PROGRAMM

der

Realschule erster Ordnung zu St. Petri und Pauli

in Danzig,

womit zu der

Freitag, den 8. April 1870

von $8\frac{1}{2}$ Uhr Vormittags und $2\frac{1}{2}$ Uhr Nachmittags an

stattfindenden

öffentlichen Prüfung

ergebenst einladet

Dr. F. Strehlke,
Director.

Inhalt:

DANZIG.
DRUCK VON EDWIN GROENING.
1870.

Ueber Summirung unendlicher Reihen.

Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe wurde zuerst von Archimedes bestimmt. Von Archimedes bis zur 2ten Hälfte des 17ten Jahrhunderts befasste sich Niemand mit diesem Gegenstande. Von da an führte die Ausbildung der Analysis des Unendlichen alle bedeutenden Mathematiker zu Untersuchnngen über unendliche Reihen.

Die Leipziger „Acta Eruditorum“ brachten 1682 die Abhandlung von Leibnitz: „De proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus.“ Unter vielen interessanten Gegenständen dieser Schrift, die auf Quadratunen des Kreises und der Hyperbel führen, gibt Leibnitz die Summen verschiedener unendlichen Reihen an, aber ohne Beweise; zum Beispiel: $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}\ldots=\frac{3}{4}$. Die Summe der ungeraden Glieder dieser Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}\ldots=\frac{1}{2}$; die der geraden $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}\ldots=\frac{1}{4}$. Die Beweise dafür gab Jacob Bernoulli in der Abhandlung: „Tractatus de seriebus infinitis, earumque summa finita.“

In der Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}\ldots$ sind die Zähler 1, die Nenner die um 1 verminderten Quadrate der natürlichen Zahlen, mit Ausnahme von 1^2.

Bernoulli geht von der unendlichen harmonischen Reihe aus:

$$A=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

$$B=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots=A-1-\frac{1}{2}=A-\frac{3}{2}$$

$$C=\frac{2}{3}+\frac{2}{8}+\frac{2}{15}+\frac{2}{24}+\frac{2}{35}+\frac{2}{48}+\ldots=A-B.$$

$$C=A-A+\frac{3}{2}=\frac{3}{2},\text{ daher } D=\frac{1}{2}C=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots=\frac{3}{4}.$$

Nimmt man die ungeraden Glieder der harmonischen Reihe:

$$E=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ldots \text{ und setzt}$$

$$F=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\ldots=E-1, \text{ so wird}$$

$$E-F=G=\frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{2}{63}+\frac{2}{99}+\ldots \text{ folglich } G=E-E+1=1 \text{ und}$$

$$H=\frac{1}{2}G=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\ldots=\frac{1}{2}.$$

Die geraden Glieder der harmonischen Reihe sind:

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \dots$$

$$K = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots = I - \frac{1}{2}$$

$$I - K : L = \frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120} + \frac{2}{168} + \dots = I - I + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \text{ woraus}$$

$$M = \frac{1}{2} L \quad = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \dots = \frac{1}{4}.$$

In ähnlicher Weise summirt Bernoulli noch viele andere Reihen, in denen die Zähler constant und die Nenner die Quadratzahlen sind, vermindert um irgend ein Quadrat Q, oder die Trigonalzahlen, vermindert um eine Trigonalzahl T; eben so unendliche Reihen von Brüchen, deren Zähler in arithmetischer, und deren Nenner in geometrischer Progression wachsen. Die Probleme der Wahrscheinlichkeits-Rechnung führten Nicolas Bernoulli und de Monmort zur Summirung unendlicher Reihen um 1712, und Moivre förderte diesen Gegenstand bedeutend durch Untersuchungen über recurrirende Reihen, die er in dem Werke: „Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Londini 1730" bekannt machte.

Alle diese Untersuchungen bezogen sich jedoch nur auf bestimmte Arten von Reihen: allgemein für beliebige Reihen waren die Methoden von Stirling und Leonhard Euler, die im Folgenden näher betrachtet werden sollen. Stirlings Methode ist in dem Werke bekannt gemacht: „Methodus differentialis, sive Tractatus de Summatione et Interpolatione serierum infinitarum, Londini 1730."

Die eine Reihe definirende Differentialgleichung ist diejenige, welche die Relationen der Glieder allgemein aus den gegebenen Abständen derselben vom Anfange der Reihe angibt. Die Glieder sind aufzufassen als Ordinaten auf einer gegebenen geraden Linie, deren gemeinschaftliche Distanz die Einheit ist. Die Anfangsglieder der Reihe werden mit A . B . C . D . . . bezeichnet, irgend ein Glied mit T, die darauf folgenden mit T^{I}, T^{II}, T^{III} . . . Ist der Abstand des Gliedes T von irgend einem Gliede der Reihe $= z$, so werden die Abstände der Glieder T^{I}, T^{II}, T^{III} . . . von dem genannten Gliede $= z + 1$, $z + 2$, $z + 3$ . . . Ist die Reihe $1, \frac{1}{2}x, \frac{3}{8}x^2, \frac{5}{16}x^3, \frac{35}{128}x^4, \frac{63}{256}x^5 \dots$, in welcher die Relationen der Glieder folgende sind: $B = \frac{1}{2}Ax$, $C = \frac{3}{4}Bx$, $D = \frac{5}{6}Cx$, $E = \frac{7}{8}Dx \dots$, so ist die definirende Gleichung: $T^{I} = \frac{z + \frac{1}{2}}{z + 1} Tx$, wenn z den Abstand des Gliedes T vom ersten Gliede der Reihe bezeichnet; denn setzt man für z successive 0, 1, 2, 3 . . ., so erhält man

$$1, \quad \tfrac{1}{2}x, \quad \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \cdot \tfrac{1}{2}x \cdot x = \tfrac{3}{8}x^2, \quad \frac{2 + \frac{1}{2}}{3} \cdot \tfrac{3}{8}x^2 \cdot x = \tfrac{5}{16}x^3 \dots$$

Bezeichnet z den Abstand des Gliedes T vom zweiten Gliede der Reihe, so ist die definirende Gleichung $T^{I} = \frac{z + \frac{3}{2}}{z + 2} Tx$, worin für z zu setzen ist: $-1, 0 . 1 . 2 . 3 \dots$, um die Glieder der Reihe zu erhalten. Nimmt man für z die Werthe 1 . 2 . 3 . 4 . . ., so wird die definirende Gleichung $T^{I} = \frac{z - \frac{1}{2}}{z} Tx$. Es können daher unzählige Differential-Gleichungen dieselbe Reihe definiren, je nachdem in diesem oder jenem Punkte der Anfang der Abscisse z genommen wird. Eben so definirt dieselbe Gleichung unzählige Reihen, wenn man verschiedene Werthe für z annimmt. Denn wird in der Gleichung $T^{I} = \frac{z - \frac{1}{2}}{z} Tx$, $z = 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2} \dots$, so werden die

Relationen der Glieder: $B = \frac{2}{3} Ax$, $C = \frac{4}{5} Bx$, $D = \frac{6}{7} Cx$, $E = \frac{8}{9} Dx \ldots$ und die Glieder A, $\frac{2}{3} Ax$, $\frac{8}{15} Ax^2$, $\frac{16}{35} Ax^3 \ldots$

Das Fundament von Stirlings Operationen ist die Reduction der Gleichungen auf folgende zwei Formen:

$$T = A + B.z + C.z(z-1) + D.z(z-1)(z-2) + E.z(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots$$

$$T = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z(z+1)} + \frac{D}{z(z+1)(z+2)} + \frac{E}{z(z+1)(z+2)(z+2)} + \ldots$$

Soll der Ausdruck $(z-3).z(z+1)(z+4)$ umgeformt werden, so setzt man $(z-3).z(z+1)(z+4) = a.z(z-1)(z-2)(z-3) + b.z(z-1)(z-2) + c.z(z-1) + d.z$, und erhält durch Multiplication

$$z^4 + 2z^3 - 11z^2 - 12z = z(z-1)(z-2)(z-3) + 8z(z-1)(z-2) + 2z(z-1) - 20z.$$

Um die Multiplication in den einzelnen Fällen zu ersparen, berechnet Stirling eine Tabelle für die Coefficienten, aus den Reihenentwickelungen von $\frac{1}{(n-1)}$, $\frac{1}{(n-1)(n-2)}$, $\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)} \ldots$ indem nur die Zähler beachtet werden:

1	1	1	1	1	1	1	...
	1	3	7	15	31	63	...
		1	6	25	90	301	...
			1	10	65	350	...
				1	15	140	...
					1	21	...
						1	

Die Zahlen in den verticalen Columnen geben die Reductions-Coefficienten. Man erhält

$$z = z,\quad z^2 = z + z(z-1),\quad z^3 = z + 3z(z-1) + z(z-1)(z-2),$$
$$z^4 = z + 7z(z-1) + 6z(z-1)(z-2) + z(z-1)(z-2)z-3),$$
$$z^5 = z + 15z(z-1) + 25z(z-1)(z-2) + 10z(z-1)(z-2)(z-3) + z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)\ldots$$

In ähnlicher Weise wird die andere Umformung vollzogen. Soll der Ausdruck reducirt werden:

$$\frac{A}{z+2} + \frac{B}{(z+2)(z+3)} + \frac{C}{(z+2)(z+3)(z+4)} + \frac{D}{(z+2)(z+3)(z+4)(z+5)} + \frac{E}{(z+2)(z+3)\ldots(z+6)} + \ldots$$

so wird

$$\frac{A}{z+2} = \frac{A}{z} - \frac{2A}{z(z+1)} + \frac{2A}{z(z+1)(z+2)}$$
$$\frac{B}{(z+2)(z+3)} = \frac{B}{z(z+1)} - \frac{4B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{6B}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$$
$$\frac{C}{(z+2)(z+3)(z+4)} = + \frac{C}{z(z+1)(z+2)} - \frac{6C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{12C}{z(z+1)\ldots(z+4)}$$
$$\frac{D}{(z+2)\ldots(z+5)} = + \frac{D}{z(z+1)(z+2)(z+3)} - \frac{8D}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots$$
$$\frac{E}{(z+2)\ldots(z+6)} = + \frac{E}{z(z+1)\ldots(z+4)} - \ldots,$$

die umgeformte Reihe ist daher:

$$= \frac{A}{z} + \frac{(B-2A)}{z(z+1)} + \frac{(C-4B+2A)}{z(z+1)(z+2)} + \frac{(D-6C+6B)}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{(E-8D+12C)}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots$$

Um Brüche zu transformiren, deren Nenner Potenzen sind, setzt man

$$\frac{1}{z^2} = \frac{a}{z(z+1)} + \frac{b}{z(z+1)(z+2)} + \frac{c}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{d}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \frac{e}{z(z+1)\ldots(z+5)} + \ldots$$

und erhält durch Multiplication $z^5 + 15z^4 + 85z^3 + 225z^2 + 274z + 120$

$$= a.z^5 + (14a+b)\,z^4 + (71a+12b+c)\,z^3 + (154a+47b+9c+d)\,z^2 + (120a+60b+20c+5d+e)\,z;$$

folglich $a = 1$, $b = 1$, $c = 1.2$, $d = 1.2.3$, $d = 1.2.3.4, \ldots$

Man kann auch hiebei die Multiplication für einzelne Fälle vermeiden, wenn man n mit $1 + n, 2 + n, 3 + n, \ldots (n + n)$ multiplicirt und die Coefficienten der gleichen Potenzen von n zu folgender Tabelle zusammen stellt:

1								
1	1							
2	3	1						
6	11	6	1					
24	50	35	10	1				
120	274	225	85	15	1			
720	1764	1624	735	175	21	1		
5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Die Zahlen in den verticalen Columnen sind die gesuchten Zähler, so dass

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1.2}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1.2.3}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots$$

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{3}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{11}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \frac{50}{z(z+1)\ldots(z+5)} + \ldots$$

$$\frac{1}{z^4} = \frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{6}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \frac{35}{z(z+1)\ldots(z+5)} + \frac{225}{z(z+1)\ldots(z+6)} + \ldots$$

$$\frac{1}{z^5} = \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \frac{10}{z(z+1)\ldots(z+5)} + \frac{85}{z(z+1)\ldots(z+6)} + \frac{735}{z(z+1)\ldots(z+7)} + \ldots$$

$$\frac{1}{z^6} = \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+5)} + \frac{15}{z(z+1)\ldots(z+6)} + \frac{175}{z(z+1)\ldots(z+7)} + \frac{1960}{z(z+1)\ldots(z+8)} + \ldots$$

Soll die Potenzen-Reihe $\frac{a}{z^2} + \frac{b}{z^3} + \frac{c}{z^4} + \frac{d}{z^5} + \frac{e}{z^6} + \ldots$ in eine Factoren-Reihe umgeformt werden, so benutzt man die Zahlen aus den horizontalen Columnen, setzt $\alpha = a$, $\beta = a + b$, $\gamma = 2a + 3b + c$, $\delta = 6a + 11b + 6c + d$, $\varepsilon = 24a + 50b + 35c + 10d + e, \ldots$ und die Reihe wird: $\frac{\alpha}{z\,z(+1)} + \frac{\beta}{z(z+1)(z+2)} + \frac{\gamma}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{\delta}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots$

Wenn die Glieder einer Reihe gebildet werden, indem man in dem Ausdruck $T = A + B.z + C.z(z-1) + D.z(z-1)(z-2)\ldots$ für z die Zahlen $1.2.3.4\ldots$ schreibt, so stellt Stirling die Proposition auf, dass die Summe der Glieder, deren Anzahl = z ist, bestimmt wird durch $S = A.z + (z+1)\left[\tfrac{1}{2}B.z + \tfrac{1}{3}C.z(z-1) + \tfrac{1}{4}D.z(z-1)(z-2)\ldots\right]$ und führt den Beweis in folgender Weise:

Wenn $S = A.z + \tfrac{1}{2}B.z(z+1) + \tfrac{1}{3}C.z(z+1)(z-1) + \tfrac{1}{4}D.z(z+1)(z-1)(z-2)\ldots$ sein soll, so geht der Ausdruck in $S - T$ über, wenn man für z den folgenden Werth $(z - 1)$ nimmt, so dass $S - T = A(z - 1) + \tfrac{1}{2}B.z(z-1) + \tfrac{1}{3}C.z(z-1)(z-2) + \tfrac{1}{4}D.z(z-1)(z-2)(z-3)\ldots$

Wird diese Gleichung von S subtrahirt, so erhält man

$$S - S + T = T = A(z - z + 1) + \tfrac{1}{2}B.z(z+1-z+1) + \tfrac{1}{3}C.z(z-1)(z+1-z+2)\ldots$$
$$= A + B.z + C.z(z-1) + \ldots,$$ und da dies der gegebene Ausdruck ist,

so ist die Proposition bewiesen.

Für die Summe der Quadratzahlen ist

$T = z^2 = z + z\,(z-1)$, mithin $A = 0,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0 \ldots$

$S = (z+1)\,[\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z\,(z-1)] = \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z.$

Für die Summe der Kubikzahlen ist

$T = z^3 = z + 3z(z-1) + z(z-1)(z-2)$, mithin $A=0,\ B=1,\ C=3,\ D=1,\ E=0 \ldots$

$S = (z+1)\,[\frac{1}{2}z + z\,(z-1) + \frac{1}{4}z\,(z-1)\,(z-2)] = \frac{1}{4}z^2\,(z+1)^2.$

Soll $S = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots$ bestimmt werden, so ist

$T = z^4 = z + 7z(z-1) + 6z(z-1)(z-2) + z(z-1)(z-2)(z-3),$

mithin $A=0,\ B=1,\ C=7,\ D=6,\ E=1,\ F=0 \ldots$

$S = (z+1)\,[\frac{1}{2}z + \frac{7}{3}z(z-1) + \frac{3}{2}z(z-1)(z-2) + \frac{1}{5}z(z-1)(z-2)(z-3)] = \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z.$

Wenn die Glieder einer Reihe gebildet werden, indem man beliebige Zahlen, die sich um die Einheit unterscheiden, in folgendem Ausdruck für z schreibt:

$$T = \frac{A}{z(z+1)} + \frac{B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{D}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \frac{E}{z(z+1)\ldots(z+5)} \ldots$$

so ist die Summe der Reihe

$$S = \frac{A}{z} + \frac{B}{2z(z+1)} + \frac{C}{3z(z+1)(z+2)} + \frac{D}{4z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{E}{5z(z+1)\ldots(z+4)} \ldots$$

Wird für z der folgende Werth $(z+1)$ genommen, so erhält man

$$S - T = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{2(z+1)(z+2)} + \frac{C}{3(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{D}{4(z+1)\ldots(z+4)} + \frac{E}{5(z+1)\ldots(z+5)} \ldots$$

und wird diese Gleichung von S subtrahirt, so ist

$$\begin{aligned} S - S + T = T &= \frac{A}{z} + \frac{B}{2z(z+1)} + \frac{C}{3z(z+1)(z+2)} + \frac{D}{4z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{E}{5z(z+1)\ldots(z+4)} \ldots \\ &- \frac{A}{z+1} - \frac{B}{2(z+1)(z+2)} - \frac{C}{3(z+1)(z+2)(z+3)} - \frac{D}{4(z+1)\ldots(z+4)} - \frac{E}{5(z+1)\ldots(z+5)} \ldots \\ &= \frac{A}{z(z+1)} + \frac{B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{D}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \frac{E}{z(z+1)\ldots(z+5)} \ldots \end{aligned}$$

Dieses ist der gegebene Ausdruck, und die Formel für die Summe S ist richtig.

Enthält T nur ein Glied, so findet man die Summe der Reihe, indem man den letzten Factor im Nenner weglässt und durch die Anzahl der übrigen Factoren dividirt.

