2

Jahresbericht

über das

Königliche Katholische Gymnasium

zu Braunsberg

in dem Schuljahre 1866—67,

mit welchem zu der

Freitag den 9. August stattfindenden öffentlichen Prüfung der Schüler und Entlassung der Abiturienten

ergebenst einladet

der Direktor der Anstalt

Prof. J. J. Braun.

Inhalt: 1. Eine mathematische Arbeit vom Oberlehrer Tietz.
2. Schulnachrichten vom Direktor.

Braunsberg.

Gedruckt bei C. A. Heyne.

Aufgabe. Zwei Rollen A und B sind durch eine massive Stange, welche mit den Achsen der Rollen eine gerade Linie bildet, fest mit einander verbunden und durch einen feinen Metalldraht bifilar so aufgehängt, dass sie sich um den Mittelpunkt der Verbindungsstange in der Horizontalebene drehen können. Der Metalldraht geht von dem einen Aufhängepunkte hinunter bis zum Mittelpunkte der Verbindungsstange, dann dieser parallel bis zur Rolle A, welche er mehreremal umkreist; darauf wieder der Verbindungsstange parallel zur Rolle B, und nachdem er diese mehreremal umkreist hat, zurück nach dem Mittelpunkte der Verbindungsstange, und von da lothrecht in die Höhe nach dem zweiten Aufhängepunkte. Zu jeder Seite des Rollenpaares A B befindet sich ein anderes solches Rollenpaar $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, welche sich jedoch nicht drehen können, sondern fest sind und in gleicher Weise mit Leitungsdrähten umwickelt. Gehen alsdann elektrische Ströme durch die Drähte der drei Rollenpaare, so werden die Rollen A und B von den vier äusseren Rollen angezogen oder abgestossen, also in der Horizontalebene um den Mittelpunkt der Verbindungsstange gedreht werden. Es soll die Kraft bestimmt werden, durch welche diese Drehung bewirkt wird.

---

1. Es sei $ds_,$ ein Element des Stromes $s_,$, welcher um die Rolle $A_,$, und ds ein Element des Stromes s, welcher um die Rolle A herumgeführt ist; der Strom $s_,$ habe die Intensität $i_,$ und der Strom s die Intensität i: so sind die Elektrizitätsmengen, welche sich in jedem Augenblick in den Elementen $ds_,$ und ds befinden, entsprechend $i_,ds_,$ und ids, und die Wirkung des Elementes $ds_,$ auf das Element ds ist zunächst dem Produkt $i_,ids_,ds$ proportional. Ferner hängt jede elektrische Wirkung von der Entfernung und die Wirkung zweier elektrischen Ströme auch noch von der Richtung dieser Ströme ab. Es sei daher r die Entfernung des Elementes $ds_,$ von ds, $ds_,$ bilde mit r den Winkel $\alpha_,$ und ds mit r den Winkel α, und endlich sei ν der Neigungswinkel der beiden Ebenen $(r,ds_,)$ und (r,ds); dann ist die Richtung des Elementes $ds_,$ gegen ds eine Funktion der Winkel $\alpha_,$, α und ν; und die Wirkung des Elementes $ds_,$ auf das Element ds wird

$$\frac{i_,ids_,ds}{r^n}\, f\,(\alpha_,,\alpha,\nu),$$

wenn wir nämlich annehmen, dass diese Wirkung irgend einer Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist; wozu wir berechtigt sind, weil wir wissen, dass die Wirkung der Friktionselektrizität umgekehrt proportional ist dem Quadrat der Entfernung. Für den Fall, dass $ds_,$ und ds mit r zusammenfallen, ist $\alpha_, = \alpha = \nu = o$, und somit die Funktion $f\,(\alpha_,, \alpha, \nu)$ gleich einer Konstanten c; also die Wirkung

(1) $$\frac{i_, i ds_, ds}{r^n}\, c.$$

Für den Fall, dass $ds_,$ und ds in einer Ebene liegen, und beide auf r senkrecht stehen, also $\alpha_, = \alpha = 90^0$ und $\nu = o$, wird $f\,(\alpha_,, \alpha, \nu) = 1$, und wir erhalten für die Wirkung von $ds_,$ auf ds den Ausdruck

(2) $$\frac{i_, i ds_, ds}{r^n}.$$

Denken wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen X-Achse mit r zusammenfällt; darauf senkrecht in der Ebene (r, ds) die Y-Achse und auf beiden senkrecht die Z-Achse, und bezeichnen die Projektionen der Elemente $ds_,$ und ds auf die drei Achsen entsprechend mit $x_,, y_,, z_,$ und mit x, y, z; so ist

$$\begin{aligned} x_, &= ds_, \cos \alpha_,, & x &= ds \cos \alpha, \\ y_, &= ds_, \sin \alpha_, \cos \nu, & y &= ds \sin \alpha, \\ z_, &= ds_, \sin \alpha_, \sin \nu, & z &= o; \end{aligned}$$

und wir können, ohne dass die Wirkung sich ändert, für die Wirkung der Elemente $ds_,$ und ds die Wirkung ihrer Projektionen substituiren, die wir der Kürze wegen mit $(x_, x)$, $(y_, x)$, $(z_, x)$, $(x_, y)$, $(y_, y)$ und $(z_, y)$ bezeichnen wollen [1]). Es verschwinden aber die Wirkungen zweier Stromelemente, deren Richtungen auf einander senkrecht stehen; d. h. die vier Komponenten $(y_, x)$, $(z_, x)$, $(x_, y)$ und $(z_, y)$ sind gleich Null, und es bleiben als wirksam nur übrig $(x_, x)$ und $(y_, y)$. Nach (1) ist nun

$$(x_, x) = \frac{i_, i ds_, ds \cos \alpha_, \cos \alpha}{r^n}\, c,$$

und nach (2) $$(y_, y) = \frac{i_, i ds_, ds \sin \alpha_, \sin \alpha \cos \nu}{r^n};$$

somit die Totalwirkung des Elementes $ds_,$ auf ds:

(3) $$W = \frac{i_, i ds_, ds}{r^n}\,(c \,.\, \cos \alpha_, \cos \alpha + \sin \alpha_, \sin \alpha \cos \nu).$$

Zur Bestimmung von n muss [2]) der Ausdruck (3) unverändert bleiben, wenn wir $mds_,$, mds und mr setzen für $ds_,$, ds und r; wodurch derselbe übergeht in

$$\frac{m^2\, i_, i ds_, ds}{m^n\, r^n}\,(c \,.\, \cos \alpha_, \cos \alpha + \sin \alpha_, \sin \alpha \cos \nu).$$

Dieser Ausdruck ist aber dem Ausdruck (3) nur gleich, wenn $\frac{m^2}{m^n} = 1$, also $n = 2$ ist; und wir erhalten

(4) $$W = \frac{i_, i ds_, ds}{r^2}\,(c \,.\, \cos \alpha_, \cos \alpha + \sin \alpha_, \sin \alpha \cos \nu).$$

---

1) Die Wirkung eines geradlinigen Leiters ist dieselbe, als die Wirkung eines andern Leiters, welcher mit jenem zwischen denselben Endpunkten ausgespannt ist und beliebige aber sehr kleine Ausbiegungen macht.

2) Die Wirkung zweier ähnlicher Leiter auf einander bleibt ungeändert, wenn ihre Dimensionen in demselben Verhältnisse verändert werden, in welchem sich ihre Entfernung ändert.

In Betreff des Vorzeichens wollen wir die Kraft als positiv bezeichnen, welche die Entfernung der beiden Elemente zu vergrössern strebt. Nehmen wir deshalb an, dass die Elemente $ds_{,}$ und ds parallel und ihre Ströme gleich gerichtet sind; so findet Anziehung statt, und es ist $\alpha_{,} = \alpha = 90^0$ und $\nu = o$; also nach (2) die Wirkung gleich $-\frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^2}$; d. h. in (4) ist der vor der Klammer stehende Faktor negativ, und wir schreiben:

$$W = \frac{-i_{,}ids_{,}ds}{r^2}\,(c.\cos\alpha_{,}\cos\alpha + \sin\alpha_{,}\sin\alpha\cos\nu)\,^{3)}. \tag{5}$$

Um dem vorstehenden Ausdruck eine bequemere Form zu geben, denken wir uns aus dem Mittelpunkte einer beliebigen Kugel drei Radien parallel mit r, $ds_{,}$ und ds gezogen; so erhalten wir auf der Oberfläche der Kugel ein sphärisches Dreieck, in welchem zwei Seiten α und $\alpha_{,}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel ν ist; und wenn wir die dritte Seite mit ε bezeichnen, so ist

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha_{,}\cos\alpha + \sin\alpha_{,}\sin\alpha\cos\nu;$$

wodurch der Ausdruck (5) die folgende Form erhält:

$$W = -\frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^2}\left\{\cos\varepsilon + (c-1)\cos\alpha_{,}\cos\alpha\right\}. \tag{6}$$

Sind jetzt $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ und x, y, z entsprechend die Koordinaten der Elemente $ds_{,}$ und ds, so ist

$$r^2 = (x_{,}-x)^2 + (y_{,}-y)^2 + (z_{,}-z)^2,$$

und es hängen $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ allein von der Lage von $ds_{,}$, und x, y, z allein von der Lage von ds ab. Differenziren wir daher die letzte Gleichung zuerst nach $s_{,}$ und dann nach s, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} r\frac{\partial r}{\partial s_{,}} &= (x_{,}-x)\frac{dx_{,}}{ds_{,}} + (y_{,}-y)\frac{dy_{,}}{ds_{,}} + (z_{,}-z)\frac{dz_{,}}{ds_{,}}; \\ -r\frac{\partial r}{\partial s} &= (x_{,}-x)\frac{dx}{ds} + (y_{,}-y)\frac{dy}{ds} + (z_{,}-z)\frac{dz}{ds}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und daraus $\frac{\partial r}{\partial s_{,}} = \cos\alpha_{,}$ und $\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos\alpha$.

Differenziren wir die zweite der Gleichungen (7) noch einmal nach $s_{,}$, so ist

$$-\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_{,}} + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\right) = \frac{dx}{ds}\frac{dx_{,}}{ds_{,}} + \frac{dy}{ds}\frac{dy_{,}}{ds_{,}} + \frac{dz}{ds}\frac{dz_{,}}{ds_{,}} = \cos\varepsilon.$$

Diese Werthe in den Ausdruck (6) substituirt, so geht derselbe über in

$$W = \frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s_{,}\partial s} + c\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\frac{\partial r}{\partial s}\right).$$

Multipliciren und dividiren wir jetzt durch r^{c-1}, so wird

$$W = \frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^{c+1}}\left(r^c\frac{\partial^2 r}{\partial s_{,}\partial s} + c\,r^{c-1}\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\frac{\partial r}{\partial s}\right); \tag{8}$$

und wir haben in der Parenthese ein vollständiges Differential, nämlich

$$r^c\frac{\partial^2 r}{\partial s_{,}\partial s} + c\,r^{c-1}\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial\left(r^c\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\right)}{\partial s};$$

wodurch wir für W die folgenden Formen erhalten:

---

3) Aus dem negativen Vorzeichen folgt natürlich nicht, dass der Werth des ganzen Ausdrucks negativ ist; denn der Faktor in der Parenthese kann nach den Werthen von $\alpha_{,}$, α und ν sowohl positiv als negativ sein.

$$(9)\begin{cases} W = \dfrac{i_{,}ids_{,}ds}{r^{c+1}} \dfrac{\partial\left(r^{c}\dfrac{\partial r}{\partial s_{,}}\right)}{\partial s}, \text{ oder auch} \\ W = \dfrac{i_{,}ids_{,}ds}{r^{c+1}} \dfrac{\partial\left(r^{c}\dfrac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}. \end{cases}$$

Weil aber $\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos\alpha$, so können wir auch schreiben:

$$(10) \qquad W = -\frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^{c+1}} \frac{\partial(r^{c}\cos\alpha)}{\partial s_{,}}.$$

In dieser Form wollen wir den Ausdruck benutzen zur Bestimmung von c. Die Wirkung von $ds_{,}$ auf ds hat die Richtung r. Wir erhalten daher die mit ds parallele Komponente dieser Wirkung, wenn wir (10) mit $\cos\alpha$ multipliziren; und daraus die betreffende Komponente K der Gesammtwirkung des ganzen geschlossenen Leiters $s_{,}$ auf das Element ds, wenn wir in Bezug auf den ganzen geschlossenen Leiter $s_{,}$ integriren; also

$$K = -i_{,}ids \int \frac{\cos\alpha}{r^{c+1}} \frac{\partial(r^{c}\cos\alpha)}{\partial s_{,}} ds_{,}.$$

Diese Komponente muss verschwinden[4]), und wir haben zur Bestimmung der Konstanten c die folgende Gleichung:

$$-i_{,}ids \int \frac{\cos\alpha}{r^{c+1}} \frac{\partial(r^{c}\cos\alpha)}{\partial s_{,}} ds_{,} = o;$$

oder weil $\qquad \dfrac{1}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} = \dfrac{2r^{c}\cos\alpha}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)}{\partial s_{,}},$

so auch $\qquad \dfrac{-i_{,}ids}{2} \displaystyle\int \dfrac{1}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} ds_{,} = o.$

Es ist aber $\dfrac{\partial\{(r^{c}\cos\alpha)^2 r^{-2c-1}\}}{\partial s_{,}} = \dfrac{1}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} - (2c+1)\dfrac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+2}} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial s_{,}},$

d. h. $\left[\dfrac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+1}}\right]_0^0 = \displaystyle\int \dfrac{1}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} ds_{,} - (2c+1)\int \dfrac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+2}} \dfrac{\partial r}{\partial s_{,}} ds_{,};$ folglich

$$\frac{-i_{,}ids}{2}\int \frac{1}{r^{2c+1}} \frac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} ds_{,} = \frac{-i_{,}ids}{2}\left\{\left[\frac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+1}}\right]_0^0 + (2c+1)\int \frac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+2}} \frac{\partial r}{\partial s_{,}} ds_{,}\right\} = o.$$

Hierin ist $\left[\dfrac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+1}}\right]_0^0 = o$, weil der Leiter $s_{,}$ geschlossen ist, und daher die obere und die untere Grenze zusammenfallen. Daher muss

$$-\tfrac{1}{2}\, i_{,}ids\, (2c+1)\int \frac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+2}} \frac{\partial r}{\partial s_{,}} ds_{,} = o$$

sein. Nun kann der Factor $\frac{1}{2}i_{,}ids$ nicht verschwinden, weil dann überhaupt von keiner Wirkung die Rede sein könnte; und dass das Integral wenigstens nicht für alle Fälle verschwindet, davon überzeugt man sich leicht; folglich ist

$$2c+1 = 0, \text{ d. h. } c = -\tfrac{1}{2};$$

und wenn wir das auf (9) anwenden, so erhalten wir

---

4) Die Resultante eines beliebig geformten aber geschlossenen Leiters auf ein beliebiges Element eines andern Stromes steht senkrecht auf dem Element.

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{i_{,}i ds_{,} ds}{\sqrt{r}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}} \frac{\partial r}{\partial s_{,}}\right)}{\partial s}, \text{ oder auch} \\ W &= \frac{i_{,}i ds_{,} ds}{\sqrt{r}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}} \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Es seien wiederum $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ die Koordinaten des Elementes $ds_{,}$ und x, y, z die Koordinaten des Elementes ds in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem; so haben wir, um die Komponenten X, Y, Z der Wirkung W zu erhalten, den Ausdruck (11) mit $-\frac{x_{,}-x}{r}$, $-\frac{y_{,}-y}{r}$, $-\frac{z_{,}-z}{r}$ zu multipliziren[5]), und es werden die Komponenten der Wirkung des Stromes $s_{,}$ auf das Element ds folgende Werthe haben:

$$X = -i_{,}i\, ds \int \frac{x_{,}-x}{\sqrt{r^3}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}} \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}} ds_{,},$$

$$Y = -i_{,}i\, ds \int \frac{y_{,}-y}{\sqrt{r^3}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}} \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}} ds_{,},$$

$$Z = -i_{,}i\, ds \int \frac{z_{,}-z}{\sqrt{r^3}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}} \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}} ds_{,}.$$

Jetzt ist $u\,dv = \frac{1}{2}\, d\,(uv) + \frac{1}{2}\, u^2 d\left(\frac{v}{u}\right)$,

folglich $\int u \frac{\partial v}{\partial s_{,}} ds_{,} = \frac{1}{2}\Big[u\,v\Big]_0^0 + \frac{1}{2}\int u^2 \frac{\partial\left(\frac{v}{u}\right)}{\partial s_{,}} ds_{,}$.

