(Zweiundvierzigster, der dritten Folge vierter)

Bericht

über die

zur ersten Ordnung gehörende

Real-Schule zu St. Johann,

mit welchem zu der

Freitag, den 27. März 1863, Vor- und Nachmittags,

zu haltenden

öffentlichen Prüfung

der Schüler dieser Unterrichts-Anstalt

ergebenst einladet

der

Direktor Dr. Löschin.

Inhalt:

Danzig.
Wedel'sche Hofbuchdruckerei.
1863.

I. Veränderungen im Lehrerpersonale und in der Klassenabtheilung.

Das zwei Monate vor dem Beginne des neuen Schuljahres durch den Tod des Herrn Dr. Gieswald vakant gewordene Lehramt der Naturwissenschaften wurde — wie es bereits während dieser zwei Monate geschehen war — bis zum Antritte des Nachfolgers, in Prima und Sekunda von dem Lehrer an der hiesigen Königlichen Provinzial-Gewerbeschule, Herrn Dr. Deneke, in Tertia und Quarta durch Stellvertretung von andern Lehrern der Anstalt, namentlich von Herrn Schultze, verwaltet, und die große Sorgfalt, mit welcher der Hochlöbliche Magistrat, als Patronatsbehörde, bei der Wiederbesetzung zu Werke ging, verzögerte den Eintritt des Nachfolgers bis zum Ablaufe des ersten Semesters. Es wurde nämlich bei der Konkurrenz sehr würdiger Bewerber aus dem In- und Auslande, deren eingesandte Zeugnisse sich über den Umfang und die Gründlichkeit ihres Wissens auf das Vortheilhafteste aussprachen, die Wahl eines engeren Ausschusses und die an denselben zu erlassende Aufforderung zu einer Probelektion für nöthig gefunden, welche drei der dazu Berufenen (am 30. und 31. Mai und 3. Junius) vor Mitgliedern des Magistrates und der städtischen Schuldeputation abhielten, und worauf dann der Lehrer an der Realschule (I. Ord.) zu Posen, Herr Dr. Bail zum Nachfolger des sel. Dr. Gieswald von der Patronatsbehörde ernannt und als solcher von dem Königl. hochverord. Provinzial-Schulkollegium bestätigt wurde. Auf Verlangen hat derselbe über seine persönlichen Verhältnisse und über seine bisherigen wissenschaftlichen Bestrebungen und Schriften gefälligst folgende Auskunft gegeben.

Theodor Bail, Sohn des in Schönau 1840 verstorbenen Bürgermeister Bail, wurde geboren am 5. Mai 1833 zu Hainau in Schlesien. Nachdem er die untern Klassen der Gymnasien zu Sagan und Hirschberg und in Breslau die Realschule am Zwinger bis zur Prima incl. besucht hatte, begab er sich auf das dortige Friedrichs-Gymnasium und von da Michaelis 1853 mit dem Zeugniß der Reife auf die Universität derselben Stadt, um sich besonders dem Studium der Naturwissenschaften zu widmen. Im Mai 1857 promovirte er zum Doctor der Philosophie und bestand im Dezember desselben Jahres das Examen pro facultate docendi. Er trat in das pädagogische Seminar ein und wurde als Lehrer an der neuen Realschule zu Breslau beschäftigt. In Folge literarischer Arbeiten, die er zum Theil noch während seiner Universitätsjahre veröffentlichte, erhielt er im Jahre 1858 von dem Oesterreichischen Ministerium für Kultus und Unterricht den Auftrag zu einer wissenschaftlichen Reise nach Tirol Während derselben nahm er die Stelle eines ordentlichen Lehrers an der Realschule I. Ord. zu Posen an, die er Michaelis 1862 mit seiner gegenwärtigen vertauschte.

Die getroffene Wahl kam auch dem dringend geäußerten Wunsche vieler Mitglieder der hiesigen, rühmlichst bekannten „Naturforschenden Gesellschaft“ entgegen, der ein so tüchtiger und fleißiger Mitarbeiter gar sehr willkommen war. Die feierliche Einführung desselben in die sechste ordentliche Lehrerstelle an der Realschule zu St. Johann erfolgte am 9. Oktober, bei welcher dann nicht unterlassen wurde, dem Herrn Dr. Deneke, der dabei zugegen war, den herzlichsten Dank für das der Schule mit so gutem Erfolge Geleistete im Namen derselben abzustatten.

Eine gleiche väterliche Fürsorge für die Anstalt hat der hochverehrte Patron derselben mit der bereitwilligsten Zustimmung der Verehrlichen Stadtverordneten-Versammlung geübt, als der Direktor, in Folge dringender Aufforderungen von Seiten des Königl. hochverord. Provinzial-Schulkollegiums, die Theilung der überfüllten Sechsten Klasse in zwei Parallelcötus und die Anstellung der dazu — und zugleich auch zur Uebernahme der Unterrichtsstunden, welche bisher von den bereits angestellten Lehrern über die von dem Reglement vom 9. Oktober 1859 vorgeschriebene Zahl hatten übernommen werden müssen — erforderlichen beiden wissenschaftlichen Hilfslehrer beantragte. Es wurde nicht nur die dazu erforderliche Gehaltssumme bewilligt, sondern zugleich auch eine der nun vermehrten Hülfslehrerstellen als eine ordentliche (achte) Lehrerstelle mit Gehaltserhöhung fixirt, was gleichfalls nicht ohne dankenswerthen Gewinn für die Anstalt bleiben konnte. — Für die eine der beiden neuen Hülfslehrerstellen, welcher der Unterricht in den mathematischen Wissenschaften zur Hauptaufgabe gemacht wird, ist bereits der, durch sein in Gymnasien und Realschulen benutztes Lehrbuch der Elementargeometrie rühmlichst bekannte bisherige Gymnasiallehrer zu Fraustadt, Herr Mehler, berufen worden, und auch die Besetzung der zweiten ist ihrer Erledigung nahe.

Die Sechste Klasse wird demnach bei dem Beginne des neuen Lehrkursus in zwei Cötus getheilt werden können.

II. Gegenstände des im verflossenen Lehrjahre ertheilten Unterrichtes.

Vorschule.

Zweite Klasse. Ordinarius: Herr Hugen.

Religion, 2 St. w. Herr Hugen. Erzählungen aus der biblischen Geschichte des A. Testamentes. Die Schüler lernten wöchentlich 2 Bibelsprüche, monatlich ein kurzes Kirchenlied und in den fünfmaligen Ferien des Jahres das erste Hauptstück des Lutherischen Katechismus aus den Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannis-Schule.

Lesen, 6 St. w. Herr Hugen. Erste Abtheilung: Leseübungen im Klein-Kinderfreunde von Dr. Löschin und Wiedererzählen des Gelesenen.

Deutsch und **Orthographie,** 4 St. w. Herr Hugen. Kopiren aus dem Lesebuche, Diktirübungen, Kennenlernen des Haupt-, Eigenschafts- und Zeitwortes, so wie der Beugung derselben, Memoriren kleiner Gedichte und Liederverse und Besprechungen darüber, so wie über die gelernten Bibelsprüche und Kirchenlieder.

Rechnen, 6 St. w. Herr Hugen. Numeriren. Die vier Species in unbenannten Zahlen. Kopfrechnen.

Schreiben, 6 St. w. Herr Hugen. Uebungen nach Vorschriften von der Hand des Lehrers in deutscher und lateinischer Schrift mit Anwendung der Carstair'schen Methode.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Uebungen zur Bildung des Gehörs und der Stimme. Leichte Lieder und Choräle wurden nach dem Gehör eingeübt. Der Text dazu wurde durch Vorsprechen auswendig gelernt.

Erste Klasse. Ordinarius: Herr Reinke.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. Erzählungen aus der biblischen Geschichte des Neuen Testaments. Lernlektionen s. Erste Vorschulklasse.

Katholischer Religionsunterricht, Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. S. Vierte Klasse A.

Deutsch, 8 St. w. a) Sprachunterricht, 2 St. w. Herr Reinke. Die Lehre von den Begriffswörtern, deren Flexion; der Gebrauch des Kasus durch mündliche und schriftliche Beispiele erläutert. Uebungen in der Orthographie und im mündlichen Vortrage. — b) Leseübungen, 6 St. w. Herr Reinke, einzeln und im Chore. Das Gelesene wurde erklärt und von den Schülern wiedererzählt. Benutzt wurde der Klein-Kinderfreund von Dr. Löschin.

Latein, 1 St. w. Herr Reinke. Leseübungen, Abschreiben und Auswendiglernen einiger Vokabeln aus Herrmanns Lesebuche.

Rechnen, 6 St. w. Herr Reinke. Die vier Species in unbenannten Zahlen gründlich wiederholt, in benannten Zahlen die Resolution, Reduktion, Addition Subtraktion und Zeitrechnung im Kopfe und schriftlich eingeübt.

Geographie, 2 St. w. Herr Hugen. Die Vorbegriffe zur Geographie aus dem ersten und zweiten Kursus von Voigts Leitfaden wurden durchgenommen und die Länder der östlichen Halbkugel mit besonderer Berücksichtigung Europas an der Karte eingeübt.

Schreiben, 6 St. w. Herr Reinke. Uebungen nach Vorschriften an der Wandtafel von der Hand des Lehrers. Täglich häusliche Uebungen.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Reinke. Freies Handzeichnen nach Bühlers „Hundert Vorlegeblättern."

Singen, 1 St. w. Herr Reinke. Fortgesetzte Uebungen zur Bildung des Gehörs. Einstimmige Lieder nach dem Gehör gelernt, wobei Erks und Graefs Liederkranz, Sostmanns Singweisen und die Melodien von Hästers und Dreifels Lesebüchern benutzt wurden. Der Text wurde meistens auswendig gelernt. Choräle nach Dr. Kniewel.

Realklassen.

Sechste Klasse. Ordinarius: Herr Real-Schullehrer Schultze.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pred.-Amts-Kand. Hardt. Die biblische Geschichte des A. T. nach Gossel. Beispiele aus der Profangeschichte, Sprüche, Lieder, das erste und zweite Hauptstück gelernt.

Katholischer Religionsunterricht, Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. S. Vierte Klasse A.

Deutsch, 4 St. w. Herr Realschullehrer Schmidt. Die Theile des einfachen Satzes; das Verbum und die Präpositionen; Uebungen im Lesen; Deklamiren; orthographische Uebungen und schriftliche Arbeiten.

Latein, 8 St. w. Herr Realschullehrer Schmidt. Die 5 Deklinationen, das Verbum Sum, die regelmäßigen Conjugationen. Zahlwörter, Pronomina; Uebersetzung der betreffenden lateinischen und deutschen Stücke im Bleske. S. 1—160.

Rechnen, 5 St. w. Herr Schultze. Wiederholung der vier Species in unbenannten Zahlen. Die vier Species in benannten Zahlen. Zeitrechnung. Vorbereitung zum Bruchrechnen. Addition der Brüche.

Geographie, 2 St. w. Herr Schultze. Der erste Kursus von Voigts Leitfaden wurde eingeübt. Heimathskunde. Anleitung zum Kartenzeichnen.

Geschichte, 1 St. w. Herr Schultze. Sagen aus der griechischen, römischen und deutschen Geschichte.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Schultze. Im Sommer Pflanzen, im Winter Mineralien.

Schreiben, 3 St. w. Herr Krahn. Deutsche und lateinische Schrift. Taktschreiben.

Singen, 1 St. w. Herr Reinke. Kenntniß der Noten; Bildung der Tonleiter; Treffübungen nach Böhnickes Chorgesang-Schule. Im Uebrigen wie in der ersten Vorschulklasse.

Zeichnen, 2 St. w. Einfache gradlinige Figuren.

Fünfte Klasse. Cötus A. Ordinarius: Herr P.-A.-Kand. Hardt.

Evangelischer Religionsunterricht. 3 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Leben und Lehre Jesu Christi. Bibelkunde. Sprüche, Lieder, die 3 ersten Hauptstücke.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. S. Vierte Klasse.

Deutsch, 4 St. w. Herr R.-Sch.-L. Schmidt. Der einfache und der zusammengesetzte Satz. Syntax der Kasus. Lesen. Kleinere schriftliche Arbeiten.

Latein, 6 St. w. Herr Oberlehrer Küster. Die Formenlehre nach dem Elementarbuch von Bleske. Uebersetzung der Uebungsstücke, die deutschen als wöchentliche Exercitien.

Französisch, 5 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Plötz I. Kursus bis zu den Conjugationen. Wöchentlich ein Exercitium und Extemporale.

Rechnen, 4 St. w. Herr Schultze. Wiederholung der 4 Species in benannten Zahlen nach Stubba Heft 3 und 4. Die Bruchrechnung und einfache Regel de tri.

Geographie, 2 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Voigt Kursus I. und II., Allgemeines über Deutschland und Preußen. Versuche im Kartenzeichnen.

Geschichte, 1 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Mythologie und Biographien aus der alten Geschichte.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Schultze. Im Sommer Botanik. Linnéisches System. Im Winter Säugethiere und Vögel.

Schreiben, 3 St. w. Herr Krahn. Deutsche und lateinische Schrift. Schönschreiben.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Gradlinige Aufrisse von Gegenständen, einfache Ornamente.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Die weniger begabten Schüler beider Cötus der V. und VI. Klasse waren zu einer Singabtheilung kombinirt. Melodik, Rhythmik, Dynamik wurden erklärt und geübt, die bekannten Dur- und Moll-Tonarten gelernt. Einübung ein- und zweistimmiger Lieder nach Erks Liederkranz I. Theil. Choräle nach Dr. Kniewel.

Fünfte Klasse. Cötus B. Ordinarius: Herr Oberlehrer Stobbe.

Evangelischer Religionsunterricht, 3 St. w. Herr P.-A.-Kand. Hardt. Wie Cötus A.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. S. Vierte Klasse A.

Deutsch, 4 St. w. Herr R.=Sch.=L. Schmidt. 3 St. wie in Cötus A. Herr Schultze 1 St. w. Uebungen im Wiedererzählen.

Latein, 6 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Wiederholung und Erweiterung des Pensum von Sexta. Ableitung der Conjugationsformen. Verba anomala. Lectüre aus Bleske 2. Cursus mit sorgfältiger Uebung im Analysiren und Construiren. Memoriren von Vokabeln und einigen Fabeln.

Französisch, 5 St. w. Herr P.=A.=Kand. Hardt. S. Cötus A.

Rechnen, 4 St. w. Herr P.=A.=Kand. Hardt. Bruchrechnen, einfache, grade und umgekehrte Regel de tri nach Stubba III. und IV.

Geschichte, 1 St. w. Herr Schultze. Wie in Cötus A.

Geographie, 2 St. w. Herr Schultze. Voigt 2. Cursus, Wiederholung des ersten.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Schultze. Wie in Cötus A.

Schreiben, 3 St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. S. Cötus A.

Vierte Klasse. Cötus A. Ordinarius: Herr Oberlehrer Küster.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Ausführliche Erläuterung der zehn Gebote und des Vater Unser. Uebungen im Nachschlagen der Bibel, Bibelsprüche und Kirchenlieder wurden aus den „Lernaufgaben u. s. w." (S. Zweite Vorschulklasse) memorirt.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. kombinirt mit Vorschulkl. I., VI., V. A. u. B. und IV. A. und B. Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. a. Biblische Geschichte bis zur Regierung Ahabs, nach dem Handbuche von Mathias. — b. Die Glaubens= und Sittenlehre nach dem Diöcesan=Katechismus, bis zum IV. Hauptstücke.

Deutsch, 3 St. w. Herr Oberlehrer Küster. Die Lehre von den Satztheilen, von der Eintheilung der Sätze und deren Verbindung, von der Interpunktion; Stylübungen; — Memoriren von Gedichten und Deklamation.

Latein, 6 St. w. Herr Oberlehrer Küster. Davon 3 St. Grammatik. Repetition des Pensums der vorigen Klasse und Erweiterung desselben. Exercitia und Extemporalia zur Einübung der wichtigsten syntactischen Regeln. Lectüre 3 St. Aus Corn. Nepos: Themistocles, Cimon, Alcibiades, Dion. Im W. 1 St. Phädrus Fabeln 10—19. (Ausgabe von Raschig.)

Französisch, 5 St. w. Herr Oberlehrer Küster. In 3 St. wurden aus Plötz's Elementarbuche Kursus I, Lekt. 40—72. durchgenommen, die beigefügten Abschnitte der Grammatik erlernt und die deutschen Uebungsstücke zu Exercitien benutzt. 2 St. Lectüre der leichteren Stücke aus Mager. Das Memoriren von kleineren Gedichten wurde zu Ferienaufgaben benutzt.

Mathematik, 6 St. w.

a) Praktisches Rechnen 2 St. w. Herr R.=Sch.=L. Schmidt. Die Lehre von den geometrischen Proportionen und ihre Anwendung auf Zins= und Gesellschafts=Rechnung, und Stubba 5. und 6. Heft.

b) Arithmetik 2 St. w. Herr Dr. Kayser. Theilbarkeit der Zahlen, Dezimalbrüche, Proportionen, entgegengesetzte Größen und Anfänge der Buchstabenrechnung.

c) Geometrie 2 St. Herr Dr. Kayser. Durchnahme der Sätze über die Winkel, Parallellinien, Kongruenz der Dreiecke, Vierecke nebst Aufgaben nach „Mehlers Hauptsätze der Elementar=Mathematik" § 1—47.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Aus Voigts drittem Kursus der allgemeine Theil und Europa. Repetition des 2. Kursus.

Geschichte, 2 St. w. bis Michaeli Herr Dr. Panten, seitdem Herr P.=A.=Kand. Hardt. Alte Geschichte nach den Tabellen I—III. von Hirsch.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Schultze. Im Sommer die niederen Thiere. Im Winter Herr Dr. Bail. Repetition der Botanik. Allgemeiner Ueberblick über das Thierreich. Eingehende Betrachtung der Säugethiere.

Schreiben, 2 St. w. Herr Krahn. Deutsche und lateinische Schrift. Schnellschreiben.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Ornamente und Gefäße.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. S. Fünfte Klasse Cötus A.

Vierte Klasse. Cötus B. Ordinarius: Herr Dr. Brandt.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Mit Cötus B. kombinirt.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. S. Cötus A.

Deutsch, 3 St. w. Herr Schultze. Wie Cötus A.

Latein, 6 St. w. Herr Dr. Brandt. Lectüre 2 St. Nepos: Miltiades, Themistocles, Pausanias. Grammatik 2 St. Gründliche Repetition des Quinta-Pensums. Nach Siberti-Meiring der Accus. c. Inf., der Ablat. absol. die wichtigsten Conjunctionen. Cap. 87—90. Schriftliche Analyse der Beispiele. 2 St. Exercitien und Extemporalien, Correctur und theilweise Memoriren derselben.

Französisch, 5 St. w. Herr Dr. Brandt. Plötz Kursus I. Lekt. 56. bis zu Ende. Die regelmäßigen und einige unregelmäßigen Verben geübt. Wöchentlich ein Exercitum und Extemporale, leichtere lateinische Sätze ins Französische übersetzt.

Mathematik, 6 St. w.

a) Rechnen 2 St. w. Herr R.-Sch.-L. Schmidt. Wie Cötus A.

b) Arithmetik 2 St. w. Derselbe. Decimalbrüche und Buchstabenrechnung. Beispiele aus Meyer Hirsch.

c) Geometrie 2 St. w. Herr Dr. Kayser. Wie in Cötus A.

Geographie, 2 St. w. Herr Schultze. Wie Cötus A.

Geschichte, 2 St. w. Herr Dr. Brandt. Wie in Cötus A.

Naturgeschichte, 2 St. w. S. Herr Schultze. W. Herr Dr. Bail. Wie in Cötus A.

Schreiben, 2 St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. S. Fünfte Klasse Cötus A.

Dritte Klasse. Cötus A. Ordinarien: Herr Dr. Laubert und Herr Dr. Bail.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Systematisch zusammenhängender Vortrag der christlichen Glaubenslehre und zwar mit Rücksicht auf den Katechismus und auf die biblische Geschichte. Memorirt wurden einige Kirchenlieder und wiederholt die aus den „Lernaufgaben" memorirten Sprüche.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. S. Erste Klasse.

Deutsch, 3 St. w. Herr Dr. Brandt. Gedichte Schiller's, Göthe's, Uhland's u. A. wurden memorirt, vorher dem Inhalte und der Form nach genau besprochen. — Anfangsgründe der Metrik. — Aufsätze, alle 3 Wochen einer, korrigirt und besprochen. Daran knüpfte sich die Grammatik. Vorträge.

Latein, 5 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. 1. Lektüre (2 St.) Aus dem Cornelius Nepos: Eumenes. — Caesar de bello Gall. III. mit schriftlicher Uebersetzung. Phädrus (Ausgabe von Raschig) Fab. 41—50., wovon einige gelernt wurden. — 2. Grammatik (2 St.) Siberti-Meiring Kap. 82—90. (Kasuslehre) ausführlich. Das Wichtigste aus Kap. 97—104. Exercitien und Extemporalien (1 St.)

Französisch, 4 St. w. Herr Dr. Brandt. 1. Lektüre (2 St.) Aus Magers Lesebuch I. Kursus prosaische und poetische Stücke, von denen Mehreres gelernt wurde. — 2. Grammatik (2 St.) Orthographische Uebungen, Extemporalien und Exercitien zur Anwendung der unregelmäßigen Verben, nach Plötz II. Kursus, Lekt. 1—35. Retroversion passender Sätze aus dem Lateinischen in's Französische. Gallicismen nach Plötz. Eine Komödie recitirt.

Englisch, 4 St. w. Herr Dr. Laubert. An, der englischen Geschichte entnommenen, Lesestücken wurden die Regeln der Aussprache und der Rechtschreibung, sowie die Grammatik behandelt und damit Uebungen im Hören, Sprechen und Uebersetzen verknüpft. Wochenweise vorgesprochene leichtere Sätze wurden auswendig gelernt, eine kleine Komödie recitirt. Zimmermann I. Kursus S. 1—50. durchgenommen und zu Exercitien benutzt.

Mathematik, 6 St. w.

a) Praktisches Rechnen 2 St. Herr Oberlehrer Gronau. Regula multiplex, Kettenregel, Zins-, Diskonto-, Prozent- und Alligationsrechnungen wurden nebst andern Aufgaben durchgenommen.

b) Arithmetik 2 St. Derselbe. Dezimalbrüche, entgegengesetzte Größen, Einschließungszeichen, Buchstabenrechnung, Proportionslehre, Potenzen, Quadratwurzeln, Gleichungen des ersten Grades und arithmetische Progressionen bildeten den Gegenstand des Unterrichts.

c) Geometrie 2 St. Derselbe. Nach Mehlers Lehrbuche wurde die Planimetrie behandelt mit Rücksicht auf Congruenz, Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Voigt's Leitfaden, Kursus IV., Europa wurde gelernt. Die betreffenden Abschnitte aus Kursus III. wurden wiederholt. Uebungen im Kartenzeichnen nach Vorbildern zu Hause, aus dem Gedächtnisse in der Klasse.

Geschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Brandenburgisch-Preußische Geschichte. Erlernung von Geschichtstabellen.

Naturgeschichte, 2 St. w. Im Sommer (Herr Schultze) Familien des natürlichen Pflanzensystems. Im Winter (Herr Dr. Bail) Mineralogie, namentlich Krystallographie nach vielen von den Schülern verfertigten Modellen. Repetition der Botanik und Zoologie.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Freies Handzeichnen: Konturen und ausnahmsweise auch schattirt ausgeführte Zeichnungen. Linearzeichnen. Planimetrische Aufgaben. Elemente der Perspektive.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Kombinirt mit V. A. B., theils auch mit I., II., III. A.

Dritte Klasse. Cötus B. Ordinarius: Herr Oberlehrer Gronau.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Kombinirt mit Cötus A.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. S. Erste Klasse.

Deutsch, 3 St. w. Herr Oberlehrer Küster. In 1 St. wurde den Schülern ein kurzer Abriß der Metrik gegeben, ausgewählte Gedichte Schiller's nach Inhalt und Versmaß erläutert, memorirt und deklamirt. 1 St. wurde zu Stylübungen, 1 St. zur Uebung im freien Vortrage verwandt.

Latein, 5 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Wie in Cötus A.

Französisch, 4 St. w. Herr Dr. Brandt. Wie in Cötus A.; doch wurden hier die Lektionen B. im Plötz als häusliche Exercitien gearbeitet.

Englisch, 4 St. w. Herr Dr. Laubert. Wie in Cötus A.

Mathematik, 6 St. w. Herr Oberlehrer Gronau.

a) Praktisches Rechnen
b) Arithmetik } wie in Cötus A.
c) Geometrie 2 St.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Wie in Cötus A.
Geschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Wie in Cötus A.
Naturgeschichte, 2 St. w. Wie in Cötus A.
Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Wie in Cötus A.
Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Kombinirt mit V. A. u. B., theils auch mit I., II., III. A.

Zweite Klasse. Ordinarius: Herr Oberlehrer Dr. Panten.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Die christliche Glaubenslehre nach der Augsburgischen Confession. Das Evangelium des Johannes wurde theilweise gelesen und erläutert. Das Memorirte wurde gelegentlich wiederholt.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. S. Erste Klasse.

Deutsch, 4 St. w. Oberlehrer Dr. Panten. Dispositionen, Aufsätze. Lektüre ausgewählter Stücke der epischen Poesie. Ueber neuhochdeutsche Orthographie, Metrik, metrische Uebungen.

Latein, 4 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. 1. Lektüre 3 St. Caesar bell. Gall. V. VI. Ovid Metam VII., 1—350. 2. Grammatik 1 St. Exercitien und Extemporalien zur Einübung der Syntax nach Siberti-Meiring Kap. 91—104.

Französisch, 4 St. w. Herr Dr. Laubert. Grammatik nach Plötz II. Kursus Seite 1—200. repetirt, Extemporalien und Exercitien damit verbunden. Vorgelesene Artikel übersetzt. Uebungen im Vortrage. Aus Herrig's Lesebuch Stücke von Constant, Hugo, Mery, Viennet, Voltaire, Mignet &c. übersetzt, französisch interpretirt und theilweise memorirt. Ein Akt eines Lustspiels von Molière recitirt.

Englisch, 3 St. w. Dr. Laubert. Zimmermann's Grammatik II. Kursus 1. Abschnitt wurde durchgenommen, Exercitien und Extemporalien damit verbunden. Längere, wöchentlich vorgesprochene Sätze und Perioden auswendig gelernt. Aus Scott's tales of a grandfather Seite 124—212. übersetzt, englisch interpretirt und theilweise memorirt.

Mathematik, 5 St. w. Herr Oberlehrer Gronau.

a) Arithmetik 3 St. Das Ausziehen der Kubikwurzeln, die Potenzenlehre für negative und gebrochene Exponenten, die Logarithmen, die Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen, die quadratischen Gleichungen und die geometrischen Progressionen boten den Lehrstoff dar. Von praktischen Rechnungen sind besonders die logarithmisch behandelte Zins von Zins-Rechnung und die Amortisationsrechnung namhaft zu machen.

b) Geometrie 2 St. Beendigung der Planimetrie. Stereometrie nach Koppe. Lösung geometrischer Aufgaben.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Australien, Afrika, Asien mit besonderer Rücksicht auf Entdeckung, Bevölkerung, Produkte und Verkehrsverhältnisse. Repetition von Deutschland nach Voigt Kursus III., IV. Zur Prüfung des Gelernten wurden von den Schülern Karten aus dem Gedächtnisse gezeichnet.

Geschichte, 3 St. w. der Direktor. Die Geschichte der westeuropäischen Staaten bis zur französischen Revolution mit überall geschehenen Rückblicken auf die Geschichte der übrigen Staaten, vornehmlich Deutschlands und des Vaterlandes.

Naturwissenschaften, 6 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Bail.

a) Naturgeschichte 2 St. Anatomie und Physiologie der Pflanzen, Thiere und Menschen. Wiederholung der drei Naturreiche.

b) Chemie 2 St. Die Metalloide durch Experimente erläutert. Anfangsgründe der Stöchiometrie.

c) Physik 2 St. Wärme, Magnetismus und Electricität durch Experimente erläutert.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Freies Handzeichnen. Schattirt ausgeführte Zeichnungen mit Anwendung verschiedener Zeichenmaterialien. Einzelne Versuche im Zeichnen nach der

Natur, in der Schnellmalerei und im Malen mit Wasserfarben. Linearzeichnen. Perspektivisches Zeichnen der von ebenen und gekrümmten Flächen begrenzten Körper. Geometrische Construction der in der Technik und Baukunst gebräuchlichen Kurven.

Singen, 2 St. w. Herr Reinke. Die geübteren Schüler aus V. A. u. B., IV. A. u. B. und III. A. u. B. u. II. waren zu einer Singabtheilung vereinigt, in welcher der vierstimmige Chorgesang sorgfältig geübt wurde. Es wurden aus Bönicke's Chorgesangschule III. Kursus, aus dem zweiten Hefte von Erk's und Graef's Sängerhain vierstimmige Choräle und Lieder, so auch Hymnen eingeübt.

Erste Klasse. Ordinarius: Der Direktor.

Evangelischer Religionsunterricht, 2 St. w. der Direktor. Bei der Geschichte der Entstehung, Ausbildung und der Unterscheidungslehre der verschiedenen christlichen Kirchen und Sekten eine genauere Begründung des evangelischen Lehrbegriffes in Betreff dieser Unterschiede. Zweite Hälfte vom Tode Luthers bis auf die neueste Zeit. Gelesen wurden die wichtigsten Kapitel aus den Paulinischen Briefen.

Katholischer Religionsunterricht, 2 St. w. mit II. und III. kombinirt. Herr Pfarrer Lic. Dr. Redner. a. Kirchengeschichte in Lebensbildern. b. Von dem apostolischen Glaubensbekenntnisse nach dem großen Kathol. Katechismus von Deharbe.

Deutsch, 4 St. w. und zwar a. (2 St. w.) Herr Oberlehrer Dr. Panten. Dispositionen. Aufsätze. Lektüre ausgewählter Dramen. (Göthe's Tasso u. Egmont, Lessing's Nathan, Shakspeare's Coriolan). b. Geschichte der deutschen Nationalliteratur seit dem Auftreten der Romantiker. (2 St.) der Direktor. Als Leitfaden wurde dabei der Grundriß der „Geschichte der deutschen Literatur von O. Lange" benutzt. Zur Uebersicht des Zusammenhanges und der Zeitfolge diente eine besondere Rubrik in den von dem Direktor entworfenen historischen Tabellen: „Chronologische Memoranda u. s. w." S. zweite Klasse.

Latein, 3 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Virgil Aen. VII. VIII. IX., Livius XXI.

Französich, 4 St. w. Herr Dr. Laubert. Repetition der Plötz'schen Grammatik kapitelweise in französischer Sprache. Vorgelesene Artikel übersetzt. Exercitien und Extemporalien. Schiller's Wilhelm Tell, 3 Akte, ins Französische übersetzt. Aus Herrig Stücke von Racine, (2 Akte der Athalie) Nodier, Lamartine, Lacretelle, Delavigne französisch interpretirt, theilweise ins Englische übersetzt. Vorträge. Freie Aufsätze: Napoléon III., les Pays bas au 18 siècle, Jeanne d'Arc, la France sous Louis 18. etc.

Englisch, 2 St. w. Herr Dr. Laubert. Die Grammatik capitelweise wiederholt in englischer Sprache. Ways and means, Lustspiel von Colman, wurde übersetzt und englisch interpretirt. Schmick's sketches from English history theilweise ins Französische übersetzt und zu Sprechübungen benutzt. Scenen aus Richard III. gelesen. Wochenweise vorgesprochene Dialoge wurden memorirt, Artikel vorgelesen. Uebungen im Vortrage. Freie Aufsätze: Cromwell, Mary Stuart, Wellington, the American question etc.

Mathematik, 5 St. w. Herr Oberlehrer Gronau.

a) Arithmetik 2 St. Quadratische Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen. Diophantische Gleichungen, arithmetisch und trigonometrisch. Wiederholung des binomischen Lehrsatzes und verschiedener Reihenentwickelungen. Rentenrechnung.

b) Geometrie 3 St. Wiederholung der Trigonometrie und Stereometrie. Lösung planimetrischer Aufgaben. Dann Kegelschnitte.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Repetition der außereuropäischen Erdtheile mit besonderer Rücksicht auf Bevölkerung, Produkte und Verkehrsverhältnisse.

Geschichte, 2 St. w. der Direktor. Die Geschichte der europäischen Staaten seit der französischen Revolution mit wiederholenden Rückblicken auf das übrige, bereits durchgegangene Feld der Geschichte. Zweite Hälfte.

Naturwissenschaften, 6 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Bail.

a) Physik (4 St.) Mechanik und physikalische Aufgaben 2 St. Akustik und Optik 2 St. Wiederholung der anderen Theile der Physik. Erläuterungen durch Experimente. Physikalische Aufgaben.

b) Chemie (2 St.) Metalle und einzelne Theile der organischen Chemie durch Experimente erläutert. Wiederholung der Metalloide.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Krahn. Freies Handzeichnen wie in der zweiten Klasse: Linearzeichnen. Practische Anwendung der Perspective beim Zeichnen nach der Natur, Geometrische Projectionslehre mit Einschluß der Durchschnitte ebener und gekrümmter Flächen und der von solchen eingeschlossenen Körper. Nivelliren unter gefälliger Leitung des Herrn Wegebaumeister Hartwig.