Soll die Reihe summirt werden $\frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + \frac{1}{10.13.16} + \frac{1}{13.16.19} + \ldots$ welche durch die Gleichung definirt wird $T = \frac{1}{3z\,(3z+3)\,(3z+6)} = \frac{1}{27z\,(z+1)\,(z+2)}$, wenn man für $z = \frac{1}{3} \,.\, 1\frac{1}{3} \,.\, 2\frac{1}{3} \ldots$ setzt; so ist $S = \frac{1}{54z\,(z+1)}$. Für $z = \frac{1}{3}$ erhält man die Summe der ganzen Reihe $S = \frac{9}{54.1.4} = \frac{1}{24}$; der zweite Werth für $z = 1\frac{1}{3}$ gibt die Summe weniger dem ersten Gliede $\frac{3.3}{54.4.7} = \frac{1}{168} = \frac{1}{24} - \frac{1}{28}$. Diese Formel gibt auch die Summe für die Leibnitzschen Reihen. Die Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \ldots$ wird durch die Gleichung definirt $T = \frac{1}{z\,(z+2)}$, wenn die Zahlen $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots$ für z gesetzt werden.

Um $\frac{1}{z\,(z+2)}$ in summirbare Factoren zu zerlegen, setzt man

$$\frac{1}{z\,(z+2)} = \frac{a}{z\,(z+1)} + \frac{b}{z\,(z+1)\,(z+2)} = \frac{1}{z\,(z+1)} - \frac{1}{z\,(z+1)\,(z+2)}$$

und es wird $S = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z(z+1)}$. $z = 1$ gibt die Summe der ganzen Reihe $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2.2} = \frac{3}{4}$; $z = 2$ gibt die Summe, vermindert um das erste Glied $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$. Für die Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \ldots$ ist $T = \frac{1}{4z(z+1)}$, wenn $z = \frac{1}{2}\,.\,1\frac{1}{2}\,.\,2\frac{1}{2}\,.\,3\frac{1}{2}\,\ldots.$ $S = \frac{1}{4.z} = \frac{1}{2}$, für den ersten Werth $z = \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{2}$, gibt $S = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

Soll die Reihe der reciproken Quadrate summirt werden $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$, so ist $T = \frac{1}{z^2}$; die Zahlen aus der ersten Columne der 2ten Tabelle geben:

$$T = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1.2}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1.2.3}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots$$

$$S = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z(z+1)} + \frac{1.2}{3z(z+1)(z+2)} + \frac{1.2.3}{4z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1.2.3.4}{5z(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots$$

Bezeichnet $A = \frac{1}{z}$, $B = \frac{A}{z+1}$, $C = \frac{2B}{z+2}$, $D = \frac{3C}{z+3}\ldots$, so wird

$$S = A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{3}C + \tfrac{1}{4}D + \tfrac{1}{5}E + \tfrac{1}{6}F + \ldots$$

Diese Reihe convergirt schwach, wenn man sie vom ersten Gliede an für $z = 1$ berechnen wollte. Addirt man jedoch die ersten 24 Glieder $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \ldots + \frac{1}{576}$, deren Summe $= 1,\ 604\ 123\ 403\ 591\ 000\ 854\ldots$, so gibt der 25ste Werth für z die Summe der unendlichen Reihe vom 25sten Gliede an, und da $z = 25$, $A = \frac{1}{25}$, $B = \frac{A}{26}$, $C = \frac{2B}{27}$, $D = \frac{3C}{28}$, $E = \frac{4D}{29}\ldots$, so wird die gesuchte Summe $S' = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E + \ldots$, wovon für 18 Decimalstellen 30 Glieder zu berechnen sind, deren Summe $= 0,\ 040\ 810\ 663\ 257\ 225\ 579\ldots$, dazu die Summe der 24 ersten Glieder addirt, gibt $S = 1,\ 644\ 934\ 066\ 848\ 226\ 433\ldots$ Die Summe der reciproken Kuben ist nicht so einfach zu berechnen, weil die Reductions-Zahlen der zweiten Columne sehr stark, und nach keinem so einfachen Gesetze wachsen, als die der ersten.

Um den Vortheil seiner Methode anschaulich zu machen, summirt Stirling die Reihe, welche Brounker für die Quadratur der Hyperbel fand $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \ldots$ Die definirende Gleichung ist $T = \frac{1}{4z(z+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2z(2z+1)}$, wenn $z = \frac{1}{2}\,.\,1\frac{1}{2}\,.\,2\frac{1}{2}\,.\,3\frac{1}{2}\ldots$

Um T auf eine summirbare Form zu bringen, setzt man

$$\frac{1}{2z(2z+1)} = \frac{a}{z(z+1)} + \frac{b}{z(z+1)(z+2)} + \frac{c}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{d}{z(z+1)\ldots(z+4)} + \frac{e}{z(z+1)\ldots(z+5)} + \ldots$$

und findet durch Multiplication $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{8}$, $c = \frac{1.3}{16}$, $d = \frac{1.3.5}{32}$, $e = \frac{1.3.5.7}{64}$, $f = \frac{1.3.5.7.9}{128}\ldots$; daher

$$T = \frac{1}{4z(z+1)} + \frac{1}{8z(z+1)(z+2)} + \frac{1.3}{16z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1.3.5}{32z(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots$$

$$S = \frac{1}{4z} + \frac{1}{16z(z+1)} + \frac{1.3}{48z(z+1)(z+2)} + \frac{1.3.5}{128z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1.3.5.7}{320z(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots$$

Der leichteren Uebersicht wegen setzt man

$$A = \frac{1}{4z},\ B = \frac{A}{2z+2},\ C = \frac{3B}{2z+4},\ D = \frac{5C}{2z+6},\ E = \frac{7D}{2z+8}\ \ldots$$

$$S = A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{3}C + \tfrac{1}{4}D + \tfrac{1}{5}E + \tfrac{1}{6}F + \tfrac{1}{7}G + \tfrac{1}{8}H + \ldots$$

Die Reihe convergirt um so schneller, je grösser z ist. Berechnet man die Summe der 13 ersten Glieder durch Addition, und nimmt für z den 14ten Werth $= 13\frac{1}{2}$, so ist die Summe der unendlichen Reihe vom 14ten Gliede an sehr einfach für 10 — 12 Decimalen zu berechnen. Für $z = 13\frac{1}{2}$ ist $A = \frac{1}{54}$, $B = \frac{1}{29} A$, $C = \frac{3}{31} B$, $D = \frac{5}{33} C$, $E = \frac{7}{35} D$ . . . Die Summe von 16 solcher Glieder ist = 0, 018 861 219 477 . . ., dazu die Summe der 13 ersten Glieder mit 0, 674 285 961 078 ... addirt, gibt die Summe der unendlichen Reihe = 0, 693 147 180 555 ... Diese Zahl ist der natürliche Logarithmus von 2. Stirling bemerkt bei diesem Beispiel, dass es unausführbar wäre, die Summe der Reihe $\frac{1}{1 \,.\, 2} + \frac{1}{3 \,.\, 4} + \frac{1}{5 \,.\, 6} + \frac{1}{7 \,.\, 8} + \ldots$ durch gewöhnliche Addition für mehrere Decimalstellen zu berechnen, indem für 9 Stellen Tausend Millionen Glieder zu addiren wären, und gibt die Summe von je 100, 1000, 10000 bis Tausend Millionen Glieder so an: 0, 690 653 446 ..., 0, 692 897 242 ..., 0, 693 122 181 ..., 0, 693 144 680 ..., 0, 693 146 930 ..., 0, 693 147 155 ..., 0, 693 147 187 ..., 0, 693 147 180 ...

Um die Convergenz der Reihe für eine beträchtliche Anzahl von Decimalstellen zu prüfen, habe ich die 62 ersten Glieder der Reihe $\frac{1}{1 \,.\, 2} + \frac{1}{3 \,.\, 4} + \frac{1}{5 \,.\, 6} + \frac{1}{7 \,.\, 8} \ldots + \frac{1}{123 \,.\, 124}$ addirt, ihre Summe ist = 0, 689 131 181 071 879 791 234 708 551 970 708 826 245 515 125 884 078 162 . . . Der 63ste Werth für $z = 62\frac{1}{2}$ gibt die Summe der unendlichen Reihe vom 63sten Gliede an, und es ist $A = \frac{1}{250}$, $B = \frac{A}{127}$, $C = \frac{3\,B}{129}$, $D = \frac{5\,C}{131}$, $E = \frac{7\,D}{133}$, $F = \frac{9\,E}{135}$ . . . Zu 54 Decimalen sind 114 Glieder zu summiren, von der Form $A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{3} C + \frac{1}{4} D + \frac{1}{5} E + \frac{1}{6} F + \ldots$, deren Summe = 0, 004 015 999 488 065 518 182 523 569 487 467 741 829 985 008 476 177 075 . . .

Addirt man hiezu die Summe der 62 ersten Glieder, so erhält man

Log. nat. 2 = 0, 693 147 180 559 945 309 417 232 121 458 176 568 075 500 134 360 255 237 . . .

Bezeichnet T einen Ausdruck von der Form

$$T = \overset{z+n}{x} \left\{ \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z\,(z+1)} + \frac{\gamma}{z\,(z+1)\,(z+2)} + \frac{\delta}{z\,(z+1)\,(z+2)\,(z+3)} + \ldots \right\}$$

und werden für z Zahlen gesetzt, die sich um die Einheit von einander unterscheiden, so ist die Summe der dadurch gebildeten Reihe vom ersten Gliede an:

$$S = \overset{z+n}{x} \left\{ \frac{\alpha}{(1-x)\,z} + \frac{(\beta - ax)}{(1-x)\,z\,(z+1)} + \frac{(\gamma - 2\,bx)}{(1-x)\,z\,(z+1)\,(z+2)} + \frac{(\delta - 3\,cx)}{(1-x)\,z\,(z+1)\ldots(z+3)} + \frac{(\varepsilon - 4\,dx)}{(1-x)\,z\ldots(z+4)} + \ldots \right\}$$

Wenn $a = \frac{\alpha}{1-x}$, $b = \frac{\beta - ax}{1-x}$, $c = \frac{\gamma - 2\,bx}{1-x}$, $d = \frac{\delta - 3\,cx}{1-x}$, $e = \frac{\varepsilon - 4\,dx}{1-x}$ . . . gesetzt wird, so ist

$$S = \overset{z+n}{x} \left\{ \frac{a}{z} + \frac{b}{z\,(z+1)} + \frac{c}{z\,(z+1)\,(z+2)} + \frac{d}{z\,(z+1)\,(z+2)\,(z+3)} + \frac{e}{z\,(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots \right\}$$

Wird für z der folgende Werth (z + 1) genommen, so erhält man die Summe der Reihe, vermindert um das erste Glied,

$$S' = S - T = \overset{z+n+1}{x} \left\{ \frac{a}{z+1} + \frac{b}{(z+1)(z+2)} + \frac{c}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{d}{(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots \right\}$$

$$= \overset{z+n}{x} \left\{ \frac{ax}{z+1} + \frac{bx}{(z+1)(z+2)} + \frac{cx}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{dx}{(z+1)\ldots(z+4)} + \ldots \right\}$$

Da aber $\frac{ax}{z+1} = \frac{ax}{z} - \frac{ax}{z(z+1)}$, $\frac{bx}{(z+1)(z+2)} = \frac{bx}{z(z+1)} - \frac{2\,bx}{z(z+1)(z+2)}$,

$$\frac{cx}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \frac{cx}{z(z+1)(z+2)} - \frac{3\,cx}{z\ldots(z+3)},\ \frac{dx}{(z+1)\ldots(z+4)} = \frac{dx}{z\ldots(z+3)} - \frac{4\,dx}{z\ldots(z+4)} \ldots,$$

so wird $(S-T) = \overset{z+n}{x} \left\{ \frac{ax}{z} + \frac{(bx-ax)}{z(z+1)} + \frac{(cx-2\,bx)}{z(z+1)(z+2)} + \frac{(dx-3\,cx)}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \ldots \right\}$

und wenn man diesen Ausdruck von

$$S = \overset{z+n}{z} \left\{ \frac{a}{z} + \frac{b}{z(z+1)} + \frac{c}{z(z+1)(z+2)} + \frac{d}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \ldots \right\}$$

subtrahirt, so erhält man

$$S - S + T = T = \overset{z+n}{x} \left\{ \frac{a(1-x)}{z} + \frac{b(1-x)+ax}{z(z+1)} + \frac{c(1-x)+2\,bx}{z(z+1)(z+2)} + \frac{d(1-x)+3\,cx}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \ldots \right\}$$

$$= \overset{z+n}{x} \left\{ \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z(z+1)} + \frac{\gamma}{z(z+1)(z+2)} + \frac{\delta}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \ldots \right\}$$

weil $a(1-x) = \alpha$, $b(1-x) + ax = \beta$, $c(1-x) + 2\,bx = \gamma$, $d(1-x) + 3\,cx = \delta \ldots$ T ist der gegebene Ausdruck, daher ist die Formel für die Summe richtig.

Wenn $1 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{5}t^2 + \frac{1}{7}t^3 + \frac{1}{9}t^4 + \frac{1}{11}t^5 + \ldots$ definirt durch $T = t \cdot \overset{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2z}}$ summirt werden soll, wenn $z = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} \ldots$, so gibt die Vergleichung mit dem allgemeinen Ausdruck: $x = t$, $n = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 0 \ldots$ $a = \frac{1}{2(1-t)}$, $b = -\frac{at}{(1-t)} = -\frac{t}{2(1-t)^2}$,

$$c = -\frac{2\,bt}{1-t} = +\frac{2\,t^2}{2(1-t)^3},\ d = -\frac{3\,ct}{1-t} = -\frac{3 \cdot 2\,t^3}{2(1-t)^4},\ e = -\frac{4\,dt}{1-t} = +\frac{4 \cdot 3 \cdot 2\,t^4}{2(1-t)^5} \ldots .$$

$$S = \overset{z-\frac{1}{2}}{t} \left\{ \frac{1}{2(1-t)z} - \frac{t}{2(1-t)^2 z(z+1)} + \frac{2\,t^2}{2(1-t)^3 z(z+1)(z+2)} - \frac{3 \cdot 2\,t^3}{2(1-t)^4 z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2\,t^4}{z(1-t)^5 z(z+1)\ldots(z+4)} - \ldots \right\}$$

Der Werth $t = -1$ gibt die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots (-1)^{k} \cdot \frac{1}{2k+1}$, welche Leibnitz für die Kreisfläche fand, deren Durchmesser $= 1$, ohne sie zu summiren.

Die Summe ist:

$$S = \frac{1}{4z} + \frac{1}{2.4z(z+1)} + \frac{1}{2.2^3 z(z+1)(z+2)} + \frac{3.2}{2.2^4 z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{4.3.2}{2.2^5 z(z+1)\ldots(z+4)} + \frac{5.4.3.2}{2.2^6 z(z+1)\ldots(z+5)} + \ldots$$

Wendet man Newtons Bezeichnung an, indem man jedes folgende Glied durch das vorhergehende ausdrückt, so wird $S = \frac{1}{4z} + \frac{A}{2z+2} + \frac{2\,B}{2z+4} + \frac{3\,C}{2z+6} + \frac{4\,D}{2z+8} + \frac{5\,E}{2z+10} + \ldots$ Der erste Werth $z = \frac{1}{2}$ gibt die Summe der ganzen Reihe, der zweite $z = 1\frac{1}{2}$ die Summe der Reihe vermindert um das erste Glied, u. s. w.

Stirling berechnet die Summe der erten 12 Glieder durch Addition, und die Summe aller übrigen Glieder, da $z = 12\frac{1}{2}$, bis 10 Decimalstellen durch $\frac{1}{50} + \frac{A}{27} + \frac{2\,B}{29} + \frac{3\,C}{31} + \frac{4\,D}{33} + \frac{5\,E}{35} + \ldots$

Man kann jedoch mit verhältnissmässig geringer Mühe den Kreis bis auf viele Decimalstellen berechnen, wenn man mehrere Anfangsglieder addirt, und für z eine um so grössere Zahl erhält. Zur Probe habe ich die ersten 62 Glieder der Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots + \frac{1}{121} - \frac{1}{123}$ bis 84 Stellen berechnet. Die Summe der positiven Glieder ist

= + 1, 913 346 896 239 804 901 399 125 113 610 736 651 501 733
303 370 360 865 652 510 436 624 478 281 472 076 723 714 . . .

die der negativen = — 1, 131 980 728 748 451 466 330 588 547 124 987 763 373 930
176 106 996 439 157 669 947 647 703 861 388 663 603 111 . . .

die Summe der 62 Glieder

= + 0, 781 366 167 491 353 435 068 536 566 485 748 888 127 803
127 263 364 426 494 840 488 976 774 420 083 413 120 603 . . .

Für die Summe der übrigen Glieder erhält man, da $z = 62\frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{4z} = \frac{1}{250}$ ist:

$$\frac{1}{250} + \frac{A}{127} + \frac{2\,B}{129} + \frac{3\,C}{131} + \frac{4\,D}{133} + \frac{5\,E}{135} + \frac{6\,F}{137} + \dots$$

wovon 140 Glieder für 84 Decimalen zu berechnen sind, deren Summe

= + 0, 004 031 995 906 094 874 547 124 279 334 126 832 921 489
222 580 412 028 748 895 659 100 179 681 488 139 129 062 . . .

kommt dazu die Summe der 62 ersten Glieder, so wird

$\frac{\pi}{4} =$ 0, 785 398 163 397 448 309 615 660 845 819 875 721 049 292
349 843 776 455 243 736 148 076 954 101 571 552 249 665 . . .

$\pi =$ 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169
399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 . . .

