Über die

Brechung des Lichtes durch Linsen.

Erster Teil.

Zur Einführung in den Begriff eines trigonometrischen Systems

von

Max Grassmann,
Gymnasial-Oberlehrer.

Beilage zum Programm des Königlichen Gymnasiums zu Cöslin
Ostern 1895.

Cöslin 1895.
Gedruckt bei C. G. Hendess.

1895. Progr.-No. 133.

Vorbemerkungen.

Ich bezeichne „positiv“ und „negativ“ mit dem gemeinsamen Namen „valent“ und die Eigenschaft einer Grösse, positiv zu sein, sowie die Eigenschaft, negativ zu sein, als Valenz dieser Grösse. Eine Grösse, welcher durch das System, in welchem sie vorkommt, keine Valenz zuerteilt wird, nenne ich „invalent“, eine solche, welche bei einer im System zulässigen Betrachtungsweise als positiv, bei einer anderen in demselben System ebenfalls zulässigen Betrachtungsweise als negativ erscheint, nenne ich „intervalent“.

Zwei Grössen nenne ich einander „convalent“, wenn sie entweder beide positiv oder beide negativ sind, und „contravalent“, wenn die eine positiv, die andere negativ ist.

Unter Anwendung dieser Bezeichnung sage ich nun: Das Gebiet der Algebra sind die valenten Zahlen. In dieses Gebiet gehören die trigonometrischen Funktionen: Sinus, Cosinus, Tangens u. s. w. Denn da diese Funktionen das Verhältnis zweier gleich benannter Grössen, nämlich zweier Geraden, bezeichnen, so sind sie Zahlen, und da diese Zahlen in jedem Falle entweder einen positiven oder einen negativen Wert haben, der ihnen nicht erst durch ein vorgesetztes Plus- oder Minuszeichen erteilt wird, so sind sie valente Zahlen. Sie gehören also dem Gebiete der Algebra an und können als algebraische Funktionen bezeichnet werden. Sie sind nun Funktionen von Winkeln und man kann diesen Winkeln, wenn man sie entstanden denkt durch Drehung eines der Schenkel um den Scheitel, je nach der Richtung, in der diese Drehung erfolgt, positive oder negative Valenz beilegen. Ebenso kann man sich eine Gerade entstanden denken durch Bewegung eines ihrer Punkte, und man kann der Geraden je nach der Richtung, in welcher diese Bewegung erfolgt, eine Valenz beilegen. Die Wahl, ob man einem Winkel oder einer Geraden eine Valenz beilegen will, und welche, ist nicht immer freigestellt, sondern es ist zuweilen im Zusammenhange eines Systems für den Winkel bezw. die Gerade eine Valenz schon vorgeschrieben in der Weise, dass der Winkel in einer bestimmten Drehungsrichtung, bezw. die Gerade in einer bestimmten Bewegungsrichtung positiv genommen werden muss. Wenn φ ein valenter Winkel ist, so möge mit $-\varphi$ derjenige mit φ sich deckende Winkel bezeichnet werden, welcher durch die entgegengesetzte Drehung erzeugt wird wie φ, und wenn g eine valente Gerade ist, so möge mit $-g$ diejenige mit g sich deckende Gerade bezeichnet werden, welche durch die entgegengesetzte Bewegung erzeugt wird wie g. Der Anfangsschenkel von φ ist der Endschenkel von $-\varphi$, und der Anfangspunkt von g ist der Endpunkt von $-g$.

Betrachten wir nun die Gleichungen, durch welche die trigonometrischen Funktionen definiert werden z. B. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, so drückt diese Gleichung auf dem Gebiete desjenigen Zweiges der Geometrie, welcher sich mit den invalenten Geraden und Winkeln beschäftigt, und welchen wir als niedere Geometrie bezeichnen können, nur aus, dass der Sinus eines Winkels das Verhältnis der Länge der ihm gegenüberliegenden Kathete zu derjenigen der Hypotenuse sei, und die Gleichung $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, dass der Cosinus das Verhältnis der Länge der anliegenden Kathete zu derjenigen der Hypotenuse sei. Durch die Gleichungen $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$ wird dann der Begriff der trigonometrischen Funktionen stumpfer Winkel definiert. Setzt man in die zweite dieser Gleichungen statt $\cos\alpha$ seinen Wert $\frac{b}{c}$ und schreibt also $\cos(180-\alpha) = -\frac{b}{c}$ und statt dieser Gleichung $\cos(180-\alpha) = \frac{(-b)}{c}$ und betrachtet hierin die Grösse $(-b)$ als eine Gerade, deren Richtung derjenigen von b entgegengesetzt ist, so ist das sachlich schon ein Hinausgreifen in das Gebiet der höheren Geometrie, aber das Symbol $(-b)$ gehört noch der niederen an. Denn zum Gebiete der höheren Geometrie gehören ausser den invalenten auch valente Gebilde, und zwar bezeichnet sie solche valente Gebilde ohne Anwendung eines Vorzeichens, indem aus dem geometrischen Systeme, in welchem sie vorkommen, von selbst sich ergeben muss, ob mit jedem zur Bezeichnung eines geometrischen Gebildes gebrauchten Buchstaben bzw. mit einer derartigen Verbindung von Buchstaben die Vorstellung einer Valenz zu verbinden sei oder nicht, und im ersteren Falle, ob die Vorstellung der positiven oder der negativen Valenz zu dem durch Buchstaben dargestellten Begriffe gehöre. Wenn jeweilig auch in der höheren Geometrie ein Symbol wie das vorhin genannte $(-b)$ angewandt wird, so ist das nichts weiter als die Benutzung eines Hilfsmittels, das ihr durch die niedere Geometrie dargeboten wird.

Man darf deshalb von zwei convalenten unter jenen der höheren Geometrie eigenen Gebilden strenggenommen nicht sagen, sie seien gleichbezeichnet. Denn seien a und b negative Gerade, a_1 und b_1 die ihnen entsprechenden positiven, so dass $a = (-a_1)$, $b = (-b_1)$ ist, so könnte der Ausdruck, die Geraden a und b seien gleichbezeichnet, nur besagen sollen, dass, wenn man zu ihrer Bezeichnung nicht die Buchstaben a und b, sondern jene Symbole wählen würde, alsdann in diesen Symbolen ein gleiches Zeichen, nämlich das Zeichen — vorkommen würde. Dann sind aber a_1 und b_1, und nicht a und b gleichbezeichnet, da in der letzteren Bezeichnung überhaupt nichts vorkommt, wodurch die Valenz bezeichnet würde, also die Geraden a und b auch nicht gleichbezeichnet genannt werden dürfen. Und wenn man die Berechtigung dieser Benennungsweise einräumen wollte, durch welches Substantivum will man dann den Begriff der Valenz ausdrücken? Etwa durch „Gleichbezeichnetheit" oder „Gleichbezeichnetsein"? Aber der Begriff Valenz begreift auch die „Entgegengesetztbezeichnetheit"; der gemeinsame Begriff wäre also der des „Gleichbeziehungsweiseentgegengesetztbezeichnetseins". Auch darf statt „convalente Gerade" nicht gesagt werden „gleichgerichtete Gerade", da zwei Gerade auch convalent sein können, wenn sie sich im

Endlichen schneiden, mithin einen endlichen (von Null verschiedenen) Winkel miteinander bilden, also verschiedene Richtung haben. Aber, sagt man, bei convalenten Geraden ist der „Sinn" ihrer Richtung derselbe. Diese Bezeichnung ist thatsächlich in Gebrauch und hat nicht nur Sinn, sondern auch den Vorzug, deutsch zu sein.

Wenn dies nur überall als ein Vorzug bezeichnet werden könnte! Wenn nämlich die Richtung einer Geraden Sinn hat, was ist dann sie selbst, die Richtung oder auch die Gerade? „Sinnig" oder „sinnlich"?*) Und was hat ein valentes System, d. h. ein System, in welchem valente Grössen vorkommen. Hat es etwa „Sinn"? Ich hoffe, den hat es ohnehin. Und was ist ein invalentes? Ist das etwa „ohne Sinn"? Das wäre schlimm für die niedere Geometrie und für diejenigen, die sie erlernen wollen. Ich ziehe die von mir im Anfange gewählten lateinischen Bezeichnungen den eben angeführten deutschen vor. Ich würde, wenn ich von der internationalen Bedeutung der Wissenschaft und ihrer Terminologie absehe, im allgemeinen einer deutschen Bezeichnung, und wenn ich Franzose wäre, einer französischen den Vorzug geben vor einer lateinischen oder griechischen, wenn sie dasselbe leistet wie diese, und es ist gewiss ein Genuss, eine mathematische Abhandlung zu lesen, in der viele deutsche Bezeichnungen vorkommen, die geschmackvoll gewählt und so beschaffen sind, dass das Wort schon an sich, schon sprachlich einen grossen Teil der Merkmale des mathematischen Begriffes zum Ausdruck bringt, zu dessen Bezeichnung es verwandt wird, ohne dass es nötig wäre durch ein „Soll" gleichsam ein dem Worte fremdartiges Gepräge auf dasselbe zu drücken. Und in der That, es giebt gerade in der höheren Geometrie ein Gebiet, welches an solchen treffenden Bezeichnungen besonders reich ist; das ist derjenige Zweig derselben, welcher als Geometrie der „Lage" bezeichnet wird. Aber bei dem Suchen nach einer deutschen Bezeichnung begegnet es einem oft genug, dass sich das gewählte Wort das Gepräge, das man ihm aufdrücken möchte, nicht gefallen lassen will, und zwar auch dann nicht, wenn das Gepräge ihm nicht fremdartig ist. Eine solche Bezeichnung wäre die vorhin angeführte Bezeichnung eines valenten Systemes als eines sinnigen. Und das liegt nicht etwa nur an der Neuheit der Bezeichnung; sie würde, wenn sie Jahrzehnte lang gebraucht wäre, noch ebenso lächerlich erscheinen wie gegenwärtig. Nicht jedes deutsche Wort verträgt jedes Gepräge. Es ist dazu oft zu biegsam, zu elastisch, ja in gewissen Fällen bei der steten Beweglichkeit einer lebenden Sprache, zu flüssig, als dass es sich überhaupt prägen liesse. Dass hier so oft eine der beiden alten klassischen Sprachen in den Riss tritt, um das zu leisten, was die deutsche nicht vermag, ist eine Eigenschaft derselben, die nicht hoch genug angeschlagen werden kann.

