



No. 43 (81).

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Realgymnasiums
zu St. Johann in Danzig. Ostern 1902.

Über

stabiles Schwimmen homogener Körper.

Von

Eugen Scheeffer,

Professor.

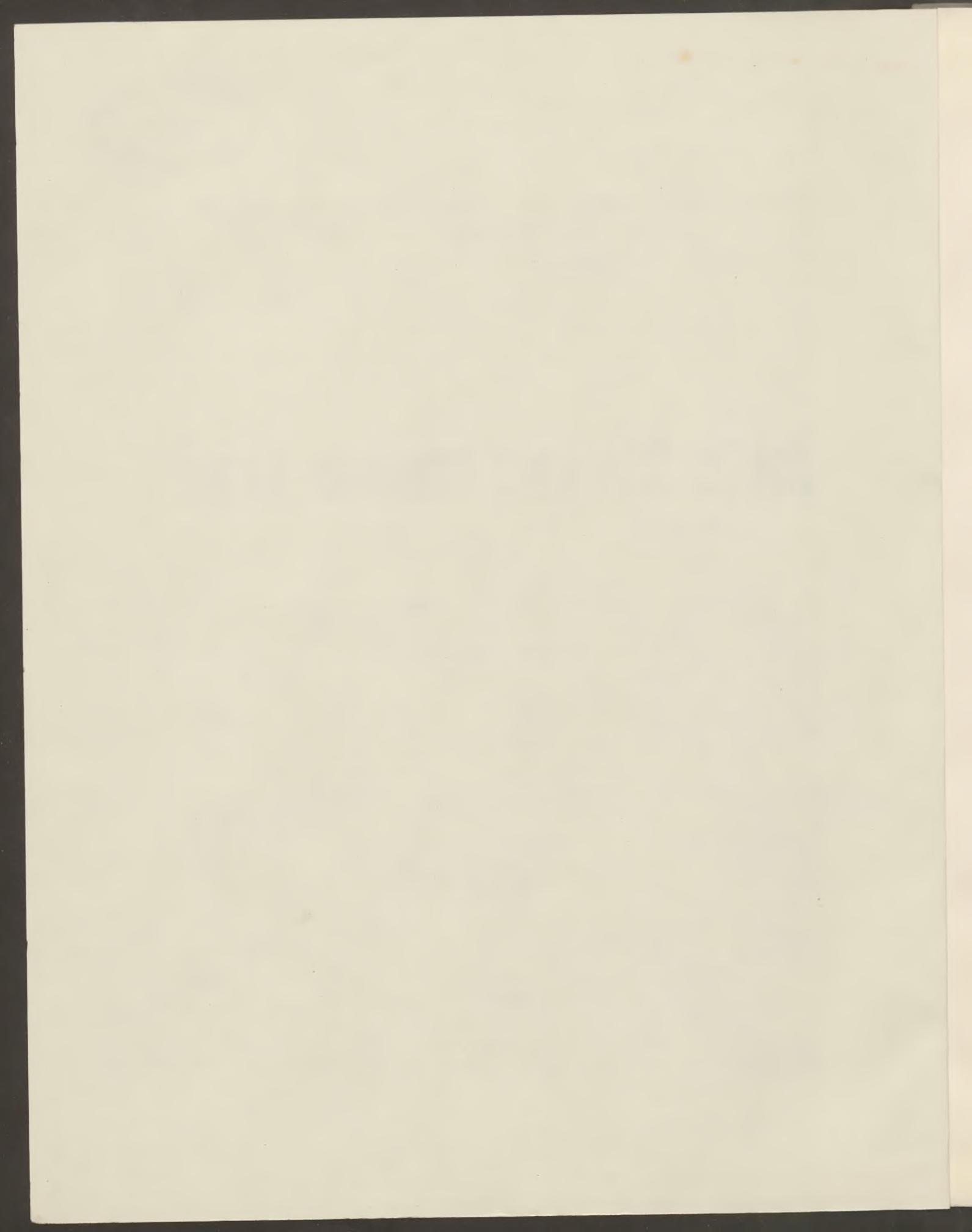
— Mit einer Figurentafel. —



Danzig.

Druck von A. W. Kafemann.

1902.



Die Lehrbücher der Mechanik, welche auf das Problem des stabilen Schwimmens tiefer eingehen (in erster Reihe wäre Duhamels Mechanik zu nennen), beschränken sich meistens auf die Herleitung allgemeiner Grundsätze und Formeln, treten aber an die Frage nach den verschiedenen Gleichgewichtslagen specieller (homogener) Körperformen nicht näher heran. Erst in neuester Zeit hat Schülen in Erlangen (in Hoffmann's Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. Jahrg. 31, Heft 7 u. 8, Jahrg. 32, Heft 2)*) Untersuchungen darüber angestellt und insbesondere für das rechtwinklige Parallelepipèd und den Würfel einige stabile Lagen bestimmt. Schülen hat das Problem von einem neuen Ausgangspunkte (Energie des schwimmenden Körpers bei einer sehr kleinen Aenderung seiner Lage) angegriffen und ist auf diesem Wege auch zu dem Duhamel'schen Satze (s. d. vorliegende Arbeit Abschn. III) gelangt. Ich hatte mich gleichzeitig mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt, deren Resultate dann später vervollständigt und wesentlich erweitert wurden. Eine Veröffentlichung meiner Untersuchungen dürfte daher nicht ganz zwecklos sein. In den nachstehenden Mitteilungen habe ich die Wege eingeschlagen, die mich seinerzeit zum Ziele führten.

In den nachstehenden Ausführungen wird als Flüssigkeit stets Wasser vom specifischen Gewicht 1 vorausgesetzt und die zur Wirkung kommenden Kräfte sollen sämtlich nur soweit berücksichtigt werden, als sie das Archimedische Gesetz über das Schwimmen eines Körpers nicht stören. Äussere Kräfte, die einen schwimmenden Körper aus der stabilen Gleichgewichtslage entfernen, sollen daher ausschliesslich eine drehende Wirkung auf denselben ausüben und ihn in keinem Augenblicke am Schwimmen hindern, sodass also die Höhe des Wasserspiegels unverändert bleibt. Von den inneren Kräften soll nur die Schwere und der Wasserdruck (Auftrieb) in Betracht gezogen werden.

I.

Gleichgewicht und Stabilität eines homogenen schwimmenden Körpers.

Wenn ein schwimmender homogener Körper im Gleichgewicht ist, so liegt sein Schwerpunkt S senkrecht über dem Schwerpunkt S_1 seines eintauchenden Teils, da die in diesen Punkten nach unten und nach oben wirkenden gleichen Kräfte, die Schwere und der Auftrieb, einander aufheben. Es müssen also die statischen Momente des eintauchenden Teils für zwei durch S gelegte Vertikalebene gleich Null sein. Hieraus erhält man zwei Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht. (1

Der Körper sei nun durch äussere Kräfte um eine horizontale Achse, um den Winkel φ gedreht, aber so, dass er auch in dieser neuen Lage dem Archimedischen Gesetz gehorcht, dass also das Volumen V_1 des eintauchenden Teils gleich dem Gewicht**) des Körpers ist (beide in den entsprechenden Einheiten ausgedrückt), und S_2 sei der Schwerpunkt des eintauchenden Teils. Fig. 1 stelle die durch S S_1 S_2 gelegte (Vertikal-) Ebene vor. Die Schwimmachse S S_1 werde von der durch S_2 gelegten Vertikalen im Metacentrum M geschnitten. NN sei der Wasserschnitt. Zieht man nun $SA \perp S_2M$ und $GL \parallel MS_2$, so bilden die in der Richtung SL wirkende Schwerkraft und der in der Richtung AM wirkende ebenso grosse Auftrieb ein an dem Arm $SA = m$ wirkendes Kräftepaar, welches den Körper, sobald er sich selbst über-

*) S. a. a. O. Schülen „Das Schwimmen, teilweise von einem neuen Standpunkt aus bearbeitet.“

**) Unter Volumen und Gewicht ist hier stets die Volumenzahl und Gewichtszahl zu verstehen.

lassen wird, um eine horizontale Achse drehen muss. In dem Falle, den Fig. 1 darstellt, wird der Körper offenbar in seine erste Gleichgewichtslage zurückgedreht, sein Gleichgewicht war also ein stabiles und in diesem Falle nehmen wir m positiv an. Läge M aber auf der entgegengesetzten Seite von S , so wäre m negativ, das Kräftepaar würde den Körper nach der entgegengesetzten Richtung drehen und immer weiter aus der ersten Gleichgewichtslage entfernen. Sein Gleichgewicht wäre dann labil. Das Kraftmoment ist nun $V_1 m$, also die Bedingung für die Stabilität

$$V_1 m > 0. \quad (2)$$

$S S_1$ werde mit e_1 und $A S_2$ mit n bezeichnet.

