INDEX LECTIONUM

IN

LYCEO REGIO HOSIANO BRUNSBERGENSI

PER AESTATEM

A DIE XXVII. APRILIS ANNI MDCCCLXXXVI.

INSTITUENDARUM.

PRAECEDUNT **PROFESSORIS DR. W. KILLING**
OBSERVATIONES AD THEORIAM TRANSFORMATIONUM CONTINUARUM PERTINENTES.

BRUNSBERGAE, 1886.
TYPIS HEYNEANIS (R. SILTMANN).

LYCEI REGII HOSIANI H. T. RECTOR

DR. WILHELMUS KILLING,

PROFESSOR PUBLICUS ORDINARIUS.

LYCEI REGII HOSIANI BRUNSBERGENSIS

RECTOR ET SENATUS

CIVIBUS SUIS

S.

Zur Theorie der Lie'schen Transformations-Gruppen.

In meiner Abhandlung: „Erweiterung des Raumbegriffes", welche dem Verzeichnisse der Vorlesungen für das Winter-Semester 1884/85 vorgedruckt war, habe ich die Theorie der Raumformen auf ein geschlossenes System von continuirlichen Transformationen gegründet. Die Theorie dieser Systeme, der endlichen Gruppen continuirlicher Transformationen, ist von Herrn Lie durch eine im Jahre 1874 in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte Abhandlung begründet, dann durch eine sehr grosse Zahl weiterer Arbeiten, welche namentlich im norwegischen Archiv for Mathematik og Naturvidenskap und in den mathematischen Annalen erschienen sind, weiter gefördert und mit seiner Integrations-Methode und seinen Berührungs-Transformationen in engen Zusammenhang gebracht. Diese Arbeiten waren mir unbekannt geblieben; Herr Klein war so freundlich, mich auf die enge Beziehung meiner Untersuchungen zu denselben aufmerksam zu machen. Nun hatte ich zu der Zeit, als meine Abhandlung ausgegeben wurde, eine andere Arbeit begonnen, welche mich länger beschäftigte, als ich anfangs erwartete. Nach Vollendung derselben (Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885) habe ich mich sofort an das Studium der Lie'schen Arbeiten begeben, wobei es mir anfangs besondere Schwierigkeit machte, in den Besitz derjenigen Arbeiten zu gelangen, welche in dem norwegischen Archiv und in den Abhandlungen der Akademie von Christiania erschienen sind. Auf meine Bitte hatte Herr Lie die Freundlichkeit, mir eine sehr grosse Zahl seiner Arbeiten zuzusenden; auch Herr Engel stellte mir seine Habilitationsschrift, welche die unendlichen Gruppen betrifft und welche im 27. Bande der math. Annalen erscheinen wird, freundlichst zur Verfügung. Diese Unterstützung ermöglichte es mir, zu übersehen, was in dieser Hinsicht bereits früher geleistet war. Weitere Umstände ermöglichten es mir dann, bei der endgültigen Redaction der vorliegenden Arbeit das ganze in betracht kommende Material einzusehen.

Hiernach kann es keinem Zweifel unterliegen, dass der ganze Inhalt der §§ 3 u. 4 meiner frühern Arbeit zuvor von Herrn Lie gefunden und veröffentlicht worden ist, und ich erkenne für deren Inhalt demselben die Priorität gern und vollständig zu. Auch hat Herr Lie, nachdem ich ihm meine Arbeit eingesandt hatte, sehr bald im neunten Bande seines Archivs (S. 449—451) den im Anfang von § 7 von mir ohne Beweis aufgestellten Lehrsatz bewiesen und in ganz enge Beziehung zu einem Satze gebracht, den er selbst bereits vor längerer Zeit bewiesen hatte. Dabei darf ich jedoch wohl erwähnen, dass, so einfach auch dasjenige ist, was Herr Lie zum Beweise seines Satzes hinzufügen muss, um daraus meinen Satz herzuleiten, letzterer an sich doch, wenigstens für meine Raumtheorie, ein weit grösseres Interesse beansprucht; auch war der einfache Gedanke, dass es erlaubt sei, die Zahl der Veränderlichen als ungleich anzunehmen, bis dahin von Herrn Lie nicht ausdrücklich erwähnt. Auf kleine Verschiedenheiten der Beweise in dem Gebiete, für welches ich Herrn Lie's Priorität vollständig anerkenne, möchte ich, wenigstens diesmal, nicht eingehen. Ich kann nur meiner Freude Ausdruck geben, dass durch die so allseitigen Forschungen des Herrn Lie die allgemeine Raumtheorie wesentlich gefördert ist.

Wenn ich im folgenden einen kleinen Beitrag zur Theorie der Lie'schen Gruppen veröffentliche, so kann ich nicht wissen, ob Herr Lie selbst diese Sätze bereits gefunden hat; jedenfalls sind sie in den mir zugänglichen Publikationen nicht mitgeteilt. Was die zum Beweise benutzten Lie'schen Sätze angeht, so waren dieselben zum teil schon seit längerer Zeit in meinem Besitz, die Kenntnis anderer verdanke ich Herrn Lie. Ich habe jedoch geglaubt, nur diejenigen Sätze hervorheben zu sollen, welche meines Wissens neu sind, und mich betreffs aller andern auf die Lie'schen Untersuchungen stützen zu sollen. Was die Bezeichnung anbetrifft, so musste ich meine bisherige noch beibehalten, da ich die des Herrn Lie noch nicht lange genug kenne.

Diejenigen Arbeiten des Herrn Lie, welche im folgenden hauptsächlich benutzt werden, sind:

1) Theorie der Transformations-Gruppen. Abh. I. (Archiv for Math. og Nat. B. I. S. 19—57). Abh. II (daselbst S. 152—193) Abh. III (das. B. III S. 93—165) Abh. IV (das. B. III S. 375—464),

2) Theorie der Transformations-Gruppen (Math. Ann. B. XVI S. 441—529).

3) Allgemeine Untersuchung der Differential-Gruppen, welche eine endliche Gruppe gestatten. (Math. Ann. B. XXV. S. 71—151).

4) Zur Theorie der Transformations-Gruppen (Archiv B. IX. S. 449—451).

5) Untersuchungen über Transformations-Gruppen (Archiv B. X. S. 74—128).

Von diesen Arbeiten sind die unter 3) 4) 5) aufgezählten nach meiner früheren Abhandlung erschienen.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Eine n-dimensionale Raumform mit r-facher Beweglichkeit ist bestimmt durch r von einander unabhängige unendlich kleine Bewegungen, welche durch die Gleichungen angegeben werden:

$$(1)\quad dx_1 = u_\varkappa^1\, dt \;.\;.\;.\;.\; dx_n = u_\varkappa^n\, dt, \qquad (\varkappa = 1 \;.\;.\;.\;.\; m),$$

wo die $u_\varkappa^\iota$ für $\iota = 1 \;.\;.\;.\; n,\ \varkappa = 1 \;.\;.\;.\; r$ Functionen der x bedeuten und wo die Gleichungen (1) angeben, dass der Punkt $(x_1 \;.\;.\;.\;.\; x_n)$ die Anfangslage des Punktes $(x_1 + dx_1 \;.\;.\;.\; x_n + dx_n)$ erhält. Definirt man jetzt die Grössen $U_{\iota\varkappa}^{\varrho}$ durch die Gleichungen:

$$(2)\quad U^{\varrho}_{\iota\varkappa} = \Sigma_{\nu} \left(u^{\nu}_{\iota} \frac{\partial u^{\varrho}_{\varkappa}}{\partial x_{\nu}} - u^{\nu}_{\varkappa} \frac{\partial u^{\varrho}_{\iota}}{\partial x_{\nu}} \right),$$

so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(3)\quad U^{\varrho}_{\iota\varkappa} = \Sigma_{\lambda}\, a_{\lambda,\iota\varkappa}\, u^{\varrho}_{\lambda},$$

wo die Grössen $a_{\lambda,\iota\varkappa}$ blosse Constanten bezeichnen, welche von ϱ unabhängig sind. Diese Constanten sind durch eine Reihe von Beziehungen mit einander verbunden, und diese ergeben sich aus den Jacobischen Relationen:

$$(4)\quad \Sigma_{\varrho} \left(a_{\varrho,\varkappa\lambda}\, U_{\iota\varrho} + a_{\varrho,\lambda\iota}\, U_{\varkappa\varrho} + a_{\varrho,\iota\varkappa}\, U_{\lambda\varrho} \right) = 0,$$

indem man hierin aus (3) die Werte einsetzt und dann die Coefficienten einer jeden Grösse u gleich Null setzt.