Den Unterricht in der **polnischen Sprache** ertheilte Herr Makowski vier Mal wöchentlich von 12 bis 1 Uhr Mittags. Die daran theilnehmenden Schüler (etwa 40) aller Klassen wurden nach Maßgabe ihrer Fähigkeiten und Fortschritte in zwei Abtheilungen, und zwar jede derselben 2 Stunden wöchentlich, unterrichtet. Die zweite (untere) Abtheilung lernte aus dem Uebungsbuche Wypis die richtige Aussprache, das korrekte Lesen und die Anfangsgründe der Grammatik, memorirte Vokabeln und versuchte sich in leichten Uebersetzungen der Lesestücke des genannten Buches. Die erste benutzte das Lehrbuch von Poplinski zum Einüben der nothwendigsten grammatischen Regeln und zum Uebersetzen schwieriger Stücke. In beiden Abtheilungen so viel als möglich Sprechübungen.

Ein Ministerialerlaß vom 10. Sept. 1860 und eine in Folge desselben an die Schuldirektoren in Preußen ergangene Verordnung des Königl. Hochverordneten Provinzial-Schulkollegiums zu Königsberg vom 19. April 1861, der sich eine Verfügung des Hochlöblichen Magistrates vom 19. April 1862 anschloß, haben in dem Unterrichte im **Turnen** sehr wesentliche Reformen vorgenommen, und zwar 1) in der Beschaffenheit des Unterrichts selbst, wo die Bemerkung gemacht worden ist, daß „das Geräthturnen nebst einer bloßen materiellen Uebung der Körperkraft zu sehr in den Vordergrund getreten sei", weshalb denn verfügt wird, „daß zunächst durch Befolgung eines rationellen Systemes der Gymnastik Abhülfe zu schaffen und namentlich dahin zu streben sei, daß die Frei-, Ordnungs- und taktogymnastischen Uebungen, theils zur Erweckung eines Gemeingefühles, indem sich die Schüler als Glieder eines geschlossenen Ganzen erkennen lernen, theils zur Vorbereitung auf den künftigen Militairdienst, ihre angemessene Berücksichtigung finden." — Sodann 2) in der Art der Benutzung dieses Unterrichtes von Seiten der Schüler, welche hinfort nicht mehr eine fakultative, dem Willen der Eltern anheimgestellte, sondern eine obligatorische, jedem die Schule Besuchenden, der nicht durch ärztliches Zeugniß seine Unfähigkeit zu diesen Uebungen nachweiset, zur Pflicht gemachte sein soll; — und 3) in Betreff der Folgen, die für den Schüler aus dieser Benutzung hervorgehen werden, wovon es heißt: „Es ist nicht außer Acht zu lassen, daß bei der erweiterten Bedeutung, welche der gymnastische Unterricht in der Jugenderziehung auf Allerhöchste Anordnung in Verbindung mit der Vorbereitung auf die militairische Ausbildung gegeben werden soll, baldigst Maßregeln werden getroffen werden, in deren Folge Versäumnisse in der gymnastischen Ausbildung für die betreffenden Individuen materielle Nachtheile mit sich führen müssen, wie z. B. die Frage zu entscheiden ist, ob weiterhin die Berechtigung zum einjährigen freiwilligen Militairdienste nicht von nachgewiesener erfolgreicher gymnastischer Uebung abhängig zu machen ist. Ebenso wird, sobald nur an den betreffenden Anstalten der Turnunterricht vollständig organisirt worden ist, die von den Schülern für den gymnastischen Unterricht bewiesene Theilnahme und die erlangte Fertigkeit bei Ertheilung des Zeugnisses der Reife in Betracht zu ziehen und in demselben zu erwähnen sein." — Durch diese Aufnahme des Turnenunterrichtes in die Zahl der obligatorischen Lehrgegenstände der Schule trat derselbe gleich den übrigen unter die unmittelbare Aufsicht des Direktors der Anstalt und in Betreff der Externa unter die Fürsorge der Schuldeputation, weshalb denn der Turnrath, der diese Aufsicht und Fürsorge bis dahin geübt hatte, seine Wirksamkeit für beendigt erklärte und sich auflöste. — Das, von Demselben zum letzten Male geordnete und geleitete, Turnfest fand am 9. Julius 1862 statt und es wurden nach Beendigung der Uebungen auch den St. Johannis-Schülern: A. Neumann, Momber, Muskate, Jordan, Fünkenstein, Auerbach, Herrmann und Lichtenfeld Prämien zuerkannt.

In Folge einer an die Königl. Hochverordneten Provinzial-Schulkollegien erlassenen Verfügung des Königl. Hohen Ministeriums der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten vom 29. Juli 1862, welche durch die Bemerkung motivirt wird: „Es sei neuerdings von verschiedenen Seiten der Wunsch laut geworden, daß die Stenographie in den Lehrplan der höheren Schulen aufgenommen werden möchte, auch sei die Sache in Folge eingegangener Petitionen bereits Gegenstand der Landtagsverhandlungen geworden", ist von der genannten Hochverordneten Provinzialbehörde zu Königsberg an die Direktoren der höheren Lehranstalten der Provinz die Anweisung (d. d. 9. Aug. 1862) ergangen, Bericht darüber zu erstatten: „ob und in welcher Weise bisher Schüler dieser Anstalten Unterricht in der Stenographie erhalten haben", und sich gutachtlich darüber zu äußern, ob es — — räthlich, eventl. in welcher Weise es ausführbar sei, den Unterricht in der Stenographie als fakultativen Lehrgegenstand dem Unterrichtsplane der Anstalten — — einzufügen. — Der Direktor der St. Johannis-Schule hat dieser verehrlichen Verfügung durch folgende ganz ergebenste Erklärung ein schuldiges Genüge gethan:

„Es ist bisher weder von Seiten der städtischen Schulbehörde und des Lehrerkollegiums, noch von Seiten der Eltern der Schüler und dieser Schüler selbst der Wunsch, den genannten Unterricht in den Schulplan aufgenommen zu sehen, ausgesprochen und zur Ausführung desselben irgend ein vorbereitender Schritt gethan worden. Nur hat der hiesige Stenographenverein sich mehrmals dazu erboten, denjenigen Schülern der höheren Lehranstalten, die den Wunsch hegen, sich in dieser Art der Schreibekunst unterrichten zu lassen, dazu die Gelegenheit zu verschaffen und die — weniger in Betreff des Geld- als des Zeitaufwandes Bedenken erregenden — Bedingungen aufgenannt, unter welchen den sich freiwillig dazu Meldenden ein solcher Unterricht ertheilt werden könnte. Einige Primaner und Sekundaner der St. Joh. Schule sind mit meinem Vorwissen diesem Vereine beigetreten, und einer der ersteren hat das in demselben Erlernte in einigen Mussestunden 5 bis 6 seiner Kommilitonen mitgetheilt. Weiter ist bis jetzt die Sache nicht gediehen, auch zu ihrer Förderung von Seiten der Schule nichts geschehen, und zwar darum, weil bei der großen Zahl der in den oberen Klassen zu behandelnden Lehrgegenstände mit der Zeit, welche die Schüler theils auf ihre häuslichen Arbeiten verwenden, theils zur nothwendigen Erholung übrig behalten müssen, sehr sparsam umgegangen werden muß. Sie ihnen durch Aufnahme noch mehrerer Lehrobjekte verkürzen zu wollen, könnte nur in einer fast zur Nothwendigkeit gewordenen Nützlichkeit des neuaufzunehmenden Gegenstandes eine Rechtfertigung finden, und eine so entschiedene und bedeutende möchte hier wohl nicht vorhanden sein. Direkte Benutzung bei dem vortragenden Schulunterrichte (namentlich in Betreff der Realien) wäre kaum zu wünschen und also auch nicht zu fördern, da ein so wörtliches und daher leicht gedankenlos werdendes Nachschreiben des Vorgetragenen dem mit nöthiger Aufmerksamkeit, verständiger Auswahl und gewandtem Zusammenfassen des Wichtigsten und Wesentlichsten verbundenem Niederschreiben wohl eher nachzusetzen als vorzuziehen sein möchte. Für das spätere praktische Leben, besonders in gewißen Berufsarten und Geschäftskreisen, mag es allerdings wohl sehr brauchbar und nützlich sein; die Schule kann ja aber doch nicht Alles lehren, was sich im Leben mit Vortheil gebrauchen läßt.

Ich würde demnach mich unmaßgeblich für die Ueberlassung dieses Lehrgegenstandes an den Privatunterricht erklären, wobei dann allerdings die Schule für die ihr Angehörenden mit Lokalität u. d. gl. sowie auch mit gehöriger Beaufsichtigung zu Hülfe kommen könnte."

Ein weiterer Bescheid ist in dieser Angelegenheit noch nicht erfolgt.

Beaufsichtigung und Nachhülfe bei ihren Schularbeiten können die Schüler von den Herren Real-Schullehrer Hardt, Real-Schullehrer Schultze, Hugen und Reinke erhalten; sowie auch Privatunterricht im Zeichnen und Schreiben von Herrn Krahn und Gesang- und Musik-Unterricht von Herrn Reinke.

III. Lehrmittel in den Händen der Schüler.

In **Prima:** Christliche Sittenlehre. Für die St. Johannis-Schule. Von dem Direktor derselben Dr. Löschin. Christliche Glaubenslehre nach der Augsburgischen Konfession, für die St. Johannisschule (von Dr. Löschin). — Siberti-Meiring's Lateinische Grammatik. — Virgil. Aeneis. — Herrig: la France littéraire. Ploetz franz. Grammatik, 2ter Cursus. — Shakspeare Schmick: sketches from English history. — Chronologische Memoranda, für Prima und Sekunda der St. Johannisschule. (Von Dr. Löschin). — Kartons und Konturen zur weiteren Ausführung bei dem Geschichtsunterrichte in Prima und Sekunda der St. Johannisschule, von Dr. Löschin. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterrichte. — Atlas von Voigt oder Sydow. — Naturgeschichte von Neumann. Chemie von Horning. Physik von Koppe. — Koppe's Planimetrie und Stereometrie. La Lande's mathematische Tafeln.

In **Sekunda:** Christliche Sittenlehre. Für die St. Johannisschule. Von dem Direktor derselben Dr. Löschin. Christliche Glaubenslehre nach der Augsburgischen Confession. — Siberti-Meiring's lateinische Grammatik. —Caesar bell. Gall., Ovid. Metam. ed. Siebelis. — Herrig: la France littéraire. — Plötz: Elementargrammatik der franz. Sprache, II. Kursus. — Tales of a grandfather von Walter Scott. Zimmermann's englische Grammatik 2ter Theil. — Chronologische Memoranda für Prima und Sekunda der St. Johannisschule, (von Dr. Löschin). — Kartons und Konturen u. s. w. von Dr. Löschin. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterrichte. Atlas von Voigt oder Sydow. — Naturgeschichte von Neumann. — Chemie von Horning. — Physik von Koppe. — Koppe's Planimetrie und Stereometrie. Mehlers Elementarmathematik.

In **Tertia** A. und B.: Christliche Sittenlehre. Für die St. Johannisschule. Von dem Direktor derselben Dr. Löschin. Siberti-Meirings lateinische Grammatik. Cornelius Nepos. Caesar bell. Gall. Phaedrus ed. Raschig. — Gedichte von Schiller. — Französische Grammatik von Plötz, II. Kursus. Französisches Lesebuch von Mager, II. Kursus. — Zimmermann's englische Grammatik, I. Theil. — Geschichtstabellen zum Auswendiglernen, von Dr. Hirsch. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. Atlas von Voigt oder Sydow. — Naturgeschichte von Neumann. — Mehler's Elementarmathematik.

In **Quarta** A. und B.: Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannisschule. — Magers Deutsches Lesebuch, I. Theil. — Siberti-Meirings Lateinische Grammatik. Cornel. Nepos. — Französische Grammatik von Plötz, I. Kursus. Magers Französisches Lesebuch, I. Kursus. Plötz Petit Vocabulaire. — Geschichtstabellen zum Auswendiglernen, von Dr. Hirsch. — Voigts Leitfaden beim geographischen Unterricht. Atlas von Voigt oder Sydow. — Neumanns Naturgeschichte. — Mehlers Elementarmathematik. Stubba's Rechnungsaufgaben Heft IV., V. VI.

In **Quinta** A. und B.: Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannisschule. — Deutsches Lesebuch von Mager, I. Theil. — Lateinisches Elementarbuch von Bleske. — Plötz: Französisches Elementarbuch, I. Kursus. Plötz: Petit vocabulaire. — Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. Atlas von Voigt oder Sydow. — Geschichtstabellen von Dr. Hirsch. — Stubbas Aufgaben zum Rechnen. Heft IV.

In **Sexta** und in der ersten Vorschulklasse: Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannisschule. — Der Klein-Kinderfreund von Dr. Löschin. — Lateinisches Elementarbuch von Bleske. Voigt's Leitfaden beim geographischen Unterricht. — Stubba's Aufgaben zum Rechnen. Heft I. und II.

In der II. Vorschulklasse: Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannisschule. — A. Der Klein-Kinderfreund von Dr. Löschin. — B. Erstes Lesebuch von Sostmann. — Uebungsbuch von Borkenhagen.

IV. Vermehrung der Lehrmittel.

Für die Schulbibliothek wurden die Fortsetzungen von Karsten's „Encyklopädie der Physik“, die der „Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften“, von Klöden's „Handbuch der Geographie“, des „Deutschen Wörterbuches“ von Grimm, der „Geographischen Mittheilungen“ von Petermann und der „Zeitschrift für Mathematik“ von Schlömilch; — sodann auch „die Länder und Stätten der heiligen Schrift in ausgewählten Bildern (28 kolorirten und 72 nicht kolorirten) mit erläuterndem Texte von Fr. A. und O. Strauß, München, 1861“; „Turnbuch für Schulen von Methner (mit Abbildungen) Berlin, 1862“; „Der siebenjährige Krieg, Jubelschrift von v. Dedenroth. Berlin, 1863“; „Die Befreiungskriege, Jubelschrift von demselben. Berlin 1863“; „Pflanzenblätter im Naturdruck mit der botanischen Kunstsprache, von G. Reuß, Ulm 1862“; — „Mechanik von Huber“; — „Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen, Braunschweig 1863“; — „Durege, Theorie der elliptischen Funktionen, 1861“; „Hesse, Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes, 1861“, — „Dienger, Die Differential- und Integralrechnung, 1862“; „Pohlke, Darstellende Geometrie (mit 10 Tafeln), 1860"; „Baltzer, Die Elemente der Mathematik, 2 Bde. 1860, 62"; „Briot u. Bouquet, Theorie der doppelt periodischen Funktionen von Fischer, 1862"; — „Archiv für das Studium der neueren Sprachen u. Literaturen von Herrig, Bd. 32. u. fg., Braunsch. 1862, 63. angeschafft.

An Geschenken erhielt die Schule von den Verfassern oder Verlagshandlungen: „Weltgeschichte in Biographien. Annaberg 1862, Nonne I. Bd."; — „Kleine Schulgeographie von v. Seydlitz, Breslau 1862, Hirt (mit Abbildungen)"; — „Schulgeographie von v. Seydlitz, Breslau 1862, Hirt (mit Abbildungen)"; — „Geographischer Leitfaden für Elementarschulen von Klöden, Berlin 1863, Charisius"; — Kleine Naturgeschichte von Schilling, Breslau 1862, Hirt (mit 600 Abbildungen)"; — „Einleitung in die Physik und Chemie von Evers, Essen 1863, Bädecker (mit 184 Abbildungen)"; — „Schule der Chemie von Herding, Hannover 1862, Rümpler (mit 36 Abbildungen)"; — „Schule der Physik von Herding, Hannover 1862, Rümpler (mit 152 Abbildungen)"; — Elementar-Arithmetik von Rauch, dritte Aufl., Hannover 1862, Rümpler"; — „Die Elementar-Mathematik von Kambly, Thl. IV. (Stereometrie), Breslau 1862, Hirt"; — „Die Kegelschnitte, Leitfaden für den Unterricht von Lehmann, Bromberg 1862, Fischer"; — Die Elemente der analytischen Geometrie von Gandtner, Minden 1862, Bruns; — „Praktisches Rechenbuch von Brennecke, Thl. I. Abth. I., Berlin 1861, Enslin (dazu die „Antworten")"; — „Anfangsgründe der Geometrie von Brennecke, Posen 1862, Zupanski"; — „Versuch eines Lehrbuches der Stereometrie von Brennecke, Posen 1862, Decker"; — „Beschreibende und analytische Geometrie von Mink, Crefeld 1862, Schüller"; — „Deutsches Lesebuch von Auras u. Gnerlich, Thl. I., 6. Aufl., Breslau 1862, Hirt"; — „Deutsches Lesebuch für das mittlere Kindesalter von K. und L. Seltzsam, 4. Aufl., Breslau 1862, Hirt"; — „Deutsche Lesestücke für den Abschluß des Leseunterrichts von Lange, Berlin 1862, Gärtner"; — „Deutsches Lesebuch für mittlere und obere Klassen höherer Lehranstalten von Lange, Thl. I., Berlin 1861, Gärtner"; — „Ellendt's Latein. Grammatik erweitert von Seyffert, Berlin 1862, Weidmann"; — „Lateinische Grammatik von Richard, dritte Aufl., Hannover 1862, Rümpler"; — Corn. Nep. vitae etc. mit Wörterbuch von Horstig, 2. Aufl., Wittenberg 1862, Reichenbach"; — „Les grands faits de l'histoire de France par Schütz, II. Tomes, Hannover 1862, Rümpler"; — „Englisches Elementarbuch von Brennecke, Posen 1861, Heine."

Für die physikalische Sammlung wurde angeschafft: Ein Apparat zur Demonstration des Auges, wie der Anwendung der Convex- und der Concavbrille. Ein Thermometer nach Réaumur. Ein Winkelspiegelapparat (mit verschiedenen Tetraedern) besonders zur Darstellung von Krystallgestalten des regulären Systems. Außerdem schenkte der Abiturient Otto Berndt der Anstalt einen selbstgearbeiteten Nörremberg'schen Polarisations-Apparat und einen ebenfalls selbst gefertigten Apparat zur Demonstration des Parallelogramms der Kräfte, auch construirte er ein Landschaftsbild zum Kegelspiegel. Der Secundaner Westphal fertigte einen Nonius und einen Apparat zur Demonstration des Gesetzes für zwei- und einarmige Hebel. Einfachere Gegenstände wurden von andern Schülern gearbeitet.

Für die chemische Sammlung wurden ausgegangene Präparate erneuert und einige Glaswaaren angeschafft.

Für den geographischen Unterricht ist die Sydow'sche Wandkarte von Asien erneuert und die von Palästina von Kiepert angeschafft worden.

So auch für den Unterricht im Zeichnen: 722 systematisch geordnete Vorlegeblätter, für den Unterricht im Singen die nöthige Zahl von Noten für die Stimmen zur Einübung des Ave verum von Mozart, des „Ehre sei Gott in der Höhe" und des „Du Hirte Israels" von Bortnianski.

V. Schüler-Zahl.

Diese betrug am Schlusse der vorigen Schuljahres 532. Der Abgang belief sich im Laufe desselben auf 101, die Aufnahme, welche auf Verlangen des Königlichen Hochverordneten Provinzial-Schulkollegiums in einigen Klassen beschränkt werden mußte, auf 111, so daß die Schule jetzt 542

Schüler zählt, von denen sich 127 in der Vorschule (60 in I., 67 in II.) und 415 in den Realklassen (17 in I., 40 in II., 34 in III. A., 38 in III. B., 49 in IV. A., 49 in IV. B., 50 in V. A., 50 in V. B., 88 in VI.) befinden. Der Ueberfüllung der zuletzt genannten Klasse wird — wie schon bemerkt worden ist — mit dem Beginne des neuen Lehrkurses durch Theilung in 2 Parallelcötus abgeholfen werden.

VI. Schul-Chronik.

Zu den festlichen Ereignissen, welche für einzelne Tage oder Stunden im Laufe dieses Lehrjahres in der Schule den gewöhnlichen Gang der geordneten Thätigkeit unterbrachen, gehörten zuerst die bereits erwähnte feierliche Einführung des Herrn Dr. Bail (9. Okt.). Sodann die durch Hohe Ministerial-Verfügung angeordnete Feier des Säkularfestes des Hubertsburger Friedenschlusses (14. Febr.), wobei der Direktor seine Festrede an die Erklärung des Sonntags-Evangeliums knüpfte, die den zur täglichen Morgenandacht versammelten Schülern an jedem Sonnabende gegeben wird; — und zuletzt die gleichfalls vorgeschriebene Feier des halbhundertjährigen Jubelfestes des königlichen Aufrufes „An mein Volk" (17. März), verbunden mit der des ganz nahen erfreulichen Geburtstages Sr. Majestät des Königes. Das Doppelfest wurde in der dazu geschmückten Aula durch Choralgesänge, Chorgesang und eine von dem Direktor gehaltene Rede, sowie am Abende durch eine glänzende Beleuchtung des Schullokales begangen.

Den Bestimmungen der Ferienordnung, und einer besonderen Verfügung des Königl. Hochv. Provinzial-Schulkollegiums in Betreff der diesmaligen Sommerferien, gemäß währten die Osterferien vom 10. bis 24. April (14 Tage), die Pfingstferien vom 7. bis 12. Junius (eine halbe Woche), die großen Sommerferien vom 13. Julius bis 11. August (4 Wochen), die Michaelisferien vom 28. September bis 9. Oktober (14 Tage), die Weihnachts- und Neujahrsferien vom 21. Dezember 1861 bis 5. Januar 1862 (14 Tage). Einzelne Ferientage waren der Fastnachtstag, der Frohnleichnamstag, der Johannistag, der Martinstag und der Tag der halbhundertjährigen Jubelfeier des königlichen Aufrufes „An mein Volk" (17. März).

VII. Die Abiturientenprüfung

fand am 11. März d. J. statt, und es waren dazu von dem Hochverordneten Königlichen Provinzial-Schulcollegium Herr Provinzial-Schulrath Dr. Schrader, von dem Hochlöblichen Magistrate unserer Stadt Herr Stadt-Schulrath Dr. Kreyenberg als Kommissarien deputirt worden.

Zu den schriftlichen Arbeiten hatten die Examinanden folgende Themata erhalten:

im Deutschen: Wer jetzo mich verkennt, der spornet mich nur an,
zu werden so, daß man mich nicht verkennen kann.

im Französischen: wurde als Exercitium die Uebersetzung eines Stückes aus Schiller's dreißigjährigem Kriege (die Belagerung Stralsund's durch Wallenstein) geliefert.

im Englischen: Elisabeth, Queen of England.

in der Mathematik:

Planimetrie und analytische Geometrie:

Durch einen gegebenen Punkt eine Linie (3) zu ziehen, welche die durch ihre Gleichungen gegebenen Linien (1) und (2) dergestalt schneidet, daß der Winkel (2,3) das Dreifache des Winkels (1,3) wird.

Algebra:

Das Quadrat einer unbekannten Zahl nebst dem Quadrate einer andern um b vermehrten Unbekannten ist a^2, das Quadrat der andern unbekannten Zahl nebst dem Quadrate der ersten um c vermehrten Unbekannten ist gleichfalls a^2. Welches sind die beiden unbekannten Größen?

Trigonometrie:

Von einem Vierecke sind gegeben zwei Gegenseiten, die beiden Diagonalen und der Winkel, welchen die beiden nicht gegebenen Seiten einschließen. Man soll angeben, um wie viel die beiden Dreiecke, welche von den Diagonalen und den beiden bekannten Seiten gebildet werden, von einander verschieden sind.

Stereometrie:

Ein Baumstamm von c′ Länge hat am untern Ende einen Durchmesser von D′, am oberen aber einen Durchmesser von d′. Er soll durch einen der Grundfläche parallelen Querschnitt in zwei gleiche Theile zerlegt werden. Wie lang ist jeder Theil?

in den Naturwissenschaften:

Physik:

1) Mechanik:

Das Gewicht einer Lokomotive betrage 150 Ctr., sie fahre auf einem Schienenwege und lege die preußische Meile in 8 Minuten zurück; wie weit würde dieselbe ohne den Widerstand der Luft nach plötzlicher Absperrung des Dampfes sich noch fortbewegen? Reibungscoëfficient $= \frac{1}{200}$.

2) Optik:

In der Axe einer gleichseitigen biconvexen Linse, deren Krümmungsradius 4′ lang ist, befinde sich ein leuchtender Punkt. Es soll die Lage der Bilder dieses Punktes berechnet werden, wenn die Entfernung desselben von der Linse 1) unendlich groß ist, oder 2) 36″, 3) 8″, 4) 4″, 5) 2″ beträgt.

Chemie:

Wie wird aus den gewöhnlichsten Eisenerzen das Roheisen gewonnen? Hiezu als stöchiometrische Aufgabe: Von zwei Eisenbergwerken liefert das eine Brauneisenstein von durchschnittlich 42 % Gehalt an reinem Eisenoxyd, das andere Rotheisenstein von durchschnittlich 80 % Gehalt an reinem Eisenoxyd. Die Beschickung des Hochofens soll so gattirt sein, daß die Erze durchschnittlich 36 % metallisches Eisen enthalten. Wie müssen die beiden Erze gemischt werden?

Den Examinanden: 1) Maximilian Alexius Edwin Gertzen, geb. im Juli 1844, 4½ Jahre lang auf der Schule, 2 in Prima,

2) Albert Liévin, geb. im October 1843, 3 Jahre lang auf der Schule, 2 in Prima,

3) Julius Theodor Neumann, geb. im Juni 1842, 7½ Jahre lang auf der Schule, 2 in Prima, und

4) Albert Julius Schultz, geb. im April 1845, 10 Jahre lang auf der Schule, 2 in Prima,

wurde nach dem befriedigenden Ergebnisse ihrer schriftlichen Arbeiten durch Beschluß der Prüfungs-Commission das mündliche Examen erlassen, und es erhielten von ihnen Liévin und Schultz das Zeugniß der Reife mit dem Prädikate: gut bestanden, Gertzen und Neumann mit dem Prädikate: genügend bestanden.

Den Examinanden: 5) Ernst Friedrich Franz Bahr, geb. im December 1843, 8 Jahre lang auf der Schule, 2 in Prima,

6) Otto Friedrich Hermann Berndt, geb. im Mai 1844, 1½ Jahre lang auf der Schule und in der Prima,

7) Carl Heinrich Johann Mampe, geb. im März 1842, 6½ Jahre lang auf der Schule, 2 in Prima und

8) Emil Julius Theodor Mertins, geb. im Mai 1846, 12 Jahre lang auf der Schule, 2 in Prima,

wurde nach der mit ihnen abgehaltenen mündlichen Prüfung das Zeugniß der Reife und zwar mit dem Prädikate: genügend bestanden zuerkannt.

VIII. Vertheilung der Stunden unter die Lehrer im Schuljahre von Ostern 1862 bis 1863.

Lehrer.	Ordin.	Realschule. I.	II.	III. A.	III. B.	IV. A.	IV. B.	V. A.	V. B.	VI.	Summa.	Vorschule. I.	II.	Summa.
1. Direktor Dr. **Löschin**	I.	2 Relig. 2 Gesch. 2 Deutsch	2 Relig. 2 Gesch.	2 Religion		2 Religion					14			
2. Oberlehrer **Küster**	IV.A				3 Deutsch	6 Latein 5 Franz. 3 Deutsch		6 Latein			23			
3. Oberlehrer **Gronau**	III B	5 Math.	5 Math.	4 Math.	6 Math.						20			
4. Oberlehrer Dr. **Panten**	II.	2 Geogr. 2 Deutsch	2 Geogr. 4 Deutsch	2 Geogr. 2 Gesch.	2 Geogr. 2 Gesch.	2 Geogr.					20			
5. Ordentlicher Lehrer **Stobbe**	V. B.	3 Latein	4 Latein	5 Latein	5 Latein				6 Latein		23			
6. Ordentlicher Lehrer Dr. **Laubert**	III A	3 Engl. 4 Franz.	3 Engl. 4 Franz.	4 Engl.	4 Engl.						22			
7. Ordentlicher Lehrer Dr. **Bail**		6 Natur- wissensch.	6 Natur- wissensch.	2 Naturw. 2 Math.	2 Natur- wissensch.	2 Natur- wissensch.	2 Natur- wissensch.				22			
8. Ordentlicher Lehrer **Schultze**	VI.						3 Deutsch 2 Geogr.	2 Naturg. 4 Rechn.	2 Naturg. 3 Ggr. Ges. 1 Deutsch	2 Naturg. 5 Rechn. 3 Ges. Ggr	27			
9. Kath. Rel.-L. Lic. Dr. **Redner**		4 Katholische Religion in 2 Abtheilungen									4			
10. Wissensch. Hilfslehrer Dr. **Brandt**	IV.B			4 Franz. 3 Deutsch	4 Franz.		6 Latein 5 Franz. 2 Gesch.				24			
11. Wissensch. Hilfsl. P.-A.-C. **Hardt**	V. A.					2 Gesch.		3 Relig. 5 Franz. 3 Ggr. Ges	3 Relig. 5 Franz. 4 Rechn.	3 Relig.	28			
12. Wissensch. Hilfslehrer **Schmidt**						2 Rechn.	4 Math.	4 Deutsch	3 Deutsch	8 Latein 4 Deutsch	25			
13. Wissensch. Hilfslehrer **Kayser**						4 Math.	2 Math.				6			
14. Zeichnen- u. Schreiblehr. **Krahn**		3 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 3 Schreib.	30			
15. Elementarlehrer **Hugen**	II.											2 Geogr.	2 Relig. 10 Deutsch 6 Rechn. 6 Schreib.	26
16. Elementarlehrer **Reinke**	I.	4 Singen in 2 Abtheilungen								1 Singen		2 Relig. 8 Deutsch 6 Rechnen 6 Schreib. 2 Zeichn. 2 Singen	2 Singen	28

IX. Uebersicht der statistischen Verhältnisse der Realschule zu St. Johann
im Schuljahre von Ostern 1862 bis Ostern 1863.

Lehrer.

Lehrer.
Direktor Dr. Löschin.
Oberlehrer Küster.
" Gronau.
" Dr. Panten.
4r ordentl. Lehrer Stobbe.
5r " " Dr. Laubert.
6r " " Dr. Bail.
7r " " Schultze.
Pfarrer Lic. Dr. Redner.
Wiss. Hilfslehrer Dr. Brandt.
" " P.-A.-C. Hardt.
" " Schmidt.
" " Kayser.
Zeichnen- u. Schreiblehrer Krahn.
1r Elementarlehrer Hugen.
2r " Reinke.
Lehrer des Polnischen Makowski.

Allgemeiner Lehrplan.

Fächer.	I.	II.	III. A.	III. B.	IV. A.	IV. B.	V. A.	V. B.	VI.	Summa.	Vorschule I.	Vorschule II.	Summa.
Religion	2	2	2∞	2	2∞	2	3	3	3	17	2	2	4
Deutsch	4	4	3	3	3	3	4	4	4	32	8	10	18
Latein	3	4	5	5	6	6	6	6	8	49	—	—	—
Französisch	4	4	4	4	5	5	5	5	—	36	—	—	—
Englisch	3	3	4	4	—	—	—	—	—	14	—	—	—
Geschichte und Geographie	4	4	4	4	4	4	3	3	3	33	2	—	2
Naturwissenschaften	6	6	2	2	2	2	2	2	2	26	—	—	—
Mathematik und Rechnen	5	5	6	6	6	6	4	4	5	47	6	6	12
Zeichnen	3	2	2	2	2	2	2	2	2	19	2	—	2
Schreiben	—	—	—	—	2	2	2	2	3	11	6	6	12
Summa	34	34	32	32	32	32	32	31	31	284			
Singen	——∞2——∞2—— 1									5	2	2	4
Katholische Religion	——∞2——∞2——∞									4	28	26	54
Polnisch	——∞2——∞2——∞									4			

Verhältnisse der Schüler

in	waren	sind
I.	15	17
II.	27	40
III. A.	35	34
III. B.	43	38
IV. A.	60	49
IV. B.	53	49
V. A.	39	50
V. B.	43	50
VI.	85	88
Summa	400	415
Vorschule I.	64	60
II.	68	67
	132	127
Summa	532	542

Verhältnisse der Abiturienten

es werden entlassen		widmen sich	
mit dem Zeugniß der Reife	8	dem Beamtenstande	4
		der Landwirthschaft	2
		dem Militair	1
		dem Maschinenbaufache	1
	8		8

Von diesen Stunden fallen bei I. und II. 2 Zeichenstunden, die Singstunden, 4 Stunden für den katholischen Religionsunterricht und 4 Stunden für Polnisch außerhalb der Schulzeit. Die combinirten Lectionen sind nur einfach gezählt.