Für die Grössen m und n sollen hier einige Formeln entwickelt werden, die den späteren Rechnungen zu Grunde gelegt werden können. m und n sind die Coordinaten des Punktes S_2 in Bezug auf die Achsen $S L$ und $S A$ und sollen durch Drehung der Achsen um den Winkel φ transformiert werden. Zieht man $S_2 C \perp S S_1$, bezeichnet $S C$ mit u , $C S_2$ mit v und zieht noch $S_2 D (= m) \perp S L$, so erhält man leicht

$$\begin{aligned} m &= v \cos \varphi - u \sin \varphi \\ n &= v \sin \varphi + u \cos \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

Fig. 3 stelle die durch die Schwimmachse $S S$, senkrecht zur Richtung der Drehungsachse gelegte (Vertikal-) Ebene dar. A, B , sei die alte, $A B$ die neue Wasserlinie, $S_3 S_4$ seien die Projektionen der Schwerpunkte des neu eintauchenden und des neu heraustretenden Körperteils auf die Ebene der Zeichnung und $S_3 C = u_3$, $S C = v_3$, $S_4 D = u_4$, $S D = v_4$ die absoluten Werte der Coordinaten von S_3 und S_4 . Nach dem Archimedischen Gesetz muss das Volumen des neu eintauchenden Körperteils gleich dem Volumen des neu heraustretenden sein. Letzteres sei V_3 , dann finden zwischen den statischen Momenten der verschiedenen Körperteile folgende Gleichungen statt:

$$\begin{aligned} V_1 v &= V_3 (v_3 + v_4) \\ V_1 u &= V_1 e_1 - V_3 (u_3 - u_4). \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun $v_3 + v_4 = E F$ mit e und $u_3 - u_4 = S_3 F + S_4 E$ mit k , so wird

$$\begin{aligned} V_1 v &= V_3 e \\ V_1 u &= V_1 e_1 - V_3 k \end{aligned} \quad (6)$$

Mit Benutzung der Gleichungen 5. erhält man daher

$$\begin{aligned} V_1 m &= V_3 e \cos \varphi + V_3 k \sin \varphi - V_1 e_1 \sin \varphi \\ V_1 n &= V_3 e \sin \varphi - V_3 k \cos \varphi + V_1 e_1 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Die erste dieser Gleichungen giebt das Drehungsmoment an.

In welcher Weise die Grössen $V_3 e$ k von dem Drehungswinkel φ abhängig sind, soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

II.

Stabilität eines prismatischen Körpers.

Es soll nun ein Körper betrachtet werden, der in der Umgebung des Wasserschnittes*) prismatisch ist. Er sei im Gleichgewicht, wenn die Seitenkanten seines prismatischen Teils vertikal stehen und werde um eine horizontale Achse um den Winkel φ gedreht. Es sei (Fig. 4) wie in Fig. 3 die Zeichenebene senkrecht zur Richtung der Drehungsachse und in ihr der Schwerpunkt S , $A B$ die neue, $A_1 B_1$ die alte Wasserlinie, $S_3 F$ und $S_4 E$ senkrecht auf $A_1 B_1$ und es werde vorausgesetzt, dass $A A_1$ und $B B_1$ senkrecht gegen $A_1 B_1$ gerichtet sind. Es ist dann (s. 7 u. 8) $E F = e$ und $S_3 F + S_4 E = k$.

*) D. h. zwischen den Wasserschnitten der ersten und der letzten Lage.

Bezeichnet man den Schnittpunkt der beiden Wasserlinien mit O, ferner O F mit x_3 , O E mit x_4 , S₃ F mit y_3 und S₄ E mit y_4 , so ist $e = x_3 + x_4$, $k = y_3 + y_4$, also

$$\begin{aligned} V_3 e &= V_3 x_3 + V_3 x_4 \\ V_3 k &= V_3 y_3 + V_3 y_4 \end{aligned} \quad (10)$$

Es sind nun $V_3 y_3$ und $V_3 y_4$ die statischen Momente des neu eintauchenden und des neu heraustretenden Körperteils in Bezug auf den alten Wasserschnitt, $V_3 x_3$, $V_3 x_4$ die statischen Momente in Bezug auf die darauf senkrecht und parallel zur Drehachse gelegte Ebene. Ich berechne sie als Summe der statischen Momente sämtlicher Elemente. Ein Flächenelement des alten Wasserschnitts sei df , sein Schwerpunkt P (Fig. 5), auf df senkrecht stehe das Prisma P Q, sodass Q in dem neuen Wasserschnitt liegt. Zieht man P R senkrecht zur Schnittkante der beiden Wasserschnitte (die auch zugleich die Drehungsachse ist), so ist auch Q R auf letzterer senkrecht und Winkel $R = \varphi$. Ist $RP = x$ und $QP = y$, so sind die statischen Momente des prismatischen Körperelements (P Q) in Bezug auf jene beiden Ebenen $df \cdot y \cdot \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} df \cdot x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$ und $df \cdot y \cdot x = df \cdot x^2 \operatorname{tg} \varphi$, folglich

$$\begin{aligned} V_3 y_3 &= \int_3 \frac{1}{2} df \cdot x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \int_3 x^2 df \\ V_3 x_3 &= \int_3 df \cdot x^2 \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi \int_3 x^2 df \end{aligned} \quad (10a)$$

wo die Summe auf den eintauchenden Teil des alten Wasserschnitts zu beziehen ist. Ebenso erhält man aber

$$\begin{aligned} V_3 y_4 &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \int_4 x^2 df \\ V_3 x_4 &= \operatorname{tg} \varphi \int_4 x^2 df \end{aligned} \quad (10b)$$

(die Summe über den heraustretenden Flächenteil auszudehnen) folglich (nach 10)

$$\begin{aligned} V_3 e &= \operatorname{tg} \varphi \int x^2 df \\ V_3 k &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \int x^2 df \end{aligned}$$

wo nun $\int x^2 df$ über den ganzen alten Wasserschnitt auszudehnen ist. Diese Summe ist aber das Trägheitsmoment des alten Wasserschnitts in Bezug auf die Drehungsachse (wenn die Dichtigkeit = 1 vorausgesetzt wird). Bezeichnet man letzteres mit T_1 , so wird

$$\begin{aligned} V_3 e &= T_1 \operatorname{tg} \varphi \\ V_3 k &= \frac{1}{2} T_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \end{aligned} \quad (11)$$

Der Rauminhalt des neu eintauchenden Körperteils ist $V_3 = \int_3 y \cdot df = \int_3 x \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi$

$$\text{und ebenso gross ist } V_4 = \int_4 x \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

das Volumen des neu heraustretenden Körperteils. Hieraus folgt

$$\int_3 x df = \int_4 x df$$

Dieses sind aber die statischen Momente der beiden Flächenteile in Bezug auf die Drehungsachse, letztere geht folglich durch den Schwerpunkt des alten Wasserschnitts.

Aus 11 und 7 ergibt sich

$$V_1 m = \sin \varphi \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) T_1 - V_1 e_1 \right\} \quad (12)$$

$$V_1 n = \frac{1}{2} T_1 \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi + V_1 e_1 \cos \varphi \quad (13)$$

Ist nun die Anfangslage des Körpers stabil, so muss (nach 9 und 12) $V_1 m$ und folglich

$$\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) T_1 - V_1 e_1 > 0 \text{ sein.} \quad (15)$$

Ist dagegen die Anfangslage ein labiles Gleichgewicht, so ist $V_1 m$ und daher

$$\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) T_1 - V_1 e_1 < 0$$

III.

Stabilität eines beliebigen homogenen Körpers.

Duhamelscher Satz.

Entwickelt man in den Formeln 12 und 13 die Funktionen $\sin \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$, $\cos \varphi$ nach Potenzen von φ und setzt den Bogen φ so klein voraus, dass seine höheren Potenzen neben den niederen vernachlässigt werden können, so erhält man aus 12 (nach Division durch V_1)

$$m = \varphi \left(\frac{T_1}{V_1} - e_1 \right) \quad (16)$$

Man kann nun diese Formel auch auf einen ganz beliebig gestalteten homogenen Körper anwenden. Denn denkt man sich auf dem Wasserschnitt der Gleichgewichtslage ein gerades Prisma, das mit dem Hauptkörper um den sehr kleinen Bogen φ gedreht wird, so werden für dieses die statischen Momente des neu eintauchenden und des neu heraustretenden Körperteils nach den Formeln 10 a und 10 b bestimmt und erhalten mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von φ die Werte

$$V_3 x_3 = \varphi \cdot \int_3 x^2 \, d f \quad V_3 y_3 = \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot \int_3 x^2 \, d f$$

$$V_3 x_4 = \varphi \int_4 x^2 \, d f \quad V_3 y_4 = \frac{1}{2} \varphi^2 \int_4 x^2 \, d f.$$

Es sind also die Momente $V x$ vom 1. und die Momente $V y$ vom 2. Grade in Bezug auf φ .

