mit der ursprünglichen Reihensumme zwischen genau denselben Unbestimmtheitsgrenzen* $O$ *und* $U$, *falls beide endlich sind.* —

Ist $O = +\infty$ und $U$ endlich, so bleibt für dem Limes $+\infty$ als obere Unbestimmtheitsgrenze bestehen, während wegen des zweiten Gliedes die untere unter Umständen hinaufgerückt werden könnte. Das Entsprechende gilt, wenn $U = -\infty$ und $O$ endlich ist. —

## § 2. Gleichmäfsige Konvergenz. Funktionen vom Integral Null.

Für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ sei eine aufserdem noch von dem Parameter $q$ abhängende Funktion $f(x, q)$ gegeben und es handle sich um den

$$\lim_{q=+\infty} f(x, q).$$

Wenn für einen bestimmten Wert von $x$

$$|f(x, q') - f(x, q'')| < \sigma,$$

falls nur $q'$ und $q''$ gröfser als eine hinlänglich grofse Zahl $Q$ sind, so existiert für dieses $x$ ein Grenzwert. Findet entsprechendes für jedes $x$ statt, so erhält man eine Grenzfunktion

$$\varphi(x) = \lim_{q=+\infty} f(x, q).$$

Wir können hierbei etwa an die Partialsummen einer unendlichen Reihe denken, deren Glieder Funktionen von $x$ sind: der Parameter $q$ ist dann die Gliederzahl $n$, welche ganzzahlig $= +\infty$ wird. Statt des Limes für $q = +\infty$ kann ein andrer eintreten, etwa der Limes für $\varepsilon = +0$ bei dem ersten Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon},$$

welcher in den ersten vorderen Differentialquotienten, bezw. bei dem zweiten mittleren Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+\varepsilon) - 2f(x) + f(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

welcher in den zweiten mittleren Differentialquotienten übergeht, wenn ein solcher existiert. $q = +\infty$ repräsentiere also *irgend einen* Limes. — Die oben genannte Zahl $Q$ hängt im allgemeinen von $x$ ab. Wenn aber der besondere Fall eintritt, dafs *für sämtliche $x$ gleichzeitig*

$$|f(x, q') - f(x, q'')| < \sigma$$

für alle $q'$ und $q''$, welche gröfser als *ein* bestimmtes hinlänglich grofses $Q$ sind, so sagt man bekanntlich, $f(x, q)$ *konvergiere gleichmäfsig* für das Intervall. — $f(x, q)$ sei im folgenden für jedes in Betracht kommende $q$ eine *stetige* Funktion von $x$.

Es kann die Frage aufgeworfen werden, aus welchen möglichst geringen Voraussetzungen bereits die gleichmäfsige Konvergenz der Funktion $f(x, q)$ für das ganze Intervall folgt. Hierauf antwortet folgender Satz:

*Wenn $f(x, q)$ für jedes in Betracht kommende $q$ eine stetige Funktion von $x$ in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ ist, und wenn dieselbe für $q = +\infty$ gleichmäfsig konvergiert für ein System von Punkten, welche überalldicht über das ganze Intervall verteilt sind, so konvergiert sie für alle $a \leqq x \leqq b$ gleichmäfsig.*

*Beweis:* Das überall dichte Punktsystem, für welches n. V. die gleichmäfsige Konvergenz stattfindet, sei das System $\xi$; die übrigen Punkte des Intervalls seien die Punkte $\eta$. Nach der Voraussetzung giebt es zu einem beliebig kleinen $\sigma > 0$ eine Zahl $Q$, so dafs

$$\text{(a)} \qquad |f(\xi, q') - f(\xi, q'')| < \sigma,$$

falls nur $q'$ und $q'' > Q$, *und zwar für sämtliche $\xi$ gleichzeitig.*

Ist $\eta_0$ ein Punkt des Systems $\eta$, so ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit

$$\text{(b)} \qquad \left| f(x, q') - f(x, q'') - \big(f(\eta_0, q') - f(\eta_0, q'')\big) \right| < \sigma$$

für alle $x$ innerhalb eines hinlänglich kleinen den Punkt $\eta_0$ umgebenden Intervalls $\delta$, (wo $\delta$ von $\eta_0$, $q'$, $q''$ abhängen wird), gleichgiltig, ob diese $x$ nun zu den $\xi$ oder zu den $\eta$ gehören. Da es n. V. *in jedem beliebig kleinen Intervall* Punkte $\xi$ giebt, so gilt (b) für gewisse $\xi$ mit (a) gleichzeitig, und es ergiebt sich durch Subtraktion

$$|f(\eta_0, q') - f(\eta_0, q'')| < 2\sigma$$

für $q'$, $q'' > Q$. Da hierin der Punkt $\eta_0$ irgend ein Punkt des Systems $\eta$ ist, so ist der ausgesprochene

Satz bewiesen, denn man hat, um die Zahl $Q$ zu bestimmen, welche für sämtliche $x$ ausreicht, damit für $q', q'' > Q$

$$|f(x, q') - f(x, q'')| < \sigma$$

wird, nur dasjenige $Q$ zu nehmen, welches für die Punkte $\xi$ die Annäherung

$$|f(\xi, q') - f(\xi, q'')| < \frac{\sigma}{2}$$

leistet.

Speziell gilt folgender Satz:

*Wenn die Glieder einer Reihe $u_0(x), u_1(x), \ldots$ stetige Funktionen im Intervall $a \leqq x \leqq b$ sind, und wenn diese Reihe für ein überall dichtes Punktsystem gleichmäfsig konvergiert, so konvergiert sie für das ganze Intervall gleichmäfsig.*

An Stelle von (a) und (b) treten beim Beweise dieses Satzes

$$|u_{n+1}(\xi) + \cdots + u_{n+p}(\xi)| < \sigma, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

für alle $\xi$, wenn nur $n > \mu$, und

$$\left|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x) - \left(u_{n+1}(\eta_0) + \cdots + u_{n+p}(\eta_0)\right)\right| < \sigma$$

für alle $x$ innerhalb eines hinlänglich kleinen Intervalls um $\eta_0$. Da unter diesen $x$ unter allen Umständen auch $\xi$ vorkommen, so entsteht durch Vereinigung für alle $n > \mu$

$$|u_{n+1}(\eta_0) + \cdots + u_{n+p}(\eta_0)| < 2\sigma, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

wobei $\eta_0$ ein beliebiger unter den Punkten $\eta$ ist*). —

Dieser Satz lehrt, welche *Ausnahmen* von der gleichförmigen Konvergenz auf der ganzen Strecke vorkommen können und welche nicht. Es kann thatsächlich nicht vorkommen, dafs die Funktion $f(x, q)$ für sämtliche Punkte der Strecke mit Ausnahme der Punkte eines ausdehnungslosen (nach Harnack diskreten) Systems gleichmäfsig konvergiere; denn auf jeder beliebigen Teilstrecke befinden sich bekanntlich Punkte, die nicht zu dem ausgenommenen unausgedehnten System gehören.