Das Zeichen ∞ bedeutet Combination.

X. Das öffentliche Examen,

zu welchem wir hiermit ergebenst einladen, wird in der Aula des Schulhauses an dem genannten Tage gehalten werden und um 8 Uhr Morgens seinen Anfang nehmen. Die dabei vorkommenden Gegenstände sind:

Vormittags.

Chorgesang und Gebet.

Vierte Klasse.	A. Deutsch. — Herr Oberlehrer Küster.
	B. Geschichte. — Herr Dr. Brandt.
	A. u. B. Naturgeschichte. — Herr Dr. Bail.
Dritte Klasse.	A. u. B. Englisch. — Herr Dr. Laubert.
	A. u. B. Geographie. — Herr Oberlehrer Dr. Panten.
Zweite Klassse.	Latein. — Herr Oberlehrer Stobbe.
	Mathematik. — Herr Oberlehrer Gronau.
Erste Klasse.	Französisch. — Herr Dr. Laubert.
	Geschichte. — Der Direktor.
	Physik. — Herr Dr. Bail.

Vor dem Abtreten jeder Klasse werden von den Schülern derselben memorirte Gedichte in englischer, französischer polnischer und deutscher Sprache vorgetragen werden.

Gesang: „Ave verum" von Mozart, geleitet von Herrn Reinke.
Rede des Direktors zur Entlassung der Abiturienten.

Nachmittags 2½ Uhr.

Zweite Vorschulklasse.	Lesen, Rechnen — Herr Hugen.
Erste Vorschulklasse.	Deutsch. — Herr Reinke.
	Geographie. — Herr Hugen.
Sechste Klasse.	Latein — Herr Realschullehrer Schmidt.
	Religion. — Herr Realschullehrer Hardt.
Fünfte Klasse.	A. u. B. Naturgeschichte. — Herr Realschullehrer Schultze.
	A. u. B. Französisch. — Herr Realschullehrer Hardt.

Vierstimmiger Gesang: „Schäfers Sommerlied" von Kreutzer, geleitet von Herrn Reinke.
Schlußgebet. — Choralgesang.

Der Schulunterricht wird nach dem Examen noch bis zum 1. April fortgesetzt, an welchem Tage die Vertheilung der Vierteljahrscensur und die Berufung in höhere Klassen stattfinden.

XI. Aufnahme neuer Schüler.

Der neue Unterrichtskursus beginnt am 16. April d. J. zur Aufnahme neuer Schüler bin ich am 13., 14. und 15. April während der Vormittagsstunden, auch an jedem andern Ferientage, mit Ausnahme der Festtage, bis 9 Uhr Morgens in meiner Wohnung (Heil. Geistgasse No. 77.) bereit.

Löschin.

Ueber die

allgemeine und volle Gültigkeit

der

mathematischen Formeln.

Ein Beitrag

zur

Deutung des Negativen und Imaginären.

Von

J. F. W. Gronau,

Oberlehrer an der Realschule zu St. Johann in Danzig.

Zweiter Theil.

I. Heft.

Danzig.

In Commission bei Const. Ziemssen.

1863.

Wedel'sche Hofbuchdruckerei.

Vorrede.

Der erste, arithmetische Theil dieser Schrift ist schon 1857 erschienen, die Zwischenzeit habe ich benutzt, um aus meiner in früheren Abhandlungen dargestellten Ansicht über das Negative und Imaginäre einige practische Consequenzen zu ziehen. So entstand die in den Schriften der Danziger Naturforschenden Gesellschaft befindliche Abhandlung: Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrische Functionen des Kreises und der Hyperbel, 1861, nebst Tafeln der hyperbolischen Sektoren und der Logarithmen ihrer Sinus und Cosinus, 1862; so ist auch eine zweite Arbeit entstanden, welche auf die Integralrechnung und dadurch auf viele Probleme der Mechanik nicht ohne Einfluß bleiben dürfte, und welche gleichfalls in den Schriften der genannten Gesellschaft einen Platz einnehmen wird und schon unter der Presse ist.

Bevor ich zu meinem gegenwärtigen Vorwurf übergehe, will ich noch an drei Stellen meiner früheren Abhandlungen eine Verbesserung anbringen.

1) In der 1845 bei Kabus erschienenen Schrift: Ueber die Anzahl der Glieder in den Summenformeln der arithmetischen, geometrischen und harmonischen Progressionen habe ich pag. 18 beiläufig gesagt: „Um eine solche Curve zu erhalten, deren Ordinaten die Stellvertreter der verschiedenen Summen bei den arithmetischen Reihen sind, construire man fünf oder der Symmetrie wegen sechs gerade Kegel, vier, bei denen der Winkel an der Spitze u und einen oder zwei, bei denen der Winkel an der Spitze $180^0 - u$ ist. Alsdann nehme man drei auf einander senkrecht stehende Stäbe, Xx, Yy, Zz, welche die Achsen der sechs Kegel werden sollen. Ueber jedes der sechs Enden der Stäbe ziehe man einen Kegel, so daß die Spitzen aller Kegel in einem Punkte sich vereinigen, und die beiden Kegel mit dem Winkel $180^0 - u$ an dem Stäbchen Yy befestigt sind. Legt man nun eine Ebene, parallel mit der Grundfläche eines der beiden letztgenannten Kegel, so wird diese Ebene auch die vier herumliegenden Kegel mit dem Winkel u schneiden und der vollständige Schnitt ist ein Kreis mit vier gleichseitigen Hyperbeln, deren Scheitel in der Peripherie des Kreises gleich weit von einander entfernt liegen und deren Parameter dem Durchmesser dieses Kreises gleich sind.“ Aber die Behauptung, daß diese Hyperbeln gleichseitig sind, ist nur dann richtig, wenn der Winkel $u = 90^0$ ist, wovon man sich leicht überzeugen kann.

2) In der oben erwähnten Schrift über die Auflösung der kubischen Gleichungen habe ich im Anhange pag. 47—49 einen zwar strengen, aber etwas weitläuftigen Beweis ohne Integralrechnung dafür gegeben, daß der asymptotische Raum ACUO $= c^2 . \text{Log}\left(\frac{U}{c}\right)$ ist. Ich hoffe, daß folgender Beweis wegen seiner Einfachheit mehr zusagen werde:

Fig. 10.

Die Zahlen 1, d, e, f, ... p, q, r, s, t, u mögen um gleich viel, nämlich um unendlich wenig, um δ von einander verschieden sein, so daß $d = 1 + \delta$, $e = d + \delta$, ... oder $t = u - \delta$, $s = t - \delta$.... ist.

Da $\text{Log}\ t = \text{Log}\ (u - \delta) = \text{Log}\ u + \text{Log}\left(1 - \frac{\delta}{u}\right)$

$$= \text{Log}\ u - \left[\frac{\delta}{u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{u}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{u}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{u}\right)^4 + \ldots\right],$$

so ist mit Vernachläßigung der höhern Potenzen von δ nicht bloß:

$$\frac{\delta}{u} = \text{Log}\ u - \text{Log}\ t, \text{ sondern auch}$$

$$\frac{\delta}{t} = \text{Log}\ t - \text{Log}\ s,$$

$$\frac{\delta}{s} = \text{Log}\ s - \text{Log}\ r$$

$$\vdots$$

$$\frac{\delta}{e} = \text{Log}\ e - \text{Log}\ d$$

$$\frac{\delta}{d} = \text{Log}\ d - \text{Log}\ 1.$$

Also ist $\frac{\delta}{u} + \frac{\delta}{t} + \frac{\delta}{s} + \frac{\delta}{r} + \ldots \frac{\delta}{f} + \frac{\delta}{e} + \frac{\delta}{d} = \text{Log}\ u.$

Nun sei die Asymptote von C bis U in unendlich viele gleiche Theile zerlegt, jeder $= \Delta$, nämlich CD = DE = EF = FG = . . . PQ = QR . . . = TU $= \Delta$. Ferner mögen die Abscissenlinien MC, MD, ME, ... MS, MT, MU successive mit c, D, E, F .... R, S, T, U und die Zahlen, welche ihre Länge, nach c gemessen, angeben, mit 1, d, e, f, g .... q, r, s, t, u bezeichnet werden. Auch sei $\frac{\Delta}{c} = \delta$. Die entsprechenden Ordinaten und die Zahlen, welche ihre Länge angeben, mögen mit denselben, aber mit gestrichenen Buchstaben veranschaulicht werden. Dann ist bekanntlich:

$U . U' = c^2$, $T . T' = c^2$, ... $D . D' = c^2$, oder $u . u' = 1$, $t . t' = 1$, $s . s' = 1$, ...

Endlich mögen noch die aufeinander folgenden asymptotischen, unendlich kleinen, als Rechtecke zu betrachtenden Räume zwischen zwei benachbarten, an einander liegenden Ordinaten mit (CD), (DE), (EF) ... (RS), (ST), (TU) ausgedrückt werden. Dann ist

$$(TU) = \Delta . U' = c^2 . \delta . u' = c^2 . \frac{\delta}{u}$$

$$(ST) = \Delta . T' = c^2 . \delta . t' = c^2 . \frac{\delta}{t}$$

$$\vdots$$

$$(DE) = \Delta . E' = c^2 . \delta . e' = c^2 . \frac{\delta}{e}$$

$$(CD) = \Delta . D' = c^2 . \delta . d' = c^2 . \frac{\delta}{d}$$

Also ist der ganze asymptotische Raum ACUO = A

$$= c^2 . \left(\frac{\delta}{u} + \frac{\delta}{t} + \frac{\delta}{s} + \ldots \frac{\delta}{f} + \frac{\delta}{e} + \frac{\delta}{d}\right) = c^2 . \text{Log } u.$$

Kurz, es ist $A = c^2 . \text{Log}\left(\frac{U}{c}\right)$.

Man sucht bisweilen Beweisen dieser Art dadurch eine noch größere Schärfe zukommen zu lassen, daß man die unendlich kleinen Räume (CD), (DE) ... nicht als Rechtecke, sondern als Trapeze ansieht. Obgleich ich dieses nicht für nothwendig halte, so will ich noch weiter gehen und annehmen, daß erst die unendlich kleinen Theile von (CD), (DE) ... Rechtecke sind.

Zu diesem Zwecke zerlege man etwa die unendlich kleine Strecke TU = Δ nochmals in unendlich viele (n) gleiche Theile, so daß die auf diese Strecke TU sich beziehenden Abscissen, ich meine die Zahlen, welche ihre Längen angeben, also die Abscissenzahlen, sind:

$$\frac{MU}{c} = u, \quad u - \frac{\delta}{n}, \quad u - \frac{2\,\delta}{n}, \quad u - \frac{3\,\delta}{n}, \ldots\ldots u - \delta = \frac{MT}{c}$$

und die entsprechenden Ordinatenzahlen:

$$\frac{1}{u}, \quad \frac{1}{u - \frac{\delta}{n}}, \quad \frac{1}{u - \frac{2\,\delta}{n}}, \quad \frac{1}{u - \frac{3\,\delta}{n}}, \ldots\ldots \frac{1}{u - \delta},$$

oder

$$\frac{1}{u}, \quad \frac{1}{u . \left(1 - \frac{\delta}{n\,u}\right)}, \quad \frac{1}{u . \left(1 - \frac{2\delta}{n\,u}\right)}, \quad \frac{1}{u . \left(1 - \frac{3\delta}{n\,u}\right)} \ldots . \frac{1}{u . \left(1 - \frac{\delta}{u}\right)}.$$

Dann ist, wenn $\frac{\delta}{n\,u} = \nu$ gesetzt wird, wo also ν eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung bedeutet:

$$(TU) = c^2 . \frac{\delta}{n} . \frac{1}{u}\left[\frac{1}{1-\nu} + \frac{1}{1-2\nu} + \frac{1}{1-3\nu} + \ldots . \frac{1}{1-n\nu}\right]$$

$$= c^2 \cdot \frac{\delta}{u} \cdot \frac{1}{n} \left[\begin{array}{l} 1 + \nu + \nu^2 + \nu^3 + \ldots\ldots \\ 1 + 2\nu + 4\nu^2 + 8\nu^3 + \ldots\ldots \\ 1 + 3\nu + 9\nu^2 + 27\nu^3 + \ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad\quad . \\ 1 + n\nu + n^2\nu^2 + n^3\nu^2 + \ldots \end{array} \right]$$

$$= c^2 \cdot \frac{\delta}{u} \cdot \frac{1}{n} \left[n + \frac{n^2}{2}\nu + \frac{n^3}{3}\nu^2 + \frac{n^4}{4}\nu^3 + \ldots \right]$$

$$= c^2 \cdot \frac{\delta}{u} \cdot \left[1 + \frac{n\nu}{2} + \frac{n^2\nu^2}{3} + \frac{n^3\nu^3}{4} + \ldots\ldots \right]$$

$$= c^2 \cdot \frac{\delta}{u} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{u}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{u}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{u}\right)^3 + \ldots\ldots \right]$$

$$= c^2 \cdot \left[\frac{\delta}{u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{u}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{u}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{u}\right)^4 + \ldots\ldots \right]$$

$$= c^2 \cdot (\mathrm{Log}\ u - \mathrm{Log}\ t).$$

Weil nun ebenso $(ST) = c^2 \cdot (\mathrm{Log}\ t - \mathrm{Log}\ s)$

$(RS) = c^2 \cdot (\mathrm{Log}\ s - \mathrm{Log}\ r)$

.

.

.

$(DE) = c^2\ (\mathrm{Log}\ e - \mathrm{Log}\ d)$

$(CD) = c^2\ (\mathrm{Log}\ d - \mathrm{Log}\ 1)$,

so ist $A = c^2 \cdot \mathrm{Log}\ u = c^2 \cdot \mathrm{Log}\left(\frac{U}{c}\right)$.

Dieser zweite Beweis scheint ganz strenge zu sein, und dennoch ist dem nicht so. Denn es ist

$$1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \text{ und nicht } = \frac{n^2}{2},$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \text{ und nicht } = \frac{n^3}{3}.$$

.

.

.

Während aber der erste Beweis nur bis auf unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung exclusive zu verbürgen ist, ist die Richtigkeit des zweiten Beweises zu verbürgen bis auf unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung inclusive.

3) In derselben Schrift über die kubischen Gleichungen pag. 7 habe ich einen etwas schwerfälligen Beweis dafür gegeben, daß auch $A = \frac{r^2}{2} \cdot \mathrm{Log}\ \frac{x+y}{r}$ ist, wo $r = MA$, $x = MW$, $y = WO$.

Hier ist ein besserer Beweis: Man verlängere UO bis B, so sieht man sogleich, daß $\frac{U}{c} = \frac{MB}{MA} = \frac{x + BW}{r}$ ist. Und weil $M = 45^0$ ist, so ist auch $B = 45^0 = O$. Mithin ist $BW = OW = y$ und $\frac{U}{c} = \frac{x + y}{r}$. Da endlich $MC = c = AC$, so ist $c^2 = \frac{r^2}{2}$ und $A = \frac{r^2}{2} \cdot \text{Log} \cdot \frac{x + y}{r}$.

Auch scheint es mir nicht ungehörig zu sein, — die mir in Bezug auf meine frühern Schriften gewordenen Anerkennungen verschweigend — von dem, was gegen den ersten (arithmetischen) Theil meiner Arbeit mir zu Gesicht gekommen ist, das Schärfste mitzutheilen. Der geneigte Leser wird dann um so leichter ein unparteiisches Urtheil über den von mir behandelten Stoff fällen können. In einem an mich gerichteten Schreiben vom 20. Mai 1860 heißt es: .... „Die große Künstlichkeit der Erklärung an einigen Stellen stört mich. So z. B. § 30 bei den Ehrlichen und Zweideutigen. Ich glaube kaum, daß man überall so ins Detail gehen kann, wie Sie es thun; gerade bei eingekleideten Aufgaben, wo von x Männern, y Weibern, z Kindern 2c. die Rede ist, scheint mir dies aus folgenden Gründen bedenklich. Zur Lösung einer eingekleideten Aufgabe gehören zwei Operationen: die Bildung der Gleichung und die Auflösung derselben. Nur die letztere Operation ist Sache der Algebra, und die Algebra fragt nicht und hat auch nicht zu fragen, ob in der Gleichung $x^3 + 6x^2 = 3920$ (§ 30) das vorkommende x Personen oder sonst was bedeutet; für die Algebra ist x eine abstrakte Zahl und nichts weiter; will sich Jemand unter x irgend etwas Concretes vorstellen, so mag er das auf seine Rechnung und Gefahr thun, aber er mache dann auch die Algebra nicht für etwaige Discrepanzen verantwortlich. — Ich schließe hieraus, daß solche concrete Deutungen des Negativen und Imaginären mit einem bedeutenden Grade der Willkührlichkeit behaftet sind und daß überhaupt nur im Gebiete des Abstrakten eine streng wissenschaftliche Deutung negativer und imaginärer Zahlen (nicht Größen, denn diese sind weder positiv, noch negativ, noch imaginär) gegeben werden kann .... Die erwähnte Willkühr tritt auch bei Ihren Deutungen sehr klar hervor. In § 28 sagen Sie selbst, man müsse eine andere Einkleidung wählen, um die Sache annehmbar zu machen; nun ist aber jede Einkleidung, wie überhaupt jedes Kleid, etwas willkührliches, und dann haben Sie doch eigentlich nichts weiter gewonnen, als daß Sie zwei verschiedene Aufgaben (denn Kaufen und in Futter geben sind zwei verschiedene Handlungen) neben einander stellen, welche beide zu derselben quadratischen Gleichung führen und wobei Sie die eine Wurzel für die eine Aufgabe, die andere für die andere benutzen."

Nur wenige Worte will ich dem geehrten Verfasser des Briefes erwidern. Es versteht sich von selbst, daß nie die ganze Aufgabe mit ihrer Einkleidung von Personen, Vieh, Geld und dergleichen in die Gleichung gebracht werden kann und soll, sondern nur ihr wesentlicher Inhalt, d. h. außer den aus ihr abstrahirten Zahlen nur noch gewisse gleichfalls abstrakte Begriffe, Eigenschaften oder Beziehungen der in der Aufgabe vorkommenden Handlungen oder Gegenstände, welche Zahlen und Begriffe zunächst in dem Sinne zu verstehen sind, wie alle Welt sie versteht, im positiven Sinne. Giebt dann die Auflösung für x etwas Negatives oder Imaginäres, so hat man zuzusehen, ob nicht jene Zahlen und die damit in Verbindung stehenden Begriffe auch als Repräsentanten der Aufgabe einen vollen oder halben Gegensatz zulassen. So sind Vieh kaufen und Vieh auf die Weide geben nicht nur verschiedene Handlungen, sondern für die Aufgabe in § 28 ganz entgegengesetzte Begriffe, die daher füglich mit + und — zu bezeichnen sind. So wird ferner in § 30 nach der Anzahl von Personen gefragt, die in einem bestimmten, ehrlichen Sinne handeln; findet man nun außer dem vorzugsweise in Betracht kommenden positiven Werthe noch für x eine complexe Zahl, so habe ich mich nicht gescheut, das darin vorkommende Negative mit unehrlich und das Imaginäre mit zweideutig zu bezeichnen und demgemäß die Deutung unternommen. Daß dann bei praktischen Aufgaben mitunter eine künstliche Auslegung zum Vorschein kommt, ist nicht zu vermeiden. Eben deshalb habe ich an einigen Stellen, um die andern, nicht positiven Auflösungen annehmbarer zu machen — denn so habe ich sagen wollen, nicht annehmbar zu machen,*) — die Aufgabe selbst anders ausgedrückt. Meine Meinung ist aber stets gewesen und ist es auch noch, daß mit wenigen Ausnahmen, über die ich mich zum Theil erklärt habe (§ 7, pag. 6), oder noch erklären werde, sämmtliche Auflösungen, die eine Gleichung ergiebt, zu der einen Aufgabe, welche zu der Gleichung Veranlassung gegeben hat, gehören.

Oder mit andern Worten: Allerdings hat die Algebra es zunächst mit der Auflösung der Gleichung zu thun. Ist diese aber vollzogen, so wird man wohl nicht umhin können, zu prüfen, ob die gewonnenen Resultate zu der Aufgabe, welche zur Aufstellung der Gleichung Veranlassung gab, passen oder nicht. Hat man nun für x etwas Negatives oder Imaginäres gefunden, so wird man zu bedenken haben, daß dieses x, mag es eine Anzahl von lebendigen Wesen oder von leblosen Sachen vorstellen, nicht absolut, nicht als eine wirkungslose Masse aufzufassen ist, sondern daß die sogenannten unbekannten Größen als nach einer gewissen Richtung hin handelnd oder leidend, oder als in gewissen Beziehungen zu andern gleichfalls in der Aufgabe vorkommenden Begriffen stehend auftreten; man wird zu untersuchen haben, ob die vorkommende Handlungsweise oder Beziehung nicht eines mehrfachen, namentlich des vollen und halben Gegensatzes fähig ist. Und wenn dies der Fall ist, so wird die Deutung der sonst meistens verworfenen negativen und imaginären Auflösungen stets gelingen.

Kurz, auch ich beziehe das Negative und Imaginäre nicht auf die concreten Dinge selbst, sondern auf die abstrakten Gegensätze, welche sich und sofern sie sich im Concreten vorfinden.

Wenn ich nichtsdestoweniger an einigen Stellen der Abhandlung von negativen und imaginären Größen gesprochen habe, so ist das als eine abgekürzte Redeweise zu betrachten, die ich, wo sie vorkommt, stets sorgfältig erläutert habe.

Danzig, den 10. März 1863.

Der Verfasser.

---

*) Ein anderer Druckfehler von geringerer Bedeutung befindet sich § 11 pag. 10, Zeile 12. Statt $s = \frac{d}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}$ muß es heißen $s = \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

II. Geometrischer Theil.

A. Aufgaben, bei denen meistens eine quadratische Gleichung zum Grunde liegt.

§ 33.

28ste Aufgabe. Sectio aurea. Von der Linie AB = a soll von B aus ein Stück BC = x weggenommen werden, welches die mittlere Proportionale zwischen dem Reste AC und der ganzen Linie AB sei. Fig. 1.

Auflösung. Es ist $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, aber $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ wird unter Andern von Prof. Koppe (Planimetrie § 263) verworfen. Ich aber verwerfe nichts, sondern sage:

Construction. Man mache AB = a und AF = $\frac{a}{2}$ senkrecht auf AB. Fragt man nun, wie weit F von B entfernt ist, so ist darauf nicht nur die gewöhnliche Antwort zu geben: $FEB = +\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, sondern auch folgende bisher meistens übersehene Antwort: FG...HB; d. h. um von F bis B zu gelangen, kann ich auch auf der unbegrenzten und folglich unendlichen, in sich geschlossenen geraden Linie, die schon Mancher vor mir als einen Kreis mit unendlichem Radius sich gedacht hat, den Weg von F über G einschlagen und in dieser Richtung immer fort gehen, bis ich über H nach B komme. Bezeichnet man den Weg von F über G H B bis F, welchen ich eine volle Unendlichkeit nenne, mit dem bekannten Zeichen ∞, so kann mithin die Entfernung von F bis B auch ausgedrückt werden durch $\infty - FEB = \infty - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, wofür ohne Weiteres $-\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ zu setzen ist. Denn da diesmal der Gang von F über G nach B geschehen sollte, und daher diese Richtung die positive genannt werden muß, so ist die stellvertretende Richtung von F über E negativ zu nennen.

Mit anderen Worten: Nachdem die Linien AB und AF gezogen sind, soll man noch eine gerade Linie von F nach B ziehen. Wer sieht aber nicht ein, daß dies auf zwei Arten ausgeführt werden kann? Einmal kann ich die Linie von F über E nach B legen, wobei ich sagen werde, daß $FB = + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ ist; dann aber kann ich die zu ziehende Linie mit demselben theoretischen Rechte auch von F über G hinaus bis nach H und B führen. Doch dafür lasse ich sie in Praxi lieber den Weg FEB gehen, den ich aber jetzt als Stellvertreter eines anderen längeren Weges wegen seiner entgegengesetzten Richtung als negativ anzusehen habe. Kurz es kann auch $FB = - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ gesetzt werden.

In beiden Fällen, mag nun $FB = \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ sein, habe ich davon noch $\frac{a}{2}$ abzuziehen, um x zu erhalten. Mache ich nun $FE = FG = FA = \frac{a}{2}$, so ist

$$\text{im ersten Falle } x = + FB - FE = + BE = - \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

$$\text{im andern Falle } x = - FB - FG = - BG = - \frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Ich will hiemit sagen, daß das gesuchte x einmal eine positive Linie BE ist, dann aber auch eine negative Linie sein kann, welche durch BG repräsentirt wird.

Nun habe ich noch von AB, und zwar von B aus, das eben gefundene Stück x wegzunehmen. Mache ich $BC = BE$, so ist AC der Rest für den ersten Fall und es ist wirklich $AC : CB = CB : AB$. Was den zweiten Fall anbelangt, so muß dadurch, daß ich von AB eine negative Linie BG wegnehme, der Rest um dieselbe positive Quantität größer werden. Ich mache deshalb $BD = BG$ und erkläre AD für den Rest.

Beweis. Ich habe wohl nur zu zeigen, daß die wegzunehmende negative Linie BG, oder die ihr gleiche und dann auch als negativ aufzufassende Linie BD die mittlere Proportionale ist zwischen der Linie AB und dem Reste AD. Zu dem Ende beschreibe man um F einen Kreis mit dem Radius FA. Alsdann ist

$$\begin{array}{ll} & BE : AB = AB : BG, \\ \text{folglich auch} & AB : BE + AB = BG : AB + BG, \\ \text{d. h.} & AB : BG = BG : AD, \\ \text{oder} & AB : + BD = + BD : AD, \\ \text{und natürlich auch} & : AB : - BD = - BD : AD, \\ \text{weil sowohl} & + BD \times + BD = + BD^2, \\ \text{als auch} & - BD \times - BD = + BD^2 \text{ ist,} \end{array}$$

wobei meine Erklärung des Multiplicirens in § 30 zu vergleichen ist.

Anmerkung. Daß durch das negative x, dessen absoluter Werth um a größer als der positive ist, eigentlich folgende Aufgabe gelöst wird: Eine Linie AB um ein solches Stück BD zu verlängern, daß die Verlängerung die mittlere Proportionale werde zwischen der gegebenen Linie AB und dieser Linie AB nebst der Verlängerung, hat schon Klügel in seinem Wörterbuch 1803 I. pag. 110 bemerkt.

§ 34.

29ste Aufgabe. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Umfang $= p$ gegeben ist.

Auflösung. Es ist eine Cathete $x = p \mp \frac{p \cdot \sqrt{2},}{2}$

und die Hypotenuse $y = - p \pm p \cdot \sqrt{2}$.

Koppe (§ 274) läßt wieder die untern Zeichen nicht gelten, weil „die Werthe von x und y offenbar $> o$ und $< p$ sein müssen." Ihn hat bereits 1855 Professor Dr. Funck in dem Culmer Programm zu widerlegen versucht, indem er pag. 14 sagt: „Es liegt uns die Verpflichtung ob, eine geometrische Deutung der unteren Zeichen aufzusuchen, und gerade dann vollends, wenn sie, wie hier allerdings der Fall ist, in gar keiner unmittelbaren Beziehung zu der gestellten Aufgabe steht.... Der andere Werth von y, nämlich $y = -(p + p\sqrt{2})$, dessen Geltung Herr Prof. Koppe in Bezug auf unsere vorliegende specielle Aufgabe allerdings mit Recht verwirft, ist aber nichts weniger als bedeutungslos im geometrischen Sinne. Beide Werthe von y seien ja aus der Gleichung $y^2 = p\,(p - 2\,y)$ hervorgegangen, welche nur die Aufgabe stelle: In der Richtung von $bc = p$ einen solchen Abschnitt bg oder bg^1*) zu bestimmen, daß das Quadrat desselben gleich ist dem Rechteck aus der gegebenen Linie in die Differenz zwischen der gegebenen Linie und dem Doppelten dieses Abschnitts. Diese Aufgabe aber lasse eine doppelte Antwort zu, doch trage die ihr zum Grunde liegende Gleichung nicht das kleinste Merkmal davon in sich, daß hinterher ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck construirt werden solle, dessen Hypotenuse jener quästionirte Abschnitt ist."

Mit einer solchen Widerlegung des Koppe wird dem Leser wohl schwerlich gedient sein. Die meinige enthält folgende

Construction in Beziehung auf die untern Zeichen. Man mache einen rechten Winkel, dessen Schenkel AC und BC gleich $x = \frac{p + p\sqrt{2}}{2}$ sind. Aber die Verbindung der Punkte A und B vollziehe man nicht dadurch, daß man ohne Weiteres die kurze Linie AB zieht, welche $= p + p \cdot \sqrt{2}$ sein würde, sondern man bewerkstellige diese Verbindung dadurch, daß man von A über D hinaus eine gerade Linie zieht, welche erst, nachdem sie vorher in E angelangt ist, bei weiterer Fortbewegung in B ankommt. Auf diese Weise erhält man ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Schenkel $x = \frac{p + p \cdot \sqrt{2}}{2}$ sind, und dessen Grundlinie $AD\ldots EB = \infty - AB = - AB = -(p + p \cdot \sqrt{2})$ ist. Fig. 2.

*) Die Punkte g und g^1 liegen bei Funck auf derselben Seite von b, weil er sich hiebei ausdrücklich die Erlaubniß nimmt, „vom Zeichen abzusehen."

Daß in dieser unsrer Figur, welche dadurch entstanden ist, daß drei Punkt B, C, A durch gerade Linien verbunden worden sind, die Winkel an der unendlich langen Grundlinie nicht 45^0, sondern $\pi + 45^0 = 225^0$ sind, kann nur einen Augenblick befremden. Sobald man das Vorurtheil überwunden hat, daß bei (ich sage nicht: in) einem ebenen Dreieck stets die Summe der drei Winkel $= \pi$ sein müsse, sobald man erkannt hat, daß diese Summe auch $= 3\,\pi$, oder $= 5\,\pi$ sein könne, wird man an unsrer Deutung der untern Zeichen, die sich auf das vorgelegte Problem selbst bezieht, nichts aussetzen können.

Fig. 3. 30ste Aufgabe. Es sollen zwei Linien x und y gefunden werden, so daß, wenn man zum Quadrat der ersten (x^2) das Quadrat der andern (y^2) hinzufügt, ein gegebenes Quadrat (a^2) zum Vorschein kommt, doch dergestalt, daß das zweite Quadrat y^2 einem Rechteck gleich werde, dessen Seiten a und x sind.

Auflösung. Es müßte also $x^2 + y^2 = a^2$ und $y^2 = ax$ sein. Aus $x^2 + ax = a^2$ folgt dann $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Nimmt man nun x positiv, so ist auch y^2 positiv und man wird sich x und y als Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks und a als Hypotenuse denken können. Nimmt man aber x negativ, so ist auch y^2 negativ; ich werde mich dann wohl hüten, sogleich nach dem y zu fragen, sondern sage: Ein negatives Quadrat y^2 zu x^2 zulegen, heißt von x^2 das nämliche positive Quadrat y^2 abziehen, demnach kann ich mir jetzt x als Hypotenuse und y und a als Catheten vorstellen. Unsere Aufgabe schließt also folgende zwei geometrische Specialaufgaben in sich:

α) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse a gegeben und bekannt, daß eine Cathete y die mittlere Proportionale zwischen der andern Cathete x und der Hypotenuse a ist.

β) Ein rechtwinkliges Dreieck zu machen, in welchem eine Cathete a gegeben ist und worin die andere Cathete y die mittlere Proportionale zwischen der gegebenen Cathete a und der Hypotenuse x ist.

So verschieden diese beiden Aufgaben α) und β) zu sein scheinen, in der Auflösung fallen sie zusammen und sind inseparabel. Hievon wollen wir uns nun auch durch rein geometrische Betrachtungen zu überzeugen suchen.

Wir haben einmal bemerkt, daß in einem rechtwinkligen Dreiecke A, B, C, nicht bloß $A,C^2, + B,C,^2 = A,B,^2 = a^2$, sondern auch $B,C,^2 = A,C, \times A,B,$ war und fordern Jemand, der unser Dreieck gar nicht gesehen hat, auf, ein Dreieck ABC zu bilden, in welchem gleichfalls $AC^2 + BC^2 = AB^2 = A,B,^2 = a^2$ und $BC^2 = AC \cdot AB$ ist. Wir werden mit dem Zeichner zufrieden sein müssen, wenn sein Dreieck unserm Dreieck A, B, C, entspricht, ihn aber nicht tadeln dürfen, wenn er außerdem vielleicht noch ein anderes Dreieck entwerfen sollte, welches unserm Dreieck zwar nicht gleich ist, aber doch allen an ihn gemachten Anforderungen entspricht. Man vergleiche, was ich in Bezug hierauf § 7 über die Umkehrung der Sätze gesagt habe.