Zu diesen sind nun die statischen Momente der Körperstücke hinzuzufügen (teilweise ev. mit negativem Vorzeichen), welche zwischen den Seitenflächen des Prismas und des Hauptkörpers liegen. Letztere sind aber, wie leicht einzusehen, in Bezug auf gewisse sehr kleine mit φ proportionale Längen für die Momente $V \cdot x$ vom 2., für $V \cdot y$ vom 3. Grade, also zu vernachlässigen. Es behalten daher auch für den allgemeinen Körper die Formeln 11. 12. 16 für sehr kleines φ ihre Giltigkeit. Aus 16 folgt also als Bedingung für die Stabilität:

$$\frac{T_1}{V_1} = e_1 > 0. \quad (18)$$

Diese Bedingung muss natürlich für jede durch den Schwerpunkt des Wasserschnitts gehende Drehungsachse erfüllt sein, das ist aber der Fall, wenn sie für die des kleinsten Trägheitsmoments erfüllt ist.

Diese Bedingung ist bereits von Duhamel in seinem „Lehrbuch der analytischen Mechanik“ entwickelt worden und ich teile den dort (Deutsche Ausgabe von 1853) ausgesprochenen Satz hier wörtlich mit:

„Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers kann noch sicher sein, wenn der Schwerpunkt des Körpers über dem der verdrängten Flüssigkeit liegt, nur muss dann die Entfernung dieser beiden Punkte kleiner sein als das kleinste der Trägheitsmomente der Schnittfläche des Körpers mit der Wasseroberfläche in Bezug auf die durch ihren Schwerpunkt gezogenen Geraden, dividiert durch das eingetauchte Volumen“.

IV.

Uebergang von einem (labilen) Gleichgewicht ins andere (stabile).

Gerades Prisma im ersten Drehungsgebiet.

Ein gerades Prisma schwimmt offenbar im Gleichgewicht, wenn seine Seitenflächen vertikal, die Grundflächen horizontal sind, denn die Schwerpunkte S und S_1 liegen in der durch die Schwerpunkte der Grundflächen gelegten Hauptachse (Schwimmachse). Das Gleichgewicht ist stabil (18), wenn

$$\frac{T_1}{V_1} - e_1 > 0.$$

Ist diese Bedingung aber für eine Drehungsachse nicht erfüllt, d. h.

$$\frac{T_1}{V_1} - e_1 < 0,$$

so ist das Gleichgewicht für diese Achse labil und das Prisma wird, wenn äussere Kräfte es um einen noch so kleinen Winkel um diese Achse drehen, durch Schwerkraft und Auftrieb weiter gedreht und immer weiter aus der labilen Gleichgewichtslage entfernt werden, weil (nach 12) das Drehungsmoment

$$V_1 m = \sin \varphi \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) T_1 - V_1 e_1 \right\}$$

für noch so kleines φ negativ ist. Dann wird aber das Drehungsmoment, dessen negativer Faktor (absolut genommen) mit wachsendem φ kleiner wird, für einen genügend grossen Drehungswinkel φ_1 gleich Null werden. Angenommen, diese Lage werde erreicht, bevor die obere Grundfläche eintaucht, so ist sie bestimmt durch die Gleichung

$$\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \right) T_1 - V_1 e_1 = 0$$

$$\text{oder} \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{2 \left(\frac{V_1 e_1}{T_1} - 1 \right)} \quad (27)$$

Diese Gleichung enthält eine der Bedingungen (1) für eine neue Gleichgewichtslage des Körpers, denn das statische Moment des eintauchenden Teils für die durch den Schwerpunkt S parallel zur Drehungsachse gelegte Vertikalebene ($V_1 m$) ist Null. Soll also die Lage (φ_1) wirklich eine Gleichgewichtslage sein, so muss das statische Moment

des eintauchenden Körperteils (nach 1) noch für eine zweite durch S gelegte Vertikal-ebene gleich Null sein. Wir legen diese zweite Ebene durch die alte Schwimmachse O S senkrecht zur Drehungsachse.

Fig. 9 stelle die durch G H und O S gelegte (Vertikal-) Ebene vor, die den Wasserschnitt II in $G_2 H_2$ schneidet. Für diese Ebene muss das statische Moment des eintauchenden Körperteils gleich Null sein. Bezeichnen wir letzteres mit M_2 , die statischen Momente des neu eintauchenden (O H H₂) und des neu heraustretenden (O G G₂) Körperteils mit M_3 und M_4 , so muss, da das statische Moment des vorher eintauchenden Teils (G H J K) gleich Null ist, offenbar

$$M_2 = M_3 - M_4 = 0 \text{ sein.} \quad (28)$$

Es sei nun in dem Wasserschnitt I in P ein Flächenelement df (s. Fig. 10) und auf df senkrecht stehe ein Raumelement des neu eintauchenden Teils, das von dem Wasserschnitt II begrenzt wird. Seine Höhe sei z , ferner die Koordinaten von P in Bezug auf die Achsen O F, O H: $PR = u_3$, $PQ = v_3$, so ist $z = u_3 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$, also das statische Moment dieses Raumelements für die durch G H gelegte Vertikalebene

$$df \cdot z \cdot v_3 = u_3 \cdot v_3 \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$$

und das statische Moment des neu eintauchenden Körperteils

$$M_3 = \int_3 u_3 v_3 \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi_1, \quad (29)$$

wo die Summe auf den ganzen Flächenteil F H E zu beziehen ist. Wir nehmen dabei die Richtung O H für $+u$ und die Richtung O F für $+v$ an.

Es sei nun ebenso in dem Flächenteil F G E in P_1 ein Element df und darauf senkrecht ein Raumelement des neu heraustretenden Körperteils $z df = u_4 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot df$, also das statische Moment dieses Raumelements $u_4 v_4 \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$, wo $u_4 v_4$ die Koordinaten von P_1 für die Achsen O G und O F sind. Folglich ist das statische Moment des neu heraustretenden Körperteils

$$M_4 = \int_4 u_4 v_4 \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$$

wo die Summe auf den ganzen Flächenteil F G E zu beziehen ist.

Nach 28 ist daher

$$M_2 = \int_3 u_3 v_3 \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - \int_4 u_4 v_4 \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$$

oder, wenn wir beide Summen zusammenfassen (da u_4 mit $-u_3$ bezeichnet werden kann)

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= \int_1 u v \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \\ \text{oder } \int_1 u v \cdot df &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

wo die Summe nun über den ganzen Wasserschnitt I auszudehnen ist.

Die beiden Bedingungsgleichungen für die zweite Gleichgewichtslage (φ_1) stelle ich (aus 27 und 31) hier zusammen:

$$\left. \begin{aligned} T_1 \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \right) - V_1 e^1 &= 0 \\ \int_1 u v \cdot df &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Hierin ist T_1 das Trägheitsmoment des Wasserschnitts I für die Drehungsachse, u, v sind die Coordinaten der Flächenelemente df für die Drehungsachse und die darauf senkrecht stehende Achse und die Summe \int_1 ist auf den ganzen Wasserschnitt I zu beziehen.

Soll nun die Gleichgewichtslage (φ_1) eine stabile sein, so muss nach dem Duhamel'schen Satze (18)

$$T_m - V_1 e_2 > 0 \quad (33)$$

sein, wenn T_m das kleinste aller Trägheitsmomente des Wasserschnitts II (in Bezug auf die durch seinen Schwerpunkt O gehenden Achsen) und e_2 die Entfernung der Schwerpunkte S_2 S ist.