Wenn umgekehrt eine Raumform gegeben ist, so kann man das Element derselben noch in verschiedener Weise wählen. So kann man in der dreidimensionalen Euklidischen Raumform statt des Punktes mit Plücker die Ebene oder die Gerade zum Elemente nehmen. Wählt man die Ebene, so hat man wieder eine dreidimensionale Raumform, aber diese ist von der Punktgeometrie wesentlich verschieden. Lässt man ein Element in Ruhe (verschiebt man den Raum längs einer Ebene), so bleibt eine Schar von Elementen in Ruhe (die parallelen Ebenen); wird ausser den Elementen dieser Schar noch eines in Ruhe gehalten (verschiebt man den Raum längs einer Geraden), so bleibt eine zweifach unendliche Schar von Elementen in Ruhe (indem alle Ebenen, welche der Geraden parallel sind, in sich verschoben werden). Der Begriff des Abstandes kann in diesem Falle nicht gebildet werden, da die Invariante eines Paares von Ebenen nicht mit der eines jeden anderen Paares verglichen werden kann; (wenn die Ebenen einander schneiden, so ist ihre Invariante der von ihnen gebildete Winkel; wenn sie aber parallel sind, der Abstand).

Noch durchgreifender ist der Unterschied, wenn die Gerade als Element genommen wird. Der Grad der Beweglichkeit bleibt natürlich derselbe, aber die Zahl der Dimensionen wird gleich vier. Bei der Ruhe eines Elementes müssen gewisse Elemente in einem einfach ausgedehnten, alle andern in einem zweifach ausgedehnten Gebilde verbleiben. Dem entsprechend haben zwei Elemente nicht eine, sondern zwei Invarianten, den Winkel und den Abstand.

In ganz entsprechender Weise kann man in einer n-dimensialen Euklidischen Raumform statt des Punktes die Gerade oder eine s-dimensionale Ebene für $s = 2, 3 \ldots n - 1$ als Element betrachten. Dadurch ändert sich natürlich der Grad der Beweglichkeit nicht, während die Zahl der Dimensionen eine andere werden kann; jedenfalls gelangt man zu Raumformen, welche ganz andere Eigenschaften haben.

In einer Lobatschewskyschen Raumform kann man ferner den Kreis mit unendlich grossem Radius oder eine entsprechende s-dimensionale Kugelfläche ($s = 2 \ldots n - 1$) als Element betrachten. Auch bildet das unendlich ferne Gebilde eine (n-1)-dimensionale Raumform, welche zu der gegebenen in besonders enger Beziehung steht.

Bilden wir für eine Euklidische Raumform die Gl. (3), indem wir einmal den Punkt und dann eine s-dimensionale Ebene als Element betrachten, so sind die Coefficienten $a_{\lambda\iota\varkappa}$ in beiden Fällen identisch, wofern wir beidemal von denselben unendlich kleinen Bewegungen ausgehen. Diese Eigentümlichkeit gilt ganz allgemein, so dass wir den Satz aufstellen können:

Wählt man in einer Raumform statt des Punktes irgend ein anderes hierzu geeignetes Gebilde als Element, so kann man die bestimmenden Bewegungen (1) so wählen, dass in den Gleichungen (3) die Coefficienten der rechten Seite beidemal identisch sind.

In diesen Coefficienten tritt aber jede Beziehung auf die Zahl der Dimensionen vollständig zurück. Demnach halte ich es für angebracht, wie ich bereits in meiner vorigen Arbeit angedeutet habe, die Raumformen nicht nach der Zahl der Dimensionen, sondern nach dem Grade der Beweglichkeit einzuteilen, oder was auf dasselbe hinaus kommt, die stetigen Transformationsgruppen zunächst nicht nach der Zahl der Veränderlichen, sondern an erster Stelle nach der Zahl der Glieder zu unterscheiden.

Dementsprechend stellen wir uns nicht die Aufgabe: alle Transformationsgruppen für eine gegebene Zahl n von Dimensionen zu finden, sondern die folgende: Für irgend eine Zahl r die Coefficienten $a_{\lambda,\iota\varkappa}$ zu bestimmen, welche im stande sind, den Gleichungen (3) bei einer r-gliedrigen Gruppe zu genügen.

Die grössere Natürlichkeit der letzteren Aufgabe spricht sich auch darin aus, dass sie von den benutzten Variabeln ganz unabhängig ist. Wir wollen versuchen, diese Aufgabe ihrer Lösung näher zu bringen.

§ 2.

Ein weiteres Prinzip der Einteilung.

Sind

$$\begin{matrix} u_1^1 & \ldots & u_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_r^1 & \ldots & u_r^n \end{matrix}$$

die nr Functionen von $x_1 \ldots x_n$, welche r unendlich kleine von einander unabhängige Bewegungen der r-fach beweglichen Raumform bestimmen, so kann man dieses System durch irgend ein anderes System von infinitesimalen Bewegungen ersetzen, wofern dieselben nur von einander unabhängig sind. Führt man die Transformationen ein:

$$(5)\qquad v_\varrho^\varkappa = \sum_\sigma c_{\varrho\sigma} u_\sigma^\varkappa \qquad (\varkappa = 1 \ldots n;\ \varrho,\sigma = 1 \ldots r),$$

so wird, wofern die Determinante der c nicht verschwindet, das System

$$\begin{matrix} v_1^1 & \ldots & v_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_r^1 & \ldots & v_r^n \end{matrix}$$

die Transformations-Gruppe und damit die Raumform bestimmen. Während sich die Grössen $a_{\lambda\iota\varkappa}$ bei beliebiger Transformation der x nicht ändern, werden sie durch die Transformation (5) mit verändert. Es kann daher nur darauf ankommen, die verschiedenen Systeme der a zu finden, welche nicht dadurch in einander übergehen, dass man die unendlich kleinen Bewegungen vermittelst der linearen Transformation (5) transformirt.

Nun möchte ich folgende Abkürzung einführen. Ich lasse in (3) die obere Marke weg und betrachte diese Gleichung als Definitionsgleichung, setze also

$$U_{\iota\varkappa} = \Sigma_\lambda a_{\lambda,\iota\varkappa} u_\lambda ,$$

so dass die Grössen $U_{\iota\varkappa}$ $\frac{r(r-1)}{2}$ lineare Functionen von Grössen $u_1 \ldots u_r$ sind. Diese linearen Formen stehen zunächst mit der vorgelegten Transformationsgruppe in engem Zusammenhange und stellen nach einem Satze des Herrn Lie (cf. unten § 5 am Ende) eine gewisse Gruppe dar, welche mit der vorgelegten gleich zusammengesetzt ist.

Die $\frac{r(r-1)}{2}$ Functionen $U_{\iota\varkappa}$ lassen sich ihrer Definition nach durch r lineare Grössen ausdrücken oder es sind höchstens r unter ihnen von einander unabhängig, während alle übrigen lineare Functionen dieser r sind. Es können aber auch alle Grössen $U_{\iota\varkappa}$ durch weniger als r Grössen linear darstellbar sein. Wir bezeichnen die Zahl der von einander unabhängigen Functionen $U_{\iota\varkappa}$ mit p $(\leqq r)$ und teilen die r-gliedrigen Gruppen nach dem Werte von p $(= 0, 1 \ldots r)$ ein.