Setzen wir daher $\frac{x_{,}-x}{\sqrt{r^3}} = u$ und $\sqrt{\frac{1}{r^3}}\, \frac{\partial r}{\partial s} = v$, so erhalten wir

$$X = -i_{,}i ds \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{x_{,}-x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s}\right]_0^0 + \frac{1}{2}\int \frac{(x_{,}-x)^2}{r^3} \frac{\partial\left(\frac{r}{x_{,}-x} \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}} ds_{,} \right\}.$$

Weil aber $s_{,}$ ein geschlossener Strom ist, so wird, wenn wir die Grenzen einsetzen, das erste Glied in der Klammer gleich Null, und

$$X = -\frac{1}{2}\, i_{,}i ds \int \frac{(x_{,}-x)^2}{r^3} \frac{\partial\left(\frac{r}{x_{,}-x} \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}} ds_{,}. \quad (12)$$

Aus (7) erhalten wir aber

$$\frac{r}{x_{,}-x} \frac{\partial r}{\partial s} = -\left(\frac{dx}{ds} + \frac{y_{,}-y}{x_{,}-x} \frac{dy}{ds} + \frac{z_{,}-z}{x_{,}-x} \frac{dz}{ds}\right);$$

und wenn wir diese Gleichung nach $s_{,}$ differenziren und mit $\frac{(x_{,}-x)^2}{r^3} ds_{,}$ multipliziren, so

$$\frac{(x_{,}-x)^2}{r^3} \frac{\partial\left(\frac{r}{x_{,}-x} \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}} ds_{,} = \frac{1}{r^3}\left[\Big\{(z_{,}-z)\, dx_{,} - (x_{,}-x)\, dz_{,}\Big\} \frac{dz}{ds} - \Big\{(x_{,}-x)\, dy_{,} - (y_{,}-y)\, dx_{,}\Big\} \frac{dy}{ds}\right].$$

---

5) Dabei denken wir uns ds dem Anfangspunkt des Systems näher als $ds_{,}$; dann wird die Wirkung die Koordinaten des Angriffspunktes verkleinern, und wir haben das negative Vorzeichen zu schreiben.

Dies auf (12) angewandt, ds unter das Integralzeichen geschrieben, und für Y und Z dieselben Entwicklungen gemacht, so erhalten wir:

$$X = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i \int \frac{1}{r^3}\Big[\big\{(z_{,}-z)dx_{,}-(x_{,}-x)dz_{,}\big\}\, dz - \big\{(x_{,}-x)dy_{,}-(y_{,}-y)dx_{,}\big\}\, dy\Big],$$
$$Y = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i \int \frac{1}{r^3}\Big[\big\{(x_{,}-x)dy_{,}-(y_{,}-y)dx_{,}\big\}\, dx - \big\{(y_{,}-y)\, dz_{,}-(z_{,}-z)\, dy_{,}\big\}\, dz\Big],$$
$$Z = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i \int \frac{1}{r^3}\Big[\big\{(y_{,}-y)\, dz_{,}-(z_{,}-z)dy_{,}\big\}\, dy - \big\{(z_{,}-z)\, dx_{,}-(x_{,}-x)dz_{,}\big\}\, dx\Big].$$

Dies sind die Komponenten der Wirkung eines geschlossenen Stromes $s_{,}$ auf ein Element ds eines beliebigen andern Stromes s, der geschlossen sein kann und auch nicht.

2. Setzen wir

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int \frac{(y_{,}-y)\, dz_{,}-(z_{,}-z)\, dy_{,}}{r^3} &= A,\\ \tfrac{1}{2}\int \frac{(z_{,}-z)\, dx_{,}-(x_{,}-x)\, dz_{,}}{r^3} &= B,\\ \tfrac{1}{2}\int \frac{(x_{,}-x)\, dy_{,}-(y_{,}-y)\, dx_{,}}{r^3} &= C;\end{aligned}\right.$$

so lassen sich die Ausdrücke (13) unmittelbar also schreiben:

$$(15)\qquad X = i_{,}i\,(Cdy-Bdz),\quad Y = i_{,}i\,(Adz-Cdx),\quad Z = i_{,}i\,(Bdx-Ady);$$

und wenn wir eine Richtung D annehmen, welche mit den Koordinatenachsen Winkel bildet, deren Kosinus entsprechend die Werthe $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ haben; so nennt man die Richtung D die Direktrix des Stromes $s_{,}$ und die Grössen A, B, C die Komponenten der Direktrix. Die Ebene, welche durch r und das feste Element $ds_{,}$ bestimmt wird, heisst die Radiusvektorebene. Dann seien α', β', γ' die Kosinus der Winkel, welche die Normale der Radiusvektorebene mit den Koordinatenachsen bildet; n das Perpendikel von dem Anfangspunkt der Koordinaten auf die Radiusvektorebene; so erhalten wir:

$$\alpha' x_{,} + \beta' y_{,} + \gamma' z_{,} - n = o,$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z - n = o,$$

woraus $\quad \alpha' dx_{,} + \beta' dy_{,} + \gamma' dz_{,} = o,$

und $\quad \alpha'(x_{,}-x) + \beta'(y_{,}-y) + \gamma'(z_{,}-z) = o;$

hiezu noch $\quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$

so haben wir drei Gleichungen und finden daraus:

$$\alpha' = \mu\, \big\{(z_{,}-z)\, dy_{,}-(y_{,}-y)\, dz_{,}\big\},$$
$$\beta' = \mu\, \big\{(x_{,}-x)\, dz_{,}-(z_{,}-z)\, dx_{,}\big\},$$
$$\gamma' = \mu\, \big\{(y_{,}-y)\, dx_{,}-(x_{,}-x)\, dy_{,}\big\},$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\big\{(y_{,}-y)dx_{,}-(x_{,}-x)\, dy_{,}\big\}^2 + \big\{(x_{,}-x)\, dz_{,}-(z_{,}-z)dx_{,}\big\}^2 + \big\{(z_{,}-z)dy_{,}-(y_{,}-y)dz_{,}\big\}^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\big\{(x_{,}-x)^2+(y_{,}-y)^2+(z_{,}-z)^2\big\}\big\{(dx_{,})^2+(dy_{,})^2+(dz_{,})^2\big\} - \big\{(x_{,}-x)dx_{,}+(y_{,}-y)dy_{,}+(z_{,}-z)dz_{,}\big\}^2}}.$$

Nun ist aber

$$(x_,-x)^2+(y_,-y)^2+(z_,-z)^2=r^2,$$
$$(dx_,)^2+(dy_,)^2+(dz_,)^2=(ds_,)^2,$$
$$(x_,-x)dx_,+(y_,-y)dy_,+(z_,-z)dz_,=r\cos\alpha_,ds_,;$$

somit

$$\mu=\frac{1}{r\sin\alpha_,ds_,},$$
$$\alpha' r\sin\alpha_,ds_,=(z_,-z)dy_,-(y_,-y)dz_,,$$
$$\beta' r\sin\alpha_,ds_,=(x_,-x)dz_,-(z_,-z)dx_,,$$
$$\gamma' r\sin\alpha_,ds_,=(y_,-y)dx_,-(x_,-x)dy_,;$$ und deshalb nach (14)

$$C=-\tfrac{1}{2}\int\frac{r\gamma'\sin\alpha_,ds_,}{r^3}.$$

Aber $\frac{1}{2}r\sin\alpha_,ds_,$ ist das Dreieck, welches durch r, $ds_,$ und den Punkt xyz bestimmt wird; und weil γ' der Kosinus des Winkels, den die Normale der Radiusvektorebene mit der Z-Achse bildet, d. h. der Kosinus des Winkels, welchen die Radiusvektorebene mit der XY-Ebene bildet; so ist $\frac{1}{2}r\gamma'\sin\alpha_,ds_,$ die Projektion des betreffenden Elementes der Radiusvektorebene auf die XY-Ebene. Denken wir uns daher den ganzen Strom $s_,$ auf die XY-Ebene projicirt und legen den Anfangspunkt der Koordinaten in das Element ds; dann ist das Dreieck, welches entsteht, wenn man die Endpunkte der Projektionen des Elementes $ds_,$ mit dem Anfangspunkt der Koordinaten verbindet, gleich unserem schon bestimmten Dreieck $\frac{1}{2}r\gamma'\sin\alpha_,ds_,$. Bezeichnen wir mit w die Projektion von r und mit ψ den Winkel dieser Projektion mit der X-Achse, dann kann man offenbar $\gamma' ds_,$ ansehen als das Bogenstück eines Kreises, der mit w um ds beschrieben ist, und erhält

$$\tfrac{1}{2}r\gamma'\sin\alpha_,ds_,=\frac{w^2\pi d\psi}{360}=\tfrac{1}{2}w^2d\psi,$$ und daraus

$$C=-\tfrac{1}{2}\int\frac{w^2d\psi}{r^3},$$

worin die Integration auf den ganzen Strom $s_,$ auszudehnen ist. Nun entspricht aber jedem Element $ds_,$ ein anderes Element, welches man erhält, wenn man die Projektionen der Radiusvektorebene, welche nach den Endpunkten des Elementes $ds_,$ gezogen sind, verlängert, bis sie die Projektion der Stromkurve zum zweitenmal schneiden; bezeichnet man die den zweiten Durchschnitten entsprechenden Werthe mit $w_,$ und $r_,$, und die Werthe von ψ, welche Radienvektoren zugehören, deren Projektionen die Projektion der Stromkurve berühren, durch ψ_1 und ψ_2; so erhält man

$$\int\frac{w^2d\psi}{r^3}=\int_{\psi_,}^{\psi_2}\frac{w^2d\psi}{r^3}+\int_{\psi_2}^{\psi_,}\frac{w_,^2d\psi}{r_,^3}=\int_{\psi_,}^{\psi_2}\left(\frac{w^2}{r^3}-\frac{w_,^2}{r_,^3}\right)d\psi,$$ und

$$C=\tfrac{1}{2}\int_{\psi_,}^{\psi_2}\left(\frac{w_,^2}{r_,^3}-\frac{w^2}{r^3}\right)d\psi.$$

Der vorstehende Ausdruck gilt ganz allgemein, ohne jede Voraussetzung. Jetzt aber wollen wir den Strom $s_,$ unendlich klein annehmen und deshalb, wenn wir

$$w_,=w+dw \text{ und } r_,=r+dr$$

setzen, von den Inkrementen dw und dr nur die ersten Potenzen berücksichtigen. Alsdann erhalten wir

$\frac{w_,^2}{r_,^3} = (w+dw)^2(r+dr)^{-3} = (w^2+2wdw)(r^{-3} - 3r^{-4}dr) = \frac{w^2}{r^3} + \frac{2w}{r^3}dw - \frac{3w^2}{r^4}dr$, und somit

$$C = \tfrac{1}{2}\int_{\psi_,}^{\psi_2} wdw \left(\frac{2}{r^3} - \frac{3w}{r^4}\frac{dr}{dw}\right) d\psi.$$

Drücken wir dw und dr durch die Koordinaten aus, so

$$wdw = x_,dx_, + y_,dy_, \quad \text{und} \quad dr = \frac{1}{r}(x_,dx_, + y_,dy_, + z_,dz_,).$$

Ferner ist $tg\psi = \frac{y_,}{x_,}$; und wenn wir den unendlich kleinen Strom als das Element einer Ebene ansehen, so haben wir noch die Gleichung der Ebene des Stromes

$$\frac{x_,}{a} + \frac{y_,}{b} + \frac{z_,}{c} = 1,$$

wenn nämlich a, b und c die Abschnitte bedeuten, welche durch die Ebene des Stromes auf den Koordinatenachsen gemacht werden. Differenziren wir jetzt auch die beiden letzten Gleichungen, so erhalten wir

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = \frac{x_,dy_, - y_,dx_,}{x_,^2} \quad \text{und} \quad \frac{dx_,}{a} + \frac{dy_,}{b} + \frac{dz_,}{c} = o.$$

Aber es ist $\cos^2\psi = \left(\frac{x_,}{w}\right)^2$, daher $w^2d\psi = x_,dy_, - y_,dx_,$; und wenn wir bedenken, dass ψ von den Dimensionen des unendlich kleinen Stromes abhängt, also $d\psi = o$ ist; so haben wir folgende vier Gleichungen:

$$dr = \frac{1}{r}(x_,dx_, + y_,dy_, + z_,dz_,),$$
$$wdw = x_,dx_, + y_,dy_,,$$
$$o = x_,dy_, - y_,dx_,,$$
$$o = \frac{dx_,}{a} + \frac{dy_,}{b} + \frac{dz_,}{c}; \text{ und daraus}$$

$$dx_, = \frac{x_,dw}{w},\ dy_, = \frac{y_,dw}{w},\ dz_, = \frac{dw}{w}(z_, - c).$$

Substituiren wir diese Werthe in die erste der vorstehenden Gleichungen, so

$$dr = \left\{x_,^2 + y_,^2 + z_,(z_, - c)\right\}\frac{dw}{rw} = (r^2 - cz_,)\frac{dw}{rw},$$
$$\frac{dr}{dw} = \frac{r^2 - cz}{rw}; \text{ und deshalb}$$
$$C = -\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3cz_,}{r^5}\right) wdwd\psi.$$

Da der Strom unendlich klein ist, so können wir r und $z_,$ als konstant für alle Werthe von ψ ansehen und können schreiben

$$C = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3cz_,}{r^5}\right)\int_{\psi_,}^{\psi_2} wdwd\psi.$$

Jetzt ist $\int_{\psi_,}^{\psi_2} wdwd\psi$ der Flächeninhalt der Projektion des unendlich kleinen Stromes. Bezeichnen wir daher diesen Inhalt durch $\lambda_,$, das Perpendikel vom Anfangspunkt der Koordinaten auf die Ebene des unendlich kleinen Stromes durch $p_,$ und durch ε, ζ, η die Winkel, welche $p_,$ mit den Koordinatenachsen bildet, so wird

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} w dw d\psi = \lambda_1 \cos\eta, \quad p_1 = a\cos\varepsilon = b\cos\zeta = c\cos\eta;$$ und wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} C &= -\tfrac{1}{2}\lambda_1\left(\frac{\cos\eta}{r^3} - \frac{3p_1 z_1}{r^5}\right). \text{ In derselben Weise} \\ B &= -\tfrac{1}{2}\lambda_1\left(\frac{\cos\zeta}{r^3} - \frac{3p_1 y_1}{r^5}\right), \\ A &= -\tfrac{1}{2}\lambda_1\left(\frac{\cos\varepsilon}{r^3} - \frac{3p_1 x_1}{r^5}\right). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Dies sind die Komponenten der Direktrix eines unendlich kleinen Stromes s_1 in Bezug auf ein Element ds eines andern unendlich kleinen Stromes s. Es ist aber

$$x_1 = p_1 \cos\varepsilon, \quad y_1 = p_1\cos\zeta, \quad z_1 = p_1\cos\eta;$$ deshalb

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \cos\varepsilon, \quad \frac{\partial y_1}{\partial p_1} = \cos\zeta, \quad \frac{\partial z_1}{\partial p_1} = \cos\eta;$$

ferner $p_1 = x_1\cos\varepsilon + y_1\cos\zeta + z_1\cos\eta$,

also $p_1 = x_1\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + y_1\frac{\partial y_1}{\partial p_1} + z_1\frac{\partial z_1}{\partial p_1}$; und wenn wir dies in (17) substituiren:

$$A = -\tfrac{1}{2}\lambda_1\left\{\frac{1}{r^3}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} - \frac{3x_1}{r^5}\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + y_1\frac{\partial y_1}{\partial p_1} + z_1\frac{\partial z_1}{\partial p_1}\right)\right\}.$$

