Königliches Gymnasium zu Köslin.

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht 1909.

Die Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten in der Gymnasialprima.

Von
Professor Dr. **Joh. Thiede.**

Köslin 1909.
Gedruckt bei C. G. Hendess.

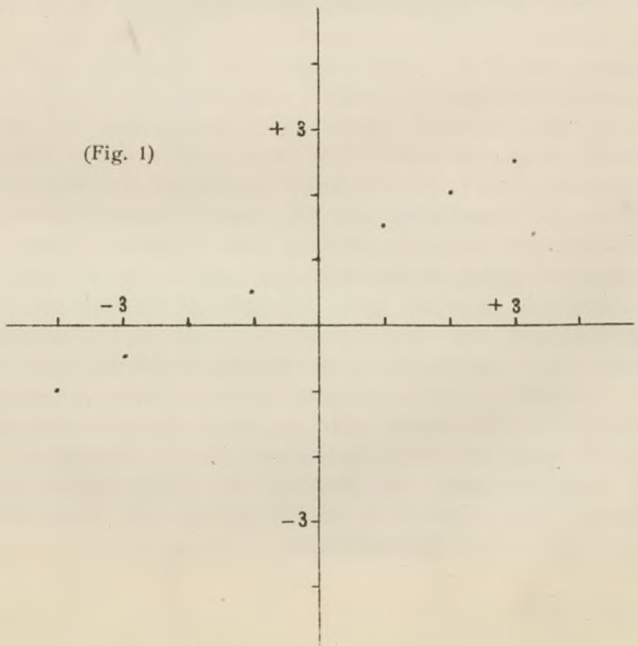
1909. Progr.-No. 199.

Die moderne Forderung, sich im Unterrichte der Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten anzunehmen, tritt immer energischer auch an das Gymnasium heran. Und ich glaube, dass dies bei nicht übertriebenen Ansprüchen, nämlich bis zur Herausbildung der wichtigen Grundvorstellungen, wohl angängig ist. Es soll im Folgenden ein Gedankengang vorgeführt werden, welcher, entsprechend einer naheliegenden Auffassung, den neuen Stoff mit den in der Prima ohnehin zu behandelnden Elementen der analytischen Geometrie verflochten enthält.

I.

1. Es wird zuerst die graphische Darstellung algebraischer Ausdrücke geübt. Dabei erscheint es mir didaktisch empfehlenswert, damit der Anfänger klar und einfach den algebraischen Ausdruck für sich als die Funktion auffassen lernt, die Form der sogenannten Funktionsgleichung, wie $y = x + a$, zu Anfang nicht in Gebrauch zu nehmen. Erst allmählich mag zu den abkürzenden Zeichen $f(x)$ und y übergegangen werden. — Die Grösse x wird als „unabhängige variable Grösse" eingeführt, die Funktion als „abhängige variable Grösse"; jedem Wert der unabhängigen Variablen entspricht ein Wert der Funktion. Ein solches Wertepaar in algebraischem Sinne bedeutet einen Punkt in der geometrischen Zeichnung; „Abscissenachse", „Ordinatenachse". — Das Verfahren, neben die Figur jedesmal die Berechnung der Werte in Form einer Tabelle zu setzen, ist für die Schüler durchaus zweckmässig. Es sei erlaubt, hier ein Beispiel herzusetzen, weil sich auf das benutzte Schema später ein anderes gründen soll.

x	$\frac{1}{2}x + 1$
$0 \rightarrow$	$+1$
-2	$\leftarrow 0$
$-\infty$	$-\infty$
.	.
.	.
.	.
-4	-1
-3	$-\frac{1}{2}$
-1	$+\frac{1}{2}$
$+1$	$+1\frac{1}{2}$
$+2$	$+2$
$+3$	$+2\frac{1}{2}$
.	.
.	.
$+\infty$	$+\infty$



(Fig. 1)

Durch die Zeichnung von Ausdrücken wie $\pm x \pm 1$, $\pm 2x \pm 3$, $\pm \frac{3}{4} x \pm 2$ kommen die Schüler induktiv zu der Erkenntnis, dass die linearen algebraischen Ausdrücke in der Zeichnung geraden Linien entsprechen. Und leicht finden sie die folgenden „Sätze": Ist die unabhängige Variable 0, so ergibt der zugehörige Funktionswert den Schnittpunkt auf der Ordinatenachse, ist die Funktion 0, so ergibt der zugehörige Wert der unabhängigen Variablen den Schnittpunkt auf der Abscissenachse. Es soll nun die Behandlung einer Funktion grundsätzlich mit diesen Fragen beginnen, wie das in der obigen Tabelle bereits angedeutet ist.

Zugleich erkennen die Schüler die Bedeutung der dabei auftretenden konstanten Grössen. Ist ihnen der „Richtungswinkel" definiert, sind in dem allgemeinen Ausdruck $\mathrm{tg}\alpha \cdot x + b$ $\mathrm{tg}\alpha$ als „Richtungskonstante", b als „Punktkonstante" eingeführt, so können sie eine weitere Erkenntnis in die Worte fassen: Stimmen lineare ganze Funktionen in den Richtungskonstanten überein, so stellen sie eine Schar von parallelen Geraden dar; stimmen sie in der Punktkonstante überein, so bedeuten sie ein Büschel von Geraden, die durch denselben Punkt der Ordinatenachse gehen. — Ferner muss ihnen auf grund ihrer trigonometrischen Kenntnisse bewusst werden: Ist die Richtungskonstante positiv, so ist der Richtungswinkel spitz, ist sie negativ, so ist er stumpf. Auf grund dieser Erkenntnisse vermögen sie nun hinterher einen Ausdruck von der Form $\mathrm{tg}\alpha \cdot x + b$ ohne jenes Schema, direkt unter dem Bewusstsein zu zeichnen, dass durch die Richtung und einen Punkt die gerade Linie vollständig bestimmt ist. — Dieses soll vorläufig für die Funktion der geraden Linie genügen.

2. Es kommen nun Ausdrücke von folgenden Formen zur Darstellung: x^2, x^3, $x^2 - 3x$ (ganze Funktionen), x^{-3}, x^{-1}, $\frac{x+4}{2x}$ (gebrochene Funktionen); $x^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{9 - x^2}$, $2\sqrt{25 - x^2}$, $\sqrt{2x + x^2}$ (irrationale Funktionen). Hier wäre wohl auch der Platz, die durch die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ ausgedrückten Kurven zeichnen zu lassen, — wofern die Zeit es gestattet. Praktische Anwendungen, wie z. B. Temperaturkurven brauchen den Schülern zur eigenen Zeichnung nicht vorgelegt zu werden; den Sinn und den Wert solcher Darstellungen übersehen sie ohne weiteres, wenn ihnen dergleichen bei dieser Gelegenheit aus Büchern fertig vorgezeigt wird. Und zwar sind in dieser Beziehung besonders lehrreich die Kurven, welche die säkularen Variationen der Häufigkeit der Sonnenflecken, der Häufigkeit der Polarlichter und der Tagesschwankungen des Erdmagnetismus in einer übersichtlichen Zusammenstellung zum Ausdruck bringen. — Überhaupt sollte im Sinne unseres Zieles nicht durch eine grosse Anzahl graphischer Darstellungen viel Zeit verbraucht werden. Es soll nur zur Einführung durch das jedesmalige Nebeneinandersetzen der Wertetabelle und der Zeichnung der gesetzmässige Zusammenhang eines algebraischen Ausdrucks und einer bestimmten Kurve zu einem Verständnis kommen. Und wichtig ist dabei sodann dieses, dass nach der Vollendung der Zeichnung immer, wie zu einer Zusammenfassung, die Funktion „diskutiert", der Verlauf der Kurve für alle Werte der Variablen von $-\infty$ bis $+\infty$ verfolgt wird; dabei gelangen die Begriffe des Steigens und Fallens, des Maximums und Minimums, der imaginären Funktionswerte, der Begrenztheit oder Unbegrenztheit der Kurven zu einer Behandlung.

II.

Durch die Übungen bis hierher ist nun ein Interesse, vielleicht ein Bedürfnis für eine Umkehrung des Gedankenganges geweckt: Welche Funktion bringt eine Kurve von vorgeschriebener Eigenschaft zum Ausdruck, so dass dieselbe konstruiert werden kann?

1. Es seien zwei feste Punkte im Abstande $2e$ gegeben und dazu ein dritter Punkt. Für den letzteren hat die Summe seiner Abstände von den beiden ersten eine bestimmte Grösse: $r_1 + r_2 = 2a$. Und es wird noch mehr Punkte geben, für welche diese Grösse dieselbe ist. Es sei nun gefragt: Wie reihen sich diese Punkte zu einer Kurve zusammen? Zur Beantwortung der Frage werde – nachdem zuerst noch festgestellt ist, dass stets $2a > 2e$ – die Abscissenachse durch die beiden festen Punkte und die Ordinatenachse durch den Halbierungspunkt ihrer Verbindungsstrecke gelegt; so bedeutet die von unserm Punkte auf die erstere Achse gefällte Senkrechte den Funktionswert, welcher zu dem bis zu ihrem Fusspunkte gerechneten Werte von x gehört. Derselbe werde jetzt mit y bezeichnet und unter Verwertung der charakteristischen Gleichung $r_1 + r_2 = 2a$ aus x, a und e berechnet. Es ergibt sich dann unter der Einführung $a^2 - e^2 = b^2$ die Gleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

woraus sich die gesuchte Funktion $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ findet. Mit der Diskussion derselben soll nun eine Konstruktion wesentlicher Punkte der Kurve verbunden werden, — dieses Entstehensehen der Figur aus dem algebraischen Ausdruck möchte ich als besonders wichtig für die Schüler betonen —, also aus den gegebenen Stücken e und a; sie findet sich für die Schüler übersichtlich unter Anlehnung an das Schema:

x	f (x)
$0 \rightarrow$	$\pm b$
$\pm a$	$\leftarrow 0$
$\left.\begin{matrix} < -a \\ > +a \end{matrix}\right\}$	i...
$\pm e$	$\frac{b^2}{a} \Big[= „p“!$ (Parameter.)

In der Wurzel liegt eine Symmetrie der Kurve gegen die X-Achse, in dem Gliede x^2 eine Symmetrie gegen die Y-Achse begründet. Beim Wachsen der Grösse x vom Werte 0 nach einer der beiden Richtungen bis auf die absolute Grösse a nimmt der Radikandus bis auf 0 ab und fällt die Funktion stetig, abgesehen vom Vorzeichen, von b auf 0. Die so entstandene und beschriebene Kurve heisst Ellipse.

Erst hiernach wäre die Fadenkonstruktion vorzuführen und die unmittelbar aus der Definition sich ergebenden Punktkonstruktionen zu berühren. Dann sind aber nach der Einführung des Begriffes der Excentricität einige Ellipsen aus zwei der Grössen a, b, e, ε mit jenen acht wichtigsten Punkten, bei $x = 0$, $x = \pm a$ und $x = \pm e$ zu konstruieren, — oder aus ε allein der Gestalt nach.