Dass die Einteilung berechtigt ist, zeigt sich zunächst daran, dass die Zahl p durch die Transformation (5) nicht geändert wird. Der Einteilung liegt also eine Eigenschaft der Transformations-Gruppe (und damit der Raumform) zu grunde.

Die Bedeutung dieser Zahl p für die Gruppe erkennt man auf folgendem Wege. Wie Herr Lie im dritten Bande seines Archivs (S. 94—100) bewiesen hat, genügen die Bedingungen (4) zur Bestimmung der Coefficienten $a_{\lambda\iota\varkappa}$. Dann gibt es nr Functionen u, welche den Gleichungen (3) genügen und vermittelst (1) die Gruppe bestimmen. [Hierbei ist es jedoch nicht notwendig, dass die u und die Variabeln reell sind; vielmehr bedarf die Frage nach der Realität in einzelnen Fällen einer besonderen Untersuchung].

Im Anschlusse hieran beschäftigt sich Herr Lie (Archiv III S. 100—104) mit einer auf spezielle Weise gebildeten Gruppe. Er geht, um meine Bezeichnungen anzuwenden, von einer p-gliedrigen Gruppe aus, welche durch die infinitesimalen Transformationen

$$dx_\varkappa = u_\varrho^\varkappa \, dt \quad (\varrho = 1 \ldots p;\ \varkappa = 1 \ldots n)$$

bestimmt ist. Jetzt nimmt er ein neues Gleichungssystem

$$dx_\varkappa = u_{p+1}^\varkappa \, dt$$

hinzu und wählt dasselbe so, dass alle Grössen $U_{\iota\varkappa}$ nach (3) durch diejenigen Grössen u dargestellt werden können, deren untere Marke nur die Werte 1 ... p annimmt. Diese Untersuchungen können sofort auf eine grössere Zahl r = p + s Glieder übertragen werden (man vergleiche auch: math. Annalen B. XXV. S. 95. Satz 10 u. 11). Wendet man erst eine Transformation b, dann eine Transformation a und darauf die inverse Transformation — b der ersten Transformation an, so bezeichnet man diese Operation als eine durch b bewirkte Transposition von a. Wenn nun im Ausdruck sämmtlicher $U_{\iota\varkappa}$ nur diejenigen u vorkommen, deren untere Marke nur die Werte 1 ... p annimmt, so zeigt Herr Lie, dass jede Transposition einer durch $u_1 \ldots u_p$ erzeugten Transformation, wenn sie auch durch eine beliebige Transformation bewirkt wird, stets zu einer Transformation führt, welche der p-gliedrigen Untergruppe angehört.

Die Untersuchungen des Herrn Lie stehen aber noch in enger Beziehung zu einem andern Satze, den Herr Lie selbst meines Wissens nicht mitgeteilt hat. Auf den Beweis desselben glaube ich nicht eingehen zu sollen, da derselbe sich aus den in B. III des Archivs (S. 96—100) mitgeteilten Principien sehr leicht ergibt. Dieser Satz lautet etwa:

Wenn eine r-gliedrige Gruppe eine p-gliedrige Untergruppe enthält, und diese aus denjenigen Grössen u gebildet wird, deren untere Marken 1 . . . p sind, und wenn dann die rechten Seiten der Gleichungen (3) auch nur solche u enthalten, deren untere Marken 1 . . . p sind, so hat die r-gliedrige Gruppe eine besondere Eigentümlichkeit: führt eine Bewegung die Punkte x nach x^{I} und dann eine zweite die Punkte x^{I} nach x^{II}, während die zweite Bewegung die Punkte x nach x^{III} und die erste Bewegung die Punkte x^{III} nach x^{IV} führt, so fallen die Punkte x^{II} und x^{IV} im allgemeinen nicht zusammen, aber es lassen sich Coefficienten $a_1 \ldots a_p$ so bestimmen, dass die Fortsetzung der infinitesimalen Bewegung

$$dx_\varkappa = \left(a_1 u_1^\varkappa + \ldots + a_p u_p^\varkappa\right) dt$$

die Punkte x^{II} nach x^{IV} bringt.

Wir nehmen nun an, dass von den $\frac{r(r-1)}{2}$ linearen Functionen $U_{\iota\varkappa}$ nur p von einander unabhängig sind, so dass sich alle andern durch diese ausdrücken lassen. Dann führe man die Transformation (5) in der Weise durch, dass $u_1 \ldots u_p$ diejenigen von einander unabhängigen Grössen sind, durch welche sich alle $U_{\iota\varkappa}$ ausdrücken lassen. Nun nehme man für ι, $\varkappa$, λ zunächst lauter Combinationen aus 1 . . . p und bilde hierfür die Jacobischen Relationen (4). Dann ist jedes a gleich Null, dessen Marke $\varrho > p$ ist; folglich bestimmen $u_1 \ldots u_p$ ein geschlossenes System (eine Untergruppe).

Wenn p unter den Functionen $U_{\iota\varkappa}$ von einander unabhängig sind, aber alle andern linear durch diese p ausgedrückt werden können, so bestimmen diese eine p-gliedrige Untergruppe der gegebenen Gruppe.

Indem wir diesen Satz mit dem vorangehenden verbinden, gelangen wir zu dem Resultate:

Lehrsatz.

Wenn unter den Functionen $U_{\iota\varkappa}$ nur p (< r) von einander unabhängig sind, so mögen die Punkte x durch zwei auf einander folgende Bewegungen in die Lage x^{I} und durch Vertauschung dieser beiden Bewegungen in die Lage x^{II} gelangen; alsdann gehört die Bewegung, welche x^{I} in x^{II} überführt, einer p-gliedrigen Untergruppe an.

Auch hat diese p-gliedrige Untergruppe die Eigenschaft, dass jede ihr angehörige Bewegung bei ganz beliebiger Transposition in derselben Untergruppe verbleibt.

Die r-gliedrigen Gruppen zerfallen also in r verschiedene Klassen nach der Anzahl der Glieder derjenigen Gruppe, welche im stande ist, zwei aus derselben Anfangslage durch Vertauschung zweier Bewegungen erhaltene Lagen in einander überzuführen.

Im allgemeinen kann p die Werte 0, 1 . . . r erhalten; für r = 2 muss p gleich Null oder Eins sein; für r = 4 sind, wie bereits Herr Lie bewiesen hat, für p nur die vier Werte 0, 1, 2, 3 möglich.

§ 3.

Umformungen der Jacobischen Relationen.

Aus den Jacobischen Relationen:

$$(4) \quad \sum_\varrho \left(a_{\varrho,\varkappa\lambda} U_{\iota\varrho} + a_{\varrho,\lambda\iota} U_{\varkappa\varrho} + a_{\varrho,\iota\varkappa} U_{\lambda\varrho}\right) = 0$$

folgen weitere Systeme von Gleichungen, welche sich mir für die Untersuchungen von Gruppen als wichtig erwiesen haben. Herr Lie erwähnt dieselben nicht; dennoch kann ich kaum annehmen, dass sie bisher nicht aufgestellt sind. Ich werde demnach diese Relationen zwar mit einiger Ausführlichkeit angeben, mich aber betreffs ihrer Herleitung auf kurze Andeutungen beschränken.