*Wirkliche Ausnahmen von der gleichmäfsigen Konvergenz im ganzen Intervalle können nur in Strecken vorkommen:* so kann es geschehen, dafs die Funktion nach Ausschlufs einer beliebig kleinen den Endpunkt enthaltenden Strecke gleichmäfsig konvergiere (Potenzreihe), oder die gleichmäfsige Konvergenz kann statthaben nach Ausschlufs eines unausgedehnten Systems durch eine endliche Anzahl von Strecken mit beliebig kleiner Gesamtlänge $\varepsilon$. Wenn man in diesem Falle von einer *im allgemeinen* gleichmäfsigen Konvergenz auf der ganzen Strecke sprechen will, so läfst sich dagegen nichts sagen, weil die ausgeschlossenen Strecken eine beliebig kleine Gesamtlänge $\varepsilon$ repräsentieren (bei kleiner werdendem $\varepsilon$ wird obiges $Q$ bei gegebenem $\sigma$ immer gröfser). Bei weitergehenden Ausnahmen von im allgemeinen gleichmäfsiger Konvergenz zu sprechen dürfte sich nicht empfehlen. Hiervon wird noch weiter unten die Rede sein. —

Bekanntlich gilt folgender Satz**):

*Wenn in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ $f(x, q)$ für alle in Betracht kommenden $q$ eine stetige Funktion von $x$ ist, welche für $q = +\infty$ gleichmäfsig zum Grenzwert $\varphi(x)$ konvergiert, so ist $\varphi(x)$ in demselben eine stetige Funktion.*

Daraus geht hervor, dafs, wenn die Grenzfunktion unstetig ist, von einer gleichmäfsigen Konvergenz nicht mehr die Rede sein kann, solange $f(x, q)$ als stetig vorausgesetzt wird. In der Folge wird uns eine unstetige Funktion beschäftigen, welche Herr Pasch***) nach Harnacks Vorgange *im allgemeinen verschwindend* nennt. Während ich sonst die in der zitierten Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen für sehr treffend halte, möchte ich für die eben genannte Funktion die auch sonst angewandte Bezeichnung (Dini) „*Funktion vom Integral Null*“ für geeigneter halten. Diese Funktion ist nämlich so beschaffen, dafs das Integral derselben zwischen zwei beliebigen Punkten genommen verschwindet; sie erfüllt folgende Bedingung: Für jedes $\sigma > 0$ müssen die Stellen mit abs $y > \sigma$ eine

*) Ein ganz spezieller Fall dieses Satzes findet sich bei Stolz, Arithmetik I, S. 273.
**) Stolz, Arithm. I, S. 200.
***) Math. Ann. 30, S. 151.

unausgedehnte Menge bilden. Sie kann auch definiert werden als eine Funktion, welche Integration zuläfst und in überall dichten Punkten verschwindet. Hierbei ist, zunächst wenigstens, immer vorausgesetzt, dafs die Funktionswerte zwischen endlichen Grenzen sich befinden. — Ohne den Charakter einer solchen Funktion — als Funktion vom Integral Null — zu ändern, darf man bei ihr (nicht bei anderen integrierbaren Funktionen) beliebige Werte durch irgend welche absolut genommen kleinere ersetzen. Verbindet man diese Bemerkung mit der andern, dafs man die Funktion mit einer beliebig grofsen Konstante multiplizieren darf, so folgt daraus, dafs es frei steht, dieselbe mit einer durchweg endlichen, wenn auch an und für sich nicht integrierbaren Funktion zu multiplizieren. — Zu bemerken ist, dafs die *Sprünge einer integrierbaren Funktion* in den Punkten des betr. Intervalls der Definition nach eine Funktion vom Integral Null liefern. — Bei bestimmt gegebenem $\sigma$ kann man die Stellen mit abs $y > \sigma$ durch Intervalle mit beliebig kleiner Gesamtlänge ausschliefsen. Bei kleiner werdendem $\sigma$ kommen immer mehr auszuschliefsende Punkte neu hinzu. Trotzdem kann nach der Definition die Summe der ausschliefsenden Strecken, die ja bei jedem $\sigma$ beliebig klein gemacht werden kann, gleichzeitig immer mehr verkleinert werden, wobei aber die Anzahl dieser ausschliefsenden Strecken, jedesmal endlich, immer gröfser wird und die Stellen, an denen sie auftreten, immer enger aneinander rücken. Dies wurde hier etwas umständlich ausgeführt, weil es bei dem Beweise der folgenden Sätze wesentlich ist. —

Es ist nicht nötig, dafs die einer Integration zu unterwerfende Funktion allenthalben einen bestimmten Wert habe. Da die Begriffe „Schwankung", „Sprung" ihre Bedeutung beibehalten, wenn die Funktion in den einzelnen Punkten zwischen endlichen Grenzen unbestimmt ist, so ergiebt sich, dafs eine so gegebene Funktion (etwa die Summe einer unendlichen Reihe) sehr wohl dieselbe Integrierbarkeitsbedingung erfüllen kann; natürlich mufs an den Stetigkeitsstellen, die überall dicht vorhanden sind, je ein bestimmter Wert vorliegen. Ist $\varphi(x) + j\psi(x)$ eine solche Funktion, wo $j$ der zwischen $+1$ und $-1$ liegende Du Bois-Reymond'sche Unbestimmtheitsfaktor ist, so ist das stets positive $\psi(x)$ eine Funktion vom Integral Null. Die Funktionen

$$\varphi(x) + j\psi(x) = \frac{O(x) + U(x)}{2} + j\,\frac{O(x) - U(x)}{2}, \quad \varphi(x) + \psi(x) = O(x), \quad \varphi(x) - \psi(x) = U(x)$$

ergeben dasselbe Integral*). Umgekehrt wenn von den beiden Gröfsen $O(x)$ und $U(x)$ nur die eine integrierbar ist, oder wenn beide integrierbar sind und verschiedene Integrale liefern, dann ist die Funktion $\varphi(x) + j\psi(x)$ nicht integrierbar. Wenn aber bei einer stetigen Funktion die eine, etwa die vordere obere Derivierte (obere Unbestimmtheitsgrenze des vorderen Differenzenquotienten $\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$ für $\varepsilon = +0$) integrierbar ist, so ist auch die vordere untere Derivierte, (sowie auch jede hintere), integrierbar und liefert dasselbe Integral; — es ist gleichgiltig, ob man die obere oder die untere Unbestimmtheitsgrenze oder die zwischen beiden unbestimmte Funktion der Integration unterwirft. —

## § 3. Verallgemeinerung des Schwarz'schen Satzes vom zweiten mittleren Differentialquotienten. Entsprechendes vom ersten Differentialquotienten.

Die seit dem Erscheinen der Riemann'schen Abhandlung angewandte Analyse besteht darin, dafs man in

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{a_h \cos hx + b_h \sin hx}{h^2}$$

$F(x)$ durch

$$f(x) = a_0 + \sum_1^\infty a_h \cos hx + b_h \sin hx$$

auszudrücken sucht und alsdann durch Integration vorstehender Gleichung für $F(x)$ die Koeffizienten $a$ und $b$ bestimmt**). Zunächst sei $f(x)$ von $-\pi$ bis $+\pi$ stets konvergent und aufserdem eine

*) Du Bois-Reymond a. a. O. Art. 11.
**) Ebenda Art. 14.

*stetige* Funktion von $x$. Alsdann ist, gleichgiltig ob man den zweiten mittleren oder einen andern zweiten Differentialquotienten meint,

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta) = f(x)$$

für alle Werte $-\pi < x < +\pi$. Desgleichen ist nach dem Riemann'schen Satze in diesem Falle

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F}{\varepsilon^2} = f(x).$$

Setzt man jetzt

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta),$$

so folgt

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi(x+\varepsilon) - 2\Phi(x) + \Phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0$$

für $-\pi < x < +\pi$. Nach einem von Schwarz bewiesenen Hilfssatze*) folgt aus dieser Gleichung

$$\Phi(x) = c_0 + c_1 x \quad \text{für} \quad -\pi \leqq x \leqq +\pi,$$

so dafs man setzen darf

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta) + c_0 + c_1 x.$$

Hieraus ergiebt sich (Art. 15 der du B.-R.schen Abhdlg.) die Bestimmung der Koeffizienten in der Fourier'schen Form. —