Nach mehreren anderen Beispielen kommt Stirling noch einmal auf die Summe der Reihe zurück $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$, deren Ableitung jedoch zu weit führen würde. Wenn eine beliebige Anzahl von Gliedern addirt ist, dann wird das folgende mit A bezeichnet und der dazu gehörige Werth von z bestimmt, dann ist $B = \frac{1}{2} A \cdot \frac{1}{2(z+1)} \cdot \frac{1^2}{(z+1)^2}$, $C = \frac{1}{2} B \cdot \frac{2}{(2z+3)} \cdot \frac{3^2}{(z+2)^2}$, $D = \frac{1}{2} C \cdot \frac{3}{(2z+5)} \cdot \frac{5^2}{(z+3)^2}$, $E = \frac{1}{2} D \cdot \frac{4}{(2z+7)} \cdot \frac{7^2}{(z+4)^2} \dots$ und die Summe der Reihe vom Gliede A

$$S = \frac{1}{4z} \left\{ (2z+1)\,A - (2z+5)\,B + (2z+9)\,C - (2z+13)\,D + (2z+17)\,E - \dots \right\}$$

Werden wieder die ersten 62 Glieder addirt, so ist $A = \frac{1}{125}$, $z = 62\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{126} \cdot \frac{2}{127^2} A$, $C = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3^2}{128 \cdot 129^2} B$, $D = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5^2}{130 \cdot 131^2} C$, $E = \frac{2 \cdot 4 \cdot 7^2}{132 \cdot 133^2} \dots$, und

$$S = \frac{1}{125} \left[63\,A - 65\,B + 67\,C - 69\,D + 71\,E - \dots\right]$$

Die Zahlen A . B . C . D . . . nehmen so schnell ab, dass man für 90 Decimalstellen nur 42 Glieder zu berechnen hat.

Eulers Methode Reihen zu summiren unterscheidet sich von der Stirlings wesentlich durch Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung. Sie wurde bekannt gemacht im 8ten Bande der Petersburger Commentarien für 1736, in den Abhandlungen „Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali“ und „Methodus universalis series summandi ulterius promota“.

Ist y irgend eine Funktion von x, und man vermehrt x um dx, so geht y über in $y + dy$, und in $y + 2\,dy + d^2y$, oder $y + 3\,dy + 3\,d^2y + d^3y$, wenn $x + 2\,dx$, oder $x + 3\,dx$ statt x gesetzt wird.

Wird x um mdx vermehrt, so geht y über in

$$y + \frac{m}{1} dy + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^2y + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3y + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4y + \ldots.$$

Ist m eine so grosse Zahl, dass mdx als eine endliche Grösse angesehen werden kann, so erhält man $y + \frac{m}{1} dy + \frac{m^2}{1 \cdot 2} d^2y + \frac{m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3y + \frac{m^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4y + \ldots$, oder wenn $mdx = a$, $m = \frac{a}{dx}$ gesetzt wird, $y + \frac{a}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots$

Ist y eine solche Funktion von x, dass sie, für $x = 0$, verschwindet, und man setzt $x = -a$, so dass $x + a = 0$, so wird

$$0 = y - \frac{x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} - \ldots$$

$$y = \frac{x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots$$

Wenn irgend eine Reihe gegeben ist $A + B + C + D \ldots + X$, in der A das erste Glied ist, B das zweite, und X dasjenige, dessen Index $= x$, so heisst X das allgemeine Glied dieser Reihe. Bezeichnet S die Summe der Reihe, so heisst S das summatorische Glied; und wenn die Reihe bestimmt ist, so werden X und S durch constante Grössen und x ausgedrückt. Da S die Summe so vieler Glieder bedeutet, als x Einheiten enthält, so erhält man, wenn $x - 1$ statt x gesetzt wird, die vorige Summe, vermindert um das Glied X. Durch diese Substitution geht S über in $S - X$, und die Vergleichung mit der vorigen Formel gibt $y = S$, $a = -1$,

$$S - X = S - \frac{dS}{1 \cdot dx} + \frac{d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \ldots$$

$$X = \frac{dS}{1 \cdot dx} - \frac{d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \frac{d^5S}{5! \cdot dx^5} - \ldots$$

Das allgemeine Glied ist hier durch das summatorische bestimmt, man kann aber auch das summatorische Glied durch das allgemeine ausdrücken. Setzt man

$$\frac{dS}{dx} = \alpha X + \beta \cdot \frac{dX}{dx} + \gamma \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \delta \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \ldots$$

so wird

$$\begin{aligned}
S &= \alpha \int X dx + \beta X + \gamma \cdot \frac{dX}{dx} + \delta \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \varepsilon \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \ldots \\
\frac{d^2S}{dx^2} &= \alpha \cdot \frac{dX}{dx} + \beta \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \gamma \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \delta \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \varepsilon \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \ldots \\
\frac{d^3S}{dx^3} &= + \alpha \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \beta \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \gamma \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \delta \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \ldots \\
\frac{d^4S}{dx^4} &= + \alpha \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \beta \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \gamma \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \ldots \\
\frac{d^5S}{dx^5} &= + \alpha \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \beta \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \ldots \\
\frac{d^6S}{dx^6} &= + \alpha \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \ldots
\end{aligned}$$

Werden diese Werthe in die Gleichung gesetzt:

$$X = \frac{dS}{1 \cdot dx} - \frac{d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \frac{d^5S}{5! \cdot dx^5} - \frac{d^6S}{6! \cdot dx^6} + \ldots$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
X = \alpha X &+ \beta \cdot \frac{dX}{dx} + \gamma \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \delta \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \eta \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \dots \\
&- \alpha \cdot \frac{dX}{2 \cdot dx} - \beta \cdot \frac{d^2X}{2 \cdot dx^2} - \gamma \cdot \frac{d^3X}{2 \cdot dx^3} - \delta \cdot \frac{d^4X}{2 \cdot dx^4} - \varepsilon \cdot \frac{d^5X}{2 \cdot dx^5} - \dots \\
&+ \alpha \cdot \frac{d^2X}{6 \cdot dx^2} + \beta \cdot \frac{d^3X}{6 \cdot dx^3} + \gamma \cdot \frac{d^4X}{d \cdot dx^4} + \delta \cdot \frac{d^5X}{6 \cdot dx^5} + \dots \\
&- \alpha \cdot \frac{d^3X}{24 \cdot dx^3} - \beta \cdot \frac{d^4X}{24 \cdot dx^4} - \gamma \cdot \frac{d^5X}{24 \cdot dx^5} - \dots \\
&+ \alpha \cdot \frac{d^4X}{120 \cdot dx^4} + \beta \cdot \frac{d^5X}{120 \cdot dx^5} + \dots \\
&- \alpha \cdot \frac{d^5X}{720 \cdot dx^5} - \dots
\end{aligned}$$

$\alpha = 1,\ \beta - \frac{\alpha}{2} = 0,\ \gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} = 0,\ \delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{24} = 0,$

$\varepsilon - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\beta}{24} + \frac{\alpha}{120} = 0,\ \eta - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{6} - \frac{\gamma}{24} + \frac{\beta}{120} - \frac{\alpha}{720} = 0,$ woraus

$\alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{1}{12} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2},\ \delta = 0,\ \varepsilon = -\frac{1}{6!},\ \eta = 0.$

Die Rechnung kann beliebig fortgesetzt werden, und gibt folgende Coefficienten: $+1,\ +\frac{1}{1 \cdot 2},\ +\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2},\ 0,\ -\frac{1}{6!},\ 0,\ +\frac{1}{7! \cdot 6},\ 0,\ -\frac{3}{10!},\ 0,\ +\frac{5}{11! \cdot 6},\ 0,\ -\frac{691}{13! \cdot 210},$ $0,\ +\frac{35}{15! \cdot 2},\ 0, -\frac{3617}{17! \cdot 30},\ 0, +\frac{2423279}{19! \cdot 1890},\ 0, \dots$ Die Substitution dieser Coefficienten gibt das summatorische Glied

$$S = \int X dx + \frac{X}{1 \cdot 2} + \frac{dX}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot dx} - \frac{d^3X}{6! \cdot dx^3} + \frac{d^5X}{7! \cdot 6 \cdot dx^5} - \frac{3\, d^7X}{10! \cdot dx^7} + \frac{5\, d^9X}{11! \cdot 6 \cdot dx^9}$$
$$- \frac{691\, d^{11}X}{13! \cdot 210 \cdot dx^{11}} + \frac{35\, d^{13}X}{15! \cdot 2 \cdot dx^{13}} - \frac{3617\, d^{15}X}{17! \cdot 30 \cdot dx^{15}} + \frac{2423279\, d^{17}X}{19! \cdot 1890 \cdot dx^{17}} - \dots$$

Dem Integral $\int X dx$ ist eine solche Constante hinzuzufügen, dass für $x = 0$, auch S verschwindet. Nach dieser Formel können Reihen summirt werden, deren Glieder ganze positive Potenzen von x enthalten, deren Differential-Quotienten einmal verschwinden. Soll z. B. die Potenzen-Reihe der natürlichen Zahlen summirt werden $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \dots + x^n$, so ist

$$X = x^n, \int X dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1},\ \frac{dX}{dx} = n x^{n-1},\ \frac{d^3X}{dx^3} = n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} \dots \frac{d^{(2k+1)}X}{dx^{2k+1}}$$
$$= n\,(n-1)\,(n-2) \dots (n-2k)\,x^{n-(2k+1)}$$

$$S = C + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{n x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{6!}\,x^{n-3} + \frac{n\,(n-1) \dots (n-4)}{7! \cdot 6}\,x^{n-5}$$
$$- \frac{3 n\,(n-1) \dots (n-6)}{10!}\,x^{n-7} + \frac{5 n\,(n-1) \dots (n-8)}{11! \cdot 6}\,x^{n-9} - \frac{691 n\,(n-1) \dots (n-10)}{13! \cdot 210}\,x^{n-11} + \dots$$

Nimmt man für n die natürlichen Zahlen, so wird $Sx^1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$, $Sx^2 = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x$, $Sx^3 = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{4} x^2\,(x+1)^2$, $Sx^4 = \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x$, $Sx^5 = \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{2} x^5 + \frac{5}{12} x^4 - \frac{1}{12} x^2 \dots$ Die von x unabhängigen Glieder, die bei den ungeraden Potenzen vorkommen, sind wegzulassen, weil die Constante so beschaffen sein muss, dass für $x = 0$ auch $S = 0$ wird. Wenn in dem allgemeinen Gliede der Reihe andere als ganze positive Exponenten vorkommen, kann die Summe nur durch eine unendliche Anzahl von Gliedern bestimmt werden. Euler wendet jedoch seine Methode auch auf Reihen dieser Art an, die wenig convergiren. Bei der harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{x}$ ist das allgemeine Glied $X = \frac{1}{x}$, $\int X dx = C + \text{Log. } x$, $\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{1.2.3}{x^4}$, $\frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{5!}{x^6}$, $\frac{d^7X}{dx^7} = -\frac{7!}{x^8} \ldots$ und das summatorische Glied:

$$S = C + \text{Log. } x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} + \frac{3617}{8160x^{16}} - \ldots$$

Die Constante kann hieraus nicht bestimmt werden, weil für $x = 0$ $\frac{1}{2x}$ und alle übrigen Glieder unendlich werden. Wenn man aber eine beliebige Anzahl von Gliedern addirt, z. B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = 2,928\,968\,253\,968\,253\,968 \ldots$, dann $x = 10$ setzt, und

$$S = C + \text{Log. } 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{1200} + \frac{1}{120000} - \frac{1}{252.10^6} + \frac{1}{240.10^8} - \frac{1}{132.10^{10}} + \frac{691}{3276.10^{13}} - \frac{1}{12.10^{14}} + \frac{3617}{816.10^{17}} - \ldots$$

berechnet, so kann die Constante bestimmt werden. Die Summe der positiven Glieder ist

$= + 0,050\,000\,833\,375\,021\,093 \ldots$, der negativen
$= - 0,000\,833\,337\,302\,345\,709 \ldots$, die Reihe
$= + 0,049\,167\,496\,072\,675\,384 \ldots$, dazu
Log. nat. $10 = + 2,302\,585\,092\,994\,045\,684 \ldots$, gibt
$= + 2,928\,968\,253\,968\,253\,968 \ldots$, folglich
$C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,900 \ldots$

Ist die Constante bestimmt, so berechnet man mit Leichtigkeit die Summe von jeder beliebigen Anzahl von Gliedern für so viele Decimalen, als die Constante enthält. Für die Summe von 1000 Gliedern ist Log. nat. 1000 = 3 . Log. nat. 10, und man braucht von der Reihe nur 3 Glieder $+ \frac{1}{2000} - \frac{1}{12 \cdot 1000^2} + \frac{1}{120 \cdot 1000^4}$, deren Summe

$= 0,000\,499\,916\,666\,675\,000 \ldots$
Log. nat. $1000 = 6,907\,755\,278\,982\,137\,052 \ldots$
$C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,900 \ldots$
$S(1000) = 7,485\,470\,860\,550\,344\,952 \ldots$

Soll die Reihe summirt werden: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$, so ist

$$X = \frac{1}{2x-1}, \int X dx = C + \tfrac{1}{2}\text{Log. } (2x-1), \frac{dX}{dx} = -\frac{2}{(2x-1)^2}, \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{(2x-1)^4},$$

$$\frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{(2x-1)^6}, \frac{d^7X}{dx^7} = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14}{(2x-1)^8} \ldots$$

$$S = C + \tfrac{1}{2}\text{Log } (2x-1) + \frac{1}{2(2x-1)} - \frac{1}{6(2x-1)^2} + \frac{1}{15(2x-1)^4} - \frac{8}{63(2x-1)^6}$$
$$+ \frac{8}{15(2x-1)^8} - \frac{128}{33(2x-1)^{10}} + \frac{256 \cdot 691}{4095(2x-1)^{12}} - \frac{2048}{3(2x-1)^{14}} + \frac{1024 \cdot 3617}{255(2x-1)^{16}} - \ldots$$

Hier kann die Constante nicht so einfach, wie bei der vorigen Reihe durch Addition einiger Glieder bestimmt, aber aus der vorigen Constante abgeleitet werden.

Wird die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$ ins Unendliche fortgesetzt, so ist ihre Summe $= C^1 + \frac{1}{2}\text{Log. } \infty$, weil alle übrigen Glieder verschwinden. Wird von dem Doppelten dieser Reihe die einfache harmonische subtrahirt:

$$2 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{7} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{11} + \tfrac{2}{13} + \ldots = 2\,C^{1} + \text{Log.}\,\infty$$
$$-1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} - \ldots = -(C + \text{Log.}\,\infty)$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \ldots = 2\,C^{1} - C.$$

Die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$ ist der natürliche Logarithmus von 2, daher ist

$$\text{Log. nat. } 2 = 2\,C^{1} - C,\quad C^{1} = \tfrac{1}{2}(\text{Log. nat. } 2 + C)$$
$$\text{Log. nat. } 2 = 0,\ 693\ 147\ 180\ 559\ 945\ 309\ \ldots$$
$$C = 0,\ 577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 900\ \ldots$$
$$\text{Log. nat. } 2 + C = 1,\ 270\ 362\ 845\ 461\ 478\ 209\ \ldots$$
$$C^{1} = 0,\ 635\ 181\ 422\ 730\ 739\ 105\ \ldots$$

Für die Summe der reciproken Quadrate $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots$ ist

$$X = \frac{1}{x^2},\ \int X dx = C - \frac{1}{x},\ \frac{dX}{dx} = -\frac{2}{x^3},\ \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{2\,.\,3\,.\,4}{x^5},\ \frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{x^7},$$
$$\frac{d^7X}{dx^7} = -\frac{8!}{x^9}\ \ldots\ \frac{d^{(2k+1)}X}{dx^{(2k+1)}} = -\frac{(2k+2)!}{x^{(2k+3)}}$$
$$S = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - \frac{1}{42x^7} + \frac{1}{30x^9} - \frac{5}{66x^{11}} + \frac{691}{2730x^{13}} - \frac{7}{6x^{15}} + \frac{3617}{510x^{17}} - \ldots$$

Die Summe der ersten 10 Glieder ist $= 1,\ 549\ 767\ 731\ 166\ 540\ 690\ \ldots$, dazu kommt, weil $x = 10$:

$$C - \frac{1}{10} + \frac{1}{200} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{30.10^5} - \frac{1}{42.10^7} + \frac{1}{30.10^9} - \frac{5}{66.10^{11}} + \frac{691}{273.10^{14}} - \frac{7}{6.10^{15}} + \frac{3617}{51.10^{18}} - \ldots$$

Für 18 Stellen reichen diese 10 Glieder aus, deren Summe

$$= \quad -0,\ 095\ 166\ 335\ 681\ 685\ 742\ \ldots$$
$$1,\ 549\ 767\ 731\ 166\ 540\ 690\ \ldots$$
$$= C - 0,\ 095\ 166\ 335\ 681\ 685\ 742\ \ldots$$
$$C = 1,\ 644\ 934\ 066\ 848\ 226\ 432\ \ldots$$

Diese Constante ist die Summe der ins Unendliche verlängerten Reihe, denn wenn $x = \infty$, bleibt $S = C$, weil alle übrigen Glieder verschwinden. Soll die Summe der reciproken Kuben berechnet werden $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \ldots$, so ist $X = \frac{1}{x^3}$, $\int X dx = C - \frac{1}{2x^2}$, $\frac{dX}{dx} = -\frac{3}{x^4}$,

$$\frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{3\,.\,4\,.\,5}{x^6},\ \frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}{x^8},\ \frac{d^7X}{dx^7} = -\frac{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9}{x^{10}} - \ldots$$
$$S = C - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{12x^6} - \frac{1}{12x^8} + \frac{1}{20x^{10}} - \frac{5}{12x^{12}} + \frac{691}{420x^{14}} - \frac{35}{4x^{16}} + \frac{3617}{60x^{18}} - \ldots$$

Die Summe der 10 ersten Glieder $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} \ldots + \frac{1}{729} + \frac{1}{1000}$ ist

$$= 1,\ 197\ 531\ 985\ 674\ 193\ 251\ \ldots$$
$$= C - \frac{1}{200} + \frac{1}{2000} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{12.10^6} - \frac{1}{12.10^8} + \frac{1}{20.10^{10}} - \frac{5}{12.10^{12}} + \frac{691}{42.10^{15}} - \frac{35}{4.10^{16}} + \frac{3617}{6.10^{19}} - \ldots$$

Für 18 Decimalstellen sind 10 Glieder der Reihe ausreichend, deren Summe

$$= C - 0,\ 004\ 524\ 917\ 485\ 401\ 030\ \ldots$$
$$= \quad + 1,\ 197\ 531\ 985\ 674\ 193\ 251\ \ldots, \text{ folglich}$$
$$C = 1,\ 202\ 056\ 903\ 159\ 594\ 281\ \ldots$$

Die Constante ist ebenfalls der Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe gleich.