Den Wert von $V_1 e_2$ erhält man aus Gleichung 13

$$V_1 n = \frac{1}{2} T_1 \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi + V_1 e_1 \cos \varphi$$

wenn darin $\varphi = \varphi_1$ und $n = e_2$ gesetzt wird:

$$V_1 e_2 = \frac{1}{2} T_1 \sin \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 + V_1 e_1 \cos \varphi_1 \quad (34)$$

Nehmen wir hierzu die Bedingungsgleichung (32):

$$V_1 e_1 = T_1 \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \right)$$

so ergibt sich durch Elimination von $V_1 e_1$

$$\begin{aligned} V_1 e_2 &= T_1 (\cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1) \\ \text{oder } V_1 e_2 &= \frac{T_1}{\cos \varphi_1} \end{aligned} \quad (35)$$

Um nun T_m zu bestimmen, bezeichnen wir für den Wasserschnitt II das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehungsachse E O F mit T_2 , in Bezug auf die zu E F senkrechte Achse $G_2 O H_2$ mit T_2^1 und endlich das Trägheitsmoment für eine beliebige durch O gehende Achse P Q, die mit E F den Winkel μ bildet (s. Figur 11) mit T. Hat nun ein beliebiger Punkt R (Schwerpunkt eines Flächenelements df_2) die Coordinaten $R N = u_2$ $R M = v_2$ und für die neue Achse P Q die Ordinate ζ , so ist nach der bekannten Coordinaten-Transformation

$$\zeta = u_2 \cos \mu + v_2 \sin \mu, \quad (36)$$

folglich

$$\begin{aligned} T &= \int_2 \zeta^2 df_2 = \cos^2 \mu \int_2 u_2^2 df_2 + \sin^2 \mu \int_2 v_2^2 df_2 + \sin 2 \mu \int_2 u_2 v_2 df_2 \\ \text{oder } T &= T_2 \cdot \cos^2 \mu + T_2^1 \cdot \sin^2 \mu + \sin 2 \mu \int_2 u_2 v_2 df_2. \end{aligned} \quad (37)$$

Es sind nun die Flächenelemente df des Wasserschnitts I die Projektionen der Elemente df_2 des Wasserschnitts II, ebenso die Coordinaten u, v die Projektionen von u_2, v_2 , folglich

$$df = \frac{df_2}{\cos \varphi_1} \quad u = \frac{u_2}{\cos \varphi_1} \quad v = \frac{v_2}{\cos \varphi_1}$$

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \int_2 u_2^2 df_2 = \int_1 \frac{u^2 \cdot df}{\cos^3 \varphi_1} = \frac{T_1}{\cos^3 \varphi_1} \\ T_2^1 &= \int_2 v_2^2 df_2 = \int_1 \frac{v^2 df}{\cos \varphi_1} = \frac{T_1^1}{\cos \varphi_1} \\ \int_2 u_2 v_2 df_2 &= \frac{1}{\cos^2 \varphi_1} \cdot \int u \cdot v \cdot df \end{aligned} \right\} (38^*)$$

Aus der letzten der vorstehenden Gleichungen folgt nach 32

$$\int_2 u_2 v_2 df_2 = 0 \quad (39)$$

also nach 37

$$T = T_2 \cdot \cos^2 \mu + T_2^1 \cdot \sin^2 \mu \quad (40)$$

Für das kleinste (und grösste) der Trägheitsmomente T muss

$$\frac{dT}{d\mu} = 0 \text{ sein, also}$$

$$(T_2^1 - T_2) \cdot \sin 2\mu = 0$$

oder, da $(T_2^1 - T_2)$ im Allgemeinen von Null verschieden sein wird,

$$\sin 2\mu = 0, \quad \mu = \begin{cases} 0 \\ 90^\circ \end{cases}$$

Diese beiden Werte für μ geben aus 40 das kleinste und das grösste der Trägheitsmomente T:

$$\left. \begin{aligned} T_m &= T_2 \\ T_m^1 &= T_2^1 \end{aligned} \right\} (41)$$

Das grösste und das kleinste der Trägheitsmomente des Wasserschnitts II in Bezug auf die durch seinen Schwerpunkt gehenden Achsen sind also die für die Drehungsachse und für die darauf senkrechte Achse. Die Werte für diese beiden Trägheitsmomente ergeben sich aus 38 und 41:

$$\left. \begin{aligned} T_m &= \frac{T_1}{\cos^3 \varphi_1} \\ T_m^1 &= \frac{T_1^1}{\cos \varphi_1} \end{aligned} \right\} (42)$$

Die Bedingung für die Stabilität der Gleichgewichtslage (φ_1) ist nach 33 und 35:

$$T - \frac{T_1}{\cos \varphi_1} > 0 \quad (43)$$

wo für T der kleinste Wert, d. h. der kleinere von den beiden Werten T_m und T_m^1 zu setzen ist. Es ist aber für $T = T_m$ (s. 42)

$$T - \frac{T_1}{\cos \varphi_1} = \frac{T_1}{\cos^3 \varphi_1} - \frac{T_1}{\cos \varphi_1} = \frac{T_1}{\cos \varphi_1} \cdot \text{tg}^2 \varphi_1 \text{ d. i. } > 0, \text{ also die Bedingung 43 stets erfüllt.}$$

*) T_1^1 ist das Trägheitsmoment des Wasserschnitts I für die zur Drehungsachse senkrechte Achse.

Es bleibt also nur ($T = T_m^1$ gesetzt) als Bedingung für die Stabilität:

$$\frac{T_1^1}{\cos \varphi_2} - \frac{T_1}{\cos \varphi_2} > 0 \text{ oder } T_1^1 > T_1 \quad (43a)$$

„Die schiefe Gleichgewichtslage eines geraden Prismas (im I. Drehungsgebiet) ist also stabil, wenn das Trägheitsmoment des I. Wasserschnitts für die Drehungsachse kleiner ist als für die darauf senkrechte Achse“.

Bisher konnte von der Gestalt der Grundflächen des geraden Prismas gänzlich abgesehen werden. Im folgenden Abschnitt sollen nun besondere Fälle betrachtet werden.

V.

Gerades Prisma von besonderer Gestalt.

Der Wasserschnitt I des Prismas habe zwei durch den Schwerpunkt O gehende aufeinander senkrechte Hauptachsen A B und C D, die Drehungsachse E F bilde mit A B und die Achse G H mit D C den Winkel ω (s. Fig. 11). Die Richtung O C soll als positive X-achse, die Richtung O A als positive Y-achse angenommen werden. Sind die Coordinaten eines Punktes P der Fläche für die bisherigen Achsen u, v, für die Hauptachsen x, y, so hat man zur Transformation auf die Hauptachsen die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} u &= y \sin \omega + x \cos \omega \\ v &= y \cos \omega - x \sin \omega \end{aligned} \quad (44)$$

Dann wird

$$u \cdot v = (y^2 - x^2) \sin \omega \cos \omega + x y (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega)$$

also (nach 32) die zweite Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$\left(\int_1 y^2 \cdot d f - \int_1 x^2 \cdot d f \right) \sin \omega \cdot \cos \omega + \int_1 x y \cdot d f \cdot (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) = 0$$

oder wenn die Trägheitsmomente

$$\int_1 y^2 \cdot d f = T_x \cdot \quad \int_1 x^2 \cdot d f = T_y$$

gesetzt werden:

$$\frac{1}{2} (T_x - T_y) \sin 2 \omega + \int_1 x y \cdot d f \cdot \cos 2 \omega = 0 \quad (45)$$

Gerades Prisma, dessen Grundfläche eine Symmetrieachse hat.

Hat die Grundfläche des Prismas, also auch der ihr kongruente Wasserschnitt I eine Symmetrieachse und wird diese als eine der Hauptachsen angenommen, so ist die Summe

$$\int_1 x y \cdot d f = 0$$

da immer die beiden Glieder, die sich auf zwei zu beiden Seiten der Symmetrieachse in gleichen Abständen von den Hauptachsen liegende Flächenelemente beziehen, entgegengesetzte Vorzeichen haben, also einander aufheben. Dann geht also die Bedingungsgleichung 45 in folgende über:

$$(T_x - T_y) \sin 2 \omega = 0 \quad (46)$$

Diese hat drei Lösungen

$$\omega = 0, \omega = 90^\circ, T_x = T_y. \quad (47)$$

In schiefer Lage kann also das Prisma im Gleichgewicht sein entweder wenn es um eine der beiden Hauptachsen des Wasserschnitts I gedreht wird, oder wenn die Trägheitsmomente der Fläche für die beiden Hauptachsen gleich sind. Im letzteren Falle ist die Gleichgewichtslage unabhängig von ω oder von der Richtung der Drehungsachse.