An dieser Stelle mögen noch einige Bemerkungen Platz finden über die Anzahl der Punkte, Geraden, Winkel und Dreiecke, die auf einer Ebene möglich sind. Bezeichnet man die unendlich grosse Anzahl von Punkten, welche auf einer unbegrenzten, d. h. durch keine im Endlichen liegenden Punkte begrenzten, Geraden liegen mit dem Symbol ∞, so erhält man die Anzahl der auf ihr

*) Die Ausdrücke „gleichsinnig" statt „convalent", „ungleichsinnig" statt „contravalent" und „zweisinnig" statt „intervalent" wären brauchbar. Aber für „valent" fehlt eine entsprechende brauchbare und für „Valenz" eine in jedem Falle brauchbare Bezeichnung.

möglichen begrenzten Geraden, wenn man irgend einen jener unendlich vielen Punkte zu ihrem Anfangspunkte und bei Festhaltung irgend eines dieser Anfangspunkte irgend einen jener unendlich vielen Punkte zu ihrem Endpunkte wählt. Die Anzahl ist also unendlich mal unendlich ($\infty \cdot \infty = \infty^2$). Von derselben Stufe*), d. h. von zweiter Stufe unendlich ist die Anzahl der Winkel, welche in derselben Ebene liegen und denselben Punkt zum Scheitel haben, ferner die Anzahl der Punkte sowie der unbegrenzten Geraden, welche auf einer Ebene liegen, während die Anzahl der begrenzten $\infty^2 \cdot \infty^2 = \infty^4$ beträgt. Die Gesamtheit der durch ein und denselben Punkt gehenden Geraden einer Ebene nennt man einen Büschel von Geraden und zwar einen Büschel I. Ordnung. Die Anzahl dieser Geraden beträgt, wenn sie unbegrenzt oder wenn sie auf der einen Seite von jenem gemeinschaftlichen Punkte, auf der anderen von ihrem unendlich fernen Punkte begrenzt sind, ∞. Die Anzahl sämtlicher in einer Ebene möglichen Dreiecke erhält man, indem man irgend einen der ∞^2 Punkte der Ebene zu einem Eckpunkte, hierauf irgend einen der um diesen Punkt möglichen ∞^2 Winkel zu einem Winkel des Dreiecks, dann auf jedem seiner Schenkel einen der ∞ vielen auf demselben gelegenen Punkte zum zweiten bzw. dritten Eckpunkte wählt. Die Anzahl der in einer Ebene möglichen Dreiecke ist also ∞^6. Die Stufenzahl des Unendlichwerdens ist in diesem Falle 6. Die Stufenzahl m von ∞^m ändert sich nicht, wenn man ∞^m mit einer endlichen d. h. weder unendlich grossen noch unendlich kleinen Zahl multipliziert oder dividiert. $\frac{1}{\infty^m}$ oder ∞^{-m} bedeutet eine Zahl die unendlich klein ist von mter Stufe. Auch sie bleibt von derselben Stufe, wenn sie mit einer endlichen Zahl multipliziert oder dividiert wird.

Verhältnis des t. S.**) zu anderen geometrischen Systemen und zur geometrischen Optik.

Unter einem geometrischen System verstehe ich einen gesetzmässig zusammengefassten Verein geometrischer Gebilde. Gehören die Grössen α, a und c, welche in der Gleichung $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ vorkommen, einem valenten geometrischen Systeme an, d. h. einem solchen, in welchem auch valente geometrische Gebilde enthalten sind, so kann durch das Gesetz des Systemes über die Valenz jener Grössen entschieden sein, und ich nenne ein solches System ein trigonometrisches, wenn die Definitionsgleichungen der trigonometrischen Funktionen und folglich auch alle daraus abgeleiteten Gleichungen gültig bleiben, falls man den in diesen Gleichungen vorkommenden valenten Winkeln und Geraden diejenige Valenz zuerteilt, welche ihnen durch das Gesetz des Systemes vorgeschrieben wird, und zwar sage ich, dasselbe sei stark valent, wenn die Anzahl der in diesem

---

*) Ich wähle die Bezeichnung Stufe statt Ordnung, weil z. B. die Anzahl der in einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung enthaltenen Geraden nicht ∞^2, sondern ∞^1 ist.

**) Abkürzung für trigonometrisches System.

Systeme vorkommenden valenten Winkel und Geraden unendlich gross ist im Vergleich mit den darin enthaltenen invalenten Winkeln und Geraden, und nenne es ein vollständiges t. S., wenn alle in demselben vorkommenden Winkel und Geraden Valenz besitzen.

Das t. S. unterscheidet sich demnach dadurch von anderen geometrischen Systemen, dass in jenem ausschliesslich der Zweck verfolgt wird, einem Vereine von Winkeln und Geraden Valenz vorzuschreiben und zwar eine solche Valenz, dass die Gesetze der Trigonometrie durch das System ohne weiteres befriedigt werden, wenn denselben jene Valenz beigelegt wird, während bei anderen geometrischen Systemen dies nicht der einzige Zweck ist. So verfolgen die Koordinatensysteme neben dem eben angegebenen noch den Zweck mittelst der Koordinaten die Stelle im Raume, die irgend ein geometrisches Gebilde z. B. ein Punkt hat, algebraisch auszudrücken, um dann mit den Hülfsmitteln der Algebra zu Gesetzen zu gelangen, welchen jene Gebilde in ihren räumlichen Beziehungen zu einander unterliegen. Das Koordinatensystem schreibt Gesetze vor, um Gesetze zu finden. Das thut auch das t. S., aber seine Kompetenz ist eine geringere. Das Gebiet, auf welches sich seine Gesetzgebung erstreckt, ist sehr eng begrenzt, es ist beschränkt auf die Valenz der Geraden und Winkel. Aber dafür sind diese Gesetze von grosser Allgemeinheit. Das t. S. schreibt so zu sagen den anderen geometrischen Systemen die Verfassung vor und überlässt es ihnen im übrigen, ihre Gesetze selbst aufzustellen.

Es eignet sich deshalb auch dazu, die anderen geometrischen Systeme zu klassifizieren, freilich nur nach einem Gesichtspunkte, aber nach einem solchen, der für die höhere Geometrie wesentlich ist, nämlich nach der Valenz, und zwar zu klassifizieren nicht nur der Art, sondern auch dem Grade nach. Denn auch von diesem letzteren Gesichtspunkte aus betrachtet, unterscheiden sich die geometrischen Systeme. Die stärkste Valenz hat das t. S. selbst, wenn es ein vollständiges ist; denn es schreibt allen Geraden und Winkeln, die in ihm enthalten sind, Valenz vor. Ein Beispiel für ein in Bezug auf die Geraden schwachvalentes System ist das Cartesianische ebene oder räumliche Koordinatensystem. Denn was das erstere betrifft, so schreibt es von den ∞^2 Geraden, die es enthält, nur unendlich vielen ($2 \cdot \infty = \infty$) Geraden Valenz vor, nämlich denjenigen, welche den beiden Koordinatenaxen parallel sind, während die übrigen Geraden invalent sind, und jene valenten sind mithin unendlich wenig im Vergleich mit allen, die es enthält $\left(\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}\right)$.

Für die Untersuchungen über Gegenstände aus der geometrischen Optik insbesondere über die Brechung*) des Lichtes an einer Kugelfläche oder an einer Kombination solcher (Linse), die ich später anzustellen beabsichtige, ist das Cartesianische Koordinatensystem nicht valent genug, wenn anders jeder Lichtstrahl seine eigene Valenz haben soll. Ich bedarf dazu eines valenteren Systemes. Ein solches lässt sich aus dem t. S. ableiten. Falls sich diese Behauptung als richtig erweist, so wird es auch wohl als berechtigt erscheinen, wenn ich die gegenwärtige Abhandlung in eine Reihe gestellt habe mit späteren, welche sich mit optischen Fragen beschäftigen werden, und sie als erste in dieser Reihe bezeichnet habe.

---

*) Die Reflexion des Lichtes kann als Spezialfall der Brechung behandelt werden, wie es schon vielfach geschieht.

Ableitung eines ebenen trigonometrischen Systems.

Man kann sich eine von zwei Punkten, den Grenzpunkten, begrenzte*) Gerade durch zwei Arten der Bewegung eines Punktes P erzeugt denken, und zwar in der Weise, dass jeder auf der Geraden liegende Punkt von P nur einmal getroffen wird. Beide Arten der Bewegung sind entgegengesetzt gerichtet. Man kann sich einen Winkel durch zwei Arten der Drehung einer Geraden um den Scheitel dieses Winkels erzeugt denken, und zwar in der Art, dass jeder innerhalb des Winkels gelegene Punkt nur einmal von dieser Geraden getroffen wird. Beide Arten der Drehung sind entgegengesetzt gerichtet, und zwar die eine von links nach rechts, die andere von rechts nach links. Dabei soll als Standpunkt, von dem aus beurteilt wird, was rechts und was links ist, der Standpunkt desjenigen angenommen werden, der auf dem oberen Teile der Ebene des Winkels auf dessen Scheitel stehend nach der sich drehenden Geraden hinsieht. Die Drehung nach rechts ist diejenige Richtung der Drehung, in welcher sich der Zeiger einer Uhr über dem Zifferblatte bewegt. Wenn für alle Winkel, deren Scheitel auf ein und denselben Punkt P fallen, ein und dieselbe Drehungsrichtung als positiv angenommen wird, so soll derselbe als valenter Punkt bezeichnet werden, und zwar als Rechtspunkt, wenn die positive Drehung diejenige nach rechts ist, als Linkspunkt, wenn die positive Drehung diejenige nach links ist. Alle Rechtspunkte sind einander convalent, ebenso alle Linkspunkte. Wenn alle Punkte eines Systems Rechtspunkte sind, so soll dasselbe ein Rechtssystem genannt werden, und wenn alle Punkte Linkspunkte sind, ein Linkssystem.