Aus der Zahl 1 ... r sei irgend eine gerade Zahl 2 e von Nummern $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\varepsilon\,\zeta$ ausgewählt. Dann ist bekanntlich die schiefe Determinante

$$\begin{vmatrix} U_{\alpha\alpha} & U_{\alpha\beta} & \cdots & U_{\alpha\zeta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{\zeta\alpha} & U_{\zeta\beta} & \cdots & U_{\zeta\zeta} \end{vmatrix}$$

das Quadrat eines Ausdrucks $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\varepsilon\,)$, welcher von Jacobi zuerst genau untersucht und nachher von Herrn Cayley als Pfaffian bezeichnet worden ist. Dieser Ausdruck $(\alpha\,\beta\,\ldots\,\zeta)$ besteht aus additiv und subtraktiv verbundenen Produkten, von denen jedes e Faktoren enthält und in deren jedem alle Nummern $\alpha\,\ldots\,\zeta$ je einmal vorkommen. Ausserdem ändert dieser Ausdruck sein Zeichen, wenn irgend zwei Nummern mit einander vertauscht werden, und das Produkt

$$U_{\alpha\beta}\,U_{\gamma\delta}\,\cdots\,U_{\varepsilon\zeta}$$

hat den Coefficienten + 1. Durch diese Eigenschaften ist der Ausdruck $(\alpha\beta\,\ldots\,\zeta)$ ohne jede Beziehung auf die obige Determinante bestimmt. Neben den älteren Untersuchungen, welche in Herrn Baltzer's „Determinanten" (§ 7) zusammengestellt sind, sind weitere Eigenschaften besonders wichtig, welche Herr Frobenius in Borchardt's Journal B. 82 S. 239—245 mitgeteilt hat.

Demnach soll im folgenden ein Pfaffscher Ausdruck $(\alpha\beta\,\ldots\,\varepsilon\zeta)$ aus den Grössen $U_{\iota\varkappa}$, deren Marken aus den Nummern $\alpha\beta\,\ldots\,\zeta$ entnommen sind, gebildet werden. Man wähle aus den Nummern 1 ... r irgend eine ungerade Anzahl $2\iota + 1$ von Nummern aus: $\alpha\beta\gamma\,\ldots\,\varepsilon\zeta\eta$. Dann besteht die Relation:

$$(6)\qquad \sum_{\varrho}\Big\{a_{\varrho,\alpha\beta}\,(\gamma\,\ldots\,\zeta\eta\varrho) + a_{\varrho,\alpha\gamma}\,(\delta\,\ldots\,\zeta\eta\beta\varrho) + \ldots\ldots + a_{\varrho,\zeta\eta}\,(\alpha\beta\gamma\,\ldots\,\varrho)\Big\} = 0.$$

In dieser Gleichung erstreckt sich die Summation nach ϱ über alle Zahlen 1 ... r. Aus den Nummern $\alpha\,\ldots\,\eta$ ist, so oft es angeht, eine Combination $\alpha^1\,\beta^1$ von zweien auszuwählen, und zwar jede solche Combination nur ein einziges mal. Die übrigen $2e - 1$ Nummern $\gamma^1\,\delta^1\,\ldots\,\eta^1$, welche nach Wegnahme von $\alpha^1\,\beta^1$ von den Nummern $\alpha\beta\gamma\ldots\eta$ noch bleiben, ordne man so, dass $\alpha^1\,\beta^1\,\gamma^1\ldots\eta^1$ aus $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\eta$ vermittelst einer geraden Anzahl von Permutationen hervorgeht. Nachdem dies geschehen ist, füge man beidemal den Summationsbuchstaben ϱ hinzu und bilde:

$$a_{\varrho,\alpha^1\beta^1}\,(\gamma^1\,\delta^1\,\ldots\,\eta^1\,\varrho).$$

Die Relation (6) kann noch in anderer Weise geschrieben werden. Man setze fest, dass die Summation nach ν sich auf die Zahlen $\alpha\,\beta\,\ldots\,\eta$, die nach τ sich auf die davon verschiedenen Zahlen erstreckt. Dann nimmt die Relation die Form an:

$$(7)\qquad (\beta\gamma\,\ldots\,\zeta\,\eta)\sum_{\nu} a_{\nu,\nu\alpha} + (\gamma\,\ldots\,\zeta\,\eta\,\alpha)\sum_{\nu} a_{\nu,\nu\beta} + \ldots\,(\alpha\beta\,\ldots\,\varepsilon\zeta)\sum a_{\nu,\nu\eta} + \sum_{\tau}\Big\{a_{\tau,\alpha\beta}\,(\gamma\,\ldots\,\zeta\,\eta\,\tau) + \ldots\Big\} = 0.$$

Während die Relationen (6) resp. (7) sich auf den ersten Blick als Erweiterungen der Jacobischen Relationen darstellen, sind die folgenden Gleichungen ihrer Form nach Erweiterungen der Gleichung (3). Um dieselben recht einfach zu schreiben, setze man

$$U_{oo} = 0,\ U_{o\alpha} = -U_{\alpha o} = u_\alpha$$

und bilde den Pfaffschen Ausdruck $(o\,\alpha\,\beta\,\ldots\,\varepsilon)$ für eine ungerade Anzahl von Nummern $\alpha\,\beta\,\ldots\,\varepsilon$. Derselbe ist gleich

$$u_\alpha\,(\beta\gamma\,\ldots\,\varepsilon) + u_\beta\,(\gamma\,\ldots\,\varepsilon\alpha) + \ldots\, u_\varepsilon\,(\alpha\,\beta\,\ldots.).$$

Dies vorausgeschickt, wähle man aus den Zahlen $1\,\ldots\,r$ eine gerade Anzahl $2e$ von Nummern $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\zeta$ aus. Dann besteht die Gleichung:

$$(8)\qquad e.(\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\zeta) = \sum_\varrho \left\{a_{\varrho,\alpha\beta}\,(o\gamma\,\ldots\,\zeta\varrho) + a_{\varrho,\alpha\gamma}\,(o\delta\,\ldots\,\zeta\beta\varrho) + \ldots\right\}.$$

Hier ist e die halbe Anzahl der Nummern $\alpha\,\ldots\,\zeta$. Auf der rechten Seite ist wieder mit ϱ zusammen als Marke eines a jede Combination zweier in $\alpha\,\ldots\,\zeta$ enthaltenen Nummern zu setzen; die übrigen sind so zu ordnen, dass die neue Anordnung eine gerade Permutation von $\alpha\beta\gamma\,\ldots\,\zeta$ ist, und sind dann mit o und ϱ zu einem Pfaffschen Ausdruck zu vereinigen.

Indem man wieder festsetzt, dass die Summation nach ν sich über $\alpha\,\ldots\,\zeta$, nach τ über die übrigen Zahlen $1\,\ldots\,r$ erstreckt, kann man die vorstehende Gleichung auch in der Form schreiben:

$$(9)\qquad e.(\alpha\beta\gamma\,\ldots\,\zeta) = (o\beta\gamma\,\ldots\,\zeta)\,\Sigma a_{\nu,\nu\alpha} + (o\gamma\,\ldots\,\zeta\alpha)\,\Sigma a_{\nu,\nu\beta} + \ldots$$
$$+ \sum_\tau \left\{a_{\tau,\alpha\beta}\,(o\gamma\,\ldots\,\zeta\tau) + \ldots\right\}$$

Was den Beweis der Formeln (6) u. (7) anbetrifft, so bilde man die Jacobische Relation (4) zunächst für α, β, γ und multiplizire sie mit der Pfaffschen Grösse $(\delta\,\ldots\,\zeta\eta)$. Alsdann wähle man irgend eine andere Combination von drei Nummern aus $\alpha\,\ldots\,\eta$, bilde für diese die Relation (4) und multiplizire sie mit der aus den übrigen Nummern gebildeten Pfaffschen Grösse, wobei die Reihenfolge der obigen Regel entsprechend so zu wählen ist, dass die drei ersten Nummern vor die $2e-2$ letzten gesetzt, mit ihnen eine gerade Permutation von $\alpha\,\ldots\,\eta$ bilden. Indem man alsdann alle so entstehenden Gleichungen addirt, hat man nur den Coefficienten der Grösse $a_{\sigma,\iota\varkappa}$ zu suchen und darauf die beiden Grundregeln für die Bildung Pfaffscher Ausdrücke (Baltzer, Determinanten § 7, Nr. 5) anzuwenden.