Für diesen Fall bilden wir das Trägheitsmoment für die Achse E F (Fig. 11)

$$T_1 = \int_1 u^2 \cdot d f$$

und transformieren dieses auf die Hauptachsen, setzen also aus 44

$$u = y \sin \omega + x \cos \omega.$$

Dann wird

$$T_1 = \sin^2 \omega \int_1 y^2 d f + \cos^2 \omega \int_1 x^2 d f + \sin 2 \omega \int_1 x y \cdot d f$$

oder, da das dritte Glied gleich Null ist,

$$T_1 = T_x \cdot \sin^2 \omega + T_y \cdot \cos^2 \omega$$

und da (47) $T_x = T_y$

$$T_1 = T_x = T_y \quad (48)$$

Da hierbei der Winkel ω ganz beliebig vorausgesetzt ist, so folgt aus 48, dass das Trägheitsmoment des Wasserschnitts I oder der Grundfläche des Prismas für alle durch den Schwerpunkt gehenden Achsen denselben Wert hat, sobald die Trägheitsmomente für die Symmetrieachse und für die darauf senkrechte Achse einander gleich sind. (49)

Für ein solches Prisma ist also auch

$$T_1^1 = T_1$$

also (42) das grösste und kleinste Trägheitsmoment für den Wasserschnitt II

$$T_m = \frac{T_1}{\cos^3 \varphi_1} \quad T_m^1 = \frac{T_1}{\cos \varphi_1}$$

$$\text{also } T_m \cdot \cos^2 \varphi_1 = T_m^1$$

$$\text{folglich } T_m^1 < T_m$$

d. h. das kleinste der Trägheitsmomente des Wasserschnitts II ist das für die zur Drehungsachse senkrechte Achse. (50)

Nach 43 ist nun die Bedingung für die Stabilität der Gleichgewichtslage (φ_1)

$$T - \frac{T_1}{\cos \varphi_1} > 0$$

die für jedes der Trägheitsmomente T erfüllt sein muss. Setzt man für T das Minimum

$$T_m^1 = \frac{T_1}{\cos \varphi_1}$$

so wird

$$T_m^1 - \frac{T_1}{\cos \varphi_1} = 0. \quad (51)$$

In der Gleichgewichtslage (φ_1) ist also das Drehungsmoment für jede durch den Schwerpunkt O des Wasserschnitts gehende Drehungsachse positiv und nur für die zur ersten Drehungsachse EF senkrechte Achse $G_2 H_2$ (Fig. 11) ist es Null, folglich das Gleichgewicht stabil. Der Wert des Drehungswinkels φ_1 , der die schiefe Gleichgewichtslage bestimmt, ist zu berechnen aus Gleichung 27:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{2 \left(\frac{V_1 c_1}{T_1} - 1 \right)} \quad (52)$$

wo nun T_1 das Trägheitsmoment der Grundfläche für jede durch ihren Schwerpunkt gehende Achse ist.

Das Vorstehende gilt für jede Drehungsachse des Wasserschnitts I, für welche

$$\frac{T_1}{V_1} - e_1 < 0 \text{ ist.}$$

Da aber nach den obigen Voraussetzungen das Trägheitsmoment T_1 für alle durch den Schwerpunkt O gehenden Achsen denselben Wert hat, so ist für alle Drehungsachsen die Grösse $\frac{T_1}{V_1} - e_1$ entweder positiv oder negativ. Im ersteren Falle schwimmt

das Prisma in der aufrechten Lage stabil, im zweiten Falle ist die aufrechte Lage nach allen Richtungen labil, das Prisma kann aber durch Drehung um eine beliebige horizontale Achse (um den Winkel φ_1) in eine schiefe stabile Gleichgewichtslage gelangen, so lange dabei keine der beiden Grundflächen vom Wasserspiegel durchschnitten wird. Da diese schiefe Stabilitätslage von der Richtung der Drehungsachse (d. h. von der Grösse des Winkels ω) ganz unabhängig ist, so ergibt sich daraus folgendes Gesetz:

„Ein in schiefer Lage stabil schwimmendes gerades Prisma gelangt durch Drehung um seine Hauptachse (die durch die Schwerpunkte der Grundflächen geht) in immer neue stabile Gleichgewichtslagen, so lange keine seiner Grundflächen von der Wasseroberfläche durchschnitten wird“.

Ein gerades Prisma verhält sich also in dieser Beziehung ebenso wie ein gerader Kreiscylinder. Es soll nun die Bedingung dafür aufgesucht werden, dass keine der Grundflächen vom Wasserspiegel durchschnitten wird.

Ist (in Figur 12) die obere Grundfläche dargestellt, O_1 ihr Schwerpunkt, $E_1 O_1 F_1$ parallel zur horizontalen Drehungsachse, $E_1 P_1 F_1$ der bei der Drehung der Wasserfläche zuneigende Teil der Grundfläche und hierin P_1 der am weitesten von der Achse $E_1 F_1$ entfernte Punkt der Begrenzung, so soll, wenn $P_1 Q_1 \perp E_1 F_1$ gezogen ist, die Entfernung $P_1 Q_1$ mit u_m bezeichnet werden. Mit dem Punkte P_1 berührt die Grundfläche zuerst den Wasserspiegel und diese Lage sei durch die durch $P_1 Q_1$ gelegte Vertikalebene in Fig. 12a dargestellt. Q liegt in der Drehungsachse und Winkel $Q P_1 Q_1$ ist gleich dem Drehungswinkel φ . $Q Q_1$ ist die Höhe des in der aufrechten Lage über dem Wasser befindlichen Körperteils. Wird die Höhe des ganzen Prismas mit b und sein spezifisches Gewicht mit s bezeichnet, so ist offenbar $Q Q_1 = b(1 - s)$
folglich

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b(1 - s)}{u_m} \quad (53)$$

Diese Formel giebt den Grenzwert von φ_1 an für den Fall, dass die obere Grundfläche zuerst vom Wasserspiegel durchschnitten wird, d. h. wenn $s > \frac{1}{2}$ ist. Ist aber

$s < \frac{1}{2}$, so führt eine ganz ähnliche Betrachtung wie die vorstehende, die nun aber an dem eintauchenden Körperteil auszuführen ist, zu der Formel

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b s}{u_m} \quad (53a)$$

wo u_m für die untere Grundfläche dieselbe Bedeutung hat wie in 53 für die obere, und wo $b s$ nun die Höhe des in der aufrechten Lage unter dem Wasserspiegel befindlichen Körperteils ist.

Bezeichnet man die Grundfläche des Prismas mit F_1 , so ist das Volumen des eintauchenden Körperteils $V_1 = F_1 \cdot b s$, und die Entfernung der Schwerpunkte von einander $S S_1 = e_1 = \frac{b}{2} - \frac{b s}{2} = \frac{b}{2}(1 - s)$.

Mit Benutzung dieser Werte ergibt sich aus 52, 53, 53a für die schiefe stabile Lage (φ_1) die Bestimmungsgleichung:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{F_1 b^2}{T_1} \cdot s (1 - s) - 2 \quad (54)$$

mit der Bedingung:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \leq \begin{cases} \frac{b (1 - s)}{u_m} & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \frac{b s}{u_m} & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (55)$$

VI.

Das regelmässige gerade Prisma.

Ein regelmässiges Polygon von beliebiger Seitenzahl habe (wie in Fig. 11) eine Symmetrieachse $A B$ als Y -achse und die darauf senkrechte Gerade $D C$ als X -achse, ihr Schnittpunkt O sei der Mittelpunkt (Schwerpunkt) des Polygons und eine beliebige dritte durch O gehende ($v =$) Achse $F E$ bilde mit $O B$ den Winkel ω . Ist u für diese Achse die Ordinate eines beliebigen Punktes P des Polygons, so ist (44)

$$\begin{aligned} u &= y \sin \omega + x \cos \omega \\ u^2 &= y^2 \sin^2 \omega + x^2 \cos^2 \omega + x y \sin 2 \omega \end{aligned}$$

also das Trägheitsmoment

$$T = \int u^2 df = \sin^2 \omega \int y^2 df + \cos^2 \omega \int x^2 df + \sin 2 \omega \cdot \int x y df$$

Da aber die Y -achse $A B$ eine Symmetrieachse ist, so ist $\int x y df = 0$, folglich nach den früheren Bezeichnungen

$$T = T_x \cdot \sin^2 \omega + T_y \cos^2 \omega \quad (56)$$

Wendet man diese Formel auf eine andere Symmetrieachse des Polygons (die mit A B gleiche relative Lage hat) an, so ist für diese das Trägheitsmoment offenbar = T_y , folglich (56)

$$\begin{aligned} T_y &= T_x \sin^2 \omega + T_y \cos^2 \omega \\ T_y \sin^2 \omega &= T_x \sin^2 \omega \\ T_y &= T_x \end{aligned}$$

also aus 56: $T = T_x = T_y$

Hieraus ergibt sich der Satz: „In jedem regelmässigen Polygon haben die Trägheitsmomente für alle durch seinen Schwerpunkt (Mittelpunkt) gehenden Achsen denselben Wert“.