Weil aber $x_1\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + y_1\frac{\partial y_1}{\partial p_1} + z_1\frac{\partial z_1}{\partial p_1} = r\frac{\partial r}{\partial p_1}$,

so $A = -\tfrac{1}{2}\lambda_1\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} - \frac{3x_1}{r^4}\frac{\partial r}{\partial p_1}\right) = -\tfrac{1}{2}\lambda_1\frac{\partial\left(\frac{x_1}{r^3}\right)}{\partial p_1}$. Ebenso

$$B = -\tfrac{1}{2}\lambda_1\frac{\partial\left(\frac{y_1}{r^3}\right)}{\partial p_1}, \quad C = -\tfrac{1}{2}\lambda_1\frac{\partial\left(\frac{z_1}{r^3}\right)}{\partial p_1}.$$

Verschieben wir jetzt das Koordinatensystem parallel mit sich selber, bis der alte Anfangspunkt in Bezug auf den neuen die Koordinaten x, y, z hat; so werden die Komponenten der Direktrix

$$A = -\tfrac{1}{2}\lambda_1\frac{\partial\left(\frac{x_1 - x}{r^3}\right)}{\partial p_1}, \quad B = -\tfrac{1}{2}\lambda_1\frac{\partial\left(\frac{y_1 - y}{r^3}\right)}{\partial p_1}, \quad C = -\tfrac{1}{2}\lambda_1\frac{\partial\left(\frac{z_1 - z}{r^3}\right)}{\partial p_1}.$$

Diese Werthe in (15) eingesetzt; so erhalten wir für die Komponenten der Wirkung eines unendlich kleinen Stromes s_1 auf ein Element ds eines andern unendlich kleinen Stromes s, wenn wir bedenken, dass x, y, z von p_1 unabhängig sind, und wir deshalb dx, dy, dz unter das Differentiationszeichen nach p_1 schreiben können, die folgenden Ausdrücke:

$$X = -\tfrac{1}{2} i_1 i\lambda_1\frac{\partial\left[r^{-3}\left\{(z_1 - z)\,dy - (y_1 - y)\,dz\right\}\right]}{\partial p_1}$$

$$Y = -\tfrac{1}{2} i_1 i\lambda_1\frac{\partial\left[r^{-3}\left\{(x_1 - x)\,dz - (z_1 - z)\,dx\right\}\right]}{\partial p_1}$$

$$Z = -\tfrac{1}{2} i_1 i\lambda_1\frac{\partial\left[r^{-3}\left\{(y_1 - y)\,dx - (x_1 - x)\,dy\right\}\right]}{\partial p_1};$$

und hieraus durch Integration nach s die Komponenten der Wirkung eines unendlich kleinen geschlossenen Stromes $s,$ auf einen unendlich kleinen geschlossenen Strom s:

$$X' = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i\, \lambda_{,}\, \frac{\partial}{\partial p_{,}} \cdot \int \frac{(z_{,}-z)\,dy - (y_{,}-y)\,dz}{r^3},$$
$$Y' = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i\, \lambda_{,}\, \frac{\partial}{\partial p_{,}} \cdot \int \frac{(x_{,}-x)\,dz - (z_{,}-z)\,dx}{r^3},$$
$$Z' = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i\, \lambda_{,}\, \frac{\partial}{\partial p_{,}} \cdot \int \frac{(y_{,}-y)\,dx - (x_{,}-x)\,dy}{r^3}.$$

Die hierin vorkommenden Integrale sind nichts anderes als die negativen Komponenten der Direktrix des zweiten geschlossenen Stromes s, wie man aus der Vergleichung mit (14) sieht. Bezeichnen wir daher die den Grössen $\lambda_{,}$ und $p_{,}$ in Bezug auf den Strom s entsprechenden Grössen mit λ und p, so erhalten wir analog den obigen Entwickelungen:

$$\int \frac{(z_{,}-z)\,dy - (y_{,}-y)\,dz}{r^3} = \lambda \frac{\partial}{\partial p} \cdot \left(\frac{x_{,}-x}{r^3}\right),$$
$$\int \frac{(x_{,}-x)\,dz - (z_{,}-z)\,dx}{r^3} = \lambda \frac{\partial}{\partial p} \cdot \left(\frac{y_{,}-y}{r^3}\right),$$
$$\int \frac{(y_{,}-y)\,dx - (x_{,}-x)\,dy}{r^3} = \lambda \frac{\partial}{\partial p} \cdot \left(\frac{z_{,}-z}{r^3}\right);$$

und darnach

$$(18)\quad \begin{cases} X' = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i\, \lambda_{,} \lambda\, \dfrac{\partial^2}{\partial p_{,} \partial p} \cdot \left(\dfrac{x_{,}-x}{r^3}\right), \\[2ex] Y' = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i\, \lambda_{,} \lambda\, \dfrac{\partial^2}{\partial p_{,} \partial p} \cdot \left(\dfrac{y_{,}-y}{r^3}\right), \\[2ex] Z' = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i\, \lambda_{,} \lambda\, \dfrac{\partial^2}{\partial p_{,} \partial p} \cdot \left(\dfrac{z_{,}-z}{r^3}\right). \end{cases}$$

Dies sind die Komponenten der Wirkung zweier unendlich kleiner geschlossener Ströme $s,$ und s auf einander, welche sich entsprechend in den Punkten $x_{,}y_{,}z_{,}$ und xyz befinden; deren Ebenen vom Anfangspunkt der Koordinaten um $p_{,}$ und p, während sie von einander um r entfernt sind; deren Flächeninhalte $\lambda_{,}$ und λ, und deren Intensitäten $i_{,}$ und i sind.

3. Unter einem Solenoid versteht man ein System unendlich kleiner Ströme, deren Ebenen senkrecht auf einer beliebigen Kurve stehen, und die unendlich nahe an einander liegen, so dass sie einen unendlich dünnen Kanal bilden. Jene Kurve heisst die Achse und die Endpunkte der Achse die Pole des Solenoids. Es seien $d\sigma_{,}$ und $d\sigma$ zwei Elemente der Achsen zweier Solenoide $\sigma_{,}$ und σ; $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ und x, y, z die Koordinaten der Elemente $d\sigma_{,}$ und $d\sigma$; $n_{,}$ und n die Anzahl der unendlich kleinen Ströme, welche sich auf einer Längeneinheit der Solenoidachsen befinden: dann ist $n_{,}d\sigma_{,}$ die Anzahl der unendlich kleinen Ströme auf dem Element $d\sigma_{,}$, und $nd\sigma$ die Anzahl der unendlich kleinen Ströme auf dem Element $d\sigma$. Da wir $d\sigma_{,}$ und $d\sigma$ unendlich klein annehmen, so werden $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, x, y, z, und somit auch r für alle unendlich kleinen Ströme auf den Elementen $d\sigma_{,}$ und $d\sigma$ dieselben Werthe haben; und wenn wir noch bedenken, dass $dp_{,} = d\sigma_{,}$ und $dp = d\sigma$; so erhalten wir für die Komponenten der Wirkung des Elementes $d\sigma_{,}$ auf das Element $d\sigma$ aus (18) unmittelbar die folgenden Werthe:

$$X_{,} = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i \lambda_{,} \lambda n_{,} n\, \frac{\partial^2}{\partial\sigma_{,} \partial\sigma} \cdot \left(\frac{x_{,}-x}{r^3}\right) d\sigma_{,} d\sigma,$$
$$Y_{,} = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i \lambda_{,} \lambda n_{,} n\, \frac{\partial^2}{\partial\sigma_{,} \partial\sigma} \cdot \left(\frac{y_{,}-y}{r^3}\right) d\sigma_{,} d\sigma,$$
$$Z_{,} = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i \lambda_{,} \lambda n_{,} n\, \frac{\partial^2}{\partial\sigma_{,} \partial\sigma} \cdot \left(\frac{z_{,}-z}{r^3}\right) d\sigma_{,} d\sigma;$$

und daraus die Komponenten der Gesammtwirkung des Solenoids $\sigma_,$ auf das Solenoid σ:

$$X_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_, i\lambda_, \lambda n_, n \iint \frac{\partial^2}{\partial\sigma_, \partial\sigma} \cdot \left(\frac{x_, - x}{r^3}\right) d\sigma_, d\sigma,$$

$$Y_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_, i\lambda_, \lambda n_, n \iint \frac{\partial^2}{\partial\sigma_, \partial\sigma} \cdot \left(\frac{y_, - y}{r^3}\right) d\sigma_, d\sigma,$$

$$Z_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_, i\lambda_, \lambda n_, n \iint \frac{\partial^2}{\partial\sigma_, \partial\sigma} \cdot \left(\frac{z_, - z}{r^3}\right) d\sigma_, d\sigma.$$

Bezeichnen wir jetzt die Koordinaten der Pole $\pi_,$ und $\pi_{,,}$ des Solenoids $\sigma_,$ mit $x_,$, $y_,$, $z_,$ und $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ und die Koordinaten der Pole π' und π'' des Solenoids σ mit x', y', z' und mit x'', y'', z''; ferner die Entfernungen der Pole π' von $\pi_,$, π' von $\pi_{,,}$, π'' von $\pi_,$ und π'' von $\pi_{,,}$ entsprechend mit $r_,$, r_2, r_3 und r_4, und führen zuerst die angedeuteten Integrationen nach $\sigma_,$ aus: so erhalten wir

$$X_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_, i\lambda_, \lambda n_, n \int \frac{\partial}{\partial\sigma} \cdot \left(\frac{x_, - x}{r_,^3} - \frac{x_{,,} - x}{r_2^3}\right) d\sigma,$$

$$Y_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_, i\lambda_, \lambda n_, n \int \frac{\partial}{\partial\sigma} \cdot \left(\frac{y_, - y}{r_,^3} - \frac{y_{,,} - y}{r_2^3}\right) d\sigma,$$

$$Z_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_, i\lambda_, \lambda n_, n \int \frac{\partial}{\partial\sigma} \cdot \left(\frac{z_, - z}{r_,^3} - \frac{z_{,,} - z}{r_2^3}\right) d\sigma;$$

und wenn wir auch die Integrationen nach σ ausführen:

$$\left.\begin{aligned}
X_2 &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i\lambda_, \lambda n_, n \left[\frac{x_, - x'}{r_,^3} - \frac{x_, - x''}{r_3^3} - \frac{x_{,,} - x'}{r_2^3} + \frac{x_{,,} - x''}{r_4^3}\right],\\
Y_2 &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i\lambda_, \lambda n_, n \left[\frac{y_, - y'}{r_,^3} - \frac{y_, - y''}{r_3^3} - \frac{y_{,,} - y'}{r_2^3} + \frac{y_{,,} - y''}{r_4^3}\right],\\
Z_2 &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i\lambda_, \lambda n_, n \left[\frac{z_, - z'}{r_,^3} - \frac{z_, - z''}{r_3^3} - \frac{z_{,,} - z'}{r_2^3} + \frac{z_{,,} - z''}{r_4^3}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

4. Bei den bisherigen allgemeinen Untersuchungen ist der Unterzeichnete einer Vorlesung über Galvanismus seines hochverehrten Lehrers Professor Dr. Neumann zu Königsberg gefolgt. Um nun zur Lösung der gestellten Aufgabe überzugehen, denken wir uns die Fläche einer Kreiswindung der Rolle $A_,$ auf beliebige Weise in unendlich viele und unendlich kleine Elemente getheilt und alle diese Elemente von gleichen Strömen in demselben Sinne umflossen; dann können wir für die Wirkung der gedachten Kreiswindung die Summe der Wirkungen jener unendlich kleinen Ströme substituiren [6]), und haben, um die Wirkung der ganzen Kreiswindig zu erhalten, den Ausdruck für die Wirkung eines der unendlich kleinen Ströme in Bezug auf die ganze Fläche der Kreiswindung zu integriren. Stellen wir uns alsdann eine Schicht von neben einander liegenden Kreiswindungen der Rolle $A_,$ vor, denken uns den Leitungsdraht sehr dünn und die einzelnen Windungen unmittelbar neben einander liegend; so können wir für ein solches System von Kreiswindungen substituiren ein System von Solenoiden, deren Achsen sämmtlich parallel sind der Achse der Rolle, und deren Pole in den äusseren Kreisflächen der gedachten Schicht liegen. Und um die Wirkung eines solchen Systems unmittelbar neben einander liegender Kreiswindungen, welche sämmtlich senkrecht stehen auf ihrer gemeinschaftlichen Achse, zu erhalten, haben wir den Ausdruck für die Wirkung eines Solenoids zu integriren nach den Flächen der äusseren Kreise des Systems. Dieselben Schlüsse gelten auch in Bezug auf jede Schicht von Kreiswindungen der Rolle A; und wir erhalten die Komponenten der Wirkung einer Schicht von Windungen der Rolle $A_,$ auf eine ebensolche Schicht der Rolle A, wenn wir die Ausdrücke (19) integriren nach den vier äusseren Kreisflächen der beiden Schichten; also

6) Zwei gleiche Leiter, von gleichen aber entgegengesetzten Strömen durchflossen, üben gleiche aber entgegengesetzte Wirkungen aus.

$$(20)\left\{\begin{aligned}
X_3 &= -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{x_{,}-x'}{r_{,}^3}\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du' - \iiiint \frac{x_{,}-x''}{r_3^3}\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du'' - \\ &- \iiiint \frac{x_{,,}-x'}{r_2^3}\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du' + \iiiint \frac{x_{,,}-x''}{r_4^3}\varrho_{,,}\varrho'' d\varrho_{,,} d\varrho'' du_{,,} du''\end{aligned}\right], \\
Y_3 &= -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{y_{,}-y'}{r_{,}^3}\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du' - \iiiint \frac{y_{,}-y''}{r_3^3}\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du'' - \\ &- \iiiint \frac{y_{,,}-y'}{r_2^3}\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du' + \iiiint \frac{y_{,,}-y''}{r_4^3}\varrho_{,,}\varrho'' d\varrho_{,,} d\varrho'' du_{,,} du''\end{aligned}\right], \\
Z_3 &= -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{z_{,}-z'}{r_{,}^3}\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du' - \iiiint \frac{z_{,}-z''}{r_3^3}\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du'' - \\ &- \iiiint \frac{z_{,,}-z'}{r_2^3}\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du' + \iiiint \frac{z_{,,}-z''}{r_4^3}\varrho_{,,}\varrho'' d\varrho_{,,} d\varrho'' du_{,,} du''\end{aligned}\right];
\end{aligned}\right.$$

indem wir $i_{,}=i$ und $n_{,}=n$ setzen, was man am einfachsten dadurch erreicht, dass man um die drei Rollenpaare denselben Strom durch denselben Leitungsdraht führt, und auf die Einheit der Achse der Rolle $A_{,}$ ebenso viele Windungen legt als auf die Einheit der Achse der Rolle A; indem wir ferner durch die ϱ die Entfernungen der λ von den Mittelpunkten der entsprechenden Kreiswindungen und durch die u die Winkel bezeichnen, welche die ϱ mit einer als fest gedachten Richtung bilden, welche den Ebenen der Kreiswindungen parallel ist, so dass $\lambda = \varrho d\varrho du$.