Entsprechend lassen sich die Formeln (8) und (9) herleiten. Man wähle aus der gegebenen geraden Anzahl $\alpha\,\ldots\,\zeta$ drei aus, etwa α, β, γ, bilde hierfür die Jacobische Relation und multiplizire dieselbe mit der Pfaffschen Grösse $(o\delta\,\ldots\,\zeta)$. Bei der Addition hat man dann noch die Definitionsgleichung für $U_{\iota\varkappa}$, die Gl. (3) zu beachten, um zu dem gewünschten Resultate zu gelangen.

§ 4.

Ein Lie'scher Satz nebst einfachen Folgerungen.

Wenn $v_1\,\ldots\,v_k$ für $k < r$ von einander unabhängige lineare Functionen der Grössen $u_1\,\ldots\,u_r$ sind und jede nach der Vorschrift von (2) und (3) gebildete Grösse $(v_\iota\,v_\varkappa)$ sich linear durch die $v_1\,\ldots\,v_k$ ausdrücken lässt, so bestimmen $v_1\,\ldots\,v_k$ eine Untergruppe der gegebenen Gruppe. Es kann aber der Fall eintreten, dass auch jede Grösse $(u_\alpha\,v_\iota)$ für $\alpha = 1\,\ldots\,r$, $\iota = 1\,\ldots\,k$ sich durch $v_1\,\ldots\,v_k$ darstellen lässt. In diesem Falle nennt Herr Lie die Untergruppe eine invariante. Wenn speziell eine (r—1)-fache invariante Untergruppe existirt, so kann die oben definirte Zahl p höchstens gleich r—1 sein. Denn in diesem Falle sind die sämtlichen Grössen $U_{\iota\varkappa}$ ausdrückbar durch $v_1 \dots v_{r-1}$.

Hier möge eine beiläufige Bemerkung einen Platz finden. Wenn eine (r—2)-fache invariante Untergruppe existirt, so lassen sich alle Grössen $U_{\iota\varkappa}$ bei passender Wahl der u durch r—2 Grössen $u_1 \dots u_{r-2}$ ausdrücken bis auf $U_{r-1,r}$. Somit folgt:

Soll $p = r$ sein, so kann in der Gruppe höchstens eine (r—3)-gliedrige invariante Untergruppe vorkommen.

Inbetreff der (r—1)-gliedrigen Untergruppen hat Herr Lie den Satz bewiesen (Archiv B. 10 S. 89): Wenn nicht für jedes α die Grössen

$$\sum_\varrho a_{\varrho,\varrho\alpha}$$

verschwinden, so hat die gegebene r-gliedrige Gruppe eine invariante (r — 1)-gliedrige Untergruppe.

Diesem Satz kann man auch folgenden Ausdruck geben:

Ist die oben definirte Zahl p gleich r, so muss für jedes α sein:

$$(10)\quad \sum_\varrho a_{\varrho,\varrho\alpha} = 0;$$

oder auch:

Wenn die durch Vertauschung von Bewegungen aus derselben Anfangslage erhaltenen beiden Endlagen sich nicht bereits stets in einander überführen lassen durch Bewegungen, welche einer Untergruppe der gegebenen Gruppe angehören, so müssen die Summen (10) verschwinden.

Dieser Satz, von welchem der folgende Paragraph mehrere Anwendungen liefern wird, soll hier zu einem einfachen Beweise des schon von Herrn Lie gefundenen Satzes benutzt werden, dass für $r = 4$ die Zahl p nur die Werte 0, 1, 2, 3 erhalten kann. Soll nämlich $p = 4$ sein, so müssen die vier Summen

$$\sum a_{\varrho,\varrho\alpha}$$

für $\alpha = 1, 2, 3, 4$ verschwinden. Bilden wir nun die Relation (9) für $2e = 4$, so folgt: $(1\,2\,3\,4) = 0$. Diese Gleichung sagt aber aus, dass von den sechs Grössen $U_{\iota\varkappa}$ unmöglich vier unabhängig und die beiden andern lineare Functionen der übrigen sein können.

§ 5.

Allgemeine Sätze für p = r.

Wir nehmen jetzt an, dass $p = r$ ist. Dann müssen die Gleichungen (10) für jede Zahl $\alpha = 1 \dots r$ erfüllt sein. Indem wir wieder die Grössen $U_{\iota\varkappa}$ als lineare Functionen von $u_1 \dots u_r$ betrachten, wie es in § 2 festgesetzt ist, können wir diese Gleichungen auch in folgender Form schreiben:

$$(11)\quad \sum_\varrho \frac{\partial U_{\varrho\varkappa}}{\partial u_\varrho} = 0.$$

Jetzt bilden wir für $r > 3$ die Jacobische Relation (4) für die Nummern α, β, γ. Dann können wir die Coefficienten

$$a_{\beta,\beta\alpha} + a_{\gamma,\gamma\alpha}\,,\quad a_{\gamma,\gamma\beta} + a_{\alpha,\alpha\beta}\,,\quad a_{\alpha,\alpha\gamma} + a_{\beta,\beta\gamma}$$

ersetzen resp. durch

$$-\sum_\tau a_{\tau,\tau\alpha}\,,\quad -\sum_\tau a_{\tau,\tau\beta}\,,\quad -\sum_\tau a_{\tau,\tau\gamma}$$

wo sich die Summation nach τ wieder auf die von α, β, γ verschiedenen Zahlen $1 \ldots r$ bezieht. Demnach lautet jetzt die Relation:

$$\sum_\tau \Big(- a_{\tau,\tau\alpha}\, U_{\beta\gamma} - a_{\tau,\tau\beta}\, U_{\gamma\alpha} - a_{\tau,\tau\gamma}\, U_{\alpha\beta}$$
$$+ a_{\tau,\beta\gamma}\, U_{\alpha\tau} + a_{\tau,\gamma\alpha}\, U_{\beta\tau} + a_{\tau,\alpha\beta}\, U_{\gamma\tau}\Big) = 0,$$

oder:

$$(12) \qquad \sum_\tau \frac{\partial\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\tau)}{\partial\, u_\tau} = 0.$$

Es ist hier natürlich erlaubt, die Summation über alle Zahlen $1 \ldots r$ auszudehnen, da ein Pfaffscher Ausdruck mit zwei gleichen Marken identisch verschwindet.

Es seien $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ fünf Marken aus der Reihe $1 \ldots r$. Wir bilden für dieselben die Relation (7) und ersetzen in derselben

$$\Sigma a_{\nu,\nu\alpha} \ldots\ldots \text{ durch } -\Sigma a_{\tau,\tau\alpha} \ldots\ldots$$

Dadurch geht diese Relation über in:

$$\sum_\tau \Big\{ - a_{\tau,\tau\alpha}\,(\beta\gamma\delta\varepsilon) - a_{\tau,\tau\beta}\,(\gamma\delta\varepsilon\alpha) - \ldots + a_{\tau,\alpha\beta}\,(\gamma\delta\varepsilon\tau) + \ldots \Big\} = 0,$$

welche Gleichung sich kürzer in der Form schreiben lässt:

$$(13) \qquad \sum_\tau \frac{\partial\,(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\tau)}{\partial\, u_\tau} = 0.$$

Dieselben Gleichungen gelten für irgend eine grössere Zahl von Marken, solange dieselbe kleiner ist als der Beweglichkeitsgrad der Raumform. So sei irgend eine ungerade Zahl von Marken $\alpha\beta\gamma \ldots \zeta\eta$ aus $1 \ldots r$ ausgewählt. Da die Pfaffsche Grösse jedes $U_{\mu\nu}$ linear enthält, wo μ, ν zwei Nummern aus $\alpha\,\beta \ldots\ldots \eta\,\tau$ sind, so ist

$$\frac{\partial\,(\alpha\beta\gamma \ldots \zeta\eta\tau)}{\partial\, u_\tau} = a_{\tau,\alpha\tau}\,(\beta\,\gamma \ldots \zeta\,\eta) + \ldots\ldots$$
$$+ a_{\tau,\alpha\beta}\,(\gamma \ldots \zeta\,\eta\,\tau) + \ldots\ldots$$

Verbindet man also die Gl. (7) mit der Gl. (10), so liefert sie das Resultat:

$$(14) \qquad \sum_\tau \frac{\partial\,(\alpha\beta\gamma \ldots \zeta\,\eta\,\tau)}{\partial\, u_\tau} = 0,$$

wenn irgend eine ungerade Zahl von Marken $\alpha \ldots \eta$ aus der Reihe $1 \ldots r$ ausgewählt ist und wenn die Summation über die übrigen, oder wenn man will, über alle Zahlen $1 \ldots r$ ausgedehnt wird.