In der zweiten Abhandlung: „Methodus universalis series summandi ulterius promota", bemerkt Euler, dass die Formel

$$\int X dx + \frac{X}{2} + \frac{dX}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2\,.\,dx} - \frac{d^3X}{6!\,.\,dx^3} + \frac{d^5X}{7!\,.\,6\,dx^5} - \frac{3\,d^7X}{10!\,.\,dx^7} + \ldots$$

nach der man aus dem allgemeinen Gliede die Summe einer Reihe vom ersten bis zu einem bestimmten Gliede berechnet, auf Reihen nicht anwendbar sei, in denen X keine algebraische Funktion von x ist; auch nicht auf solche, in denen X zwar eine algebraische Funktion von x ist, deren Differentiale aber complicirt sind, und auf schwach convergirende Reihen führen. Nach vielem Nachdenken aber sei es ihm gelungen, aus demselben Princip, mit dessen Hilfe er die genannte Formel gefunden, zwei andere abzuleiten, von denen eine geeignet ist, Reihen vom ersten bis zu einem bestimmten Gliede zu summiren, die zweite aber die Summe von einem bestimmten Gliede bis ins Unendliche gibt. Nimmt man eine Reihe an, deren allgemeines Glied zwar algebraisch auszudrücken ist, in der aber die Indices in einer arithmetrischen Progression fortschreiten, wie $S = \overset{a}{A} + \overset{a+b}{B} + \overset{a+2b}{C} + \overset{a+3b}{D} \ldots + \overset{x}{X}$, in welcher die Indices um b wachsen, und setzt statt x den Index (x — b), so erhält man die vorige Summe, vermindert um das Glied X. Die Substitution von (x — b) gibt:

$$S - X = S - \frac{b\,.\,dS}{1\,.\,dx} + \frac{b^2\,.\,d^2S}{1\,.\,2\,.\,dx^2} - \frac{b^3\,.\,d^3S}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{b^4\,.\,d^4S}{4!\,.\,dx^4} - \frac{b^5\,.\,d^5S}{5!\,.\,d^5x} + \ldots$$

$$X = \frac{b\,.\,dS}{1\,.\,dx} - \frac{b^2\,.\,d^2S}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{b^3\,.\,d^3S}{1\,.\,2\,.\,3\,\cdot\,dx^3} - \frac{b^4\,.\,d^4S}{4!\,.\,dx^4} + \frac{b^5\,.\,d^5S}{5!\,.\,dx^5} - \ldots$$

Dieselbe Umformung, wie vorhin, gibt:

$$S = \int\frac{X dx}{b} + \frac{X^2}{2} + \frac{b\,.\,dX}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2\,.\,dx} - \frac{b^3\,.\,d^3X}{6!\,.\,dx^3} + \frac{b^5\,.\,dX^5}{7!\,.\,6\,.\,dx^5} - \frac{3\,b^7\,.\,d^7X}{10!\,.\,dx^7} + \frac{5\,b^9\,.\,d^9X}{11!\,.\,6\,dx^9}$$

$$- \frac{691\,b^{11}\,.\,d^{11}X}{13!\,.\,210\,dx^{11}} + \frac{35\,b^{13}\,.\,d^{13}X}{15!\,.\,2\,dx^{13}} - \frac{3617\,b^{15}\,.\,d^{15}X}{17!\,.\,30\,dx^{15}} + \ldots$$

Die noch hinzuzufügende Constante muss der Art sein, dass für $x = a$, $S = A$ wird, oder $S = 0$, für $x = a - b$.

Setzt man $X = x^n$, so dass die Summe folgender Reihe zu bestimmen ist:

$$a^n + (a + b)^n + (a + 2\,b)^n + (a + 3\,b)^n + (a + 4\,b)^n \ldots + x^n,$$

so wird $\int X dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1}$, $\frac{dX}{dx} = n x^{n-1}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, $\frac{d^5X}{dx^5} = n(n-1)\ldots(n-4)x^{n-5} \ldots$

$$S = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)\,b} + \frac{x^n}{1\,.\,2} + \frac{nb\,.\,x^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2} - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,b^3\,.\,x^{n-3}}{6!} + \frac{n\,(n-1)\ldots(n-4)\,b^5\,.\,x^{n-5}}{7!\,.\,6} \ldots$$

$$- \frac{a^{n+1}}{(n + 1)\,b} + \frac{a^n}{1\,.\,2} - \frac{nb\;a^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2} + \frac{n\,(n-1)(n-2)\,b^3\,.\,x^{n-3}}{6!} - \frac{n\,(n-1)\ldots(n-4)\,b^5\,.\,a^{n-5}}{7!\,.\,6} \ldots$$

Werden für n die Zahlen 1 . 2 . 3 . 4 ... genommen, so werden die Summen der Reihen:

$$a + (a + b) + (a + 2\,b) + (a + 3\,b) \ldots + x = \frac{x^2 - a^2 + bx + ab}{2\,b}$$

$$a^2 + (a + b)^2 + (a + 2\,b)^2 + (a + 3\,b)^2 \ldots + x^2 = \frac{2\,x^3 - 2\,a^2 + 3\,bx^2 + 3\,a^2b + b^2x - ab^2}{6\,b}$$

$$a^3 + (a + b)^3 + (a + 2\,b)^3 + (a + 3\,b)^3 \ldots + x^3 = \frac{x^4 - a^4 + 2\,bx^3 + 2\,ba^3 + x^2 - a^2}{4\,b}$$

$$a^4 + (a + b)^4 + (a + 2\,b)^4 + (a + 3\,b)^4 \ldots + x^4 = \frac{6\,x^5 - 6\,a^5 + 15\,bx^4 + 15\,ba^4 + 10\,b^2x^3 - 10\,b^2a^3 - b^4x + b^4a}{30\,b}$$

Um die Summe einer unendlichen Reihe von einem bestimmten Gliede X, dessen Index $= x$, zu berechnen, setzt man $\overset{x}{X} + \overset{x+b}{Y} + \overset{x+2b}{Z} + \overset{x+3b}{U} + \ldots \infty = S$, und die Substitution von $(x + b)$ statt x gibt:

$$S - X = S + \frac{b\,.\,dS}{1\,.\,dx} + \frac{b^2\,.\,d^2S}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{b^3\,.\,d^3S}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{b^4\,.\,d^4S}{4!\,.\,dx^3} + \frac{b^5\,.\,d^5S}{5!\,.\,dx^5} + \ldots$$

$$X = -\frac{b\,.\,dS}{1\,.\,dx} - \frac{b^2\,.\,d^2S}{1\,.\,2\,.\,dx^2} - \frac{b^3\,.\,d^3S}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} - \frac{b^4\,.\,d^4S}{4!\,.\,dx^4} - \frac{b^5\,.\,d^5S}{5!\,.\,dx^5} - \ldots$$

und dieselbe Umformung, wie vorher

$$S = -\int\frac{X\,.\,dx}{b} + \frac{X}{1\,.\,2} - \frac{b\,.\,dX}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2\,.\,dx} + \frac{b^3\,.\,d^3X}{6!\,.\,dx^3} - \frac{b^5\,.\,d^5X}{7!\,.\,6\,.\,dx^5} + \frac{3\,b^7\,.\,d^7X}{9!\,.\,10\,.\,dx^7}$$
$$- \frac{5\,b^9\,.\,d^9X}{11!\,.\,5\,.\,dx^9} + \frac{691\,b^{11}\,.\,d^{11}X}{13!\,.\,210\,.\,dx^{11}} - \frac{35\,b^{13}\,.\,d^{13}X}{15!\,.\,2\,.\,dx^{13}} + \frac{3617\,b^{15}\,.\,d^{15}X}{17!\,.\,30\,.\,dx^{15}} - \ldots$$

Dieser Formel ist eine solche Constante zuzusetzen, dass $S = 0$ wird, wenn x unendlich wird; denn wenn X das letzte Glied in der Reihe ist, so muss die Summe der Formel verschwinden, wenn die Reihe eine endliche Summe hat, für welchen Fall die Formel berechnet ist.

Ist z. B. $X = \frac{1}{x^2}$ oder die Reihe zu summiren: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+b)^2} + \frac{1}{(x+2b)^2} + \frac{1}{(x+3b)^2} + \ldots$, so ist

$$\int X dx = -\frac{1}{x},\ \frac{dX}{dx} = -\frac{2}{x^3},\ \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{2\,.\,3\,.\,4}{x^5},\ \frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{6!}{x^7},\ \frac{d^7X}{dx^7} = -\frac{8!}{x^9},\ \frac{d^9X}{dx^9} = -\frac{10!}{x^{11}}\ldots$$

$$S = \frac{1}{b\,.\,x} + \frac{1}{2\,x^2} + \frac{b}{6\,x^3} - \frac{b^3}{30\,x^5} + \frac{b^5}{42\,x^7} - \frac{b^7}{30\,x^9} + \frac{5\,b^9}{66\,x^{11}} - \ldots$$

Der Ausdruck bedarf keiner Constanten, weil er verschwindet, wenn x unendlich wird.

Diese Formel ist jedoch nicht auf Reihen anwendbar, deren Glieder abwechselnde Zeichen haben. Soll die Reihe summirt werden $\overset{a}{A} - \overset{a+b}{B} + \overset{a+2b}{C} - \overset{a+3b}{D} \ldots + \overset{x}{X} - \overset{x+b}{Y} = S$, in welcher Y eine ähnliche Funktion von $(x + b)$ ist, als X von x, so ist

$$Y = X + \frac{b\,.\,dX}{1\,.\,dx} + \frac{b^2\,.\,d^2X}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{b^3\,.\,d^3X}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{b^4\,.\,d^4X}{4!\,.\,dx^4} + \frac{b^5\,.\,d^5X}{5!\,.\,dx^5} + \ldots$$

und wenn man in der Formel für S, $(x - 2b)$ statt x schreibt, so wird

$$S - X + Y = S - \frac{2\,b\,.\,dS}{1\,.\,dx} + \frac{4\,b^2\,.\,d^2S}{1\,.\,2\,.\,dx^2} - \frac{8\,b^3\,.\,d^3S}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{16\,b^4\,.\,d^4S}{4!\,.\,dx^4} - \frac{32\,b^5\,.\,d^5S}{5!\,.\,dx^5} + \ldots$$

$$-Y + X = \frac{2\,b\,.\,dS}{1\,.\,dx} - \frac{4\,b^2\,.\,d^2S}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{8\,b^3\,.\,d^3S}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} - \frac{16\,b^4\,.\,d^4S}{4!\,.\,dx^4} + \frac{32\,b^5\,.\,d^5S}{5!\,.\,dx^5} - \ldots$$

$$-Y + X = -\frac{b\,.\,dX}{1\,.\,dx} - \frac{b^2\,.\,d^2X}{1\,.\,2\,.\,dx^2} - \frac{b^3\,.\,d^3X}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} - \frac{b^4\,.\,d^4X}{4!\,.\,dx^4} - \frac{b^5\,.\,d^5X}{5!\,.\,dx^5} - \ldots$$

und wenn man $\frac{dS}{dx} = \alpha\,.\,\frac{dX}{dx} + \beta\,.\,\frac{d^2X}{dx^2} + \gamma\,.\,\frac{d^3X}{dx^3} + \delta\,.\,\frac{d^4X}{dx^4} + \varepsilon\,.\,\frac{d^5X}{dx^5} + \ldots$ annimmt, so wird

$$\begin{array}{rcccccc}
+\frac{2\,b\,.\,dS}{dx} & = \frac{2\,b\alpha\,.\,dX}{dx} & + \frac{2\,b\,\beta\,.\,d^2X}{dx^2} & + \frac{2\,b\,\gamma\,.\,d^3X}{dx^3} & + \frac{2\,b\,\delta\,.\,d^4X}{dx^4} & + \frac{2\,b\,\varepsilon\,.\,d^5X}{dx^5} & + \ldots \\
-\frac{2\,b^2\,.\,d^2S}{dx^2} & = & - \frac{2\,b^2\alpha\,.\,d^2X}{dx^2} & - \frac{2\,b^2\beta\,.\,d^3X}{dx^3} & - \frac{2\,b^2\gamma\,.\,d^4X}{dx^4} & - \frac{2\,b^2\delta\,.\,d^5X}{dx^5} & - \ldots \\
+\frac{4\,b^3\,.\,d^3S}{3\,dx^3} & = & & + \frac{4\,b^3\alpha\,.\,d^3X}{3\,dx^3} & + \frac{4\,b^3\beta\,.\,d^4X}{3\,dx^4} & + \frac{4\,b^3\gamma\,.\,d^5X}{3\,dx^5} & + \ldots \\
-\frac{2\,b^4\,.\,d^4S}{3\,dx^4} & = & & & - \frac{2\,b^4\alpha\,.\,d^4X}{3\,dx^4} & - \frac{2\,b^4\beta\,.\,d^5X}{3\,dx^5} & - \ldots \\
+\frac{4\,b^5\,.\,d^5S}{15\,dx^5} & = & & & & + \frac{4\,b^5\alpha\,.\,d^5X}{15\,dx^5} & + \ldots \\
 & = -\frac{b.dX}{1.\,dx} & - \frac{b^2\,.\,d^2X}{1\,.\,2\,.\,dx^2} & - \frac{b^3\,.\,d^3X}{1.2.3.dx^3} & - \frac{b^4\,.\,d^4X}{4!\,.\,dx^4} & - \frac{b^5\,.\,d^5X}{5!\,.\,dx^5} & - \ldots
\end{array}$$

Die Gleichsetzung der homologen Glieder gibt: $2\,b\alpha = -\,b$, $2\,b\beta - 2\,b^2\alpha = -\frac{b^2}{1\,.\,2}$, $2\,b\gamma - 2\,b^2\beta + \frac{1}{3}\,b^3\alpha = -\frac{b^3}{6}$, $2\,b\delta - 2\,b^2\gamma + \frac{1}{3}\,b^3\beta - \frac{2}{3}\,b^4\alpha = -\frac{b^4}{24}$, $2\,b\varepsilon - 2\,b^2\delta + \frac{1}{3}\,b^3\gamma - \frac{2}{3}\,b^4\beta + \frac{1}{15}\,b^5\alpha = -\frac{b^5}{120}\ \ldots$, mithin $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{3b}{4}$, $\gamma = -\frac{b^2}{2}$, $\delta = -\frac{3\,b^3}{16}$, $\varepsilon = -\frac{b^4}{24}\ \ldots$ und wenn man die Rechnung beliebig weiter führt und die Werthe für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ substituirt:

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{dX}{2\,dx} - \frac{3\,b\,.\,d^2X}{4\,dx^2} - \frac{b^2\,.\,d^3X}{2\,dx^3} - \frac{3\,b^3\,.\,d^4X}{16\,dx^4} - \frac{b^4\,.\,d^5X}{24\,dx^5} - \frac{b^5\,.\,d^6X}{160\,dx^6} - \frac{b^6\,.\,d^7X}{720\,dx^7} - \frac{33\,b^7\,.\,d^8X}{8!\,.\,2\,dx^8}$$
$$- \frac{b^8\,.\,d^9X}{8!\,.\,dx^9} - \frac{135\,b^8\,.\,d^{10}X}{10!\,.\,2\,dx^{10}} - \frac{b^{10}\,.\,d^{11}X}{10!\,.\,dx^{11}} - \frac{2097\,b^{11}\,.\,d^{12}X}{12!\,.\,2\,dx^{12}} - \frac{b^{12}\,.\,d^{13}X}{12!\,.\,dx^{13}} - \frac{38199\,b^{13}\,.\,d^{14}X}{14!\,.\,2\,dx^{14}} - \frac{b^{14}.d^{15}X}{14!.dx^{15}} - \ldots$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man:

$$S = C - \frac{X}{2} - \frac{3\,b\,.\,dX}{4\,dx} - \frac{b^2\,.\,d^2X}{1.2\,.dx^2} - \frac{3\,b^3\,.\,d^3X}{16\,dx^3} - \frac{b^4\,.\,d^4X}{24\ dx^5} - \frac{b^5\,.\,d^5X}{160\ dx^5} - \frac{b^6\,.\,d^6X}{6!\,.\,dx^6} - \frac{33\,b^7\,.\,d^7X}{8!\,.\,2\,dx^7} - \frac{b^8\,.\,d^8X}{8!\,.\,dx^8}$$
$$- \frac{135\,b^9\,.\,d^9X}{10!\,.\,2\,dx^9} - \frac{b^{10}\,.\,d^{10}X}{10!\,.\,dx^{10}} - \frac{2097\,b^{11}\,.\,d^{11}X}{12!\,.\,2\,dx^{11}} - \frac{b^{12}\,.\,d^{12}X}{12!\,.\,dx^{12}} - \frac{38199\,b^{13}\,.\,d^{13}X}{14!\,.\,2\,dx^{13}} - \frac{b^{14}\,.\,d^{14}X}{14!\,.\,dx^{14}} - \ldots$$

$= A - B + C - D \ldots + X - Y$. Addirt man dazu

$$Y = X + \frac{b\,.\,dX}{1\,.\,dx} + \frac{b^2\,.\,d^2X}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{b^3\,.\,d^3X}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{b^4\,.\,d^4X}{24\,.\,dx^4} + \frac{b^5\,.\,d^5X}{5!\,.\,dx^5} + \frac{b^6\,.\,d^6X}{6!\,.\,dx^6} + \frac{b^7\,.\,d^7X}{7!\,.\,dx^7}$$
$$+ \frac{b^8\,.\,d^8X}{8!\,.\,dx^8} + \frac{b^9\,.\,d^9X}{9!\,.\,dx^9} + \frac{b^{10}\,.\,d^{10}X}{10!\,.\,dx^{10}} + \frac{b^{11}\,.\,d^{11}X}{11!\,.\,d^{11}x} + \ldots$$

so fallen alle geraden Differentialquotienten aus, und es wird

$$S + Y = A - B + C - D + \ldots + X$$
$$= C + \frac{X}{2} + \frac{b\,.\,dX}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx} + \frac{b^3\,.\,d^3X}{4!\,.\,2\,dx^3} + \frac{3\,b^5\,.\,d^5X}{6!\,.\,2\,dx^5} - \frac{17\,b^7\,.\,d^7X}{8!\,.\,2\,dx^7} + \frac{155\,b^9\,.\,d^9X}{10!\,.\,2\,dx^9}$$
$$- \frac{2073\,b^{11}\,.\,d^{11}X}{12!\,.\,2\,dx^{11}} + \frac{38227\,b^{13}\,.\,d^{13}X}{14!\,.\,2\,dx^{13}} - \ldots$$

Die Constante ist so zu bestimmen, dass $S = A$ wird, wenn man $x = a$ annimmt. Nach dieser Formel berechnet man die Summe einer Reihe vom Anfange, bis zu einem bestimmten Gliede X.