Construction. Man theile die Linie $AB = a$ nach dem goldenen Schnitt und zwar nach § 33 sowohl in E, als auch in F, beschreibe über AB und AF einen Halbkreis, errichte in E und B die Lothe EC und BD bis zum Kreise und ziehe AC, BC und noch eine Linie von A nach D, doch letztere über G und H, so genügen beide Dreiecke ABC und ABDH . . . GA den zuletzt gestellten Anforderungen.

Beweis. 1) Weil $AE : EB = EB : a$ und auch $AE : AC = AC : a$, so ist $AC = BE$. Weil ferner $BE : CB = CB : a$, so ist auch $AC : CB = CB : AB$. Außerdem ist natürlich auch $AC^2 + CB^2 = a^2$. Demnach kann ABC das verlangte Dreieck sein.

2) Es ist auch $AB : BF = BF : AF$, außerdem $AB : AD = AD : AF$, also $AD = BF$. Nun ist ferner $AB : BD = BD : BF$.
Folglich auch $AB : BD = BD : AD$, d. h. $BD^2 = AB \,.\, AD$.

Aber in Beziehung auf das zweite Dreieck ABDHGA habe ich die Linie AD als negativ anzusehen, wie ja auch die ihr gleiche Linie BF negativ ist. Deshalb muß ich auch BD^2 als negativ ansehen und kann sagen, daß auch für's zweite Dreieck $AD^2 + BD^2 = AB^2 = a^2$ ist. Mithin könnte auch das zweite Dreieck ABDD . . . GA das verlangte sein.

Will ich dieses zweite Dreieck mir als Antwort durchaus nicht gefallen lassen, so bleibt mir nichts andres übrig, als zu den schon gemachten Bedingungen hinterher noch ausdrücklich hinzuzufügen, daß die Seite $AB = a$ Hypotenuse werden soll, was, hätte ich's gleich so gesagt, als ein Pleonasmus hätte erscheinen können. Wer freilich, wie Schmeisser (I. 21) die Aufgabe von vorne herein so präcisirt, wie wir es in α) gethan haben, dem darf man mit unserm zweiten Dreieck nicht kommen. Wenn er aber sagt, daß die zweite Auflösung auf den Widerspruch führe, daß eine negative Cathete größer sein müßte, als die Hypotenuse, und wenn er aus diesem vermeintlichen Widerspruche auf die Verwerflichkeit alles Negativen in der Mathematik schließen will, so geht er zu weit. Das Negative muß nun einmal sowohl in der idealen Arithmetik, als auch in der ihr entsprechenden realen Geometrie zugelassen werden. Daher ist es unmöglich, die Aufgabe α) durch das Dreieck ABC aufzulösen, ohne zugleich eine in ihr liegende zweite Aufgabe durch das Dreieck ABDH . . GA aufzulösen, von welcher die Aufgabe β), durch das Complementar-Dreieck ABD erledigt, nur eine populäre Uebersetzung ist. Beide Dreiecke ABC und ABD sind Zwillinge, die nicht einzeln in die Erscheinung treten. Je nachdem man nun von der Special-Aufgabe α) oder der Special-Aufgabe β) ausgeht, wird man sich eines von den beiden durch die Auflösung erhaltenen Dreiecken zu wählen haben, aber nicht wegen des übrig bleibenden Dreiecks auf die zu große Fruchtbarkeit der Wissenschaft schmähen dürfen.

Anmerkung 1. Da $AE : EB = EB : AB$, d. h. da $a - x : x = x : a$ ist, so ist auch $x : a = a : a + x$. Und da nun einerseits $a + x = BF = AD$, andererseits $AC = EB = x$ ist, so haben wir auch: $AC : AB = AB : AD$, deswegen sind die Dreiecke ABC und ABD ähnlich und die Linien AC und AD fallen zusammen.

Anmerkung 2. Vieta (Apollonius Gallus pag. 339) sagt, daß Regiomontanus († 1476) nach seinem eigenen Geständnisse unsere Aufgabe: Invenire triangulum rectangulum, cujus tria latera sint proportionalia, nicht rein geometrisch aufzulösen vermochte. Vieta sagt ferner, daß Raymarus sich irrthümlicher Weise geschmeichelt habe, in der Cathete BC den vierten Theil des Umfanges eines Kreises zu besitzen, dessen Durchmesser $AB = a$ ist, und daß derselbe den Winkel $ABC = 38^0\ 2'\ 22''$ gefunden habe. Da aber $\sin ABC = 2.\ \sin 18^0$ ist, so muß $ABC = 38^0\ 10'\ 22''$ sein.

§ 36.

Um zu zeigen, daß der Grundsatz des Descartes: negative Quantitäten seien von derselben Natur wie die positiven, nur im entgegengesetzten Sinn, in entgegengesetzter Richtung genommen, nicht allgemein richtig sei, daß er sei, wie sich Arago ausdrückt, malheureusement sujet à des exceptions, beschäftigen sich D'Alambert (Encyclopädie. Art. Negativ), Carnot (I. 7) und Förstemann (pag. 102) mit folgender Aufgabe:*)

31ste Aufgabe. Von einem Punkte A außerhalb eines Kreises eine Sekante zu ziehen,
Fig. 4 α. deren Sehne eine gewisse Länge hat.

Auflösung. Man nenne das Stück von A bis zum ersten Schnittpunkt $AE = x$, die Sehne $DE = b$, die Entfernung des Punktes A vom Kreise $AB = e$, den Durchmesser $ABF = 2\,r$, so ist

$$x\,(x + b) = e.\ (2\,r + e).$$ Hieraus folgt:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{e^2 + 2\,e\,r + \frac{b^2}{4}}.$$ Setzt man $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2 - h^2$, wo $CG = h$, so wird

$$x = -\sqrt{r^2 - h^2} \pm \sqrt{(r + e)^2 - h^2}.$$

Es ist aber $\sqrt{(r + e)^2 - h^2} = AG$ und $\sqrt{r^2 - h^2} = EG = DG$, mithin ist

$$x = -EG \pm AG = + AE,$$ aber auch $= - AD$.

„Der erste Werth, der positiv ist, sagen D'Alembert und Carnot, löst ohne Schwierigkeit die Frage auf; aber was bedeutet der zweite, der negativ ist? Es scheint, daß er nur dem Punkte D entsprechen könne, wo AD zum zweiten Male den Umkreis schneidet. Denn (Schumacher übersetzt: Aber) sucht man gerade zu $AD = y$, so folgt aus $y\,(y - b) = e.\ (2\,r + e)$,

$$\begin{aligned} y = \frac{b}{2} \pm \sqrt{e^2 + 2\,e\,r + \left(\frac{b}{2}\right)^2} &= DG + AG = + AD \\ &= EG - AG = - AE, \end{aligned}$$

dessen positiver Werth genau derselbe ist, der sich in dem ersten Falle mit dem negativen Zeichen darstellte. Also obgleich von den zwei Wurzeln der Gleichung für x eine positiv, die andere negativ ist, müssen sie doch beide nach derselben Richtung in Bezug auf den festen Punkt A genommen werden.**) Also führt die Regel, vermöge der diese Wurzeln nach entgegengesetzten Richtungen genommen werden sollen, zu falschen Resultaten. Nimmt man im Gegentheil den festen Punkt a auf dem Durchmesser bf selbst und nicht auf
Fig. 4 β. seiner Verlängerung, so würde man für x zwei positive Werthe finden und doch müßte man sie in entgegengesetzter Richtung von einander nehmen. Die Regel ist also auch falsch für diesen Fall."

---

*) Auch Newton (Arithmetica universalis, pag. 183) sagt nur: Ex radicibus vero, quae reales sunt, affirmativae et negativae ad plagas oppositas solent tendere.

**) Arago über Carnot sagt pag. 592: Or qui ne voit, que ces deux longueurs, l'une positive, l'autre négative, doivent cependant être portées du même côté du point de départ de la droite?

Hiezu fügt Förstemann (pag. 104): „Auch dieses Beispiel zeigt, daß nicht immer jeder Werth, den man bei der algebraischen Auflösung einer geometrischen Aufgabe erhält, als richtige Auflösung angesehen werden darf.... Daß die Regel (des Cartesius) zuweilen anwendbar ist, zeigen manche Beispiele. Wer aber behaupten wollte, daß diese Regel immer anwendbar sei, behauptete freilich eine Unrichtigkeit. Dies ist aber kein Grund, den gewöhnlichen Begriff negativer Größen falsch oder dunkel zu nennen, welchen Vorwurf Carnot demselben macht."

Durch Ein Wort lassen sich alle Schwierigkeiten und Bedenken gegen die negative Auflösung wegräumen. Wir fragten, wie weit der erste Schnittpunkt von A entfernt sei und verstanden unter erstem Schnittpunkt den Punkt E. Aber auch der von uns bisher als zweiter Schnittpunkt angesehene Punkt D kann als erster Schnittpunkt mit vollem Rechte angesehen werden; man muß aber zu dem Ende von A aus nicht nach E gehen, sondern nach entgegengesetzter Richtung, nach H hin und in dieser Richtung einen unendlich langen Weg machen, so wird man sicher zuerst den Kreis in D schneiden und bei fortgesetzter Bewegung E als zweiten Schnittpunkt aufzufassen haben. Bezeichnet man nun den unendlich langen Weg von A über H hinaus bis A mit ∞, so wird die Entfernung von A bis zu dem jetzigen ersten Schnittpunkt D sein $= \infty - AD$. Man kann aber zu diesem neuen ersten Schnittpunkt D von A aus auf einem kürzern Wege gelangen, wenn man von A aus nicht über H, sondern nach entgegengesetzter Richtung über E nach D geht, dann beträgt diese Entfernung, absolut genommen, AD, und weil, wenn man von A aus zuerst D erreichen will, man doch eigentlich nach H gehen muß, und weil also die Richtung von A nach H hiebei als positiv gilt, so muß das Gehen nach der entgegengesetzten Richtung, nach E G D als negativ betrachtet werden. Konnte also die Mathematik auf die Frage: wie weit der erste Schnittpunkt von A entfernt sei, außer der sogleich in die Augen springenden Antwort ($= + AE$) eine bessere Antwort geben als $= - AD$, und mußte sie nicht auch diese zweite Antwort geben? Daß wir diese zweite Antwort nicht sogleich verstanden, ist nicht ihre Schuld; es lag das an unserer Befangenheit, daß wir zwar in der Theorie die gerade Linie als unendlich definiren, aber in der Anwendung vor den Consequenzen dieser Definition zurückschrecken und auf halbem Wege stehen bleiben. Die Wissenschaft hat aber die Aufgabe, uns von unsern Vorurtheilen zu befreien und uns so allmälig zur vollen Wahrheit zu führen.

Eben so leicht ist es für den Fall, daß der feste Punkt a im Kreise liegt, den oben citirten Widerspruch zu beseitigen. So wie bei Fig. 4 α auf die Frage: wie weit der außerhalb des Kreises liegende Punkt A von dem ersten Schnittpunkt entfernt ist, zwei positive Antworten erfolgten, AE und $\infty - AD$, für welche letztere dann $- AD$ genommen werden konnte, so sind auch bei Fig. 4 β nur zwei positive Antworten möglich, weil die Größe der Entfernung zunächst immer absolut aufzufassen ist. Die Entfernung eines (ersten) Schnittpunktes von a ist entweder $= + ad$ oder $= + ae$. Daß diese Entfernungen auf entgegengesetzter Seite von a liegen, spricht hier eben so wenig für Antworten mit entgegengesetzten Zeichen, als dort die gleiche Richtung von AD und AE das Minuszeichen vor AD entkräften konnte. Ja, wenn man bei Fig. β fragen möchte: wie weit a von einem zweiten Schnittpunkte entfernt ist, wie weit man z. B. auf der Linie de von a aus nach einer und derselben Richtung (e) hin zu gehen hat, bevor man auf diesem Wege zu dem zweiten Schnittpunkt d gelangt, dann würde man statt der eigentlichen Antwort: ∞ — a d sich auch die Antwort: — a d gefallen lassen können.

Ich glaube hiemit vollständig die Quelle des Irrthums der in diesem Paragraphen citirten Autoren nachgewiesen zu haben. Sie verwechseln den ersten Schnittpunkt mit dem zweiten; sie verlangen von der Analysis, daß auf ihre Frage: wie weit die festen Punkte A oder a von einem ersten Schnittpunkt, etwa E oder e entfernt (+ AE und + ae) sind, sie zugleich darauf antworten soll: wie weit diese festen Punkte von dem zweiten Schnittpunkte D oder d entfernt sind? was allerdings + AD und — a d wäre. Und das ist doch zu viel verlangt. Also nicht die Analysis (vergl. pag. 5 Anm.) „antwortet auf Fragen, welche man an sie nicht gestellt hat;" sondern selbst bedeutende Analytiker haben bisher von ihr Antwort auf nicht gestellte Fragen erwartet.

Anmerkung. Eigenthümlich ist noch die Art, wie Bézout (Cours de Mathematiques III. pag. 321 1798) die negative Auflösung erklärt. Er verlängert alle Linien über A hinaus rückwärts um sich selbst, zeichnet auch um C[1] einen eben solchen Kreis, wie der gegebene ist, und während AE die positive Auflösung ist, soll nach ihm AD[1] die negative Auflösung vorstellen, da sie ja zu AE eine entgegengesetzte Lage hat. Wir kommen auf seine Ansicht noch bei einer anderen Gelegenheit zurück und bemerken jetzt nur, daß in unserer Aufgabe nur von einem Kreise die Rede war und nicht von zwei Kreisen.

Fig. 4 γ.

§ 37.

Ich habe in Betreff der eben behandelten Aufgabe noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen. Bisher ist $b = 2\beta$ als die Sehne DE stillschweigend kleiner als der Radius r vorausgesetzt worden. Wie aber, wenn $\beta > r$ würde? Der Geometer wird sagen: dann ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich. Aber der arithmetische Ausdruck des vorigen Paragraphen $x = -\beta \pm \sqrt{e^2 + 2er + \beta^2}$ führt auch unter dieser neuen Voraussetzung auf nichts Imaginäres. Sollen wir unter gewissen Umständen auch das Recht haben, selbst reelle positive Wurzeln zu verwerfen? Bevor ich hierüber Aufschluß zu geben versuche, wollen wir hören, was Newton pag. 183 in Bezug auf solche Erscheinungen sagt: Sunt tamen radices aequationum aliquando possibiles ubi Schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in Schemate quod ad aequationem nil spectat. Ut si in semicirculo ADB datis diametro AB et linea inscripta AD, foret $\frac{AD^2}{AB} = AC$. Et per hanc aequationem AC realis exhibetur quantitas, ubi linea inscripta AD major est quam diameter AB; per Schema vero AC tunc evadit impossibilis. Nimirum in schemate linea AD supponitur inscribi in circulo, atque adeo diametro circuli major esse non potest; in aequatione vero nihil est quod a conditione illa pendeat. Ex hac sola linearum conditione colligitur aequatio, quod sint AB, AD et AC continue proportionales. Et quoniam aequatio non complectitur omnes conditiones schematis, non necesse est ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quidquid amplius est in schemate quam in aequatione, potest illud limitibus arctare, hanc non item.

In Bezug auf unsere Aufgabe würde man also im Sinne Newton's zu sagen haben: der gefundene arithmetische Ausdruck löse ohne Einschränkung nur die Aufgabe, zwei Linien oder Zahlen zu finden, deren Produkt $p^2 = e\,(e + 2\,r)$ und deren Unterschied $= 2\,\beta$ sei; wolle man den Ausdruck aber in Verbindung mit unserm geometrischen Probleme bringen, dann müsse man sich die Einschränkung gefallen lassen, β nicht größer als r anzunehmen.

Ich aber sage so: So lange $\beta < r$ war, konnte ich in § 36 ein rechtwinkliches Dreieck CGE machen, in welchem r die Hypotenuse und β die Cathete war, es war dann $CG^2 = h^2 = r^2 - \beta^2$ etwas positives; ich konnte dann ferner das andre rechtwinkliche Dreieck CGA machen, in welchem $AG = \sqrt{E^2 - h^2}$ und $x = -\beta \pm \sqrt{E^2 - h^2}$ war, wobei $E = r + e$ angenommen wird. Daß dies alles am einfachsten dadurch zu bewerkstelligen ist, daß man aus C mit dem leicht zu construirenden Radius h einen Kreis beschreibt und dann aus A an denselben eine Tangente legt, ist kaum nöthig zu erinnern. Fig. 4 α.

So bald aber $\beta > r$ wird, bleibt für h^2 etwas negatives übrig, etwa $= - H^2$. Wir haben dann $r^2 - \beta^2 = - H^2$, oder $\beta^2 - r^2 = H^2$. Von dem Augenblicke an muß β die Hypotenuse und r eine Cathete werden; es entsteht das Dreieck GCB, in welchem $GC = H$ ist. Natürlich muß nun in dem andern Dreieck CGA die Linie $AG = \sqrt{E^2 + H^2}$ und die unbekannte AE oder — AD, die dadurch gefunden wird, daß man aus G mit $BG = FG = \beta$ einen Kreis beschreibt, $x = -\beta \pm \sqrt{E^2 + H^2}$ sein. Fig. 4 δ.

Um den naheliegenden Vorwurf abzuwehren, daß der Kreis um den Mittelpunkt G nicht der gegebene Kreis um den Mittelpunkt C sei, bemerke ich vor allem, daß ich auch im vorigen § nicht gezwungen war, die zur arithmetischen Auflösung führende Hilfslinie ABF gerade durch den Mittelpunkt C gehen zu lassen, man konnte auch dort zum erwünschten Ziele gelangen, wenn BF bloß eine gewöhnliche Sehne und nicht gerade der Durchmesser geworden wäre. Sollen freilich beide Figuren und die sich daran knüpfenden Auflösungen völlig gleichberechtigt erscheinen, so muß zunächst auch der Kreis um C noch zurücktreten und unser Problem etwa folgende Fassung bekommen:

Auf einer Linie sind die Punkte F, B und A gegeben, man soll durch die Punkte F und B einen möglichst kleinen Kreis legen, so daß wenn man aus A an denselben eine Sekante AED zieht, ihre Sehne DE eine gegebene Länge $2\,\beta$ habe; auch soll man noch angeben, wie weit A von dem ersten Schnittpunkte der Sekante entfernt ist.

§ 38.

Wir müssen noch auf den schon gelegentlich zur Sprache gekommenen Fall, wenn der feste Punkt a innerhalb des Kreises liegt, zurückkommen. Es sei $ac = E$, $bc = cf = r$, $ead = 2\beta$, ae oder $ad = x$, ein durch a gehendes, vom Kreise begrenztes Loth auf $bf = 2p$ und $r^2 - \beta^2 = h^2$. Fig. 4 β.

Da nun $x\,(2\,\beta - x) = (r - E)\,(r + E) = r^2 - E^2 = p^2$ ist, so haben wir: $x = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - p^2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - r^2 + E^2} = \beta \pm \sqrt{E^2 - h^2} = \beta \pm d$, wo $d = ag$ ist.

1) So lange $\beta > p$, aber $< r$ ist, stoßen wir weder von Seiten der Geometrie (des Schema's), noch von Seiten der Arithmetik (der Gleichung) auf eine Schwierigkeit. Wir be-

schreiben aus c mit dem Radius h einen Kreis, suchen auf dem Umfange desselben einen Punkt
Fig. 4 β. g, dessen Distanz von a, nämlich d die Eigenschaft hat, daß $d^2 = E^2 - h^2 = \beta^2 - p^2$ ist, ziehen ag und in g eine Tangente egd. Da diese Tangente mit der Linie ag zusammenfällt, so ist klar, daß $x = ae = \beta - d$ und $x = ad = \beta + d$ ist. Es ist hier, wie man sieht, sowohl h^2 als auch d^2 positiv.

2) Ist aber $\beta > r$, also $\beta^2 - r^2 = H^2$ und $x = \beta \pm \sqrt{E^2 + H^2}$, dann bilden wir uns erst die congruenten Dreiecke bcg und fcg, in welchen $bg = bf = \beta$, also $cg =$
Fig. 4 ε. H ist, ziehen durch a eine Linie $ag = \sqrt{E^2 + H^2} = D$ und mit dem Radius β aus g einen Kreis, in welchem bei gehöriger Verlängerung von ag die Linie ad oder ae, also $x = \beta \pm \sqrt{E^2 + H^2} = \beta \pm D$ ist. Hier ist h^2 negativ, aber d^2 positiv. Wir haben hiemit eine Figur erhalten, gegen die der Geometer nichts wird einwenden können, zumal wenn wir die Aufgabe in folgende, dem Schlusse des vorigen § analoge Fassung bringen: Auf einer Linie sind die Punkte b, a, f gegeben; man soll einen möglichst kleinen Kreis durch die äußern Punkte b und f legen, so daß, wenn man dann durch a eine Sehne zieht, diese eine vorgeschriebene Länge $= \beta$ erhalte.

3) Schwieriger wird es sein, die Algebra mit ihrem imaginären Ausdruck in dem Falle durch eine angemessene Zeichnung zu befriedigen, wenn $\beta < p$ ist, d. h. wenn h^2 positiv, aber d^2 negativ ist, da dann eben die kleinste Sehne, die man durch a legen kann, $2p = hak$ ist. Natürlich wird Niemand mehr verlangen, als daß wir bei einer Aufgabe, die Unmögliches for-
Fig. 4 ζ. dert, unser möglichstes thun. — Wir beschreiben wieder, wie in 1), aus c mit dem Radius h einen Kreis; wenn wir später in irgend einem Punkte seiner Peripherie eine Tangente bis an den Umfang des gegebenen Kreises ziehen, so ist diese Linie für den gegebenen Kreis eine Sehne und hat die verlangte Länge $= 2\beta$. Um aber den richtigen Punkt g, durch welchen die Tangente zu ziehen ist, zu finden, müssen wir seine Distanz vom Punkte a, der nun innerhalb des kleinen Kreises liegt, kennen. Es ist jetzt $d^2 = \beta^2 - p^2 = E^2 - h^2$ etwas Negatives, etwa $= -\delta^2$. Darin, daß d^2 negativ ist, ist deutlich ausgesprochen, daß a nicht auf der durch g zu ziehenden Tangente liegen kann. Das ist, wie wir in 1) gesehen haben, nur möglich, wenn d^2 positiv ist, weil nur dann der Winkel cga ein Rechter sein kann und weil nur dann ga mit der durch g gelegten Tangente zusammen fallen kann. Die negative Antwort giebt aber durch ihre Quantität auch zu erkennen, wie groß das Hinderniß ist, welches verursacht, daß die Aufgabe nicht mehr möglich zu lösen ist. In unserm Falle können wir aus $\delta^2 = h^2 - E^2$ lernen, wie weit wir uns **wenigstens** von dem richtigen Punkte a zu entfernen haben, um auf dem Umfange des innern Kreises denjenigen Punkt zu finden, durch welchen die Tangente gezogen werden muß. Da $al = h - E$, aber $\delta = \sqrt{(h - E)(h + E)}$, also $\delta > al$ ist, so finden wir stets solche Punkte g und g′, wenn wir aus a mit dem Radius δ einen Kreis beschreiben. Natürlich sind die dadurch entstandenen Dreiecke cag und cag′ bei a rechtwinklich, die Linie hgak ist $= 2p$ und die Tangente dge ist diejenige Linie, welche den Umständen noch am meisten entspricht. Ihre Länge ist $= \beta$, wer von d nach a und dann von a nach e gelangen und dabei in beiden Fällen möglichst lange, also gleich lange auf der Tan-

gente verweilen will, wird finden, daß der erste Weg x mit $\beta + \delta$, der andere Weg x mit $- \delta + \beta$ zu bezeichnen ist, indem man bei beiden Wegen die Linie ga in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufen hat. Wer aber noch immer den Punkt a auf der Tangente sucht oder die verlangte Sehne nur durch a legen will, erhält zur Antwort, daß dann $d = i \, . \, \delta$, $x = da = \beta + i \, . \, \delta$, und $x = ae = - i \, . \, \delta + \beta$ ist.

Ich hätte weiter nichts hinzuzufügen, wenn ag auf de senkrecht stände, weil man gewohnt ist, bei bloß äußerlicher Darstellung der Gegensätze das Imaginäre auf die Richtung der reellen Größen senkrecht zu stellen. Da sich hier aber für das Imaginäre zwar eine laterale, aber nicht gerade perpendiculäre Richtung herausgestellt hat, so sehe ich mich genöthigt, damit auch der Bedenklichste meine Construction des imaginären Ausdrucks annehmen könne, zu der schon in 2) gegebenen Fassung der Aufgabe noch Folgendes hinzuzusetzen: Da es nicht möglich ist, selbst bei dem kleinsten Kreise um bf, durch a eine Sehne zu legen, welche $<$ hak ist, so soll man, wenn dessenungeachtet $\beta < p$ ist, auf dieser kleinsten Sehne hak einen Punkt g, möglichst nahe an a angeben, durch welchen sich eine solche Sehne 2β ziehen läßt.

§ 39.

Nach demselben Principe, welches den vorigen Paragraphen zum Grunde liegt, erkläre ich das Zeichen der Secante in den verschiedenen Quadranten.

Lacroix (pag. 114) sagt in dieser Beziehung: „Ueberhaupt, so oft von Abständen die Rede ist, die sich auf einen festen Punkt beziehen, und auf einerlei oder parallelen Linien gerechnet werden, müssen die mit dem Zeichen — behafteten eine den mit dem Zeichen + behafteten entgegengesetzte Lage annehmen.... Diese Betrachtungen lassen sich nicht unmittelbar auf die Secante anwenden, weil sich ihre Richtung in jedem Augenblick ändert; indessen hat sie nichts desto weniger ein ihren verschiedenen Lagen eigenthümliches Zeichen, welches sich aus ihrem analytischen Ausdruck $\left(\frac{1}{\text{cosinus}}\right)$ herleiten läßt; allein nur bei Linien, welche immer dieselbe Richtung behalten, stimmt die Aenderung des Zeichens unmittelbar mit der Aenderung der Lage überein."

Diese Darstellung deckt die Schwierigkeiten, die in der Sache liegen, auf, aber auf eine Lösung derselben kann sie nicht den geringsten Anspruch machen. Der Lösung näher kommt schon sein Uebersetzer Ideler, welcher pag. 115 in einer Anmerkung sagt: „Es scheint mir, daß sich von den Aenderungen des Zeichens der Secante eine ganz natürliche Erklärung geben läßt, wenn man erwägt, daß diese Linie wirklich eine entgegengesetzte Lage annimmt, wenn sie die Tangente nach dem entgegengesetzten Ende hin erreicht. In der That ist es bei dem Bogen im zweiten und dritten Quadranten, für welchen der analytische Ausdruck der Secante negativ ist, nicht der Halbmesser selbst, der die Tangente erreicht, sondern der ihm entgegengesetzte." Aber dieser entgegengesetzte Halbmesser erscheint bei Ideler noch als etwas fremdartiges, nur herbeigezogenes.

Ich denke mir die Sache so: Weil die Secante in jedem Augenblick ihre Richtung verändert, so kommt es bei ihr auf die Richtung gar nicht an. Wer die Secante eines Winkels haben will, will nichts weiter wissen, als wie weit gewisse zwei Punkte, absolut genom- Fig. 5.

men, von einander entfernt sind, nämlich der Mittelpunkt des Kreises C und der Punkt, in welchem der bewegliche Radius CB, über B hinaus verlängert, die Tangete für den festen Punkt A trifft. Diese Entfernung wächst mit dem Winkel und wird schon für 90^0 unendlich genannt, beträgt aber noch lange nicht, was ich in § 33 eine volle Unendlichkeit (∞) genannt habe, ich bezeichne daher vorläufig diese Entfernung für 90^0 nur mit u. Da man nun schon längst gewohnt ist, die geraden Linien als Kreise mit ungemein großem Radius anzusehen, so wird man auch mir es nicht verargen können, wenn ich mir die Tangentenlinie und die Secantenlinie für 90^0 unter dem Bilde von Meridianen vorstelle, die Ebene des Kreises als eine Kugel und den feststehenden Radius AC als einen endlichen Theil des Aequators. Habe ich mich mit diesem der Unendlichkeit nicht unwürdigen Bilde vertraut gemacht, so erkenne ich sogleich, daß es außer dem schon in Betrachtung gezogenen Schnittpunkt (N) noch einen zweiten (S) geben muß, welchen ich aber auf dem angedeuteten Wege erst erreiche, wenn ich in Gedanken ∞—u durchwandert habe, kürzer erreiche ich aber dieses Ziel, wenn ich in entgegengesetzter Richtung den Weg u durchlaufe, daher kann man sagen, und sagts auch, daß Sec. $90^0 = \pm$ u ist. Man erkennt nebenbei, daß $u = \frac{\infty}{4}$ ist.

Wird der Winkel stumpf = ABC, so denke ich mir auf meiner fingirten Kugel die Secantenlinie als einen Horizont. Die Entfernung des Cardinalpunktes C von dem Punkte, wo der bewegliche Radius CB über B hinaus verlängert die Tangente zum ersten Male trifft, wird nun (allmälig) größer als u; bezeichne ich die absolute Länge der Linie CD mit e, so beträgt sie $2 . u - e$. Da dieser Schnittpunkt aber außer unserm Gesichtsfelde liegt, so ist er denn auch bisher übersehen worden. Wir wollen daher den beweglichen Radius noch über diesen ersten Schnittpunkt hinaus verlängern, bis wir die Tangente zum zweiten Male in D erreichen. Die Länge des Weges, den wir durchlaufen haben, beträgt jetzt $\infty - e$. Da wir aber diesen einen sichtbaren Schnittpunkt leichter erreichen können, wenn wir in entgegengesetzter Richtung gehen, so sagen wir: Sec. ACB = — e. Man erläßt mir gewiß das weitere Eingehen auf die Sekanten im dritten und vierten Quadranten, und gestattet mir wohl noch die Bemerkung, daß nach allem, was vorliegt, man unter Sekante eines Winkels zu verstehen hat die Entfernung des Punktes C von demjenigen Schnittpunkt des über B hinaus verlängerten beweglichen Radius, welcher dem festen Punkte A am nächsten liegt (welches dann bald der erste, bald der zweite Schnittpunkt ist); nur wenn der Winkel 90^0 ist, sind beide Schnittpunkte gleich berechtigt und müssen daher beide beachtet werden.

Daß, in so fern namentlich Sec. $x = \pm \sqrt{1 + tg\, x^2}$, eigentlich jede Sekante nach Belieben als positiv oder negativ zu betrachten ist, gehört nicht hierher und hat seine Erledigung schon im Eingange des § 33 erhalten. Es ist mir ja gegenwärtig genau die Richtung vorgezeichnet, in welcher ich von C aus auf dem beweglichen Radius zu gehen habe, um die Tangente möglichst nahe an A zu erreichen, nämlich immer über B hinaus; daher habe ich keine Wahl.

Hebt man die oben gemachte Beschränkung auf, wornach der Schnittpunkt sich in endlicher Entfernung von A befinden soll, dann haben nicht nur die Sekanten sämmtlicher Winkel, sondern auch deren Tangenten stets zwei Werthe, die sich nicht bloß durch + und — von einander unterſcheiden, ſondern durch $\frac{\infty}{2}$, durch die Hälfte derjenigen Strecke, die ich eine volle Unendlichkeit genannt habe. Erſt die Aufhebung dieſer Schranke macht es vollſtändig klar, daß allmälige Aenderungen der Winkel auch ſtets nur allmälige Aenderungen der genannten trigonometriſchen Linien zur Folge haben, daß die Sprünge aus + u in — u, zu deren Annahme man nach der gewöhnlichen Anſicht*) gezwungen iſt, nur bei der Vernachläßigung eines der beiden Werthe zum Vorſchein kommen.

§ 40.

Wie wenig man ſich in die negative Auflöſung ſelbſt bei minder ſchwierigen Fällen zu finden wußte, davon nur ein Beiſpiel aus Klügel (Mathem. Wörterbuch I. pag. 128). Ihn beſchäftigt folgende Aufgabe:

32ſte Aufgabe. Ein Halbkreis ABC iſt gegeben und auf dem Durchmeſſer ein Punkt D; man ſoll durch D einen Halbkreis wie DEF, aus einem Mittelpunkte G auf AC beſchreiben, ſo daß auf der berührenden CEB das Stück EB von dem Berührungspunkte bis an den Umfang des gegebenen Kreiſes dem Stück AD gleich ſei. Fig. 6.

Auflöſung. Setzt man AD = BE = a, DC = b, DF = 2 x und den Mittelpunkt von DEF in G, ſo findet Klügel aus der Proportion CE : CG = EB : AG nach einer Quadrirung die Gleichung $b.(b - 2x).(a + x)^2 = a^2.(b - x)^2$, welche, „gehörig reducirt", wie er ſagt, dieſe wird:

I. $2.b.x^2 + (a^2 + 4ab - b^2)x - 2a.b^2 = o.$

Wenn man wirklich gehörig reducirt, ſo findet man in jedem Gliede den Exponenten von x um eins höher. Alſo iſt unter andern x = o, was auch einen ſehr guten und leicht zu erklärenden Sinn hat. Dieſe Auflöſung wird aber ohne Weiteres von Klügel verworfen. Und von den beiden andern, noch übrigen Wurzeln läßt er auch nur die poſitive gelten; die andre negative ſei hier nicht brauchbar. Denn wenn x = DG negativ genommen würde, ſo würde AG kleiner als AD oder kleiner als EB ſein, welches nicht möglich ſei. Durch die Quadrirung ſei die Gleichung auf einen höhern Grad gebracht, als der Frage zukommt. Die negative Wurzel diene nur als Mittel, die Relation von x gegen a und b rational zu machen, und ſei für die geometriſche Frage als eine fremde Wurzel anzuſehen.