2. Es sei weiter ein fester Punkt und dazu im Abstande a ein zweiter Punkt gegeben; welche Funktion stellt den Ort aller der Punkte dar, welche mit dem letzteren von dem festen Punkte denselben Abstand a haben? Es ergibt sich die „Mittelpunktsgleichung“ $x^2 + y^2 = a^2$ und die Funktion $\sqrt{a^2 - x^2}$, deren Diskussion wie bei der Ellipse verläuft, von welcher die vorliegende Kurve, der Kreis, ein spezieller Fall ist: b = a! —

Durch Vergleichung der beiden Funktionen $\sqrt{a^2 - x^2}$ und $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, welche einen Kreis und eine Ellipse über derselben grossen Achse 2a darstellen, ergibt sich, dass für ein jedes bestimmt gewählte x der zugehörige Funktionswert der Ellipse den Bruchteil $\frac{b}{a}$ von demjenigen des Kreises ausmacht. Hierauf gründet sich eine weitere Konstruktion von Punkten der Ellipse und ferner die Berechnung ihrer Fläche, gleich πab.

3. Es sei wiederum zu zwei um die Strecke 2e von einander entfernten festen Punkten ein dritter Punkt gegeben, und es werde jetzt der Ort aller derjenigen Punkte gesucht, welche mit dem ersten die Bedingung $r_1 - r_2 = 2a$ erfüllen; — es ist in dieser Forderung zugleich die Bedingung $2a < 2e$ enthalten. Es ergibt sich, wenn wieder y aus a, e und x berechnet wird, unter Einführung der Bedingung $e^2 - a^2 = b^2$ die Gleichung

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} = 1$$

und damit die Funktion $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Die Diskussion derselben — welche wieder mit einer Konstruktion wesentlicher Punkte der Kurve aus a und e zu begleiten ist — ergibt sich wieder für die Schüler bequem unter Anlehnung an das Schema:

x	f (x)
$0 \rightarrow$	i...
$\pm a$	$\leftarrow 0$
$\left.\begin{matrix} < +a \\ > -a \end{matrix}\right\}$	i...
$\pm e$	$\pm \frac{b^2}{a}$ [= „p“!

Sodann ist wiederum mit der Quadratwurzel und dem Gliede x^2 eine doppelte Symmetrie der Kurve gegen die beiden Achsen begründet. Beim Wachsen von x vom Werte a bis ∞ wächst der Radikandus und damit die Funktion beständig, bis ins Unendliche. — Bei der Konstruktion des Funktionswertes für $x = \pm e$ war b aus $b^2 = e^2 - a^2$ zu konstruieren, was am schnellsten unter Benutzung des rechten Winkels zwischen den Achsen geschieht. Es entsteht so, entsprechend wie bei der Ellipse, eine Nebenachse 2b der Kurve, die als „imaginäre Achse“ bezeichnet wird und unmittelbar mit den Punkten derselben nichts gemein hat. Dieselbe hat aber trotzdem zu dem Verlauf unserer Kurve eine charakteristische Beziehung. Wie nämlich bei der Ellipse die Parallelen durch die Endpunkte von 2a und 2b zu diesen Achsen selbst ein Rechteck bestimmen, welches mit seinen Seiten die Ellipse umschliesst, indem diese zu Scheiteltangenten derselben werden, so entsteht für unsere neue Kurve auf dieselbe Weise ein Rechteck, bei welchem jetzt die Diagonalen etwas Aehnliches leisten. — Die Funktionen, welche diese letzteren darstellen, werden als $\pm \frac{b}{a} x$ oder $\frac{b}{a} \sqrt{x^2}$ ohne weiteres erkannt; und da nun beim Vergleich derselben mit unserer Funktion $\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ bei einem bestimmten x sich jedesmal der zugehörige Funktionswert für die Kurve kleiner als für die Diagonale zeigt, jedoch diese Differenz bei wachsendem x abnimmt und für $x = \infty$ verschwindet, so ergibt sich damit eine eigenartig bestimmte Lage der Kurve zu den Diagonalen des Rechtecks aus 2a und 2b; ihre beiden Aeste verlaufen nämlich ganz innerhalb des einen Scheitelwinkelpaares dieser Diagonalen, denen sie sich nach einer stärkeren Krümmung beim Scheitel gewissermassen anzuschmiegen trachten. So ergibt sich die Bezeichnung der letzteren als Begleitenden oder Asymptoten. — Die so gefundene und beschriebene Kurve heisst eine Hyperbel.

Es lassen sich jetzt nach der Einführung des Begriffes der Excentricität aus zwei der Grössen a, b, e u. ε die Begleitenden und sechs wichtige Punkte der Kurve, bei $x = \pm a$ und $x = \pm e$, konstruieren und damit ihr wesentlicher Verlauf übersehen. Für die Schüler ist es eine aufklärende Uebung, hiernach bei einem Rechteck aus 2 a und 2 b einmal die dadurch bestimmte Ellipse und dann die Hyperbel zu konstruieren; ebenso zweckdienlich dürfte die Aufgabe sein, über einer gegebenen Strecke 2a derartige Kurven mit den Excentricitäten $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \ldots$ zeichnen zu lassen. Die Schüler kommen so zu der Erkenntnis: Bei wachsender Excentricität und übrigens unverändert bleibender Hauptachse sinkt die Ellipse von Kreisform zur Geraden zusammen und weitet sich die Hyperbel von einer Geraden zum gestreckten Winkel, in jedem ihrer Äste.

4. Es seien für eine neue Kurve eine Gerade und ein Punkt im festen Abstande p gegeben; dazu soll ein zweiter Punkt so gewählt werden, dass er von der Geraden und dem festen Punkte gleichweit entfernt ist. Es soll die Kurve, in welchen sich Punkte dieser Eigenschaft aneinanderreihen, durch die Aufstellung ihrer Funktion und deren Diskussion festgestellt werden. Es findet sich bei der bekannten Wahl des Koordinatensystems die „Scheitelgleichung“ $y^2 = 2px$ oder die Funktion $\sqrt{2px}$. Bei ihrer Diskussion und gleichzeitigen Zeichnung zeigt sich, dass es für negative x keine Punkte der Kurve gibt, dass für $x = 0$ auch der Funktionswert 0 wird — sodass die Y-Achse zur „Scheiteltangente“ wird —, dass beim Wachsen von x zwei gegen die Abscissenachse symmetrisch verlaufende Zweige sich bilden, wobei die Funktion, absolut genommen, bis ins Unendliche wächst und dass bei $x = \frac{p}{2}$ der Wert $y = \pm p$ wird. So sind ausser dem Scheitel zunächst noch zwei Punkte, die Endpunkte des „Parameters“, bestimmt. Aus der Form $y^2 = 2px$ ergibt sich, dass bei einem beliebig gewählten x der zugehörige Funktionswert die mittlere Proportionale zwischen eben diesem x und 2p ist; hierauf gründet sich eine Konstruktion von Punkten unserer Kurve, der „Parabel“. Dieselbe ist offenbar durch die einzige

Grösse p vollständig bestimmt. Die Funktion wächst nur proportional der Quadratwurzel aus der unabhängigen Variablen. — Hiernach können andere, unmittelbar aus der Definition hervorfliessende Punktkonstruktionen erörtert werden.

5. Zum Schlusse ist jetzt auch die Funktion, welche die gerade Linie darstellt, noch einmal allgemein zu entwickeln. Eine Gerade ist bestimmt durch einen Punkt und ihre Richtung oder durch zwei Punkte.

Ist der Punkt (0,b) und der Richtungswinkel α gegeben, so stellt sich ihre Funktionsgleichung, wenn man wieder zu einem beliebigen x das zugehörige y sucht, unter der Form dar: $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$.

Ist der Punkt $(x_1\, y_1)$ und der Richtungswinkel α gegeben: $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot (x - x_1) + y_1$.

Sind zwei Punkte $(x_1\, y_1)$ und $(x_2\, y_2)$ gegeben, so ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ mitgegeben, und es wird

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Die letzten beiden Formeln sind mit einigen Zahlenbeispielen einzuüben.

III.

Es kommt nun einiges Zusammenfassende über die neuen Kurven zur Behandlung.

1. Lässt man durch Verlegung der Ordinatenachse die Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und der Hyperbel in die Form der Scheitelgleichungen übergehen, so erhält man

für die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$,

für die Ellipse $y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}x^2$,

für die Hyperbel $y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{a}x^2$,

woraus sich die Erklärung der Namen herleitet.

Sodann ist die gemeinsame Bezeichnung als Kegelschnitte an einem Modell zu erklären und wenigstens für eine von den Schnittlinien der geometrische Nachweis zu liefern, — es muss für die Verhältnisse am Gymnasium ja unausgesetzt Bedacht genommen werden, wie Zeit zu gewinnen ist — dass sie die in der Definition geforderte Eigenschaft hat.

2. Werden die Koordinatenachsen für unsere Kurven durch Parallelverschiebung in solche Lage gebracht, dass der Mittelpunkt, bezw. bei der Parabel der Scheitel durch die Koordinaten (a', b') gegeben ist, so nehmen die Gleichungen die Form an

für die Parabel $(y - b')^2 = 2p\,(x - a')$,

für die Ellipse $\frac{(x - a')^2}{a^2} + \frac{(y - b')^2}{b^2} = 1$,

für den Kreis $(x - a')^2 + (y - b')^2 = a^2$,

für die Hyperbel $\frac{(x - a')^2}{a^2} - \frac{(y - b')^2}{b^2} = 1$.

Hier sind einige Aufgaben der bekannten Art aus den Aufgabensammlungen anzuschliessen, bei welchen aus den gegebenen Zahlen der Gleichungen auf die Lage der Kurven und die Grösse ihrer Achsen zu schliessen ist und dieselben zu konstruieren sind.

3. Speziell für die Hyperbel, die bei den graphischen Darstellungen mehrfach aus gebrochenen Funktionen gewonnen wurde, ist — wofern die Zeit es gestattet — zu wünschen, dass auch ihre Asymptotengleichung zur Besprechung kommt. Es ist auch die dabei eröffnete Aussicht auf die Möglichkeit der Benutzung schiefwinkliger Koordinatensysteme nicht wertlos.

Ist der Winkel zwischen den Asymptoten 2φ und sind die Koordinaten eines Punktes in Bezug auf das neue System mit x' und y' bezeichnet, so ergibt sich

$$x = x' \cos\varphi + y' \cos\varphi$$
$$y = x' \sin\varphi - y' \sin\varphi$$

oder, wenn beachtet wird, dass $\cos\varphi = \frac{a}{e}$, $\sin\varphi = \frac{b}{e}$:

$$x = (x' + y') \frac{a}{e}$$
$$y = (x' - y') \frac{b}{e}.$$

Dies in der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel eingesetzt, ergibt:

$$b^2(x'^2 + 2x'y' + y'^2) \cdot \frac{a^2}{e^2} - a^2(x'^2 - 2x'y' + y'^2) \cdot \frac{b^2}{e^2} = a^2b^2, \text{ oder}$$

$$4x'y' = e^2$$
$$y = \frac{e^2}{4} \cdot x^{-1}.$$

Ist in speziellem Falle die Hyperbel „gleichseitig“, $a = b$, so bilden auch die Asymptoten ein rechtwinkliges Achsenpaar, und es ist $e^2 = 2a^2$:

$$y = \frac{a^2}{2} \cdot x^{-1}.$$

Hiermit ist dann also dieselbe Kurve ausgedrückt, die — wie bisher — auf ihre eigenen Achsen als Koordinatenachsen bezogen die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ bezw. die Funktion $\sqrt{x^2 - a^2}$ liefert, — jedoch in einer neuen Lage, nämlich um 45^0 gedreht.