Die Lage des Koordinatensystems ist bis jetzt beliebig. Legen wir den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der äusseren Kreiswindung der Rolle $A_{,}$, und zwar so, dass die XY-Ebene in die Ebene dieser äusseren Kreiswindung fällt; und nehmen die X-Achse als die feste Richtung an, in Bezug auf welche die Winkel u gezählt werden; bezeichnen ferner die Entfernung der beiden Rollen durch m, die Länge der Achse jedes Systems durch l, indem wir beide Achsen gleich annehmen; und setzen endlich voraus, dass die Achsen der beiden Rollen jedes Systems in eine gerade Linie fallen: so wird:

$$\begin{array}{llll}
x_{,}=\varrho_{,}\cos u_{,}, & x_{,,}=\varrho_{,,}\cos u_{,,}, & x'=\varrho'\cos u', & x''=\varrho''\cos u'', \\
y_{,}=\varrho_{,}\sin u_{,}, & y_{,,}=\varrho_{,,}\sin u_{,,}, & y'=\varrho'\sin u', & y''=\varrho''\sin u'', \\
z_{,}=l; & z_{,,}=o; & z'=m+2l; & z''=m+l;
\end{array}$$

und darnach

$$r_{,} = \sqrt{(m+l)^2+\varrho_{,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,}\varrho'\cos(u_{,}-u')}, \qquad r_2 = \sqrt{(m+2l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,,}\varrho'\cos(u_{,,}-u')},$$
$$r_3 = \sqrt{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,}\varrho''\cos(u_{,}-u'')}, \qquad r_4 = \sqrt{(m+l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,,}\varrho''\cos(u_{,,}-u'')}.$$

Wenn wir diese Werthe in die Ausdrücke (20) für die Komponenten einsetzen, so nehmen dieselben folgende Formen an:

$$X_3 = -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{(\varrho_{,}\cos u_{,}-\varrho'\cos u')\,d\varrho_{,}d\varrho' du_{,}du'}{\sqrt{\{(m+l)^2+\varrho_{,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,}\varrho'\cos(u_{,}-u')\}^3}} - \iiiint \frac{(\varrho_{,}\cos u_{,}-\varrho''\cos u'')\,d\varrho_{,}d\varrho'' du_{,}du''}{\sqrt{\{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,}\varrho''\cos(u_{,}-u'')\}^3}} - \\ &- \iiiint \frac{(\varrho_{,,}\cos u_{,,}-\varrho'\cos u')\,d\varrho_{,,}d\varrho' du_{,,}du'}{\sqrt{\{(m+2l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,,}\varrho'\cos(u_{,,}-u')\}^3}} + \iiiint \frac{(\varrho_{,,}\cos u_{,,}-\varrho''\cos u'')\,d\varrho_{,,}d\varrho'' du_{,,}du''}{\sqrt{\{(m+l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,,}\varrho''\cos(u_{,,}-u'')\}^3}}\end{aligned}\right],$$

$$Y_3 = -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{(\varrho_{,}\sin u_{,}-\varrho'\sin u')\,d\varrho_{,}d\varrho' du_{,}du'}{\sqrt{\{(m+l)^2+\varrho_{,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,}\varrho'\cos(u_{,}-u')\}^3}} - \iiiint \frac{(\varrho_{,}\sin u_{,}-\varrho''\sin u'')\,d\varrho_{,}d\varrho'' du_{,}du''}{\sqrt{\{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,}\varrho''\cos(u_{,}-u'')\}^3}} - \\ &- \iiiint \frac{(\varrho_{,,}\sin u_{,,}-\varrho'\sin u')\,d\varrho_{,,}d\varrho' du_{,,}du'}{\sqrt{\{(m+2l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,,}\varrho'\cos(u''-u')\}^3}} + \iiiint \frac{(\varrho_{,,}\sin u_{,,}-\varrho''\sin u'')\,d\varrho_{,,}d\varrho'' du_{,,}du''}{\sqrt{\{(m+l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,,}\varrho''\cos(u_{,,}-u'')\}^3}}\end{aligned}\right],$$

$$Z_3 = -\tfrac{1}{2} i^2 n^2 \left[\begin{array}{l} -(m+l)\iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} + m \iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du''}{r_3^3} + \\ +(m+2l)\iiiint \frac{\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du_{,}}{r_{2}^3} - (m+l)\iiiint \frac{\varrho_{,,}\varrho'' d\varrho_{,,} d\varrho'' du_{,,} du''}{r_4^3} \end{array} \right].$$

In Bezug auf die sämmtlichen u ist von o bis 2π zu integriren; und wenn wir sämmtliche Kreise der beiden Schichten als gleich annehmen und den gemeinschaftlichen Radius mit R bezeichnen, so ist in Bezug auf die sämmtlichen ϱ von o bis R zu integriren. Jetzt wissen wir, dass eine Wirkung nur in der Richtung der Centrale stattfinden kann, dass also $X_3 = o$ und $Y_3 = o$ sein muss. Um das auch aus unseren Werthen für X_3 und Y_3 zu ersehen, zerlegen wir das erste Glied in dem Ausdruck für X_3 in

$$\int_o^R\int_o^R\int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi} \frac{\varrho_{,}^2 \cos u_{,} \varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} - \int_o^R\int_o^R\int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi} \frac{\varrho'^2 \cos u' \varrho_{,} d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} \; {}^{*)}$$

und denken uns die angedeuteten Integrationen ausgeführt und die Grenzen eingesetzt; so erhält das erste der vorstehenden Integrale denselben Werth als das zweite, d. h. ihre Differenz ist gleich Null. Dasselbe gilt von jedem der drei anderen Glieder in dem Ausdruck für X_3 und von jedem Gliede für Y_3; und es bleibt Z_3 übrig für die Wirkung einer Schicht von neben einander liegenden Kreiswindungen der Rolle A, auf eine kongruente Schicht der Rolle A. Schreiben wir daher P für Z_3, so ist

$$P = \tfrac{1}{2} i^2 n^2 \left[2(m+l)\iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} - m\iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du''}{r_3^3} - (m+2l)\iiiint \frac{\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du'}{r_2^3} \right], \quad (21)$$

weil das erste Glied in Z_3 offenbar gleich dem dritten ist. Setzen wir endlich

$$\iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} = Q_{,}, \quad \iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du''}{r_3^3} = Q, \quad \iiiint \frac{\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du'}{r_2^3} = Q_2;$$

so wird

$$P = \tfrac{1}{2} i^2 n^2 \left[2(m+l) Q_{,} - mQ - (m+2l) Q_2 \right],$$

und unsere Aufgabe besteht zunächst darin, die drei Integrale Q, $Q_{,}$ und Q_2 auszuführen.

5. Es ist klar, dass durch eins der drei Integrale Q auch die beiden anderen gefunden sind. Wir wählen zur Ausführung

$$Q = \int_o^R\int_o^R\int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi} \frac{\varrho_{,}\varrho d\varrho_{,} d\varrho du_{,} du}{\sqrt{\left\{ m^2 + \varrho_{,}^2 + \varrho^2 - 2\varrho_{,}\varrho \cos(u_{,} - u) \right\}^3}},$$

indem wir der Bequemlichkeit halber ϱ und u für ϱ'' und u'' schreiben. Um nun zunächst nach $u_{,}$ zu integriren, schreiben wir

$$Q = \int_o^R\int_o^R \varrho_{,}\varrho d\varrho_{,} d\varrho \int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi} f\left\{ \sin(u_{,} - u) \right\} du_{,} du,$$

und setzen für den Augenblick $u_{,} - u = o$ und $u = v$; so wird, weil $u_{,}$ und u von einander unabhängig sind, $du_{,} = do$ und $du = dv$; folglich

$$\int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi} f\left\{ \sin(u_{,} - u) \right\} du_{,} du = \int_{-u}^{2\pi - u}\int_o^{2\pi} f(\sin o)\, do\, dv = 2\pi \int_{-u}^{2\pi - u} f(\sin o)\, do.$$

---

*) Im ersten Gliede des Ausdrucks für X_3 ist der Faktor $\varrho_{,}\varrho'$ im Zähler beim Abschreiben weggelassen; und ebenso die entsprechenden Faktoren in sämmtlichen Gliedern der Ausdrücke für X_3 und für Y_3.

Jetzt ist es gleichgültig, ob man von $-u$ bis $2\pi-u$, oder von o bis 2π integrirt, da man in beiden Fällen um die ganze Peripherie herumzugehen hat; und ebenso gleichgültig, ob wir in $\int f(\sin o)\,do$ den Winkel mit o oder mit u oder irgend anders bezeichnen, weil das auf den Werth des Integrals keinen Einfluss hat. Daher können wir schreiben

$$2\pi\int\limits_{-u}^{2\pi-u} f(\sin o)\,do = 2\,\pi\int\limits_{o}^{2\pi} f(\sin u)\,du,$$

und deshalb

$$Q = 2\pi\int\limits_o^R\int\limits_o^R\int\limits_o^{2\pi} \frac{\varrho_{,}\varrho d\varrho_{,} d\varrho du}{\sqrt{(m^2+\varrho_{,}^2+\varrho^2-2\varrho_{,}\varrho\cos u)^3}}.$$

6. Zur Integration nach $\varrho_{,}$ schreiben wir

$$m^2+\varrho_{,}^2+\varrho^2-2\varrho_{,}\varrho\cos u = m^2+\varrho^2\sin^2 u+(\varrho_{,}-\varrho\cos u)^2$$

und setzen

$$m^2+\varrho^2\sin^2 u = g^2\ ,\ \varrho_{,}-\varrho\cos u = gz;$$

dann wird

$$\varrho_{,} = gz+\varrho\cos u\ ,\ d\varrho_{,} = gdz;$$

und wir erhalten

$$Q = 2\pi\int\limits_o^R\int\limits_o^{2\pi}\varrho d\varrho du\int\frac{(gz+\varrho\cos u)\,gdz}{\sqrt{(g^2+g^2z^2)^3}} =$$

$$= 2\pi\int\limits_o^R\int\limits_o^{2\pi}\varrho d\varrho du\left[\int\frac{zdz}{g\sqrt{(1+z^2)^3}}+\int\frac{\varrho\cos u\,dz}{g^2\sqrt{(1+z^2)^3}}\right] =$$

$$= 2\pi\int\limits_o^R\int\limits_o^{2\pi}\varrho d\varrho du\left[-\frac{1}{g\sqrt{1+z^2}}+\frac{\varrho\cos u}{g^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right] =$$

$$= 2\pi\int\limits_o^R\int\limits_o^{2\pi}\varrho d\varrho du\left[-\frac{1}{\sqrt{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho^2-2\varrho_{,}\varrho\cos u}}+\frac{\varrho\cos u}{m^2+\varrho^2\sin^2 u}\cdot\frac{\varrho_{,}-\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho^2-2\varrho_{,}\varrho\cos u}}\right]_o^R =$$

$$= 2\pi\int\limits_o^R\int\limits_o^{2\pi}\varrho d\varrho du\left[-\frac{1}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\frac{1}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}+\frac{\varrho\cos u}{m^2+\varrho^2\sin^2 u}\cdot\frac{R-\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varrho^2\cos^2 u}{(m^2+\varrho^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+\varrho^2}}\right].$$

Weil aber

$$\frac{\varrho^2\cos^2 u}{m^2+\varrho^2\sin^2 u}\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+\varrho^2}} = -\frac{1}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}+\frac{\sqrt{m^2+\varrho^2}}{m^2+\varrho^2\sin^2 u},$$

so

$$Q = 2\pi\iint\varrho d\varrho du\left[-\frac{1}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\frac{\varrho\cos u}{m^2+\varrho^2\sin^2 u}\cdot\frac{R-\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\frac{\sqrt{m^2+\varrho^2}}{m^2+\varrho\sin^2 u}\right].$$

Das letzte Glied in der Parenthese können wir weglassen; denn es verschwindet, wenn wir es nach u von o bis 2π integriren. Es ist nämlich

$$\int\frac{du}{m^2+\varrho^2\sin^2u}=\int\frac{du}{m^2+\varrho^2-\varrho^2\cos^2u}=\int\frac{du}{(\sqrt{m^2+\varrho^2}+\varrho\cos u)(\sqrt{m^2+\varrho^2}-\varrho\cos u)}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{m^2+\varrho^2}}\int\frac{du}{\sqrt{m^2+\varrho^2}+\varrho\cos u}+\frac{1}{2\sqrt{m^2+\varrho^2}}\int\frac{du}{\sqrt{m^2+\varrho^2}-\varrho\cos u}=$$
$$=\frac{1}{2(m^2+\varrho^2)}\int\frac{du}{1+\frac{\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}}+\frac{1}{2(m^2+\varrho^2)}\int\frac{du}{1-\frac{\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}}.$$

Da nun $\frac{\varrho}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}<1$ ist, so setzen wir $\frac{\varrho}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}=\cos\varphi$ und, der Kürze wegen, $m^2+\varrho^2=h^2$, und erhalten:

$$\int\frac{du}{m^2+\varrho^2\sin^2u}=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{1+\cos\varphi\cos u}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{1-\cos\varphi\cos u}=$$
$$=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{1+\frac{1}{2}\cos(\varphi+u)+\frac{1}{2}\cos(\varphi-u)}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{1-\frac{1}{2}\cos(\varphi+u)-\frac{1}{2}\cos(\varphi-u)}=$$
$$=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{\frac{1+\cos(\varphi+u)}{2}+\frac{1+\cos(\varphi-u)}{2}}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{\frac{1-\cos(\varphi+u)}{2}+\frac{1-\cos(\varphi-u)}{2}}=$$
$$=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi+u)+\cos^2\frac{1}{2}(\varphi-u)}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{\sin^2\frac{1}{2}(\varphi+u)+\sin^2\frac{1}{2}(\varphi-u)}=$$
$$=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}u+2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\sin^2\frac{1}{2}u}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}u+2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\sin^2\frac{1}{2}u}=$$
$$=\frac{1}{2h^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\int\frac{du}{2\cos^2\frac{1}{2}u(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}u)}+\frac{1}{2h^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\int\frac{du}{2\cos^2\frac{1}{2}u(1+\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}u)}=$$
$$=\frac{1}{h^2\sin\varphi}\Big[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u)+\operatorname{arctg}(\cot\tfrac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u)\Big]_o^{2\pi}=o.$$

Mithin haben wir

$$Q=2\pi\iint\varrho d\varrho du\left[-\frac{1}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\frac{\varrho\cos u}{m^2+\varrho^2\sin^2u}\cdot\frac{R-\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}\right]=$$
$$=2\pi\int du\left[-\int\frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\int\frac{R\varrho^2\cos u-\varrho^3\cos^2u}{m^2+\varrho^2\sin^2u}\cdot\frac{d\varrho}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}\right].$$

Jetzt ist

$$\frac{R^2\cos u-\varrho^3\cos^2u}{m^2+\varrho^2\sin^2u}=\varrho-\frac{\varrho-R\cos u}{\sin^2u}+\frac{m^2\cos u}{\sin^2u}\cdot\frac{\varrho\cos u-R}{m^2+\varrho^2\sin^2u},$$

folglich

$$Q=2\pi\int du\left[-\int\frac{(\varrho-R\cos u)d\varrho}{\sin^2u\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\frac{m^2\cos u}{\sin^2u}\int\frac{\varrho\cos u-R}{m^2+\varrho^2\sin^2u}\cdot\frac{d\varrho}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}\right].$$

In dem ersten Gliede in der Parenthese die Integration ausgeführt und das zweite Glied gleich V gesetzt, so

$$Q=2\pi\int du\left\{V-\left[\frac{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}{\sin^2u}\right]_o^R\right\}=$$
$$=2\pi\int du\left\{V-\frac{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}{\sin^2u}+\frac{\sqrt{m^2+R^2}}{\sin^2u}\right\}.$$

Weil $$\int_{o}^{2\pi} \frac{du}{\sin^2 u} = -\Big[\operatorname{cotg} u\Big]_{o}^{2\pi} = o,$$

(22) so $$Q = 2\pi \int du \left\{ V - \frac{\sqrt{m^2 + 2R^2(1-\cos u)}}{\sin^2 u} \right\};$$

und es bleibt, um die Integration nach ϱ vollständig zu absolviren, noch folgendes Integral auszuführen:

$$V = \frac{m^2 \cos u}{\sin^2 u} \int_{o}^{R} \frac{\varrho \cos u - R}{m^2 + \varrho^2 \sin^2 u} \cdot \frac{d\varrho}{\sqrt{m^2 + R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos u}}.$$