Daß die negative Wurzel keine fremde ſei, davon werden uns folgende Betrachtungen überzeugen. Da es ſich hier um den Abſtand des Punktes G von dem feſten Punkte D auf einer der Lage nach gegebenen Linie AC handelt, ſo muß, wie ſchon Lacroix in der § 39 citirten Stelle richtig bemerkt, das negative x auf der Linie AC von D aus eine der poſitiven entgegengeſetzte Lage bekommen. Während das poſitive x = DG rechts von D liegt, muß in Bezug auf das negative x der Mittelpunkt des geſuchten Halbkreiſes links von D liegen.

---

*) So ſagt noch Pr. Dr. O. Schlömilch (Grundzüge einer wiſſenſchaftlichen Darſtellung der Geometrie des Maaßes I. pag. 181, 1854): Bei 270° ſpringt die Sekante wieder aus dem Negativen ins Poſitive über, nämlich Sec. $(270^0 - o) = -\infty$, Sec. $(270^0 + o) = +\infty$.

Auch Lübſen (Analytiſche Geometrie 1862 pag. 88) ſpricht bei einer ähnlichen Gelegenheit von einem ſofortigen und plötzlichen Umſchlagen von $+\infty$ in $-\infty$.

Wir tragen daher den absoluten Werth des negativen x von D aus nach links auf AC auf; — — es reiche bis g —, beschreiben mit gD einen Halbkreis und ziehen von C an denselben die Tangente Ce. Sollte sich nun finden, daß eb = AD = a ist, so möchte die negative Wurzel doch wohl nicht als eine fremde beseitigt werden dürfen. Zu dieser Einsicht werden wir am schnellsten kommen, wenn wir die eigentliche Aufgabe so aussprechen:

Durch den Punkt D soll ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt nicht jenseits D, sondern diesseits D liegt, beschrieben werden, so daß dasjenige Stück der berührenden Linie Ce, welches zwischen beiden Kreisen liegt (be) = AD = a werde

Jetzt ist Ag = x — a, Cg = b + x. Weil nun

1) $Ce^2 = CD . Cf = b . (b + 2x)$

2) $Ce^2 : Cg^2 = eb^2 : Ag^2$, d. h. $b . (b + 2x) (x - a)^2 = (b + x)^2 . a^2$,

so folgt hieraus

II. $x . [2 b x^2 + (b^2 - 4 a b - a^2) x - 2 a b^2] = o.$

Man sieht, diese Gleichung II. hat, absolut genommen, die nämlichen Wurzeln wie die Klügel'schen, nur sind sie an Zeichen entgegengesetzt. Trägt man mithin den jetzigen positiven Werth von x von D aus links auf AB auf, so muß der andere Endpunkt auf den schon besprochenen Punkt g fallen, und es ist somit bewiesen, daß wirklich auch eb = a ist. Daher enthält die negative Wurzel der Gleichung I. keine unsrer Aufgabe fremde Lösung, sie kann sogar durch die uns schon geläufig gewordene Bemerkung, daß wir von D aus auch nach g gelangen können, wenn wir in Gedanken fortwährend (∞ — DG) rechts gehen, zu einer mit der positiven Lösung theoretisch ganz gleich berechtigten erhoben werden.

Doch ich habe noch mehr zu sagen: Klügel löst die Aufgabe noch einmal, indem er die Entfernung des unbekannten Punktes F von C = x nennt. Er kommt dabei auf folgende Gleichung:

$$b . x^3 - (a^2 + 4 a b + 2 b^2) x^2 + (2 a^2 . b + 4 a b^2 + b^3) . x - a^2 . b^2 = o.$$

Die Wurzel x = b ist nach ihm wieder eine fremde, zur Frage nicht gehörige, weil sie den Durchmesser des gesuchten Kreises = o machen würde; von den beiden andern Wurzeln, die beide positiv sind, behält er nur die kleinere (FC), die größere (fC) verwirft er abermals, trotz dem, daß sie positiv ist, nur, weil sie die größere ist! — Soll etwa, wie er es vorhin von der negativen Wurzel Dg behauptete, nun auch die größere positive Wurzel fC, „nur als Mittel dienen, die Relation von x gegen a und b rational zu machen"? — Warum gerade die größere und nicht die kleinere? Und ist denn das Rationalmachen etwas falsches, daß es falsche Antworten auf meine Frage hervorbringen könnte? Und konnte Klügel nicht auch gleich, statt erst anzunehmen, daß vier Linien in Proportion stehen, annehmen, daß ihre Quadrate proportionirt sind, wie ich es eben gethan habe? So stellt der Eifer gegen das Negative selbst das Positive in Frage.

Anmerkung. In Ohm's Schrift: Der Geist der mathematischen Analysis, 1842, pag. 10, finde ich folgende Stelle: „Stellt x den Radius eines Kreises vor, so ist eine stillschweigende Nebenbedingung, daß x eine positive ganze oder gebrochene Zahl sein muß. Giebt also die Gleichung für x einen einzigen Werth nur, und ist dieser imaginär oder negativ, so ist in beiden Fällen, in dem letztern so gut wie in dem erstern, die Aufgabe selbst geradezu unmöglich, und die früher so gewöhnliche Ansicht, als dürfe man das negative Resultat nur im entgegengesetzten Sinne nehmen, um doch eine Auflösung der gegebenen Aufgabe zu haben, ist als eine der irrigsten und unbegründetsten zu bezeichnen." Ich darf mich wohl jeder Gegenbemerkung enthalten.

§ 41.

Lambert (Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung I. § 298, 1765) stellt folgende

33ste Aufgabe. Es seyen die vier Objecte A, B, C, D in gerader Linie und der Abstand AB = a, CD = c gegeben, hingegen der mittlere Theil BC = x unbekannt... Man geht in O und mißt die Winkel AOB = u, AOC = v, AOD = w. Fig. 7.

Auflösung (1). Es sei OP eine aus O auf AD fallende Perpendicularlinie und der Winkel AOP = y, so findet Lambert, indem er von a = AP — BP und c = DP — CP ausgeht, in Folge zweier von einander unabhängigen Fehler:

$$\mathrm{tg}\,.\,y^2 + \mathrm{tg}\,.\,y\left[(\mathrm{cotg}\,.\,v + \mathrm{cotg}\,.\,w) - \frac{a}{c}\,.\,\mathrm{tg}\,.\,u\,.\,(\mathrm{tg}\,.\,w - \mathrm{tg}\,.\,v)\right]$$
$$= \frac{a}{c}\,.\,(\mathrm{tg}\,.\,w - \mathrm{tg}\,.\,v) - \mathrm{cotg}\,.\,w\,.\,\mathrm{cotg}\,.\,v.$$

Unter Vermeidung dieser Fehler hätte er gefunden:

$$\mathrm{tg}\,.\,y^2 + \mathrm{tg}\,.\,y\left[(\mathrm{cotg}\,.\,v + \mathrm{cotg}\,.\,w) - \frac{a}{c}\,.\,(\mathrm{cotg}\,.\,v - \mathrm{cotg}\,.\,w)\right]$$
$$= \frac{a}{c}\,.\,\mathrm{cotg}\,.\,u\,.\,(\mathrm{cotg}\,.\,v - \mathrm{cotg}\,.\,w) - \mathrm{cotg}\,.\,v\,.\,\mathrm{cotg}\,.\,w.$$

Dann fährt er fort: „Woraus man sieht, daß zween Fälle möglich sind, und der wahre aus andern Umständen muß bestimmt werden, wenn man ihn nicht sonst leicht erkennen kann.... Dieser andere Fall ist (hier) derjenige, wo die Linie AD zwo von den Linien AO, BO oder CO, DO auf der andern Seite durchschneidet, wenn sie außerhalb O verlängert werden."

Statt auf diesem richtigen Wege zur Deutung der zweiten Wurzel der Gleichung weiter fortzugehen, findet Meier Hirsch (pag. 83), daß nach Lambert's Formel „schwer zu rechnen" sei, und beachtet bei seiner leichtern Auflösung die negative Wurzel gar nicht.

Eine noch elegantere Auflösung des Problem's hat Dr. Poppe (Ebene Trigonometrie, Frankfurt am Main, 1847, pag. 82) mitgetheilt.

Auflösung (2). Er nennt AOB = α, BOC = β, COD = γ, und findet aus

$$\mathrm{BO} : c + x = \mathrm{Sin}\ D : \mathrm{Sin}\ (\beta + \gamma)$$
$$\mathrm{CO} : a + x = \mathrm{Sin}\ A : \mathrm{Sin}\ (\alpha + \beta)$$
$$a : \mathrm{BO} = \mathrm{Sin}\ \alpha : \mathrm{Sin}\ A$$
$$c : \mathrm{CO} = \mathrm{Sin}\ \gamma : \mathrm{Sin}\ D,$$

folgende Gleichung:

$$(x + x)\,.\,(c + x) = \frac{a\,.\,\mathrm{Sin}\ (\alpha + \beta)}{\mathrm{Sin}\ \alpha} \times \frac{c\,.\,\mathrm{Sin}\ (\beta + \gamma)}{\mathrm{Sin}\ \gamma}$$

Setzt man der Kürze wegen $(a + x) \cdot (c + x) = d^2$, so hat man

$$x = + \sqrt{\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + d^2} - \frac{a + c}{2} =, \text{ p und auch}$$

$$x = - \sqrt{\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + d^2} - \frac{a + c}{2} = - (p + a + c).$$

Aber nun erklärt Poppe gerade zu: „wobei jedoch von den beiden vor der Wurzel stehenden Zeichen das negative zu verwerfen ist.“

Was wir von dem negativen Werthe zu halten haben, werden wir am besten aus der schönen, antiken Auflösung des Baltrusch (Grunert, Archiv, 16, 245) erfahren, obgleich auch er, wie sich zeigen wird, von der negativen Wurzel nicht den rechten Begriff hatte.

Auflösung (3). Beschreibe über c einen Bogen, der den Winkel γ faßt, mache den Bogen CG, einem Peripheriewinkel β entsprechend, und den Bogen GH, einem Peripheriewinkel α entsprechend; ziehe durch G eine Parallele mit CD, mache GK = a, verlängere sie bis J und beschreibe durch K, H, J einen Kreis, welcher CD in A (und E) trifft. Ziehe von A nach H (und ebenso von E nach H) eine Linie. Dadurch bekommt man den Punkt O (und O′). Hierauf ziehe GOB (so wie GO′F), dann OC und OD (so wie O′C und O′D).

Beweis 1) daß O der richtige Punkt ist.

Da $\delta = HOD = 180^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$, also $AOD = \alpha + \beta + \gamma$ ist, da ferner $COD = \gamma$, $GOH = \alpha = AOB$ ist, so muß $BOC = \beta$ sein. Dann ist $KAO = GOH$, weil beide gleich $GJH = \alpha$ sind. Also ist $AK \parallel GB$, folglich AKGB ein Parallelogramm, mithin $AB = a$.

2) In Betreff von O′ sagt Baltrusch:

„Aehnliches gilt von dem Punkte O′. Denn es ist auch $FO'E = \alpha$, $EO'D_{,} = \delta$, $DO'C = \gamma$. Auch ist der Abschnitt FE der Linie FC der gegebenen a gleich.“ Nämlich.... „Aber auch der Punkt O′ erfüllt die geforderten Bedingungen. Denn $HEK = HO'G = \alpha$, also $EK \parallel FG$ und $JK \parallel AF$, daher $EF = GK = a$. Und hieraus folgt $DE = BC$.“

Daß $ED = BC$ ist, beweiset Baltrutsch nachträglich in einem besonderen Satze (pag. 247), für unsern Zweck genügt folgendes: Man verlängere die Linien BOG und EO′H, bis sie sich in N treffen, dann hat man nach dem Satze des Menelaus in Bezug auf das Dreieck BEN und die Transversalen GO′F und HOA

$$\frac{NG}{GB} : \frac{NO'}{O'E} = \frac{EF}{FB} : 1$$

$$\frac{NH}{HE} : \frac{NO}{OB} = \frac{BA}{AE} : 1.$$

Da nun schon bewiesen ist, daß $EF = a = AB$ ist, und da folglich auch $FB = AE$ ist, so muß auch sein:

$$\frac{NG}{GB} : \frac{NO'}{O'E} = \frac{NH}{HE} : \frac{NO}{OB}.$$ Da ferner

$NG : NO' = NH : NO$, so haben wir auch

$GB : O'E = HE : OB$, oder $GB \,.\, OB = O'E \,.\, HE$.

Weil nun einerseits $GB \,.\, OB = DB \,.\, CB$ ist, und andererseits

$O'E \,.\, HE = DE \,.\, CE$, so ergiebt sich

$DB \,.\, CB = DE \,.\, CE$, oder $BC : CE = DE : BD$, oder $BC : BE = DE : BE$.

Demnach ist in der That $BC = DE$.

3) Allerdings hat hiemit Baltrusch bewiesen, daß von dem Punkte O' Aehnliches gilt, wie von dem Punkte O. Dem füge ich, um die Aehnlichkeit noch mehr hervorzuheben, hinzu: so gut wie HOA die erste Gesichtslinie, GOB die zweite, OC die dritte und OD die vierte war, mit demselben Rechte ist HO'E die erste, GO'F die zweite, O'C die dritte, O'D die vierte Gesichtslinie. Auch bei O' liegt also dem von den beiden ersten Sehstrahlen eingeschlossenen Winkel α die Strecke a, dem von den beiden letzten Sehstrahlen eingeschlossenen Winkel γ die Strecke c gegenüber. Was kümmert es uns aber, daß dem von der ersten und vierten Visirlinie eingeschlossenen Winkel δ eine Strecke DE gegenüberliegt, die gleich BC ist? Sollte der Punkt O' allen geforderten Bedingungen entsprechen, so müßte der von der zweiten und dritten Visirlinie eingeschlossene Winkel $= \beta$ sein, während er doch $= 180^0 - \beta$ zu sein scheint, und es müßte nun die ihm gegenüberliegende Strecke CF zur Discussion kommen und nicht bloß der Theil DE; es hätte müssen nachgewiesen werden, daß während $BC = p$ ist, nur $CF = -(p + a + c)$ gesetzt werden kann.

4) Uns wird es nicht schwer werden, die beiden noch übrig gebliebenen dunkeln Punkte aufzuklären. Ich nannte vorhin vorläufig O'C den dritten und O'D den vierten Strahl. Dieser Ausspruch bedarf einer nochmaligen Erwägung. Soll, während O'E der erste, O'F der zweite Strahl ist, eine Linie der dritte sein, so muß sie auf den zweiten folgen, muß rechtshin, hinter dem zweiten liegen. Wir haben daher, um den dritten Strahl zu erlangen, von O' aus über L hinaus unsern Weg zu nehmen und erst dann anzuhalten, wenn wir auf diesem Wege bis zur Linie AF im Punkte C gekommen sind. Der dritte Strahl ist mithin nicht O'C, sondern $\infty - O'C$, so wie auch der vierte Strahl über Q hinaus nicht O'D ist, sondern $\infty - O'D$. Nun ist der von dem zweiten und dritten Strahl eingeschlossene Winkel FO'L als Scheitelwinkel $= CO'G$, also in der That $= \beta$, und die ihm gegenüberliegende Strecke geht von F über M nach C, ist also $= \infty - FC$, oder wenn man lieber will $= - FC = -(a + c + DE) = -(a + c + p)$, während sie in Beziehung auf den Punkt $O = p$ war. Endlich ist der vom dritten und vierten Strahl eingeschlossene Winkel QO'L als Scheitelwinkel $= CO'D = \gamma$ und die ihm auf der Linie AM gegenüberliegende Strecke $CD = c$.

Der Punkt O' giebt uns also nicht nur Aehnliches wie der Punkt O, sondern er erfüllt theoretisch vollkommen alle geforderten Bedingungen eben so gut, wie O; auch findet jetzt eine vollkommene Harmonie zwischen der geometrischen und der zweiten trigonometrischen Lösung statt.

Anmerkung 1. Vielleicht hat es für manchen Leser ein Interesse, an dem von Meier Hirsch (pag. 82) gegebenen Zahlenbeispiele: $a = 2731$, $c = 1987$; $\alpha = 19^0\ 7'$, $\beta = 31^0 5'$, $\gamma = 14^0\ 57'$, wornach $x = 3612{,}225$, aber auch $x = -\ 8330{,}225$ ist, die Richtigkeit der von mir verbesserten Lambert'schen Gleichung zu prüfen. Man findet durch dieselbe

$$\mathrm{tg}\,.\,y = +\ 0{,}7181913, \text{ also } y = 35^0\ 41'\ 8'',\ 1$$

und auf $\mathrm{tg}\,.\,y = -\ 1{,}505883$, also $y = -\ 56^0\ 24'\ 48'',\ 1$, oder im vierten Quadranten liegend, d. h. fällt man von O′ ein Loth O′P′ auf CF, so ist der Winkel

$$EO'P' = 56^0\ 24'\ 48'',\ 1 \text{ während } AOP = 35^0\ 41'\ 8'',\ 1 \text{ beträgt.}$$

Diese Resultate stimmen vollkommen überein mit denjenigen, die ich auf einem ganz andern Wege gefunden habe, wonach

$AO = 7992{,}855$	$EO' = 2083{,}715$	
$BO = 6773{,}285$	$FO' = 4613{,}175$	$A = 54^0\ 18'\ 51'',\ 94$
$CO = 6706{,}066$	$-\ CO' = -4031{,}686$	$E = 146^0\ 24'\ 48'',\ 12$
$DO = 7456{,}447$	$-\ DO' = -2202{,}170$	

Anmerkung 2. Von dieser Lambert'schen Aufgabe kenne ich noch eine schöne geometrischen Construction der aus der zweiten trigonometrischen Lösung hervorgegangenen Gleichung von Bessel und eine rein geometrische Auflösung vom Oberlehrer Dr. Hoffmann in Königsberg. Es wäre zu wünschen, daß keine dieser beiden Lösungen verloren ginge.

§ 42.

Pappus (vor 400 n. Ch.) giebt in seinen Sammlungen als die in der verloren gegangenen Schrift des Apollonius Pergäus (um 247 v. Ch.): Περὶ χωρίου ἀποτομῆς in 20 Oertern und 84 Fällen behandelte Aufgabe folgende an: Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν θέσει δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις (γραμμὰς) χωρίον περιεχούσας ἴσον τῷ δοθέντι. Aus der Wiederherstellung der Schrift von Halley (1706) wählen wir nur den dritten Ort

Fig. 8. des per omnes casus plenissime soluti Problem's, welcher lautet: Intersecent se mutuo rectae duae positione datae, ut KL et MN, in puncto B, ac concipiatur utrumque punctum coalescere in commune punctum occursus B: oportet ducere per punctum datum J rectam AC, quae auferat segmenta AB, CB, rectangulum aequale rectangulo dato comprehendentia. Der größeren Bequemlichkeit wegen aber drücken wir uns folgendermaßen aus:

34ste Aufgabe. Es sind zwei sich in B schneidende gerade Linien KL und MN und zwischen ihnen der Punkt J gegeben. Man soll durch diesen Punkt an sie eine Gerade AC so legen, daß das dadurch abgeschnittene Dreieck ABC einen gegebenen Inhalt habe.

Halley (und sicherlich auch Apollonius) erkannte, daß der uns beschäftigende Locus drei Fälle in sich schließe, je nachdem die gesuchte Linie in dem Winkel KBM oder in LBN oder endlich in dem Winkel KBN zu liegen komme.

In neuerer Zeit hat man aus dieser Aufgabe zwei gemacht, indem man es besonders hervorhebt, daß der Punkt J außerhalb oder innerhalb eines gegebenen Winkels liegen soll. Wir beschäftigen uns daher zunächst mit dem erstern, leichtern Falle.

1ster Fall. Außerhalb des Winkels KBM ist ein Punkt J gegeben; man soll durch denselben die Linie JAC so ziehen, daß das abgeschnittene Dreieck ABC eine gegebene Größe habe.

Auflösung. Wenn man die gegebene Fläche in ein Parallelogramm BEFG verwandelt, dessen Punkte F und E mit J in gerader Linie liegen, wenn man ferner JE = m, BG = p, BC = x setzt, so findet man leicht:

$$x = p \pm \sqrt{p \cdot (p + 2\,m)}.$$

Dr. E. S. Unger (Die Geometrie des Euklid. Erfurt 1833 pag. 586) schweigt über das Minuszeichen vor der Wurzelgröße ganz und gar, er kennt nur eine Auflösung. F. Wolff (Lehrbuch der Geometrie, Berlin 1833 I. pag. 197) verwirft das zweite Zeichen gerade zu, er sagt: „Die Wurzel darf nur positiv genommen werden, weil sie größer ist als p, und x nicht negativ sein kann.“ Dr. H. Gerlach (Lehrbuch der Mathematik, Planimetrie, Dessau 1853, pag. 126) deutet das negative Zeichen, indem er sagt: „Die Bedeutung dieses negativen Ausdrucks ist die, daß man sein Gegentheil in entgegengesetzter Richtung auf BN, also das verlangte Dreieck von dem Scheitelwinkel NBL abschneiden kann.“ Und in ähnlicher Weise hatte sich auch schon Klügel (1803, I. pag. 115) mit den Worten geäußert: „Die Algebra giebt mit der Auflösung für den Fall, da die Linie AC innerhalb des Winkels KBM gelegt wird, auch die Auflösung für den Fall, da A′C′ innerhalb des Winkels NBL gelegt wird.“ Sollten nun Unger und Wolff gegen Gerlach und Klügel einwenden: Wir haben nur innerhalb des Winkels KBM eine Lösung gesucht, innerhalb des andern Winkels NBL haben wir nichts zu suchen, und wo wir nichts zu suchen haben, wollen wir auch nichts finden; so würde ich auf diesen Einwand in schon bekannter Weise erwidern: Die Schenkel des Winkels KBM gehen, der eine von B über M nach N und B, der andere reicht von B über K und L bis B. Wenn x = BC negativ gefunden wird, so heißt das eben mit Umgehung des Unendlichen, ich habe das nämliche positive Stück in entgegengesetzter Richtung von B bis C′ aufzutragen;*) und ebenso giebt das negative Stück BA′ zu erkennen, wie weit auf dem Schenkel BK der Durchschnitt der gesuchten Linie über B liegt; ich sehe also BC′ und BA′ immer noch als Schenkel des ursprünglichen Winkels KBM und das Dreieck A′BC′ als von diesen Schenkeln abgeschnitten an.

Beweis, daß A′BC′ = BEFG = P ist.

Es ist $BC' = \sqrt{p \cdot (p + 2\,m)} - p$, also $GC' = \sqrt{p \cdot (p + 2\,m)}$.

Nun sei JF = v, also $p = v - m$, $p + 2\,m = v + m$. Mithin ist $GC' = \sqrt{v^2 - m^2}$.

Weil demnach $JF^2 = GC'^2 + JE^2$, so auch

$$JFH' = GC'H' + JEA'. \text{ Davon ab } A'BGH' + JEA', \text{ giebt}$$
$$BEFG = A'BC'.$$

§ 43.

2ter Fall. Innerhalb des Winkels KBN ist der Punkt J gegeben; man soll durch denselben die Linie AC so ziehen, daß das abgeschnittene Dreieck ABC einen gegebenen Raum enthalte.

*) In der Figur ist der Punkt C′ absichtlich ein wenig näher an B gelegt, als es sein sollte, um noch den Schnittpunkt H′ darstellen zu können.

Fig. 8 α. 1ste Annahme. Grenze: JE = JF.

Das kleinste Dreieck schneidet man auf diese Weise ab, indem man JE || BN legt, EA = EB macht und AJC zieht. Denn man wird durch die Hilfslinie SAT, welche BN parallel gezogen ist, leicht beweisen können, daß sowohl durch die Linie RJN, als durch die Linie KJO ein größeres Dreieck abgeschnitten wird als ABC. Macht man nun FJ = EJ und zieht FC, so ist das Parallelogramm BEFC diesem kleinsten Dreieck gleich. Daher darf der gegebene Raum nicht kleiner als dieses Parallelogramm sein, wenn es möglich sein soll, die Aufgabe praktisch zu lösen, d. h. der gegebene Punkt J darf nicht dem Punkte F näher liegen als dem Punkte E.

Fig. 8 β. 2te Annahme. Es sei daher JE < JF.

Alle Schriftsteller, die diese Aufgabe behandelten, haben erkannt, daß unter der gemachten Voraussetzung zwei Auflösungen möglich sind. Denn warum sollte nicht ebenso gut, wie die Dreiecke AEJ (= D) und GCH (= δ) zusammen gleich dem Dreieck JFH (= d) sein können, auch das Dreieck A′EJ (= D′) dem Trapez JFGC′ = JFH′ — GC′H′ (= d′ — δ') gleich zu machen sein? Es dürfte ja nur C′G = CG gemacht werden. Nachdem man also ein rechtwinkliges Dreieck gemacht hat, dessen Hypotenuse JF = n und dessen Kathete JE = m ist, trägt man die andere Kathete $\xi = \pm \sqrt{n^2 - m^2}$ auf BN von G aus nach beiden Seiten bis C und C′ auf, und zieht durch J sowohl die Linie AC, als auch die Linie A′C′, so genügen beide Dreiecke ABC (= Δ) und A′BC′ (= Δ') den Anforderungen, indem sich leicht zeigen läßt, daß jedes dieser Dreiecke dem gegebenen Parallelogramm BEFG (= P) an Fläche gleichkommt. Diejenigen, welche die Aufgabe möglichst rein arithmetisch lösten, haben, wenn sie wieder BG = p und BC = x setzten, gefunden:

$$x = p \pm \sqrt{p \cdot (p - 2\,m)}.$$

Natürlich; denn $n + m = p$, $n - m = p - 2\,m$ und $x = p \pm \xi$.

Keiner vergißt bei dieser Gelegenheit zu bemerken, daß die Lösung der Aufgabe unmöglich wird, wenn $m > \frac{p}{2}$ ist. Aber selbst Diesterweg, A. Richter in Elbing und Paucker, welche das Problem De sectione spatii in besondern Schriften 1827, 1828, 1837 behandelt haben, warfen nicht einmal die Frage auf, wie der unter dieser Voraussetzung imaginär werdende Ausdruck für x zu deuten sei. Ich kann mich aber dabei nicht beruhigen, daß, während die beiden arithmetischen Antworten, welche sich auf die Annahme, wonach J näher an E liegt, beziehen, gleiche Berechtigung und Anerkennung in der Geometrie gefunden haben, die zwei eben so bestimmt ausgesprochenen arithmetischen Antworten, welche auf der andern Seite der Grenze hervortreten, wenn J nämlich näher an F liegt, gar nichts bedeuten und in gar keiner Beziehung zur geometrischen Aufgabe stehen sollen. Daher gehe ich weiter.

§ 44.

Fig. 8 γ. 3te Annahme. JE > JF.

Allerdings kann nun weder ein Dreieck wie ABC = Δ, noch ein Dreieck wie A′BC′ = Δ' dem Parallelogramm BEFG = P gleich sein; es müßte ja dann wegen der Aehnlichkeit gewisser

Dreiecke zu $JE^2 = m^2$ noch etwas Unbekanntes GC^2 oder $GC_{,}^2 = \xi^2$ addirt werden können, um $JF^2 = n^2$ zu erhalten. Da jedoch gegenwärtig $m > n$ ist, so ist solches auf dem Gebiete des Positiven nicht möglich. Aber wenn das Unbekannte negativ wäre, so würde, meine ich, kein Hinderniß sein, um zum Ziele zu gelangen. Inzwischen heißt das negative Unbekannte addiren doch nach allgemein zugestandenem Sprachgebrauch nichts anderes, als das nämliche positive Unbekannte subtrahiren. So sagt ja unter andern schon Klügel (I. pag. 110): „Die Algebra begreift Addiren und Subtrahiren in eine Rechnung, daher ihre mehrfache Antwort auf eine Frage." Sind wir aber gezwungen, jetzt $m^2 - \xi^2 = n^2$ zu setzen, so heißt das, es soll $\begin{Bmatrix} JFH + GCH = JEA \\ d + \delta = D \end{Bmatrix}$ oder $\begin{Bmatrix} JFH' + GC'H' = JEA' \\ d' + \delta' = D' \end{Bmatrix}$ sein; was darauf zurückzuführen ist, daß jetzt das durch die gesuchte Linie AC oder A'C' abzuschneidende Dreieck ABC oder AB'C' das gegebene Parallelogramm BEFG um das Doppelte eines Dreiecks übertreffen soll, dessen Seiten die unbekannte Linie (GC oder GC'), die gesuchte Linie und die gegebene Linie FG sind; weil, wenn man die ergänzenden Trapeze BEJC und BEJC' mit T und T' bezeichnet, sowohl $T = P - d + \delta$, als auch $T' = P - d' + \delta'$ ist. Kurz, es soll jetzt $\Delta = P + 2\,\delta$, oder $\Delta' = P + 2\,\delta'$ sein.

Die ganze Aufgabe, die in unserm zweiten Falle enthalten ist, lautet also eigentlich folgender Maßen: In einen Winkel ist ein Parallelogramm (P) gezeichnet, man soll durch den Punkt J eine Linie AC ziehen, dergestalt, daß $D \pm \delta = d$ werde. Sie zerfällt demnach in zwei Aufgaben:

1) $D + \delta = d$, d. h. $\Delta = P$,
2) $D - \delta = d$, d. h. $\Delta = P + 2\,\delta$.

Giebt man uns die erste Aufgabe, so wird stillschweigend vorausgesetzt, daß J näher an E als an F liegt, daß $m < n$ ist. Wer die zweite Aufgabe stellt, denkt sich umgekehrt $n < m$. Sollte doch wider Erwarten bei der ersten Aufgabe $m > n$ sein, so dürfen wir uns nicht wundern, wenn wir bei dem arithmetischen Ausdruck für x oder ξ auf Unmögliches stoßen, das will eben nur sagen, daß wir dadurch in die zweite Aufgabe hinübergreifen. Ebenso ergeht's dem, der während der Beschäftigung mit der zweiten Aufgabe annimmt, daß $n > m$ ist; auch er stößt dann auf einen imaginären Ausdruck, der ihn belehrt, daß er ja in die erste Aufgabe hinüberschweife.

§ 45.

Während wir in § 43 uns mit der ersten specificirten Aufgabe $\Delta = P$ beschäftigt haben, wollen wir jetzt die andre behandeln: $\Delta = P + 2\,\delta$, welche auf die im vorigen Paragraphen gemachte dritte Annahme hinausläuft, daß $JE > JF$ ist. Nun wird man auf nichts imaginäres stoßen; man wird finden, daß $\xi = \pm \sqrt{m^2 - n^2}$ und

$$x = p \pm \sqrt{p \cdot (2\,m - p)} \text{ ist.}$$

Es kann aber JE unter ganz verschiedenen Nebenumständen größer als JF sein, die ich noch angeben und wo es mir nöthig scheint, mit Erläuterungen begleiten will.

Erste Nebenbedingung. $GC < JF$. Fig. 8 γ.

Das Dreieck GC'H' muß hier als positiv betrachtet werden, weil sowohl seine Grundlinie, wie auch seine Höhe eine entgegengesetzte Lage zu Grundlinie und Höhe des Dreiecks GCH haben.

Fig. 8 δ. Zweite Nebenbedingung. $GC = JF$.

Macht man hiebei $GC' = GC$ und verlängert JC' nach beiden Seiten, so wird man finden, daß die parallelen Linien BE und FG von ihr nicht getroffen werden, oder daß die Schnittpunkte A' und H' in eine unendliche Ferne gerückt sind. Man kann daher sagen, daß sowohl Δ' unendlich $(= U')$, als auch δ' unendlich $(= u')$ ist und es kann $\Delta' = P + 2 . \delta'$ sein.

Fig. 8 ε. Dritte Nebenbedingung. $GC > JF$.

Es ist $JEA' = JFH' + GC'H'$.

Davon ab: $BEJC' = P - GC'H' + JFH'$.

Also $A'BC' = - P + 2 . GC'H'$, oder $- A'BC' = P - 2 . GC'H'$.

Nun verstanden wir in § 44 unter Δ' den abgeschnittenen Flächenraum *über* BC' rechts von BE, da aber in unsrer jetzigen Figur das abgeschnittene Dreieck $A'BC'$ *unter* BC' rechts von BE liegt, so ist $\Delta' = - A'BC'$. Ebenso verstanden wir in § 44 unter δ' einen gewissen Flächenraum unter GC' links von FG; weil jetzt aber $GC'H'$ *über* GC' links von FG liegt, so ist $\delta' = - GC'H'$. Daher ist auch hier, wie es sein soll: $\Delta' = P + 2 . \delta'$.