Das spezielle ebene t. S., welches im Folgenden aufgestellt werden soll, möge ein Rechtssystem oder ein Linkssystem sein. Dasselbe ist mithin in Bezug auf die Winkel vollkommen valent. Um ihm auch hinsichtlich der Geraden Valenz zu erteilen, möge folgender Weg eingeschlagen werden. Es sei um einen beliebigen im Endlichen liegenden Punkt C eine Kugel mit einem Radius beschrieben, der unendlich gross, d. h. so gross ist, dass zwei Gerade, die sich in einem Punkte ihrer Oberfläche schneiden, für alle in praxi denkbaren Fälle, z. B. auch für alle astronomischen Messungen, als parallel betrachtet werden können. Sie bleiben dann auch parallel, wenn ihr Schnittpunkt sich noch weiter von C entfernt. An diese Kugel mögen in zwei diametral entgegengesetzten Punkten P und P^1 Tangentialebenen ω und ω^1 gelegt werden, von denen die erstere als die negativ, die letztere als die positiv unendlich ferne Ebene bezeichnet werde. Da diese Ebenen parallel sind, so schneiden sie sich in einer Geraden $\omega\omega^1 = o$, welche als die doppelt unendlich ferne Gerade bezeichnet werden kann, weil sie selbst dann als unendlich fern erscheinen würde, wenn man P und P^1 ohne ihren gegenseitigen Abstand zu ändern, als in endlicher Entfernung liegend betrachten würde.

Wir könnten nun zunächst die Richtung der positiven Geraden eines t. S., dessen Ebene die Gerade o in einem Punkte O schneiden möge, in der Weise festsetzen, dass ihr Anfangspunkt in

*) Der Ausdruck „unbegrenzte Gerade“ soll im Folgenden vermieden und auch eine solche Gerade als begrenzt gedacht werden, nämlich durch ihre unendlich fernen Punkte.

ω und ihr Endpunkt in ω^1 liegt, bzw. ihr Endpunkt näher an ω^1 als ihr Anfangspunkt. Dann wäre nur diejenige Schar paralleler Geraden, welche sich in O schneiden, valenzlos, alle übrigen wären valent. Jene mögen als Axen, diese als Strahlen bezeichnet werden, wenn sie die eben angegebene Richtung haben, dagegen als Gegenstrahlen, wenn sie die entgegengesetzte Richtung haben. Nennen wir denjenigen Punkt, welchen man erhält, wenn man OC über C hinaus um sich selbst verlängert, O^1, so liegt auch er auf allen Axen. Ist nun das System ein Rechts- bzw. ein Linkssystem, so liegt, von einem der Punkte O und O^1 aus gesehen, der Endpunkt jedes Strahles rechts bzw. links von seinem Anfangspunkte. Er möge der Axenpunkt genannt werden, und die Bezeichnung O und O^1 möge von vorn herein so gewählt sein, dass O der Axenpunkt ist.

Bei näherer Prüfung zeigt sich jedoch, dass das t. S., zu welchem man unter diesen Voraussetzungen gelangen würde, und welches als Parallelsystem bezeichnet werden möge, nur ein specieller Fall eines allgemeineren ist, und wir gehen sogleich zur Ableitung des letzteren über, nachdem wir noch einige Definitionen vorangeschickt haben:

Eine Gerade g wird von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkte P normiert, falls der Schnittpunkt einer durch P gelegten Geraden g^1 mit g in positiver Richtung auf g fortrückt, wenn g^1 um P in positiver Richtung gedreht wird*). Offenbar wird g von einem Punkte P^1, der auf der entgegengesetzten Seite von g liegt wie P, nicht normiert, wohl aber von allen Punkten, die auf derselben Seite von g liegen wie P. Wir wollen deshalb die Seite, auf der P liegt, die normale Seite von g nennen, die entgegengesetzte die abnorme, und den Ausdruck gebrauchen, P und g liegen normal zu einander. Wenn zu allen Seiten eines Dreieckes die im Innern desselben gelegenen Punkte normal sind, so möge dasselbe ein Normaldreieck genannt werden.

In dem Parallelsysteme liegt der Axenpunkt O, von dem aus Strahlen normiert werden, im Unendlichen. Wir heben diese Beschränkung auf, indem wir ihm eine beliebige Lage geben. Dann bilden die Axen nicht mehr einen Parallelbüschel, sondern den allgemeinen Büschel I. Ordnung. Sie sind die einzigen Geraden des Systems, welche von dem Axenpunkte O aus nicht normiert werden. Sie erscheinen also vorläufig als invalent. Ihre Anzahl ist ∞, also unendlich klein im Vergleich mit den valenten Geraden des Systems, den Strahlen und Gegenstrahlen, deren Anzahl ∞^2 beträgt, wenn jede Axe durch O und ihren Schnittpunkt mit der unendlich fernen Kugelfläche, jeder Strahl durch seine beiden Schnittpunkte mit der unendlich fernen Kugelfläche begrenzt gedacht wird. Bezeichnet man aber, wie es im Folgenden geschehen soll, endliche Teile der Axen bzw. Strahlen ebenfalls als Axen bzw. Strahlen, so ist die Anzahl jener ∞^3, diejenige dieser ∞^4, also das Verhältnis jener Zahl zu dieser wieder $\frac{1}{\infty}$. Ist s ein Strahl, so ist $-s$ sein Gegenstrahl.

Nachdem wir nun für alle Winkel und alle Geraden der Ebenen mit Ausnahme der Axen die Richtung bestimmt haben, in der sie positiv bzw. negativ sind, kommt es darauf an, zwischen der Valenz der Winkel und derjenigen der Geraden eine Beziehung herzustellen derart, dass in

*) Die positive Richtung der Drehung ist beim Rechtssystem diejenige nach rechts, beim Linkssystem diejenige nach links.

jedem Dreiecke der Ebene die Valenz jedes Winkels bekannt ist, sobald die Valenz der Seiten desselben gegeben ist, und umgekehrt, und zwar in solcher Weise, dass der Satz: In jedem Dreiecke verhalten sich die Sinus der Winkel wie ihre Gegenseiten nicht nur algebraische, sondern auch geometrische Gültigkeit hat, d. h. dass er auch dann gilt, wenn den Winkeln und den Seiten des Dreieckes die ihnen zukommende Valenz erteilt wird.

Um die gesuchte Beziehung in einfacher Weise auszudrücken, wollen wir einen von zwei Strahlen eingeschlossenen Winkel einen Strahlenwinkel und ein Dreieck, dessen Seiten nur aus Strahlen bestehen, ein Strahlendreieck nennen und noch folgende Bezeichnungen einführen: Wenn die Anfangspunkte zweier Geraden zusammenfallen, so sagen wir, sie divergieren, wenn ihre Endpunkte zusammenfallen, sie convergieren, in beiden Fällen, sie seien gleichläufig. Wenn der Endpunkt der einen mit dem Anfangspunkt der anderen zuzammenfällt, so sagen wir, sie seien gegenläufig. Wenn zwei Gerade g und g^1 gleichläufig bzw. gegenläufig sind, so folgt, dass $-g$ und $-g^1$ ebenfalls gleichläufig bzw. gegenläufig sind, dagegen $-g$ und g^1 sowie g und $-g^1$ gegenläufig bzw. gleichläufig. Einen Winkel, dessen Schenkel gleichläufig sind, nennen wir einen gleichläufigen, und einen solchen, dessen Schenkel gegenläufig sind, einen gegenläufigen Winkel.

Ein Dreieck, dessen Seiten aus Strahlen oder Gegenstrahlen, überhaupt aus valenten Geraden bestehen, soll als Grunddreieck bezeichnet werden, wenn alle Seiten desselben gegenläufig sind. In einem solchen Dreiecke fällt der Anfangspunkt jeder Seite mit dem Endpunkte der in jenem Punkte anstossenden Seite zusammen, und man kann einen beliebigen Punkt des Umfanges auf demselben so bewegen, dass er die Seiten nach einander in den ihnen eigentümlichen Richtungen durchläuft. Sind diese Richtungen alle positiv, so ist das Grunddreieck ein Normaldreieck. Man erkennt leicht, dass ein Grunddreieck dann und nur dann ein Normaldreieck ist, wenn sich der Axenpunkt in seinem Innern befindet. Denn wenn sich eine beliebige Axe um O in positivem Sinne dreht, so bewegt sich sein Schnittpunkt mit dem Dreiecksumfange dann und nur dann auf jeder Seite in deren positiver Richtung, wenn O im Innern liegt. Liegt O ausserhalb eines Strahlendreiecks, so schneidet jene Axe den Dreiecksumfang in zwei Punkten. Von demjenigen Eckpunkte aus, der bei der Drehung der Axe zuerst von derselben getroffen wird, divergieren die beiden Dreiecksseiten, welche sich in ihm schneiden; in dem zuletzt getroffenen Eckpunkte convergiert eine jener beiden Seiten mit der dritten, in beiden Punkten schneiden sich also gleichläufige Seiten, mithin in dem dritten Eckpunkte gegenläufige. Ersetzt man also die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite s durch ihren Gegenstrahl $-s$, so erhält man ein Grunddreieck. Wir wollen jenen Strahl s als die abnorme Seite des Strahlendreieckes bezeichnen. Die Eckpunkte eines Grunddreieckes bezeichnen wir mit den Buchstaben A, B und C, die bezüglichen Gegenseiten mit BC, CA nnd AB und setzen fest, dass bei jeder Geraden, die durch zwei Buchstaben bezeichnet wird, der erste den Anfangspunkt, der zweite den Endpunkt bezeichnen soll. Wir fragen nun, welchen Bedingungen die Valenz der Winkel α, β und γ genügen muss, damit in jedem Grunddreiecke der Gleichung $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = BC : CA : AB$ genügt werde. Offenbar sind nur zwei Fälle denkbar: entweder sind BC, CA und AB convalent, oder es sind zwei dieser Grössen convalent, während die dritte beiden contravalent ist.