Wir setzen zunächst

$$m^2 + R^2 \sin^2 u = a^2 \text{ und } \varrho - R\cos u = ax,$$

so wird

$$V = \frac{m^2 \cos u}{\sin^2 u} \int \frac{ax\cos u - R\sin^2 u}{m^2 + (ax + R\cos u)^2 \sin^2 u} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

und um den Ausdruck unter dem Integralzeichen rational zu machen, sei

$$x + \sqrt{1+x^2} = z;$$

also $$x = \frac{z^2-1}{2z}, \text{ und } \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dz}{z};$$

so wird

$$V = \frac{m^2 \cos u}{\sin^2 u} \int \frac{2\left\{ a(z^2-1)\cos u - 2Rz\sin^2 u \right\} dz}{4m^2 z^2 + \left\{ a(z^2-1) + 2Rz\cos u \right\}^2 \sin^2 u};$$

und wenn wir in Partialbrüche zerlegen,

$$V = \frac{m^2 \cos u}{\sin^2 u} \int \frac{a(1+\cos u)dz}{m^2(1+\cos u)^2 + \left\{ az + R(1+\cos u) \right\}^2 \sin^2 u} - \frac{m^2 \cos u}{\sin^2 u} \int \frac{a(1-\cos u)dz}{m^2(1-\cos u)^2 + \left\{ az - R(1+\cos u) \right\}^2 \sin^2 u}.$$

Diese beiden Integrationen lassen sich ausführen durch folgende Substitutionen:

$$\left\{ az + R(1+\cos u) \right\} \sin u = m(1+\cos u)y, \text{ und } \left\{ az - R(1+\cos u) \right\} \sin u = m(1-\cos u)y_{,};$$

wodurch einmal

$$dz = \frac{m(1+\cos u)dy}{a\sin u},$$

und das anderemal

$$dz = \frac{m(1-\cos u)dy_{,}}{a\sin u},$$

deshalb

$$V = \frac{m\cos u}{\sin^3 u} \int \frac{dy}{1+y^2} - \frac{m\cos u}{\sin^3 u} \int \frac{dy_{,}}{1+y_{,}^2} = \frac{m\cos u}{\sin^3 u} \Big[\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_{,} \Big].$$

Weil aber

$$y = \frac{(\varrho + R + \sqrt{m^2 + R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos u})(1-\cos u)}{m\sin u}$$

und $$y_{,} = \frac{(\varrho - R + \sqrt{m^2 + R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos u})(1+\cos u)}{m\sin u}$$

so wird schliesslich

$$V = \frac{m\cos u}{\sin^3 u}\left[\operatorname{arctg}\left\{\frac{(\varrho + R + \sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u})(1-\cos u)}{m\sin u}\right\} - \right.$$
$$\left. - \operatorname{arctg}\left\{\frac{(\varrho - R + \sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u})(1+\cos u)}{m\sin u}\right\}\right]_o^R =$$
$$= \frac{m\cos u}{\sin^3 u}\left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg}\left\{\frac{(2R+\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)})(1-\cos u)}{m\sin u}\right\} - \operatorname{arctg}\left\{\frac{(R+\sqrt{m^2+R^2})(1-\cos u)}{m\sin u}\right\} \\ - \operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}(1+\cos u)}{m\sin u}\right\} + \operatorname{arctg}\left\{\frac{(\sqrt{m^2+R^2}-R)(1+\cos u)}{m\sin u}\right\} \end{array}\right].$$

6. Die Integration nach ϱ ist nun vollständig durchgeführt. Wir wollen jedoch, bevor wir den vorstehenden Werth für V in (22) einsetzen, denselben zuerst nach u integriren, weil er dadurch um vieles vereinfacht wird. Es ist

$$\int x\,dy = xy - \int y\,dx\,.$$

Setzen wir daher

$$\frac{\cos u\,du}{\sin^3 u} = dy\,,$$
$$\operatorname{arctg}\left\{\frac{(2R+\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)})\,(1-\cos u)}{m\sin u}\right\} = x\,,$$
$$\operatorname{arctg}\left\{\frac{(R+\sqrt{m^2+R^2})\,(1-\cos u)}{m\sin u}\right\} = x_,\,,$$
$$\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{m^2+2R^2\,(1-\cos u)}\,(1+\cos u)}{m\sin u}\right\} = x_2\,,$$
$$\operatorname{arctg}\left\{\frac{(\sqrt{m^2+R^2}-R)\,(1+\cos u)}{m\sin u}\right\} = x_3\,;$$

so erhalten wir:

$$\int V\,du = m\left[(x - x_, - x_2 + x_3)y - \int y\,(dx - dx_, - dx_2 + dx_3)\right],$$
$$y = -\frac{1}{2\sin^2 u}\,,$$
$$dx = \frac{mR\cos u\,du}{m^2+R^2\sin^2 u} - \frac{m\,du}{2\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + \frac{m(m^2+R^2)\,du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} -$$
$$- \frac{mR^2\cos u\,du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}\,,$$

$$dx_, = \frac{m\sqrt{m^2+R^2}\,du}{2(m^2+R^2\sin^2 u)} + \frac{mR\cos u\,du}{2(m^2+R^2\sin^2 u)}\,,$$
$$dx_2 = -\frac{m\,du}{2\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - \frac{m(m^2+R^2)}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + \frac{mR^2\cos u}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}\,,$$
$$dx_3 = -\frac{m\sqrt{m^2+R^2}\,du}{2(m^2+R^2\sin^2 u)} - \frac{mR\cos u\,du}{2(m^2+R^2\sin^2 u)}\,;$$

folglich

$$dx - dx_, - dx_2 + dx_3 = -\frac{m\sqrt{m^2+R^2}\,du}{m^2+R^2\sin^2 u} - \frac{m\,du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$
$$+ \frac{2m^3}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2\,(1-\cos u)}} + \frac{2mR^2(1-\cos u)}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2\,(1-\cos u)}}\,.$$

Mithin

$$\int V du = -\left[\frac{m}{2\sin^2 u}\left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg}\left\{\frac{(2R+\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)})(1-\cos u)}{m\sin u}\right\} - \operatorname{arctg}\left\{\frac{(R+\sqrt{m^2+R^2})(1-\cos u)}{m\sin u}\right\} - \\ -\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}(1+\cos u)}{m\sin u}\right\} + \operatorname{arctg}\left\{\frac{(\sqrt{m^2+R^2}-R)(1+\cos u)}{m\sin u}\right\}\end{array}\right]\right]_0^{2\pi} -$$

$$-\tfrac{1}{2}m^2\sqrt{m^2+R^2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sin^2 u} - \tfrac{1}{2}m^2\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$

$$+m^4\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + m^2R^2\int_0^{2\pi}\frac{(1-\cos u)du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes verschwindet, wenn wir die Grenzwerthe einsetzen. Ebenso ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)} = \frac{1}{m^2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u} - \frac{R^2}{m^2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{m^2+R^2\sin^2 u} = o,$$

wie wir uns oben überzeugt haben. Es bleibt also:

$$\int V du = -\tfrac{1}{2}m^2\int\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + m^4\int\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$

$$+m^2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

Dies auf (22) angewandt, giebt

$$\frac{1}{2\pi}Q = -\tfrac{1}{2}m^2\int\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + m^4\int\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$

$$+m^2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - \int\frac{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}du}{\sin^2 u},$$

$$\frac{1}{2\pi}Q = -\tfrac{3}{2}m^2\int\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + m^4\int\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$

$$+m^2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - 2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

Hierin ist

$$m^4\int\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} = m^2\int\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} -$$

$$-m^2R^2\int\frac{du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}},$$

und

$$m^2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} = R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} -$$

$$-R^4\int\frac{1-\cos u}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

Dies in den letzten Ausdruck für $\frac{1}{2\pi}Q$ substituirt, giebt

$$\frac{1}{2\pi}Q = -\tfrac{1}{2}m^2\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - R^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos u}{\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} -$$

$$- m^2R^2\int_0^{2\pi}\frac{du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - R^4\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos u}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

7. Die jetzt noch auszuführenden Integrale sind elliptische. Um dieselben auf die Normalform zurückzuführen, setzen wir

$$\tfrac{1}{2}u = 90 - \varphi;$$

wodurch

$$1-\cos u = 2\cos^2\varphi,\ \sin^2 u = 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi,\ du = -2d\varphi$$

wird; und

$$\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} = -\frac{kd\varphi}{R\Delta\varphi},$$

wenn wir nämlich noch

$$\frac{2R}{\sqrt{m^2+4R^2}} = k \text{ und } \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi \text{ [7]}$$

setzen. Dadurch erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}Q = \frac{m^2k}{8R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Delta\varphi} + \tfrac{1}{2}Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\Delta\varphi} + m^2Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\Delta\varphi} +$$

$$+ 2kR^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\Delta\varphi},$$

$$\frac{1}{2\pi}Q = \frac{m^2k}{8R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\Delta\varphi} + \frac{m^2k}{8R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\Delta\varphi} + \tfrac{1}{2}Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\Delta\varphi} + m^2Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\Delta\varphi} + \qquad (23)$$

$$+ 2kR^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Zur weitern Entwicklung ist

$$\frac{d.(tg\varphi\Delta\varphi)}{d\varphi} = -\frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}; \qquad (24)$$

und wenn wir $1-k^2 = k_{,}^2$ [8] setzen und einige Reduktionen machen; so

$$\frac{d.(tg\varphi\Delta\varphi)}{d\varphi} = \frac{k_{,}^2}{\cos^2\varphi\Delta\varphi} - \frac{k_{,}^2}{\Delta\varphi} + \Delta\varphi,$$

$$\text{und} \int\frac{d.(tg\varphi\Delta\varphi)}{d\varphi}d\varphi = k_{,}^2\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\Delta\varphi} - k_{,}^2\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int\Delta\varphi d\varphi.$$

---

7) Durège. Theorie der ellept. Funkt. Leipzig, 1861. S. 8-

8) Durège. S. 8.

Somit endlich

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \varDelta\varphi} = \frac{1}{k_,^2}\Big[tg\varphi\,\varDelta\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{1}{k_,^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi d\varphi\ ^{9)}.$$

Es ist aber

$$\Big[\operatorname{tg}\varphi\varDelta\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = \Big[\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}u\sqrt{1-k^2\cos^2 u}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = o,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = -2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = -2K\ ^{10)}$$

und

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi d\varphi = -2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi d\varphi = -2E\ ^{11)};$$

deshalb schliesslich

(25) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\varDelta\varphi} = \frac{2E}{k_,^2} - 2K.$$

In derselben Weise ist

$$\frac{d\,.(\operatorname{cotg}\varphi\varDelta\varphi)}{d\varphi} = -\frac{k^2\cos^2\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{\varDelta\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\sin^2\varphi\varDelta\varphi} + \frac{1}{\varDelta\varphi} - \varDelta\varphi,$$

und daher

(26) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\varDelta\varphi} = -\Big[\operatorname{cotg}\varphi\varDelta\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi d\varphi\ ^{12)} = -2K + 2E.$$

In dem Ausdruck (23) bleibt uns endlich noch auszuführen:

$$m^2Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\varDelta\varphi} + 2R^3k\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\varDelta\varphi} = Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{m^2+2R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

---

9) Durège S. 66. — 10) Durège S. 16. — 11) Durège S. 68. — 12) Durège S. 70.

Dazu ist

$$\frac{m^2+2R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{m^2+4R^2\cos^4\varphi}{m^2\cos^2\varphi+m^2\sin^2\varphi+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=$$

$$=\tfrac{1}{2}+\frac{m^2+4R^2}{2m^2}\cdot\frac{\dfrac{m^2+4R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2}-\dfrac{4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{m^2+4R^2}}{\cos^2\varphi+\dfrac{m^2+4R^2}{m^2}\sin^2\varphi\left(\dfrac{m^2+4R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2}\right)}=$$

$$=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2k_{,}^2}\cdot\frac{1-k^2\sin^2\varphi-k^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi+\dfrac{1}{k_{,}^2}\sin^2\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)}=$$

$$=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2k_{,}^2}\cdot\frac{\dfrac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi}-k^2\sin^2\varphi}{1+\dfrac{1}{k_{,}^2}\operatorname{tg}^2\varphi\,\Delta\varphi};$$

und wenn wir mit $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ multipliziren und von $\frac{\pi}{2}$ bis $-\frac{\pi}{2}$ integriren, so

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{m^2+2R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{1}{2k_{,}^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\,.\,(\operatorname{tg}\varphi\Delta\varphi)}{1+\dfrac{1}{k_{,}^2}\operatorname{tg}^2\varphi\Delta\varphi};$$

und nach (24)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{m^2+2R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=-K+\frac{1}{2k_{,}}\Big[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k_{,}}\operatorname{tg}\varphi\Delta\varphi\right)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}=-K, \tag{27}$$

weil

$$\frac{1}{2k_{,}}\Big[\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi\Delta\varphi}{k_{,}}\right)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2k_{,}}\Big[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k_{,}}\operatorname{cotg}\frac{u}{2}\sqrt{1-k^2\cos^2\frac{u}{2}}\right)\Big]_{0}^{2\pi}=0.$$

Jetzt die Werthe (25), (26) und (27) in (23) eingesetzt, so

$$\frac{1}{2\pi}Q=\frac{m^2kE}{4Rk_{,}^2}-\frac{m^2kK}{2R}+\frac{m^2kE}{4R}-2RkK+RkE=$$

$$=\frac{k}{R}\left[E\left\{\frac{m^2(1+k_{,}^2)}{4k_{,}^2}+R^2\right\}-K\frac{m^2+4R^2}{2}\right]=$$

$$=\frac{k}{R}\left[\left(\frac{m^2+4R^2}{2}\right)E-\left(\frac{m^2+4R^2}{2}\right)K\right]=\frac{2R}{k}(E-K);$$

und daher

$$Q=\frac{4\pi R}{k}(E-K).$$

8. Für die wirkliche Berechnung machen wir noch die folgenden Bemerkungen. Es ist

$$K-E=\frac{\pi^2C}{4K}\,[13],$$

13) Durège S. 235.

und somit

(28) $$Q = -\frac{\pi^3 R}{kK}\, C,$$

worin

$$K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\cos^2\frac{1}{2}\Theta\cos^2\frac{1}{2}\Theta_0\cos^2\frac{1}{2}\Theta_{00}\ldots}\text{ [14]},$$

$$C = 8\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \ldots\right)\text{ [15]},$$

$$q = \frac{k_0}{4(k'_0)^2}\left[(k'_0)^{\frac{1}{2}}(k'_{00})^{\frac{1}{4}}(k'_{3_0})^{\frac{1}{8}}(k'_{4_0})^{\frac{1}{16}}\ldots\right]^3\text{ [16]};$$

oder durch die Θ ausgedrückt,

$$q = \frac{\sin\Theta_0}{4\cos^2\Theta}\left(\cos^{\frac{1}{2}}\Theta_0\cos^{\frac{1}{4}}\Theta_{00}\cos^{\frac{1}{8}}\Theta_{3_0}\ldots\right)^3;$$

und endlich

$\sin\Theta = k = \frac{2R}{\sqrt{m^2+4R^2}}$, $\sin\Theta_0 = \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\Theta$, $\sin\Theta_{00} = \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\Theta_0$, $\sin\Theta_{3_0} = \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\Theta_{00}$, u. s. w.