Fig. 8 ζ. Vierte Nebenbedingung. $GC = JE = m = p$, und $JF = n = o$.

Da $\Delta' = A'BC' = o$, $\delta' = - C'GF$ und $P = 2 . C'GF$ ist, so haben wir wieder: $\Delta' = P + 2 . \delta'$.

Fig. 8 η. Fünfte Nebenbedingung. Der Punkt J, der früher zwischen E und F lag, ist dem Punkte F immer näher gerückt und liegt jetzt außerhalb EF, rechts von F, so daß, nachdem der Werth von n, d. h. die Entfernung des Punktes J von F (links von F) schon bis auf Null herabgesunken war, von nun an n negativ $= - \nu$ ist. Demnach ist der absolute Werth von $JF = \nu$ und $m = EJ = EF + FJ = p + \nu$.

Es sei hiebei $GC > \nu$. Weil immer $EJ^2 = JF^2 + GC^2$ ist, so haben wir, wenn wir $A'EFH' = V'$ und $A'BGH' = \upsilon'$ setzen,

einerseits:

$$\left.\begin{array}{rl} & EJA = JFH + GCH \\ \text{Dazu} & BEJC = P + GCH - JFH \\ \hline & \Delta = P + 2 . \delta. \end{array}\right\}$$

andererseits:

$$\left\{\begin{array}{rl} BEJC' \text{ d. h. } EJA' - A'BC' & = V' + JFH' - (C'GH' - \upsilon') \\ \text{ab } EJA' & = JFH' + C'GH' \\ \hline - A'BC' & = P - 2 . C'GH'. \end{array}\right.$$

Da wir nun auf der einen Seite unter Δ und δ die Räume über BC verstehen, welche *rechts* von den parallelen Linien BE und FG liegen, so müssen wir auch auf der andern Seite unter Δ' und δ' Räume über BC verstehen, welche rechts von den genannten Linien liegen; aber $A'BC'$ und $C'GH'$ liegen *links* von denselben, also ist $\Delta' = - A'BC'$ und $\delta' = - C'GH'$, daher haben wir auch auf der andern Seite wieder $\Delta' = P + 2 . \delta'$.

Bemerkung. $A'BC' = V' - \upsilon'$.

Fig. 8 ϑ. Sechste Nebenbedingung. Während n negativ $= - \nu$ bleibt, wird $GC = \nu$.

Da hiebei Δ unendlich $= U$ und δ unendlich $= u$ ist, so mag auch hier $\Delta = P + 2 . \delta$ sein. Keine Schwierigkeit macht dagegen ein negatives ξ. Wir setzen dabei, absolut genommen, wie immer, $GC' = GC$. Dann haben wir wieder:

$$\begin{array}{rcl} EJA' - A'BC' &=& V' + JFH' - C'GH' + v' \\ EJA' &=& JFH' + C'GH' \\ \hline - A'BC' &=& P - 2 . C'GH' \\ \Delta' &=& P + 2 . \delta' \end{array}$$

Bemerkung. Auch hier ist $A'BC' = V' - v'$.

Siebente Nebenbedingung. Während n negativ bleibt, wird $GC < \nu$. Fig. 8 ι.

1) ξ ist positiv.
$$\begin{array}{rcl} EJA &=& FJH + GCH \\ BEJC &=& P + FJH - GCH \\ \hline - ABC &=& P - 2 . GCH. \end{array}$$

Nun aber verstehen wir unter Δ und δ rechts von den Parallelen BE und FG gelegene Dreiecke, deren Spitzen A und H oberhalb der Grundlinien BC und GC liegen; weil aber in unserer jetzigen Figur die Spitzen der Dreiecke ABC und GCH unterhalb dieser Grundlinien liegen, so ist: $\Delta = P + 2 . \delta$.

2) ξ ist negativ. Dies giebt wieder: $- A'BC' = P - 2 . GC'H'$.

Obgleich $A'BC'$ und $GC'H'$ hier, wie Δ und δ in § 44 Fig. γ, oberhalb der Grundlinien liegen, so müssen sie dennoch als negativ betrachtet werden, weil ihre Grundlinien das Zeichen verändert haben. Während dort nämlich die Grundlinien rechts von den Parallelen BE und FG lagen, liegen sie hier (BC' und GC') links von denselben Parallelen. Daher ist auch hier $\Delta' = P + 2 . \delta'$.

Bemerkung. $A'BC' = V' - v'$.

Achte Nebenbedingung. Während n negativ bleibt, ist $GC = o = GC'$ geworden. Fig. 8 κ.
Es ist demnach $m = \nu$ und $\xi = \pm \sqrt{m^2 - n^2} = \pm o$.

Da hier $ABC = o = A'BC'$, $p = o$, $GCH = o = GC'H'$, so ist sowohl $\Delta = P + 2\,\delta$, als auch $\Delta' = P + 2\,\delta'$.

Bemerkung. Man kann einerseits wieder sagen: $A'BC' = V' - v'$, andererseits mit Hinblick auf die folgende letzte Nebenbedingung, indem man $AEFH = V$ und $ABGH = v$ setzt, es sei $\Delta = V + v = P$ und $\Delta' = V' - v' = P$.

Neunte Nebenbedingung. Während n negativ bleibt, wird auch GC negativ, d. h. die Linie FG, welche bisher rechts von der Parallelen BE lag, kommt jetzt links von derselben zu liegen. Fig. 8 λ.

Ursprünglich (§ 43) waren JE und JF positiv und dabei $JE < JF$; sobald $JE > JF$ wurde (§ 44), fing das Imaginäre an hervorzutreten, und wir schrieben statt $\xi = \sqrt{n^2 - m^2}$ lieber in § 45 $\xi = \sqrt{m^2 - n^2}$. Nun ist (von § 45, 5 ab) JF negativ, also immer noch $JE > JF$; weil aber jetzt (§ 45, 9) absolut genommen $JF > JE$, so wird der corrigirte Ausdruck $\sqrt{m^2 - n^2}$ wieder imaginär und bedarf einer neuen Correction. Man wird nämlich nicht mehr sagen können: $JE^2 = JF^2 + GC^2$, sondern wie zu Anfang setzen müssen: $JF^2 = JE^2 + GC^2$; dann ist wieder $\xi = \pm \sqrt{n^2 - m^2} = \pm \sqrt{\nu^2 - m^2}$.

1) ξ ist positiv. $\mathrm{EJA} = \mathrm{FJH} - \mathrm{GCH}$

$$\frac{-\,\mathrm{ABC} + \mathrm{EJA} = -\,\mathrm{GCH} - \upsilon + \mathrm{FJH} - \mathrm{V}}{-\,\mathrm{ABC} = -\,(\mathrm{V} + \upsilon) = -\,\mathrm{P}}$$
$$\Delta = \mathrm{P}.$$

2) ξ ist negativ. $\mathrm{EJA'} = \mathrm{FJH'} - \mathrm{GC'H'}$

$$\frac{\mathrm{BEJC} = -\,\mathrm{A'BC'} + \mathrm{EJA'} = -\,\mathrm{GC'H'} + \upsilon' + \mathrm{FJH'} - \mathrm{V'}}{-\,\mathrm{A'BC'} = -\,(\mathrm{V'} - \upsilon') = -\,\mathrm{P}}$$
$$\Delta' = \mathrm{P}.$$

Da bekanntlich nur erst wenige Schriftsteller das Prinzip der Zeichen auch auf Flächen angewandt haben, so schien es mir zweckmäßig, bei der Auseinandersetzung meiner Gründe, warum ich bei dem vorliegenden Raumschnitt diese Fläche für positiv, jene für negativ erklärte, nicht zu wortkarg zu sein. Es gereicht mir übrigens zur Befriedigung, daß meine desfallsigen Resultate vollkommen mit der Regel übereinstimmen, welche Möbius in seinem barycentrischen Calcul (1827 pag. 20) aufgestellt hat. Darnach ist nämlich eine Fläche als negativ zu betrachten, wenn die in ihren Eckpunkten zur Bezeichnung befindlichen Buchstaben in entgegengesetztem Sinne gelesen werden müssen, als die entsprechenden Buchstaben in der Hauptfigur. Man wähle z. B. aus Figur 8 *e* die Dreiecke $\delta = \mathrm{CGH}$ und $\delta' = \mathrm{C'GH'}$. Bei dem ersten Dreiecke, dessen Fläche wir als positiv betrachten wollen, hat das Auge Behufs der angegebenen Benennung eine Bewegung von rechts nach links herum zu machen; da es nun bei einer analogen Benennung des entsprechenden andern Dreiecks δ' eine Bewegung von links nach rechts herum machen muß, so hat man die Fläche δ' nach Möbius als negativ aufzufassen.

So haben wir denn die Wanderung aus dem Reellen ins Imaginäre und aus dem Imaginären ins Reelle vollendet, sind aber dabei schließlich aus dem zweiten Falle in den ersten Fall, bei welchem J außerhalb der Schenkel eines Winkels lag, gekommen. Wir sehen also, daß bei dem vorliegenden Problem weder die Scheitelwinkel noch die Nebenwinkel einen wesentlichen theoretischen Unterschied begründen. Demnach ist die ältere Auffassung der Aufgabe der spätern Zweitheilung derselben vorzuziehen, und bedarf nur der von uns gegebenen Ergänzung wegen des Imaginären.

Ich könnte noch über Chasles' Auflösung des Problem's vom Raumschnitt vermittelst der Doppelpunkte zweier homographischer Theilungen (Traité de Géométrie supérieuse, 1852, pag. 218) sprechen. Da es aber in dem Wesen der Methode dieses Meisters der neuern Geometrie liegt, das Imaginäre, so zu sagen, zu umgehen, que les objets susceptibles de devenir imaginaires, n'y entrent pas sous forme explicite, mais s'y trouvent représentés par des éléments réels, pag. XVI., so verspare ich mir ein weiteres Eingehen auf seine Auflösung für eine spätere Gelegenheit und führe zur Beruhigung derer, welche meinen könnten, daß meine Auflösungen für die Fälle, daß die Formeln imaginär werden, die eigentlichen Aufgaben zu sehr ändern, aus seinem Werke pag. XVI. noch die Worte an: Il peut arriver, quand quelques parties d'une figure deviennent imaginaires, que les propositions soient susceptibles de nouveaux énoncés très-différents des premiers, et donnent lieu à des propriétés de l'étendue très-différentes aussi de celles que l'on considérait d'abord.

§ 46.

35ste Aufgabe. Newton in seiner Arithmetica universalis (pag. 118 Probl. 24) beschäftigt sich mit folgender Aufgabe: Angulum rectum (CAB) data recta (BC) subtendere, quae transibit per datum punctum (D), a lineis rectum angulum comprehendentibus aequidistans.

Durch geschickte Wahl der unbekannten Größe kommt er auf eine biquadratische Gleichung, in welcher die ungeraden Potenzen fehlen, so daß es nur zwei an Quantität verschiedene Auflösungen giebt, aber jede derselben kann positiv oder negativ sein. Er selbst kümmert sich bei dieser Aufgabe um die verschiedene Qualität der Resultate gar nicht. Doch sehen wir nach, was spätere Schriftsteller aus derselben bei dieser Gelegenheit gemacht haben.

Bézout (Cours de Mathématiques, III. 330) nennt den Abstand der Schenkel des rechten Winkels von $D = a$, $BC = c$. Für den Fall, daß BC nicht mit D in dem nämlichen Quadranten liegt, nennt er die halbe Summe der unbekannten Linien DB und $DC = x$, für den andern Fall aber, daß D mit BC in demselben Quadranten liegt, bezeichnet er die halbe Differenz der Linien DB und DC mit x. In beiden Fällen kommt er auf die nämliche Gleichung Fig. 9 α. Fig. 9 β.

$$x^4 - \left(\frac{1}{2}\, cc + 2aa\right) x^2 = \frac{1}{2}\, aacc - \frac{1}{16}\, c^4, \text{ wo}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}\, cc + aa \pm \sqrt{aacc + a^4}} \text{ ist.}$$

Von den hierin steckenden vier Werthen bezieht er auf die erste Figur (α) den Ausdruck

$$x = + \sqrt{\frac{1}{4}\, cc + aa + a\sqrt{cc + aa}}$$

und auf die zweite Figur (β) den Ausdruck

$$x = + \sqrt{\frac{1}{4}\, cc + aa - a\sqrt{cc + aa}},$$

welcher voraussetzt, daß $c^2 > 8\, a^2$ sei.

Auch ist er wegen der beiden andern negativen Werthe nicht in Verlegenheit. Er sagt (ähnlich wie bei der in § 36 behandelten Aufgabe): Les deux autres racines, étant toutes négatives, ne peuvent appartenir qu' à des cas tout opposés à ceux qu'on a considérés dans chaque résolution.... Pour trouver à quels cas elles appartiennent, il faut observer que rien ne détermine dans la question présente, ou du moins, dans l'équation, si le point D est, (comme on l'a supposé d'abord) au-dessous de AJ et à gauche de AE, ou s'il est, au contraire, au-dessus de la première et à droite de la seconde, comme on le voit ici à l'égard de A'J' et de A'E'.... Et l'on voit en effet que dans cette nouvelle position les points B et C tombent de côtés opposés à ceux où ils tombaient d'abord, et que par conséquent la somme, ainsi que la différence des deux lignes DB' et DC' doit être négative, comme l'équation les donne en effet.

Diese Lösung kann uns aber nicht befriedigen, weil offenbar das zweite System von senkrechten Linien A'B' und A'C' ein ganz fremdartiges ist, nur hingestellt, um äußerlich einen Gegensatz hervorzubringen; der Punkt D hat mit letzterem System nichts zu schaffen.

Auch erkennt schon Lacroix in seinem Traité de Trigonométrie et d'application de l'Algèbre à la Géométrie Bézout's Darstellung der negativen Wurzeln nicht als richtig an, er tadelt seine Analysis als unvollständig und fehlerhaft. Lacroix erhält die negativen Wurzeln dadurch, daß er in Fig. 9 α die Linie DCB in den entgegengesetzten Quadranten hineinzieht, und in Fig. 9 β dadurch, daß er sie zwar in den nämlichen Quadranten zieht, doch so, daß die Kathete AB kürzer und dafür AC länger werde, wie solches aus Fig. 9 γ zu ersehen ist. Noch deutlicher spricht sich in diesem Sinne sein Uebersetzer Ideler 1822 pag. 124 aus, indem er sagt (Fig. 6 γ): „Es findet sich

Fig. 9 γ.

$$DL = + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + a^2 + a\sqrt{cc + aa}} = + W;\ DL' = - W,$$

$$DL'' = + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + a^2 - a\sqrt{cc + aa}} = + w;\ DL''' = - w.$$

Die verschiedenen Zeichen vor dem ersten Radical geben zu erkennen, ob der (jedesmalige) Punkt L von D aus nach dem Schenkel AB″ oder nach dem Schenkel AC″ des Winkels B″AC″ hinliegt."

In ähnlicher Weise äußert sich Meier Hirsch in seiner Sammlung geometrischer Aufgaben 1805 (I. 136): „Die Linien DL und DL′ sind in Ansehung ihrer absoluten Größe einander gleich, und bloß der Lage nach verschieden, diese sind durch die beiden Werthe $\pm$ W gegeben; ebenso sind die Linien DL″ und DL‴ bloß in Ansehung der Lage verschieden und durch die beiden Werthe $\pm$ w gegeben.

§ 47.

Doch sind Lacroix und seine Nachfolger den Beweis für ihre Behauptung schuldig geblieben, der wohl um so nöthiger sein möchte, weil die Linien DL und DL′ einerseits und die Linien DL″ und DL‴ andererseits zwar eine verschiedene, aber nicht entgegengesetzte Lage haben. Indem wir den Beweis nachfolgen lassen, wird sich zugleich ergeben, daß namentlich Ideler sich doch in dem Zeichen der beiden letztgenannten Linien vergriffen hat; es ist nämlich DL‴ positiv und DL″ negativ. Um dies aber deutlich zu erkennen, müssen wir vorläufig den Punkt D so annehmen, daß er von den beiden gegebenen Senkrechten AB und AC eine *verschiedene* Entfernung hat.

Es sei daher wie bisher DE = a, aber DJ = b. Auch werde vorerst angenommen, daß $\left(\frac{c}{2}\right)^2 > a^2 + b^2$ ist. Dann ist

Fig. 9 δ. 1) in Bezug auf das Dreieck ABC, wobei DL = x ist:

$$\left(x + \frac{c}{2}\right) : \left(x - \frac{c}{2}\right) = \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - b^2} : a, \text{ woraus folgt}$$

$$\text{I. } x^4 - \left(a^2 + b^2 + \frac{c^2}{2}\right)x^2 + c\,.\,(b^2 - a^2)\,x + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2 - b^2\right] = o.$$

2) In Bezug auf das Dreieck $AB'''C'''$, wobei $DL''' = x$ ist, erhält man

$$\left(\frac{c}{2} + x\right) : \left(\frac{c}{2} - x\right) = \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - b^2} : a,$$

woraus genau die nämliche Gleichung I. sich ergiebt.

3) Aber in Bezug auf das Dreieck $AB'C'$, wobei $DL' = x$ ist, hat man

$$\left(x + \frac{c}{2}\right) : \left(x - \frac{c}{2}\right) = \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - a^2} : b, \text{ woraus folgt}$$

$$\text{II. } x^4 - \left(a^2 + b^2 + \frac{c^2}{2}\right) x^2 - c\,.\,(b^2 - a^2)\, x + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2 - b^2\right] = o.$$

4) Ganz dieselbe Gleichung II. folgt auch in Bezug auf das Dreieck $AB''C''$, wobei $DL'' = x$ ist, aus der Proportion: $\left(\frac{c}{2} + x\right) : \left(\frac{c}{2} - x\right) = \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - a^2} : b^2.$

Da nun die eine der beiden Gleichungen in die andere übergeht, wenn man darin $- x$ statt x setzt, und jede Gleichung zwei positive und zwei negative Wurzeln hat, vorausgesetzt nämlich, daß keine imaginären Wurzeln vorhanden sind, so ist klar, daß man bei Auflösung der Gleichung I. als positive Werthe von x die beiden Linien DL und DL''' und als negative Werthe von x die beiden Linien DL' und DL'' erhalten muß: wer dagegen die Gleichung II. auflösen wollte, müßte natürlich das Gegentheil finden. In beiden Fällen würde man übrigens, da der Coefficient von $x^3 = o$ ist, finden, daß absolut genommen $DL + DL''' = DL' + DL''$ ist.

Das Vorzeichen dieser vier Linien bestimmt sich also danach, ob die Linie, welche von D nach dem jedesmaligen L gezogen wird, bei ihrer Verlängerung zunächst den ersten Schenkel AB oder den zweiten Schenkel AC des gegebenen rechten Winkels BAC trifft.

Aber, wird man sagen, so gehören denn doch nicht alle vier Auflösungen einer Aufgabe, sondern zwei verschiedenen Aufgaben an. Unsre Aufgabe war, so genau wie möglich präcisirt, folgende:

„Es sind zwei auf einander senkrecht stehende Linien AB und AC und ein Punkt D gegeben; man soll aus demselben eine Linie so ziehen, daß das zwischen die Schenkel fallende Stück $BC = c$ werde; wie weit ist D von der Mitte L der dadurch entstandenen Schnittpunkte C und B entfernt, vorausgesetzt, daß die Verlängerung von DL zunächst den ersten Schenkel AB treffen soll?“ worauf doch nur die beiden Antworten DL und DL''' zu passen scheinen, während die beiden andern Antworten DL' und DL'' eine ganz andere Frage voraussetzen, welche mit der unsrigen eigentlich nichts zu thun zu haben scheint; die herrschende Ansicht, wonach die Aufgabe nicht für alles, was in der abgeleiteten Gleichung steckt, verantwortlich gemacht werden könne, indem dieselbe Gleichung ja auch wohl andern Aufgaben entsprechen könne, indem die Gleichung zwar eine Folge der Aufgabe, aber nicht die Aufgabe eine Folge der Gleichung sei, behielte denn doch wohl die Oberhand. —

Der Leser ist längst in den Stand gesetzt, diese Streitfrage selbst zu entscheiden. Sollen nämlich die beiden andern Auflösungen DL' und DL'' Bezug auf unsere eigentliche Aufgabe haben, so müssen auch sie bei gehöriger Verlängerung zunächst den ersten Schenkel treffen, und dies erreicht man bekanntlich auf folgende Art: Was DL' anbelangt, so gehe man von D aus über G hinaus immer fort, bis man über C' nach L' ankommt; bei weiterer Verlängerung dieser Linie kommt man dann in B' bei dem ersten Schenkel an; der eben durchlaufene Weg von D bis L' ist dann aber $= \infty - DL'$, oder $= - DL'$. Was DL'' anbetrifft, so gehe man von D aus über B'' und H hinaus, bis man über C'' nach L'' gelangt; indem man diesen Weg noch weiter über D hinaus verfolgt, kommt man in B'' zuerst an den ersten Schenkel AB an; wird nun gefragt, wie weit der Weg war, den man von D aus in Gedanken zu durchlaufen hatte, bis man zur Mitte L'' der Linie $B''C'' = c$ kam, so ist die Antwort: $\infty - DL''$, wofür man $- DL''$ zu sagen pflegt.

Demnach gehören alle vier Auflösungen zu unsrer einen bestimmt ausgedrückten Aufgabe, es durfte keine fehlen oder auch nur mit einem andern Zeichen behaftet erscheinen; nichts hat sich hiebei als fremdartig oder überflüßig oder unsicher gezeigt; die Gleichung ist ein genauer Abdruck der durch die Aufgabe aufgeworfenen Frage; Aufgabe und Gleichung fragen ganz dasselbe, daher konnten die Antworten der einen zugleich sämmtlich Antworten für die andre sein. Daß auch ganz andre, selbst rein arithmetische Aufgaben*) auf dieselbe Gleichung führen können, beeinträchtigt das eben Ausgesprochene in keiner Weise; immer müssen unsre vier Linien DL, DL', DL'' und DL''', mit gehöriger Berücksichtigung ihrer Quantität und Qualität, zugleich die Antwort für jene andren Aufgaben enthalten.

In der vorigen Figur (9 δ) wurde, wie bemerkt, angenommen, daß $\left(\frac{c}{2}\right)^2 > a^2 + b^2$ sei. Daher eben waren dort zwei Wurzeln positiv, zwei negativ. Wenn aber, wie in Fig. (9 ε), $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < a^2 + b^2$ ist, dann ist nur eine Wurzel negativ. Und wirklich führt dann von unsern vier Dreiecken nur das Dreieck $AB'C'$ auf die Gleichung II.; es ist dann absolut genommen $DL + DL'' + DL''' = DL'$.

Fig. 9 ε.

Sollte endlich $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$ sein, welcher Fall eintreten würde, wenn D etwa mit L'' zusammen fiele, dann wäre eine Wurzel $DL'' = o$ und die beiden andern positiven Wurzeln wären, absolut genommen, der einen negativen gleich: $DL + DL''' = DL'$.

Ich habe wohl nicht nöthig, nun noch auf den Fall, von welchem wir ausgingen, wo nämlich $a = b$ ist, wieder zurückzukommen, ich kann das füglich dem Leser überlassen.

---

*) Zum Beispiel: Es sind drei Zahlen a, b, c gegeben; man sucht vier andere Zahlen p, q, r, s, von der Beschaffenheit, daß

$$\begin{aligned} p + q + r + s &= o, \\ pq + pr + ps + qr + qs + rs &= a^2 + b^2 + \frac{c}{2}^2 \\ pqr + pqs + prs + qrs &= c\,.\,(a^2 - b^2), \\ p\,.\,q\,.\,r\,.\,s &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2 - b^2\right] \end{aligned}$$ sei.

§ 48.

Statt dessen will ich in der Voraussetzung, daß wieder $a = b$ ist, für unsre Aufgabe den Weg zu einer rein geometrischen Lösung bahnen, die sich hoffentlich vortheilhaft von bloßen geometrischen Constructionen arithmetischer Ausdrücke unterscheiden wird, wie solche u. a. Bézout (pag. 331) und Meyer Hirsch (pag. 137) gegeben haben.

Arithmetische Analysis. Es sei $DL = x$, so ist:

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 : \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - a^2 : a^2,$$ Fig. 9 α.

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 : \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 : a^2,$$ oder wenn man

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = \xi^2$$ setzt, $$\xi : \left(x - \frac{c}{2}\right) = \left(x + \frac{c}{2}\right) : a.$$

Nun aber verhält sich in jedem rechtwinkligen Dreiecke $MO : MN = NO : NP$. Fig. 9 ζ.

Es hindert aber nichts, $NP = a$, $MN = x - \frac{c}{2}$, $NO = x + \frac{c}{2}$ anzunehmen, wo dann $MO = \xi$ wird. Mithin kommt unsre Aufgabe darauf zurück: Ein rechtwinkliges Dreieck zu machen, in welchem der Unterschied der Katheten $= c$ und das Loth auf die Hypotenuse $= a$ gegeben sind. Die halbe Summe der auf diese Weise gefundenen Katheten ist dann das gesuchte $x = DL$.

2) Fig. 9 β. Es sei auch hier $DL = x$, so ist: Fig. 9 β.

$$\left(\frac{c}{2} + x\right) : \left(\frac{c}{2} - x\right) = \sqrt{\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 - a^2} : a,$$ oder wenn man

$$\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 = \xi^2$$ setzt, $$\xi : \left(\frac{c}{2} - x\right) = \left(\frac{c}{2} + x\right) : a.$$

So kommen wir denn auf folgende Aufgabe: Ein Dreieck MNO zu machen, in welchem die Höhe $NP = a$, der Winkel an der Spitze $N = 90^0$, und die Summe der beiden Katheten $= c$ ist. Das gesuchte x ist dann der halbe Unterschied der eben gefundenen Katheten. Fig. 9 η.

Wollte man aber eine von diesen beiden Dreiecksaufgaben arithmetisch lösen, so würde man immer zugleich die andere mitauflösen, indem man jedesmal auf die nämliche uns schon bekannte biquadratische Gleichung

$$x^4 - \left(\frac{c}{2}^2 + 2a^2\right) x^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[2a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$ geführt wird.

Man kann also auf arithmetischem Wege die beiden Aufgaben vom rechtwinkligen Dreiecke eben so wenig auseinander halten, wie die verschiedenen Quadranten bei unserm Newtonschen Problem, sie fließen in einander über. Das kann nur daher kommen, weil die Summe zweier Seiten auch die Differenz derselben vorstellen kann, indem ich ja die kleinere Seite MN mir als negativ denken kann ($= \infty - MN$) und die Differenz der Seiten dann eigentlich ihre Summe ist.

Geometrische Analysis.

Fig. 9 ϑ. 1) Man ziehe durch D eine Linie QR senkrecht auf BC, so folgt aus der leicht zu erweisenden Congruenz der Dreiecke QDJ und BDE, daß QD = DB, und aus der Congruenz der Dreiecke DER und DJC, daß DR = DC ist. Demnach ist die Aufgabe darauf zurückgeführt: Ein rechtwinkliges Dreieck CDQ oder BDR zu zeichnen, in welchem die Höhe = a und die Differenz der Katheten = c gegeben ist.

Fig. 9 ι. 2) Auch hier ziehe man QD $\perp$ CB, so ist DJQ $\cong$ DEB und DER $\cong$ DJC, also einerseits DQ = DB, anderseits DR = DC. Demnach haben wir wieder nur das rechtwinklige Dreieck CDQ oder BDR zu zeichnen, in welchem außer der Höhe = a die Summe der Katheten = c gegeben ist.

Die Construction dieser beiden Dreiecksaufgaben übergehe ich und verweise den Leser auf die vortrefflichen Lösungen des Directors an der Petrischule in Danzig F. Strehlke (Aufgaben über das gradelinigte Dreieck, Königsberg 1826, pag. 48 und 52). Man kommt hiebei nur durch Anwendung des Kreises und der geraden Linie, wenn man übrigens gewisse von demselben absichtlich übergangene zweite Schnittpunkte gleichfalls berücksichtigt, in beiden Fällen auf zwei congruente Dreiecke FGS und FGS′, wie sie in Fig. 9 $\varkappa$ und in Fig. 9 λ vorliegen. Ihre Seiten GS und FS sind dann die Linien DC und DB in Fig. 9 ϑ und Fig. 9 ι.

Solche zwei congruente Dreiecke werden meistens nur für eine Auflösung gehalten, indessen wir brauchen für unser Problem zweimal zwei Auflösungen und die sind auch vorhanden.

Fig. 9 $\varkappa$. Denn betrachten wir zuerst Fig. 9 $\varkappa$, durch welche die erste Dreiecksaufgabe gelöst ist. Hier soll nicht nur GS — FS = c, sondern auch GS′ — FS′ = c sein. Deswegen haben wir $GS' = \infty - f' = -g$ und $FS' = \infty - g' = -f$ zu setzen. Dann liefern mir $\frac{GS + FS}{2} = \frac{f + g}{2}$ und $\frac{GS' + FS'}{2} = -\frac{f + g}{2}$ die beiden entgegengesetzten Werthe für x, welche ich gebrauche, um in Fig. 9 γ die Linien DL und DL′ ziehen zu können.

Fig. 9 λ. In Fig. 9 λ, durch welche die zweite Dreiecksaufgabe gelöst ist, soll sowohl GS + FS = c, als auch GS′ + FS′ = c sein. Die Linien GS′ und FS′ dürfen hier also nicht als negativ betrachtet werden. Während nun $\frac{GS - FS}{2} = \frac{f - g}{2}$ den positiven Werth von x liefert, welchen ich brauche, um in Fig. 9 γ die Linie DL‴ zu zeichnen, giebt mir $\frac{GS' - FS'}{2} = -\frac{f - g}{2}$ den negativen Werth von x, durch welchen ich DL″ erlange.

Was also der Arithmetik nicht gelang, nämlich die beiden Dreiecksaufgaben aus einander zu halten, ist der Geometrie gelungen, indem sie, auf die Anschauung gestützt, sorgfältig zwischen Summe und Differenz der Katheten unterschied, sie hat es dadurch möglich gemacht, eine Aufgabe, die bei arithmetischer Behandlung auf den vierten Grad führte, durch Kreis und gerade Linie zu lösen.

§ 49.

Dennoch kann man, wie schon Newton (pag. 120) angedeutet und Bézout (pag. 334) ausführlich gezeigt hat, die vorliegende Aufgabe durch eine bloße quadratische Gleichung auflösen, wenn man als unbekannte Größe eine Linie wählt, die nur zweideutig ist.

Man verbinde nämlich in Fig. 9 γ die Punkte L und L', ferner L'' mit L''', ziehe durch A und D die Linie TT', wodurch Fig. 9 μ entsteht, in welcher, weil $AL = AL' = \frac{c}{2}$ und, absolut genommen auch $DL = DL'$ ist, DT auf LL' senkrecht steht und aus ähnlichen Gründen auch DT' auf L''L'''. Könnte man nun DT oder DT' finden, so dürfte man nur in T und T' Lothe errichten und aus A mit dem Radius $\frac{c}{2}$ einen Kreis beschreiben, welcher jene Lothe in den vier gesuchten Punkten L, L', L'', L''' treffen würde, weil sowohl AL, wie auch $AL'' = \frac{c}{2}$ ist. Diese beiden Linien DT und DT' zu finden, hat aber keine Schwierigkeit. Fig. 9 μ.

Denn es ist $LAB = LBA = BDE = n$; weil nun $TAL = 45^0 + n$, so ist $ALT = 45^0 - n$; aber auch $TDL = 45^0 - n$. Folglich ist $\Delta\, ATL \sim \Delta\, DTL$.

Ebenso ist $\Delta\, AT'L'' \sim \Delta\, DT'L''$; denn $C''DJ = L''B''A = B''AL'' = n'$, weil nun $T'AL'' = 45^0 - n'$ ist, so ist $T'L''A = 45^0 + n'$, es ist aber auch $T'DL'' = ADC'' = 45^0 + n'$.

Aus der Aehnlichkeit der genannten Dreieckspaare folgt, wenn wir die Diagonale AD des Quadrats AEDJ mit d bezeichnen, und $DT = y$, $DT' = y_{,}$ nennen,

$$y : \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - (y-d)^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - (y-d)^2} : y - d$$

$$y_{,} : \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - (y_{,}+d)^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - (y_{,}+d)^2} : y_{,} + d.$$

Die hieraus fließenden quadratischen Gleichungen $2y^2 - 3dy + \left[d^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] = o$ und $2y_{,}^2 + 3dy_{,} + \left[d^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] = o$ geben

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{3}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2} = T \text{ und } = -T' \\ y_{,} &= -\frac{3}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2} = T' \text{ und } = -T \end{aligned}\right\} \text{ wofern } \left(\frac{c}{2}\right)^2 > d^2 \text{ ist.}$$

Als wir, um die Lage der Punkte L und L' angeben zu können, suchten, wie weit der Punkt T auf der Linie AD rechts von D liegen muß, fanden wir, daß er auch links von D liegen kann und zugleich wie weit links; und wenn wir darauf behufs der Construction der Punkte L'' und L''' untersuchen, wie weit der Punkt T' links von D liegen muß, so finden wir zugleich, daß er auch rechts von D liegen kann. Ueber diese Erscheinung, hoffe ich, wird man sich nach den gemachten Mittheilungen nicht weiter wundern.