Im allgemeinen Falle, dafs von $f(x)$ nur die *Integrierbarkeit* (zunächst im engeren Sinne bei durchgehender Endlichkeit) vorausgesetzt wird, was jedenfalls die Konvergenz der trigonometrischen Reihe in überall dichten Punkten verlangt, handelt es sich wieder um die Differenz

$$\Phi(x) = F(x) - F_1(x),$$

wo

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta f(\beta).$$

Würde

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \Phi}{\varepsilon^2}$$

Null sein, so würde man ebenso weiter schliefsen dürfen. Dies läfst sich indessen nicht direkt beweisen. Was man direkt beweisen kann (ebenda Art. 17) ist, dafs dieser Limes bei der jetzigen Voraussetzung *eine endliche Funktion vom Integral Null* giebt. Wenn dies feststeht, so ist zu zeigen, dafs folgender Satz gilt:

*Weifs man von einer für $a \leqq x \leqq b$ stetigen Funktion $\Phi(x)$, dafs ihr zweiter mittlerer Differentialquotient eine endliche Funktion $v(x)$ vom Integral Null ist, so ist für dasselbe Intervall*

$$\Phi(x) = c_0 + c_1 x,$$

*d. h. der betr. Differentialquotient ist thatsächlich allenthalben* $= 0$. —

Ist dies bewiesen, — und um einen einwandfreien Beweis dieses Satzes unter Beibehaltung des du Bois-Reymond'schen Grundgedankens handelt es sich hier, — so ergeben sich wiederum die Koeffizienten in der bekannten Form der bestimmten Integrale. Wie ich schon in der Einleitung bemerkte, scheint mir der Beweis dieses Satzes in Art. 20 der öfter genannten Abhandlung nicht

---

*) Crelles J. 72, S. 141. Er lautet: Ist von einer stetigen Funktion der zweite mittlere Differentialquotient in einem Intervall Null, so ist daselbst die Funktion linear.

zureichend, was ich weiter unten begründen werde. Im 24. Bande der Mathematischen Annalen hat Harnack in seiner Abhandlung über die Prinzipien der Integralrechnung diesen Satz zunächst für den zweiten *vorderen* Differentialquotienten — und den entsprechenden für den ersten Differentialquotienten — neu formuliert und unter Benutzung des du Bois-Reymond'schen Grundgedankens wiederum bewiesen. Indessen die Formulierung des Satzes scheint mir wegen der darin enthaltenen überflüssigen Voraussetzung nicht glücklich und auch beim Beweise scheint ein näheres Eingehen auf die Art der Annäherung des betreffenden Differenzenquotienten an die Grenzfunktion, hier die Funktion vom Integral Null, geboten. Da der in Rede stehende Satz beim ersten Differentialquotienten sein vollständiges Analogon hat, so werde ich von diesem ausgehen und dabei, zu Gunsten der Anschaulichkeit, etwas weit ausholen. —

Gegeben sei im Intervall $a \leqq x \leqq b$ eine endliche und stetige Funktion $f(x)$. Den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

denke ich mir als Funktion zweier Variabeln, sie heifse $\psi(x, \delta)$, dargestellt: senkrecht zur $x$-Richtung die positive und negative $\delta$-Richtung. Durch die Werte der Funktion $f(x)$ von $a$ bis $b$ sind die Werte des vorwärts gebildeten Differenzenquotienten lediglich für das rechtwinklig gleichschenklige Argumentendreieck $abc$, die Werte des rückwärts gebildeten für das kongruente Dreieck $abc_1$ gegeben; man denke sich dieselben senkrecht aufgetragen. Da nach der Definition

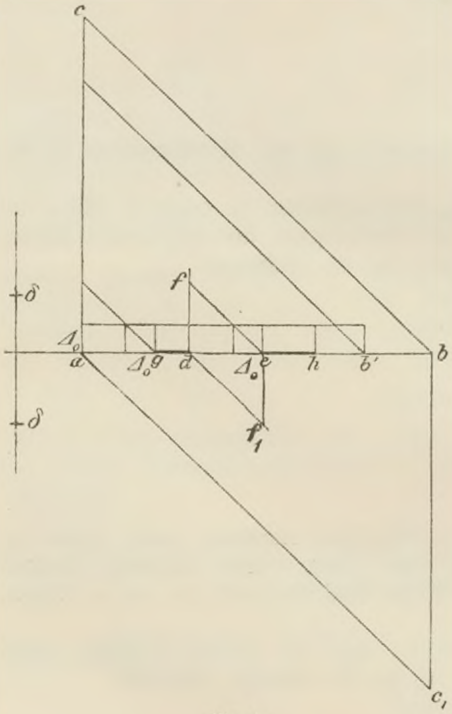


Fig. 1.

$$\psi(x, \delta) = \psi(x+\delta, -\delta),$$

so finden sich in Punkten, wie $c$ und $c_1$, $f$ und $f_1$ u. s. w. die gleichen Funktionswerte. Für $\delta = +0$ entsteht bei einem bestimmten Werte von $x$ von oben her ein Grenzwert, der vordere Differentialquotient, oder ein zwischen zwei Unbestimmtheitsgrenzen, der vorderen oberen und unteren Derivierten, schwankender Limes; entsprechendes findet von unten her statt. Diese Grenzwerte bezw. Paare von Unbestimmtheitsgrenzen denke man sich auf der doppelt vorgestellten Linie aufgetragen; bei $b$ ist $\psi(b, +0)$, bei $a$ $\psi(a, -0)$ nicht vorhanden. Folgendes*) ist zu beachten: Die untere bezw. obere Schranke der Differenzenquotienten ist zugleich untere bezw. obere Schranke jeder der vier Derivierten. Hieraus geht hervor: der Wert in $c$, wie in dem ganzen Dreieck $abc$ liegt zwischen der oberen und unteren Schranke der Werte längs $ab$, der Wert in $f$ zwischen den entsprechenden Schranken längs $de$, die ganze Schwankung in einem Dreieck, wie $def$, kann nicht gröfser sein, als längs $de$ u. s. w.

$\psi(x, \delta)$ ist nach Ausschlufs eines beliebig schmalen Streifens zu beiden Seiten der $x$-Axe eine stetige Funktion beider Variabeln. Wenn allenthalben eine Derivierte im gewöhnlichen Sinne vorhanden ist, in $a$ eine vordere, in $b$ eine hintere, und wenn diese von $a$ bis $b$ einschliefslich der Grenzen stetig ist, so *ist $\psi(x, \delta)$ eine im ganzen Gebiete stetige Funktion beider Variabeln*, was aus der jetzt vorausgesetzten Stetigkeit längs der $\delta$-Richtung einschliefslich $\delta = 0$ und der Stetigkeit auf der ganzen Strecke $ab$ durchaus nicht allein folgt. Man kann nämlich wegen der Stetigkeit des Differentialquotienten für $a \leqq x \leqq b$ für ein gegebenes beliebig kleines $\sigma$ eine Länge $\Delta$ bestimmen, so dafs dieselbe längs $ab$ verschoben nur Schwankungen der Funktion $f'(x) < \sigma$ enthält. Verschiebt man mit der Länge $\Delta$ die zugehörigen ein Parallelogramm bildenden rechtwinkligen Dreiecke (oben und unten), bezw. ein in dem Parallelo-

*) Genaueres vgl. etwa Pasch, Math. Ann. Bd. 30, S. 138.

gramm enthaltenes in Bezug auf die $x$-Axe symmetrisches Quadrat, so ist in jeder Lage die Schwankung im Quadrat, soweit es innerhalb des ursprünglichen Parallelogramms $acbc_1$ liegt, $< \sigma$, woraus die Behauptung folgt*). —

Ich beweise jetzt unter Benutzung des du Bois-Reymond'schen Grundgedankens der Integralbildung den Satz:

*Ist der vorwärts (rückwärts) gebildete erste Differentialquotient einer stetigen Funktion in einem Intervall eine endliche Funktion $v(x)$ vom Integral Null**), so ist in demselben Intervall die gegebene stetige Funktion konstant, der Differentialquotient also durchweg Null.*