9. Hiermit sind die Hauptschwierigkeiten unserer Aufgabe gelöst, und wir fügen nur noch die folgenden Bemerkungen hinzu.

a. Aus dem Ausdruck (28) für Q erhält man unmittelbar $Q_,$ und Q_2, wenn man $m+l$ und $m+2l$ für m schreibt. Denken wir uns alsdann die Werthe für Q, $Q_,$ und O_2 in den Ausdruck (21) für P eingesetzt: so ist P die Wirkung einer Schicht von Kreiswindungen der Rolle $A_,$ auf eine Schicht von Kreiswindungen der Rolle A; wenn die Achsen dieser Schichten, d. h. der Rollen $A_,$ und A, in gerader Linie liegen; wenn alle entsprechenden Dimensionen der beiden Schichten einander gleich sind; und wenn beide Schichten von demselben Leitungsdraht gebildet werden und gleich viele Kreiswindungen enthalten.

b. Wenn wir annehmen, dass der gemeinschaftliche Leitungsdraht nach den Rollenpaaren $A_,B_,$ und A_2B_2 in derselben Weise geführt ist, wie es die gestellte Aufgabe für das Rollenpaar AB vorschreibt; wenn wir ferner annehmen, dass die Drahttheile der bifilaren Aufhängungen sowohl, als auch die Theile, welche längs der Verbindungsstangen der einzelnen Rollenpaare herlaufen, so dicht als möglich neben einander und parallel sind: so können wir die Wirkung aller dieser Drahttheile unbeachtet lassen, weil gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Ströme gleiche aber entgegengesetzte Wirkungen ausüben; und es bleiben nur die Wirkungen übrig, welche von den vier äusseren Rollen selber ausgeübt werden.

c. Ebenso dürfen die Wirkungen der kreuzweis zu einander stehenden Rollen, d. h. die Wirkungen der Rollen $A_,$ und A_2 auf B, und der Rollen $B_,$ und B_2 auf A, unbeachtet bleiben; wenn wir annehmen, dass die Durchmesser sämmtlicher Rollen klein sind im Verhältniss zur Länge der Verbindungsstangen. Denn man denke sich unter dieser Voraussetzung ein beliebiges Element α des Leitungsdrahtes der Rolle A und zwei Elemente β und γ des Leitungsdrahtes etwa auf der Rolle $B_,$, welche sich auf derselben Kreiswindung der Rolle $B_,$ befinden, aber um 180° von einander abstehen; so sind β und γ von gleichen aber entgegengesetzten Strömen durchflossen, und ihre Wirkungen auf das Element α werden sich daher um so mehr aufheben, je mehr die Annahme zutrifft, dass β und γ gleiche Abstände von α haben. Der Unterschied dieser Abstände wird sich aber um so mehr der Null nähern, je kleiner wir uns den Durchmesser der betreffenden Kreiswindung, d. h. die Entfernung des Elementes α von β, im Ver-

14) Durège S. 176. — 15) Durège S. 233. — 16) Durège S. 199.

hältniss zur Länge der Verbindungsstangen denken. Unter der gedachten Voraussetzung bleiben also nur die Wirkungen der Rollen A_1 und A_2 auf A, und der Rollen B_1 und B_2 auf B übrig.

d. Wenn wir ferner annehmen, dass die Rollen A und B von dem elektrischen Strom in demselben Sinne, die Rollen A_1 und B_2 in gleichem, dagegen die Rollen A_2 und B_1 in entgegengesetztem Sinne als die Rollen A und B umflossen werden; so haben alle vier äussern Rollen das Bestreben, das Rollenpaar AB in demselben Sinne zu drehen; und unter der Bedingung, dass wir alle entsprechenden Dimensionen und Entfernungen, so wie die Anzahl der über einander liegenden Schichten und die Zahl der Kreiswindungen in jeder einzelnen Schicht für alle Rollen als gleich annehmen, welche Bedingungen praktisch sämmtlich sehr leicht auszuführen sind, können wir die Wirkungen der vier äusseren Rollen als gleich ansehen; haben also die Wirkung der Rolle A_1 auf A vierfach zu nehmen, um die Wirkung des ganzen Systemes zu erhalten. Dabei darf freilich nicht übersehen werden, dass der Ausdruck (21) nur unter der Voraussetzung gilt, dass die Achsen der Rollen A_1 und A in einer geraden Linie liegen. Diese Bedingung wird sich aber leicht erfüllen lassen durch eine mechanische Vorrichtung, welche dazu dient, für jede neue Gleichgewichtslage des Rollenpaares AB die äusseren Rollenpaare A_1B_1 und A_2B_2 so zu stellen, dass so wohl die Achsen der Rollen A, A_1 und A_2, als auch die Achsen der Rollen B, B_1 und B_2 in geraden Linien liegen.

e. Schliesslich ist der Ausdruck P in (21) nur die Wirkung einer einzigen Schicht von Kreiswindungen der Rolle A_1 auf eine einzige Schicht von Kreiswindungen der Rolle A. Befinden sich also mehr Schichten auf jeder Rolle, so haben wir die folgenden Möglichkeiten. Entweder führen wir die Integrationen in Q, Q_1 und Q_2 in Bezug auf ϱ von o bis R und in Bezug auf ϱ_1 von o bis R_1 aus, und nehmen den Radius der untersten Schicht gleich R und den Radius der obersten gleich R_1 an; oder wir denken uns den Leitungsdraht so dünn und so wenig Schichten übereinander, dass die Differenz zwischen dem Radius der untersten und dem Radius der obersten Schicht verschwindet, und die Wirkungen aller einzelnen Schichten gleich werden; so dass wir, um die Totalwirkung der Rolle A_1 auf A zu erhalten, den Ausdruck (21) nur mit dem Quadrat der Anzahl der auf jeder Rolle über einander liegenden Schichten zu multipliziren haben. Unter der letzten Voraussetzung sei a die Anzahl der auf jeder Rolle über einander liegenden Schichten, so erhalten wir für die Gesammtwirkung W der Rollenpaare A_1B_1 und A_2B_2 auf das Rollenpaar AB den Schlusswerth

$$W = 4a^2P,$$

d. h.
$$W = 2i^2n^2a^2\left[2(m+l)Q_1 - mQ - (m+2l)Q_2\right],$$

worin i gleich der Intensität des um die drei Rollenpaare geführten Stromes, n die Anzahl der auf der Längeneinheit jeder Achse neben einander liegenden Kreiswindungen, und a die Anzahl der auf jeder Rolle über einander liegenden Schichten ist; worin ferner m die Entfernungen der Rollen A_1 und A_2 von A, und der Rollen B_1 und B_2 von B; und endlich l die Länge der Achsen der einzelnen über einander liegenden Schichten bedeutet.

Braunsberg, im Mai 1867.

J. Tietz.

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

Prima.

Ordinarius: Herr Professor Dr. Saage.

1) **Deutsch:** Die bedeutendsten literär-historischen Erscheinungen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts. Romantische Schule. Monatliche Aufsätze. Uebungen im Disponiren. 3 St. Otto. 2) **Latein:** Hor. Carm. lib. III. u. IV. Epist. I. 2—8. 2 St. Funge. Cic. Verr. in Q. Caecilium und libr. IV. Tacit. Agric. und Germ. Wöchentliche Pensa. Monatliche Aufsätze. Extemporalia. Römische Antiquitäten. Stilistik. Synonymik. 6 St. Der Direktor. 3) **Griechisch:** Plat. Phaedo. Soph. Antig. Hom. Il. I—XII. theils statarisch, theils cursorisch, theils privatim. Exercitien. Extemporalien. 6 St. Saage. 4) **Französisch:** Mol. Avare und Montesq. consid. 9, 10, 11, 12. Grammatik. Wiederholungen. Extemporalien. 2 St. Funge. 5) **Hebräisch:** Deuteron. I—XIII. Ps. 1, 2, 5, 6, 12—16. Memoriren einiger Psalmen. Wiederholung der Formenlehre und Syntax nach Vosen. Schriftliche Uebungen. 2 St. Wollmann. 6) **Polnisch:** Erste Abtheilung: Grammatik nach Szostakowski, die Formenlehre und Syntax. Doswiadczyński. Zywot i smierć Jana Tarnowskiego von Orzechowski. Correktur der Aufsätze. 2 St. Zweite Abtheilung. Grammatik nach Popliński, Formenlehre, besonders das Verbum, das Wichtigste aus der Syntax. Nowe Wypisy Polskie pag. 1—24. Schriftliche Uebungen. 2 St. Kawczyński. 7) **Religion:** Kirchengeschichte von Carl d. Gr. bis auf die neueste Zeit nach Siemers. Apologetische Behandlung der Lehre vom Dasein Gottes und der Unsterblichkeit der menschlichen Seele. Wiederholungen aus der Glaubenslehre. Rechtfertigung der Quellen der katholischen Religionslehre. Die göttliche Trinität. Die Schöpfung. Lectüre des Evang. Joh. c. I—VII. 2 St. Wollmann. — Evang. Schüler: Lectüre des Brf. Jacobi und 1 Brf. Joh. verbunden mit der Lectüre längerer Parallelstellen aus dem N. T. Kurze Wiederholung der alten Kirchengeschichte. Das Wichtigste aus der mittl. Kirchengeschichte bis zum 11. Jahrhundert. 2 St. Herrmann. 8) **Mathematik:** Wiederholungen. Kettenbrüche und deren Anwendung zur Lösung unbestimmter Gleichungen. Ergänzungen und Erweiterungen der Planimetrie. Trigonometrie. Schriftliche Arbeiten. 4 St. Tietz. 9) **Geschichte und Geographie:** Das Mittelalter mit Berücksichtigung des deutschen Volkes. Wiederholungen aus der alten Geschichte und der alten und neuern Geographie. 3 St. Kawczyński. 10) **Physik:** Mechanik. 1 St. Tietz.

Ober=Secunda.

Ordinarius: Herr Professor Dr. Otto.

1) **Deutsch:** Stillehre. Monatliche Aufsätze. Lectüre von Schiller's Tell. 2 St. Otto. 2) **Latein:** Liv. V. VI. Cic. orat. pro Milone. Privatim Cic. de senectute und de amicitia. Virg. IV. V. VI. Aus der Grammatik die Conjunctivsätze. Oratio indirecta. Wöchentliche Exercitien und Extemporalien, seit Ostern 2 Aufsätze. 10 St. Otto. 3) **Griechisch:** Isocrat. Panegyr. Herod. VII. zum Theil. Hom. Odyss. I—VIII incl. Priv. Xen. Anab. III. IV. Aus der Grammatik die Tempora und Modi bis zum Inf. Exercitien. Extemporalien. 6 St. Saage. 4) **Französisch:** Salvandy, Sobieski v. Göbel. Grammatik. Extemporalien. 2 St. Funge. 5) **Hebräisch:** Formenlehre. Uebersetzung der Uebungsstücke nach Vosen. Schriftliche Uebungen. 2 St. Wollmann. 6) **Polnisch:** mit Prima. 7) **Religion:** Die Sittenlehre. Lectüre des Evang. Matth. c. I—VII. 2 St. Wollmann. — Evangel. Schüler. Lectüre des Evang. Joh. im Grundtext bis c. X. Kirchengeschichte der alten Zeit. 2 St. Herrmann. 8) **Mathematik:** Wiederholungen. Quadratische Gleichungen. Logarithmen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinszinsrechnung. Rentenrechnung. Aehnlichkeit. Ausmessung und Berechnung der geradlinigen Figuren und des Kreises. Trigonometrie bis zur Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks einschließlich. Schriftliche Arbeiten. 4 St. Tietz. 9) **Geschichte und Geographie:** Geschichte der orientalischen Kulturvölker, der Griechen und Macedonier. Wiederholung der Geographie Deutschlands. Außereuropäische Länder. 3 St. Kawczyński. 10) **Physik:** Wärme und Magnetismus. 1 St. Tietz.

Unter=Secunda.

Ordinarius: Herr Oberlehrer Dr. Funge.

1) **Deutsch:** Poetik. Monatliche Aufsätze. 2 St. Königsbeck. 2) **Latein:** Cic. de imp. Cn. Pompei. Liv. XXI und XXII. Privatim Caes. bell. gall. II. Cic. de senect. Grammatik nach F. Schultz. Stilübungen nach Süpfle. 8 St. Funge. Virg. mit Sec. A. 3) **Griechisch:** Xen. Cyrop. I. u. II. Hom. Odys. 9—13 incl. Aus der Grammatik. Artikel. Pronomen. Casus. Exercitien. Extemporalien. 6 St. Saage. 4) **Französisch:** Volt. Charl. XII. lib. III. u. IV. Grammat. Schriftl. Uebungen. 2 St. Funge. 5) **Hebräisch** mit Sec. A. 6) **Polnisch** mit Prima. 7) **Religion** mit Sec. A. 8) **Mathematik:** Gleichungen des ersten und zweiten Grades und höhere, welche auf quadratische reducirbar sind. Proportionen. Arithmetische und geometr. Reihen. Die Lehre vom Kreise. Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren. Als arithmetische Uebungen wurden in der Schule sämmtliche bezügliche Aufgaben aus Koppe und Meier Hirsch durchgerechnet. Zu geometrischen Uebungen dienten die im Handbuch von Koppe enthaltenen Aufgaben. Alle drei Wochen eine häusliche Arbeit. 4 St. Prätorius. 9) **Geschichte und Geographie** mit Sec. A. 10) **Physik** mit Sec. A.

Ober=Tertia.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer Dr. Malina.

1) **Deutsch:** Die Lehre von dem zusammengesetzten Satze und den Perioden. Erklärung prosaischer und poetischer Stücke. Uebungen im Deklamiren und Disponiren. Censur der deutschen Aufsätze. 2 St. Königsbeck. 2) **Latein:** Caes. bell. gall. VI. VII. bell. civ. I. Einzelne Kapitel memorirt. Aus der Grammatik die Syntax und Wortbildung. Wöchentliche Exercitien und Extemporalien. Uebersetzung der Uebungen in der Aufgaben=Sammlung von Schultz. 8 St. Malina. Ovid. Met. IV. V. VI. Prosodie. 2 St. Otto. 3) **Griechisch:** Xen. Anab. IV. V. Hom. Odys. I. Memorirt 50 Verse.

Wiederholungen. Unregelmäßige Verba. Uebungen nach Halm. Wöchentlich 1 Exercitium. 6 St. Lindenblatt. 4) **Französisch:** Erzählungen aus Fuuge's Lehrbuch. Grammatik bis §. 73. Schriftliche Uebungen. 2 St. Fuuge. 5) **Religion:** Allgemeiner einleitender Theil der Glaubenslehre. Die göttliche Offenbarung in Schrift und Tradition. Die Kirche. Lehre von Gott und der Schöpfung nach Eichhorn. 2 St. Wollmann. — Evang. Schüler: Einrichtung der h. Schrift. Kurze Wiederholung des zweiten Glaubensartikels. Lehre von den letzten Dingen. Lectüre und Erklärung des Evang. Mark. 2 St. Herrmann. 6) **Mathematik:** Gleichungen des ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten. Sämmtliche bezügliche Aufgaben aus Koppe und Meier Hirsch in der Schule durchgerechnet. Buchstabenrechnung wiederholt. Potenzen. Ausziehen der Quadratwurzeln und der Kubikwurzeln. In der Geometrie Wiederholung der Pensa beider vorhergehenden Jahre. Kreislehre. Befestigung des Gelernten durch die Aufgaben aus Koppe. 3 St. Prätorius. 7) **Geschichte und Geographie:** Deutsche Geschichte bis 1806. Brandenburgisch-preußische Geschichte. Nach der Wiederholung des Pensums der vorhergehenden Klasse die Geographie Deutschlands. Kartenzeichnen. 4 St. Kawczyński.

Unter-Tertia.

Ordinarius: Herr Oberlehrer Kawczyński.

1) **Deutsch:** Erklärung prosaischer und poetischer Musterstücke und im Anschlusse daran die Lehre von dem Satzbau. Declamations- und Leseübungen. Leitung und Censur der deutschen Aufsätze. 2 St. Tietz. 2) **Latein:** Caes. bell. gall. III. IV. V. Syntax des Nom. und Verb. Uebersetzung der entsprechenden Stücke aus Schultz Aufgaben-Sammlung. Wöchentliche Exercit. u. Extemp. 8 St. Kawczyński. Ovid. Met. VIII., IX. u. X. Metrische Uebungen. 2 St. Fuuge. 3) **Griechisch:** Wiederholungen. Verba auf $\mu\iota$. Unregelmäßige Verba. Jakobs Lesebuch, seit Ostern Xen. Anab. I. 1—7 incl. Uebungen und wöchentliche Exercitien nach Halm. 6 St. Der Direktor. 4) **Französisch:** Formenlehre bis zu den unregelmäßigen Zeitw. nach Plötz. Uebersetzung sämmtlicher Uebungsstücke aus Plötz bis zur Lekt. 85 incl. unter Benutzung von Fuuge's Grammatik. Korrektur der Exercit. und Extemp. 2 St. Malina. 5) **Religion** mit Tertia A. 6) **Mathematik:** Wiederholung der Dezimalbrüche. Potenzen. Wurzelgrößen. Quadrat- und Kubikwurzeln aus ganzen und gebrochenen Zahlen, sowie aus algebraischen Ausdrücken. Rechnen mit reellen und imaginären Wurzeln. Buchstabenrechnung. In der Geometrie Wiederholungen. Viereck. Vier merkwürdige Punkte des Dreiecks. Lösen von Aufgaben aus Arithmetik und Planimetrie. Schriftliche Arbeiten alle 14 Tage. 3 St. Prätorius. 7) **Geschichte und Geographie:** Römische Geschichte bis zur Schlacht von Actium. Uebersichtlich die römische Kaisergeschichte. Geographie Europas mit Ausnahme von Deutschland. Kartenzeichnen. 3 St. Kawczyński. 8) **Naturgeschichte:** Wiederholende Uebersicht. Säugethiere. Vögel. Amphibien. Botanik. Excursionen. 2 St. Prätorius.