Jedes gerade regelmässige Prisma gehört also zu der Art von Körpern, die im vorigen Abschnitt behandelt wurden. Wenden wir daher auf sie das oben (52 a) angegebene Gesetz an:

„Schwimmt ein regelmässiges gerades Prisma in schiefer Lage stabil und zwar so, dass seine obere Grundfläche über, die untere unter dem Wasserspiegel sich befindet, und wird es um seine (zu den Grundflächen senkrechte) Hauptachse gedreht, so bleibt es in allen Lagen im stabilen Gleichgewicht, so lange keine der Grundflächen den Wasserspiegel durchschneidet“.

Die bisherigen Ergebnisse sollen nun zunächst auf einige besonders einfache Körper angewendet werden.

A. Das dreiseitige gerade regelmässige Prisma.

Nach dem Duhamelschen Satze schwimmt das Prisma in der aufrechten Lage stabil, wenn

$$T_1 - V_1 e_1 > 0$$

Ist a die Grundkante, b die Seitenkante des Prismas, s sein specif. Gewicht, F_1 der Inhalt einer Grundfläche, so ist

$$T_1 = F_1 \cdot \frac{a^2}{24} \quad V_1 = F_1 b \cdot s \quad e_1 = \frac{b(1-s)}{2}$$

also die Stabilitätsbedingung

$$F_1 \cdot \frac{a^2}{24} - F_1 \cdot \frac{b^2}{2} s (1-s) > 0$$

oder

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 > 12 s \cdot (1-s) \tag{57}$$

Dadurch ist bei gegebenem spec. Gew. die Grenze für das Verhältnis der Kantenlängen bestimmt. Umgekehrt folgt aus 57

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \left(\frac{a}{b}\right)^2 &> s - s^2 \\ s^2 - s &> -\frac{1}{12} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 &> \frac{1}{4} \left\{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{58}$$

Diese Bedingung ist offenbar erfüllt, wenn

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 > 3 \text{ oder } \frac{a}{b} > 1,7321$$

In diesem Falle ist also bei jedem spec. Gew. zwischen 0 und 1 die aufrechte Lage stabil.

Ist aber $\frac{a}{b} < 1,7321$, so ergibt sich aus 58 für s die Bedingung:

$$s \begin{cases} \text{entweder} > \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^2} \right) \\ \text{oder} < \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^2} \right) \end{cases}$$

Zahlenbeispiele.

1. Ein regelm. dreis. gerades Prisma hat das spec. Gew. 0,8. Bei welchem Kantenverhältnis schwimmt es in aufrechter Lage stabil?

Auflösung. Aus 57 ergibt sich das gesuchte Kantenverhältnis:

$$\frac{a}{b} > \sqrt{12 \cdot 0,8 \cdot 0,2}$$

oder angenähert:

$$\frac{a}{b} > \frac{139}{100}$$

2. Welches spezifische Gewicht muss ein gleichkantiges ger. regelm. dreiseitiges Prisma haben, um in aufrechter Lage stabil schwimmen zu können?

Auflösung. In 58 ist $\frac{a}{b} = 1$ zu setzen.

$$\text{Dann wird } \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0,6667} = 0,8165.$$

Daraus ergibt sich angenähert

$$\begin{aligned} s &> 0,908 \\ \text{oder } s &< 0,092. \end{aligned}$$

Ist die Bedingung 57 (oder 58) aber nicht erfüllt, so ist die aufrechte Lage labil und das Prisma dreht sich um irgend eine horizontale Achse, um in eine neue (stabile) Gleichgewichtslage zu gelangen. $A B C$ (Fig. 13) sei die obere Grundfläche, S ihr Schwerpunkt, $P Q$ die zur Drehungsachse parallele Achse, die mit der Hauptachse $D E$ ($\parallel B C$) den Winkel ω bildet, und $F G \parallel A C$. Liegt die Ecke B in dem bei der Drehung dem Wasserspiegel zuneigenden Teil der Fläche, so ist B offenbar der von der Achse $P Q$ entfernteste Punkt der Begrenzung, folglich wenn $B H \perp P Q$ gezogen wird, $B H = u_m$ (s. Fig. 12). Zieht man $B S$, so ist Winkel $B S D = 30^\circ$, Winkel $D S P = \omega$,

$B S = \frac{a}{3} \sqrt{3}$, folglich

$$u_m = \frac{a}{3} \sqrt{3} \cdot \sin(30^\circ + \omega) \quad (59)$$

Wir erhalten also aus 54 und 55 für den Drehungswinkel φ_1 der stabilen Gleichgewichtslage die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \varphi_1 &= \sqrt{24 \cdot \frac{b^2}{a^2} s (1-s) - 2} \\ \text{tg } \varphi_1 &\leq \frac{b}{a} \cdot \frac{(1-s) \sqrt{3}}{\sin(30^\circ + \omega)} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

In der zweiten Bedingung ist s statt $1-s$ zu setzen, wenn $s < \frac{1}{2}$ ist.

Die Achse P Q nimmt offenbar alle nur möglichen relativen Lagen an, wenn ω von 0 bis 60° zunimmt, d. h. wenn die Achse P Q aus der Lage D E in die Lage F G gedreht wird.

Aus 60 folgt (für $s > \frac{1}{2}$)

$$\sqrt{24 \cdot \frac{b^2}{a^2} s (1-s) - 2} \leq \frac{b}{a} \frac{(1-s) \sqrt{3}}{\sin(30^\circ + \omega)}$$

woraus

$$\left. \begin{aligned} \sin(30^\circ + \omega) &\leq \frac{(1-s) \sqrt{3}}{\sqrt{24 s (1-s) - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2}} \quad \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \text{und } \sin(30^\circ + \omega) &\leq \frac{s \sqrt{3}}{\sqrt{24 s (1-s) - 2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2}} \quad \text{für } s < \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Hieraus kann für gegebene Werte von s und $\frac{a}{b}$ die Grenze des Drehungswinkels ω bestimmt werden, für welche die obere Grundfläche nicht eintaucht.

Ist der Grenzwert von $\omega = 60^\circ$, so kann das Prisma in der schiefen stabilen Gleichgewichtslage um seine Hauptachse beliebig weit gedreht werden, ohne mit der oberen Grundfläche einzutauchen und ohne seine Stabilität zu verlieren. Die Bedingung dafür erhält man, wenn (in 61) $\omega = 60^\circ$ also $\sin(30^\circ + \omega) = 1$ gesetzt wird:

$$\left(\text{für } s > \frac{1}{2} \right): \sqrt{24 s (1-s) - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2} \leq (1-s) \sqrt{3}$$

oder: $24 s (1-s) - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \leq 3 (1-s)^2$

$$3 (1-s) \{8 s - (1-s)\} \leq 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq \frac{3}{2} (1-s) (9 s - 1)$$

also $\frac{a}{b} \geq \sqrt{\frac{3}{2} \cdot (1-s) (9 s - 1)}$ für $s > \frac{1}{2}$

und $\frac{a}{b} \geq \sqrt{\frac{3}{2} \cdot s (8 - 9 s)}$ für $s < \frac{1}{2}$

$$(62)$$

Wenn aber die Bedingung 61 bereits für den kleinsten Wert von ω , nämlich für $\omega=0$, nicht erfüllt ist, wenn also

$$\left. \begin{aligned} \sin^2(30^\circ) &> \frac{3 (1-s)^2}{24 s (1-s) - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \text{oder } \sin^2 30^\circ &> \frac{3 s^2}{24 s (1-s) - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad \text{für } s < \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

so ist sie für grössere Werte von ω um so weniger erfüllt und in diesem Falle gibt es keine schiefe Gleichgewichtslage in dem bisher vorausgesetzten Drehungsgebiet. Die Bedingungen 63 gehen, da $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, durch Transformation in folgende über:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^2 &< 6(1-s)(3s-1) && \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \text{und } \left(\frac{a}{b}\right)^2 &< 6s(2-3s) && \text{für } s < \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Aus den bisherigen Entwicklungen ergibt sich folgendes Gesamtergebnis: (65)
„Wenn in einem regelm. dreieitigen geraden Prisma mit der Grundkante a und der Seitenkante b und vom spec. Gew. s

$$I \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq 12s(1-s)$$

so schwimmt es in aufrechter Lage stabil.

$$II \quad \text{Wenn } 12s(1-s) > \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq \begin{cases} \frac{3}{2}(1-s)(9s-1) & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}s(8-9s) & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases}$$

so schwimmt es in aufrechter Lage labil, erreicht aber durch Drehung um jede beliebige horizontale Achse eine schiefe stabile Lage, in der seine Hauptachse mit der Vertikalen den aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = 24 \left(\frac{b}{a}\right)^2 s(1-s) - 2$$

bestimmbaren Winkel φ_1 bildet.