Der erste Fall ist verwirklicht in einem Normaldreiecke, der letztere in jedem anderen Strahlendreiecke. In dem ersteren Falle sind nämlich BC, CA und AB entweder alle drei Strahlen oder alle drei Gegenstrahlen, mithin in jedem Falle alle drei convalent. Dann sind die Verhältnisse BC : CA, CA : AB und AB : BC positiv, also auch die ihnen gleichen Verhältnisse sin α : sin β, sin β : sin γ und sin γ : sin α. Mithin sind sin α, sin β und sin γ convalent, also entweder alle drei positiv oder alle drei negativ. Dasselbe gilt demnach auch von den Winkeln α, β und γ.

Der zweite Fall tritt ein in jedem Strahlendreiecke, welches nicht Normaldreieck ist, d. h. welches den Axenpunkt nicht einschliesst. Dasselbe lässt sich, wie wir sahen, dadurch in ein Grunddreieck verwandeln, dass statt desjenigen Strahles s, den wir als abnorme Seite des Strahlendreieckes bezeichneten, sein Gegenstrahl —s eingeführt wird. Sei die Bezeichnung der Ecken jenes Strahlendreieckes so gewählt, dass der Strahl s = CB ist, so sind in dem Grunddreiecke ABC die Seiten AB und CA Strahlen, mithin positiv, während BC als Gegenstrahl negativ ist. Von den drei Verhältnissen BC : CA, CA : AB und AB : BC, sind also das erste und dritte negativ, dagegen ist das zweite positiv. Mithin müssen auch von den Verhältnissen sin α : sin β, sin β : sin γ und sin γ : sin α das erste und dritte negativ, und das zweite positiv sein, d. h. sin β und sin γ, und also auch β und γ, müssen convalent sein, und sin α muss zu sin β und sin γ contravalent sein, mithin auch α contravalent zu β und γ. α aber ist der der abnormen Seite des Strahlendreieckes gegenüberliegende Winkel.

Es mögen nun, wenn in einem Strahlendreiecke zwei oder drei convalente Winkel vorkommen, dieselben als normale Winkel des Strahlendreieckes bezeichnet werden, und im ersteren Falle der den beiden normalen Winkeln contravalente als abnormer, dann lautet der Hauptsatz über unser t. S. so: *In einem trigonometrischen Rechtssysteme wie in einem derartigen Linkssysteme, in welchem die positive Richtung aller Strahlen von einem festen Punkte aus normiert wird, gilt für jedes Strahlendreieck die Beziehung, dass einer normalen Seite ein normaler Winkel und einer abnormen Seite ein abnormer Winkel gegenüberliegt.*

Da in diesem Satze nur eine Beziehung zwischen den Valenzen der Winkel eines Strahlendreieckes ausgesagt wird, ohne dass darin inbetreff der Valenz selbst eine Forderung enthalten ist, so könnte man diese Valenz in der Weise festsetzen, dass der Anfangsschenkel jedes dieser Winkel derjenige sein solle, der den Anfangspunkt der gegenüberliegenden Seite enthält. Dann würde nämlich die Drehungsrichtung der normalen Winkel dieselbe sein, weil sie gegenläufigen Seiten gegenüberliegen, während die Drehungsrichtung und also auch die Valenz des abnormen Winkels von derjenigen der beiden anderen Winkel verschieden wäre. Doch wollen wir das so sich ergebende t. S. nicht weiter untersuchen. Nur diese eine Eigenschaft desselben möge hervorgehoben werden: Halten wir in dem Strahlendreiecke ABC*) den Winkel α fest und drehen die gegenüberliegende Seite um einen ihrer Punkte P über die Axe PO hinaus in die Lage B^1C^1, so ist B^1C^1 contravalent B C. War nun der Punkt P so gewählt, dass bei jener Drehung der Punkt A nicht getroffen wird, so hat der Winkel bei A in dem Dreiecke ABC eine andere Valenz als

*) Siehe Figur 1. In derselben ist O der Axenpunkt eines Rechtssystems, die Pfeile zeigen die Richtung der Strahlen an.

in dem Dreiecke AB^1C^1*), da sein bisheriger Anfangsschenkel nach der Drehung zum Endschenkel geworden ist. Suchen wir also ein t. S., in welchem jeder Winkel ebenso wie jede Gerade für alle Strahlendreiecke ein und dieselbe Valenz hat, so müssen wir die Drehungsrichtung und also auch die Valenz jedes Winkels eines Strahlendreieckes nicht von der wechselnden Richtung der Gegenseite, sondern von der festen Richtung der ihn einschliessenden Seiten abhängig machen.

Nun ist offenbar, dass jeder abnorme Winkel ein gegenläufiger ist, während jeder der beiden anderen Winkel, die in demselben Dreiecke vorkommen, ein gleichläufiger ist. Wir können also mit dem Hauptsatze nicht in Widerspruch geraten, wenn wir festsetzen: Alle Strahlenwinkel, d. h. alle von zwei Strahlen gebildeten Winkel, sollen als positiv angesehen werden, wenn ihre Schenkel gleichläufig sind, und als negativ, wenn sie gegenläufig sind. Bezeichnen wir noch als Nebenwinkel eines Winkels diejenigen an ihn anstossenden Winkel, deren Schenkel denen des Hauptwinkels gleichgerichtet sind, und als Scheitelwinkel des Hauptwinkels den Nebenwinkel seiner Nebenwinkel, so folgt: Jeder Strahlenwinkel ist seinen Nebenwinkeln contravalent, seinem Scheitelwinkel convalent. Wir wollen nun jeden von zwei Geraden gebildeten Winkel und seinen Scheitelwinkel unter dem Namen „Doppelwinkel" zusammenfassen und unter dem Nebenwinkel eines Doppelwinkels das andere Paar Scheitelwinkel verstehen, welches die Schenkel jenes Doppelwinkels bilden, dann ergiebt sich folgender Satz, welcher zeigt, dass in dem gegenwärtig betrachteten Systeme der Axenpunkt für die Strahlenwinkel eine ähnliche normative Bedeutung hat, wie für die Strahlen:

Jeder Doppelwinkel zweier Strahlen ist positiv, wenn der Axenpunkt ausserhalb desselben liegt, und negativ, wenn er innerhalb desselben liegt.

Wir haben somit ein starkvalentes System gefunden, in welchem die Valenz aller Strahlen und Strahlenwinkel von einem Punkte aus normiert wird, und zwar so, dass in allen Grunddreiecken die Sinusgleichung von selbst geometrisch erfüllt wird, und es möge nur noch erwähnt werden, dass in jedem Strahlendreiecke die Valenz eines Winkels sich umkehrt, wenn statt des ihm gegenüberliegenden Strahles sein Gegenstrahl als Seite des Dreieckes auftritt.

Um das System aus einem starkvalenten zu einem vollständig valenten zu machen, können wir zunächst den Axen eine Richtung vorschreiben, in der sie positiv zu nehmen sind, und wir wollen dann die Benennung „Axe" nur diesen positiven Geraden beilegen. Damit das System die Symmetrie, welche ihm in Bezug auf den Axenpunkt eignet, nicht einbüsse, haben wir entweder alle Axen nach diesem Punkte convergieren oder von diesem Punkte aus divergieren zu lassen. Wir nennen im ersteren Falle das System ein convergentes, im letzteren ein divergentes. Dann haben wir hinsichtlich der Valenz der Axen- und Strahlenaxenwinkel nicht mehr die Wahl. Denn seien die Axen von O aus divergent, und sei ABC ein Strahlenaxendreieck d. h. ein solches Dreieck, in welchem zwei Seiten Strahlen sind, während die dritte eine Axe ist, möge ferner BC die Axe

*) In der Figur 1 ist $B\,A\,C$ negativ, B^1AC^1 positiv.

sein und angenommen werden, dass O ausserhalb der Punkte B und C liege*) und dass A normal zu BC liege, d. h. so dass für einen in der Richtung BC fortschreitenden A rechts bezw. links liegt, jenachdem das System ein Rechts- oder Linkssystem ist: so sind**) BA und CA die beiden Strahlen des Dreiecks. BA ist die abnorme Seite dieses Strahlenaxendreieckes, also γ der abnorme Winkel desselben, mithin contravalent zu α und β, während diese als normale Winkel einander convalent sind. Nun ist aber α als gleichläufiger Strahlenwinkel positiv, mithin β positiv, γ negativ. Ist nun B^1 ein Punkt zwischen O und B, so gilt in dem Dreiecke AB^1B hinsichtlich des Strahlenaxenwinkels bei B dasselbe, was in dem Dreiecke ABC hinsichtlich des Winkels bei C gilt. Jener Winkel ist also negativ. Um die negative Valenz des anderen Nebenwinkels von β zu beweisen, verlängern wir AB über B hinaus bis A^1 und verbinden A^1 mit B und C. Dann sind die Strahlen des Dreieckes A^1BC A^1B und A^1C, also ist der Winkel α^1 positiv als gleichläufiger Strahlenwinkel, der Winkel bei B ist als abnormer Winkel contravalent α^1, also negativ, der Winkel bei C als normaler convalent α^1, also positiv. Andererseits folgt, wenn man A^1B^1 zieht, dass in dem Dreiecke A^1 B^1 B der Winkel bei B dieselbe Valenz hat, wie in dem Dreiecke A^1BC der Winkel bei C, d. h. positive. Da aber jener Strahlenaxenwinkel der Scheitelwinkel von β ist, so folgt: Der Satz, dass je zwei Scheitelwinkel convalent, je zwei Nebenwinkel contravalent sind, gilt auch für Strahlenaxenwinkel. Betrachtet man die Strahlenaxenwinkel, welche in B (auch in B^1 oder C) ihren Scheitel haben, so erkennt man, dass auch für diese Art von Winkeln der Satz gilt: Von den beiden Doppelwinkeln, welche ein Strahl und eine Axe mit einander bilden, ist derjenige positiv, dessen Schenkel gleichläufig sind, dagegen derjenige negativ, dessen Schenkel gegenläufig sind. Man würde nicht zu einem anderen Resultate gelangt sein, wenn man die Axen nach O hätte convergieren statt von O divergieren lassen.