Ist wiederum in speziellem Falle die Halbachse $a = \sqrt{2}$, so ergibt sich eine gleichseitige Hyperbel von der Funktion x^{-1}.

So erhalten die Schüler in einem einzelnen Beispiele einen Einblick in den Zusammenhang einiger der zuallererst mechanisch mit Hülfe von Wertepaaren konstruierten Ausdrücke, nämlich der gebrochenen Funktionen, mit den hinterher systematisch entwickelten Funktionen. —

Nebenher kann hier aus der obigen Gleichung $xy = \frac{e^2}{4}$ der Satz von der Konstanz des Inhalts der durch die einzelnen Hyperbelpunkte und die Asymptotenrichtungen bestimmten Parallelogramme hergeleitet werden.

4. Wird mit dem Ausdruck $y = \sqrt{2px}$ der andere $y = \sqrt{-2px}$ verglichen, so bedeutet derselbe offenbar eine zur ersteren symmetrisch liegende Parabel, mit der Öffnung zum negativen Unendlichen der X-Achse hin. Entsprechend bedeuten

$\sqrt{2py}$ und $\sqrt{-2py}$ dieselbe Parabel in abermals neuen Lagen, nämlich solchen, bei denen ihre Achse mit der Y-Achse zusammenfällt, und zwar das erstere Mal mit der positiven, das andere Mal mit der negativen Richtung derselben. Hier ist jetzt y als die unabhängige Variable und x als die abhängige, als die Funktion betrachtet.

Es sind die vier Parabeln unter bestimmter Grösse von p zu konstruieren.

5. Entwickelt man aus der Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ nicht y als Funktion von x, nämlich: $y = \sqrt{2px}$, sondern umgekehrt x als Funktion von y: $x = \frac{1}{2p} \cdot y^2$, so ist hiermit dieselbe Parabel dargestellt; es sind in diesem Falle nur zuerst auf der Y-Achse bestimmte Werte von y abgetragen zu denken und dann in der Richtung senkrecht hierzu jedesmal der zugehörige Wert von x als Funktionswert. Die beiden Funktionen stellen dieselbe Kurve dar, sie sind aber von verschiedener Art, die neue nämlich ist rational, während die frühere irrational war. Entsprechend geht die Funktion $y = \sqrt{-2px}$ in die Form über: $x = -\frac{1}{2p} \cdot y^2$.

Denken wir nun an die beiden anderen obigen Parabeln $x = \sqrt{2py}$, und $x = \sqrt{-2py}$, so nehmen diese jetzt die Form an: $y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$ und $y = -\frac{1}{2p} \cdot x^2$. Soll dann zum Schluss x als unabhängige Veränderliche überall festgehalten werden, so haben wir mit den Funktionen $\sqrt{2px}$, $\sqrt{-2px}$, $\frac{1}{2p}x^2$, $-\frac{1}{2p}x^2$ dieselbe Parabel in vier verschiedenen, bestimmten Lagen ausgedrückt.

6. Derselbe Gedanke werde nun für die allgemeinere Form der Parabelgleichung durchgeführt, bei welcher der Scheitel durch die Koordinaten a und b bestimmt ist! Die beiden Gleichungen

$$(y - b)^2 = 2p(x - a) \text{ und}$$
$$(y - b)^2 = 2p(a - x)$$

liefern zunächst die Funktionen

$$1)\ y = \sqrt{2p(x-a)} + b \text{ und}$$
$$2)\ y = \sqrt{2p(a-x)} + b.$$

Entsprechend lauten die Gleichungen für die Lage der Parabel mit der Achse parallel zur Y-Achse:

$$(x - a)^2 = 2p(y-b) \text{ und}$$
$$(x - a)^2 = 2p(b-y).$$

Und diese liefern die Funktionen:

$$3)\ y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{a}{p}x + \frac{a^2}{2p} + b \text{ und}$$
$$4)\ y = -\frac{1}{2p}x^2 + \frac{a}{p}x - \frac{a^2}{2p} + b\ .$$

Wiederum ist hier die Parabel in der neuen Lage durch eine rationale Funktion ausgedrückt.

Das Charakteristische bei allen Ausdrücken für die Parabel bleibt dieses, dass die eine der beiden variablen Grössen nur linear, die andere quadratisch oder unter einer Quadratwurzel auftritt. Es wächst eben die Parabel in der Dimension parallel zur Achse quadratisch im Verhältnis zu der hierzu senkrechten Dimension.

Die neue Funktion kann in allgemeinen Zeichen geschrieben werden:

$$c\,x^2 + dx + e, \text{ wobei } c = \pm \frac{1}{2p}\,.$$

Hier müssen die Schüler beachten und merken, dass das Vorzeichen des quadratischen Gliedes einer derartigen Funktion darüber entscheidet, ob die Oeffnung der Kurve in die positive oder in die negative Richtung der Y-Achse gewendet ist, und dass der absolute Wert des Koefficienten dieses Gliedes den reciproken Wert des Parameters angibt. — Die andern konstanten Grössen der gegebenen Funktion gestatten, die Koordinaten a und b des Scheitels zu bestimmen; sie bleiben aber, damit nicht das Gedächtnismaterial unnötig anwächst, besser unbenutzt, da der Scheitel anders — siehe das folgende Beispiel! —, besonders auch als Maximum oder Minimum bestimmt werden kann, — siehe Beispiel 5 im Schlusskapitel!

Jedenfalls ist mit diesen ganzen rationalen Funktionen wieder eine Anknüpfung an frühere graphische Darstellungen erzielt, und zugleich ist die Grundlage für ein Verständnis weiterer Uebungen gelegt. Es soll — um ein bestimmtes Beispiel zu behandeln — die Lage der Parabel $x^2 + 2x - 8$ bestimmt werden! Das quadratische Glied hat positives Vorzeichen, also liegt die Oeffnung der Parabel nach der positiven Richtung der Y-Achse hin gewendet. Die Funktion verschwindet für $x_1, = 2$ und $x_2 = -4$; und hiermit müssen zwei Punkte symmetrisch zur eigenen Achse der Parabel bestimmt sein; sodass ihre Achse in der Mitte zwischen ihnen verläuft und durch $x = -1$ bestimmt ist. Der Scheitel hat jetzt also die Koordinaten $-1, -9$. Wird auf diese Achse nun einer jener beiden Schnittpunkte der X-Achse bezogen, so ist sein Abstand von derselben $y = 3$, und gemäss der Parabelgleichung $y^2 = 2p\,x$ entsteht $3^2 = 2p \cdot 9$ oder $2\,p = 1$, d. h. der Parameter ist gleich 1, was auch aus jener obigen Bestimmung hervorgeht, da der Koeffizient des quadratischen Gliedes in unserem Beispiel 1 ist: $1 = \frac{1}{2p}$, $2p = 1$! Nun ist also $p = \frac{1}{2}$, $\frac{p}{2} = \frac{1}{4}$. So hat der Brennpunkt die Koordinaten $-1, -8\frac{3}{4}$; die Gleichung der Leitgeraden lautet $y = -9\frac{1}{4}$. — So ist die Funktion, die früher nur mechanisch durch das Aufsuchen von Wertepaaren dargestellt werden konnte, jetzt systematisch zeichenbar.

7. Versucht man in derselben Art, wie es im vorigen Paragraphen für die Parabel durchgeführt wurde, die Vertauschung der beiden Veränderlichen auch bei den Gleichungen der Ellipse, des Kreises und der Hyperbel vorzunehmen, so erhält man unvermeidlich wiederum irrationale Ausdrücke, weil stets die beiden veränderlichen Grössen in quadratischen Gliedern vorhanden sind. Dass man auch hier die Ellipse und die Hyperbel in neuer Lage erhält, ist leicht zu zeigen; aber es ist für die Schüler kaum erspriesslich, nach dieser Richtung hin Zeit aufzuwenden. Ein kurzer Hinweis genügt.

IV.

Es soll sich jetzt in unserm Gedankengange einer fortschreitenden Funktionsbehandlung darum handeln, einen Weg zu dem Begriffe des Differentialquotienten und ein Verständnis für seine Beziehungen zur Funktion anzubahnen.

1. Nimmt man auf einer Geraden irgend zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) an, so wird stets

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha,$$

an welcher Stelle und in welcher Entfernung von einander die beiden Punkte auch gewählt sein mögen. Liegen die beiden Punkte sehr nahe bei einander, so dass der zweite Punkt durch die Koordinaten $x_1 + \delta$, $y_1 + \eta$ bezeichnet ist, wobei δ und η sehr kleine Grössen sind, so wird wieder

$$\frac{\eta}{\delta} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Werden diese beiden Zuwachsgrössen unendlich klein gedacht, so hat man für sie die Schreibweise dx und dy und bezeichnet sie als Differential von x bezw. y. Der zweite Punkt heisst also $(x_1 + dx_1, \; y_1 + dy_1)$. Wiederum bleibt der Quotient

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

für jeden Punkt der Geraden, oder für jeden Wert x der Funktion $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$. So kommt der Schüler zu den Sätzen:

Die lineare algebraische Funktion hat einen konstanten Differentialquotienten, wie die durch sie dargestellte Gerade eine konstante Richtung hat; derselbe ist die Richtungskonstante.

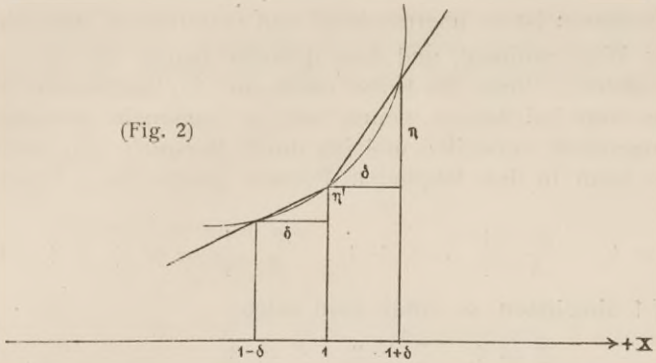
Ist der Differentialquotient oder die Richtungskonstante einer linearen Funktion positiv, so ist sie mit wachsendem x steigend und der Richtungswinkel der durch sie dargestellten Geraden (gegen die positive Richtung der X-Achse) ein spitzer; ist der Differentialquotient oder die Richtungskonstante negativ, so verläuft die Funktion mit wachsendem x fallend, der Richtungswinkel ihrer Geraden ist ein stumpfer.