*Beweis.* Der Satz wird zurückgeführt auf den Dirichlet'schen Satz, nach welchem eine stetige Funktion, deren vorwärts gebildeter Differentialquotient Null ist, in demselben Intervall konstant sein mufs. Ich werde die Richtigkeit folgender Gleichung beweisen:

$$(\dagger) \qquad \lim_{\delta=+0} \int_{a'}^{b'} \frac{f(\alpha+\delta)-f(\alpha)}{\delta}\, d\alpha = 0, \quad a \leqq a' < b' < b.$$

Das Integral wird also genommen längs der Parallelen zu $ab$ im Abstande $\delta$ (s. d. Fig. 1). N. V. lassen sich die Stellen auf $ab$, an denen abs $v(x) > \sigma$ ist, in eine bestimmte Anzahl Intervalle mit einer Gesammtlänge $< \varepsilon$ einschliefsen ($gd$, $eh$ repräsentieren von diesen Intervallen zwei auf einander folgende). Im zwischenliegenden Dreieck $def$ und ebenso in den übrigen sind nach der obigen Auseinandersetzung die absoluten Werte durchweg, wie auf $de$, $\leqq \sigma$. Wenn man nun noch die kleinste der ausschliefsenden Strecken $\Delta_0$ links an jede einzelne derselben ansetzt und mit den andern ausschliefst, so ist nicht nur im Abstande $\Delta_0$, sondern auch in jedem kleineren $\delta$

$$\left| \int_{a'}^{b'} \frac{f(\alpha+\delta)-f(\alpha)}{\delta}\, d\alpha \right| < \sigma(b-a) + 2\mathsf{K}\varepsilon,$$

wo $\mathsf{K}$ eine Zahl ist, welche die absoluten Werte von $v(x)$ nicht überschreiten. Ist also eine beliebig kleine Zahl $\sigma_0$ willkürlich gegeben, so bestimme ich ein $\sigma$ aus $\sigma(b-a) < \frac{\sigma_0}{2}$, schliefse die Stellen mit abs $v(x) > \sigma$ in Intervalle mit einer Gesamtlänge $\varepsilon$, wo $2\mathsf{K}\varepsilon < \frac{\sigma_0}{2}$. Ist hierbei $\Delta_0$ das kleinste der ausschliefsenden Intervalle, so wird an jedes derselben links ein Intervall $\Delta_0$ angesetzt und mit den übrigen ausgeschlossen. Alsdann ist für *alle positiven* $\delta < \Delta_0$

$$\left| \int_{a}^{b'} \frac{f(\alpha+\delta)-f(\alpha)}{\delta}\, d\alpha \right| < \sigma_0$$

und zwar gleichmäfsig für alle $a \leqq a' < b' < b$. Wird $\sigma_0$ kleiner genommen, so findet man ein kleineres $\sigma$, ein kleineres $\varepsilon$, wobei aber die Anzahl der ausschliefsenden Intervalle wächst und dieselben an immer mehr Stellen, die vorher nicht ausgeschlossen waren, auftreten. Man sieht, dafs von einer angenommenen gleichmäfsigen Konvergenz der Funktion $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ gegen die Grenzfunktion $v(x)$ nicht die Rede ist. Hiermit ist die obige Gleichung ($\dagger$) bewiesen, welche sich auch in folgender Form schreiben läfst:

$$\lim_{\delta=+0} \int_0^{\beta} \frac{f(x+\alpha+\delta)-f(x+\alpha)}{\delta}\, d\alpha = \frac{d^+}{dx} \int_0^{\beta} f(x+\alpha)\, d\alpha = 0, \quad a \leqq x < x+\beta < b.$$

Nach dem Satze von Dirichlet ist nunmehr das Integral $\int_0^{\beta} f(x+\alpha)\, d\alpha$, welches zugleich mit $f(x)$

---

*) Stolz, Diff.- u. Int.-Rchng. I, S. 55.

**) oder ist, was dasselbe sagen will, eine der vier Derivierten eine Funktion vom Integral Null.

eine stetige Funktion von $x$ ist, für $a \leqq x < b$ von $x$ unabhängig, also eine Funktion von $\beta$ allein. $f(x)$ ist also gleich dem Differentialquotienten dieser Funktion von $\beta$ für $\beta = 0$, also konstant und zwar wegen der Stetigkeit von $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$, w. z. b. w.

Alle diese Umstände sind nicht nötig, wenn es sich lediglich um einen möglichst kurzen Beweis des vorliegenden Satzes handelt*). Schliefst man wiederum die Stellen mit abs $\nu(x) > \sigma$ in Intervalle mit der Gesamtlänge $\varepsilon$, so wechseln sich ausschliefsende und andere Intervalle, in denen abs $\nu(x) \leqq \sigma$, ab; sie seien der Reihe nach $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ Errichtet man auf $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ die rechtwinkligen Dreiecke, so ist nach den obigen Auseinandersetzungen der Wert des Differenzenquotienten in der Spitze abwechselnd $\leqq \sigma$ und $< \mathsf{K}$. Es gilt also

$$\begin{array}{lcl} f(a+\Delta_1) - f(a) \leqq \sigma\Delta_1 & & f(a+\Delta_1) - f(a) < \mathsf{K}\Delta_1 \\ f(a+\Delta_1+\Delta_2) - f(a+\Delta_1) < \mathsf{K}\Delta_2 & \text{oder} & f(a+\Delta_1+\Delta_2) - f(a+\Delta_1) \leqq \sigma\Delta_2 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

je nachdem die Teilung mit einem gewöhnlichen Intervall oder einem ausschliefsenden beginnt. Jedenfalls ergiebt sich durch Addition

$$f(b') - f(a) < \sigma(b-a) + \varepsilon\mathsf{K},$$

d. h. $f(b') = f(a)$ für jedes $b' \leqq b$. —

Dieser Satz ergänzt den andern**): *Wenn von einer stetigen Funktion bekannt ist, dafs für alle $x$ zwischen $a$ und $b$ eine der vier Derivierten Null ist mit Ausnahme einer abzählbaren Menge von Punkten, in denen über das Verhalten jener Derivierten nichts feststeht, so ist die Funktion eine Konstante.*

Zu betonen ist aber, dafs bei unserm Satze die Endlichkeit der Derivierten eine wesentliche Voraussetzung ist, nicht so bei dem eben angeführten. Wenn z. B. der vordere Differentialquotient einer stetigen Funktion durchweg endlich und in allen Punkten mit Ausnahme eines ausdehnungslosen Systems Null ist, so ist die Funktion *durchweg* konstant. Läfst man die Voraussetzung der Endlichkeit fallen, so ist der Satz falsch, wie die von den Herren G. Cantor und Harnack***) aufgestellten nicht konstanten Funktionen zeigen, deren vorwärts gebildeter Differentialquotient allenthalben Null ist mit Ausnahme der Punkte eines ausdehnungslosen Systems, in welchen er unendlich ist. Hiergegen verstöfst auch der zweite eben angeführte Satz nicht, welcher die Endlichkeit nicht voraussetzt, weil in diesen Beispielen die Punkte des ausgenommenen (perfekten) Systems nicht abzählbar sind. — Die beiden Sätze zeigen, welche Abweichungen von einer stetigen Funktion eine Derivierte nicht haben darf; wäre z. B.

$$\frac{d^+ f(x)}{dx} = \varphi(x) + \nu(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine endliche und stetige Funktion und $\nu(x)$ eine endliche Funktion vom Integral Null ist, so wäre

$$\frac{d^+}{dx}\left(f(x) - \int^x \varphi(x)\,dx\right) = \nu(x),$$

woraus $\nu(x) = 0$ folgt.