Sei nun C der Axenpunkt eines divergenten Rechstsystemes, ABC ein Axendreieck,***) d. h. ein Dreieck, in welchem zwei Seiten Axen sind, und seien die Buchstaben A und B so gewählt, dass AB positiv, also ein Strahl ist, so sind AB, CB und CA die Seiten des Axendreieckes, also CB und α abnorm, also α contravalent zu β und γ. Da nun α als gegenläufiger Strahlenaxenwinkel negativ ist, so muss der ihm contravalente Winkel γ positiv sein. Man erkennt leicht, dass die Valenz von γ nuabhängig ist von der gegenseitigen Lage der Punkte A und B, sowie davon, ob das System ein Rechts- oder Linkssystem ist und ob die Axen convergieren oder divergieren. In jedem Falle ist γ als gleichläufiger Winkel dem anderen gleichläufigen Winkel des Axendreieckes convalent, dieser aber ist als gleichläufiger Strahlenaxenwinkel, wie oben bewiesen, positiv. Mithin sind auch alle Axenwinkel positiv. Der Satz, dass Nebenwinkel contravalent sind, trifft auch für Axenwinkel zu, nur ist der Nebenwinkel eines Axenwinkels nicht wieder ein Axenwinkel; denn wenn die nicht gemeinschaftlichen Schenkel zweier anstossenden Axenwinkel in eine

*) Liegt nämlich O zwischen B und C, so soll ABOC als ein Viereck aufgefasst werden, in welchem BOC ein gestreckter Winkel ist.

**) s. Figur 2, in welcher O der Axenpunkt eines divergenten Rechtssystemes ist.

***) s. Figur 3.

Gerade fallen, so sind sie entgegengesetzt gerichtet und nicht, wie wir es Seite 10 für Nebenwinkel forderten, gleichgerichtet. Es ergiebt sich somit der Satz: *Man erhält ein vollständiges ebenes t. S., wenn man auf einer Ebene einen Punkt O beliebig wählt und die positive Richtung derjenigen Geraden der Ebene, welche jenen Punkt nicht enthalten, entweder so bestimmt, dass von O aus gesehen, der Endpunkt jeder Geraden rechts von ihrem Anfangspunkte liegt, oder so, dass der Endpunkt jeder Geraden links von ihrem Anfangspunkte liegt, und inbetreff der durch O gehenden Geraden entweder die Bestimmung trifft, dass ihre positiven Richtungen alle nach O convergieren, oder die Bestimmung, dass sie alle von O divergieren, und in all diesen Fällen entweder festsetzt, dass jeder Doppelwinkel positiv zu nehmen ist, wenn seine Schenkel gleichläufig, negativ, wenn sie gegenläufig sind, oder, dass jeder Doppelwinkel positiv zu nehmen ist, wenn seine Schenkel gegenläufig, negativ, wenn sie gleichläufig sind.* Denn was die Valenz der Winkel betrifft, so sieht man leicht, dass die auf S. 10 getroffene Bestimmung, es sollten die convalenten Winkel jedes Dreieckes positiv sein, eine willkürliche war, und die Annahme, sie seien negativ, ebenfalls zulässig gewesen wäre.

Wir erhalten auf diese Art acht Arten t. S., z. B. das convergente gleichläufige Rechtssystem, das divergente gleichläufige Linkssystem u. s. w. In jedem dieser Systeme gilt der Sinussatz für jedes Grunddreieck. Wir wollen nun unter den Geraden des Systemes die Axen und Strahlen, unter Systemwinkeln die auf die angegebene Weise normierten Winkel und unter einem Systemdreiecke jedes Dreieck verstehen, dessen Seiten Gerade des Systemes sind, und die letzteren stets mit a, b und c bezeichnen, so dass also a, b und c stets positiv sind. Damit alsdann der Sinussatz auch für jedes Systemdreieck geometrisch gültig ist, müssen wir die Systemwinkel α, β und γ durch die sich mit ihnen deckenden positiven Winkel A, B und C ersetzen. Alsdann gelten, da die Sinus und Tangenten aller spitzen positiven und die Cosinus aller spitzen Winkel positiv sind, für alle in C rechtwinkligen Systemdreiecke die Gleichungen $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos(\pm A) = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{a}{b}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$, $\sec(\pm A) = \frac{c}{b}$, $\cot A = \frac{b}{a}$, und es folgt dann nach den bekannten Formeln der Trigonometrie, welchem Verhältnisse irgend eine trigonometrische Funktion eines positiven stumpfen oder convexen bzw. eines negativen Winkels gleichzusetzen ist. Es möge noch bemerkt werden, dass der Nebenwinkel α^1 eines beliebigen Systemwinkels α nicht $= 180 - \alpha$ sondern $= \alpha - 180$ zu setzen ist.

Wir haben die Strahlen und Axen als Gerade des Systems bezeichnet und die Winkel α, β und γ als Systemwinkel. Es scheint nun auf den ersten Blick zweckmässiger, wenn wir als Systemwinkel statt α, β und γ von vornherein die positiven Winkel A, B und C eingeführt hätten, also diejenigen Winkel, welche durch ein und dieselbe, als positiv angenommene Drehungsrichtung entstanden sind. Alsdann hätten wir der Grunddreiecke entraten können und wären ohne die vorhergehende weitläufige Entwickelung mit einem Schlage zu dem Satze gelangt: In jedem Systemdreiecke verhalten sich die Sinus der Systemwinkel, das hiesse die Sinus der durch die gleiche, als positiv angenommene, Drehung enstandenen Winkel wie die gegenüberliegenden Seiten. In der That wäre nicht nur die Ableitung dieses Resultates sehr viel einfacher gewesen, sondern auch das Resultat selber. Aber dieses Resultat erweist sich bei näherer Betrachtung als ebenso unfruchtbar wie einfach. Denn die Drehungsrichtung der Winkel ist in der Geometrie eine blosse Abstraktion. In der Mechanik entstehen Winkel*) z. B. durch Drehung des Radiusvektors eines sich bewegenden Punktes. Aber in der Geometrie entstehen die Winkel nicht, sondern sind da und haben eine feste Lage und ihre Valenz muss von dieser ihrer Lage abhängig gemacht werden, nicht von ihrer Entstehungsweise. Die Vorstellung von einer solchen kann wohl von Nutzen sein für die Ableitung geometrischer Sätze. Aber ein Satz, in welchem der Begriff der Drehungsrichtung als wesentlicher Bestandteil vorkommt, ist kein geometrischer Satz, sondern höchstens ein Hülfssatz, der zur Auffindung geometrischer Sätze dienen kann. So wäre auch ein t. S. kein geometrisches, wenn für dasselbe der Begriff der Drehungsrichtung wesentlich wäre. Deshalb war es ein wesentlicher Zweck des gegenwärtigen Abschnittes, aus dem Resultate den Begriff der Drehung zu eliminieren und an seine Stelle diejenigen der Gleich- und Gegenläufigkeit, oder was für das nicht vollständig valente System auf dasselbe hinauskommt, den Begriff der Normierung eines Winkels durch den Axenpunkt zu setzen. Die positiven Winkel A, B und C sind dann nicht mehr definiert als solche, die durch dieselbe, positive, Drehungsrichtung entstanden sind, sondern als diejenigen positiven Winkel, welche sich mit den auf die angegebene Weise normierten, teils positiven teils negativen Systemwinkeln decken. Die Bezeichnung Rechts- bzw. Linkssystem hat demgemäss nur noch die Bedeutung, dass durch den Axenpunkt die Strahlen in bestimmter Weise normiert werden, während es völlig gleichgültig bleibt, ob man sich einen Winkel durch die eine oder andere Drehung entstanden denkt oder ob man ihm überhaupt eine Drehungsrichtung beilegt.

Das ebene t. S. und das ebene Polarsystem.