2. Sobald es sich nun aber nicht mehr um die gerade Linie, sondern um eine Kurve handeln soll, ist die Richtung nicht mehr konstant. Die Kurve hat in jedem neuen Punkte eine neue Richtung, und für die Gewinnung derselben können nicht mehr zwei beliebig von einander entfernte, sondern nur noch zwei unendlich nahe zusammenliegende Punkte zur Bestimmung einer Geraden gewählt werden, welche letztere alsdann die Tangente der Kurve an dieser Stelle darstellt. — Die Richtungskonstante $\operatorname{tg}\alpha$ der Kurven-Tangente wäre wieder durch den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bestimmt, der jedoch nun in jedem Punkte der Kurve einen neuen Wert bedeuten müsste. Wie dies möglich ist, werde an einem Beispiele klar gemacht.

Es möge eine einfache Funktion, $\frac{1}{6}x^2$, gewählt und einige Punkte derselben gezeichnet werden (S. Fig. 3 S. 17!). Es soll nun die Richtung der Kurve in einzelnen dieser Punkte, also jedesmal der Wert $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ festgestellt werden. Dem Werte der unabhängigen Variablen $x = 1$ entspricht der Funktionswert $\frac{1}{6}$; einem ein wenig grösseren Werte $1 + \delta$ der Funktionswert $\frac{1}{6}(1 + 2\delta + \delta^2)$. Es wird also die Differenz beider $\eta = \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{6}\delta^2$ und daher — siehe die schematisch entworfene Figur 2! —

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\delta.$$

(Fig. 2)



Dies wäre zunächst noch immer die Richtungskonstante einer Sekante, die durch den Punkt $(1, \frac{1}{6})$ verlaufend eine, wenn auch nur kleine, Sehne in der Kurve hätte; mit kleiner werdendem δ würde diese Sekante sich drehen und die Sehne in der Kurve zwischen den Schnittpunkten noch kleiner werden.

Es sollen nun mit demselben Wertepaare $x = 1$, $y = \frac{1}{6}$ ein neuer, ein wenig k l e i n e r e r Wert $x = 1 - \delta$ und der dazugehörige Funktionswert $\frac{1}{6}(1-2\delta+\delta^2)$ verglichen werden. Es wird jetzt $\eta' = \frac{1}{3}\delta - \frac{1}{6}\delta^2$ und also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta'}{\delta} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\delta.$$

Wiederum wäre dies eine durch unsern Punkt $(1, \frac{1}{6})$ verlaufende Sekante. Bei kleiner werdendem δ würde diese jetzt eine Drehung im umgekehrten Sinne, wie die vorige, beschreiben; beide aber würden in dem Momente $\delta = 0$ zur Tangente in unserem Punkte werden und beide zugleich den Wert

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = \frac{0}{0} = \frac{1}{3}$$

annehmen.

Wie die beiden gedrehten Sekanten sich der Tangente als einer Grenzlage nähern, so bildet der Differentialquotient $\frac{1}{3}$ einen Grenzwert zwischen den beiden Reihen $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\delta$ und $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\delta$. — Bei einer solchen ein erstes Mal von b e i d e n Seiten her durchgeführten Annäherung an den Grenzfall, meine ich, kommt der Schüler voller zu dem Bewusstsein, dass es sich bei den Werten dx und dy wirklich um Null handelt. — Hinterher ist nun auseinanderzusetzen, dass es in einem schnelleren Verfahren genügt, den einen der beiden Fälle zu verfolgen. Wenn für einen benachbarten s p ä t e r e n Punkt festgestellt war, dass $\frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\delta$, so konnte schon hier zum Grenzfalle geschritten werden, indem δ und damit η immer kleiner angenommen und zum Verschwinden gebracht wurden, womit sich schon

$$\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$$

ergab.

3. Den Schülern ist es überraschend und befremdend, dass hier ein Bruch $\frac{0}{0}$ einen bestimmten Wert annimmt, und dass derselbe Bruch, wie sie schon hier übersehen, für jeden anderen Punkt der Kurve einen anderen bestimmten Wert annehmen muss. Man muss wohl bei diesem neuen und so ungemein bedeutungsvollen Gedanken einen Augenblick verweilen und ihn durch Beispiele von anderer Seite her beleuchten. Dies kann in den folgenden Formen geschehen. Lässt man in den Ausdrücken

$$\frac{3-1}{3-1} = 1, \quad \frac{3^2-1^2}{3-1} = 3+1, \quad \frac{3^3-1^3}{3-1} = 3^2+3\cdot 1+1^2$$

überall 3 bis auf 1 abnehmen, so erhält man zuletzt

$$\tfrac{0}{0} = 1, \quad \tfrac{0}{0} = 2, \quad \tfrac{0}{0} = 3.$$

Es nimmt also der Quotient $\frac{0}{0}$ je nach seiner Entstehungsweise verschiedene Werte und jedesmal einen bestimmten Wert an. — Oder anders:

Es ist

$$\begin{aligned} 7a - 3b &= 7a - 3b, && \text{oder} \\ 7a - 7a &= 3b - 3b, && \text{oder} \\ 7(a-a) &= 3(b-b), && \text{oder} \\ 7\cdot 0 &= 3\cdot 0, && \text{oder} \\ 0 &= \frac{3}{7}\cdot 0. \end{aligned}$$

Die 0 auf der einen Seite ist nicht gleichwertig mit der 0 auf der andern Seite, sondern beträgt einen bestimmten Bruchteil von ihr. — Wäre man von andern Zahlenkoeffizienten ausgegangen, so hätte man ein anderes Verhältnis der beiden Nullen erhalten, etwa:

$$\begin{aligned} 5a - 2b &= 5a - 2b, \\ 5\cdot 0 &= 2\cdot 0 \\ 0 &= \frac{2}{5}\cdot 0. \end{aligned}$$

Es besteht also für eine Zahl 0 ein besonderer Wert im Verhältnis zu andern Zahlen 0, je nach ihrer Entstehungsweise. Und dies ist ein Gegenstück zu dem, was den Schülern längst bekannt ist: dass die Zahl ∞ die verschiedensten Werte annehmen kann im Verhältnis zu andern Zahlen ∞. Es mag hier an das Beispiel erinnert werden, dass man aus der Ellipse in einem speziellen Falle die Parabel hervorgehen lassen kann, wenn man sich vorstellt, dass der zweite Brennpunkt sich ins Unendliche bewegt, wobei dann unvermeidlich auch der Mittelpunkt zugleich ins Unendliche rückt. Es bildet sich hier offenbar der Quotient $\frac{\infty}{\infty} = 2$. —

4. Nach einer derartigen eingefügten Betrachtung ist nun der Gedanke aufzunehmen, dass wir oben die Beziehung gewonnen hatten:

$$\operatorname{tg}\alpha\Big)_{x=1} = \frac{dy}{dx} = \tfrac{0}{0} = \tfrac{1}{3}.$$

Wenn nun auch für einige weitere Werte $x = 2$, $x = 3$ u. s. f. der Differentialquotient unserer Funktion $\frac{1}{6}x^2$, bezw. für einige weitere Punkte unserer Kurve die Richtungskonstante der Tangente festgestellt werden soll, so möchte ich hierfür im Nachstehenden ein schematisches Verfahren in Vorschlag bringen, wie es mir didaktisch vorteilhaft zu sein scheint und wie es sich an das bisher benutzte Schema anschliesst.

$$\begin{array}{c|l} x & \frac{1}{6}\,x^2 \\ \hline 2 & \frac{2}{3} \\ 2+\delta & \frac{1}{6}\,(4+4\,\delta+\delta^2) \\ \cline{2-2} & \eta = \frac{2}{3}\,\delta + \frac{1}{6}\,\delta^2 \end{array}$$

$\frac{\eta}{\delta} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,\delta$; Grenzübergang, δ nimmt ab bis auf 0:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = \frac{2}{3} \left[= \operatorname{tg} \alpha_2. \right.$$

$$\begin{array}{c|l} x & \frac{1}{6}\,x^2 \\ \hline 3 & \frac{3}{2} \\ 3+\delta & \frac{1}{6}\,(9+6\,\delta+\delta^2) \\ \cline{2-2} & \eta = \delta + \frac{1}{6}\,\delta^2 \end{array}$$

$\frac{\eta}{\delta} = 1 + \frac{1}{6}\,\delta$; Grenzübergang:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=3} = 1 \left[= \operatorname{tg} \alpha_3. \right.$$

$$\begin{array}{c|l} x & \frac{1}{6}\,x^2 \\ \hline 4 & \frac{8}{3} \\ 4+\delta & \frac{1}{6}\,(16+8\,\delta+\delta^2) \\ \cline{2-2} & \eta = \frac{4}{3}\,\delta + \frac{1}{6}\,\delta^2 \end{array}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6}\,\delta$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=4} = \frac{4}{3} \left[= \operatorname{tg} \alpha_4. \right.$$

Nun nachträglich auch noch:

$$\begin{array}{c|l} x & \frac{1}{6}\,x^2 \\ \hline 0 & 0 \\ 0+\delta & \frac{1}{6}\,\delta^2 \\ \cline{2-2} & \eta = \frac{1}{6}\,\delta^2 \end{array}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{6}\,\delta$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 \left[= \operatorname{tg} \alpha_0. \right.$$

Es ergibt sich so für den Schüler der Satz: Der Differentialquotient einer Funktion hat für jeden Wert der Variablen seine besondere bestimmte Grösse, entsprechend wie die Tangente in jedem Punkte der Kurve ihre besondere Richtung hat.

5. Hinterher ist der Differentialquotient nun auch allgemein aufzustellen:

$$
\begin{array}{c|l}
x & \frac{1}{6}x^2 \\
\hline
x & \frac{1}{6}x^2 \\
x+\delta & \frac{1}{6}(x^2+2x\delta+\delta^2) \\
\cline{2-2}
 & \eta = \frac{1}{3}x\delta + \frac{1}{6}\delta^2 \\
 & \frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\delta \\
 & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x = \left[\ \mathrm{tg}\,\alpha.\right.
\end{array}
$$

Hieraus lassen sich dann die obigen besonderen Werte alle kurz ableiten:

x	$\frac{dy}{dx}$ oder tg α
0	0
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3}$
3	1
4	$\frac{4}{3}$
:	:
— 1	— $\frac{1}{3}$
— 2	— $\frac{2}{3}$
⋮	⋮

So ergibt sich für den Schüler ein neuer Satz: Wie die Funktion eine allgemeine Form hat, welche für jeden Wert der unabhängigen Veränderlichen einen besonderen Wert annimmt, so gibt es auch für den Differentialquotienten der Funktion eine allgemeine Form, welche für jeden Wert von x einen besonderen Wert annimmt.