---

Bei der Behandlung des *zweiten mittleren Differenzen- und Differentialquotienten* kann ich mich nach den obigen Auseinandersetzungen kurz fassen. Auch hier stelle ich

$$\frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta^2}$$

als Funktion zweier Variabeln dar, $\psi(x, \delta)$. Hier ist das Darstellungsgebiet ein einziges gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse jetzt aber das Stück der Abscissenaxe ist, für welches die stetige Funktion $f(x)$ definiert ist. Auf der Abscissenaxe finden sich die Werte des zweiten mittleren

---

*) Harnack, Math. Ann. 24, S. 235.
**) Dini, Grundlagen u. s. w. S. 274.
***) Math. Ann. 24, S. 225.

Differentialquotienten aufgetragen, wenn ein solcher existiert, andernfalls die beiden Unbestimmtheitsgrenzen. In $a$ und $b$ ist die Funktion nicht definiert. Auch hier ist der Wert der Funktion $\psi(x, \delta)$ in der Spitze $c$ des Dreiecks zwischen der oberen und unteren Schranke der Werte auf $ab$ gelegen, der Wert in $f$ zwischen der oberen und unteren Schranke auf $de$, kurz jeder Wert in einem solchen rechtwinkligen Dreieck nie aufserhalb der Werte auf der zugehörigen Hypotenuse*).

*Beweis des Satzes auf S. 11.*

Dieser Satz ist durch Zurückführung auf den Schwarz'schen Satz (S. 11 Fufsnote) ebenso zu erweisen, wie vorher der entsprechende vom ersten Differentialquotienten durch Zurückführung auf den Dirichletschen. Zunächst ist zu erweisen

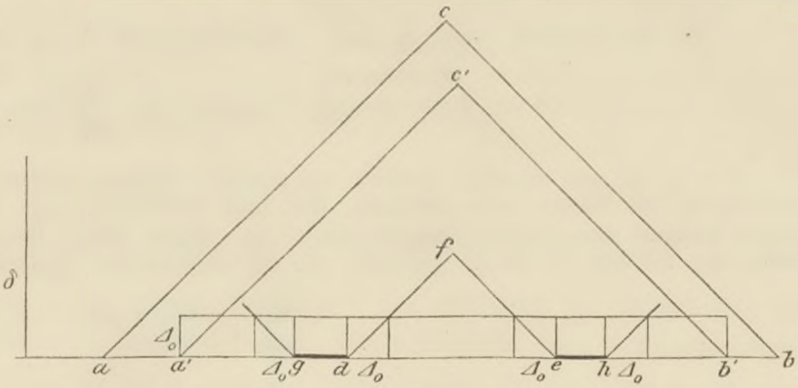


Fig. 2.

$$\lim_{\delta=+0}\int_{a'}^{b'}\frac{f(\alpha+\delta)-2f(\alpha)+f(\alpha-\delta)}{\delta^2}\,d\alpha=0,\qquad a<a'<b'<b.$$

Wiederum schliefse man die Stellen mit abs $\nu(x)>\sigma$ in Intervalle mit der Gesamtlänge $\varepsilon$ ein, setze jetzt aber das kleinste der ausschliefsenden Intervalle $\Delta_0$ *rechts und links* an jedes einzelne derselben an und man erhält für alle $\delta<\Delta_0$

$$\left|\int_{a'}^{b'}\frac{f(\alpha+\delta)-2f(\alpha)+f(\alpha-\delta)}{\delta^2}\,d\alpha\right|<\sigma(b-a)+3\mathsf{K}\varepsilon,$$

woraus wieder entsprechend wie oben (S. 13) die zu beweisende Gleichung folgt, welche auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\lim_{\delta=0}\int_0^{\beta}\frac{f(x+\alpha+\delta)-2f(x+\alpha)+f(x+\alpha-\delta)}{\delta^2}\,d\alpha=\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\beta}f(x+\alpha)\,d\alpha=0,\qquad a<x<x+\beta<b.$$

Hierin bedeutet $\frac{d^2}{dx^2}$ den zweiten *mittleren* Differentialquotienten. Nach dem Satze von Schwarz ist demzufolge das Integral $\int_0^{\beta}f(x+\alpha)\,d\alpha$ eine lineare Funktion von $x$,

$$\int_0^{\beta}f(x+\alpha)\,d\alpha=C_0+C_1x,$$

wo $C_0$ und $C_1$ lediglich von $\beta$ abhängen. Wegen der Stetigkeit von $f(x)$ ist

$$f(x)=\left[\frac{d}{d\beta}(C_0+C_1x)\right]_{\beta=0}$$

und die rechte Seite mufs, wie die linke, für jedes $x$ völlig bestimmt sein. Daraus folgt, dafs die Differentialquotienten $\frac{dC_0}{d\beta}$ und $\frac{dC_1}{d\beta}$ für $\beta=0$ einzeln durchaus bestimmt sein müssen, weil sich Un-

*) Harnack, Math. Ann. 23, S. 269; Hölder, ebenda 24, S. 183.

bestimmtheiten zweier Summanden nur bei gleicher Differenz der Unbestimmtheitsgrenzen möglicherweise aufheben können und eine solche Gleichheit bei veränderlichem $x$ hier nicht stattfinden kann. Da zu jedem $x < b$ unendlich viele $x + \beta < b$ angegeben werden können, so folgt, daſs $f(x)$ für alle $a \leqq x \leqq b$ eine lineare Funktion von $x$ ist. —

Du Bois-Reymond bildet in seiner Abhandlung (Art. 18, 19, 20) nicht von

$$\int_0^a \Phi(x+\alpha)\,d\alpha, \quad \text{sondern von} \quad \sum_0^n \delta\Phi(x+p\delta),$$

(wo $n\delta = a$ sei und konstant bleibe), den zweiten mittleren Differenzenquotienten und zeigt durch eine Modifikation des Schwarz'schen Beweises, daſs diese Produktensumme für $\delta = 0$, also daſs das soeben genannte Integral eine lineare Funktion von $x$ ist. Gegen diesen Beweis ist aber einzuwenden, daſs eine Gröſse wie die dort (S. 29) $\tau'$ genannte, nur bei *gleichmäſsiger* Konvergenz der Produktensumme

$$\sum_0^n \delta \frac{\Delta^2\Phi(x+p\delta)}{\varepsilon^2}$$

gegen die daselbst mit $\tau(x)$ bezeichnete Grenzfunktion existieren kann, daſs von einer solchen bei der Unstetigkeit der letzteren nicht die Rede ist und daſs die in der Abhandlung gemachte Annahme, die unbestimmten Werte seien durch die numerisch gröſstdenkbaren ersetzt, hieran nichts ändert. Harnack andrerseits giebt dem zu beweisenden entsprechenden Satze für den *ersten* Differentialquotienten eine andere Form*):

*Ist für eine stetige Funktion $f(x)$, nach Ausschluſs von Punkten durch Intervalle von endlicher Anzahl mit der Gesamtlänge $\varepsilon$, an jeder Stelle $x$ ein und derselbe Wert von $\Delta x$ ausreichend, um die Ungleichung*

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < \delta$$

*zu erfüllen, wobei $\delta$ schlieſslich unbegrenzt klein wird, ist ferner* $\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *durchaus endlich, und konvergiert $\varepsilon$ mit $\Delta x$ nach Null, so ist $f(x)$ eine Constante.*

Man vergleiche auch die Bemerkung hierzu S. 235. — Die Abänderung im Wortlaut des Satzes und im Beweise, die ich unter Beibehaltung des Grundgedankens vorgenommen habe, dürfte die Überflüssigkeit der ersten Voraussetzung ergeben und auch sonst den Beweis vervollständigen. Entsprechendes gilt von dem *Beweise* der Verallgemeinerung des Schwarz'schen Satzes; was den *Wortlaut* derselben anbelangt, so ist zu beachten, daſs auf S. 240, 241 der Harnack'schen Abhandlung der zweite *vordere* Differentialquotient gemeint ist, und daſs auf S. 242 die Vereinfachung, welche beim zweiten *mittleren* gilt, im Einklang mit der vorliegenden Arbeit angegeben ist. — Herr Hölder hat den du Bois-Reymond'schen Satz auf einem neuen Wege bewiesen**). —

## § 4. Die C. Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels und die Fourier'sche Reihe. Das Poisson'sche Integral.