In dem ebenen Polarsysteme besteht zwischen der Bewegung eines Punktes P auf einer Geraden q und der Drehung der Polare p des Punktes P um den Pol Q der Geraden q der Zusammenhang, dass, wenn P sich stets in derselben Richtung auf q bewegt, dann p sich stets in derselben Richtung um Q dreht. Die letztere Drehung möge als die jener Bewegung entsprechende bezeichnet werden und umgekehrt. Es liegt nun nahe, folgenden Weg einzuschlagen, um mittelst des Polarsystemes zu einem t. S. zu gelangen. Man normiert die Geraden des Polarsystemes auf irgend eine Weise und setzt jeder Geraden, die durch eine positive oder negative Bewegung entstanden ist, denjenigen Winkel convalent, welcher durch die entsprechende Drehung hervorgeht. Als Gerade des t. S. betrachtet man alle als positiv normierte Geraden des Polarsystemes und als Systemwinkel diejenigen Winkel α, β und γ, welche in jedem Grunddreiecke ABC der Bedingung

*) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass es sich mit den Geraden anders verhält. In der geometrischen Optik sind die wichtigsten Geraden die Lichtstrahlen, und diese Geraden entstehen zwar nicht, aber sie sind entstanden durch eine Bewegung, nämlich dadurch, dass sich das Licht in bestimmter Richtung bewegt, und es ist selbstverständlich für die geometrische Optik von Wichtigkeit, diese Richtung der Bewegung in Betracht zu ziehen.

sin α : sin β : sin γ = BC : CA : AB genügen. Gelingt es alsdann, in allgemeiner Weise die Valenz der Systemwinkel statt von der Drehungsrichtung von der Lage ihrer Scheitel oder von der Lage bzw. Richtung ihrer Schenkel abhängig zu machen, so ist man zu einem t. S. gelangt. Man kann auch von der Drehung ausgehend über die Richtung, in welcher eine jede derselben positiv zu nehmen sei, eine Bestimmung treffen und der ihr entsprechenden Bewegung ebenfalls positive Valenz beilegen, alsdann wieder die durch positive Bewegung hervorgegangenen Geraden zu Geraden des Systemes wählen und inbetreff der Systemwinkel wieder dieselbe Forderung stellen wie oben. Alsdann hat man die Aufgabe, den Begriff der Drehung zu eliminieren, so dass sowohl die Geraden als die Winkel des Systemes nur vermöge ihrer Lagenbeziehungen zu einander oder zu anderen geometrischen Gebilden der Ebene normiert werden.

Ich wähle den letzteren Weg, nicht um ein t. S. aufzufinden, welches verschieden wäre von dem bisher beschriebenen, sondern um das letztere noch einmal abzuleiten und dadurch den Zusammenhang aufzuzeigen, in welchem es mit dem Polarsysteme steht. Wir lassen alle positiven Winkel durch eine Drehung nach rechts entstanden sein und untersuchen zuerst den Fall, in welchem das P. S.*) eine Ordnungskurve k besitzt. Sei M der Mittelpunkt derselben und werde M als Mittelpunkt des P. S. betrachtet. Die Ebene wird durch k in zwei Teile geteilt; den einen, in welchem die Tangenten verlaufen, nennen wir den äusseren, den anderen den inneren Raum der Kurve. Ist nun ABC**) ein beliebiges Poldreieck, d. h. ein Dreieck, in welchem die jedem Eckpunkte gegenüberliegende Seite seine Polare ist, so liegt ein Eckpunkt innerhalb der Kurve, die anderen ausserhalb. Jener möge mit A, diese mit B und C bezeichnet werden, und zwar möge von A aus gesehen B rechts von C liegen. Die Gegenseiten bezeichnen wir mit a, b und c und gebrauchen diese Buchstaben, wo kein Missverständnis möglich ist, auch zur Bezeichnung der beiderseits unendlich ausgedehnten Geraden, von denen a, b und c bzw. Teile sind. Auf jeder der Geraden a, b und c erhält***) man nun zwei einander projektivische Punktreihen, wenn man jedem Punkte P der einen Punktreihe den ihm conjugierten der anderen entsprechen lässt, d. h. denjenigen Punkt, in welchem jene Gerade von der Polare p des Punktes P geschnitten wird. Da alsdann dem mit diesem Schnittpunkte zusammenfallenden Punkte der ersten Reihe der mit P zusammenfallende der zweiten entspricht, so bilden beide Reihen zusammen eine involutorische Punktreihe, und zwar sind die beiden Punktreihen, aus welchen die letztere zusammengesetzt ist, einstimmig oder entgegengesetzt projektivisch, je nachdem jene Gerade die Kurve schneidet oder nicht schneidet. Im letzteren Falle sind je zwei einander zugeordnete Elemente der involutorischen Punktreihe von einander durch je zwei andere getrennt, im ersteren nicht getrennt. Von den drei Geraden a, b und c schneidet nur a die Kurve nicht. Wenn sich also p um A in positiver Richtung dreht, so bewegt sich P auf a so, dass seine Bewegungsrichtung mit derjenigen von pa übereinstimmt, d. h. die positive Gerade a ist = CB. Bezeichnet man die Verbindungslinie von M und A mit d, so ist dem Punkte da der unendlich ferne Punkt von a conjugiert; es muss also da von dem letzteren durch die eben-

*) Abkürzung für Polarsystem.

**) s. Fig. 4 und 5.

***) Reye Geometrie der Lage I. Abt. S. 117 ff der ersten Auflage.

falls conjugierten Punkte B und C getrennt sein, d. h. da muss zwischen B und C liegen. Wir wollen ihn mit A_1 bezeichnen. Andererseits findet man in ähnlicher Weise, dass die positive Gerade b = CA und c = AB ist, und dass der Durchmesser MB die Gerade b ausserhalb der Strecke CA schneidet. Aus alledem folgt, dass M ausserhalb des Poldreieckes in dem Doppelwinkel liegt, welcher aus dem Dreieckswinkel CAB und seinem Scheitelwinkel besteht. Eine einfache Betrachtung zeigt nun, dass M auf der Verlängerung von A_1A über A hinaus oder auf der Verlängerung von AA_1 über A_1 hinaus liegt, je nachdem k eine Ellipse oder Hyperbel ist. Im ersteren Falle erscheinen die positiven Bewegungen CA, AB und CB von M aus betrachtet als Bewegungen von links nach rechts, im zweiten als Bewegungen nach links. Da nun jede Gerade der Ebene, welche nicht durch M geht und k nicht berührt, zur Seite eines endlichen Poldreieckes gemacht werden kann, zu welchem M die oben angegebene Lage hat, so werden von M aus all diese Geraden so normiert, dass ihr Endpunkt rechts von ihrem Anfangspunkte liegt, wenn k eine Ellipse, und links, wenn k eine Hyperbel ist. In dem Falle, wo die Gerade k berührt, wird eine Seite des Poldreieckes unendlich klein, und in dem Falle, wo die Gerade durch M geht, wird die M gegenüberliegende Seite die unendlich ferne Gerade. Dreht man im ersteren Falle p um den Berührungspunkt A von links nach rechts, so bewegt sich P auf der Tangente a in einer Richtung, die von M aus gesehen als Bewegung nach rechts oder links erscheint, je nachdem k eine Ellipse oder Hyperbel ist. Es wird also die Tangente a von M aus ebenso normiert wie die Seite a eines Poldreieckes ABC, in welchem die Seite AB unendlich klein ist. Geht g durch M und bewegt man einen Punkt P auf g, so sind die Polaren p von P stets dem zu g conjugierten Durchmesser g^1 parallel. Man kann dann entweder sagen, g^1 drehe sich gar nicht, oder es erleide eine Drehung um den unendlich fernen Pol von g. Bei der ersten Auffassung würde g als invalent erscheinen, bei der zweiten als intervalent. Denn da man als Pol von g ebensowohl den einen wie den anderen unendlich fernen Punkt von g^1 betrachten kann, so würde jede Bewegung auf g einer positiven Drehung um den einen und einer negativen Drehung um den anderen jener Punkte entsprechen, würde also bei der einen Betrachtungsweise als positiv, bei der anderen als negativ erscheinen*). Wir folgen der ersteren Auffassung, nach welcher eine Parallelverschiebung keine Drehung ist, und erkennen, dass alsdann die durch M gehenden Geraden invalent sind, so dass man ihnen nach Belieben eine Richtung vorschreiben kann, in welcher sie positiv zu nehmen sind.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun, dass, wenn k eine Elipse ist, genau die Voraussetzungen erfüllt sind, von denen wir bei Ableitung des t. S. ausgingen. Es werden nämlich alle Geraden des Systemes von M aus so normiert wie von dem mit M zusammenfallenden Axenpunkte eines Rechtssystemes und die positiven Drehungen haben dieselbe Richtung wie in einem Rechtssysteme. Im Falle der Hyperbel ist M in Bezug auf die Geraden der Axenpunkt eines Linkssystemes, während die positive Drehungsrichtung diejenige nach rechts ist. Da aber die

*) An Stelle des t. S. mit intervalenten Axen, welches sich mir ohne Rücksicht auf das P. S. zuerst ergeben hatte, habe ich in dieser Abhandlung das convergente und divergente System besprochen, weil das erstere weniger anschaulich ist als die letzteren.

Gleichung sin α : sin β : sin γ = BC : CA : AB auch bestehen bleibt, wenn man statt α, β und γ die ihnen contravalenten Winkel setzt, so gelangen wir in beiden Fällen durch Wiederholung der Schlussfolgerungen auf Seite 9—12 zu dem Resultate, dass M der Axenpunkt eines t. S. sei, welches die auf Seite 12 angegebenen Eigenschaften besitzt. Wenn die Ordnungskurve eine Parabel ist, so wird das t. S. ein Parallelsystem, welches ein Rechtssystem ist, wenn man die Parabel als Elipse, ein Linkssystem, wenn man sie als Hyperbel mit unendlich langer Hauptaxe auffasst.