§ 50.

Die im vorigen § gewonnenen Resultate haben für uns noch eine besondere Bedeutung.

1) Wer nämlich Bézout's Darstellung der negativen Wurzeln, wie wir sie, als wir x suchten, in Fig. 9 α und Fig. 9 β vermittelst der Quadrate A'E'DJ' kennen gelernt haben, auch hier festhalten möchte, wo es sich darum handelt, y zu finden, der bedenke folgendes. So

wie er dort den positiven Werth von x auf DL, den negativen auf DL′ bezog, so müßte er
Fig. 9 ν. z. B. auch in Fig. 9 ν, während er den positiven Werth von y auf DT bezieht, den negativen Werth von y auf DT′ beziehen, welches absolut genommen = DT ist. Daran ist aber nach dem vorigen § nicht zu denken, wie solches auch schon Bessel in seinen Vorlesungen aussprach.

2) Die gefundenen Ausdrücke für y enthalten für den ersten Augenblick eine Schwierigkeit. Die Ausdrücke für x zeigten nämlich, daß wenn $c^2 < 8\,a^2$ ist, zwei Wurzeln (DL″ und DL‴) imaginär wurden. Mithin müßte der zweite Werth von y (— T′) und der erste Werth von y, (+ T′), welche auf die beiden genannten Wurzeln Bezug haben, für den Fall, daß $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < d^2$ ist, auf etwas Unmögliches hinweisen. Ein solcher Hinweis scheint hier nicht vorhanden, da sie auch in diesem Falle etwas reelles geben. Und doch ist er vorhanden. Da nämlich die beiden Werthe von y oder y, aus einer quadratischen Gleichung sich ergeben und der eine Werth zur Bestimmung der stets reellen Schnittpunkte L und L′ unter allen Umständen reell ausfallen muß, da ferner jede quadratische Gleichung entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Auflösungen hat, so kann allerdings der andere Werth, der sich jetzt auf die imaginären Schnittpunkte (L″ und L‴) bezieht, nicht imaginär sein, er wird aber in der ersten Gleichung für y, wo wir ihn negativ erwarteten, positiv, und in der zweiten Gleichung für $y_{,}$, wo wir ihn für reelle Schnittpunkte (L″ und L‴) positiv fanden, jetzt, da sie imaginär sind, negativ. Denn offenbar hat, wenn $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < d^2$ ist, die erste Gleichung für y zwei positive Wurzeln, und die zweite Gleichung für y, zwei negative. Hiemit, meine ich, hat die Algebra die Unmöglichkeit gewisser Schnittpunkte hinreichend signalisirt und die noch oft geäußerte Ansicht, daß unmögliche Lösungen geometrischer Probleme sich bei arithmetischer Behandlung derselben stets durch imaginäre Wurzeln verrathen müßten, ist hienach zu corrigiren.

§ 51.

Lagrange, welcher sich (Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 3, pag. 528) auch mit der Newton'schen Aufgabe beschäftigt hat, führt als Unbekannte die Entfernung eines
Fig. 9 δ und Fig. 9 ε. der Schnittpunkte B, B′, B″, B‴ von J ein. Obgleich er dadurch auf eine vollständige Gleichung des vierten Grades kommt, so hat er den Vortheil, daß er in der Bestimmung der Vorzeichen nicht irren kann. Mit Recht erklärt er daher die beiden Strecken, welche auf der einen Seite von J liegen, für positiv, und die beiden andern Strecken auf der andern Seite von J für negativ. Denn sowohl aus der Proportion $z : \sqrt{z^2 + b^2} = z - a : c$, wodurch JB gefunden werden soll, als auch aus der Proportion $z : \sqrt{z^2 + b^2} = a - z : c$ für JB′ erhält man

$$\text{I. } z^4 - 2\,a\,z^3 + (a^2 + b^2 - c^2)\,z^2 - 2\,a\,b^2\,z + a^2\,b^2 = o.$$

Dagegen aus der Proportion $z_{,} : \sqrt{z_{,}^2 + b^2} = z_{,} + a : c$, auf welche man kommt, wenn man JB″ oder JB‴ sucht, d. h. wenn man fragt, wie weit der gesuchte Schnittpunkt links von J liegt, erhält man

$$\text{II. } z_{,}^4 + 2\,a\,z_{,}^3 + (a^2 + b^2 - c^2)\,z_{,}^2 + 2\,a\,b^2\,z_{,} + a^2\,b^2 = o.$$

Daß stets $a^2 + b^2 < c^2$ sein müsse, ist wohl kaum nöthig, noch besonders hervorzuheben.

Da die beiden Gleichungen, wenn man $z = - z_,$ oder $z_, = - z$ setzt, in einander übergehen, so ist ersichtlich, daß die beiden positiven Wurzeln der einen Gleichung negative Wurzeln der andern sind, und daß also, wenn z. B. JB″ und JB‴ als positive Strecken aufgefaßt werden, die auf der anderen (rechten) Seite von J liegenden JB und JB′ negativ sein müssen.

Dieselbe Ueberzeugung gewinnt man auch, wenn man beide biquadratische Gleichungen auflöst. Zur Erleichterung setze man wieder $b = a$, bringe das von c^2 abhängige Glied auf die andere Seite des Gleichheitszeichens und addire noch auf beiden Seiten $a^2 z^2$ oder $a^2 z_,^2$, dann erhält man aus I. $(z^2 - a z + a^2)^2 = (a^2 + c^2) z^2$, aus II. $(z_,^2 + a z_, + a^2)^2 = (a^2 + c^2) z_,^2$. Setzt man nun $\sqrt{a^2 + c^2} = r$, $\sqrt{c^2 - 2a^2 + 2ar} = R$, $\sqrt{c^2 - 2a^2 - 2ar} = R'$, und beachtet, daß man für jede einzelne Auflösung das Vorzeichen von r festzuhalten hat, so sind die vier Wurzeln aus

$$\text{I.} \qquad z = \begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{r}{2} + \frac{R}{2} \\ \frac{a}{2} + \frac{r}{2} - \frac{R}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{r}{2} + \frac{R'}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{r}{2} - \frac{R'}{2} \end{cases} \qquad \text{II.} \qquad z_, = \begin{cases} -\frac{a}{2} - \frac{r}{2} - \frac{R}{2} \\ -\frac{a}{2} - \frac{r}{2} + \frac{R}{2} \\ -\frac{a}{2} + \frac{r}{2} - \frac{R'}{2} \\ -\frac{a}{2} + \frac{r}{2} + \frac{R'}{2} \end{cases}$$

welche deutlich zeigen, daß Wurzeln, die in I. positiv sind, in II. negativ sind und umgekehrt.

In so fern $a = b$ ist, geben natürlich die gefundenen Ausdrücke für z zugleich an, wie weit die Schnittpunkte C, C′, C″, C‴ von E entfernt sind.

Die Deutung der negativen Wurzeln in I. und II. kann ich füglich dem Leser selbst überlassen.

§ 52.

Aber es wird Zeit sein, daß ich die Deutung der imaginären Wurzeln unternehme, die dann zum Vorschein kommen, wenn $c^2 < 8a^2$ oder $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < d^2$ ist.

So viel ich weiß, hat außer Bézout (pag. 336) Niemand auch nur die Frage vorgelegt, in welcher Beziehung diese imaginären Wurzeln zu dem Newton'schen Probleme stehen. Um so nöthiger scheint es mir, zunächst Bézout's Ansicht mitzutheilen. Man denke sich nach seiner Anleitung in Fig. 9 μ aus L mit dem Radius $\frac{c}{2}$ einen Kreis beschrieben, verlängere DT bis zum Kreise in M. Da $MAB = 45^0$ ist, so ist $MLB = 90^0$. Daher ist ML die mittlere geometrische Proportionale zwischen DM und MT. Nun nennt er $AT = \eta$ und erhält dann aus $(d + 2\eta)\,\eta = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ für seine Unbekannte die beiden Ausdrücke $\eta = -\frac{d}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$. Er bezieht hier richtig den negativen Werth η, auf AT′ und fährt dann fort: Mais il se présente ici une rémarque importante à faire. Il peut arriver que l'arc que l'on voudra décrire du point A comme centre, et du rayon $\frac{1}{2}$ c, ne rencontre pas la perpendiculaire T'L'', parceque la quantité $\frac{1}{2}$ c peut être plus petit que AT'. Or nous avons dit que lorsque les questions du second degré étaient impossibles, l'Algèbre le faisait connaître, cependant dans l'équation (für η) rien ne manifeste dans quels cas cette impossibilité a lieu; car tout est nécessairement positif sous le radical.

Voici la solution de cette difficulté. Il est incontestable que lorsqu' une question exprimée algébriquement, sera impossible, l'Algèbre manifestera cette impossibilité; mais il faut bien faire attention que ce sera lorsq'on aura exprimé par cette même Algèbre, tout ce que la question suppose, soit explicitement, soit implicitement; or c'est précisément ce qui n'a pas lieu ici. En effet, la question suppose tacitement que les trois points D, A, L, ne sont pas sur une même ligne droite, et c'est ce que nous n'avons point exprimé algébriquement; nous avons exprimé que LM était moyenne proportionelle entre DM et MT, propriété qui appartient à la vérité au triangle rectangle, mais qui peut avoir lieu aussi lorsque les trois points D, A, L, sont supposés en ligne droite. En effet, il est évident qu'on peut se proposer cette question: Trouver sur la di-
Fig. 9 ξ. rection DL, quelle intervalle il faudrait laisser entre les deux droites, DA et ML de grandeurs connues, pour que ML soit moyenne proportionelle entre DM et MT, le point T étant le milieu de AM. Or cette question conduit précisément à la même équation que ci-dessus, et cette équation donne deux solutions, l'une pour le cas où les deux points A et M sont entre D et L; l'autre, pour le cas contraire. Il n'est donc pas étonnant que lorsque la première question devient impossible, l'Algèbre n'en dise rien, puisqu' elle doit donner la solution de cette seconde question qui est toujours possible.

Man wird zugeben müssen, daß Bézout die hier obwaltende Schwierigkeit nicht gelöst, sondern nur bei Seite geschoben hat. Die Aufgabe, die ich mir vorgenommen habe, zu lösen, ist die: nachzuweisen, in welcher innigen Beziehung die erhaltenen Werthe für x, y, z zu dem Newton'schen Problem selbst stehen, wenn die Schnittpunkte L'' und L''' imaginär werden. Zu diesem Zwecke wollen wir uns ohne Vorurtheil von den gegebenen Verhältnissen leiten lassen.

§ 53.

Der Werth von $y_{,,}$ welchen wir nach § 49 auf die Diagonale DA im Punkte D nach links hin für unsern gegenwärtigen Zweck aufzutragen haben, heißt: $y_{,} = -\frac{3}{4}d + \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$. Da er aber bei der jetzigen Voraussagung, daß $\frac{c}{2} < d$ ist, nach § 50 negativ ausfällt, so haben wir seinen absoluten Werth $V = \frac{3}{4}d - \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$
Fig. 9 *o*. nach rechts hin aufzutragen; es sei also in Fig. 9 *o* DT $=$ V, in T haben wir ein Loth zu errichten, FG, dann aus A mit dem Radius AO $= \frac{c}{2}$ einen Kreis zu beschreiben und die

Schnittpunkte des Kreises und Lothes in weitere Betrachtung zu ziehen. Aber, weil c zu klein ist, entstehen keine reellen Schnittpunkte, wie Bézout nach § 52 ganz richtig erkannt hat, ein Zeichen eben, daß es unter der jetzt gemachten Voraussetzung unmöglich ist, innerhalb des Quadranten FAG von einem seiner Schenkel bis zum andern durch D eine Linie = c zu ziehen. Obgleich wir nun das Unmögliche nicht möglich machen können, so ist es unsre Pflicht zu untersuchen, was die imaginären Schnittpunkte hier für Resultate liefern werden, von denen seit dreißig Jahren doch schon so viel geschrieben ist. Unter andern hat Chasles (Traité, pag. 459, Le pied de la perpendiculaire abaissée du centre d'un cercle sur une droite est le milieu des deux points d'intersection, réels ou imaginaires, de la droite et du cercle) bewiesen, daß T die Mitte zwischen den beiden Punkten ist. Doch hat er seiner Methode wegen die Stelle der Punkte selbst nicht angegeben. Sein Uebersetzer Dr. Schnuse (die Grundlehren der neuern Geometrie, 1856, pag. 41 und 270), in der Meinung sich auf Gauß zu stützen, sagt, daß sie, eben weil sie imaginär sind, nicht auf FG liegen können, sondern auf der durch T gezogenen Senkrechten AA′, in gleichen Abständen von T. Ich kann dem aber nicht beitreten, sondern mit Bezugnahme auf zwei meiner frühern Schriften (Ueber die Anzahl der Glieder in den Summenformeln der Progressionen, 1845, pag. 17, und Auflösung der kubischen Gleichungen, 1861, pag. 4) behaupte ich, daß diese imaginären Schnittpunkte auf der idealen Sekante FG selbst liegen und zwar, daß es die Punkte L und L′ sind, welche man dadurch erhält, daß man in dem Punkte O die zu dem Kreise A zugehörige gleichseitige Hyperbel L′OL zeichnet, deren halbe Hauptaxe AO ist. Die Zugehörigkeit im Allgemeinen beweise ich dadurch, daß ich sage: So lange in Fig. 9 μ $AT' < \frac{c}{2}$ war, mußte zu seinem Quadrat ($\eta_{,}^{2}$) noch etwas Positives ($T'L''^2 = u^2$) addirt werden, um $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ zu erlangen; sobald aber in Fig. 9 o AT oder $Y > \frac{c}{2}$ wird, muß zu seinem Quadrat Y^2 etwas Negatives ($-U^2$) addirt werden, wenn man doch nur $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ erhalten will. Nun ist es aber in der Mathematik sonst immer Gebrauch, was bloß durch + oder — unterschieden ist, in eine Einheit zusammen zu fassen. Warum will man denn hier zwischen der Curve, welche in Fig. 9 μ an die Gleichung $\eta_{,}^{2} + u^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ gebunden ist und zwischen der Curve, welche in Fig. 9 o von der Gleichung $Y^2 - U^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ abhängt, die in theoretischer Hinsicht durch nichts gerechtfertigte Kluft länger bestehen lassen? Man hat also ein Recht, die Hyperbel L′OL gewisser Maßen als eine Fortsetzung des Kreises um A anzusehen, daher sind L und L′ die hier in Betracht kommenden imaginären Schnittpunkte zwischen dem Kreise A und der idealen Sekante FG.

Ehe ich weiter gehe, will ich das so eben im Allgemeinen gewonnene Resultat an den in den frühern §§ entwickelten arithmetischen Ausdrücken für x und y prüfen. In Bezug auf Fig. 9 μ war

$y_, = -\frac{3}{4}d + \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2} = -\frac{3a\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}r$, wo $r = \sqrt{a^2+c^2}$, also $y_,^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{c^2}{8} - \frac{3}{4}ar$. Da nun $x^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - ar$ ist, so bleibt für $L''T'^2$ übrig: $u^2 = -\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{8} - \frac{ar}{4}$, ein Ausdruck, den wir auch unmittelbar aus den in § 47 vorkommenden ähnlichen Dreiecken hätten ableiten können.

Weil aber, wenn in Fig. 9 *o* $c^2 < 8a^2$ ist, x^2 negativ $= -X^2$ wird, so muß selbstverständlich auch u^2 negativ werden $= -U^2$, so daß also $U^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{8} + \frac{ar}{4}$ ist.

Ferner hatten wir für Figur 9 μ den absoluten Werth von $AT' = -\eta_,$ gefunden $= \frac{d}{4} + \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$, also ist dort $AT'^2 = \eta_,^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{8} + \frac{ar}{4}$. In Fig. 9 *o* erhalten wir für $AT = Y$ und für $AT^2 = Y^2$ dieselben arithmetischen Ausdrücke. Demnach ist wirklich dort $\eta_,^2 + u^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ und hier $Y^2 - U^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Somit hoffe ich, bis zur Evidenz nachgewiesen zu haben, daß hier die Punkte L und L′ dieselbe Rolle spielen, welche dort von den Punkten L″ und L‴ übernommen war.

Wenn nun also in Fig. 9 *o* L und L′ die imaginären Schnittpunkte sind, so haben wir jetzt von D durch diese Punkte Linien zu ziehen bis dahin, wo sie die Schenkel des gegebenen rechten Winkels JAE treffen. Die Fixirung der dadurch entstehenden Schnittpunkte kann nicht schwierig sein, nachdem wir in § 49 erfahren haben, wie weit sie von E und J entfernt sind. Von den dort aufgestellten vier Werthen von z, haben wir für unsern Zweck die beiden letzten zu wählen, welche lauten

$$z_, = \frac{r-a}{2} \pm \frac{R'}{2}, \text{ wo } R' = \sqrt{c^2 - 2a^2 - 2ar}.$$

Da aber gegenwärtig $c^2 < 8a^2$ ist, so ist dieses R′ imaginär, etwa $= 2iP$, wo dann P reell und $= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2ar - c^2}$ ist. Der Kürze wegen setze ich noch den reellen Theil von $z_,$ nämlich $\frac{r-a}{2} = \varrho$: Dann geben die Ausdrücke $z_, = \varrho \pm i.P$ an, wie weit die gesuchten Schnittpunkte links von J oder unterhalb E liegen. Hier ist es angebracht, sich der Gaußischen Theorie von der Construction complexer Ausdrücke zu bedienen. Wir schneiden also zuvörderst links von J ein Stück $JF = \varrho$ ab. Wäre R′ noch reell, so müßten wir jetzt von F aus nach den ganz entgegengesetzten Richtungen FM′ und FS Stücke = R′ abschneiden. Nun aber, da R′ imaginär ist, d. h. im halben Gegensatze zu der ursprünglichen Richtung JF steht, haben wir natürlich in F ein Loth B′A′ zu errichten und darauf nach entgegengesetzten Richtungen die Stücke $FB' = FB = P$ abzuschneiden. Ebenso tragen wir unterhalb E die Linie $EG = \varrho$ auf, errichten in G ein Loth und machen $GC = GC' = P$. Dann geben die Punkte B und C einerseits und die Punkte B′ und C′ andererseits an, wie weit man die Linien DL und DL′ nach beiden Seiten zu verlängern hat.

§ 54.

Von den sich jetzt aufdrängenden Fragen will ich zunächst die beantworten: Ob die vier Punkte B, D, L, C oder die vier Punkte C′, D, L′, B′ in einer geraden Linie liegen?

Da $tg.TDL = \frac{U}{V} = \frac{2P}{3a - r} = \tau$ ist, so ist $tg.EDL = \frac{\tau - 1}{\tau + 1} = \frac{2P - 3a + r}{2P + 3a - r}$.

Ferner ist $tg.C = \frac{DW}{WC} = \frac{\varrho}{a + P}$. Weil sich aber leicht nachweisen läßt, daß $\frac{2P - 3a + r}{2P + 3a - r} = \frac{\varrho}{a + P}$ ist, so folgt aus $C = EDL$, daß die beiden Geraden DL und DC zusammenfallen. Dann ist in dem Dreieck BVD die Linie $DV = a - P$ gemacht, mithin ist $tg\ B = \frac{a - P}{\varrho}$. Da aber $\varrho^2 + P^2 = a^2$ ist, so ist auch $\frac{a - P}{\varrho} = \frac{\varrho}{a + P}$, folglich $C = B$ und $WDC = BDV$, d. h. BDC ist eine gerade Linie, also ist auch BDLC eine gerade Linie und ebenso auch C′DL′B′.

Nun wollen wir nachsehen, ob auch wirklich L und L′ die Mitten dieser beiden Geraden sind. So wie bei Fig. 9 $\mu\ u^2 = y_{,} \cdot (d + y_{,})$ war, so ist jetzt in Fig. 9 $o\ U^2 = Y.(d - Y)$, d. h. $DH : HL = HL : HA$. Also ist ALD ein rechter Winkel. Aus der Congruenz der beiden Dreiecke AFB und AGC folgt, daß $AB = AC$ ist. Mithin ist L die Mitte der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks. Dasselbe läßt sich von L′ nachweisen.

Die beiden Geraden BC und B′C′ sind einander gleich. Denn es ist $A'C = \varrho + a + P = A'B'$, und daß $C = B'$ ist, ergiebt sich aus folgenden Betrachtungen: AFA′G ist ein Quadrat, dessen Diagonalen AA′ und FG sind, mithin steht D von den Schenkeln des rechten Winkels A′ gleich weit ab; daher ist es leicht, zu dem Dreieck DWC ein anderes mit dem Winkel B′ zu zeichnen, welches ihm wegen der Gleichheit der Catheten congruent ist.

Es ist $AL = LC$ und $AL' = L'B'$. Denn es ist $\angle LAT = \angle TLD = \angle GLC$, und weil $LGQ = 45^0 = TAN$, so ist auch $\angle LAN = C$; außerdem ist LNGQ ein Quadrat, also ist $ALN \cong LQC$.

Aber, wird man sagen, was kann das alles helfen? es ist doch nicht $BC = c$, da offenbar $AL > \frac{c}{2}$ ist. Wir wollen uns durch diesen Einwand nicht aufhalten lassen, sondern untersuchen, wie groß hier BC ist. Da der Winkel ALD ein rechter ist, so haben wir $AL^2 = AT.AD = Y.d = \frac{2a^2 + 2ar}{4}$ und weil $P^2 = \frac{2a^2 + 2ar - c^2}{4}$ ist, so ist $AL^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + P^2$. Also nur so lange $\frac{c}{2} >$ oder $= d$ ist, ist $BC^2 = c^2$, so bald aber $\frac{c}{2} < d$ wird, ist $BC^2 = c^2 + (2P)^2$.

Wir sind jetzt auf einem Standpunkte angelangt, von wo aus es wünschenswerth ist, nachzulesen, was Chasles bei Erwähnung des Imaginären über parties permanentes und parties accidentelles einer Figur sagt (Geschichte der Geometrie, übersetzt von Sohnke, pag. 203, den

Aperçu historique selbst habe ich nicht zu Gesicht bekommen). Danach würde aus der Newton-schen Aufgabe etwa folgendes Theorem werden: Wenn man in den Figuren 9 μ und 9 o aus A Kreise mit dem Radius $\frac{c}{2}$ beschreibt, die Diagonale $AD = d$ des Quadrats $AEDJ = a^2$ nach links hin von D aus um $y, = -\frac{3}{4} d \pm \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$ verlängert, in den Endpunkten dieser Verlängerung Lothe errichtet, welche jene Kreise in L schneiden, wenn man ferner die Linien DL nach beiden Seiten verlängert, bis sie die Seiten des Quadrats in B und C treffen, dann ist unter allen Umständen L von A, B, C gleich weit entfernt. Das wäre nach Chasles eine bleibende Eigenschaft der Figur. Ist bei dieser Gelegenheit, wie in Fig. 9 μ $\frac{c}{2} > d$, so kommt noch dazu, daß $BC^2 = c^2$ ist; ist aber, wie in Fig. 9 o $\frac{c}{2} < d$, so ist $BC^2 = c^2 + (2\ P)^2$, auch sind B und C von A gleich weit entfernt. Das wären dann bloß zufällige Eigenschaften der speciellen Figuren. Hiernach könnten wir sagen: Obgleich es bei Figur 9 o unmöglich ist und bleibt, durch D eine Linie $= c$ in der angegebenen Weise zu legen, so genügt die von uns gezogene Linie BC doch in der bleibenden Relation, wonach sich auf ihr ein Punkt L angeben läßt, welcher von B und C und A gleich weit entfernt ist. Wenn aber Chasles fast in einem Athemzuge sagt pag. 395: „Wenn z. B. ein durch die Rechnung gegebener Ausdruck zur Bestimmung eines Punktes auf einer Geraden imaginär ist, so würde man einen sehr bedeutenden Fehler begehen, wenn man diesen Punkt construiren wollte, als wenn sein Ausdruck reell wäre. Der auf diese Weise construirte Punkt würde weder zu der Figur, noch zu der Aufgabe, die vorgelegt ist, gehören, und alle aus der Betrachtung dieses Punktes abgeleiteten Resultate würden falsch sein.“ — und pag. 397: „Die Correlation von Figuren, welche dadurch unterschieden sind, daß man in der einen als reell einen Ausdruck construirt, der in der andern imaginär ist, ist ein Gegenstand für ganz neue Untersuchungen, von denen es uns scheint, daß sie zu einigen allgemeinen Gesetzen der Ausdehnung führen können, welche den Einfluß der geometrischen Doctrinen vermehren dürften“, wenn er auf der einen Seite vor der Identificirung des Kreises und der zugehörigen Hyperbel warnt und auf der nächsten Seite die Erfolge lobt, welche Lambert dadurch erzielt hat (vergl. meine Abhandlung über die kubischen Gleichungen, pag. 2) — so weiß ich mir das nicht zu erklären, nehme aber doch davon Veranlassung, dem Newton'schen Problem lieber folgende Fassung zu geben, wobei sämmtliche gewonnenen Resultate in gleicher Berechtigung neben einander erscheinen werden und sich nichts als bloß zufällig herausstellen wird: Man soll durch den Punkt D von einem Schenkel des rechten Winkels A bis zum andern eine Linie BC legen, welche als Hypotenuse eines Dreiecks aufzufassen ist, dessen eine Cathete c ist, und dessen andere Cathete doppelt so lang ist, als sich der Abstand des Schnittpunktes eines Schenkels des rechten Winkels A und der gesuchten Linie von dem nämlichen Schenkel des rechten Winkels den Umständen nach ergeben wird. Ich habe wohl kaum nöthig noch hinzuzufügen, daß, wenn $\frac{c}{2} > d$ ist, dieser Abstand $= o$ ist und dann also $BC = c$ werden soll, daß aber, wenn $\frac{c}{2} < d$ ist, der Abstand wegen der lateralen Lage der erwähnten Schnittpunkte $= P$ ist.

Dagegen will ich noch besonders darauf aufmerksam machen, daß, nachdem $DT = V = \frac{3}{4}d - \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$ construirt worden ist, und mit Hilfe des rechten Winkels DLA der Punkt L bestimmt ist, man wegen der Gleichung $\varrho^2 + P^2 = a^2$ oder auch wegen $AL = LC$ durch einen Bogenschlag den Punkt C gewinnen kann, in Folge dessen die Construction der imaginären Wurzeln der § 51 aufgestellten biquadratischen Gleichung $z_{,} = \varrho \pm i \,.\, P$ ohne alle Mühe zu vollziehen ist.

§ 55.

Nachdem auf diese Weise für imaginäre Schnittpunkte der Zusammenhang zwischen $y_{,}$ und $z_{,}$ auf das Vollständigste vor Augen gelegt ist, wollen wir noch zeigen, daß das imaginäre x diesen Zusammenhang nicht stört, sondern im Gegentheil über unser Problem ein ganz neues Licht verbreitet. Wenn man in Fig. 9 μ $DT' = y_{,}$ und $T'L'' = u$ gehörig bestimmt hat, und wenn man dann aus L'' mit dem Radius x einen Kreis beschreibt, so wird derselbe wegen der Gleichung $y_{,}^2 + u^2 = x^2$ die Linie AD zunächst in dem Punkte D treffen, aber auch in einem Punkte D', den man durch Verlängerung von AD über T' hinaus erlangt. Obgleich dann $AD' > AL''$ ist, so wird man dennoch durch D' vorschriftsmäßig zwei Linien, jede $= c$ legen können, wenn man dabei nach Anleitung des vorigen § L''' und L'' als imaginäre Schnittpunkte auffaßt.

Die eben erwähnte Gleichung $y_{,}^2 + u^2 = x^2$ geht nach § 53 für Fig. 9 *o* in folgende über: $U^2 - V^2 = X^2$. Wenn man daher hier $DT = V$ und $TL = U$ dem angeführten § gemäß bestimmt hat und aus L mit dem Radius $LH = X$ einen Kreis beschreibt, so trifft dieser durch seinen ihm zugehörigen Hyperbelbogen DHD' die Linie AD nicht nur in D, sondern auch in dem ihm entsprechenden Punkt D', wobei natürlich $DT = D'T$ und $DL = D'L$ ist. Zieht man dann durch D' und L einerseits und durch D' und L' andererseits bis an die Schenkel des gegebenen rechten Winkels JAE die Linien SM und $S'M'$, so sind dieselben nicht nur unter einander gleich, sondern jede von ihnen ist auch $= BC = B'C'$. Zum Beweise führe ich folgendes an: Die Winkel MLG und CLG sind gleich, weil ihre Scheitelwinkel gleich sind, $LGQ = LGN = 45^0$, also ist auch $C = M$. Weil ferner $LQ = LN$ ist, so ist auch $QC = NM$ und $GC = GM = P$. Daher ist $A'C = AM$, weil jede Linie $= a + \varrho + P$ ist. Nun folgt aus der Congruenz der Dreiecke $A'BC$ und ASM nicht bloß, worauf es zunächst ankommt, daß $BC = SM$ ist, sondern auch, daß $A'B = AS$ ist. Weil aber LQ die Hälfte von $A'B$ und also auch LN die Hälfte von AS ist, so folgt, daß, so wie L die Mitte von BC ist, auch L die Mitte SM ist. Daher ist $AL = LS = LM$. (Auch ist $FB = FS = C'G = GS' = P$.) Ich nenne noch den senkrechten Abstand des Punktes D' von den Schenkeln des gegebenen rechten Winkels a' und $SM = c'$ oder $AL = \frac{c'}{2}$, so daß also $a' = \varrho$ und $\frac{c'}{2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + P^2}$ ist.

Diese Resultate sind für das vorliegende Problem von ganz besonderer Bedeutung, wir können nämlich jetzt sagen: Wenn durch den Punkt D innerhalb des Quadranten M'AM wegen des ungünstigen Größenverhältnisses zwischen a und c sich nur imaginäre Linien BC und B'C', jede = c' legen lassen, so kann man durch den ihm entsprechenden Punkt D' zwei reelle Linien SM und S'M' ziehen, welche jenen gleich und parallel sind; die Schnittpunkte L und L', welche für jene imaginär waren, sind für diese reell. Ferner, wenn durch den Punkt D' wegen der günstigen Beschaffenheit von a' und c' zwei reelle Linien SM und S'M' jede = c' gelegt werden können, so ist man noch im Stande, von dem ihm entsprechenden Punkte D aus durch ihre Mitte L und L' zwei imaginäre Linien von gleicher Länge und Lage zu ziehen. — Auch ist nicht außer Acht zu lassen, daß die beiden Auflösungen BC und B'C', welche für den gegebenen rechten Winkel MAM' imaginär waren, für den gegenüber liegenden rechten Winkel CA'B' reell sind, und umgekehrt, daß die beiden andern Auflösungen SM und S'M', welche für A reell waren, für A' imaginär sind.

Ich überlasse es dem Leser, an Fig. 9 μ über den dem Punkte D entsprechenden Punkt in Bezug auf T, welcher über M hinaus liegt, ähnliche Betrachtungen anzustellen.

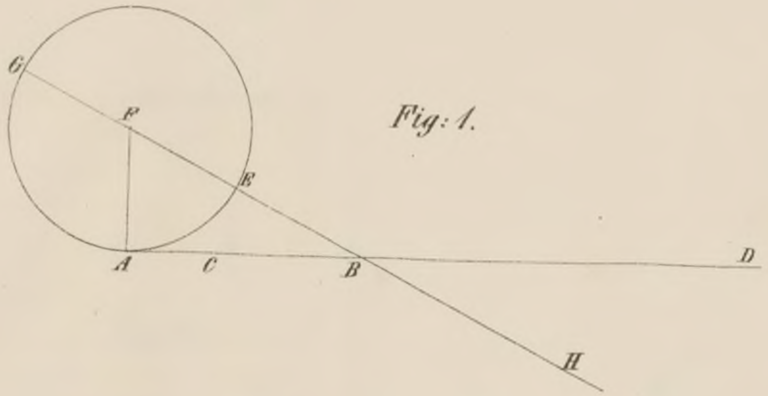

Fig: 1.

Fig: 2.