Die Methode des arithmetischen Mittels, deren Urheber Herr C. Neumann ist, gewährt einen Ersatz für „das so schöne und dereinst so viel benutzte, jetzt aber wohl für immer dahingesunkene *Dirichlet'sche Prinzip*".***) —

Versteht man unter einer Fundamentalfunktion eines ebenen von einer gegebenen Kurve $\sigma$ oder eines räumlichen von einer gegebenen Oberfläche $\sigma$ begrenzten Gebietes eine Funktion $U = U(x, y)$ bezw. $U = U(x, y, z)$, welche *in Erstreckung* des Gebietes eindeutig und stetig ist, deren erste und zweite Ableitungen nach $x, y$ bezw. $x, y, z$ *innerhalb* des Gebietes stetig sind und der Differentialgleichung genügen:

---

*) Math. Ann. 24, S. 233, 240, 248.

**) Math. Ann. 24, S. 181.

***) C. Neumann, Abhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft d. W. Bd. XIII, 1887. Auſserdem ist besonders zu nennen das Werk desselben Verfassers über das Log. und Newton'sche Potential. Die letzte mir bekannt gewordene Veröffentlichung über diese Methode ist enthalten in dem Bande XIV eben genannter Abhandlungen aus dem Jahre 1888.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \quad \text{bezw.} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0,$$

so löst die Methode zunächst für eine grofse Klasse von Kurven und Flächen die Aufgabe, diejenige Fundamentalfunktion eines gegebenen Gebietes zu finden, welche an der Begrenzung $\sigma$ gleich einer vorgeschriebenen als stetig angenommenen Funktion $f$ wird. Gleichzeitig wird bewiesen, dafs es *nur eine* dem gegebenen Gebiet und der gegebenen Funktion $f$ entsprechende Fundamentalfunktion giebt.

Von grundlegender Bedeutung für die Neumann'sche Theorie ist ein gewisses Potential, nämlich das *Potential einer auf $\sigma$ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente $f$*. Dasselbe hat den Ausdruck

$$W_x=\frac{1}{h\pi}\int\frac{\partial T}{\partial \nu}f\,d\sigma,$$

wo $T$ in der Ebene $=\log\frac{1}{E}$, im Raume $=\frac{1}{E}$ ist, und $E$ den Abstand des Punktes $x$ von dem Elemente $d\sigma$ der begrenzenden Kurve oder Fläche bezeichnet. Die Ableitung $\frac{\partial T}{\partial \nu}$ erfolgt nach der *inneren* Normale. $h$ ist in der Ebene $=1$, im Raume $=2$. Dieses Potential kann in folgende Form gebracht werden:

$$W_x=\frac{1}{h\pi}\int\frac{\cos\delta}{E^h}\,d\sigma,$$

wo $\delta$ den Winkel bezeichnet, unter welchem die Entfernung $E(d\sigma \longrightarrow x)$ gegen die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale geneigt ist, oder auch in folgende:

$$W_x=\frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma_x),$$

wenn die *scheinbare Gröfse* des Elements $d\sigma$ für einen in $x$ befindlichen Beobachter mit $+(d\sigma_x)$ oder $-(d\sigma_x)$ bezeichnet wird, je nachdem der Beobachter die innere oder äufsere Seite des Elements vor Augen hat. Unterscheidet man zwischen $W_i$ und $W_s$, je nachdem Punkt $x$ im Innern von $\sigma$ oder auf $\sigma$ liegt, nennt ferner $W_{is}$ den *Konvergenzwert*, welcher auftritt, wenn in $W_i$ der Punkt $i$ in einen Punkt $s$ hineinrückt, so wird bewiesen, dafs

$$W_{is}=f_s+f_s',$$

wo

$$f_s'=\frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_s=W_s.$$

Wie hier aus $f_s$ die Funktion $f_s'$, so wird aus $f_s'$ die Funktion $f_s''$ u. s. w. gebildet. Entsprechend bilde man die Potentiale

$$W_i=\frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma_i),\quad W_{is}=f_s'+f_s,$$

$$W_i'=\frac{1}{h\pi}\int f'(d\sigma_i),\quad W_{is}'=f_s''+f_s'.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Herr C. Neumann beweist, dafs diese Funktionen $f_s, f_s', f_s'', \ldots$ gegen eine Konstante $C$ konvergieren:

$$\lim_{n=\infty} f_s^{(n)}=C.$$

Die Lösung für ein *inneres* Gebiet ist dann in der einen Form folgende:

$$\Psi_i=C+(W_i-W_i')+(W_i''-W_i''')+\cdots$$

Bei der Anwendung *auf den Kreis* verfahre ich im ganzen nach der Vorschrift des Herrn C. Neumann, lasse aber eine Abänderung eintreten, welche jede andere Voraussetzung über die Randfunktion $f$, als dafs sie stetig ist, vermeidet. Man bilde nach der Vorschrift:

$$W_i=\frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_i,\qquad W_i=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left[1+\sum_1^{\infty}{}_n\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n\cos n(\omega-\omega_i)\right]d\omega.$$

Diese unter dem Integralzeichen stehende Reihe ist für jedes $\varrho_i < \varrho$ längs der ganzen Peripherie gleichmäfsig konvergent, woran auch durch die Multiplikation mit der endlichen und stetigen Funktion $f$ nichts geändert wird, so dafs die vorgeschriebene Integration *gliedweise* vorgenommen werden darf. Man erhält auf diese Weise:

$$W_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\omega + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n \left\{\cos n\omega_i \int_0^{2\pi} f \cos n\omega\,d\omega + \sin n\omega_i \int_0^{2\pi} f \sin n\omega\,d\omega\right\}.$$

Nun ist nach der Definition

$$f_s' = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_s = \frac{1}{\pi}\int f\frac{d\sigma}{2\varrho} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\omega = C.$$

Die folgenden Funktionen $f_s'', f_s''', \ldots$ werden im Falle des Kreises ebenfalls $= C$. Nach der Bedeutung von $W_{is}$ erhält man, wenn die Annäherung von $i$ an $s$ längs eines Radius geschieht,

$$W_{is} = \lim_{\varrho_i=\varrho}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\omega + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n \left\{\cos n\omega_i \int_0^{2\pi} f \cos n\omega\,d\omega + \sin n\omega_i \int_0^{2\pi} f \sin n\omega\,d\omega\right\}\right].$$

Setzt man dies gemäfs obiger Gleichung $= f_s' + f_s$, so entsteht, wenn man noch die Gleichung

$$f_s' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\omega = C$$

berücksichtigt,

$$\text{(A)} \quad f_s = f(\omega) = \lim_{\varrho_i=\varrho}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n \left\{\cos n\omega \int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha + \sin n\omega \int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\right\}\right].$$

Es ist hervorzuheben, dafs der $\text{Limes}_{\varrho_i=\varrho}$ erst *nach* Bildung der eckigen Klammer für $\varrho_i < \varrho$ zu nehmen ist. Wann es erlaubt ist, *in* der Klammer gliedweise $\varrho_i = \varrho$ zu setzen, wodurch die Fourier'sche Reihe entsteht, darüber nachher.