Hat das P. S. keine Ordnungskurve, so giebt*) es ∞^6 Ellipsoide von der Eigenschaft, dass jenes ebene P. S. in dem räumlichen P. S. enthalten ist, welches durch irgend eines jener Ellipsoide bestimmt wird. Sei also eines dieser Ellipsoide mit E, sein Mittelpunkt mit F bezeichnet, so liegt die Ebene δ des gegebenen P. S. ganz ausserhalb E, der Pol D von δ also innerhalb E. Ist nun ABC ein beliebiges Poldreieck**) auf δ, und möge von A aus gesehen C rechts von B liegen, so ist DABC ein Poltetraeder. Da die involutorischen Punktreihen auf BC, CA und AB keine Ordnungselemente besitzen, so sind die beiden Punktreihen, aus denen jede dieser involutorischen Punktreihen zusammengesetzt ist, gleichstimmig projektivisch. Dreht sich also eine Ebene π um DA so, dass $\pi\delta$ sich von links nach rechts dreht und wird diese Richtung der Drehung von $\pi\delta$ als positive genommen, so bewegt sich der Pol von π auf a in demselben Sinne wie πa, also von A aus gesehen nach rechts; also ist a positiv in der Richtung von B nach C, ebenso ist die positive Gerade b = CA und c = AB. Es liegt also von dem gegenüberliegenden Eckpunkte aus betrachtet der Endpunkt jeder Seite rechts von ihrem Anfangspunkte. Dieselbe Lage zum Anfangspunkte jeder Seite hat ihr Endpunkt, wenn man beide von einem beliebigen im Innern des Poldreieckes gelegenen Punkte aus betrachtet. Nun giebt es aber einen Punkt, welcher im Innern aller Poldreiecke liegt. Dies ist derjenige Punkt M, in welchem der zu δ conjugierte Durchmesser FD die Ebene δ schneidet. In FD schneiden sich nämlich die drei Durchmesserebenen, welche den Seiten a, b und c conjugiert sind. Sei A_1 der Punkt, in welchem a von der ihm conjugierten Durchmesserebene FDA geschnitten wird, so ist A_1 dem unendlich fernen Punkte von a conjugiert, andererseits ist B dem Punkte C conjugiert. Da nun die involutorische Punktreihe auf a keine Ordnungselemente hat, so müssen A_1 und der unendlich ferne Punkt von a durch B und C getrennt sein, d. h. es muss A_1 zwischen B und C liegen. Ebenso ergiebt sich, dass B_1 zwischen C und A und C_1 zwischen A und B liegt. Damit ist bewiesen, dass M im Innern jedes Poldreieckes liegt. Von diesem Mittelpunkte des Polarsystemes werden also alle Polardreiecke so normiert, wie die Normaldreiecke eines trigonometrischen Rechtssystemes von seinem mit M zusammenfallenden Axenpunkte aus. Da nun jede Gerade von δ zur Seite eines Polardreieckes ge-

*) wenn nämlich die Anzahl der auf einer unendlich langen Geraden gelegenen Punkte mit ∞ bezeichnet wird. Selbstverständlich könnte man diese Anzahl auch gleich ∞^2 oder irgend einer anderen Potenz von ∞ setzen und erhielte dann ein anderes Mass zur Berechnung der Anzahl irgend welcher geometrischen Gebilde. Man wird dieses Mass auf jeden Fall so wählen, dass in dem Ausdrucke ∞^m, welcher die Anzahl der zu zählenden Grössen angiebt, m eine ganze Zahl ist.

**) s. Figur 6.

Gleichung sin α : sin β : sin γ = BC : CA : AB auch bestehen bleibt, wenn man statt α, β und γ die ihnen contravalenten Winkel setzt, so gelangen wir in beiden Fällen durch Wiederholung der Schlussfolgerungen auf Seite 9—12 zu dem Resultate, dass M der Axenpunkt eines t. S. sei, welches die auf Seite 12 angegebenen Eigenschaften besitzt. Wenn die Ordnungskurve eine Parabel ist, so wird das t. S. ein Parallelsystem, welches ein Rechtssystem ist, wenn man die Parabel als Ellipse, ein Linkssystem, wenn man sie als Hyperbel mit unendlich langer Hauptaxe auffasst.

Hat das P. S. keine Ordnungskurve, so giebt*) es ∞^6 Ellipsoide von der Eigenschaft, dass jenes ebene P. S. in dem räumlichen P. S. enthalten ist, welches durch irgend eines jener Ellipsoide bestimmt wird. Sei also eines dieser Ellipsoide mit E, sein Mittelpunkt mit F bezeichnet, so liegt die Ebene δ des gegebenen P. S. ganz ausserhalb E, der Pol D von δ also innerhalb E. Ist nun ABC ein beliebiges Poldreieck**) auf δ, und möge von A aus gesehen C rechts von B liegen, so ist DABC ein Poltetraeder. Da die involutorischen Punktreihen auf BC, CA und AB keine Ordnungselemente besitzen, so sind die beiden Punktreihen, aus denen jede dieser involutorischen Punktreihen zusammengesetzt ist, gleichstimmig projektivisch. Dreht sich also eine Ebene π um DA so, dass $\pi\delta$ sich von links nach rechts dreht und wird diese Richtung der Drehung von $\pi\delta$ als positive genommen, so bewegt sich der Pol von π auf a in demselben Sinne wie πa, also von A aus gesehen nach rechts; also ist a positiv in der Richtung von B nach C, ebenso ist die positive Gerade b = CA und c = AB. Es liegt also von dem gegenüberliegenden Eckpunkte aus betrachtet der Endpunkt jeder Seite rechts von ihrem Anfangspunkte. Dieselbe Lage zum Anfangspunkte jeder Seite hat ihr Endpunkt, wenn man beide von einem beliebigen im Innern des Poldreieckes gelegenen Punkte aus betrachtet. Nun giebt es aber einen Punkt, welcher im Innern aller Poldreiecke liegt. Dies ist derjenige Punkt M, in welchem der zu δ conjugierte Durchmesser FD die Ebene δ schneidet. In FD schneiden sich nämlich die drei Durchmesserebenen, welche den Seiten a, b und c conjugiert sind. Sei A_1 der Punkt, in welchem a von der ihm conjugierten Durchmesserebene FDA geschnitten wird, so ist A_1 dem unendlich fernen Punkte von a conjugiert, andererseits ist B dem Punkte C conjugiert. Da nun die involutorische Punktreihe auf a keine Ordnungselemente hat, so müssen A_1 und der unendlich ferne Punkt von a durch B und C getrennt sein, d. h. es muss A_1 zwischen B und C liegen. Ebenso ergiebt sich, dass B_1 zwischen C und A und C_1 zwischen A und B liegt. Damit ist bewiesen, dass M im Innern jedes Poldreieckes liegt. Von diesem Mittelpunkte des Polarsystemes werden also alle Polardreiecke so normiert, wie die Normaldreiecke eines trigonometrischen Rechtssystemes von seinem mit M zusammenfallenden Axenpunkte aus. Da nun jede Gerade von δ zur Seite eines Polardreieckes ge-

*) wenn nämlich die Anzahl der auf einer unendlich langen Geraden gelegenen Punkte mit ∞ bezeichnet wird. Selbstverständlich könnte man diese Anzahl auch gleich ∞^2 oder irgend einer anderen Potenz von ∞ setzen und erhielte dann ein anderes Mass zur Berechnung der Anzahl irgend welcher geometrischen Gebilde. Man wird dieses Mass auf jeden Fall so wählen, dass in dem Ausdrucke ∞^m, welcher die Anzahl der zu zählenden Grössen angiebt, m eine ganze Zahl ist.

**) s. Figur 6.

macht werden kann, und da ferner alle Drehungen nach rechts als positiv genommen sind, so ist das P. S. ein trigonometrisches Rechtssystem und der Mittelpunkt desselben der Axenpunkt des letzteren. Daher folgt der Satz: *Jedes ebene P. S. wird zu einem t. S., wenn man in jenem entweder alle Drehungen nach rechts oder alle Drehungen nach links als positiv annimmt, alsdann jede Bewegung der ihr entsprechenden Drehung convalent setzt und jeden Winkel mit derjenigen Valenz zum Winkel des t. S. nimmt, die ihm vermöge seiner Lage zum Mittelpunkte des P. S. eigen ist,* so dass also alle Systemwinkel entweder als positiv genommen werden, wenn sie oder ihre Scheitelwinkel den Mittelpunkt des P. S. enthalten, und als negativ, wenn dies nicht der Fall ist, oder aber alle als positiv genommen werden bei letzterer Lage und negativ bei ersterer. Alsdann gilt in jedem Grunddreiecke des P. S. die Gleichung sin α : sin β : sin γ = BC : CA : BA geometrisch, wenn α, β und γ Winkel des mit dem P. S. identischen t. S. sind.

Verallgemeinerung des bisher betrachteten t. S.

Beschreiben wir um den Axenpunkt O eines t. S. ς eine beliebige geschlossene Figur f, so bleibt die Richtung derjenigen Strahlen von ς, welche f nicht schneiden, unverändert, wenn man O innerhalb f oder auf f beliebig verschiebt. Es bleibt also auch die Valenz der von jenen Strahlen gebildeten Systemwinkel ungeändert, und wir erhalten ein unvollständiges t. S., in welchem f an die Stelle des Axenpunktes O getreten ist. Die Geraden, welche f schneiden, sind invalent (oder intervalent) und mögen als Axen, die übrigen als Strahlen des neuen Systemes bezeichnet werden. Ist f eine Ellipse, so gehören auch sämtliche Tangenten zu den Strahlen des neuen Systemes, welches in diesem Falle mit ς' bezeichnet werden möge. Die Ellipse liegt normal zu allen Strahlen von ς''.