$$III \quad \text{Wenn } \begin{cases} \frac{3}{2}(1-s)(9s-1) > \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq 6(1-s)(3s-1) & \left(\text{für } s > \frac{1}{2}\right) \\ \frac{3}{2}s(8-9s) > \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq 6s(2-3s) & \left(\text{für } s < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

so schwimmt das Prisma in aufrechter Lage labil und erreicht durch Drehung um eine horizontale Achse (wie in II) eine schiefe stabile Lage. Doch ist die Richtung dieser Horizontalachse beschränkt; der Winkel ω , den sie mit der Richtung einer Grundkante bildet, muss der Bedingung (61) genügen:

$$\sin^2(30^\circ + \omega) \leq \begin{cases} \frac{3(1-s)^2}{24s(1-s) - 2\left(\frac{a}{b}\right)^2} & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \frac{3s^2}{24s(1-s) - 2\left(\frac{a}{b}\right)^2} & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wenn endlich

$$IV \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 < \begin{cases} 6(1-s)(3s-1) & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ 6s(2-3s) & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases}$$

so hat das Prisma ausser der aufrechten labilen keine Gleichgewichtslage weiter ohne dass eine der Grundflächen vom Wasserspiegel durchschnitten wird.“

Zahlenbeispiele: (66)

3. Welches Kantenverhältnis hat ein regelm. gerades dreiseitiges Prisma vom spec. Gew. $\frac{2}{3}$, wenn es stabil so schwimmt, dass eine obere Ecke im Wasserspiegel liegt, und welchen Winkel bildet seine Achse mit der Vertikalen?

Aufl. Aus 65 II haben wir die Bedingungen

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{3}{2} (1 - s) (9s - 1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{24 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot s (1 - s) - 2}$$

Aus der ersten ergibt sich für $s = \frac{2}{3}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{5}{2} \quad \frac{a}{b} = 1,58 \text{ (angenähert)}$$

$$\text{oder } \frac{a}{b} = \frac{158}{100}$$

und aus der zweiten Bedingung

$$\varphi_1 = 20^\circ 3' 35''$$

4. Ein gerades regelm. dreiseitiges Prisma schwimmt in aufrechter Lage labil, kippt um eine horizontale Achse, die mit einer Grundkante einen Winkel von 15° bildet und gelangt nach einer Drehung von 30° in eine stabile Gleichgewichtslage, bei der eine Ecke der oberen Grundfläche im Wasserspiegel liegt. Wie gross ist das Kantenverhältnis $\frac{a}{b}$ und das specif. Gewicht?

Aufl. Da hier $\omega = 15^\circ$ und φ_1 als Grenzwert $= 30^\circ$ ist, so hat man aus 60

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \sqrt{24 \cdot \frac{b^2}{a^2} s (1 - s) - 2} \\ \text{und } \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{(1 - s) \sqrt{3}}{\sin 45^\circ} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Aus diesen Gleichungen ist $\frac{a}{b}$ und s zu bestimmen. Aus der zweiten Gl. folgt, da $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$ und $\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ ist,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{18 \cdot (1 - s)^2} \quad (68)$$

und folglich aus der ersten nach einigen Reduktionen:

$$s = \frac{7}{11} = 0,636$$

also aus 68:

$$\frac{a}{b} = (1 - s) \sqrt{18^2} = \frac{4}{11} \cdot \sqrt{18^2}$$

$$\text{d. i. angenähert } \frac{a}{b} = \frac{17}{11}$$

B. Der gerade Kreiscylinder.

Ist r der Radius des Cylinders, b seine Höhe, so ist

$$T_1 = \frac{\pi}{4} r^4 \quad F_1 = \pi r^2 \quad u_m = r \quad e_1 = \frac{b}{2} (1 - s)$$

also nach dem Duhamelschen Satze die Bedingung für eine stabile aufrechte Gleichgewichtslage

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{V_1} - e_1 &> 0 \\ \frac{r^2}{4 b s} - \frac{b}{2} (1 - s) &> 0 \\ \frac{r^2}{b^2} &> 2 s (1 - s) \end{aligned}$$

oder wenn das Verhältnis des Durchmessers zur Höhe eingeführt wird,

$$\frac{2r}{b} > \sqrt{8 s (1 - s)} \quad (69)$$

Bestimmen wir hieraus umgekehrt die Grenzen für s , wenn das Verhältnis $\frac{2r}{b}$ gegeben ist.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2r}{b}\right)^2 &> 8 s - 8 s^2 \\ \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 &> \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{b}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (70)$$

Diese Bedingung ist für jeden Wert von s (zwischen 0 und 1) erfüllt, wenn

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2r}{b}\right)^2 > 1 \quad \text{oder} \quad \frac{2r}{b} > \sqrt{2} \quad \text{d. i.} > 1,4142.$$

Ist aber $\frac{2r}{b} < 1,4142$, so ergibt sich aus 70:

$$\begin{aligned} \text{für } s > \frac{1}{2}: \quad s &> \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{b}\right)^2}\right) \\ \text{für } s < \frac{1}{2}: \quad s &< \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{b}\right)^2}\right) \end{aligned} \quad (71)$$

Zahlenbeispiele:

5. Welches Verhältnis muss der Durchmesser eines geraden Kreiscylinders zu seiner Höhe mindestens haben, wenn er in aufrechter Lage bis zur halben Höhe einsinkt und stabil schwimmen soll?

Aufl. Setzt man in (69) $s = \frac{1}{2}$, so wird $\frac{2r}{b} > \sqrt{2}$ oder $> 1,4142$.

6. Welches spezifische Gewicht muss ein gerader Kreiscylinder von quadratischem Achsenschnitt haben, damit er in aufrechter Lage stabil schwimmt?

Aufl. In 71 hat man $\frac{2}{b} = 1$ zu setzen. Es wird

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{b}\right)^2} = \sqrt{0,50} = 0,7071$$

$$\text{also} \quad 1 + \sqrt{0,50} = 1,7071$$

$$1 - \sqrt{0,50} = 0,2929$$

folglich entweder $s > 0,8536$
oder $s < 0,1464$

$$\text{Ist aber} \quad \frac{2r}{b} < \sqrt{8s(1-s)} \quad (72)$$

so ist der Cylinder in der aufrechten Lage labil und dreht sich um eine horizontale Achse, bis er in eine stabile Gleichgewichtslage gelangt. Diese ist durch die Bedingungen 55 bestimmt, wenn darin

$$F_1 = \pi r^2 \quad T_1 = \frac{\pi r^4}{4} \quad u_m = r$$

gesetzt wird:

$$\text{tg}^2 \varphi_1 = 16 \left(\frac{b}{2r} \right)^2 \cdot s (1-s) - 2$$

$$\text{tg} \varphi_1 \leq \begin{cases} 2(1-s) \cdot \frac{b}{2r} & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ 2s \cdot \frac{b}{2r} & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (72a)$$

Hieraus ergibt sich für die schiefe Stabilitätslage die Bedingung

$$16 \left(\frac{b}{2r} \right)^2 s (1-s) - 2 \leq \begin{cases} 4(1-s)^2 \cdot \left(\frac{b}{2r} \right)^2 & \left(s > \frac{1}{2} \right) \\ 4s^2 \cdot \left(\frac{b}{2r} \right)^2 & \left(s < \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

oder nach gehöriger Reduktion und mit Hinzunahme von 72:

$$8s(1-s) > \left(\frac{2r}{b} \right)^2 \geq \begin{cases} 2(1-s)(5s-1) & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ 2s(4-5s) & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (73)$$

Hieraus können für ein gegebenes spec. Gew. die Grenzwerte des Verhältnisses $\frac{2r}{b}$ bestimmt werden. Umgekehrt kann aus 73 auch die Grenze für s bei gegebenem Werte von $\frac{2r}{b}$ ausgedrückt werden. Dies will ich jedoch auf ein Zahlenbeispiel (7) beschränken.

Zahlenbeispiel.

7. Bei welchem spec. Gew. schwimmt ein gerader Kreiscylinder mit quadratischem Achsenschnitt in schiefer Lage stabil, so dass sein kleinerer Teil und seine untere Grundfläche im Wasser ist?