Soll dagegen die Summe einer Reihe von einem bestimmten Gliede bis ins Unendliche berechnet werden, wie $S = \overset{x}{X} - \overset{x+b}{Y} + \overset{x+2b}{Z} - \overset{x+3b}{U} \ldots \infty$, in der Y dieselbe Funktion von $(x + b)$ ist, als X von x, so ist

$$Y = X + \frac{b\,.\,dX}{1\,.\,dx} + \frac{b^2\,.\,d^2X}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{b^3\,.\,d^3X}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{b^4\,.\,d^4X}{4!\,.\,dx^4} + \ldots$$

Setzt man $(x + 2\,b)$ statt x, so erhält man die Summe der Reihe von Z ab, oder $S - X + Y$.

Für $(x + 2\,b)$ statt x, wird der Ausdruck:

$$S - X + Y = S + \frac{2\,b\,.\,dS}{1\,.\,dx} + \frac{4\,b^2\,.\,d^2S}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{8\,b^3\,.\,d^3S}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{16\,b^4\,.\,d^4S}{4!\,.\,dx^4} + \frac{32\,b^5\,.\,d^5S}{5!\,.\,dx^5} + \ldots$$
$$-X + Y = \frac{2\,b\,.\,dS}{1\,.\,dx} + \frac{4\,b^2\,.\,d^2S}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{8\,b^3\,.\,d^3S}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{16\,b^4\,.\,d^4S}{4!\,.\,dx^4} + \frac{32\,b^5\,.\,d^5S}{5!\,.\,dx^5} + \ldots$$
$$= \frac{b\,.\,dX}{1\,.\,dx} + \frac{b^2\,.\,d^2X}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{b^3\,.\,d^3X}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{b^4\,.\,d^4X}{4!\,.\,dx^4} + \frac{b^5\,.\,d^5X}{5!\,.\,dx^5} + \ldots$$

Um das summatorische Glied durch das allgemeine auszudrücken, nimmt man:

$$\frac{dS}{dx} = \alpha \,.\, \frac{dX}{dx} + \beta \,.\, \frac{d^2X}{dx^2} + \gamma \,.\, \frac{d^3X}{dx^3} + \delta \,.\, \frac{d^4X}{dx^4} + \varepsilon \,.\, \frac{d^5X}{dx^5} + \eta \,.\, \frac{d^6X}{dx^6} + \dots$$

$$\frac{2\,b\,.\,d\,S}{dx} = \frac{2\,b\alpha\,.\,dX}{dx} + \frac{2\,b\,\beta\,.\,d^2X}{dx^2} + \frac{2\,b\,\gamma\,.\,d^3X}{dx^3} + \frac{2\,b\,\delta\,.\,d^4X}{dx^4} + \frac{2\,b\,\varepsilon\,.\,d^5X}{dx^5} + \frac{2\,b\,\eta\,.\,d^6X}{dx^6} + \dots$$

$$\frac{2\,b^2\,.\,d^2S}{dx^2} = + \frac{2\,b^2\alpha\,.\,d^2X}{dx^2} + \frac{2\,b^2\beta\,.\,d^3X}{dx^3} + \frac{2\,b^2\gamma\,.\,d^4X}{dx^4} + \frac{2\,b^2\delta\,.\,d^5X}{dx^5} + \frac{2\,b^2\varepsilon\,.\,d^6X}{dx^6} + \dots$$

$$\frac{4\,b^3\,.\,d^3S}{3\,dx^3} = + \frac{4\,b^3\alpha\,.\,d^3X}{3\,dx^3} + \frac{4\,b^3\beta\,.\,d^4X}{3\,dx^4} + \frac{4\,b^3\gamma\,.\,d^5X}{3\,dx^5} + \frac{4\,b^3\delta\,.\,d^6X}{3\,dx^6} + \dots$$

$$\frac{2\,b\,.\,d^4S}{3\,dx^4} = + \frac{2\,b^4\alpha\,.\,d^4X}{3\,dx^4} + \frac{2\,b^4\beta\,.\,d^5X}{3\,dx^5} + \frac{2\,b^4\gamma\,.\,d^6X}{3\,dx^6} + \dots$$

$$\frac{4\,b^5\,.\,d^5S}{15\,dx^5} = + \frac{4\,b^5\alpha\,.\,d^5X}{15\,dx^5} + \frac{4\,b^5\beta\,.\,d^6X}{15\,dx^6} + \dots$$

$$\frac{4\,b^6\,.\,d^6S}{45\,dx^6} = + \frac{4\,b^6\alpha\,.\,d^6X}{45\,dx^6} + \dots$$

Die Summe dieser Glieder ist gleich dem zweiten Ausdruck für

$$- X + Y = \frac{b\,.\,dX}{dx} + \frac{b^2\,.\,d^2X}{1\,.\,2\,.\,dx^2} + \frac{b^3\,.\,d^3X}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,dx^3} + \frac{b^4\,.\,d^4X}{4!\,.\,d\,x^4} + \frac{b^5\,.\,d^5X}{5!\,.\,dx^5} + \frac{b^6\,.\,d^6X}{6!\,.\,d\,x^6} + \dots$$

daher gibt die Vergleichung der homologen Glieder

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = -\frac{b}{4},\ \gamma = 0,\ \delta = +\frac{b^3}{4!\,.\,2},\ \varepsilon = 0,\ \eta = -\frac{3\,b^5}{6!\,.\,2}\ \dots$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}\,.\,\frac{dX}{d\,x} - \frac{b\,.\,d^2X}{1\,.\,2\,.\,2\,.\,d\,x^2} + \frac{b^3\,.\,d^4X}{4!\,.\,2\,dx^4} - \frac{3\,b^5\,.\,d^6X}{6!\,.\,2\,dx^6} + \frac{17\,b^7\,.\,d^8X}{8!\,.\,2\,dx^8} - \dots$$

$$S = C + \frac{X}{2} - \frac{b\,.\,dX}{1\,.\,2\,.\,2\,.\,dx} + \frac{b^3\,.\,d^3X}{4!\,.\,2\,dx^3} - \frac{3\,b^5\,.\,d^5X}{6!\,.\,2\,d\,x^5} + \frac{17\,b^7\,.\,d^7X}{8!\,.\,2\,dx^7} - \dots$$

Die Constante muss so beschaffen sein, dass S verschwindet, wenn $x = 0$ wird.

Euler setzt die Reihe bis zum 13ten Differentialquotienten fort, und berechnet den Kreis bis 12 Decimalstellen.

Für so wenige Decimalen convergirt die Reihe stark, und man rechnet nach Eulers Methode eben so schnell, als nach Stirlings; dies ändert sich jedoch bei mehr Decimalstellen. Um die Rechnung nach beiden Methoden zu vergleichen, habe ich Eulers Formel bis zum 55sten Differentialquotienten erweitert, und

$$S = C + \frac{X}{2} - \frac{b\,.\,dX}{1\,.\,2\,.\,2\,.\,dx} + \frac{b^3\,.\,d^3X}{4!\,.\,2\,dx^3} - \frac{3\,b^5\,.\,d^5X}{6!\,.\,2\,d\,x^5} + \frac{17\,b^7\,.\,d^7X}{8!\,.\,2\,dx^7} - \frac{155\,b^9\,.\,d^9X}{10!\,.\,2\,dx^9} + \frac{2073\,b^{11}\,.\,d^{11}X}{12!\,.\,2\,dx^{11}}$$

$$- \frac{38227\,b^{13}\,.\,d^{13}X}{14!\,.\,2\,dx^{13}} + \frac{929569\,b^{15}\,.\,d^{15}X}{16!\,.\,2\,dx^{15}} - \frac{28820619\,b^{17}\,.\,d^{17}X}{18!\,.\,2\,dx^{17}} + \frac{1109652905\,b^{19}\,.\,d^{19}X}{20!\,.\,2\,dx^{19}}$$

$$- \frac{51943281731\,b^{21}\,.\,d^{21}X}{22!\,.\,2\,dx^{21}} + \frac{2905151042481\,b^{23}\,.\,d^{23}X}{24!\,.\,2\,dx^{23}} - \frac{191329672483963\,b^{25}\,.\,d^{25}X}{26!\,.\,2\,dx^{25}}$$

$$+ \frac{14655626154768697\,b^{27}\,.\,d^{27}X}{28!\,.\,2\,dx^{27}} - \frac{1291885088448017715\,b^{29}\,.\,d^{29}X}{30!\,.\,2\,dx^{29}} + \frac{129848163681107301953\,b^{31}\,.\,d^{31}X}{32!\,.\,2\,dx^{31}}$$

$$- \frac{14761446733784164001387\,b^{33}\,.\,d^{33}X}{34!\,.\,2\,dx^{33}} + \frac{1884515541728818675112649\,b^{35}\,.\,d^{35}X}{36!\,.\,2\,dx^{35}}$$

$$- \frac{268463531464165471482681379\,b^{37}\,.\,d^{37}X}{38!\,.\,2\,dx^{37}} + \frac{42433626725491925313195071185\,b^{39}\,.\,d^{39}X}{40!\,.\,2\,dx^{39}}$$

$$- \frac{7403610342602172448449261632091\,b^{41}\,.\,d^{41}X}{42!\,.\,2\,dx^{41}} + \frac{1419269729459188512167209628047961\,b^{43}\,.\,d^{43}X}{44!\,.\,dx^{43}}$$

$$- \frac{297670324015849154718455710038555923\,b^{45}.d^{45}X}{46!\,.\,2\,dx^{45}} + \frac{68041658377475993470566379406771713377\,b^{47}.d^{47}X}{48!\,.\,2\,dx^{47}}$$

$$-\frac{16890450341293965779175629389101669683275\, b^{49}\,.\, d^{49}X}{50!\,.\,2\,dx^{49}}$$
$$+\frac{45385278360465504403961877412336708285378333\, b^{51}\,.\, d^{51}X}{52!\,.\,2\,dx^{51}}$$
$$-\frac{1316087873332616222841347092534788263777772547\, b^{53}\,.\, d^{53}X}{54!\,.\,2\,dx^{53}}$$
$$+\frac{410710549795313669217134138031963472719424991729\, b^{55}\,.\, d^{55}X}{56!\,.\,2\,dx^{55}} - \ldots \text{ erhalten.}$$

Euler summirt als Zahlenbeispiel die Leibnitzsche Reihe für den Kreis, dessen Durchmesser $= 1$. $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots \frac{1}{\infty}$. Für $X = \frac{1}{x}$ erhält man die Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+2b} - \frac{1}{x+3b} + \frac{1}{x+4b} - \ldots$$

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2},\ \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{2\,.\,3}{x^4},\ \frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{x^6},\ \frac{d^7X}{dx^7} = -\frac{7!}{x^8}\ldots$$

$$S = \frac{1}{2x} + \frac{b}{1\,.\,2\,.\,2\,.\,x^2} - \frac{b^3}{4\,.\,2\,.\,x^4} + \frac{3\,b^5}{6\,.\,2\,.\,x^6} - \frac{17\,b^7}{8\,.\,2\,.\,x^8} + \frac{155\,b^9}{10\,.\,2\,.\,x^{10}} - \frac{2073\,b^{11}}{12\,.\,2\,.\,x^{12}}$$
$$+ \frac{38227\,b^{13}}{14\,.\,2\,.\,x^{14}} - \frac{929569\,b^{15}}{16\,.\,2\,.\,x^{16}} + \frac{28820619\,b^{17}}{18\,.\,2\,.\,x^{18}} - \frac{1109652905\,b^{19}}{20\,.\,2\,.\,x^{20}} + \frac{51943281731\,b^{21}}{22\,.\,2\,.\,x^{22}} - \ldots$$

Diesem Ausdruck ist keine Constante zuzusetzen, weil alle Glieder verschwinden, wenn x unendlich wird. Für $b = 2$ erhält man die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$, und setzt man $x = 25$, so erhält man die Summe der Reihe von $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$ bis ins Unendliche:

$$S = \frac{2}{100} + \frac{8}{100^2} - \frac{256}{100^4} + \frac{8\,.\,4^6}{100^6} - \frac{8\,.\,17\,.\,4^8}{100^8} + \frac{128\,.\,31\,.\,4^{10}}{100^{10}} - \frac{691\,.\,256\,.\,4^{12}}{100^{12}} + \frac{5461\,.\,2048\,.\,4^{14}}{100^{14}}$$
$$- \frac{929569\,.\,1024\,.\,4^{16}}{100^{16}} + \frac{3202291\,.\,32768\,.\,4^{18}}{100^{18}} - \frac{221930581\,.\,65536\,.\,4^{20}}{100^{20}} + \ldots$$

Diese Formel gibt die Zahl π nur bis auf 16 Decimalstellen, indem durch das Anwachsen der Coefficienten die Convergenz nach dem 17ten Gliede aufhört.

Die Summe der positiven Glieder ist
$= + 0,\ 020\ 800\ 032\ 809\ 915\ 445\ 636\ \ldots$
der negativen $= - 0,\ 000\ 002\ 560\ 894\ 300\ 092\ 875\ \ldots$
der Reihe $= + 0,\ 020\ 797\ 471\ 915\ 615\ 352\ 761\ \ldots$

Addirt man hiezu die 12 ersten Glieder $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots + \frac{1}{21} - \frac{1}{23}$
$= 0,\ 764\ 600\ 691\ 481\ 832\ 954\ 440\ \ldots$
so wird $\frac{\pi}{4} = 0,\ 785\ 398\ 163\ 397\ 448\ 307\ 201\ \ldots$
und $\pi = 3,\ 141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 228\ 804\ \ldots$

wovon nur 16 Stellen richtig sind. Um mehr Decimalstellen zu erhalten, addirt man die 62 ersten Glieder $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots + \frac{1}{121} - \frac{1}{123}$, deren Summe
$= + 0,\ 781\ 366\ 167\ 491\ 353\ 435\ 068\ 536\ 566\ 485\ 748\ 888\ 127\ 803\ 127\ 263\ 364\ 426\ 494\ 840\ \ldots$

Dann ist $x = 125$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{125} = \frac{8}{1000}$ und man erhält für die Summe der unendlichen Reihe $\frac{1}{125} - \frac{1}{127} + \frac{1}{129} - \frac{1}{131} + \ldots$

$$
\begin{aligned}
S = {} & \frac{4}{1000} + \frac{32}{1000^2} - \frac{8^4}{1000^4} + \frac{8 \,.\, 8^6}{1000^6} - \frac{17 \,.\, 8 \,.\, 8^8}{1000^8} + \frac{31 \,.\, 128 \,.\, 8^{10}}{1000^{10}} - \frac{691 \,.\, 256 \,.\, 8^{12}}{1000^{12}} + \frac{5461 \,.\, 2048 \,.\, 8^{14}}{1000^{14}} \\
& - \frac{929569 \,.\, 1024 \,.\, 8^{16}}{1000^{16}} + \frac{3202291 \,.\, 32768 \,.\, 8^{18}}{1000^{18}} - \frac{221930581 \,.\, 65536 \,.\, 8^{20}}{1000^{20}} + \frac{4722116521 \,.\, 524288 \,.\, 8^{22}}{1000^{22}} \\
& - \frac{968383680827 \,.\, 524288 \,.\, 8^{24}}{1000^{24}} + \frac{14717667114151 \,.\, 8388608 \,.\, 8^{26}}{1000^{26}} - \frac{2093660879252671 \,.\, 16777216 \,.\, 8^{28}}{1000^{28}} \\
& + \frac{86125672563201181 \,.\, 134217828 \,.\, 8^{30}}{1000^{30}} - \frac{129848163681107301953 \,.\, 33554432 \,.\, 8^{32}}{1000^{32}} \\
& + \frac{868320396104950823611 \,.\, 2147483648 \,.\, 8^{34}}{1000^{34}} - \frac{209390615747646519456961 \,.\, 4294967296 \,.\, 8^{36}}{1000^{36}} \\
& + \frac{1412965955074555113066744 1 \,.\, 34359738368 \,.\, 8^{38}}{1000^{38}} - \frac{8468725345098385062639014237 \,.\, 34359738368 \,.\, 8^{40}}{1000^{40}} \\
& + \frac{3525528734572463070690124586 71 \,.\, 549755813888 \,.\, 8^{42}}{1000^{42}} \\
& - \frac{129024520859926228378837238913451 \,.\, 1099511627776 \,.\, 8^{44}}{1000^{44}} \\
& + \frac{12942188000689093683411117827763301 \,.\, 8796093022208 \,.\, 8^{46}}{1000^{46}} \\
& - \frac{2268055279249199782352212646892390 4459 \,.\, 4398046511104 \,.\, 8^{48}}{1000^{48}} \\
& + \frac{675618013651758631167025175564066787331 \,.\, 140737488355328 \,.\, 8^{50}}{1000^{50}} \\
& - \frac{349117525849734649261245210864128525272141 \,.\, 281474976710656 \,.\, 8^{52}}{1000^{52}} \\
& + \frac{487439953082450452904202626864736393991767 61 \,.\, 2251799813685248 \,.\, 8^{54}}{1000^{54}} \\
& - \frac{586729356850448098881620197188519246742035702 47 \,.\, 2251799813685248 \,.\, 8^{56}}{1000^{56}} + \ldots
\end{aligned}
$$

Die Summe der positiven Glieder ist $= + 0,\ 004\ 032\ 000\ 002\ 097\ 156\ 260\ 656\ 747\ 837\ 611\ 816$
$769\ 745\ 432\ 315\ 451\ 306\ 901\ 759 \ldots$

der negativen $= - 0,\ 000\ 000\ 004\ 096\ 002\ 281\ 713\ 532\ 468\ 503\ 484\ 983$
$847\ 986\ 209\ 735\ 039\ 278\ 156\ 624 \ldots$

die Summe der unendlichen Reihe $= + 0,\ 004\ 031\ 995\ 906\ 094\ 874\ 547\ 124\ 279\ 334\ 126\ 832$
$921\ 489\ 222\ 580\ 412\ 028\ 745\ 134 \ldots$

Addirt man hiezu die Summe der 62 ersten Glieder, so wird

$$\frac{\pi}{4} = + 0,\ 785\ 398\ 163\ 397\ 448\ 309\ 615\ 660\ 845\ 819\ 875\ 721\ 049\ 292\ 349\ 843\ 776\ 455\ 239\ 975 \ldots$$

folglich: $\pi = 3,\ 141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399\ 375\ 105\ 820\ 959 \ldots$

Die bis zum 55sten Differentialquotienten fortgesetzte Eulersche Reihe gibt nur 55 Decimalstellen richtig, und die weitere Ausdehnung derselben würde für mehr Stellen keinen Vortheil gewähren. Stirlings Methode ist daher zur Berechnung vieler Decimalstellen vorzuziehen; besonders die zweite, vorhin nur angedeutete Formel. Wenn man von der Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots$ $\ldots + \frac{1}{621} - \frac{1}{623}$ die ersten 312 Glieder addirt, so wird $z = 312\frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{625}$ und man berechnet die Reihe von $\frac{1}{625} - \frac{1}{627} \ldots$ bis ins Unendliche durch eine stark convergirende Reihe.