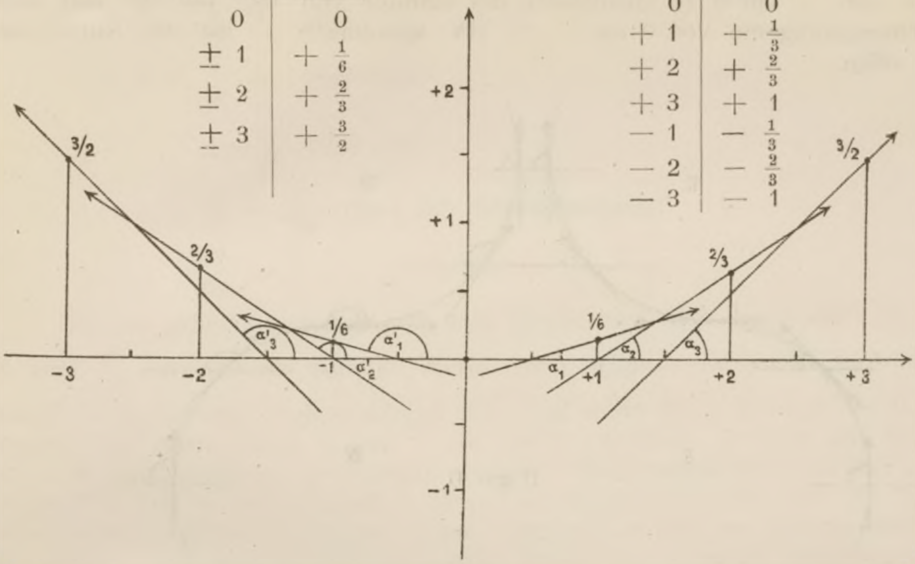
Es sind nun die Tangenten in den behandelten Punkten nachträglich einzuzeichnen; vergleiche Figur 3!

Ich glaube, dass der hier beschriebene Weg zur Gewinnung dieser Einsichten aus einem konkreten Beispiele für den Anfänger der angemessene ist und dass er jedenfalls für das Gymnasium ausreichen muss. Bei einer erneuten Durchführung des Gedankenganges an einem anderen Beispiele gehen den Schülern diese Vorstellungen schnell in Fleisch und Blut über.

x	$\frac{1}{6}x^2$
0	0
± 1	$+\frac{1}{6}$
± 2	$+\frac{2}{3}$
± 3	$+\frac{3}{2}$

Figur (3)

x	$\operatorname{tg}\alpha$
0	0
$+1$	$+\frac{1}{3}$
$+2$	$+\frac{2}{3}$
$+3$	$+1$
-1	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{2}{3}$
-3	-1



6. Bevor nun weitere Zusammenhänge zwischen der Funktion und ihrem Differentialquotienten aufgesucht werden, möchte ich empfehlen, diese Bezeichnung „Differentialquotient“ jetzt eine Reihe von Unterrichtsstunden hindurch zurücktreten zu lassen und sie durch „Richtungstangente“ zu ersetzen. Es liegt für den Schüler tatsächlich in jener abstrakten Bezeichnung eine Erschwerung für die Eingewöhnung in den Umgang mit dem neuen Begriff, der ihm an und für sich gar keine Schwierigkeit bereitet. Dagegen bietet ihm das Wort „Richtungstangente“ eine Anknüpfung an altgewöhnte Vorstellungen. Dasselbe ist an und für sich ja lediglich in trigonometrischem Sinne zu nehmen, um etwas Numerisches zu bedeuten; aber es hält mit seinem Klange gleichzeitig die Vorstellung der geometrischen Berührungsgeraden der Kurve wach und kommt so den Vorstellungsreihen für den Schüler erleichternd zu Hülfe. Er denkt an den analytischen Ausdruck und seine geometrische Bedeutung zugleich. —

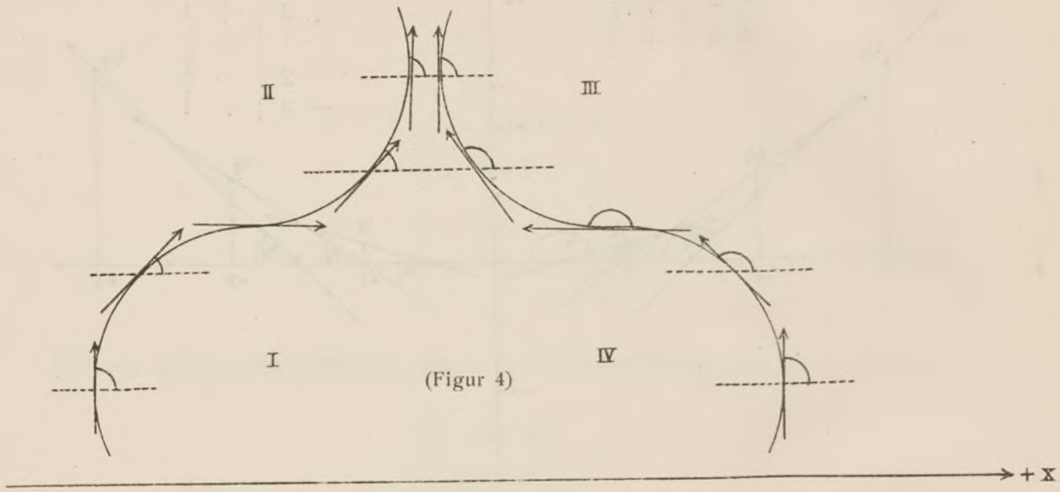
7. Es ergeben sich ohne weiteres die Einsichten:

Solange der Differentialquotient oder die Richtungstangente mit wachsendem x positiv, der Richtungswinkel also spitz bleibt, ist die Funktion steigend; solange die Richtungstangente negativ, der Richtungswinkel also stumpf bleibt, ist die Funktion fallend.

Aus der umstehenden schematischen Figur 4 ist dann noch zu erkennen:

Solange bei wachsendem x der Richtungswinkel w ä c h s t — der spitze von 0^0 auf 90^0 und damit die Richtungstangente von 0 auf ∞ (II. Quadrant der Figur!), der stumpfe von 90^0 auf 180^0 und damit die Richtungstangente von $-\infty$ auf 0 (III. Quadrant!) —: ist die Kurve nach o b e n offen; solange bei wachsendem x der

Richtungswinkel abnimmt — der spitze von 90° auf 0° und damit die Richtungstangente von ∞ auf 0 (I. Quadrant!), der stumpfe von 180° auf 90° und damit die Richtungstangente von 0 auf $-\infty$ (IV. Quadrant!) —: ist die Kurve nach unten offen.



(Figur 4)

Wo der Richtungswinkel 0° oder 180° beträgt und damit die Richtungstangente gleich $\pm$ 0 ist; liegt ein „ausgezeichneter Punkt" der Kurve; es gibt hier einen Wechsel in der Lage der Kurvenöffnung, Wende- und Rückkehrpunkte, oder einen Wechsel im Steigen und Fallen, Maximum und Minimum.

Dass es auch da, wo der Richtungswinkel 90° beträgt und damit seine Tangente gleich ∞ ist, einen ausgezeichneten Punkt der Kurve in einem gewissen Sinne geben muss, sollte nicht unbeachtet bleiben, bedarf indessen nicht einer weiteren Ausführung.

Die Schüler gelangen zur vollen Beherrschung dieser neuen Erkenntnisse und ihrer Bedeutung durch die Übungen des nächsten Abschnittes.

V.

Es kann jetzt die Aufgabe behandelt werden, vermittelst des Differentialquotienten oder der Richtungstangente für die Kegelschnitte in einem jeden Punkte ihre Richtung zu bestimmen, bezw. die Gleichung der Tangente aufzustellen.

1. Zuerst werde für die Funktion der Parabel $\frac{1}{2p} \cdot x^2$ die Richtungstangente in ihrer allgemeinen Form entwickelt:

x	y
x	$\frac{1}{2p} \cdot x^2$
$x + \delta$	$\frac{1}{2p} \cdot (x^2 + 2x\delta + \delta^2)$

$$\eta = \frac{1}{2p} \cdot (2x\delta + \delta^2)$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{1}{2p} \cdot (2x + \delta)\,; \quad \text{Grenzübergang:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}\,.$$

Hierauf gründet sich nun eine neue Betrachtung über den Verlauf der Kurve. Es wird $\frac{dy}{dx}$ oder $\mathrm{tg}\,\alpha$ für negative Werte von x negativ, die Kurve muss hier also stumpfe Richtungswinkel haben, fallend sein; und wenn dabei genauer die Richtungstangente mit wachsendem x von $-\infty$ bis 0 wächst, so muss das Fallen der Kurve in solcher Weise geschehen, dass der Richtungswinkel von 90° auf 180° wächst, d. h. dass sie nach oben offen ist und im negativen Unendlichen eine Tangente senkrecht zur X-Achse im Punkte 0 eine Tangente, die mit der X-Achse zusammenfällt, besitzt. Von hier ab, also für positive Werte von x ist die Richtungstangente positiv, hier steigt die Kurve in demselben Sinne, wie sie vorher fiel; die positive Richtungstangente wächst von 0 bis ∞, der spitze Richtungswinkel also von 0° bis 90°, d. h. die Kurve ist fortgesetzt nach oben offen und besitzt im positiven Unendlichen wieder eine Tangente senkrecht zur X-Achse.

2. Nun werde ebenso die Parabelfunktion $\sqrt{2px}$ untersucht:

x	y
x	$\sqrt{2px}$
$x + \delta$	$\sqrt{2p(x+\delta)}$

$$\eta = \sqrt{2p(x+\delta)} - \sqrt{2px}\,,$$

dies mit der Summe der beiden Wurzeln erweitert:

$$\eta = \frac{2px + 2p\delta - 2px}{\sqrt{2p(x+\delta)} + \sqrt{2px}}, \text{ oder}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{2p}{\sqrt{2p(x+\delta)} + \sqrt{2px}}\,; \quad \text{Grenzübergang:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}\,.$$

Es wird $\frac{dy}{dx}$ oder tg a für negative Werte von x imaginär, hier gibt es also keine Tangenten; für $x = 0$ wird es gleich ∞, die Tangente steht hier senkrecht auf der Abscissenachse und fällt also mit der Ordinatenachse zusammen. Für positive x gewinnt die Quadratwurzel und damit auch $\frac{dy}{dx}$ einen positiven und einen negativen im übrigen gleichen Wert, die Kurve muss hier also zwei Zweige besitzen, einen steigenden und einen fallenden, und zwar in einem symmetrischen Verlaufe, weil die beiden Richtungswinkel beständig Supplementwinkel sind. In dem einen Zweige wird $\operatorname{tg}\alpha$ oder $+\frac{p}{\sqrt{2px}}$ mit wachsendem x immer kleiner und fällt von ∞ auf 0, es muss also auch der Richtungswinkel fallen, und zwar von 90° auf 0°, so dass der Zweig nach unten hohl ist und im Unendlichen eine Tangente parallel zur X-Achse besitzt. In dem anderen Zweige wird $\operatorname{tg}\alpha$ oder $-\frac{p}{\sqrt{2px}}$ mit wachsendem x immer grösser und steigt von $-\infty$ auf 0, es muss also der Richtungswinkel von 90° auf 180° wachsen, so dass dieser Zweig nach oben hohl ist und im Unendlichen gleichfalls eine Tangente parallel zur X-Achse besitzt. Die gesamte Kurve ist mit ihrer Oeffnung nach der positiven Richtung der X-Achse gewendet.