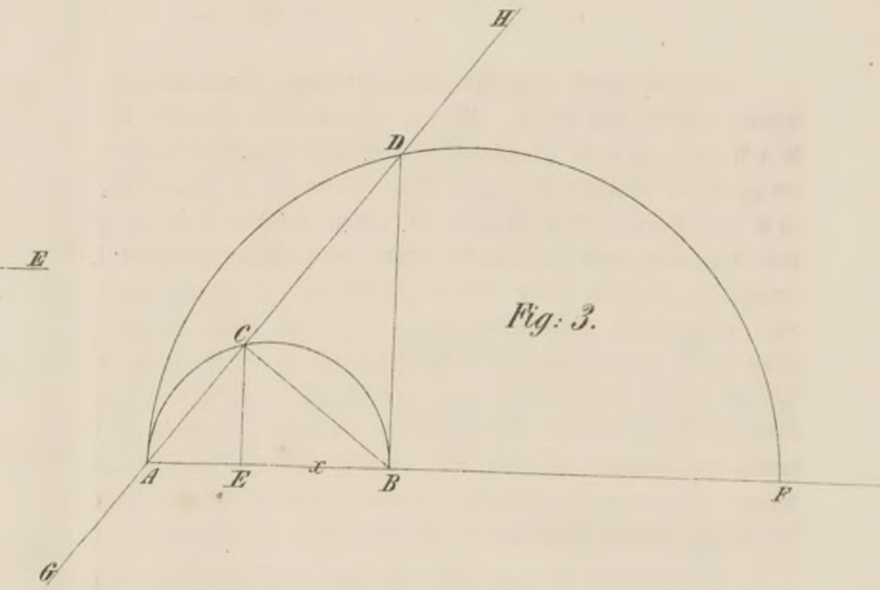

Fig: 3.

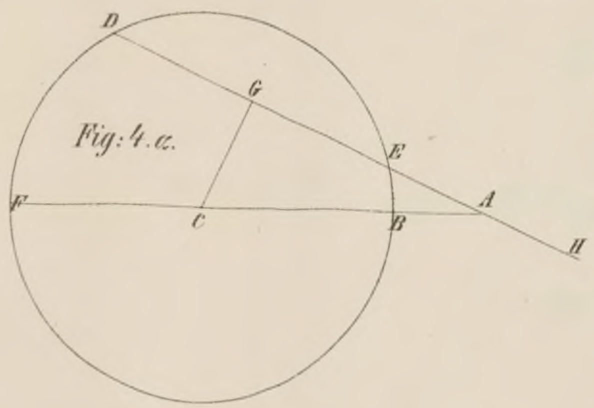

Fig: 4. α.

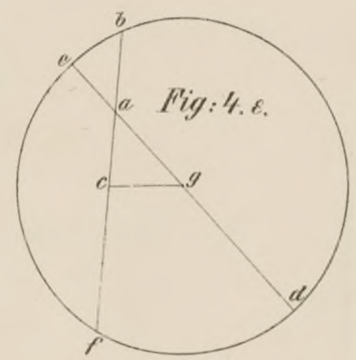

Fig: 4. ε.

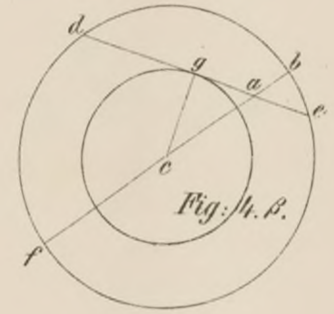

Fig: 4. β.

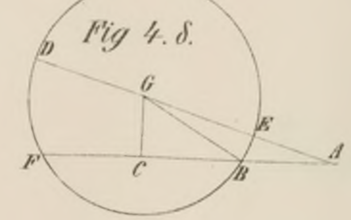

Fig 4. δ.

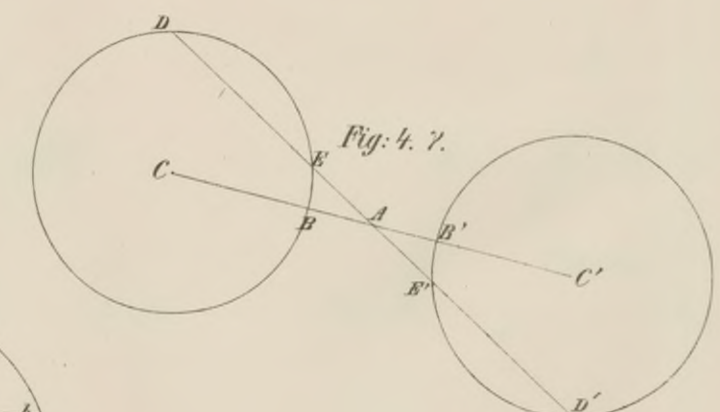

Fig: 4. γ.

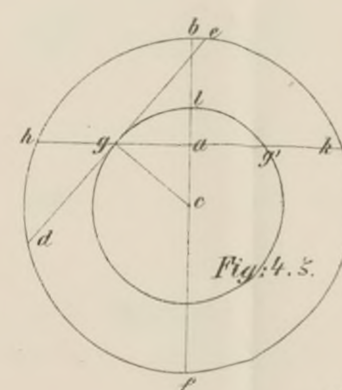

Fig: 4. ζ.

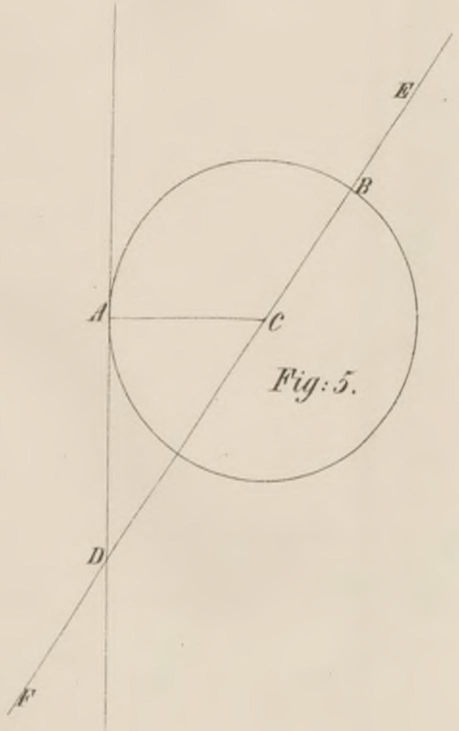

Fig: 5.

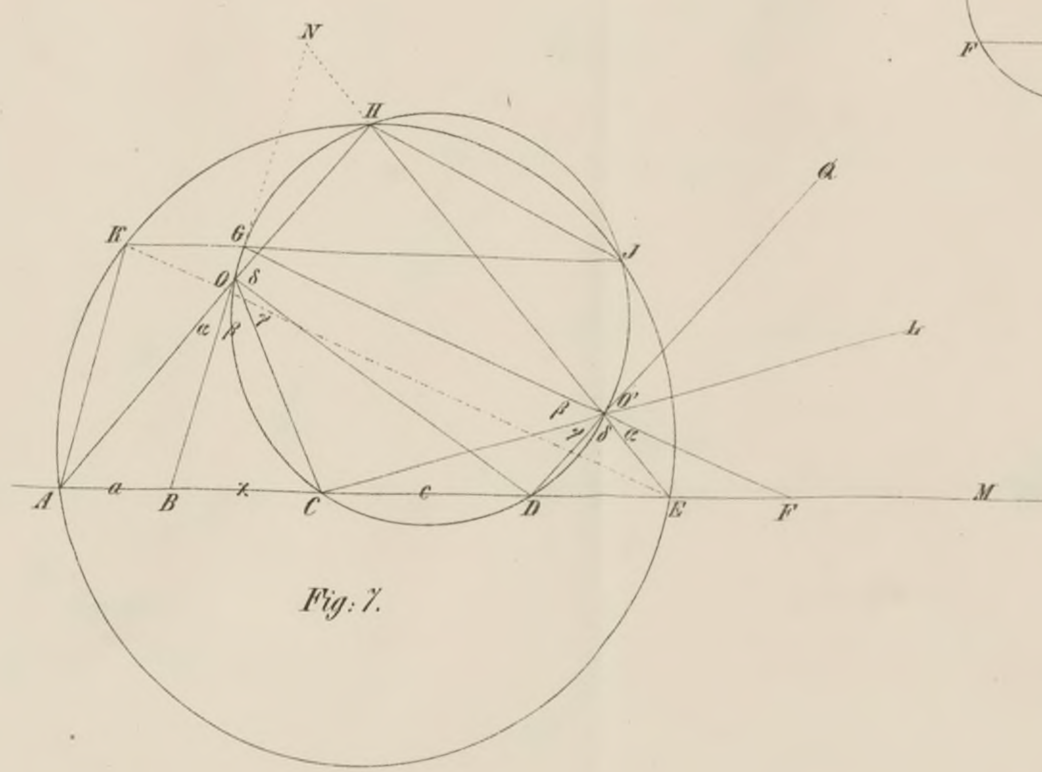

Fig: 7.

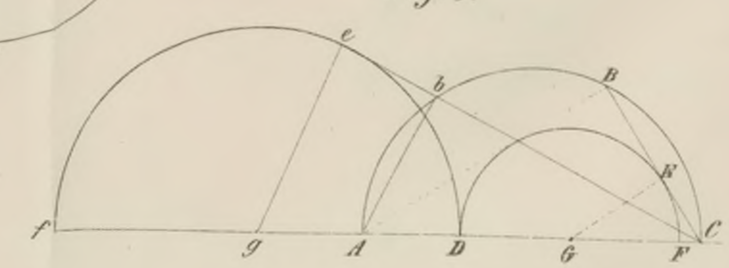

Fig: 6.

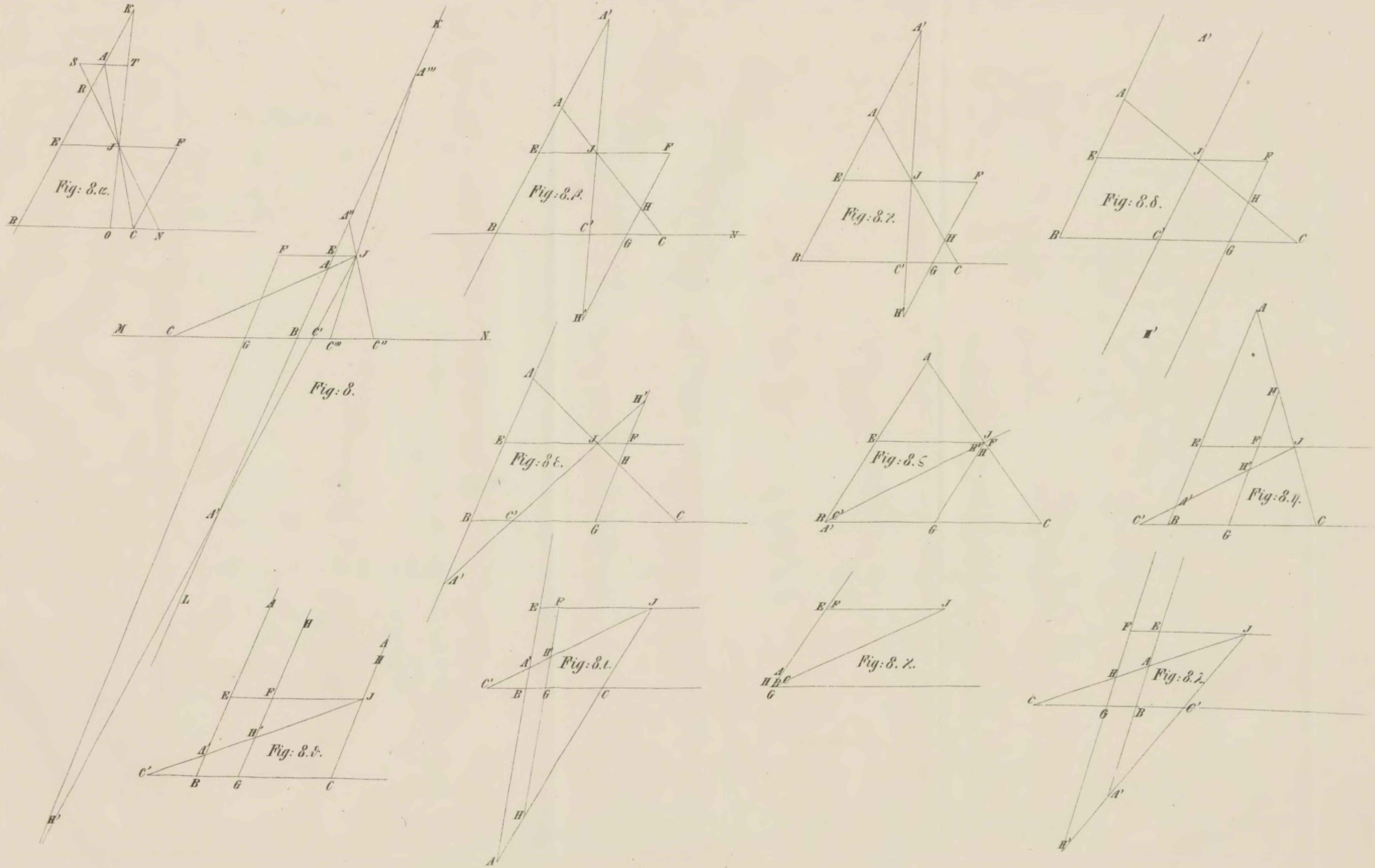

Fig: 8.α.

Fig: 8.

Fig: 8.β.

Fig: 8.γ.

Fig: 8.δ.

Fig: 8.ε.

Fig: 8.ζ.

Fig: 8.η.

Fig: 8.ϑ.

Fig: 8.ι.

Fig: 8.κ.

Fig: 8.λ.

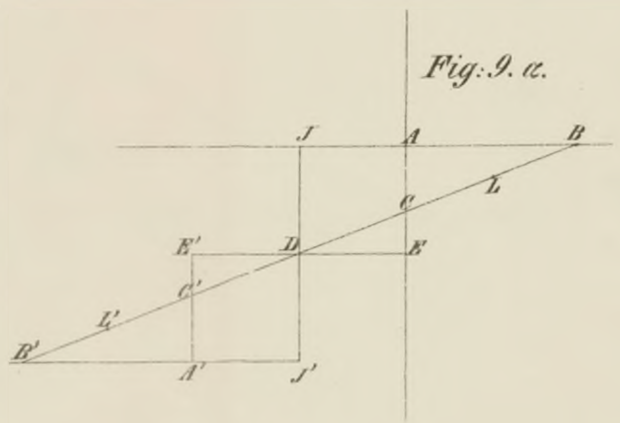

Fig: 9. α.

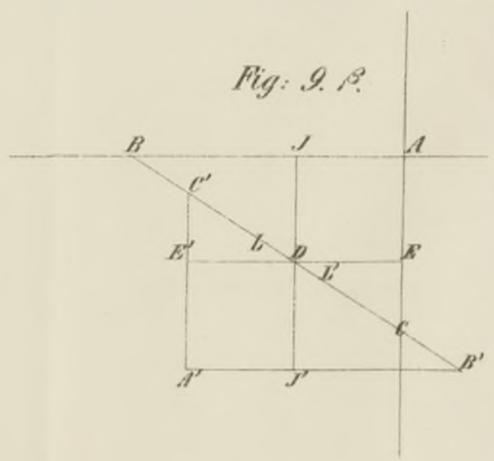

Fig: 9. β.

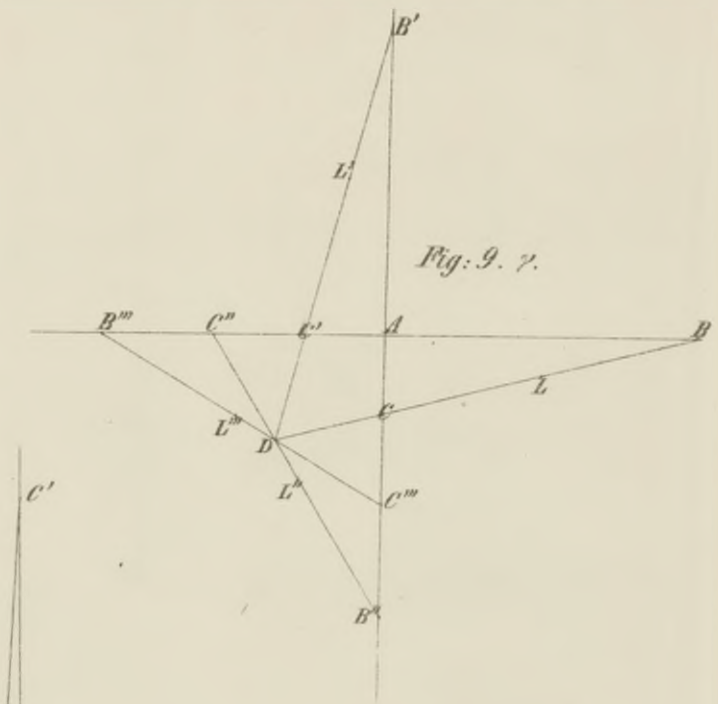

Fig: 9. γ.

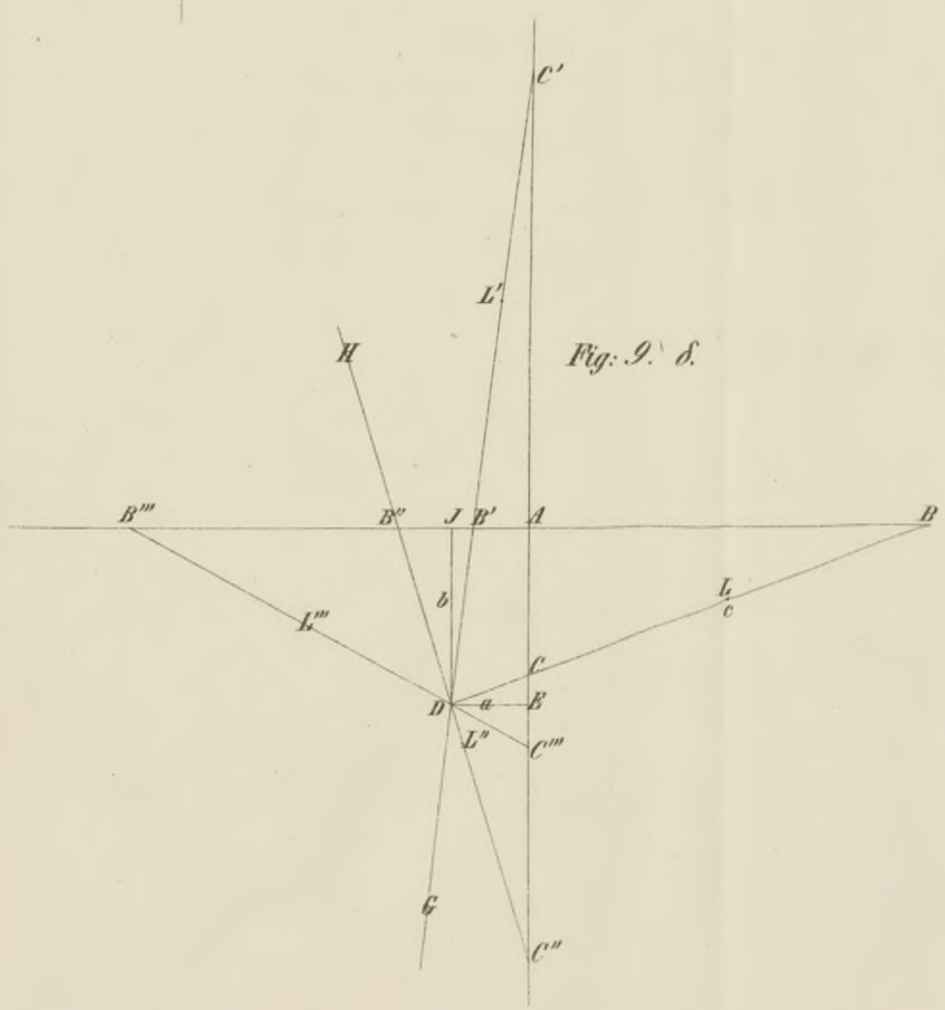

Fig: 9. δ.

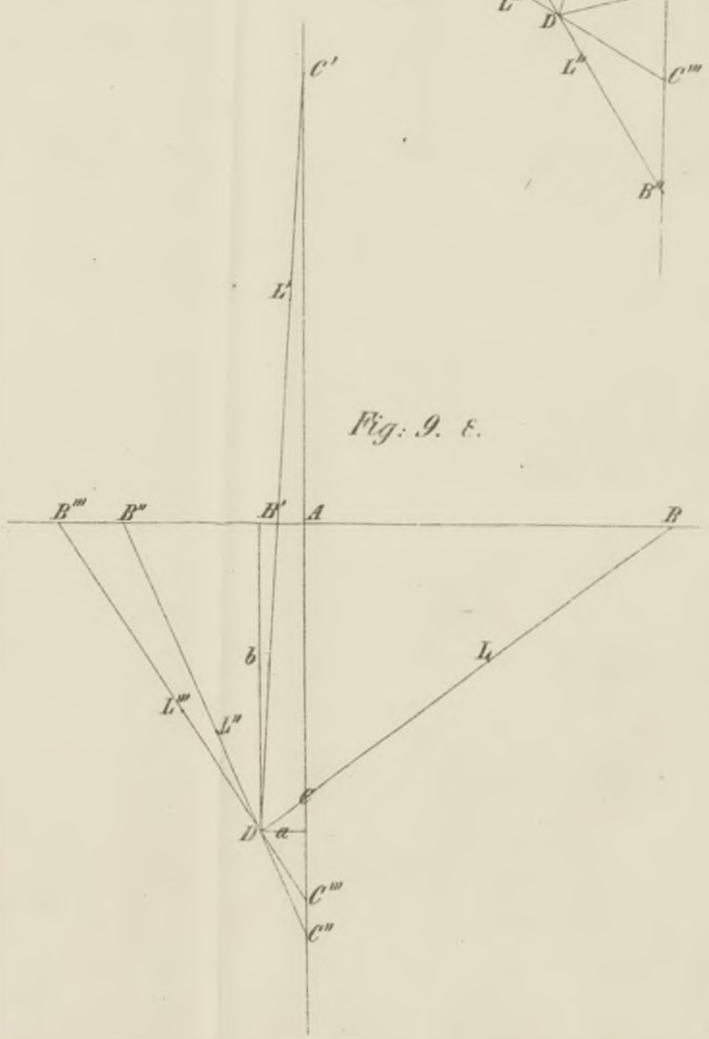

Fig: 9. ε.

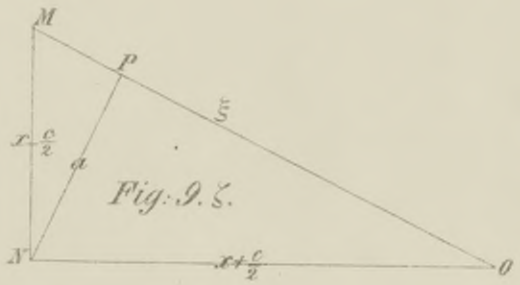

Fig: 9. ζ.

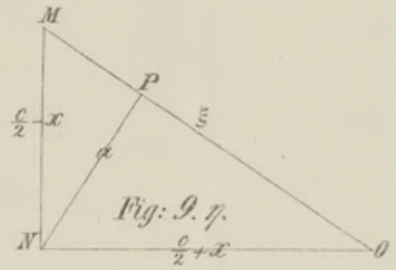

Fig: 9. η.

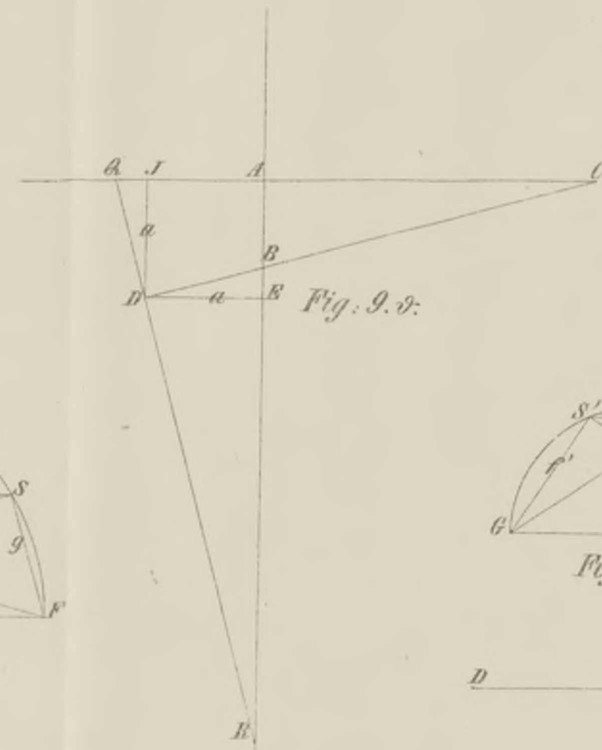

Fig: 9. ϑ.

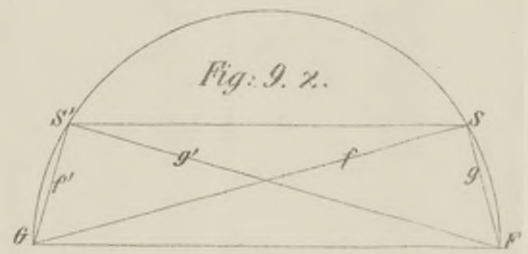

Fig: 9. κ.

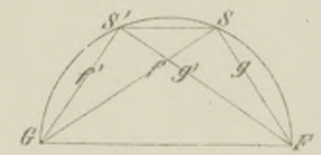

Fig: 9. λ.

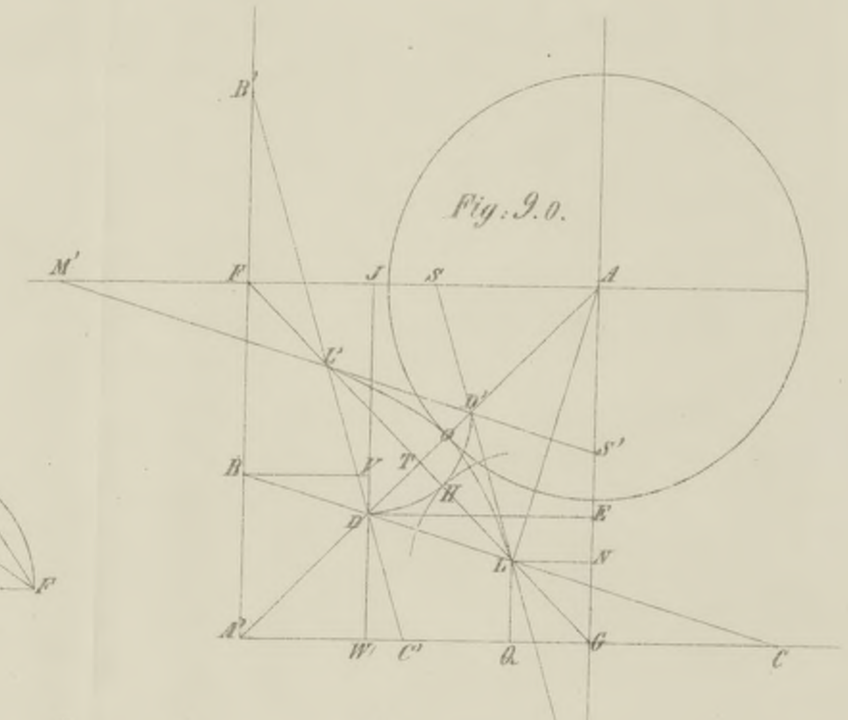

Fig: 9. ο.

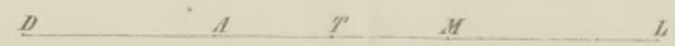

Fig: 9. ξ.

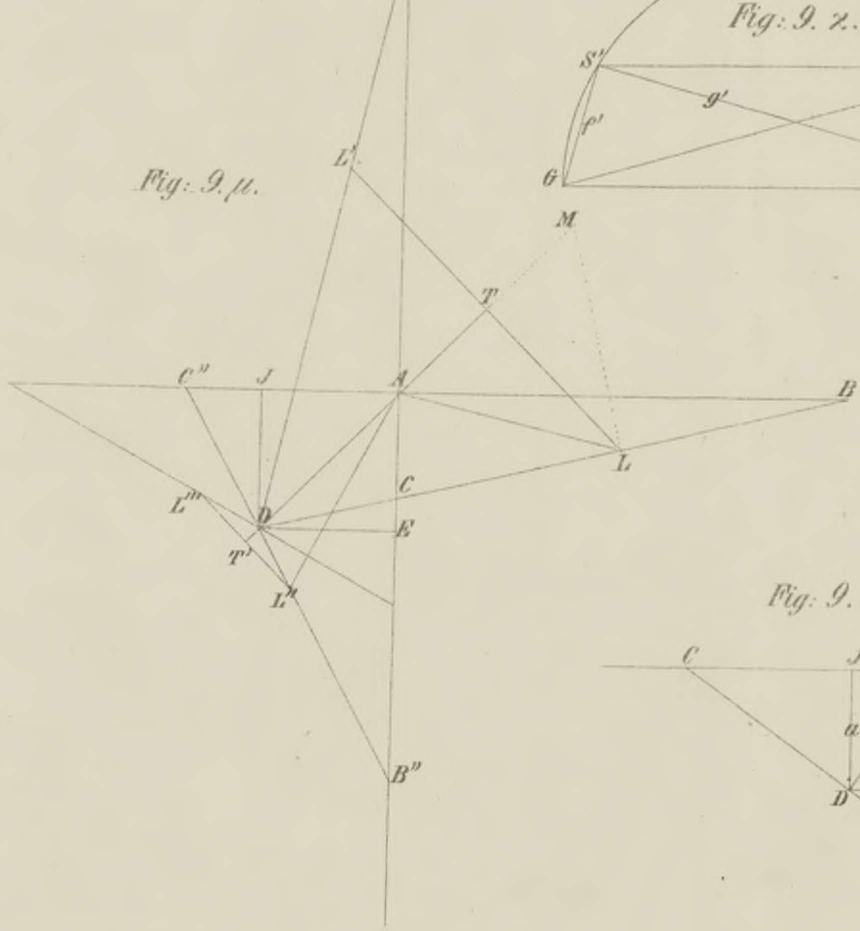

Fig: 9. μ.

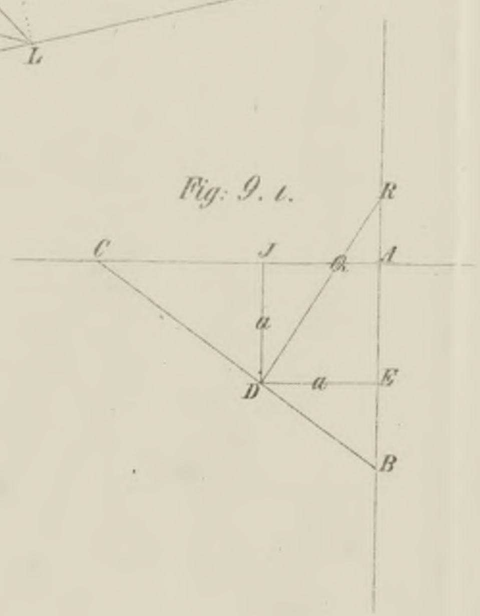

Fig: 9. ι.

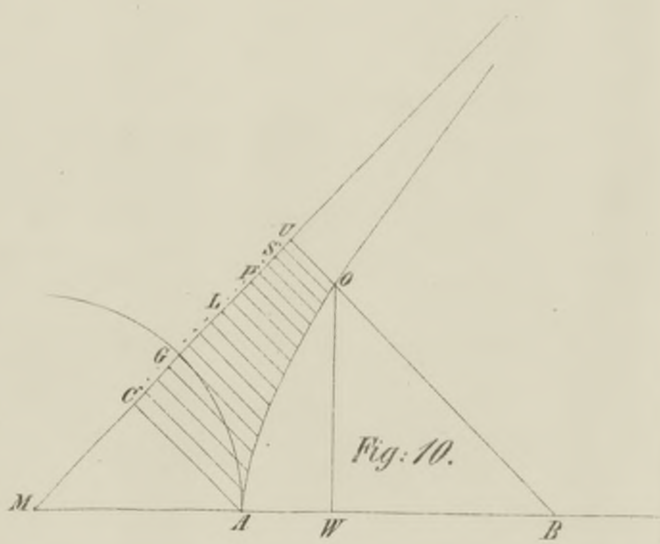

Fig: 10.

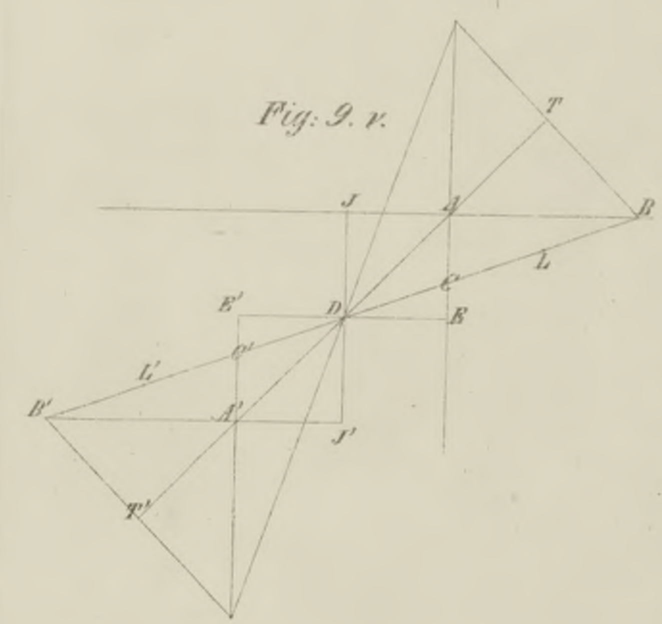

Fig: 9. ν.