Ich halte es für angebracht, das in dieser Formel ausgedrückte Resultat in einer etwas weitläufigeren Form zu wiederholen.

Wenn $p = r$ ist, so bestehen zwischen den $\binom{r}{2e}$ Pfaffschen Ausdrücken, welche aus den Grössen $U_{\iota\varkappa}$ unter Benutzung von $2e$ ($< r$) Marken gebildet werden können, $\binom{2e-1}{r}$ partielle Differentialausdrücke. Diese werden in der Weise gebildet, dass man $2e-1$ Marken $\alpha\beta \ldots \zeta\eta$ aus der Reihe

1 ... r fest auswählt, dem letzten Zeiger eine der übrigen Nummern dieser Reihe beilegt, darauf den aus diesen Nummern gebildeten Pfaffschen Ausdruck nach derjenigen Variabeln differentiirt, deren Marke gleich dem letzten Zeiger ist, und schliesslich die Summe dieser Differentialquotienten für alle Zahlen bildet, welche von den fest gewählten Nummern verschieden sind. Wie auch die ersten Marken gewählt sind, muss diese Summe verschwinden.

Diesem Resultat lässt sich eine besonders einfache Form geben für die grösste Zahl, für welche nicht alle Pfaffschen Ausdrücke verschwinden. Zunächst sei r eine ungerade Zahl. Dann wird die Gleichung (7), für alle r Nummern gebildet, von selbst erfüllt, da nach (10) alle ihre Coefficienten verschwinden. Bildet man aber die Relation (7) für die Zahl r—2 oder was dasselbe ist, die Relation (14) für r—2 feste Marken $\alpha \ldots \eta$, so ist die Summation nach τ über die beiden noch fehlenden Nummern auszudehnen. Es sei also $\alpha\beta\gamma\ldots\zeta\eta\lambda\mu$ eine beliebige Permutation von 1, 2 .... r, so besteht die Gleichung:

$$(15)\quad \frac{\partial\,(\alpha\beta\gamma\,\ldots\,\zeta\eta\lambda)}{\partial u_\lambda} + \frac{\partial\,(\alpha\beta\gamma\,\ldots\,\zeta\eta\mu)}{\partial u_\mu} = 0.$$

Wenn daher die r Pfaffschen Ausdrücke

$$(2\,3\,\ldots\,r),\ (3\,r\,\ldots\,1)\ \ldots\ldots$$

$$(16)\quad (i+1\,\ldots\,r\,1\,2\,\ldots\,i-1)\ \ldots\ldots\ (1\,2\,\ldots\,r-1)$$

nicht sämtlich verschwinden, so bilden sie in folge des Systems (15) der Reihe nach die Ableitungen einer Function $\varphi\left(u_1 \ldots u_r\right)$ der Variabeln $u_1 \ldots u_r$. Diese Function vom Grade $\frac{r+1}{2}$ ist für $r > 3$ nicht die allgemeinste Function dieses Grades, sondern hat infolge der für eine kleinere Zahl von Marken gebildeten Gleichungen (14) Besonderheiten, deren Entwicklung einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben muss.

Wenn aber die r Ausdrücke (16) sämtlich verschwinden, so mögen $\alpha\beta\gamma\,\ldots\,\varepsilon$ irgend r—4 aus den Nummern 1 ... r und $\varkappa\lambda\mu\nu$ die übrigen sein. Dann sagt die Gl. (14):

$$\frac{\partial\,(\alpha\beta\ldots\varepsilon\varkappa)}{\partial u_\varkappa} + \frac{\partial\,(\alpha\beta\ldots\varepsilon\lambda)}{\partial u_\lambda} + \frac{\partial\,(\alpha\beta\ldots\varepsilon\mu)}{\partial u_\mu} + \frac{\partial\,(\alpha\beta\ldots\varepsilon\nu)}{\partial u_\nu} = 0.$$

Da ausserdem die Ausdrücke (16) verschwinden, so sind die aus r—3 Marken gebildeten Ausdrücke $(\alpha\beta\,\ldots\,\varepsilon\zeta)$ Functional-Determinanten dreier Functionen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$ und zwar ist, wenn $\alpha\beta\,\ldots\,\varepsilon\zeta\lambda\mu\nu$ eine positive Permutation von 1 ... r ist:

$$(\alpha\beta\,\ldots\,\varepsilon\zeta) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ u_\gamma & u_\mu & u_\nu \end{pmatrix}$$

wo die Functional-Determinante symbolisch bezeichnet ist.

Sollten auch noch die Pfaffschen Ausdrücke aus r—3 Nummern sämtlich verschwinden, aber nicht die aus r—5 Nummern gebildeten, so giebt es fünf Functionen, deren Functional-Determinanten gleich entsprechenden Pfaffschen Ausdrücken sind. U. s. w.

Wir fassen das Resultat in dem Satze zusammen:

Werden die Grössen $U_{\iota\varkappa}$ als lineare Functionen von $u_1 \ldots u_r$ aufgefasst und lassen sich dieselben bei dieser Auffassung nicht durch weniger Variabele ausdrücken, so sind für ein ungerades r die r Pfaffschen Ausdrücke, welche man aus den $U_{\iota\varkappa}$ mit Weglassung je einer Marke bildet, wofern sie nicht sämtlich verschwinden, die Ableitungen einer einzigen Function $\frac{r+1}{2}$ ten Grades der $u_1 \ldots u_r$. Wenn aber die aus r—1 Nummern gebildeten Pfaffschen Grössen sämtlich verschwinden, und wenn *dann für ein ungerades s die Zahl r—s die höchste Zahl ist, für welche nicht sämtliche aus r—s Nummern gebildete Pfaffsche Ausdrücke verschwinden, so bilden dieselben die Functional-Determinanten von s Functionen* $\varphi_1 \dots \varphi_s$ *je nach s Variabeln. Die Grade dieser Functionen betragen zusammen* $\frac{r+s}{2}$. *Das Zeichen ist so zu wählen, dass wenn* $\alpha \dots \zeta$ *irgend r—s Nummern und* $\iota \dots \nu$ *die s übrigen sind, und wenn dann* $\alpha \dots \zeta\ \iota \dots \nu$ *eine gerade Permutation der Nummern 1 ... r ist, gesetzt werden muss:*

$$(\alpha \dots \zeta) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \dots \varphi_s \\ u_\iota \dots u_\nu \end{pmatrix}.$$

Für ein gerades r gilt ein ganz ähnlicher Satz. Bildet man die Gleichung (9) für alle r Zahlen 1 ... r, so wird die rechte Seite infolge von (10) verschwinden; also ist

$$(1 \dots r) = 0.$$

Sind nun $\alpha\beta \dots \zeta\eta$ irgend r—3 Nummern 1 ... r und $\varkappa\lambda\mu$ die drei andern, so ist nach (14):

$$\frac{\partial\,(\alpha\beta \dots \zeta\eta\varkappa)}{\partial u_\varkappa} + \frac{\partial\,(\alpha\beta \dots \zeta\eta\lambda)}{\partial u_\lambda} + \frac{\partial\,(\alpha\beta \dots \zeta\eta\mu)}{\partial u_\mu} = 0.$$