3. Dasselbe Verfahren wird nun für den Kreis durchgeführt:

x	y
x	$\sqrt{r^2-x^2}$
$x+\delta$	$\sqrt{r^2-(x+\delta)^2}$

$$\eta = \sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta^2 - \delta^2} - \sqrt{r^2-x^2}$$

$$\eta = \frac{-2x\delta - \delta^2}{\sqrt{r^2-(x+\delta)^2} + \sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{-2x-\delta}{\sqrt{r^2-(x+\delta)^2} + \sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Dies liefert reelle Werte nur, solange x innerhalb der Grenzen $-r$ und $+r$ bleibt; bei diesen Grenzfällen wird $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$, die Kurve hat hier senkrechte Tangenten gegen die X-Achse. Für Werte x zwischen $-r$ und 0 gibt es wegen des doppelten Quadratwurzelzeichens zwei Werte, die wieder auf einen steigenden und einen fallenden Zweig unter symmetrischem Verlaufe hinweisen. Aehnlich weiter für $x=0$ und $x \leqq r$.

4. Für die Funktion der Ellipse wird ebenso:

x	y
x	$\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$
$x + \delta$	$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x+\delta)^2}$

$$\eta = \frac{b}{a} \left[\sqrt{a^2 - x^2 - 2x\delta - \delta^2} - \sqrt{a^2 - x^2} \right]$$

$$\eta = \frac{\frac{b}{a} \left[-2x\delta - \delta^2 \right]}{\sqrt{a^2 - (x+\delta)^2} + \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Hier durch δ dividiert und den Grenzübergang vollzogen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wiederum lässt sich hierauf eine Diskussion über den Richtungsverlauf der Kurve begründen.

Eine gleiche Betrachtung gilt für die Hyperbel, deren Funktion $\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ die Richtungstangente liefert:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

5. Mit Hülfe der in dem Vorstehenden entwickelten Richtungstangenten der Kegelschnitte lassen sich jetzt ohne weiteres die Gleichungen der geometrischen Tangenten derselben aufstellen. — Die Gleichung einer jeden Geraden, die durch den Punkt (x_1, y_1) verläuft, lautet

$$y = \operatorname{tg} \alpha \, (x - x_1) + y_1.$$

Soll nun (x_1, y_1) ein Punkt der Parabel $\frac{1}{2p} x^2$ sein, so gilt für die Tangente in diesem Punkte die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_1}{p}.$$ Entsprechend

für die Parabel $\sqrt{2px}$ $\qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{\sqrt{2px_1}} = \frac{p}{y_1}$,

für den Kreis $\sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} = -\frac{x_1}{y_1}$,

für die Ellipse $\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$,

für die Hyberbel $\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ $\qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$.

Und man erhält nun durch Einsetzen dieser Werte in jene Gleichung die Gleichungen der Tangenten für diese Kurven:

Parabelfunktion I: $y = \frac{x_1}{p}(x - x_1) + y_1$ oder

$$y = \frac{xx_1}{p} - \frac{x_1^2}{p} + y_1; \quad \text{es gilt}$$

$$\frac{x_1^2}{p} = 2y_1, \quad \text{also}$$

$$y = \frac{xx_1}{p} - y_1, \quad \text{oder}$$

$$y + y_1 = \frac{1}{p} \cdot xx_1;$$

Parabelfunktion II: $yy_1 = p\,(x + x_1)$;

Kreis: $xx_1 + yy_1 = a^2$,

Ellipse: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$,

Hyperbel: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

6. So wäre auf diesem Wege die Grundlage für die übliche Behandlung des bekannten hier einschlagenden Aufgabengebietes der analytischen Geometrie gewonnen. Indessen könnten dabei jetzt nach den voraufgegangenen Übungen die Gleichungen der Tangenten gegen die Formeln der Richtungstangenten der Kurven zurücktreten.

Zwei Beispiele mögen dies erläutern!

a) Die Ellipse $\frac{1}{3}\sqrt{45 - x^2}$, für die also $a^2 = 45$ und $b^2 = 5$, und der Kreis $\sqrt{13 - x^2}$ schneiden sich in vier gegen die beiden Achsen symmetrisch liegenden Punkten; für den im ersten Quadranten liegenden von ihnen wird durch Gleichsetzen der beiden Funktionen erhalten: $x = 3$, $y = 2$.

Nun ist

$$\operatorname{tg}\alpha\Big)_{\text{Ell.}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\Big)_{\text{Kr.}} = -\frac{x_1}{y_1} = -\frac{3}{2}.$$

Also gilt für den Schnittwinkel φ der beiden Kurven:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{1}{6} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{15}.$$

Sollen die Gleichungen der berührenden Geraden noch besonders aufgestellt werden, so gilt allgemein:

$$y = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_1) + y_1, \text{ also}$$

für die Ellipse: $y = -\frac{1}{6}(x - 3) + 2$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{2},$$

für den Kreis: $y = -\frac{3}{2}(x - 3) + 2$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}.$$

b) Es sollen von dem Punkte (2,5) an die Parabel $\sqrt{12x}$ die Tangenten gelegt werden! — Die durch den Punkt (2,5) gehende Gerade hat allgemein die Gleichung:

$$y = \operatorname{tg}\alpha\,(x - 2) + 5 \ .$$

Ihr soll nun auch der Berührungspunkt (x', y') genügen:

$$y' = \operatorname{tg}\alpha\,(x' - 2) + 5 \ .$$

Ausserdem ist die Richtungstangente der Parabel in diesem Punkte:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{y'} = \frac{6}{\sqrt{12x'}} \ ,$$

also ergibt sich zur Bestimmung von x':

$$\sqrt{12x'} = \frac{6}{\sqrt{12x'}}(x' - 2) + 5 \quad \text{oder}$$

$$12x' = 6x' - 12 + 5\sqrt{12x'}$$

$$6(x' + 2) = 5\sqrt{12x'}, \ \text{oder umgeformt:}$$

$$x'^2 - \frac{13}{3}x' + 4 = 0. \ \text{Und dies liefert die Werte:}$$

$$x_1 = 3 \qquad\qquad x_2 = \frac{4}{3}$$

$$y_1 = \pm\sqrt{12 \cdot 3} = \pm 6 \qquad\qquad y_2 = \pm 4 \ .$$

Von den Vorzeichen kann nur das positive Geltung haben, wie aus der Lage des gegebenen Punktes hervorgeht. So wird

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{p}{y_1} = 1 \qquad\qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{p}{y_2} = \tfrac{3}{2} \ .$$

Die beiden Tangenten schliessen einen Winkel ein, für welchen gilt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{2} - 1}{1 + \frac{3}{2}} = \tfrac{1}{5} \ .$$

Und ihre Gleichungen selbst lauten, falls es ihrer bedarf:

$$\text{I. } y = (x - 2) + 5 \ \text{oder} \qquad\qquad \text{II. } y = \tfrac{3}{2}(x - 2) + 5 \ \text{oder}$$

$$y = x + 3 \ . \qquad\qquad y = \tfrac{3}{2}x + 2 \ .$$

7. So dürfte denn erst hier der geeignete Platz sein, wo die kleinen Formeln für das Schneiden zweier Linien, den Schnittwinkel und die Länge der Sehne, einzuführen sind, um dann vielseitig in Aufgaben über die Kegelschnitte benutzt zu werden. — Für den Hauptsatz über die Tangente der Kegelschnitte brauchte der Beweis jetzt nicht nach der synthetischen Methode, die den Primanern genugsam vertraut ist, gegeben zu werden, sondern er wäre analytisch zu bieten, indem die Winkel, welche die Tangente mit den beiden Leitstrahlen bildet, einzeln berechnet werden. Es ist z. B. bei der Ellipse

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1} \ , \ \text{für die Leitstrahlen gilt}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1 - e} \quad \text{bezw.} \quad \operatorname{tg} a_2 = \frac{y_1}{x_1 + e} \ ,$$

so dass sich für jene beiden Winkel ergibt:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-\dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1} - \dfrac{y_1}{x_1 - e}}{1 - \dfrac{b^2 x_1}{a^2 (x_1 - e)}} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\dfrac{y_1}{x_1 + e} + \dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}{1 - \dfrac{b^2 x_1}{a^2 (x_1 + e)}},$$

welche Ausdrücke denselben Wert, $\frac{b^2}{e y_1}$, liefern. — Es blieben hier dann noch einige wenige hiermit zusammenhängende Eigenschaften der Kegelschnitte zu erörtern.

VI.

Nachdem im vorigen Abschnitt der Wert des Differentialquotienten einer Funktion für die Richtungsbestimmung der Kurve an den Beispielen der schon bekannten Kegelschnitte für den Schüler eine Art von Probe bestanden hat, kann nun der hier vorgeschlagenen Entwickelung des Funktionsbegriffes ein krönender Abschluss angefügt werden mit einer Verwendung des Differentialquotienten zur Feststellung ausgezeichneter Punkte. Und zwar dürfte das hier vorgeschlagene Verfahren nicht nur den Vorzug der Kürze besitzen, sondern es bietet auch zugleich ein Mittel, ohne Mühe zu entscheiden, von welcher Art der ausgezeichnete Punkt ist. Es sei erlaubt, ein paar einführende Beispiele hierherzusetzen; und zwar zunächst solche, die sich auf früher gezeichnete Kurven beziehen.

1. Besitzt die Funktion x^2 ein Maximum oder ein Minimum? — Durch unser Verfahren erhalten wir

$$\begin{array}{c|l} x & x^2 \\ \hline x+\delta & x^2 + 2x\delta + \delta^2 \\ & \eta = 2x\delta + \delta^2 \end{array}$$

$$\frac{\eta}{\delta} = 2x + \delta$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\,.$$

Dies wird gleich 0 für $x=0$, sodass an dieser Stelle ein Maximum oder ein Minimum liegen muss. Und nun bedarf es der Feststellung, ob die Kurve in den folgenden und vorhergehenden Punkten fällt oder steigt. Es ist

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0+\delta} = 2\delta, \quad \text{also positiv, und}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0-\delta} = -2\delta, \quad \text{also negativ}\,.$$

Die Kurve ist also unmittelbar hinterher steigend, vorher fallend; es liegt ein Minimum vor. — Es ist so bei dieser Behandlungsweise die Frage, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, entschieden, ohne dass dem Schüler noch der neue Begriff des zweiten Differentialquotienten zum Bewusstsein kommt. Wohl aber liegt in dieser Art eine weitere Übung zur Befestigung des Begriffes des Differentialquotienten überhaupt.