Für die Summirung der Potenzen der natürlichen Zahlen, und deren reciproken Werthe, sind die Eulerschen Formeln vortheilhafter und allgemeiner.

Eulers Methode hat den Vorzug, dass sie die Formel für die Summe aus dem Differentialquotienten $\frac{dS}{dx}$ unmittelbar durch Integration ableitet, während Stirling die Summenformel fertig hinstellt, und ihre Richtigkeit dadurch beweist, dass er sie wieder auf den ursprünglichen Ausdruck zurückführt.

Jahresbericht der Petrischule.

Von Ostern 1869 bis Ostern 1870.

I. Lehrverfassung.

Prima.

Ordinarius: Der Director.

1. Religion. 2 St. w. — Die Lehre von der Erlösung nach Petri's Lehrbuch. — Kirchengeschichte vom westphälischen Frieden bis auf die neueste Zeit. — Der Brief an die Römer ist gelesen und erklärt. — Pastor Schaper. — Im Coetus A. der katholischen Schüler (I., II., III.) 2 St. w. — 1) Die Religionslehre nach dem grösseren Katechismus von Deharbe. 2) Kirchengeschichte bis zum 5. Jahrhundert. — Pfarrer Dr. Redner.

2. Deutsch. 3 St. w. — Lectüre. — Lessing's Hamburgische Dramaturgie. — Schiller's ästhetische Abhandlungen. — Deutsche Aufsätze. — Der Director.

3. Latein. 3 St. w. — Gelesen wurden im Sommer Cicero's catilinarische Reden; im Winter Vergil. Aen. V. VI, 1—300. — Wöchentlich Exercitien oder Extemporalien. — Repetition der gesammten Grammatik. — Dr. Pfeffer.

4. Französisch. 4 St. w. — Gelesen wurden in 2 St. w. aus Ploetz: Manuel de la Littérature française die Abschnitte von Scribe, Casimir Delavigne, Augustin Thierry, Barthélemy et Méry, Mignet, Thiers, Alfred de Vigny, Toepffer und Saint-Marc Girardin. — Ausserdem las der Lehrer interessante Abschnitte aus Zeitschriften und L' Avare von Molière vor. — In 2 St. w. Wiederholung und Erweiterung der Grammatik in französischer Sprache. — Grössere Abschnitte aus Schiller's 30jährigem Kriege wurden schriftlich in's Französische übersetzt. — Aufsätze. — Conversation. — Uebersicht über die Hauptepochen der französischen Literatur. — Dr. Cosack.

5. Englisch. 3 St. w. — Gelesen wurde im Sommer Herrig British classical authors: Gray, Dryden, Burns, Milton, Macpherson, Byron; im Winter: Macaulay, Shakespeare. — Einübung und Wiederholung der Grammatik. — Exercitien und Extemporalien aus Schiller's 30jährigem Kriege. — Vorträge in englischer Sprache, theils nach der Geschichte, theils nach der Lektüre. — Aufsätze. — Kurzer Abriss der englischen Litteratur, eingehend über Milton, Byron, Burns, Macaulay, Shakespeare. — Sprachübungen mit Zugrundelegung von Crumps English as it is spoken und Franz Vocabulary. — Auswendig gelernt Einiges von Burns, Macpherson und aus Julius Caesar aus dem 3ten Akte die Reden des Antonius. — Scenen aus Lessing's Minna von Barnhelm wurden in w. 1 St. in's Englische übersetzt. — Hottenrott.

6. Mathematik. 5 St. w. — Im Sommersemester: Ebene Trigonometrie mit Benutzung der trigonometrischen Tafeln. — Analytische Geometrie und Kegelschnitte. — Im Wintersemester: Theorie der Logarithmen, und der Berechnung logarithmischer und trigonometrischer Reihen. — Trigonometrische Auflösung der Gleichungen des zweiten und dritten Grades — In jedem Semester practisches Rechnen und Correctur geometrischer und trigonometrischer Ausarbeitungen. — Prof. Tröger.

7. Physik. 3 St. w. — Optik. — Akustik. — Dynamik. — Das Trägheitsmoment — nach Koppe's Lehrbuch. — Elemente der Infinitesimalrechnung. — Schriftliche Bearbeitung physikalischer Aufgaben. — Der Director.

8. Chemie. 2 St. w. — Unorganische Chemie und einige wichtigere Theile der organischen Chemie mit Zugrundelegung des Wöhler'schen Grundrisses. — Prof. Menge.

9. Naturgeschichte. 2 St. w. — Anthropologie mit Benutzung anatomischer Präparate und Zeichnungen. — Prof. Menge.

10. Geschichte und Geographie. 3 St. w. — In 2 St. Geschichte der neueren Zeit von 1740. — In 1 St. Wiederholung des Alterthums und des Mittelalters. — In jedem Monate eine geographische Repetition. — Oberlehrer Boeszoermeny.

11. Zeichnen. 2 St. w. — Freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern, nach Gypsmodellen und nach der Natur. — Geometrische Projectionslehre. — Schattenconstruction und Perspective. — Situationszeichnen. — Landschaftsmaler Rodde.

12. Singen. 2 St. w. — Comb. mit II., III. A. u. B., IV. A. u. B. — Vierstimmige Gesänge aus dem 1. und 2. Theile der Auswahl von Gesängen von P. Stein. — Choräle nach Markull's Choralbuch. — Lehrer Zur.

Secunda.

Ordinarius: Professor Tröger.

1. Religion. 2 St. w. — Die Prolegomenen zur christlichen Lehre nach Petri's Lehrbuch. — Kirchengeschichte bis auf Constantin d. Gr. — Das Evangelium des Matthaeus gelesen und erklärt. — Pastor Schaper.

2. Deutsch. 3 St. w. — Lectüre mit Benutzung des Lesebuchs von Paulsiek. — Einübung einer Tabelle über deutsche Literatur. — Declamiren. — Deutsche Aufsätze. — Der Director.

3. Latein. 4 St w. — Gelesen wurde im Sommer Curtius III., IV.: im Winter Ovid's Metamorphosen in der Ausgabe von Siebelis 1. 2. 3. 4. — Wöchentliche Exercitien und Extemporalien. — Syntax nach Siberti-Meiring 91—105. — Dr. Pfeffer.

4. Französisch. 4 St. w. — In 2 St. Lectüre. — Aus Ploetz, Manuel de la Littérature française wurden die Abschnitte von Racine, La Bruyère, Fénelon, Massillon und Le Sage gelesen. — In 2 St. Grammatik nach Ploetz II. Cursus Abschnitte 6 u. 7. — Einübung der Regeln und Repetitionen der Grammatik in französischer Sprache. — Ausserdem wurde Ploetz Vocabulaire systématique und Voyage à Paris von demselben Verfasser zur Erlernung von Phrasen und Gallicismen und zu Sprechübungen benutzt. — Thèmes. — Retroversionen. — Dr. Cosack.

5. Englisch. 3 St. w. — Grammatik. Sonnenburg Lection 20—37, mehrmalige Wiederholung des ganzen Pensums. — Extemporalien über durchgenommene Abschnitte der Grammatik, anfangs auch abwechselnd mit Dictaten. — Exercitien: für die Einjährigen nach der Grammatik, für die Zweijährigen aus Jaep England. — Lectüre: im Sommer Herrig British classical authors: Defoe, Swift; im Winter: Wash. Irving Sketch-Book. — Sprechübungen, theils im Anschluss an den Abriss der englischen Geschichte in Sonnenburg, theils an Franz Vocabulary. — Auswendig gelernt wurden mehrere Gedichte. — Die Zweijährigen machten zwei Aufsätze über Gelesenes. — Hottenrott.

6. Mathematik. 5 St. w. — Arithmetik 2 St.: Im Sommersemester: Wiederholung der Quadrat- und Kubik-Wurzeln. — Gleichungen des zweiten Grades und Kettenbrüche. — Im Wintersemester: Arithmetische und geometrische Reihen. — Combinationslehre. — Binomischer Lehrsatz mit ganzen, positiven, negativen und gebrochenen Exponenten. — Geometrie 2 St.: In jedem Semester: Wiederholung der Planimetrie. — Im Sommersemester: Sätze aus der neueren Geometrie. — Transversalen, harmonische Proportionen. — Im Wintersemester: Ebene Trigonometrie ohne Anwendung der Tafeln. — Rechnen 1 St.: Praktisches Rechnen zur Vergleichung der wichtigsten Münz-, Maass- und Gewichtssysteme. — Prof. Tröger.

7. Physik. 2 St. w. — Vom Hebel. — Optik. — Electricität — nach Koppe's Lehrbuch. — Der Director.

8. Chemie. 2 St. w. — Metalloide, Säuren und einige der Alkalien nach Wöhler's Grundriss der unorganischen Chemie. — Prof. Menge.

9. Naturgeschichte. 2 St. w. — Zoologie nach Schilling's Grundriss, mit Benutzung der Sammlungen der Schule und Abbildungen. — Prof. Menge.

10. Geschichte. 2 St. w. — Alte römische Geschichte. — Wiederholung der vaterländischen Geschichte und der Geschichtstabellen von Hirsch. — Oberlehrer Boeszoermeny.

11. Geographie. 1 St. w. — Asiens und Amerikas physische und politische Geographie. — Wiederholung aller übrigen Welttheile. — Oberlehrer Boeszoermeny.

12. Zeichnen. 2 St. w. — Freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern und nach Gypsmodellen. — Geometrische Projectionslehre. — Schattenconstruction u. Perspective. — Landschaftsmaler Rodde.

13. Singen. — 2 St. w. — Lehrer Zur.

Tertia. Coetus A.

Ordinarius: Dr. Cosack.

1. Religion. 2 St. w. — Combinirt mit Coetus B. — Erklärung des zweiten Hauptstücks des Lutherischen Katechismus; dazu Sprüche und Lieder gelernt. — Einleitung in die Schriften des neuen Testaments nach Petri's Lehrbuch. — Die Episteln des Kirchenjahres wurden erklärt und gelernt. — Pastor Schaper.

2. Deutsch. 3 St. w. — Deutsche Aufsätze und Uebungen im Entwerfen von Dispositionen. — Synonyma. — Lectüre Schillerscher Dichtungen. — Deklamationsübungen. — Anfangsgründe der Metrik, verbunden mit Inhaltsangabe des Nibelungenliedes und der Gudrun. — Dr. Cosack.

3. Latein. 5 St. w. — In 2 Stunden Lectüre: Caesar de bello gallico, v. lib. II., cap. 10 bis IV., 5. — 2 Stunden Grammatik. Einübung der Syntax nach Siberti-Meiring Cap. 85—90 mündlich und schriftlich mit vielen Beispielen aus dem Uebungsbuche von Meiring. — Exercitien. 1 St. Wiederholung der Formlehre besonders der unregelmässigen Verba in Verbindung mit dem Französischen. — Dr. Cosack.

4. Französisch. 4 St. w. — In 2 St. Lectüre: Lectures choisies von Ploetz: (Abschnitte von Mignet, Thiers, Ségur, Marmontel, Le Sage, Salvandy und 3 Akte von Racine's Athalie.) In 2 St. Grammatik nach Ploetz Cursus II. Lection 24—46. — Exercitien. — Memorir- und Sprechübungen mit Benutzung des Vocabulaire systématique von Ploetz. — Repetition der unregelmässigen Verba in Verbindung mit dem Lateinischen. — Dr. Cosack.

5. Englisch. 4 St. w. — Im Sommer-Halbjahr wurde ein Elementar-Cursus dictirt, an die Tafel geschrieben und nachgeschrieben. — Im Winter-Halbjahr wurden die ersten 20 Lectionen aus Sonnenburgs Grammatik durchgenommen und Exercitien darüber geschrieben. — Extemporalien.

abwechselnd mit Dictaten. — Aus dem Englischen ins Deutsche wurden die 17 Abschnitte in Sonnenburgs Grammatik über die Englische Geschichte übersetzt. — Ausserdem wurde übersetzt aus: Percy, Tales of the kings and queens of England. Sprechübungen im Anschluss an die historischen Abschnitte und an Franz' Vocabulary. — Hottenrott.

6. Mathematik. 6 St. w. — Arithmetik 2 St. Im Sommer-Semester: Buchstabenrechnung. Potenzen. Decimalbrüche. — Quadrat- und Kubikwurzeln. Im Winter-Semester: Wiederholung der Buchstabenrechnung. Gleichungen des ersten Grades, mit einer und mit mehreren unbekannten Grössen. Diophantische Aufgaben. — Geometrie 2 St. Im Sommer-Semester: Die Sätze vom Kreise bis zu den Tangenten. Berührungs-Aufgaben. — Im Winter-Semester: Die Gleichheit des Flächeninhaltes und Aehnlichkeit der Figuren. Regelmässige Polygone und Berechnung des Kreises. — Rechnen 2 St. In jedem Semester praktisches Rechnen und Uebungen im Kopfrechnen. — Professor Troeger.

7. Naturgeschichte. 2 St. w. — Mineralogie mit Vorzeigung der Mineralien der Schulsammlung. — Prof. Menge.

8. Geschichte. 2 St. w. — Brandenburgisch-Preussische Geschichte im Anschluss an die deutsche Geschichte. Wiederholung der ersten 8 Geschichts-Tabellen von Hirsch. — Oberlehrer Boeszoermeny.

9. Geographie. 2 St. w. — Physische und politische Geographie der Staaten Mittel-Europas. Uebungen im Kartenzeichnen. — Oberlehrer Boeszoermeny.

10. Zeichnen. 2 St. w. — Freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern. Die Anfangsgründe der geometrischen Projectionslehre und der Perspective. — Landschaftsmaler Rodde.

11. Singen. 2 St. w. — Lehrer Zur.

Tertia. Coetus B.

Ordinarius: Dr. Pfeffer.

1. Religion. 2 St. w. — Combinirt mit Coetus A. — Pastor Schaper.

2. Deutsch. 3 St. w. — Lesen und Erklären Schiller'scher Balladen, von denen einige auswendig gelernt und deklamirt wurden. Inhalt des Nibelungenliedes und der Gudrun. Anfangsgründe der Metrik. Deutsche Aufsätze und Disponierübungen. — Dr. Wulckow.

3. Latein. 5 St. w. — Gelesen wurde Caesar de bello gallico VII. 1—60, sonst wie Coetus A. — Dr. Pfeffer.

4. Französisch. 4 St. w. — Gelesen wurden mehrere Stücke aus Lectures choisies von Ploetz. — Sprechübungen. Grammatik nach Ploetz Cursus II, Abschnitt I—IV. Einübung der unregelmässigen Verben in Verbindung mit dem Lateinischen. — Dr. Pfeffer.

5. Englisch. 4 St. w. — Wie Tertia A. — Hottenrott.

6. Mathematik. 6 St. w. — Wie Coetus A.

7. Naturgeschichte. 2 St. w. — Wie in Tertia A.

8. Geschichte. 2 St. w. — Wie Coetus A. — Oberlehrer Boeszoermeny.

9. Geographie. 2 St. w. — Wie Coetus A. — Oberlehrer Boeszoermeny.

10. Zeichnen. 2 St. w. — Wie Coetus A.

11. Singen. 2 St. w. — Lehrer Zur.

Quarta. Coetus A.

Ordinarius: Hottenrott.

1. Religion. 2 St. w. — Combinirt mit Coetus B. — Erklärung des ersten Hauptstückes des luth. Katechismus; dazu Sprüche und Lieder gelernt. — Einleitung in die Schriften des Alten Testaments nach Petri's Lehrbuch. Die Evangelien des Kirchenjahres wurden gelernt und erklärt. — Pastor Schaper. — Im Coetus B. der katholischen Schüler (IV., V., VI.) 2 St. w. — 1) Religionslehre nach dem Diözesan-Katechismus. 2) Biblische Geschichte des Neuen Testaments. — Pfarrer Dr. Redner.

2. Deutsch. 3 St. w. — Lesen und mündliche Reproduction ausgewählter Stücke aus Paulsiek's Lesebuch. Repetition der Orthographie durch Extemporalien. Declamirübungen. Aufsätze. — In grammatischer Hinsicht wurde besonders die Lehre vom einfachen und zusammengesetzten Satze durch vielfache mündliche und schriftliche Analyse eingeübt; ausserdem die Präpositionen und die Rectionslehre, und grammatische Punkte besprochen, gegen welche am häufigsten gefehlt wird. Vorträge über Gelesenes. Erklärung einer Auswahl von häufig vorkommenden Fremdwörtern. — Hottenrott.