Verschwinden also die aus r—2 Nummern gebildeten Pfaffschen Ausdrücke nicht sämtlich, so sind sie die Functional-Determinanten zweier Functionen φ_1 und φ_2 nach je zwei Variabeln genommen. Entsprechendes gilt, wenn diese Pfaffschen Grössen verschwinden, aber nicht alle aus r—s Nummern gebildeten, wo s eine gerade Zahl sein muss. Somit besteht der Satz:

Werden bei einer r-gliedrigen Gruppe die Grössen $U_{\iota\varkappa}$ *als Functionen von* $u_1 \dots u_r$ *aufgefasst und können sie als solche nicht durch weniger Variabele dargestellt werden, und ist r eine gerade Zahl, so sind die aus den* $U_{\iota\varkappa}$ *vermittelst r—2 Nummern gebildeten Ausdrücke* $(\alpha\beta \dots \eta)$ *Functional-Determinanten zweier Functionen* φ_1 *und* φ_2, *und zwar ist*

$$(\alpha\beta \dots \eta) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_\lambda}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_\mu} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_\mu}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_\lambda},$$

wenn $\alpha\beta \dots \eta\lambda\mu$ *aus* $1\,2 \dots r$ *durch eine gerade Permutation erhalten wird. Wenn erst r—s (für ein gerades s) der höchste Grad ist, für welchen die genannten Ausdrücke nicht sämtlich verschwinden, so gibt es s Functionen* $\varphi_1 \dots \varphi_s$, *deren Functional-Determinanten nach je s Variabeln genommen, gleich den aus den übrigen r—s Nummern gebildeten Pfaffschen Ausdrücken sind.*

Diesem Satze und dem entsprechenden für ein ungerades r kann eine andere Seite abgewonnen werden. Unterwirft man die Variabeln $u_1 \dots u_r$ den r infinitesimalen Transformationen:

$$(17) \quad du_1 = dt \sum_\varrho a_{\varrho,1\varkappa}\, u_\varrho \; \dots \; du_r = dt \sum_\varrho a_{\varrho,r\varkappa}\, u_\varrho$$

oder kürzer geschrieben:

$$(18) \quad du_1 = dt\, U_{1\varkappa} \; \dots \; du_r = dt\, U_{r\varkappa}$$

für k = 1 ... r, so bestimmen diese eine r-gliedrige Gruppe, welche mit der gegebenen gleich zusammengesetzt ist. Den Beweis dieses Satzes hat bereits Herr Lie veröffentlicht (Math. Annalen B. XVI S: 496 u. B. XXV S. 94). Eine solche Gruppe, wie sie durch die Gl. (17) oder (18) definirt ist, nennt er eine lineare.

Oben ist gezeigt, dass es immer s Functionen $\varphi_1 \dots \varphi_s$ gibt, deren Functional-Determinanten gleich sind bestimmten aus den $U_{\iota\varkappa}$ gebildeten Pfaffschen Ausdrücken. Wenn nun ι eine der Zahlen $1 \ldots s$ bezeichnet, so ist:

$$d\varphi_\iota = \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial u_1} du_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial u_r} du_r .$$

Wende ich hierauf die Transformation (18) an, so folgt:

$$d\varphi_\iota = \left(\frac{\partial \varphi_\iota}{\partial u_1} U_{1\varkappa} + \ldots + \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial u_r} U_{r\varkappa}\right) dt.$$

Infolge der Ausdrücke, welche oben für die Functional-Determinanten gefunden sind, verschwindet aber der Ausdruck auf der rechten Seite, wie auf mancherlei Weise gezeigt werden kann; also ist:

$$(19) \quad \partial\varphi_\iota = 0 \qquad (\iota = 1 \ldots s).$$

Das gibt den Satz:

Jede lineare r-gliedrige Transformations-Gruppe von r Variabeln lässt mindestens eine homogene Function der Variabeln ungeändert; es können aber auch mehr Functionen ungeändert bleiben, und zwar ist deren Zahl bei geradem r mindestens gleich zwei. Ist die Zahl der ungeändert bleibenden Functionen gleich s, so ist s zugleich mit r gerade oder ungerade. Die Grade der einzelnen Functionen betragen zusammen $\frac{r+s}{2}$.

Die Bildung dieser Functionen ist bereits oben gezeigt worden.

§ 6.

Spezielle Sätze für $p < r$.

Die Sätze des vorigen Paragraphen beschränken sich nicht auf den Fall $p = r$, können vielmehr auch für $p < r$ ihre Gültigkeit behalten. Denn der Beweis stützte sich nur auf die Gleichungen (10), welche für $p = r$ stets bestehen, aber auch für $p < r$ gültig sein können. Nehmen wir also an, für $p < r$ würden die Gleichungen (10) erfüllt, so bleiben auch die Sätze des vorigen § in Gültigkeit. Wenn dann alle Functionen $U_{\iota\varkappa}$ sich durch $u_1 \ldots u_p$ darstellen lassen, so können die charakteristischen Functionen φ nur die Variabeln $u_1 \ldots u_p$ enthalten. [Man darf aber keineswegs umgekehrt schliessen wollen, dass, wenn diese Functionen weniger Variabele enthalten, dann auch die $U_{\iota\varkappa}$ durch weniger als r Grössen darstellbar seien. So ist für

$$U_{16} = 3u_1 , \; U_{17} = 3u_2 , \; U_{25} = -u_1 , \; U_{26} = u_2 ,$$
$$U_{27} = 2u_3 , \; U_{35} = -2u_2 , \; U_{36} = -u_3 , \; U_{37} = u_4 ,$$
$$U_{45} = -3u_3 , \; U_{46} = -3u_4 , \; U_{56} = 2u_5 , \; U_{57} = u_6 , \; U_{67} = 2u_7 ,$$

während die übrigen $U_{\iota\varkappa}$ $(\iota, \varkappa = 1 \ldots 7)$ verschwinden,

$$\varphi = u_1^2 u_4^2 - 3u_2^2 u_3^2 + 4u_1 u_3^3 + 4u_2^3 u_4 - 4u_1 u_2 u_3 u_4].$$

Was nun die Bildung der r-gliedrigen Gruppen für $p < r$ angeht, so scheint es am passendsten zu sein, von der p-gliedrigen Untergruppe auszugehen, diese in ihrer einfachsten Gestalt vorauszusetzen und dann unter Anwendung der Jacobischen Relationen und der aus denselben folgenden Gl. (6)—(9) die weiteren Grössen $U_{\iota\varkappa}$ zu bestimmen.

Um ein spezielles Beispiel durchzuführen, wollen wir annehmen, dass die Grössen $U_{\iota\varkappa}$ einer r-gliedrigen Gruppe sich durch u_1, u_2, u_3 ausdrücken lassen und dass diese die allgemeinste dreigliedrige Gruppe bestimmen. Dann können letztere so gewählt werden, dass

$$U_{23} = \alpha u_1, \; U_{31} = \beta u_2, \; U_{12} = \gamma u_3$$

ist. Ferner ist für $\nu > 3$ jedes $a_{\nu,\iota\varkappa} = 0$. Bilden wir also die Jacobische Relation für 2, 3, ν, so folgt:

$$(20) \quad \alpha U_{1\nu} = -a_{1,3\nu}\, \gamma u_3 - a_{1,2\nu}\, \beta u_2,$$

und zwei entsprechende Gleichungen ergeben sich aus 3, 1, ν und 1, 2, ν. Wir ersetzen u_ν durch $u_\nu + m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3$ und versuchen die m so zu wählen, dass die neuen Grössen $U_{1\nu}$, $U_{2\nu}$, $U_{3\nu}$ verschwinden. Dazu ist notwendig:

$$\beta m_1 = -a_{2,3\nu}, \; \gamma m_1 = a_{3,2\nu} \qquad \text{u. s. w.}$$

Diese Gleichungen können aber wegen der Relationen (20) erfüllt werden. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jede Grösse $U_{1\nu}$, $U_{2\nu}$, $U_{3\nu}$ gleich Null ist. Wendet man noch die Jacobische Relation für 1, μ, ν an (μ, $\nu > 3$), so folgt $U_{\mu\nu} = 0$. Daraus ergibt sich:

In jeder r-gliedrigen Gruppe, für welche $p = 3$ ist und für welche das aus diesen drei Transformationen gebildete System keine vertauschbaren Transformationen enthält, gibt es eine (r—p)-gliedrige Untergruppe von der Eigenschaft, dass jede dieser letzteren angehörige Transformation mit allen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe vertauschbar ist.