Quarta.

Ordinarius: Herr Oberlehrer Lindenblatt.

1) **Deutsch:** Lese- und Deklamationsübungen. Das Wichtigste aus der Deklination, Conjugation und der Interpunktionslehre. 2 St. Lindenblatt. 2) **Latein:** Corn. Nep. 12 Biogr. Wiederholung der Formenlehre. Die Satz- und Casuslehre. Uebersetzung der entsprechenden Stücke aus der Aufgaben-Sammlung von Schultz. Exercitien und Extemporalien. 8 St. Lindenblatt. Phaedr. Fabeln aus den ersten 4 Büchern mit Auswahl. 2 St. Lindenblatt. 3) **Griechisch:** Formenlehre bis zu den Verbis auf $\mu\iota$. Aus Jacobs Lesebuch die entsprechenden Stücke. Schriftliche Uebungen in der Deklination und Conjugation nach Halm. 6 St. Lindenblatt. 4) **Französisch:** Plötz Lektion

1—74. Korrektur der Exercitien und Extemporalien. 2 St. Malina. 5) **Religion:** Bibl. Gesch. des A. T. 94—127, des N. T. 29—75 nach Kabath. Die heiligen Sakramente und das Gebet nach Deharbe. Das Kirchenjahr. 2 St. Wollmann. — Evang. Schüler. Das Wesentlichste zur Bibelkunde. Das Kirchenjahr. Lehre von Christi Person und Werk. Lektüre ausgewählter Stellen der prophetischen Bücher. 2 St. Herrmann. 6) **Mathematik:** Wiederholung und Erweiterung der Lehre von den Verhältnissen. Decimalbrüche. Zins- und Terminrechnung. Lösen passender Aufgaben. Die 4 Species der Buchstabenrechnung. Einfache Gleichungen. Aus der Geometrie die Lehre von Winkeln, Linien und Dreiecken nach Koppe bis §. 100. Sämmtliche Aufgaben aus Koppe p. 33—40 wurden theils in der Schule mündlich, theils zu Hause schriftlich gelöst. 3 St. Tietz. 7) **Geschichte und Geographie:** Orientalische Völker, Griechen, Römer bis zur Vertreibung der Könige. Geographie von Griechenland und dem alten Italien. Außereuropäische Welttheile. Kartenzeichnen. 3 St. Malina.

Quinta.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer Dr. Prätorius.

1) **Deutsch:** Lese- und Deklamationsübungen nach Otto. Die Interpunktion eingeübt durch Bildung zweckmäßiger Sätze nach vorhergegangener Erläuterung. Schriftliche Schul- und Hausübungen. 3 St. Lindenblatt. 2) **Latein:** Wiederholungen. Unregelmäßige Verba. Präpositionen. Adverbien. Bei den Uebungen die unerläßlichen syntactischen Regeln. Die entsprechenden Uebungen aus Ferd. Schultz. Wöchentliche häusliche Arbeiten. Alle drei Wochen Clausurarbeit. 9 St. Prätorius. 3) **Französisch:** Plötz Lekt. 1—60. Extemporalien und häusliche Arbeiten. 3 St. Malina. 4) **Religion:** Bibl. Gesch. des A. T. 45—101, des N. T. 1—55 nach Kabath. Geographie von Palästina. Die Gebote nach Deharbe. 3 St. Wollmann. — Evang. Schüler. Lehre von den Eigenschaften Gottes. Wiederholung der Gesch. des A. T. Einiges aus der bibl. Gesch. des N. T. 2 St. Herrmann. 5) **Rechnen:** Wiederholung der Bruchrechnung in Verbindung mit Aufgaben aus der Regel de tri. Proportionslehre. Flächen- und Kubikrechnung. Zins-, Rabatt-, Diskonto-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Die 4 Species der Decimalbrüche. Kopfrechnen. Häusliche Arbeiten. 3 St. Rohde. 6) **Geschichte und Geographie:** Europa, besonders Deutschland und Preußen, nebst Wiederholungen des Pensums von Sexta. Geschichtliche Mittheilungen. Versuche im Kartenzeichnen. 3 St. Malina. 7) **Naturgeschichte:** Wiederholungen. Ornithologie. Ausgewählte Kapitel aus der Lehre von den Gliederthieren. 2 St. Prätorius.

Sexta.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer Dr. Königsbeck.

1) **Deutsch:** Leseübungen aus Otto's Lesebuch, womit Wort- und Satzerklärung verknüpft und das Wichtigste über Deklination und Conjugation verbunden wurde. Declamirübungen. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. 3 St. Königsbeck. 2) **Latein:** Die Formenlehre bis zu den unregelmäßigen Verben nach Schultz. Die entsprechenden Uebungsstücke aus dem Lesebuch von Schultz bis §. 68. Extemporalien und seit Ostern schriftliche Arbeiten. 9 St. Königsbeck. 3) **Religion:** Biblische Geschichte des A. T. 1—55, des N. T. 1—44 nach Kabath. Lehre vom Glauben nach Deharbe. Erklärung des Wichtigsten im Gottesdienste. 3. St. Wollmann. — Evangelische Schüler. Die ersten 5 Gebote. Biblische Geschichte des A. T. 2 St. Herrmann. 4) **Rechnen:** Wiederholung der 4 Spezies in unbenannten Zahlen, dann in benannten Zahlen. Bruchrechnung auf Regel de tri angewendet. Kopfrechnen. Für jede Stunde schriftliche Aufgaben. 4 St. Rohde. 5) **Geschichte und**

Geographie: Vorbegriffe. Oceanographie. Die Erdtheile. Geschichtliche Notizen. Versuche im Kartenzeichnen. 2 St. Malina. 6) **Naturbeschreibung**: Uebersicht. Säugethiere. Einzelnes von Amphibien und Insekten. 2 St. Prätorius.

Bemerkung. Die Katechumenen wurden während des Sommersemesters in 3 wöchentlichen Stunden besonders unterrichtet und am 4. August c. zum Tische des Herrn geführt.

Fertigkeiten. 1) **Schönschreiben**: Die deutschen und englischen Buchstaben wurden in genetischer Folge nach Fürstenberg's Schreibschule an der Wandtafel von dem Lehrer vorgeschrieben und von den Schülern in der Klasse geübt. Zu den häuslichen Beschäftigungen wurden Gleixner's und Adler's Hefte benutzt. In Quinta und Sexta in jeder Klasse 3 St. Rohde. 2) **Zeichnen**: In Sexta gerade und krumme Linien, angewandt auf bauliche Gegenstände, kleine Landschaften mit leichter Schattirung. 2 St. Rohde. In Quinta Conturzeichnungen von leichten Landschaften, später Blätter- und Blumenzeichnen ohne und mit Schattirung. 2 St. Rohde. In Quarta Arabesken, Ornamente und Landschaften. 2 St. Rohde. 3) **Singen**: In Sexta und Quinta das Wichtigste aus Rhythmik, Melodik und Dynamik nach Schletterer's Chorgesangschule. Kirchen-, Vaterlands-, Turn- und Gelegenheitsgesänge für die Sopranstimme eingeübt. 2 St. In Quarta und Tertia dieselben Gesänge theils vierstimmig theils für Alt und Diskant eingeübt. — Die stimmfähigen Schüler sämmtlicher Klassen sangen vierstimmige Kirchenlieder, Motetten, Messen, Psalmen, sowie heitere Chöre, als: Vaterlands- und Turngesänge. 1 St. Rhode. 4) **Stenographie** in Obertertia. Wortbildung und Wortkürzung. 1 St. Tietz. 5) **Turnen** am Mittwoch und Sonnabend von 5—7 Uhr unter Leitung des Dr. Funge.

Bemerkung. Die hier zu Grunde gelegte Vertheilung der Lehrgegenstände unter die Lehrer erlitt im Laufe des Schuljahres mehrere Veränderungen. Im November erkrankte Oberlehrer Tietz, für welchen von da an Dr. Prätorius in der Mathematik und Physik in Prima, Secunda und Quarta eintrat. Die lateinischen Stunden des Dr. Prätorius in Quinta übernahm Dr. Königsbeck. Das Deutsche in Unter-Secunda wurde dem Dr. Funge, das Deutsche in Ober-Tertia dem Dr. Malina, das Deutsche in Unter-Tertia dem Oberlehrer Kawczyński, Ovid in Unter-Tertia dem Oberlehrer Lindenblatt zugewiesen. Im Januar trat Herr Kandidat Zielinski zur Aushülfe ein und erhielt das Lateinische und Deutsche in Quinta und die Mathematik in Quarta, Unter-Tertia und Ober-Tertia. Königsbeck übernahm wieder das Deutsche in Unter-Secunda und Ober-Tertia und Lindenblatt erhielt das Deutsche in Unter-Tertia. Zu Ostern war Oberlehrer Tietz so weit hergestellt, daß er den mathematischen und physikalischen Unterricht in Prima und Secunda wieder übernehmen konnte. Gymnasiallehrer Winter, welcher um dieselbe Zeit für den nach Conitz versetzten Dr. Königsbeck hier eintrat, übernahm das Deutsche in Ober- und Unter-Tertia, das Lateinische und Griechische in dem einen Cötus von Quarta und das Französische in Quinta und Kand. Zielinski unterrichtete von jetzt an im Deutschen in Quinta und Sexta, in der Mathematik in den beiden Cötus von Quarta und in Unter-Tertia und im Lateinischen in Sexta.

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer beim Beginn des Schuljahres.

Lehrer.	I.	II. a.	II. b.	III. a.	III. b.	IV.	V.	VI.	Summe.
1. **Braun**, Professor und Direktor.	Lat. 6				Griech. 6				12
2. Dr. **Saage**, Professor, erster Oberlehrer, Ordinarius von I.	Griech. 6	Griech. 6	Griech. 6						18
3. Dr. **Otto**, Professor, zweiter Oberlehrer, Ordinarius von II. a.	Deutsch 3	Lat. 2 Deutsch 2 Lat. 8		Lat. 2					17
4. Dr. **Funge**, dritter Oberlehrer, Ordinarius von II. b.	Lat. 2 Franz. 2	Franz. 2	Lat. 8 Franz. 2	Franz. 2	Lat. 2				20
5. **Tietz**, vierter Oberlehrer.	Math. 4 Phys. 2	Math. 4 Phys. 1	Math. 4	Sten. 1	Deutsch 2	Math. 3			21
6. Dr. **Wollmann**, Religionslehrer.	Rel. 2 Hebr. 2	Rel. 2 Hebr. 2		Rel. 2		Rel. 2	Rel. 3	Rel. 3	18
7. **Lindenblatt**, Oberlehrer, erster ordentlicher Lehrer, Ordinarius von VI.				Griech. 6		Deutsch 2 Lat. 10	Deutsch 2		20
8. **Kawczyński**, Oberlehrer, zweiter ordentlicher Lehrer, Ordinarius von III. b.	Gesch. 3	Gesch. 3 Poln. 4		Gesch. 4	Lat. 8 Gesch. 3				25
9. Dr. **Malina**, dritter ordentlicher Lehrer, Ordinarius von III. a.				Lat. 8	Franz. 2	Franz. 2 Gesch. 3	Franz. 2 Gesch. 3	Geog. 2	22
10. Dr. **Königsbeck**, vierter ordentlicher Lehrer, Ordinarius von VI.		Deutsch 2		Deutsch 2		Griech. 6		Deutsch 3 Lat. 9	22
11. Dr. **Prätorius**, fünfter ordentlicher Lehrer, Ordinarius von V.				Math. 3	Math. 3 Naturg. 2		Lat. 9 Naturg. 2	Naturg. 2	21
12. Dr. **Herrmann**, Pfarrer, evangelischer Religionslehrer.	Rel. 2	Rel. 2		Rel. 2		Rel. 2	Rel. 2	Rel. 2	12
13. **Rohde**, technischer Lehrer.		Singen 1			Singen 2	Zeichnen 2	Singen 2 Zeichnen 2 Schreiben 3 Rechnen 3	Zeichnen 2 Schreiben 3 Rechnen 4	24
									252

Bemerkung. Bei der Erkrankung des Oberlehrer **Tietz** trat zur Aushülfe Herr Kandidat **Zielinski** ein und übernahm von Ostern an das Ordinariat von Sexta. Nach dem Abgange des Dr. **Königsbeck** wurde Herr **Winter** fünfter ordentlicher Lehrer und übernahm die früher angegebenen Lehrgegenstände.

II. Höhere Verordnungen.

Verfügung des Königl. Provinzial-Schul-Kollegiums vom 14. Januar 1867. Anzeige, daß der Herr Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten unter dem 12. Dezbr. 1866 ein neues Reglement für die Prüfungen der Kandidaten des höheren Schulamts erlassen habe. Dem Direktor wird empfohlen, diejenigen Schüler, welche sich künftig dem Schulfache zu widmen beabsichtigen, besonders zu beachten und den Nichtbefähigten unter denselben diesen Entschluß möglichst zu widerrathen, den Befähigten aber mit Hinweisung auf das Prüfungs-Reglement die innerhalb der Schulzeit zulässige Anleitung für ihren künftigen Beruf zu gewähren.

Vom 18. Januar c. Der Herr Minister theilt ein Gutachten der Medizinal-Abtheilung seines Ministeriums über die Nothwendigkeit der Schließung der Schule während der Cholera-Epidemie zur Beachtung mit. Nach diesem Gutachten sind die Schulen nicht zu schließen, nur sollen die Schullokale sorgfältig gelüftet und rein gehalten werden. Für diesen Fall wären die Schullokale vielmehr für die Kinder als Zufluchtsstätten zu betrachten, in denen dieselben wenigstens während der Schulzeit vor der Gefahr der Ansteckung gesichert blieben.

Verf. vom 22. Januar c. Aus den von den einzelnen Anstalten eingereichten Vorschlägen sind vom Königl. Prov.-Schul.-Koll. folgende Berathungsgegenstände für die im nächsten Jahre in Königsberg abzuhaltende Direktorenkonferenz ausgewählt worden: 1. Ueber die Förderung des lat. Unterrichts auf den Gymnasien, insbesondere a) durch Beschränkung des grammatischen Lehrstoffs, b) durch Anwendung geeigneter Vokabularien, c) durch zweckmäßige Einrichtung der Uebungen im Lateinsprechen, d) durch die Methode des Stilunterrichts, e) durch Uebungen in der lateinischen Versifikation. 2. Ueber die Einrichtung und den Gebrauch der Schüler-Bibliotheken. 3. Wie ist ein näheres Verhältniß zwischen Schule und Haus zu begründen, und wie sind die beiderseitigen Rechte abzugrenzen? 4. Wie ist dem ungenügenden Erfolge des geographischen Unterrichts auf den Gymnasien abzuhelfen?

Vom 11. Februar c. Mittheilung der ministeriellen Entscheidung, nach welcher die katholischen Theologen, welche ihre Ausbildung auf dem Klerikal-Seminar zu Pelplin oder dem Lyceum zu Braunsberg empfangen, in dem Falle, daß sie ohne ein Zeugniß der Reife im Hebräischen vom Gymnasium abgegangen sind, nicht gehalten sein sollen, das Zeugniß sich nachträglich bei einer Königl. wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission zu erwerben.

Rescript des Herrn Bischofs von Ermland vom 11. März c. Genehmigung der Einführung eines Nachmittags-Passions-Gottesdienstes in der Gymnasialkirche an den sechs Sonntagen der Faste, sowie daß bei diesem Gottesdienste das Sanctissimum ausgesetzt werden darf.

Verf. vom 25. März c. Mittheilung eines Erlasses des Herrn Ministers vom 21. Februar c. über die künftige Einrichtung der Colloquia pro rectoratu. Es wird den Direktoren zur Pflicht gemacht, Lehrern, bei denen das Talent zur Schulleitung entschieden hervortritt, in geeigneter Weise zur Ausbildung desselben behülflich zu sein.