3. Latein. 6 St. w. — Repetition des Cursus von Quinta. Uebereinstimmung von Subject und Praedicat. Nominativ, Accusativ und einige Regeln über den Genetiv, Dativ und Ablativ durchgenommen. Einübung des Accus. c. Inf., der Participial-Constructionen und des Abl. abs. Häufige Extemporalien behufs Repetition des in der Grammatik Durchgenommenen. Aus Wellers „Erzählungen nach Herodot“ wurden die Abschnitte I., II., III., IV., VI., VII., XII. und XIV. (theilweise) gelesen und erklärt. — Hottenrott.

4. Französisch. 5 St. w. — Repetition des Cursus von Quinta, besonders der regelmässigen Verben. Ploetz's Elementarbuch wurde durchgelesen und viele Stücke daraus memorirt. Extemporalien. Die wichtigsten unregelmässigen Verben. — Dr. Pfeffer.

5. Mathematik. 6 St. w. — Rechnen 4 St. w. — Wiederholung der Bruchrechnung. Geometrische Verhältnisse und Proportionen. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri. Zinsrechnung. Rabattrechnung. Repartitionsrechnung. Alligationsrechnung. Uebungen im Kopfrechnen. — Geometrie 2 St. w. — Linien und Winkel. Lehre von den parallelen Linien. Dreieckscongruenzen. Fundamentalsätze über das Dreieck. — Dr. Neumann.

6. Naturgeschichte. 2 St. w. — Pflanzenlehre. Morphologie. Uebung im Beschreiben und Anordnung nach Linné. — Prof. Menge.

7. Geschichte. 2 St. w. — Uebersicht der alten Geschichte und Erlernung der 3 ersten Tabellen von Hirsch. — Oberlehrer Boeszoermeny.

8. Geographie. 2 St. w. — Elemente der mathematischen Geographie und der Klimatologie. Physische und politische Geographie der Glieder Europas. — Oberlehrer Boeszoermeny.

9. Schreiben. 2 St. w. — Die Buchstaben wurden aus ihren Elementen entwickelt. Zu Vorschriften wurden ausser Sentenzen und Sittensprüchen geschäftliche Aufsätze nach Mustern von Hertzsprung gewählt. Besonders wurde die Schnellschrift geübt. — Lehrer Gerlach.

10. Zeichnen. 2 St. w. — Planimetrisches Zeichnen nach Busch's Leitfaden. Die Elemente der Projectionslehre. Freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern. — Landschaftsmaler Rodde.

11. Singen. 2 St. w. – Lehrer Zur.

Quarta. Coetus B.

Ordinarius: Dr. Wulckow.

1. Religion. 2 St. w. — Combinirt mit Coetus A.
2. Deutsch. 3 St. w. — Lectüre und mündliche Reproduction ausgewählter Stücke aus dem eingeführten Lesebuch. Aufsätze und Declamirübungen. Grammatische und orthographische Uebungen. — Dr. Wulckow.
3. Latein. 6 St. — Repetition des Cursus von Quinta. Einübung der Participial-Construction, des Abl. abs., des Nomin. c. Inf. und Acc. c. Inf. Häufige Extemporalien zur Einübung des grammatischen Pensums. Aus Weller's Herodot-Erzählungen wurden die ersten 8 Abschnitte gelesen und erklärt. — Dr. Wulckow.
4. Französisch. 5 St. w. — Wie Quarta A. — Dr. Wulckow.
5. Mathematik. 6 St. w. — Wie in Coetus A. — Dr. Neumann.
6. Naturgeschichte. 2 St. w. — Wie in Coetus A. Prof. Menge.
7. Geschichte. 2 St. w. — Wie in Coetus A. Dr. Möller.
8. Geographie. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Oberlehrer Boeszoermeny.
9. Schreiben. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Lehrer Gerlach.
10. Zeichnen. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Landschaftsmaler Rodde.
11. Singen. 2 St. w. — Lehrer Zur.

Quinta. Coetus A.

Ordinarius: Dr. Moeller.

1. Religion. 3 St. w. — Die biblische Geschichte des A. T. wurde wiederholt und die biblische Geschichte des N. T. durchgenommen. Der Luth. Katechismus, einige Bibelsprüche und Lieder wurden auswendig gelernt. — Dr. Wilde.
2. Deutsch. 4 St. w. — Repetition und Erweiterung des Pensums von Sexta. Der einfache und zusammengesetzte Satz. Rection der Praepositionen. Orthographische Uebungen. Aufsätze. Leseübungen und Wiedererzählen des Gelesenen. Declamation. — Dr. Martens.
3. Latein. 6 St. w. — Repetition des Cursus von Sexta. Siberti-Meiring Cap. 52—68 durchgenommen. Uebersetzt und memorirt wurden Lesestücke aus dem Uebungsbuche von Moiszistzig; aus demselben Buche wurden kleinere Erzählungen in der Schule mündlich und zu Hause schriftlich übersetzt. Sodann wurden in der Schule lateinische Extemporalien geschrieben. — Dr. Moeller.
4. Französisch. 5 St. w. — Die ersten 60 Lectionen aus Ploetz's Elementarbuch wurden durchgenommen; Extemporalien wurden geschrieben. Avoir, être und die regelmässigen Conjugationen eingeübt. — Dr. Moeller.
5. Geschichte. 1 St. w. — Die Geschichte der Juden und der übrigen orientalischen Völker des Alterthums. — Dr. Moeller.
6. Geographie. 2 St. w. — Der Unterricht wird im Anschluss an den ersten und zweiten Cursus des geographischen Leitfadens von Voigt ertheilt. — Dr. Moeller.
7. Naturgeschichte. 2 St. w. — Thierlehre mit Vorzeigung einzelner Thiere. — Prof. Menge.
8. Rechnen. 4 St. w. — Die vier Species in gebrochenen Zahlen. Resolution und Reduction benannter Brüche. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri. Kopfrechnen. Häusliche Uebungen. — Lehrer Grüning.

9. Schreiben. 2 St. w. — Bildung der Buchstaben aus ihren Elementen. Kurze Vorschriften meistens geschichtlichen und geographischen Inhalts abwechselnd mit Sittensprüchen. Schnellschrift wurde geübt. — Lehrer Gerlach.

10. Zeichnen. 2 St. w. — Uebungen nach Vorlegeblättern und geometrisches Zeichnen nach dem Leitfaden von Busch. — Lehrer Gerlach.

11. Singen. 1 St. w. — Comb. mit Quinta B. Ein- und zweistimmige Lieder nach Erk und Greef. Choräle. Die gewöhnlichen musikalischen Ausdrücke und Bezeichnungen wurden erklärt und die Lehre von den Tonleitern beendet. — Lehrer Zur.

Quinta. Coetus B.

Ordinarius: Dr. Neumann.

1. Religion. 3 St. w. — Wie in Coetus A. — Dr. Wilde.
2. Deutsch. 4 St. w. — Wie in Coetus A. — Dr. Martens.
3. Latein. 6 St. w. — Wie in Coetus A. — Dr. Neumann.
4. Französisch. 5 St. w. — Die ersten 60 Stücke des Ploetz'schen Elementarbuchs genau eingeübt und grösstentheils mündlich reproduciert. Häufige Extemporalien. Avoir und être, sowie die regelmässigen Conjugationen sorgfältig eingeübt. — Dr. Wulckow.
5. Geschichte. 1 St. w. Wie in Coetus A. — Dr. Moeller.
6. Geographie. 2 St. w. — Der Unterricht wird im Anschluss an den ersten und zweiten Cursus des geographischen Leitfadens von Voigt ertheilt. — Dr. Moeller.
7. Naturgeschichte. 2 St. w. — Wie in Coetus A.
8. Rechnen. 4 St. w. — Wie in Coetus A. — Dr. Neumann.
9. Schreiben. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Lehrer Gerlach.
10. Zeichnen. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Lehrer Gerlach.
11. Singen. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Lehrer Zur.

Sexta. Coetus A.

Ordinarius: Lehrer Grüning.

1. Religion. 3 St. w. — 2 St. biblische Geschichte des alten Testaments; aus dem neuen Testamente wurde die Geburts- und Leidensgeschichte Christi durchgenommen. — 1 St. Katechismus: das 1. und 2. Hauptstück wurden gelernt und erläutert. — Bibelsprüche und Lieder gelernt. — Die sonntäglichen Evangelien wurden gelesen und erklärt. — Lehrer Zur.
2. Deutsch. 4 St. w. — Die Lehre vom einfachen und erweiterten Satze. — Kenntniss der Wortarten. — Orthographische und Declamations-Uebungen. — Lesen u. Nacherzählen. — Dr. Wilde.
3. Latein. 8 St. w. — Regelmässige Declination und Conjugation. Adjectiva. Zahlwörter. die Pronomina und die Genusregeln. — Uebungen im mündlichen und schriftlichen Uebersetzen. — Memoriren von Vocabeln. — Dr. Wilde.
4. Rechnen. 5 St. w. — Wiederholung der vier Species in unbenannten Zahlen. — Resolution, Reduction und die vier Species in benannten Zahlen. — Zeitrechnung. — Kopfrechnen besonders geübt. — Häusliche Uebungen. — Lehrer Grüning.
5. Naturgeschichte. 2 St. w. — Allgemeine Uebersicht der drei Naturreiche. — Speciell die Säugethiere. — Lehrer Gerlach.
6. Geographie. 2 St. w. — Der Unterricht wird im Anschluss an den ersten Cursus des geographischen Leitfadens von Voigt ertheilt. — Dr. Möller.

7. Geschichte. 1 St. w. — Die Schüler werden mit den Sagen der alten Welt bekannt gemacht. — Dr. Möller.

8. Schreiben. 3 St. w. — Bildung der Buchstaben aus ihren Elementen. — Uebungen nach Vorschriften von der Hand des Lehrers, enthaltend Sittensprüche und Geschichtliches. — Häusliche Uebungen. — Lehrer Grüning.

9. Zeichnen. 2 St. w. — Zeichnen nach Vorlegeblättern. — Lehrer Grüning.

10. Singen. 2 St. w. — Comb. mit VI. B. — Einstimmige Lieder nach Erk und Greef. — Choräle. — Treffübungen. — Die Elemente der Theorie der Musik wurden gelernt. — Lehrer Zur.

Sexta. Coetus. B.

Ordinarius: Dr. Martens.

1. Religion. 3 St. w. — Wie in Coetus A. — Lehrer Zur.

2. Deutsch. 5 St. w. — Kenntniss der Redetheile. Der einfache und erweiterte Satz. Orthogr. Uebungen. 3 St. — Dr. Wilde. — Leseübungen mit Wiedererzählen, Declamation. 2 St. — Dr. Martens.

3. Latein. 8 St. w. — Wie in Coetus A. — Dr. Martens.

4. Rechnen. 5 St. w. — Wie in Coetus A. — Lehrer Grüning.

5. Naturgeschichte. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Lehrer Gerlach.

6. Geographie. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Dr. Martens.

7. Geschichte. 1 St. w. — Wie in Coetus A. — Dr. Martens.

8. Schreiben. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Lehrer Gerlach.

9. Zeichnen. 2 St. w. — Zeichnen nach Vorlegeblättern. — Lehrer Gerlach.

10. Singen. 2 St. w. — Wie in Coetus A. — Lehrer Zur.

Vorschule.

Ordinarius: Lehrer Zur.

1. Religion. 2 St. w. — Ausgewählte Stücke aus der bibl. Geschichte des alten Testaments; aus dem neuen Testament wurde die Weihnachts- und Leidens-Geschichte durchgenommen. Aus dem Katechismus wurde das 1. Hauptstück gelernt. Bibelsprüche und Lieder. — Lehrer Zur.

2. Lesen. 6 St. w. — Benutzt wurde das Deutsche Lesebuch für Septima von Paulsiek. Das Gelesene wurde besprochen und von den Schülern frei nacherzählt. — Lehrer Zur.

3. Deutsch. 7 St. w. — 2 St. orthographische Uebungen. — 1 St. Declamiren geeigneter Gedichte. — Lehrer Zur. — 4 St. w. — Der einfache Satz. Die Begriffswörter. Declination. Comparation. Conjugation. Orthographische Uebungen. — Lehrer Grüning.

4. Rechnen. 6 St. w. — Zerlegen der Zahlen. Uebung im Numeriren. Die 4 Species wurden schriftlich und besonders im Kopfe geübt. Täglich häusliche Uebungen. — Lehrer Zur.

5. Geographie. 2 St. w. — Allgemeine Vorkenntnisse. Die Bestimmung bekannter Ortschaften nach den Himmelsgegenden. Betrachtung des Globus. Europa mit seinen Grenzen, Ländern, Hauptstädten, Gebirgen und Meerestheilen. — Lehrer Gerlach.

6. Schreiben. 4 St. w. — Bildung der Buchstaben aus ihren Elementen und Einübung derselben in Wörtern und Sätzen. — Lehrer Zur.

7. Zeichnen. 1 St. w. — Elemente des Zeichnens, später nach leichten Vorlegeblättern. — Lehrer Gerlach.

II. Statistische Nachrichten.

Ostern 1869 hatte die Petrischule 432, jetzt 396 Schüler: in I. 11, II. 38, III A. 40, III B. 31, IV A. 28, IV B. 30, V A. 51, V B. 46, VI A. 37, VI B. 37, in der Vorschule 47. Durch den Tod haben wir im Juli v. J. zwei pflichtgetreue, strebsame Schüler verloren: den Tertianer Adolph Teichmann und den Quintaner Ernst Krupke.

Am Turnen nahmen im Sommersemester 301, im Wintersemester 279 Schüler Theil. Das Turnfest wurde am 7. Juli v. J. abgehalten.

Am 28. März d. J. fand die Abiturienten-Prüfung statt unter dem Vorsitz des Königlichen Provinzial-Schulraths Herrn Dr. Schrader und im Beisein des Stadtschulraths Herrn Dr. Kreyenberg.

Den Abiturienten wurde wegen des günstigen Ausfalls der schriftlichen Arbeiten die mündliche Prüfung erlassen.

1. Richard Cornelius Claassen, 18½ J. alt, mennonitischer Confession, aus Tiegenhof, 5 J. auf der Schule, 2 J. in I., erhielt das Zeugniss der Reife mit dem Prädikate: „Gut bestanden." C. wird sich auf dem hiesigen Gymnasium zur Universität vorbereiten.

2. Carl August v. Roy, 17½ J. alt, evang. Confession, aus Danzig, 11 J. auf der Schule, 2 J. in I., erhielt das Zeugniss der Reife mit dem Prädikate: „Gut bestanden." v. R. widmet sich dem Kaufmannsstande.

3. Franz Johannes Schlicht, 19¼ J. alt, kathol. Confession, aus Danzig, 7 J. auf der Schule, 2 J. in I., erhielt das Zeugniss der Reife mit dem Prädikate: „Gut bestanden." S. widmet sich dem Kaufmannsstande.

Für die schriftliche Prüfung waren folgende Aufgaben gestellt:

a) im **Französischen**: Exercitium aus Herder XXI., 59: „Die Krone des Alters."
b) im **Englischen**: The American war of independence 1775—83.
c) im **Deutschen**:

Heil, wenn das Gute du aus freiem Triebe thust,
Und das Gesetz erfüllst, weil es ist deine Lust;
Dann fühlest du allein nicht des Gesetzes Zwang,
Wenn du's verwandelt hast in deines Herzens Drang.

Rückert.

d) in der **Mathematik**:

1. In einen gegebenen Kreis soll ein Dreieck eingezeichnet werden, von dem ein Winkel gegeben ist und die Mittellinie einer einschliessenden Seite.

2. Zur Berechnung eines normalen Kegels sind gegeben: Die Höhe $h = 38{,}578$ und die Oberfläche $F = 21016{,}507$.

3. Zur Berechnung eines Dreiecks ist gegeben: der Flächeninhalt $F = 1207{,}08786$, die Seite $\alpha = 58{,}486$ und ihr Gegenwinkel $A = 65^0\ 36'\ 40''$.

4. Die Summe zweier Zahlen ist $a = 232$; ihre Quadratsumme mit ihrem Product multiplicirt $b = 360030720$.

e) in der **Physik**:

1. Für ein Keplersches Fernrohr sei die Brennweite des Objectivs $= F$, die Brennweite des Oculars $= f$, der Abstand des Objects vom Objectiv $= a$, $\triangle$ die deutliche Sehweite, man soll den Abstand der beiden Linsen für $\triangle$ bestimmen; die Dicke der Linsen $= o$.

2. Wenn die Radien der Kugelflächen einer Linse r und ϱ, das Brechungsverhältniss $= n$, die Dicke der Linse $= d$; wie gross sind für Parallelstrahlen die den beiden Kugelflächen zugehörigen Brennweiten?

3. Man soll die Katakaustika für die Curven $y^n = px^m$ und $y^2 = px + qx^2$ bestimmen, wenn die auffallenden Strahlen einander parallel sind. — Die Apollonische Parabel.

4. Welche Data werden erfordert, um die Fallgeschwindigkeiten an der Oberfläche, die Massen und die Dichtigkeiten der Sonne und der Planeten zu finden?

f) in der **Chemie:**

1. Auf welche Weise kann Silber aus Erzen, die zugleich Eisen, Kupfer und Schwefel enthalten, gewonnen werden?

2. Wie kann Platin in Form feinen Drahts oder als Platinschwamm dargestellt werden und welche katalytische Eigenschaft zeigt er in diesen Formen?

3. Aus 3 Analysen von Feldspat ergebe sich die Zusammensetzung:

a) 64 Kieselsäure 20 Thonerde 14 Kali 2 Kalk

b) 65 Kieselsäure 20 Thonerde 12,25 Kali 1,25 Eisenoxyd 0,50 Wasser

c) 65,9 Kieselsäure 17,97 Thonerde 13,9 Kali 1,01 Natron 1,34 Kalk,

welches ist die chemische Formel, die sich daraus für den Feldspat herleiten lässt?