Beiläufig bemerke ich, dass der erste Teil des vorangehenden Beweises sich unmittelbar auf invariante Untergruppen anwenden lässt und zu dem Satze führt:

Hat eine p-gliedrige Gruppe eine dreigliedrige invariante Untergruppe und diese keine zwei vertauschbaren Transformationen, so lassen sich die infinitesimalen Transformationen so wählen, dass für $\nu > 3$ ist:

$$U_{1\nu} = U_{2\nu} = U_{3\nu} = 0.$$

Nun würde es aber überaus weitläufig sein, wenn alle p-gliedrigen Gruppen in gleicher Weise untersucht werden müssten. Deshalb ist es ganz erwünscht, dass der folgende Lehrsatz eine grosse Reihe von Gruppen von vorn herein absondert. Wir sprechen den Satz zunächst für invariante Untergruppen aus und geben ihm die Form:

Jede p-gliedrige Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe hat die Eigenschaft:

$$(21) \quad \sum_{\nu=1}^{p} a_{\nu,\nu 1} = 0 \; .\;.\;.\;.\; \Sigma a_{\nu,\nu p} = 0.$$

Angenommen, der Satz wäre nicht richtig und die p Summen (21) verschwänden nicht sämtlich. Denn geht aus den Entwicklungen des Herrn Lie im zehnten Bande seines Archivs (S. 86—90) und auch unabhängig davon aus einfachen Betrachtungen hervor, dass in der p-gliedrigen Gruppe eine (p—1)-gliedrige invariante Untergruppe enthalten ist, für welche die den Gl. (21) entsprechenden Relationen bestehen. Die p—1 Grössen, durch welche diese neue Untergruppe bestimmt wird, seien $u_2 \ldots u_p$; dann drücken sich auch alle Grössen $U_{12} \ldots U_{1p}$ durch $u_2 \ldots u_p$ aus, und bei dieser Wahl werden alle Gleichungen (21) erfüllt mit Ausnahme der ersten.

Ist nun $\nu > p$, so wende man die Relationen (7) und (9) an zunächst für $1\,2 \ldots p$, dann für $2 \ldots p\nu$ und endlich für $1\,2 \ldots p\nu$. Diese Relationen, welche niederzuschreiben wohl nicht nötig sein wird, nehmen zwei verschiedene Formen an, jenachdem p gerade oder ungerade ist. Dieselben können nur unter einer der drei folgenden Bedingungen erfüllt werden: entweder verschwinden auch Ausdrücke ($3 \ldots . p$) resp. ($1\,3 \ldots p$), oder es verschwinden alle $a_{1,1\nu}$ $a_{1,2\nu} \ldots a_{1,p\nu}$ oder es wird $a_{2,2\,1} + \ldots + a_{p,p1} = 0$. Im ersten Falle bildet man dieselben Ausdrücke für weniger Nummern, so dass wir von demselben absehen können; es bleiben also nur die beiden letzten Fälle übrig, von denen der erste darauf hinauskommt, dass bereits $u_2 \ldots u_p$ eine invariante Untergruppe bilden.

Jetzt ist es leicht, auch den folgenden Satz zu beweisen:

Wenn sich in einer r-gliedrigen Gruppe alle Grössen $U_{\iota\varkappa}$ durch p von einander unabhängige Grössen ausdrücken lassen, so gelten in der hierdurch bestimmten Gruppe die p Gleichungen (21).

Zum Beweise treffen wir dieselbe Anordnung, wie oben. Dann folgt aus der Annahme, dass die Gl. (21) nicht bestehen, zunächst, dass sich die $U_{1\nu}, \ldots U_{p\nu}$ durch weniger Grössen darstellen lassen und etwa u_1 fehlt. Nun bilde man die Jacobischen Relationen selbst und erkennt, dass auch $U_{\mu\nu}$ für $\mu, \nu > p$ diese Grösse u_1 nicht enthält.

Speziell mache ich auf folgenden Satz aufmerksam:

Wenn eine r-gliedrige Gruppe eine zweigliedrige invariante Untergruppe enthält, so sind deren Transformationen mit einander vertauschbar.

LECTIONES.

A. ORDINIS THEOLOGORUM.

Dr. Franc. Dittrich, P. P. O., h. t. Decanus.

I. Historiam ecclesiasticam primaevae ecclesiae enarrabit quater per hebd. hora IX.
II. Jus canonicum tradere perget bis per hebd. hora IX.
III. De arte christiana disseret semel per hebd. hora def.
IV. Repetitiones de historia ecclesiastica instituet semel per hebd. hora def.

Dr. Henr. Oswald, P. P. O.

I. Praemissa introductione doctrinam de deo eiusque attributis, ac dein de st. trinitate exponet quinquies vel sexies per hebd. hora X.
II. Grammaticam linguae Hebraicae docebit, addens exercitationes interpretatorias, bis terve per hebd. hora VII. antem.

Dr. Franc. Hipler, P. P. O.

I. Theologiae pastoralis partem alteram docebit quinquies per hebd. hora VIII.
II. Eloquentiae sacrae praecepta exponet diebus Lunae et Jovis hora VII.
III. Jus matrimoniale tradet horis definiendis.

Dr. Hugo Weiss, P. P. O.

I. Vaticinia Isaiae prophetae interpretabitur ter per hebd. hora VIII.
II. Evangelium secundum Marcum explicabit ter per hebd. hora VIII.
III. Introductionem in studium theologicum dabit horis definiendis.

Dr. Julius Marquardt, P. P. O.

I. Theologiae moralis partem specialem tradet quinquies per hebd. hora XI.
II. Repetitiones et disputationes de selectis ethicae christianae capitibus instituet semel per hebd. hora XI.
III. Historiam literariam ecclesiae primaevae enarrare perget hora def.

B. ORDINIS PHILOSOPHORUM.

Dr. Wilh. Weissbrodt, P. P. O., h. t. Decanus.

I. Antiquitates quas vocant, ex inscriptionibus graecis et latinis illustrabit bis hebdomade h. IX.
II. Euripidis Iphigeniam Tauricam interpretabitur bis hebdomade h. IX.
III. Exercitationes philologas instituet h. def.

Dr. Jos. Bender, P. P. O.

I. Historiam generis humani primaevam resque populorum orientalium enarrabit ter per hebd. hora XI.
II. Historiam poesis christianae apud Germanos cultae tradet selectorumque carminum interpretatione illustrabit semel vel bis per hebd. hora XI.
III. Germanorum antiquitates, imprimis res mythologicas, exponet semel per hebd. hora XI.
IV. Selecta historiae antiquae capita critice tractabit hor. def.

Dr. Fridr. Michelis, P. P. O.

Scholas non habebit.

Dr. Wilh. Killing, P. P. O.

I. De legum naturalium divinaeque revelationis consensu disseret sexies hebdomade h. VIII.
II. Geometriam analyticam tradet hor. deff.

Dr. theol. et phil. Jos. Krause.

I. Introductionem in studium philosophiae tradet bis per hebd. hora X.
II. Logicam et noëticam docebit ter per hebd. hora X.
III. Historiam philosophiae recentioris temporis enarrabit semel per hebd. hora X.

Publica doctrinae subsidia.

Bibliotheca, cui praeest **Prof. Dr. Weiss,** commilitonibus patebit diebus Martis et Veneris hora II—III.

Instrumenta, quae ad physicen, mathematicam et astronomiam pertinent, asservat **Prof. Dr. Killing.**