2. Entsprechend für x^3! Es wird

$$\begin{array}{c|l} x & x^3 \\ \hline x+\delta & x^3+3x^2\delta+3x\delta^2+\delta^3 \\ \hline & \eta=3x^2\delta+3x\delta^2+\delta^3 \\ & \frac{\eta}{\delta}=3x^2+3x\delta+\delta^2 \\ & \frac{dy}{dx}=3x^2 . \end{array}$$

Und dieses wird 0 für $x=0$. Nun ist wieder das Verhalten der Kurve vor und nach diesem Punkte zu untersuchen.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0+\delta}=3\delta^2 \text{ und}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0-\delta}=3\delta^2 .$$

Dies ist in beiden Fällen positiv, die Kurve ist sowohl vorher wie hinterher steigend, während bei $x=0$ selbst eine Tangente von der Richtung der X-Achse liegt; es besteht hier ein Wendepunkt, — daher der Name „Wendeparabel". —

Nun eine Bemerkung über die Ausführung des Verfahrens! Dasselbe wird kürzer, wenn die Schüler erkennen, dass Glieder mit einem Faktor δ^2, δ^3, die ohnehin gegen δ^1 sehr klein sind, beim Grenzübergang verschwinden, sodass sie besser von vornherein vernachlässigt werden. Die obige Ausführung wird dann kurz:

$$\begin{array}{c|l} x & x^3 \\ \hline x+\delta & x^3+3x^2\delta \\ \hline & \eta=3x^2\delta \\ & \frac{dy}{dx}=3x^2 . \end{array}$$

3. Ebenso für $x^{\frac{3}{2}}$! Wir erhalten durch unser Verfahren:

$$\begin{array}{c|l} x & \sqrt{x^3} \\ \hline x+\delta & \sqrt{(x+\delta)^3} \\ \hline & \eta=\sqrt{x^3+3x^2\delta}-\sqrt{x^3} \text{ oder} \\ & \eta=\frac{3x^2\delta}{\sqrt{x^3+3x^2\delta}+\sqrt{x^3}} \\ & \frac{\eta}{\delta}=\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+3x^2\delta}+\sqrt{x^3}} \end{array}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}=\frac{3}{2}\sqrt{x} .$$

Dies wird 0 bei x=0. Und nun zeigt sich

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0+\delta} = \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{\delta} \quad \text{und}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0-\delta} = \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{-\delta}\,.$$

Da der letztere Wert imaginär ist, so hat die Kurve vor unserem Punkte (0,0) keine Tangenten, keine Punkte; hinterher ist sie mit einem Zweige steigend, mit einem symmetrisch dazu fallend. Dabei ist hier aber, wie sich aus dem Wert der Richtungstangente für $x=0$ ergibt, im Punkte 0 selber die Abscissenachse eine Tangente beider Zweige: es handelt sich um einen Rückkehrpunkt, — daher „Rückkehrparabel". Für $x=\infty$ wird die Richtungstangente ∞; hier ist eine Tangente für beide Zweige senkrecht zur X-Achse zu denken.

4. Es sind bisher Funktionen untersucht, die früher bereits graphisch dargestellt waren; es soll jetzt ohne voraufgehende Konstruktionsausführung der ausgezeichnete Wert der Funktion x^2-8x-1 festgestellt werden.

x	y
x	x^2-8x-1
$x+\delta$	$(x+\delta)^2-8(x+\delta)-1$

$$\eta = 2x\delta - 8\delta$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-4)\,.$$

Dies wird 0 für $x=4$; es ist positiv für $x>4$, hier steigt die Kurve; es ist negativ für $x<4$, hier fällt die Kurve: bei $x=4$ liegt ein Minimum.

5. Es soll die Kurve $\frac{3}{5}x^2+6x-2$ in ihrem Hauptverlaufe konstruiert, auch die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen hinzugefügt werden.

Die Kurve ist eine Parabel mit der Achse parallel zur Y-Achse. Zur Bestimmung des Scheitels, des höchsten bezw. tiefsten Punktes, kann der Differentialquotient dienen:

$$\begin{aligned} f(x+\delta) &= \tfrac{3}{5}(x+\delta)^2+6(x+\delta)-2 \\ f(x) &= \tfrac{3}{5}x^2+6x-2 \\ \hline \eta &= \tfrac{6}{5}x\delta+6\delta \\ \frac{dy}{dx} &= \tfrac{6}{5}x+6\,. \end{aligned}$$

Dies wird 0 für $x=-5$. Und dazu wird $f(x)=y=-17$. Also sind -5 und -17 die Koordinaten des Scheitels.

Ferner wird

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-5+\delta} = \tfrac{6}{5}(-5+\delta)+6 = +\tfrac{6}{5}\delta\,.$$

Dies ist positiv und damit der Scheitel als ein Minimum bestätigt; die Öffnung der Parabel liegt in der positiven Richtung der Y-Achse.

Zur Bestimmung des Parameters dient die bekannte Beziehung für den Koefficienten des quadratischen Gliedes:

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{2p}\,,\quad 2p=\frac{5}{3}\,,\quad p=\frac{5}{6}\,,\quad \frac{p}{2}=\frac{5}{12}\,.$$

So hat der Brennpunkt die Koordinaten -5 und $-16\frac{7}{12}$, die Leitgerade die Gleichung $y=-17\frac{5}{12}$.

Die Kurve schneidet die Y-Achse im Punkte $y=-2$. Die Richtung der Tangente ist hier bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 6 \ .$$

Die Funktion verschwindet für $x_1 = -2{,}1$ und $x_2 = -7{,}9$. Für diese Punkte wird

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2,1} = -\tfrac{6}{5}\cdot 2{,}1 + 6, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = -2{,}5+6 = 3{,}5$$

$$\text{und } \operatorname{tg}\alpha_3 = \left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-7,9} = -\tfrac{6}{5}\cdot 7{,}9+6 \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = 9{,}5+6 = -3{,}5 \ .$$

Hiernach kann die Zeichnung der Kurve in ihrem wesentlichen Verlaufe vorgenommen werden.

6. Es soll untersucht werden, ob der Ausdruck $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 4$ ein Maximum oder Minimum hat.

x	y
x	$\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-4$
$x+\delta$	$\frac{1}{3}(x+\delta)^3-\frac{5}{2}(x+\delta)^2+6(x+\delta)-4$
	$\eta = \frac{1}{3}\cdot 3x^2\delta - \frac{5}{2}\cdot 2x\delta + 6\delta$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 5x + 6 \ .$$

Dies gleich Null gesetzt, ergibt zwei ausgezeichnete Punkte, in denen die Tangente parallel zur X-Achse verläuft, bei $x=2$ und $x=3$. — Zunächst soll für den ersteren Punkt das Verhalten der Kurve unmittelbar hinter- und vorher festgestellt werden:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=2+\delta} = (2+\delta)^2 - 5(2+\delta) + 6; \text{ hierin ist}$$

$$2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0 \ , \text{ also}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=2+\delta} = -\delta + \delta^2 \ . \text{ Entsprechend wird}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=2-\delta} = \delta + \delta^2 \ .$$

Der erstere Wert ist negativ, der letztere positiv: bei $x=2$ liegt ein Maximum.

Für $x=3$ wird:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=3+\delta} = (3+\delta)^2 - 5(3+\delta) + 6 \text{ und da}$$

$$3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 0 \ ,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=3+\delta} = \delta + \delta^2; \text{ entsprechend}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=3-\delta} = -\delta + \delta^2 \ .$$

Es handelt sich bei $x=3$ um ein Minimum.

7. Es soll für die Funktion $x^3+2x^2-11x-12$, welche für drei ganzzahlige reelle Werte der unabhängigen Veränderlichen verschwindet, diejenige Grösse derselben festgestellt werden, für welche sie den grössten, und ebenso diejenige, für welche sie den kleinsten Wert annimmt. In dem hierdurch begrenzten Gebiete soll nun der eine von jenen drei Werten, welche die Funktion zum Verschwinden bringen, aufgesucht und danach die beiden andern berechnet werden.

Die durch diese Funktion dargestellte Kurve geht dreimal durch die X-Achse, sie muss also in den beiden Gebieten zwischen den drei Schnittpunkten einmal einen höchsten und einmal einen tiefsten Punkt besitzen. Zur Bestimmung derselben ist der Differentialquotient zu bilden:

$$f(x+\delta)=(x+\delta)^3+2\cdot(x+\delta)^2-11(x+\delta)-12$$
$$fx=x^3+2x^2-11x-12$$
$$\eta=3x^2\delta+4x\delta-11\delta$$
$$\frac{dy}{dx}=3x^2+4x-11\ .$$

Dieser Ausdruck ist gleich 0 zu setzen:

$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}=0\ ,$$

woraus sich ergibt, dass die beiden ausgezeichneten Punkte bei $x'=1{,}4$ und $x''=-2{,}7$ liegen müssen.

Es kann nun zugleich entschieden werden, von welcher Art dieselben sind. Es ist

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=1,4}=3\cdot1{,}4^2+4\cdot1{,}4-11=0\quad\text{und}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=1,4+\delta}=3(1{,}4^2+2\cdot1{,}4\delta+\delta^2)+4(1{,}4+\delta)-11$$
$$=8{,}4\delta+3\delta^2+4\delta\ .$$

Dies ist positiv, also liegt bei $x=1{,}4$ ein Minimum. Da es nämlich aus dem Sachverhalt hervorgeht, dass es sich nur um ein Minimum oder ein Maximum handeln kann, so genügt diese Bestimmung des Vorzeichens der Richtungstangente nach der einen Richtung hin.

Entsprechend wird

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2,7}=3\cdot2{,}7^2-4\cdot2{,}7-11=0\quad\text{und}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2,7+\delta}=3(2{,}7^2-2\cdot2{,}7\delta+\delta^2)+4(-2{,}7+\delta)-11$$
$$=-16{,}2\delta+3\delta^2+4\delta$$
$$=-12{,}2\delta+3\delta^2\ .$$

Dies ist negativ, also gibt es bei $x=-2{,}7$ ein Maximum.

Es liegen nun zwischen diesen beiden ausgezeichneten Stellen die ganzzahligen Werte $-2, -1$, 0 und $+1$; und es ist durch Versuch festzustellen, durch welchen derselben die Funktion zum Verschwinden gebracht wird: es ist dies $x_1=-1$.

Nun muss unsere Funktion durch $x+1$ ohne Rest teilbar sein; und es zeigt sich:

$$(x^3+2x^2-11x-12):(x+1)=x^2+x-12,$$

so dass unsere Funktion nunmehr auch bei denjenigen beiden Werten von x verschwinden muss, für welche $x^2 + x - 12 = 0$ wird; das ist bei $x_2 = 3$ und $x_3 = -4$ der Fall. — Diese beiden neuen Werte könnten auch bequem auf Grund der drei Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Koefficienten der kubischen Gleichung bestimmt werden.

Die Kurve schneidet die Y-Achse im Punkte -12. Die Funktion wird für $x = \infty$ selbst ∞, für $x = -\infty$ selbst $-\infty$; sie nimmt an den beiden ausgezeichneten Stellen, nämlich bei $x = 1{,}4$ und bei $x = -2{,}7$ die Werte $-20{,}7$ bezw. $+12{,}6$ an.