4. Ein Kalkeisengranat von Zermat enthielt 35,80 Kieselsäure 0,85 Thonerde 29,50 Eisenoxyd 1,04 Eisenoxydul 32,10 Kalkerde 0,90 Magnesia 0,53 Wasser. Welche Formel ergiebt sich, wenn Kieselsäure $= SiO^2$ und welche, wenn dieselbe $= SiO^3$ angenommen wird?

5. Wenn für krystallisirten Augit die Formel $CaOSiO^2 + MgOSiO^2$; für krystallisirte Hornblende $CaOSiO^2 + 3\ (MgOSiO^2)$ ist, welches sind die procentigen Zusammensetzungen?

III. Chronik.

Unterm 7. Juni v. J. ertheilte mir das Königl. Provinzial-Schul-Collegium den für die Monate Juli und August erbetenen Urlaub, wodurch eine Vertretung meines Unterrichts durch meine Herren Kollegen nöthig wurde.

Am 8. September v. J. wurde eine Excursion nach Kahlbude und Prangenau mit den Schülern der 4 oberen Klassen unter Leitung der Herren Professor Troeger, Dr. Cosack und Hottenrott veranstaltet. Einen besonderen Reiz bekam dieselbe dadurch, dass Herr R. Steimmig freundlichst den rüstigen Wanderern gestattete, seine in Boelkau gelegene und nach den neuesten Principien eingerichtete Papierfabrik in Augenschein zu nehmen.

Am 14. September v. J. dem 100jährigen Geburtstage Alex. v. Humboldt hatte auf den Wunsch seiner Collegen der Director es übernommen, Hauptmomente aus dem Leben des grossen Mannes den Schülern vorzuführen und durch Karten, Zeichnungen, Briefe u. s. w. zu erläutern.

Am 9. März d. J. wohnten Sr. Excellenz der Herr Oberpräsident v. Horn und der Herr Oberbürgermeister Geheimer Rath v. Winter während 2 Stunden dem Unterrichte in Prima und Secunda bei.

Der Geburtstag Sr. Majestät des Königs wurde durch ein Gebet des Herrn Pastor Schaper, durch eine Ansprache an die Schüler über Ps. 20 und durch den Gesang entsprechender Lieder gefeiert.

IV. Lehrapparate.

1) Naturhistorische, physikalische und geographische Sammlung.

Für die Sammlung physikalischer Instrumente wurden angeschafft: Eine Sirene nach Cagniard-Latour und eine Sirene nach Oppelt, ein Sonomètre différentiel, eine grosse Stimmgabel, 13 kleinere Stimmgabeln für die temperirte Tonleiter, von R. Koenig in Paris, ein grosses Prisma und Spaltvorrichtung von Merz in München. — Herr Dr. Horn in Leopoldshall schenkte eine neue Sammlung Stassfurter Salz zum Theil mit schönen Krystallisationen.

2) Erweiterung der Bibliothek.

Geschenke: Johannes Kepler von Gruner 1. Theil, von Sr. Excellenz dem Herrn Minister des Unterrichts. — Thilo, Geschichte der preussischen Haupt-Bibelgesellschaften, von demselben. — Menge, preussische Spinnen, 2. und 3. Abtheilung, vom Verfasser. — Forster, Ansichten vom Niederrhein von Prof. Menge. Für alle diese Geschenke bezeigt die Schule ihren innigen Dank.

An Fortsetzungen wurden angeschafft: Archiv für das Studium der neuern Sprachen. — Centralblatt für das gesammte Unterrichtswesen. — Literarisches Centralblatt von Zarncke. — Grimm, deutsches Wörterbuch. — Hassel, Zeitschrift für preussische Geschichte und Landeskunde. — Petermann, geographische Mittheilungen. — v. Sybel, historische Zeitschrift nebst Forschungen zur deutschen Geschichte. — Altpreussische Monatsschrift. — Scriptores rerum Prussicarum Bd. 4. — Zeitschrift des statistischen Bureaus. — Berliner astronomisches Jahrbuch. — Carl, Repertorium für physikalische Technik. —

Neu angeschafft wurden: Tyndall, der Schall. — Tyndall, die Wärme. — Lang, Einleitung in die theoretische Physik. — Wand, über die Elasticität der festen Körper; Naturkräfte 1. 2. 3. Bd. — Pisko, neuere Apparate der Akustik. — Emsmann, 16 mathematische Probleme. — Bruhns, Encke's Leben. — Scheffers, Architektonische Formenlehre. — Wiese, das höhere Schulwesen 2. Theil. — Verschiedene Wandkarten, u. a. zwei photolithographirte von Raaz.

V. Verordnungen und Rescripte der hohen Schulbehörden.

1) Unterm 17. März v. J. empfielt das Königl. Provinzial-Schul-Collegium die vom Professor Dr. Guthe in Hannover herausgegebene Schulgeographie.

2) Unterm 19. März v. J. empfielt das Königl. Provinzial-Schul-Collegium die deutschen Chorgesänge von Ferd. Möhring.

3) Unterm 20. März v. J. bestimmt das Königl. Provinzial-Schul-Collegium, dass die Genehmigung zur Einführung neuer Schulbücher 6 Wochen vor Beginn des Schuljahres nachzusuchen ist.

4) Unterm 27. März v. J. trifft das Königl. Provinzial-Schul-Collegium Bestimmungen über den unerlaubten Besuch der Wirthshäuser von den Schülern der höheren Bildungsanstalten.

5) Die Verfügung des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums vom 31. März v. J. erneuert die Bestimmung, dass das Probejahr der Schulamts-Candidaten, wenn nicht besondere Gründe vorliegen, an derselben Anstalt absolvirt werden muss.

6) Unterm 5. Juni v. J. macht das Königl. Provinzial-Schul-Collegium auf die von Ernst Hentschel (Leipzig bei Merseburger) herausgegebene Schrift „Die neuen Maasse und Gewichte“ aufmerksam.

7) Unterm 26. August v. J. bestimmt das Königl. Provinzial-Schul-Collegium die Zahl der einzusendenden Exemplare des Schulprogramms auf 300.

8) Unterm 29. Septbr. v. J. übersendet das Königl. Provinzial-Schul-Collegium die für die Directoren-Conferenz 1871 ausgewählten Berathungs-Gegenstände.

9) Unterm 5. Novbr. v. J. giebt das Königl. Provinzial-Schul-Collegium Nachricht über den am 10. Novbr. v. J., dem Geburtstage Dr. Martin Luthers, in den evangelischen Kirchen zu haltenden Bettag.

10) Unterm 27. Decbr. v. J. macht das Königl. Provinzial-Schul-Collegium auf den 2. Theil des von dem Herrn Geheimen Ober-Regierungsrath Dr. Wiese herausgegebenen Werks: „Das höhere Schulwesen in Preussen“ aufmerksam.

11) Unterm 24. Januar d. J. empfielt das Königl. Provinzial-Schul-Collegium die von dem naturwissenschaftlichen Verein für Sachsen und Thüringen herausgegebene Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.

12) Unterm 26. Januar d. J. macht das Königl. Provinzial-Schul-Collegium auf die vom Dr. Euler und Eckler herausgegebene Sammlung der das Turnwesen in Preussen betreffenden Verordnungen und amtlichen Bekanntmachungen aufmerksam.

13) Unterm 25. Februar d. J. empfielt das Königl. Provinzial-Schul-Collegium die von der polytechnischen Schule in Dresden für den Unterricht im Freihandzeichnen hergestellten Gipsvorlagen.

14) Unterm 3. März d. J. theilt das Königl. Provinzial-Schul-Collegium die Aufforderung mit, welche der Herr Minister des Unterrichts unter 28. Februar d. J. im Betreff der im April d. J. stattfindenden Ausstellung für Zeichenunterricht erlassen hat.

VI. Nachricht über den neuen Cursus.

Am 9. April ist Censur und Versetzung. Die Osterferien dauern bis zum 25. April. — Zur Aufnahme neuer Schüler bin ich am 22. und 23. April Vormittags von 9—12 Uhr im Schulhause bereit.

F. Strehlke.

Tabellarische Uebersicht

über die Vertheilung der Lectionen im Wintersemester des Schuljahrs 1869/70.

Nro.	Lehrer.	Anzahl der Lehrst.	I. 32 St.	II. 32 St.	III A. 32 St.	III B. 32 St.	IV A. 32 St.	IV B. 32 St.	V A. 31 St.	V B. 31 St.	VI A. 30 St.	VI B. 30 St.	Elementarclasse. 28 St.
1.	**Prof. Dr. Strehlke,** Director. Ordinarius I.	11	3Dtsch. 3 Phys.	3Dtsch 2 Phys.									
2.	**Prof. Troeger,** 1. Oberlehrer. Ordinarius II.	22	5 Math.	5 Math.	6 Math	6 Math.							
3.	**Prof. Menge,** 2. Oberlehrer.	20	2 Chem. 2 Natg.	2 Chem 2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.			
4.	**Dr. Cosack,** 3. Oberlehrer. Ordinarius III A.	20	4 Frnz.	4 Frnz.	4 Frnz. 5 Lat. 3Dtsch.								
5.	**Boeszoermeny,** 4. Oberlehrer.	20	3 Gsch.	2 Gsch. 1Geog.	4 Gsch. u. Gg.	4 Gsch. u. Gg.	4 Gsch. u. Gg.	2Geog.					
6.	**Dr. Pfeffer,** 1. ordentlicher Lehrer. Ordinarius III B.	21	3 Lat.	4 Lat.		5 Lat. 4 Frnz.	5 Frnz.						
7.	**Dr. Wulckow,** 2. ordentlicher Lehrer. Ordinarius IV B.	22				3Dtsch.		5 Frnz. 6 Lat. 3Dtsch.		5 Frnz.			
8.	**Dr. Moeller,** 3. ordentlicher Lehrer. Ordinarius V A.	22						2 Gsch.	6 Lat. 5 Frnz. 3 Gch. u. Gg.	3 Gsch. u. Gg.	3 Gsch. u. Gg.		
9.	**Dr. Neumann,** 4. ordentlicher Lehrer. Ordinarius V B.	22					6 Math.	6 Math.		6 Lat. 4 Rchn.			
10.	**Hottenrott,** 5. ordentlicher Lehrer. Ordinarius IV A.	23	3 Engl	3 Engl.	4 Engl.	4 Engl.	6 Lat. 3Dtsch.						
11.	**Grüning,** 6. ordentlicher Lehrer. Ordinarius VI A.	23							4 Rchn.		5 Rchn. 3 Schr. 2 Zchn	5Rchn.	4Dtsch.
12.	**Pastor Schaper,** ev. Religionslehrer.	8	2	2	2		2						
13.	**Dr. Wilde,** 1. wissensch. Hilfslehrer.	21 2 Auf-. sichtsst							3Relig.	3Relig.	8 Lat. 4Dtsch.	3Dtsch.	
14.	**Dr. Martens,** 2. wissensch. Hilfslehrer. Ordinarius VI B.	21 2 Auf- sichtsst							4Dtsch.	4Dtsch.		8 Lat. 2Dtsch. 3 Gg. u. Gch.	
15.	**Landschafts-Maler Rodde,** Zeichenlehrer.	12	2	2	2	2	2	2					
16.	**Gerlach,** Elementar-Lehrer.	23					2 Schr.	2 Schr.	2 Schr. 2 Zchn.	2 Schr. 2 Zchn.	2 Natg.	2 Schr. 2 Zchn. 2 Natg.	2 Geog. 1 Decl.
17.	**Zur,** Ordinarius der Elementarclasse und Gesanglehrer.	24									3 Religion		21
		5	2 St. 1. Gesangsclasse.						1 St. Gesang.		2 St. Gesang.		

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Freitag, den 8. April 1870.

Vormittags von $8\frac{1}{2}$ Uhr ab:

Choral und Gebet.

Tertia A. u. B.	Religion. Pastor Schaper.	
	Mathematik. Professor Troeger.	
Tertia B.	Latein. Dr. Pfeffer.	
Quarta A. u. B.	Geographie. Oberlehrer Boeszoermeny.	
Quarta B.	Französisch. Dr. Wulckow.	
Secunda.	Geschichte. Oberlehrer Boeszoermeny.	
	Französisch. Dr. Cosack.	
Prima.	Physik. Der Director.	
	Englisch. Ordentlicher Lehrer Hottenrott.	
	Anthropologie. Professor Menge.	

Entlassung der Abiturienten.

Choral.

Nachmittags von $2\frac{1}{2}$ Uhr ab:

Vorschule.	1. Deutsch. 2. Rechnen.	Lehrer Zur.
Sexta B.	Geographie. Dr. Martens.	
Sexta A.	Lateinisch. Dr. Wilde.	
Sexta A. u. B.	Naturgeschichte. Lehrer Gerlach.	
Quinta A.	Rechnen. Lehrer Grüning.	
Quinta B.	Latein. Dr. Neumann.	

Gesang.

1. „Alles was Odem hat“, von Klose.
2. „Dort, wo der alte Rhein“, von G. Schmidt.
3. „Es braust ein Ruf“, von C. Wilhelm.

Tabellarische Uebersicht

über die Vertheilung der Lectionen im Wintersemester des Schuljahrs 1869/70.

Nro.	Lehrer.	Anzahl der Lehrst.	I. 32 St.	II. 32 St.	III A. 32 St.	III B. 32 St.	IV A. 32 St.	IV B. 32 St.	V A. 31 St.	V B. 31 St.	VI A. 30 St.	VI B. 30 St.	Elementarclasse. 28 St.
1.	**Prof. Dr. Strehlke,** Director. Ordinarius I.	11	3Dtsch. 3 Phys.	3Dtsch 2 Phys.									
2.	**Prof. Troeger,** 1. Oberlehrer. Ordinarius II.	22	5 Math.	5 Math.	6 Math.	6 Math.							
3.	**Prof. Menge,** 2. Oberlehrer.	20	2 Chem. 2 Natg.	2 Chem. 2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.	2 Natg.			
4.	**Dr. Cosack,** 3. Oberlehrer. Ordinarius III A.	20	4 Frnz.	4 Frnz.	4 Frnz. 5 Lat. 3Dtsch.								
5.	**Boeszoermeny,** 4. Oberlehrer.	20	3 Gsch.	2 Gsch. 1Geog.	4 Gsch. u. Gg.	4 Gsch. u. Gg.	4 Gsch. u. Gg.	2Geog.					
6.	**Dr. Pfeffer,** 1. ordentlicher Lehrer. Ordinarius III B.	21	3 Lat.	4 Lat.		5 Lat. 4 Frnz.	5 Frnz.						
7.	**Dr. Wulckow,** 2. ordentlicher Lehrer. Ordinarius IV B.	22				3Dtsch.		5 Frnz. 6 Lat. 3Dtsch.		5 Frnz.			
8.	**Dr. Moeller,** 3. ordentlicher Lehrer. Ordinarius V A.	22						2 Gsch.	6 Lat. 5 Frnz. 3 Gch. u. Gg.	3 Gsch. u. Gg.	3 Gsch. u. Gg.		
9.	**Dr. Neumann,** 4. ordentlicher Lehrer. Ordinarius V B.	22					6 Math.	6 Math.		6 Lat. 4 Rchn.			
10.	**Hottenrott,** 5. ordentlicher Lehrer. Ordinarius IV A.	23	3 Engl	3 Engl.	4 Engl.	4 Engl.	6 Lat. 3Dtsch.						
11.	**Grüning,** 6. ordentlicher Lehrer. Ordinarius VI A.	23							4 Rchn.		5 Rchn. 3 Schr. 2 Zchn	5Rchn.	4Dtsch.
12.	**Pastor Schaper,** ev. Religionslehrer.	8	2	2	2		2						
13.	**Dr. Wilde,** 1. wissensch. Hilfslehrer.	21 2 Aufsichtsst							3Relig.	3Relig.	8 Lat. 4Dtsch.	3Dtsch.	
14.	**Dr. Martens,** 2. wissensch. Hilfslehrer. Ordinarius VI B.	21 2 Aufsichtsst							4Dtsch.	4Dtsch.	-	8 Lat. 2Dtsch. 3 Gg. u. Gch.	
15.	**Landschafts-Maler Rodde,** Zeichenlehrer.	12	2	2	2	2	2	2					
16.	**Gerlach,** Elementar-Lehrer.	23					2 Schr.	2 Schr.	2 Schr. 2 Zchn.	2 Schr. 2 Zchn.	2 Natg.	2 Schr. 2 Zchn. 2 Natg.	2 Geog. 1 Decl.
17.	**Zur,** Ordinarius der Elementarclasse und Gesanglehrer.	24									3 Religion		21
		5	2 St. 1. Gesangsclasse.						1 St. Gesang.		2 St. Gesang.		

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Freitag, den 8. April 1870.

Vormittags von $8^1/_2$ Uhr ab:

Choral und Gebet.

Tertia A. u. B.	Religion. Pastor Schaper.
	Mathematik. Professor Troeger.
Tertia B.	Latein. Dr. Pfeffer.
Quarta A. u. B.	Geographie. Oberlehrer Boeszoermeny.
Quarta B.	Französisch. Dr. Wulckow.
Secunda.	Geschichte. Oberlehrer Boeszoermeny.
	Französisch. Dr. Cosack.
Prima.	Physik. Der Director.
	Englisch. Ordentlicher Lehrer Hottenrott.
	Anthropologie. Professor Menge.

Entlassung der Abiturienten.

Choral.

Nachmittags von $2^1/_2$ Uhr ab:

Vorschule.	1. Deutsch. 2. Rechnen. } Lehrer Zur.
Sexta B.	Geographie. Dr. Martens.
Sexta A.	Lateinisch. Dr. Wilde.
Sexta A. u. B.	Naturgeschichte. Lehrer Gerlach.
Quinta A.	Rechnen. Lehrer Grüning.
Quinta B.	Latein. Dr. Neumann.

Gesang.

1. „Alles was Odem hat", von Klose.
2. „Dort, wo der alte Rhein", von G. Schmidt.
3. „Es braust ein Ruf", von C. Wilhelm.