Verf. vom 1. Mai c. Erlaß des Herrn Ministers vom 30. März c., in welchem die auf das Probejahr bezüglichen Bestimmungen zusammengefaßt sind.

Verf. vom 9. Mai c. In der Königl. Central-Turnanstalt zu Berlin wird am 1. Oktober c. wiederum ein sechsmonatlicher Cursus für Civil-Eleven beginnen, zu welchem sowohl Schulmänner, denen der gymnastische Unterricht an Gymnasien und Real-Lehranstalten und an Schullehrer-Seminarien übertragen werden soll, als auch solche Elementar-Lehrer zugelassen werden, welche geeignet erscheinen, neben Erlangung der Befähigung zur Ertheilung eines mustergültigen Turnunterrichtes an der Elementarschule zugleich für die Ausbreitung dieses Unterrichtes in weiteren Kreisen thätig zu sein.

Verf. vom 22. Mai c. Der Herr Minister hat auf die Unzuträglichkeit aufmerksam gemacht, in der oberen Gymnasial-Stufe — Prima und Sekunda — mehr als 40, in der mittleren und unteren mehr als 50 Schüler zu einer Klasse zu vereinigen.

Verf. vom 3. Juni c. Es wird dem Gymnasium die vom Prov.-Schul-Kollegium entworfene und vom Herrn Minister bestätigte Instruktion 1) für die Direktoren, 2) für die Ordinarien, 3) für die Lehrer behufs Ausführung derselben übersandt.

III. Chronik des Gymnasiums.

1. Das Schuljahr wurde Donnerstag den 20. September 1866 mit einem feierlichen Gottesdienste eröffnet.

2. Den 11. November 1866 wurde die Siegesfeier von dem Gymnasium kirchlich durch eine von dem Religionslehrer Dr. Wollmann auf die Bedeutung des Festes bezügliche Predigt, durch ein solennes Hochamt und durch ein Te Deum begangen.

3. Das hohe Geburtsfest Sr. Majestät des Königs wurde durch ein feierliches Hochamt um 8 Uhr und durch einen Schulakt um 11 Uhr im Gymnasium gefeiert. Die Festrede hielt der Oberlehrer Kawczyński.

4. Das Stipendium Schmüllingianum ist durch Konferenzbeschluß dem Primaner Lossau verliehen, das Stipendium Steinhallianum durch die Güte des Magistrats dem Tertianer Lindemann und dem Sekundaner Jedzink belassen worden.

5. Der Bau unserer Aula ist mit dem Frühjahre dieses Jahres in Angriff genommen worden. Es steht zu hoffen, daß das Gebäude noch in diesem Jahre unter Dach kommen werde. Die öffentliche Prüfung der Schüler und Entlassung der Abiturienten im August k. J. wird hoffentlich schon in der neuen Aula stattfinden können.

6. Der Turnunterricht hat in diesem Sommer auf dem Gymnasialplatze wegen des Baues nicht stattfinden können. Zu diesem Zwecke ist uns von dem Herrn Kommandeur des hiesigen Königl. Jäger-Bataillons die Benutzung des Exerzierplatzes gütigst gestattet worden.

7. Mitte November pr. erkrankte der Oberlehrer Tietz und wurde bis Weihnachten von den Kollegen bereitwilligst vertreten. Anfangs Januar trat der Kandidat des höheren Schulamts Zielinski zur Abhaltung seines Probejahres und zugleich zur Aushülfe während der Krankheit des genannten Kollegen ein. Von Ostern d. J. ab hat der Oberlehrer Tietz theilweise seine Stunden wieder übernommen, wird sich aber mit Genehmigung des Königl. Prov.-Schul-Kollegiums gleich nach der Abiturienten-Prüfung zur völligen Wiederherstellung seiner Gesundheit nach Soden begeben.

8. Mit dem 1. April d. J. wurde der Gymnasiallehrer Dr. Königsbeck an das Königl. Gymnasium zu Conitz versetzt und verließ derselbe unsere Anstalt am Schlusse des Winter-Semesters. Die durch diese Versetzung erledigte vierte ordentliche Lehrerstelle wurde gleichzeitig dem Dr. Prätorius und die fünfte Stelle dem Kandidat des höheren Lehramts Winter definitiv verliehen. Den 1. Mai wurde derselbe von dem Direktor vereidigt und in sein Amt eingeführt. Johannes Winter wurde geboren am 23. Juni 1837 zu Neuenkirchen. Vorgebildet am Progymnasium zu Rietberg und dem Gymnasium zu Warendorf, das er im Herbste 1860 mit dem Zeugnisse der Reife verließ, widmete er sich in Münster den philologischen und historischen Studien. Nach bestandenem Examen pro fac. doc. trat er im Herbste 1865 am Gymnasium zu Paderborn sein gesetzliches Probejahr an, folgte nach Absolvirung desselben einem Rufe als kommissarischer Lehrer an das Gymnasium zu Conitz, von wo er zu Ostern d. J. als fünfter ordentlicher Lehrer an das hiesige Gymnasium versetzt wurde.

9. Den 1. April d. J. erfolgte die definitive Anstellung des Weltgeistlichen Dr. jur. utr. Wollmann als Religionslehrer. Den 18. Mai fand die Vereidigung und Einführung desselben durch den Direktor statt. Paul Wollmann, geboren den 29. Juni 1837 zu Marienburg, empfing den Elementarunterricht daselbst in der katholischen Pfarrschule, an welcher sein Vater als erster Lehrer

wirkte, besuchte darauf die „lateinische Schule" seines Geburtsortes und nach dem Tode seines Vaters das Gymnasium in Braunsberg, welches er im Herbste 1856 mit dem Zeugniß der Reife verließ, um ebenda am Königl. Lyceum Philosophie und Theologie zu studiren. Nach bestandenem Trienealexamen erhielt er die niederen Weihen und wurde im Sommer 1860 zum Priester ordinirt. Bis zum Herbste 1861 fungirte er als Kaplan in Santoppen bei Bischoffstein. Mit Genehmigung seines Bischofes verließ er diese Stellung und studirte in Berlin und Breslau die Rechtswissenschaften. An letzterer Universität wurde er 1863 nach bestandenem examen rigorosum und auf Grund seiner Dissertation de provisoribus ecclesiasticis secundum jus canonicum zum Doktor der Rechte promovirt. Der Bischof gestattete ihm die Fortsetzung seiner akademischen Studien noch ein Jahr an der Universität München und stellte ihn darauf in Königsberg als Kaplan an. Von dort wurde er am 28. Mai v. J. als Religionslehrer an das hiesige Gymnasium berufen und am 1. April c. als solcher definitiv angestellt.

10. Mittwoch den 19. Mai besuchte der Königl. Geh. Regierungs- und vortragende Rath im Kultus-Ministerium Dr. Stieve aus Berlin das Gymnasium und wohnte dem Unterrichte sämmtlicher Lehrer bei. In einer Konferenz richtete derselbe an die Lehrer freundliche und belehrende Worte.

IV. Statistische Uebersicht.

1. Im Laufe des verflossenen Schuljahres haben an dem Unterrichte Theil genommen:

in Prima	29	Schüler,
in Sekunda	36	„
in Tertia	80	„
in Quarta	64	„
in Quinta	56	„
in Sexta	37	„
Zusammen	302	Schüler.

Am Anfange und im Laufe des Schuljahres sind 60 Schüler aufgenommen worden. Abgegangen sind aus Prima 5, Sekunda 7, Tertia 7, Quarta 6, Quinta 5, Sexta 1, zusammen 31 Schüler. Zur Zeit beträgt die Schülerzahl 271.

2. Den 31. März c. fand unter dem Vorsitze des Königl. Provinzial-Schulraths, Ritters ꝛc. Dr. Göbel die Abiturienten-Prüfung für den Ostertermin statt. Von 5 Abiturienten erhielten 3 das Zeugniß der Reife.

Namen.	Alter.	Geburtsort.	Confession.	War in Prima.	Studium.	Ort.
1. Joseph Kißporski	20½ J.	Lengeinen, Kreis Allenstein,	katholisch	2½ J.	Theologie	Braunsberg.
2. Franz Röhrich	22½ J.	Mehlsack.	katholisch	2½ J.	Medizin	Breslau.
3. Joseph Wedig	25½ J.	Tolnick, Kreis Heilsberg,	katholisch	3½ J.	Theologie	Braunsberg.

Die von diesen Abiturienten gelieferten Prüfungsarbeiten waren:

a. Lateinischer Aufsatz: Quibus rebus fieri potuerit, ut Alexander Magnus tam exiguo copiarum numero tot nationes imperio suo subjiceret.

b. Deutscher Aufsatz: Des alten Griechenlands Mission in der Geschichte der Menschheit.

c. Mathematische Aufgaben:

1. Ein Wald enthielt vor 10 Jahren 25,000 Klafter Holz. Der jährliche Holzzuwachs hat sich auf $2^1/_2$ Prozent herausgestellt. Die ersten 4 Jahre hindurch wurde kein Holz daraus geschlagen; am Ende eines jeden der letzten 6 Jahre hingegen wurden jährlich 1800 Klafter geschlagen: welches ist der gegenwärtige Holzbestand des Waldes?

2. Eine gegebene Linie a um ein Stück x so zu verlängern, daß das Quadrat der verlängerten Linie, vermehrt um das Quadrat von x dreimal so groß sei als das Quadrat der gegebenen Linie.

3. Die Seite eines Rhombus sei a, der Winkel desselben α: man soll um die Ecken desselben Kreise beschreiben, welche sich in ihrer Aufeinanderfolge berühren: wie groß ist das von den vier Kreisbogen begrenzte im Innern des Rhombus liegende Flächenstück? Welches ist das Resultat für $\alpha = 90^0$?

4. Die Kante eines Tetraeders sei a: wie groß ist: 1) der Inhalt des Tetraeders, 2) der Inhalt und die Oberfläche des Kegels, welcher dieselbe Höhe und den der Grundfläche eingeschriebenen Kreis zur Basis hat, 3) der Inhalt und die Oberfläche des Kegels, welcher dieselbe Höhe und den der Grundfläche umschriebenen Kreis zur Basis hat?

3. Den 19. und 20. Juli c. wurde unter dem Vorsitze desselben Königl. Kommissarius die mündliche Prüfung für den Michaelistermin abgehalten. Von 13 Abiturienten war 1 nach der schriftlichen Prüfung zurückgewiesen worden, 1 trat freiwillig zurück, 10 erhielten das Zeugniß der Reife, unter welchen 2 von der mündlichen Prüfung dispensirt wurden. Einer war durch Krankheit am regelmäßigen Arbeiten behindert worden und konnte deshalb das Zeugniß der Reife noch nicht erhalten.

Namen.	Alter.	Geburtsort.	Confession.	War in Prima.	Studium.	Ort.
1. Julius Brock	20 J.	Frauenburg	katholisch	2 J.	Theologie	Breslau.
2. Bernhard Hohmann	$21^1/_2$ J.	Wuslack, Kreis Heilsberg,	katholisch	3 J.	Theologie	Braunsberg.
3. Bernhard Hoosmann	19 J.	Mensguth, Kreis Mohrungen,	katholisch	2 J.	Postfach.	
4. Johann Kuhnigk	22 J.	Petersdorf, Kr. Heilsberg,	katholisch	2 J.	Theologie	Bonn.
5. Paul Lossau	19 J.	Mensguth, Kr. Ortelsburg,	katholisch	2 J.	Philologie	Breslau.
6. Julius Marquardt	18 J.	Plaßwich, Kr. Braunsberg,	katholisch	2 J.	Theologie	Münster.
7. Paul v. Pöllnitz	20 J.	Trier	katholisch	3 J.	Militair.	
8. Anton Ruhnau	$22^1/_2$ J.	Open, Kr. Braunsberg,	katholisch	2 J.	Medizin	Breslau.
9. Peter Stamm	17 J.	Trampenau, Kr. Marienburg,	katholisch	2 J.	Theologie u. Philologie	Breslau.
10. Ludwig Wronka	22 J.	Allenstein	katholisch	3 J.	Steuerfach.	

Prüfungsarbeiten:

a. Lateinischer Aufsatz: Quibus praecipue rationibus Themistoclis et Furii Camilli vitae similes fuerint.

b. Deutscher Aufsatz: Wodurch werden große und glücklich bestandene Gefahren die höchste Wohlfahrt für die Völker?

c. Mathematische Aufgaben:

1. Vier Gutsbesitzer A, B, C, D haben einem General zu Kriegszwecken ihre sämmtlichen Pferde zur Verfügung gestellt. Nach der ersten gewonnenen Schlacht schickt der General seinem Versprechen gemäß eine Anzahl erbeuteter Pferde, welche die Gutsbesitzer im Verhältniß der früher gelieferten Pferde unter sich vertheilen sollten. Weil sie aber über die Vertheilung nicht einig werden können, so übernimmt der Offizier, welcher ihnen die Pferde zugeführt hat, auch die Vertheilung und giebt an A $^3/_8$ der mitgebrachten Pferde weniger $^5/_8$ Stück, an B $^1/_3$ sämmtlicher Pferde weniger 4 Stück, an C $^1/_5$ sämmtlicher Pferde weniger $^3/_5$ Stück

und an D die noch übrigen. Jetzt erklären sich alle 4 mit der Vertheilung zufrieden, obwohl A allein mehr als 20 Pferde erhalten hat. Wieviele Pferde erhielt jeder und wieviele alle vier zusammen?

2. Wie groß ist der Winkel x, wenn $35 \sin^2 x + 8 \cos^2 x - 19 \sin 2x = 0$?

3. In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Loth ($h = 500$) aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gegeben. Man soll die fehlenden Stücke berechnen und das Dreieck unter der Bedingung konstruiren, daß das größere Segment (p) auf der Hypotenuse die mittlere Proportionale wird zwischen dem kleinern Segment (q) und der ganzen Hypotenuse (c).

4. Ein Draht, dessen Querschnitt ein Kreis mit dem Radius ϱ ist, wird zu einem kreisförmigen Ringe zusammengebogen, und der Kreis, welchen dabei die Achse des Drahtes bildet, hat den Radius r. Dieser Ring liegt auf einer horizontalen Ebene, und auf dem Ringe und zugleich auf der Ebene, beide berührend, ruht eine Kugel: wie groß ist der Radius R der Kugel?

V. Oeffentliche Prüfung.

Freitag den 9. August:

Um 7 Uhr Schlußgottesdienst mit Te Deum.

Vormittags: Sexta 8—9 Latein, Deutsch, Rechnen.
Quinta 9—10 Latein, Französisch, Geographie.
Quarta 10—11 Griechisch, Mathematik, Latein.
Tertia 11—12 Naturbeschreibung, Geschichte, Latein.
Probeschriften und Zeichnungen liegen zur Ansicht aus.

Nachmittags: Sekunda 2—3 Polnisch, Latein, Mathematik.
Prima 3—4 Griechisch, deutsche Literatur, Latein.
Beim Wechsel der Klassen Deklamationen; nach der Prima lateinische Rede des Primaners Langenickel.

Entlassung der Abiturienten durch den Direktor. Abschiedsrede des Abiturienten Lossau. Gesang. Klassifikation der Schüler und Censurakt in den einzelnen Klassen.

Schlußbemerkung.

Das neue Schuljahr beginnt Donnerstag den 19. September c. mit einem Gottesdienste um 8 Uhr Morgens. An demselben Tage findet die mündliche Nachprüfung der betreffenden Schüler auf dem Konferenzzimmer statt. Die schriftliche Prüfung muß an dem vorhergehenden Tage abgemacht sein.

Die Aufnahme neuer Schüler erfolgt Dienstag den 17. und Mittwoch den 18. September. Ohne Genehmigung des Direktors darf kein Schüler die Wohnung wechseln. Die Eltern werden auf das dringendste ersucht, bevor sie ein Quartier für ihre Söhne wählen, zuvor mit dem Direktor Rücksprache nehmen zu wollen.

Der Gymnasial-Direktor
Professor Braun.