Es bleiben die Tangenten in den behandelten Punkten $(-4{,}0)$, $(-1{,}0)$, $(0, -12)$ und $(3{,}0)$ festzustellen: es ergibt sich aus dem allgemeinen Wert der Richtungstangente

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 11:$$

$$\operatorname{tg}\alpha\Big)_{x=-4} = 21$$

$$\operatorname{tg}\alpha\Big)_{x=-1} = -12$$

$$\operatorname{tg}\alpha\Big)_{x=0} = -11$$

$$\operatorname{tg}\alpha\Big)_{x=3} = 28\,.$$

Für die beiden ausgezeichneten Punkte $(-2{,}7,\ 12{,}6)$ und $(1{,}4,\ -20{,}7)$ ist $\operatorname{tg}\alpha = 0$. So können jetzt sechs endliche Punkte mit ihren Tangenten konstruiert werden, woraus sich der wesentliche Verlauf der Kurve übersehen lässt.

8. Einer Kugel soll der möglichst grösste Zylinder eingezeichnet werden! — Für einen beliebigen der vielen möglichen Zylinder sei der Radius x, dann wird — der Kugelradius gleich r gesetzt — die halbe Höhe $\sqrt{r^2 - x^2}$ und das Volumen $2\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$. Es stellt sich das Volumen als eine Funktion von x dar, wobei x zwischen den Grenzen 0 und r variiert. Dass bei dem Wachsen von x von 0 her die Funktion von 0 an wächst und schliesslich bei $x = r$ wieder 0 wird und dass sie also bei einem gewissen mittleren x einen grössten Wert erreicht, ist leicht zu erkennen. Es gilt also, den Differentialquotienten der Funktion zu bilden und ihn gleich 0 zu setzen, um den gesuchten Wert von x zu erhalten.

Man kann aber auch die Höhe als die unabhängige Variable auffassen und mit x bezeichnen, dann wird der Zylinderradius $\sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ und das Volumen $\pi\left(r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) x$ oder $\pi r^2 x - \frac{\pi}{4} x^3$. Hier kann x zwischen o und 2r variieren, und die Funktion wird sowohl für $x = 0$, wie auch für $x = 2r$ selbst gleich 0, so dass also unter allen Zwischenwerten einer am grössesten sein muss.

Es werde nun zunächst diese letzte Funktion, die rational ist, behandelt. Es ist

$$fx = \pi r^2 x - \frac{\pi}{4} x^3$$

$$f(x+\delta) = \pi r^2 (x+\delta) - \frac{\pi}{4}(x^3 + 3x^2\delta)$$

$$\eta = \pi r^2 \delta - \tfrac{3}{4}\pi x^2 \delta$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \pi r^2 - \tfrac{3}{4}\pi x^2 \; .$$

Wird dies gleich 0 gesetzt, so ergibt sich

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r \quad \text{oder}$$

$$x = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot r \quad .$$

Und nun die andere Funktion:

$$fx = 2\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f(x+\delta) = 2\pi (x^2 + 2x\delta) \sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta}$$

$$\eta = 2\pi x \left[(x + 2\delta \sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta} - x\sqrt{r^2 - x^2} \right], \quad \text{oder}$$

$$\eta = \frac{2\pi x}{(x+2\delta)\sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta} + x\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \left[(x^2 + 4x\delta)(r^2 - x^2 - 2x\delta) - x^2(r^2 - x^2) \right]$$

Hier der letzte Faktor zunächst allein behandelt:

$$r^2x^2 - x^4 - 2x^3\delta + 4r^2x\delta - 4x^3\delta - r^2x^2 + x^4 \quad \text{oder}$$

$$4r^2x\delta - 6x^3\delta \; .$$

So wird

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{2\pi x \cdot 2x(2r^2 - 3x^2)}{(x+2\delta)\sqrt{r^2 - x^2 - 2x\delta} + x\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{2\pi x(2r^2 - 3x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \; .$$

Dies wird 0 einmal für $x = 0$ — und damit wäre ein Minimum bezeichnet —, sodann für

$$x = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot r \; .$$

Diese aus den zwei Funktionen erhaltenen Ausdrücke sind beide für die Schüler leicht zu konstruieren und auch als auf dasselbe Ergebnis hinauskommend nachzuweisen.

9. Welches von allen gleichschenkligen Dreiecken, bei denen die Grundseite und die Höhe eine konstante Summe ausmachen, hat eine Schenkelseite von ausgezeichnetem Wert? (Aus Martus, Raumlehre II S. 192.) Für das Dreieck gibt es zwei Grenzfälle: entweder die Grundseite ist 0, dann wird die Schenkelseite gleich der konstanten Summe s; oder die Grundseite ist s, dann wird die Schenkelseite gleich $\frac{s}{2}$. Grösser als s, im ersteren Falle, kann dieselbe niemals werden: nimmt sie nun beständig ab, bis zu jenem Endwerte $\frac{s}{2}$, — oder gewinnt sie im Abnehmen einmal eine geringste Länge, von der sie dann wieder auf die Grösse $\frac{s}{2}$ ansteigt? — Aus der blossen Anschauung her ist dies nicht zu entscheiden.

Es werde der Differentialquotient der Funktion gebildet, welche die Schenkelseite darstellt. Es ist, wenn die Grundseite mit x bezeichnet wird,

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (s-x)^2} \text{ oder}$$

$$f(x) = \sqrt{\tfrac{5}{4}x^2 - 2sx + s^2}\ ,$$

$$f(x+\delta) = \sqrt{\tfrac{5}{4}x^2 + \tfrac{5}{2}x\delta - 2sx - 2s\delta + s^2}\ .$$

Die Differenz dieser beiden Wurzeln mit der entsprechenden Summe erweitert, gewinnt für den Zähler den Wert $\frac{5}{2}x\delta - 2s\delta$, so dass der Quotient entsteht

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{\frac{5}{2}x - 2s}{2\sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 2sx + s^2}}\ .$$

Und dieser wird 0 für $x = \frac{4}{5}s$. Es gibt also tatsächlich in jenem Verlaufe einen ausgezeichneten Punkt, und zwar kann hier bei der entwickelten Sachlage nichts anderes liegen als ein Minimum. — Die weitere Untersuchung des Differentialquotienten bestätigt dies: es ist die Frage, ob die Funktion nach diesem Punkte steigt oder ihr Differentialquotient positiv ist. Setzt man in dem obigen Ausdruck desselben $x = \frac{4}{5}s + \delta$ ein, so bleibt der Radikandus positiv und die Wurzel reell, wie sie das in dem behandelten Gebiete auf jeden Fall tun muss, da sie an sich die Schenkelseite bedeutet. Aus demselben Grunde ist ihr Vorzeichen aber auch von vornherein nur positiv gerechnet. So ist der Zähler $\frac{5}{2}\left(\frac{4}{5}s + \delta\right) - 2s$ allein massgebend. Und dieser ist $+\frac{5}{2}\delta$, so wie er zu einem unmittelbar voraufgehenden Werte $-\frac{5}{2}\delta$ wird: die ausgezeichnete Schenkelseite ist eine kürzeste.

Zur Feststellung ihrer Länge ist in der Funktion $x = \frac{4}{5}s$ einzusetzen; sie wird alsdann $\sqrt{(\frac{2}{5}s)^2 + (\frac{1}{5}s)^2}$ oder $\frac{s}{5}\sqrt{5}$, d. i. 0,447 s, also weniger als $\frac{s}{2}$! Die Schenkellänge sinkt, während die Grundseite von 0 auf s wächst, nicht direkt von der Grösse s auf $\frac{s}{2}$, sondern sie sinkt, bis sie bei einer bestimmten Länge der Grundseite, $\frac{4}{5}$ s, die Grösse 0,447 s angenommen hat, um dann hinterher wieder bis auf $\frac{s}{2}$ zuzunehmen

---

Die vorstehenden Entwickelungen bedeuten einen Versuch, den Schülern ein Verständnis der Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten mitzugeben, ohne die bestehenden Lehrpläne anzutasten, allein durch eine geänderte Einführungsweise der Elemente der analytischen Geometrie. Gewiss wäre es leicht, von der hier vorgeschlagenen Art, welche beständig konkrete Einzelübungen vornimmt, zu einer allgemeinen Behandlung des Differenzierens den Übergang zu machen, aber für die Verhältnisse des Gymnasiums mag es doch richtiger sein, wenn man sich darein fügt, auf ein Weitergehen verzichten zu müssen. Es scheint mir das Drängen in unserer Zeit, den mathematischen Standpunkt der Prima beständig heben und von dem, was uns Freude bereitet, immer mehr auch den Schülern bieten zu wollen, mancherseits zu weit zu gehen. Es darf hier nicht vergessen werden, dass seit 1892 bereits die Elemente der analytischen Geometrie und der sphärischen Trigonometrie mit umfangreichen Aufgabengebieten, seit 1902 auch „eine Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde“ dem Lehrplane eingefügt sind, ohne dass eine Erweiterung der Unterrichtszeit stattgefunden hätte! Und wenn auch einzelne Gebiete der Schulmathematik sich noch kürzer behandeln lassen mögen, andere vielleicht, wie die Kombinatorik, auch ganz ausgeschieden werden können, so dürfte es doch im Interesse der übergrossen Mehrzahl der Schüler angezeigt sein, in weitergehenden Forderungen masszuhalten. — Bei einer Behandlungsart, wie der vorstehenden elementaren, gewinnen die Schüler einen Einblick in eine Grundvorstellung der Infinitesimalrechnung und lernen sie zugleich in dem Gebiete der Maximalaufgaben bereits eine den Anfänger überraschende, wertvolle Anwendung derselben kennen. Damit kann es für eine allgemeine Bildung genug sein! Andererseits hat die kleinere Anzahl derer, die wegen des späteren Berufes an eingehenderen Kenntnissen nach dieser Richtung ein Interesse haben, in den hier angeregten Übungen eine wesentliche Grundlage für ein weiteres Verständnis mitbekommen; damit müsste es im allgemeinen auch genug sein! Indessen ist damit ja nicht ausgeschlossen, dass der Lehrer einzelnen für dieses Lehrfach besonders interessierten Schülern auf ihren Wunsch mit Ratschlägen und Hilfen zu eigener Beschäftigung zur Hand geht; nur sollte dies auf die Gestaltung des gemeinsamen Arbeitens in der Klasse keine Rückwirkung ausüben. Für das Gymnasium muss es die eigentliche Aufgabe bleiben, seinen Zöglingen eine systematische und eindringliche Schulung auf bestimmt umgrenztem Gebiete zu gewähren. Mit je grösserem Erfolge diese Aufgabe erfüllt ist, um so leichter und um so sicherer werden sich die jungen Leute hinterher in die Entfaltung der freieren und selbständigeren und umfassenderen Tätigkeit hineinfinden, die auf der Universität nötig ist.

Wenn endlich den Realien auf der Oberstufe des Gymnasiums noch Zeit zugewiesen werden könnte, so müsste auch der Mathematiker dafür stimmen, dass dieser Gewinn einer anderen Seite zugute käme, nämlich den Naturwissenschaften.