Da der in $W_{is}$ geforderte Übergang eines inneren Punktes $(\varrho_i, \omega_i)$ in einen Peripheriepunkt $(\varrho, \omega)$ hier längs eines Radius geschah, so ist $\omega_i = \omega$ gesetzt worden. Die $\omega$ unter dem Zeichen $\int$ sind zum Unterschiede mit $\alpha$ vertauscht. Das innere Problem für den Kreis wird, da $W_i' = W_i'' = \cdots = 2C$, gelöst durch

$$\text{(B)} \qquad \Psi_i = -C + W_i = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(d\sigma)_i.$$

Diese beiden Gleichungen für $f_s = f(\omega)$ und für $\Psi_i$ gelten, ohne dafs ein Ansatz für $f$ geschehen ist, also für jede stetige Funktion ohne Einschränkung. Speziell giebt die Gleichung (A) eine Darstellung, welche, eben nach der Methode des arithmetischen Mittels, *für jede stetige Funktion* gilt, auch wenn die entsprechende Fourier'sche Reihe nicht konvergiert. Diese Art der Darstellung ist nur eine nicht übliche; sie erfordert nämlich als letzte Grenzoperation die Bildung eines Limes für $r = 1 - 0$, (wenn von jetzt an $\frac{\varrho_i}{\varrho} = r$ gesetzt wird), während sonst die Form der unendlichen Reihe oder des Integrals bevorzugt ist. Man ersieht aus (A), wenn es etwas anders geschrieben wird: *Es ist für jede stetige Funktion unter allen Umständen:*

$$\lim_{r=1-0}\left\{\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^n r^n\left(\cos n\omega \int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha + \sin n\omega \int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\right)\right]\right\} = f(\omega).$$

Hingegen giebt es Fälle, wo

$$\lim_{n=\infty}\{\lim_{r=1}[\text{idem}]\} \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}{}^{n}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\omega-\alpha)\,d\alpha$$

die stetige Funktion nicht darstellt. Ersteres erkennt man hier aus der C. Neumann'schen Methode, letzteres ist bekannt aus der Theorie der Fourier'schen Reihe. — Da die Fourier'sche Reihe hier als Potenzreihe, gebildet für $r = 1$, auftritt, so ist an den *Abel'schen Satz und die Verallgemeinerung desselben* zu erinnern, derselbe lautet*): Sei

$$\varphi(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe mit der Konvergenzgrenze $r = 1$. Wenn dann die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ nach einer endlichen Zahl konvergiert oder bestimmt unendlich ist, so ist $\lim_{r=1-0}\varphi(r)$ = dieser endlichen bezw. bestimmt unendlichen Zahl. Hat dagegen $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ die Unbestimmtheitsgrenzen $O$ und $U$, ferner $\lim_{r=1-0}\varphi(r)$ die Unbestimmtheitsgrenzen $O'$ und $U'$, so liegen dieselben, ob endlich oder unendlich, so zu einander:

$$U \leqq U' \leqq O' \leqq O.$$

Aus diesem Satze folgt nach dem obigen: *Wenn die Fourier'sche Reihe (gebildet von einer durchweg stetigen Funktion) konvergiert, so konvergiert sie nach dem Funktionswert. Konvergiert sie nicht, so schwankt sie um den Funktionswert herum.* Hier ist nämlich $U' = O' = f(\omega)$, also $U \leqq f(\omega) \leqq O$. Das Entsprechende gilt von dem Problem für die Kugel und der Entwicklung nach Kugelfunktionen.

---

Wenn man auf die durchgängige Stetigkeit der Funktion $f$ verzichtet, so wird die oben (S. 16) gegebene Definition der Fundamentalfunktion, wenigstens was den einen Punkt, *die Stetigkeit in Erstreckung des ganzen Gebietes,* anbetrifft, hinfällig, während die gegebene Lösung, so lange die Funktion integrierbar bleibt, ihren Sinn behält. Es entsteht nun die Aufgabe, zu untersuchen, welches *modifizierte* Randwertproblem die frühere Lösung bei der jetzigen Voraussetzung löst, d. h. zu untersuchen, wie jetzt der Übergang in die Randwertfunktion, wiederum zunächst längs eines Radius, stattfindet. — Die Funktion $f$ werde also von jetzt an lediglich als *integrierbar* vorausgesetzt, sie möge auch *in unendlich vielen Punkten eines Systems erster Gattung unendlich werden können, doch so, daſs auch ihr absoluter Wert integrierbar ist.* Zu untersuchen ist der Limes auf der rechten Seite der Gleichung (A).

Die Reihe in der eckigen Klammer konvergiert offenbar für jedes $\varrho_i < \varrho$ bezw. $r < 1$, da nach der gemachten Voraussetzung, wie ich als bekannt annehme,

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha \qquad \text{und} \qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha = 0.^{**)}$$

Da ferner, wenn $r < 1$, die Reihe

$$\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} r^n \cos n(\omega - \alpha)$$

für alle $\alpha$ gleichmäſsig konvergiert, so darf man die Ordnung von Summation und Integration vertauschen (vgl. *Dini*, Grundlagen § 286) und erhält, falls die eben erwähnte Reihe als reeller Teil der folgenden

$$\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} r^n e^{i\,n(\omega-\alpha)}$$

betrachtet und summiert wird, folgende Gleichung:

---

*) Stolz, Arithm. I, S. 280.

**) Harnack, Math. Ann. 19, S. 268. Es ist übrigens durchaus nicht erforderlich, daſs diese Integrale gerade Null werden.

$$\text{(C)}\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty} r^n\Big(\cos n\omega\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha + \sin n\omega\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2}d\alpha,$$

welche gilt für $r < 1$.*) —

Unter den über $f$ gemachten Voraussetzungen haben beide Seiten der Gleichung (C) bestimmte Werte und sind einander gleich, wie unter Berufung auf das Verschwinden obiger Integrale für $n = \infty$ und den Satz bei Dini, welcher die Umkehrung der Summations- und Integrationsordnung gestattet, bewiesen worden ist. Bei den allerallgemeinsten Annahmen über das Unendlichwerden der Funktion $f$, wie sie speziell *Harnack* einführt und begrifflich hiervon verschieden aber auf dasselbe herauskommend Herr *Hölder***), ist die obige Schlufsweise nicht bindend und die Gleichung (C) kann nicht als bewiesen angesehen werden. Kann man doch bei dieser allgemeinsten Art des Unendlichwerdens einer integrierbaren Funktion nicht ohne weiteres auf die Integrierbarkeit des Produkts dieser Funktion mit einer endlichen und integrierbaren, z. B. auf die Integrierbarkeit von $f(\alpha)\begin{smallmatrix}\cos n\alpha\\ \cdot\\ \sin n\alpha\end{smallmatrix}$ schliefsen. Sofern bei andern Voraussetzungen als den obigen die Gleichung (C) ebenfalls gilt, gelten auch die folgenden Schlüsse. —

Das Poisson'sche Integral, welches nach (C) die Potenzreihe für jedes $r < 1$ summiert, wird nun dazu benutzt, um den Limes dieser Potenzreihe für $r = 1 - 0$ zu bestimmen, am einfachsten in der Weise *du Bois-Reymonds****).