Befindet sich O innerhalb eines Hyperbelzweiges, so liegt der letztere normal zu allen Strahlen von ς, welche die Hyperbel nicht schneiden, der andere Zweig liegt abnorm zu ihnen. Das unvollständige t. S., welches von diesen Strahlen und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln des Systemes ς gebildet wird, möge mit ς'' bezeichnet werden. Sind nun F und F^1 die Brennpunkte der Hyperbel und lassen wir die Nebenaxe derselben unendlich klein werden, so fällt die Hyperbel ganz in die beiden Verlängerungen der Strecke FF^1, die Punkte F und F^1 werden zu Scheiteln der Hyperbel und der Strahlenbüschel II O., welcher von den Tangenten der Hyperbel gebildet wird, entartet zu den beiden Strahlenbüscheln I. O., welche F bzw. F^1 zum Mittelpunkte haben. Man kann diese beiden Punkte als Axenpunkte zweier trigonometrischen Systeme auffassen, von denen das eine ein Rechts-, das andere ein Linkssystem ist. Sei jener mit R, dieser mit L bezeichnet, und sei derjenige der beiden Punkte F und F^1 zum Punkte R gewählt, von dem aus eine positive Bewegung auf einem Strahle des Systemes ς'' als Bewegung nach rechts erscheint. Das System ς'' besteht in diesem Grenzfalle aus denjenigen Strahlen des Systemes ς, welche die Strecke RL treffen und aus den von ihnen eingeschlossenen Winkeln von ς. Dieselben werden in den Systemen R und L in derselben Weise normiert wie in dem Systeme ς'', gehören also allen drei

Fig. 1.

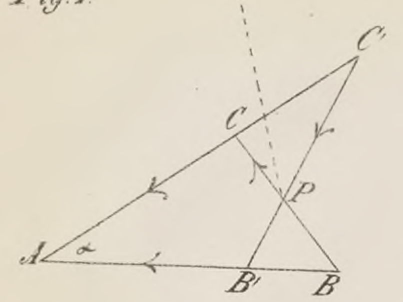


Fig. 2.

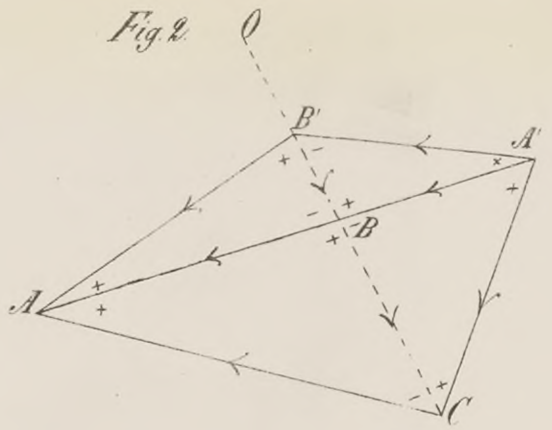


Fig. 3.

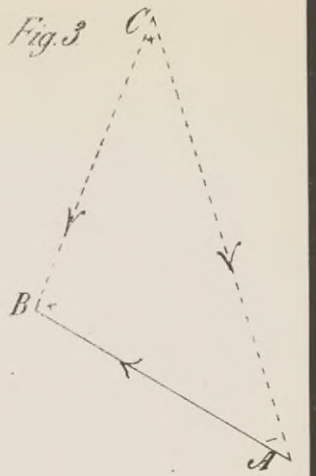


Fig. 4.

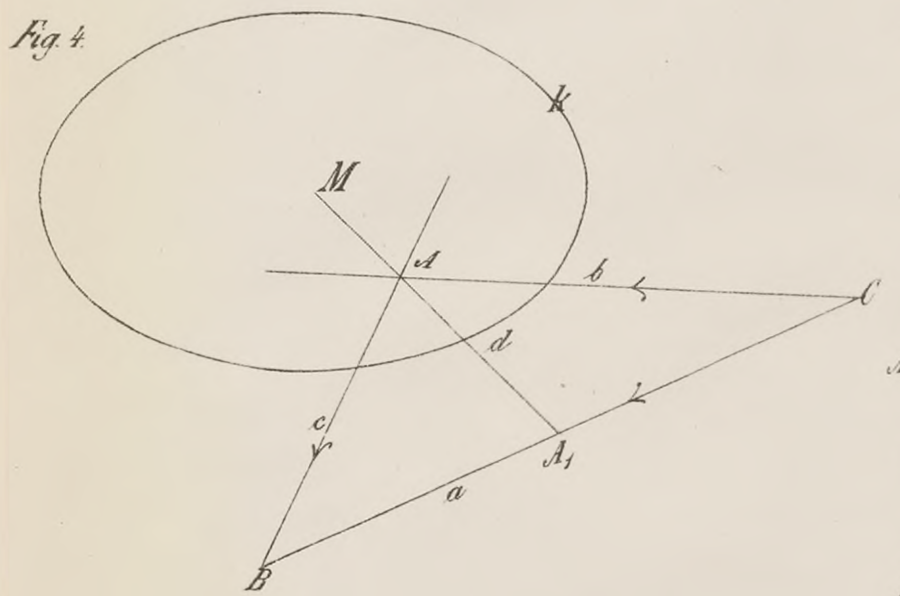


Fig. 5.

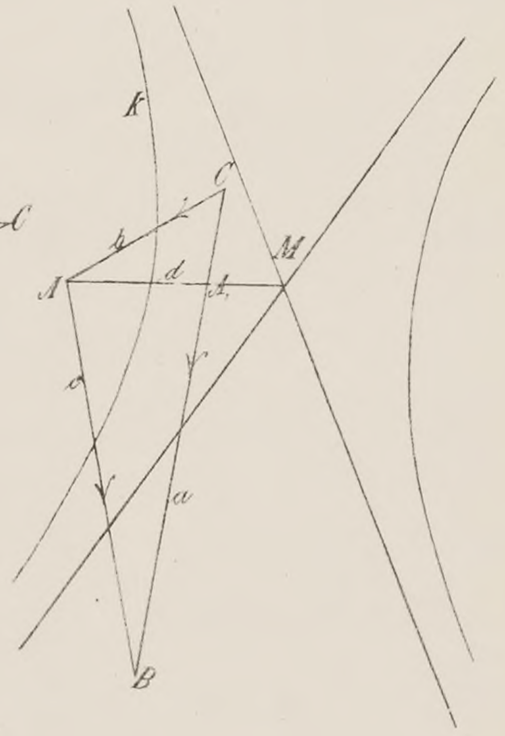
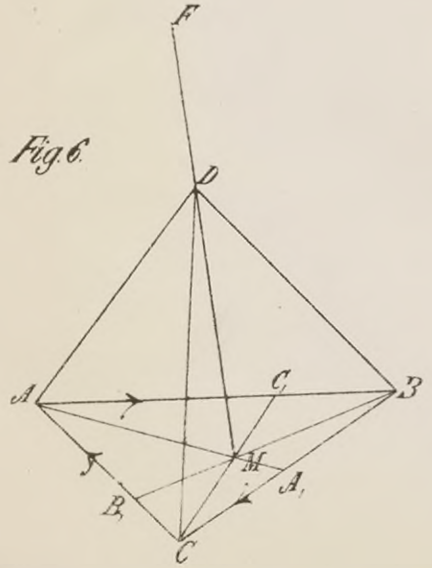


Fig. 6.



Systemen als Strahlen an*). Bezeichnen wir demnach ein System, dessen Strahlen zwei einfachen t. S. gleichzeitig angehören, als Doppelsystem, und zwar als convalentes oder contravalentes, je nachdem die beiden einfachen Systeme, aus denen es hervorgeht, convalent oder contravalent sind, so können wir sagen: Das System ς'' entartet in dem betrachteten Grenzfalle zu einem contravalenten Doppelsysteme. In ähnlicher Weise erhält man aus ς' ein convalentes Doppelsystem, wenn man die eine Axe der Ellipse unendlich klein werden lässt. Die Strahlen des Doppelsystemes bestehen dann aus denjenigen Geraden, welche die zu einer Geraden entartete Ellipse nicht schneiden. Aus n convalenten einfachen Systemen erhält man ein n-faches convalentes System, wenn man die Axenpunkte jener zu den Ecken eines Polygones macht. Die Strahlen des zusammengesetzten Systemes werden von denjenigen Geraden gebildet, welche das Polygon nicht schneiden. Sind ferner in einer Ebene drei einfache t. S. gegeben, von denen eins den beiden anderen contravalent ist, so kann man aus ihnen ein System zusammensetzen, welches, da es weder convalent noch contravalent ist, als gemischtes bezeichnet werden möge. Seien R, R^1 und L die Axenpunkte der drei einfachen Systeme, so schneiden die Strahlen des zusammengesetzten die Strecken LR und LR^1, dagegen nicht die Strecke RR^1. Lässt man die Figuren oder geradlinigen Strecken, von denen aus die Strahlen eines Systemes normirt werden, sich in einen Punkt zusammenziehen bzw. in zwei unendlich ferne Punkte, die in entgegengesetzter Richtung liegen, so erhält man wieder ein einfaches t. S., so dass dieses als specielles System erscheint im Vergleich mit den eben betrachteten.

Eine Verallgemeinerung in anderer Richtung würde sich ergeben, wenn man den Axenpunkt festhält, aber hinsichtlich der Axen die Forderung, dass sie gerade Linien seien, und hinsichtlich der Fläche auf der das t. S. liegt, die Forderung, dass sie eben sei, aufhebt. Alsdann würde man nur inbetreff der unendlich kleinen Dreiecke die Forderung aufrecht erhalten können, dass in ihnen der Sinussatz geometrisch gültig sei. Doch würde das Eingehen auf diesen Gegenstand mich nötigen, den mir für diese Abhandlung zugemessenen Raum erheblich zu überschreiten.

---

*) Die durch R gehenden Geraden betrachten wir nicht als Axen des Systemes R, sondern als Strahlen von L und die durch L gehenden als Strahlen von R.

Druckfehler-Berichtigung.

Seite 11 Zeile 7 von unten lies unabhängig statt nuabhängig.

Seite 17 Z. 16 von unten lies ς' statt ς''.

Seite 18 Zeile 4 von unten fehlt vor den Worten: auf der das t. S. liegt, das Komma.