Wir bedienen uns der Eigenschaft von

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2}$$

stets positiv zu sein für $r < 1$ und der Gleichung

$$\int_0^{2\pi} d\alpha\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2} = 2\pi.$$

Jedenfalls ist der Limes ($r = 1$) dieses Integrals ebenfalls $2\pi$. Zerlegt man es in:

$$\int_0^{\omega-\delta} + \int_{\omega-\delta}^{\omega+\delta} + \int_{\omega+\delta}^{2\pi} = 2\pi,$$

so ist der Limes ($r = 1$) der beiden äufseren Integrale links Null (wegen des Faktors $1 - r^2$ und der Endlichkeit der Funktion unter dem Integralzeichen für $r = 1$ incl.), also ist der des mittleren allein $2\pi$. Zerlegt man dieses in die Teile

$$\int_{\omega-\delta}^{\omega} + \int_{\omega}^{\omega+\delta},$$

so hat jeder für sich, weil sie ganz gleich sind, den Limes $\pi$ für $r = 1$. Wir bilden nunmehr

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2}\,d\alpha = \int_0^{\omega-\delta} + \int_{\omega+\delta}^{2\pi} + \int_{\omega-\delta}^{\omega} + \int_{\omega}^{\omega+\delta}.$$

Auf die beiden letzten Integrale wird der erste Mittelwertsatz angewandt. Auch in dem vorliegenden Falle, dafs die Funktion $f$ unendlich wird, ist

---

*) Diese Methode findet sich zuerst bei Herrn *C. Neumann* (Crelle 59), dann bei den Herren *Prym* und *Schwarz* (daselbst 73 und 74); ferner bei *Harnack* (Math. Ann. 21, S. 322).

**) beides in Math. Ann. 24.

***) Crelle 103, S. 216.

$$\int_a^b f(\alpha)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2}\,d\alpha = [f(\alpha)]_a^b \int_a^b \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2}\,d\alpha.$$

Hierin bedeutet der erste Faktor rechts einen unbekannten Mittelwert, gleichgiltig, ob die Funktion diesen Wert wirklich annimmt oder nicht. Dieser Mittelwert mufs endlich sein, weil beide Integrale rechts und links bestimmt sind, das rechte positiv. Hierdurch entsteht:

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2}\,d\alpha = \int_0^{\omega-\delta} + \int_{\omega+\delta}^{2\pi} + [f(\alpha)]_{\omega-\delta}^{\omega} \int_{\omega-\delta}^{\omega} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2}\cdot d\alpha + [f(\alpha)]_{\omega}^{\omega+\delta} \int_{\omega}^{\omega+\delta}.$$

Hiervon ist der Limes für $r = 1$ zu bilden. $\delta$ bleibt hierbei *fest* und zu späterer Verfügung. Die beiden letzten Integrale haben, wie gezeigt, den Grenzwert $\pi$; es ist zu zeigen, dafs die beiden ersten gegen 0 konvergieren. Den Faktor $1 - r^2$ ziehe man vor das Integral. Für jedes $\alpha$ im Intervall des ersten sowie des zweiten Integrals ist für ein festes $r$

$$\frac{1}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2} < \frac{1}{1-2r\cos\delta+r^2},$$

ferner ist für alle $r > \cos\delta$

$$\frac{1}{1-2r\cos\delta+r^2} < \frac{1}{1-\cos^2\delta} = \frac{1}{\sin^2\delta}.$$

Daraus folgt ($f(\alpha)$ ist n. V. *absolut* integrierbar)

$$\left|\int_0^{\omega-\delta} f(\alpha)\,\frac{1}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2}\,d\alpha\right| < \frac{1}{\sin^2\delta}\int_0^{\omega-\delta} |f(\alpha)|\,d\alpha.$$

Da die Gröfse rechts endlich ist, so ist ersichtlich, wie der Limes des ersten, und ebenso des zweiten Integrals rechts, wegen des Faktors $1 - r^2$ verschwindet. Man erhält also

$$\text{(D)}\qquad \lim_{r=1-0} \int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-\alpha)+r^2}\,d\alpha = \pi\left\{[f(\alpha)]_{\omega-\delta}^{\omega} + [f(\alpha)]_{\omega}^{\omega+\delta}\right\}.$$

Rechts darf man nunmehr das willkürliche $\delta$ gegen Null konvergieren lassen und erhält den *Grenzwert des Poisson'schen Integrals bezw. der gleichwertigen Potenzreihe* (s. Gleichung (C))

$$= \tfrac{1}{2}\{f(\omega-0) + f(\omega+0)\}.$$

Hierin bedeutet $f(\omega - 0)$ einen bestimmten oder unbestimmten Wert innerhalb des Wertvorrats zur linken Seite, $f(\omega + 0)$ das Entsprechende zur rechten Seite. Auf den Funktionswert in $\omega$ selbst kommt es beide Male nicht an. —

*Drei Ausdrücke* sind es also, deren Verhalten zu einander beobachtet werden soll:

1) *Die Funktion* $f(\omega)$.
2) *Der Limes des Poisson'schen Integrals bezw. der gleichwertigen Potenzreihe* (Gleichung (C)) *für* $r = 1 - 0$.
3) *Die Fourier'sche Reihe, d. i. die Potenzreihe gebildet für den Wert* $r = 1$.

Was zunächst die Funktion unter 1) anbetrifft, so denke man sich dieselbe von hebbaren Unstetigkeiten, welche ganz einflufslos sind, befreit und unter Umständen auch durch Hinzufügung einer Funktion vom Integral Null vereinfacht. Die so modifizierte Funktion nenne man $f$; sie habe in $\omega$ die vorderen Unbestimmtheitsgrenzen $V_o$ und $V_u$, die hinteren $H_o$ und $H_u$. — Die Grenzen des Limes in 2) seien wieder $O'$ und $U'$, die der Fourier'schen Reihe in 3) $O$ und $U$. Wir erhalten dann folgendes Schema:

$$\text{(a)}\qquad U \leqq U' \leqq O' \leqq O$$

$$\text{(b)}\qquad \frac{V_u + H_u}{2} \leqq U' \leqq O' \leqq \frac{V_o + H_o}{2},$$

in welchem (a) aus dem Potenzreihensatz (S. 19), (b) aus Gleichung (D) folgt. In (b) verstärkt man unter Umständen die Ungleichung, wenn man links die untere, rechts die obere Schranke des Wertvorrats der Funktion $f$ in $\omega$ einsetzt. Man sieht, dafs dieser Wertvorrat und das Unbestimmtheitsintervall der Fourier'schen Reihe sicherlich, wenn $U' = O'$, diesen Punkt, andernfalls das Stück zwischen $U'$ und $O'$ gemeinsam haben. —

Hat $f$ in $\omega$ einen vorderen Grenzwert $V$ und einen hinteren Grenzwert $H$, so folgt aus unserm Schema, da $V_o = V_u = V$ und $H_o = H_u = H$ ist,

$$U' = O' = \frac{V + H}{2},$$

weiter aus (a), dafs die Fourier'sche Reihe $(O, U)$ genau diesen Wert darstellt oder um ihn herumschwankt.

Ist $f(\omega)$ bestimmt unendlich, etwa $+\infty$, so ist $V_u = H_u = V_o = H_o = +\infty$, also auch $O' = U' = +\infty$, demzufolge auch $O = +\infty$, während über $U$ nichts folgt. Ist also die Funktion $f$ in $\omega$ $+\infty$ $(-\infty)$, so ist die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze der entsprechenden Fourier'schen Reihe gleichfalls $+\infty$ $(-\infty)$. Ist $f$ bei $\omega$ so beschaffen, dafs die Werte in einer beliebig kleinen Umgebung rechts und links symmetrisch und entgegengesetzt bezeichnet sind, so folgt aus der Herleitung (s. S. 21), weil die Mittelwerte vor den beiden letzten Integralen rechter Hand entgegengesetzt und diese Integrale selbst gleich sind, dafs Null herauskommt. Dies ist auch der Fall, wenn $\omega$ ein Unendlichkeitspunkt ist. Es ist dann $U' = O' = 0$ und die Fourier'sche Reihe ist $= 0$ oder schwankt um 0 herum. —

Macht man umgekehrt eine Annahme in Betreff der Fourier'schen Reihe, so kann man einen Schlufs auf die Funktion ziehen. Ist die Fourier'sche Reihe konvergent, also $O = U$, so folgt $O' = U'$ und weiter, dafs die zu Grunde liegende Funktion denselben Wert hat, oder um diesen Wert (möglicherweise zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$) herumschwankt. —