Aufl. Es muss $s < \frac{1}{2}$ und $\frac{2r}{b} = 1$ sein, also nach 73:

$$8s(1-s) > 1 > 2s(4-5s)$$

Hieraus folgen die beiden Bedingungen

$$8s(1-s) > 1 \quad \text{und} \quad 1 > 2s(4-5s)$$

Aus der ersten folgt

$$\left(\frac{1}{2} - s\right)^2 < \frac{1}{8}$$

oder da $s < \frac{1}{2}$ ist,

$$s > \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ oder } s > 0,146.$$

Aus der zweiten Bedingung

$$1 > 2s(4 - 5s)$$

ergibt sich $(s - 0,4)^2 > 0,06$

$$\text{also entweder } s > 0,4 + \sqrt{0,06} \\ \text{oder } s < 0,4 - \sqrt{0,06}$$

Es ist aber angenähert $\sqrt{0,06} = 0,245$

$$0,4 + \sqrt{0,06} = 0,645$$

$$0,4 - \sqrt{0,06} = 0,155$$

Da $s < \frac{1}{2}$, so ist die Bedingung $s > 0,645$ nicht erfüllbar, sondern nur $s < 0,155$. Folglich muss der Wert von s zwischen 0,146 und 0,155 liegen.

8. Ein gerader Kreiscylinder hat einen Durchmesser von 60 cm, eine Höhe von 40 cm und das spec. Gew. 0,75. In welchen Lagen schwimmt er im Gleichgewicht, ohne dass die obere Grundfläche eintaucht?

Aufl. Es ist zunächst zu untersuchen,

$$\text{ob } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 \geq 8s(1-s) \text{ ist.}$$

$$\text{Es ist } 2r = 60 \text{ cm} \quad b = 40 \text{ cm} \quad s = \frac{3}{4}$$

$$\text{also } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ und } 8s(1-s) = \frac{3}{2}$$

$$\text{folglich } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 > \frac{3}{2}$$

Der Cylinder schwimmt also in aufrechter Lage stabil und hat unter den angegebenen Bedingungen weiter keine Gleichgewichtslage.

9. Ein gerader Kreiscylinder hat einen Durchmesser von 30 cm und eine Höhe von 40 cm. In welcher Gleichgewichtslage schwimmt er, wenn sein spec. Gew. 0,8 ist?

$$\text{Aufl. Hier ist } \frac{2r}{b} = \frac{3}{4}, \quad \left(\frac{2r}{b}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad 8s(1-s) = 8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = \frac{32}{25}$$

$$\text{also } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 < 8s(1-s)$$

d. h. der Cylinder schwimmt aufrecht labil. Es ist ferner (s. 73)

$$2(1-s) \cdot (5s-1) = 2 \cdot 0,2 \cdot 3 = 1,2$$

$$\text{also } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 < 2(1-s)(5s-1)$$

Der Cylinder hat also bei nicht eintauchender oberer Grundfläche keine stabilen Gleichgewichtslage.

10. Ein gerader Kreiscylinder von spec. Gew. 0,6 hat einen Durchmesser von 3,2 m und eine Höhe von 2,5 m. In welcher Lage schwimmt er im Gleichgewicht, ohne mit der oberen Grundfläche einzutauchen?

$$\text{A u f l. Hier ist } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 = \frac{32^2}{25^2} 8s(1-s) = 8 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = \frac{48 \cdot 25}{25^2}$$

$$\text{also } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 = \frac{16 \cdot 2 \cdot 32}{25^2} = \frac{16 \cdot 64}{25^2}$$

$$\text{und } 8s \cdot (1-s) = \frac{16 \cdot 3 \cdot 25}{25^2} = \frac{16 \cdot 75}{25^2}$$

$$\text{folgl. } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 < 8s(1-s).$$

Der Cylinder schwimmt also aufrecht labil.

Ferner ist zu untersuchen (73), da $s > \frac{1}{2}$

$$\text{ob } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 \geq 2(1-s)(5s-1) \text{ ist}$$

$$\text{oder } \left(\frac{32}{25}\right)^2 \geq 2 \cdot 0,4 \cdot 2$$

$$\text{oder } \frac{32}{25} \geq \sqrt{1,6}$$

$$\text{Es ist aber } \frac{32}{25} = 1,28 \text{ und } \sqrt{1,6} = 1,26 \dots \dots$$

$$\text{also } \left(\frac{2r}{b}\right)^2 > 2(1-s)(5s-1)$$

Der Cylinder hat also eine schiefe stabile Gleichgewichtslage. Um diese zu bestimmen, erhält man aus 72a

$$\text{tg}^2 \varphi_1 = 16 \cdot \left(\frac{b}{2r}\right)^2 \cdot s(1-s) - 2 = \frac{16 \cdot 25^2}{16 \cdot 64} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} - 2 = \frac{75}{32} - 2 = \frac{11}{32}$$

$$\text{also } \text{tg } \varphi_1 = \sqrt{\frac{11}{32}}$$

Die Ausführung der Rechnung ergibt angenähert $\varphi_1 = 18^\circ 58' 13''$.

Diesen Winkel bildet in der stabilen Lage die Hauptachse mit der Vertikalen oder die Grundfläche mit dem Wasserspiegel.

Es soll noch bestimmt werden, bis zu welcher Maximalhöhe (x) der Mantel des Cylinders eintaucht. In der aufrechten Schwimmlage ist diese b_s , also nach der Drehung um den Winkel φ_1 , wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned} x &= b_s + r \text{tg } \varphi \\ x &= 1,5 + 0,55 \\ x &= 2,05 \end{aligned}$$

$$\text{Es wird daher } \frac{x}{b} = \frac{2,05}{2,50} = \frac{41}{50}.$$

Der am tiefsten eintauchende Teil der Mantelhöhe beträgt also $\frac{41}{50}$, der kürzeste über dem Wasser befindliche Teil $\frac{9}{50}$ der ganzen Höhe oder 45 cm.

C. Das gerade Prisma mit quadratischer Grundfläche.

Für das Quadrat, dessen Seite a sei, ist das Trägheitsmoment $T_1 = \frac{1}{12} \cdot a^4$ und der Inhalt $F_1 = a^2$. Ist ferner (Fig. 14) ABCD die obere Grundfläche, EF parallel der Drehungsachse, Winkel $\text{JOF} = \omega$, $\text{BG} \perp \text{EF}$, so ist $\text{BG} = u_m$ die grösste Ordinate der Flächenpunkte für die Achse EF, $\text{OB} = \frac{a}{2} \sqrt{2}$ also

$$u_m = \frac{a}{2} \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + \omega) \quad (74)$$

Ist b wieder die Seitenkante, s das spec. Gewicht des Prismas, so ist das Volumen des eintauchenden Teils $V_1 = F_1 b \cdot s = a^2 b s$. Für die Stabilität der aufrechten Lage ist also nach dem Duhamelschen Satz die Bedingung $\frac{T_1}{V_1} - e_1 > 0$

oder da $\frac{T_1}{V_1} = \frac{\frac{1}{12} a^4}{a^2 b s} = \frac{a^2}{12 b s}$ und $e_1 = \frac{b}{2} (1 - s)$ ist, $\frac{a^2}{12 b s} - \frac{b}{2} (1 - s) > 0$

oder $\left(\frac{a}{b}\right)^2 > 6 s (1 - s)^*$ (75)

Ist aber $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < 6 s (1 - s)$, so ist die aufrechte Lage labil und es kann für den Drehungswinkel φ_1 eine schiefe stabile Lage eintreten, wenn die Bedingungen 55 erfüllt sind.

Für diese ist $\frac{F_1 b^2 s (1 - s)}{T_1} = \frac{12 a^2 b^2 s (1 - s)}{a^4} = 12 \left(\frac{b}{a}\right)^2 s (1 - s)$

und $\frac{b (1 - s)}{u_m} = \frac{b}{a} \cdot \frac{(1 - s) \sqrt{2}}{\sin(45^\circ + \omega)}$

folglich die Bedingungen für die schiefe Stabilitätslage:

$$\begin{aligned} \text{tg}^2 \varphi_1 &= 12 \left(\frac{b}{a}\right)^2 s (1 - s) - 2 \\ \text{tg} \varphi_1 &\leq \begin{cases} \frac{b}{a} \cdot \frac{(1 - s) \sqrt{2}}{\sin(45^\circ + \omega)} & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{s \sqrt{2}}{\sin(45^\circ + \omega)} & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (76)$$

Die Grenzbedingung für φ_1 (76) ist für alle Werte von ω erfüllt, wenn sie für den grössten Wert $\omega = 45^\circ$ erfüllt ist. Für letzteren wird aber $\sin(45^\circ + \omega) = 1$, folgl. aus 76:

$$\begin{aligned} \text{tg}^2 \varphi_1 &= 12 \left(\frac{b}{a}\right)^2 s (1 - s) - 2 \\ \text{tg} \varphi_1 &\leq \begin{cases} \frac{b}{a} \cdot (1 - s) \sqrt{2} & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \frac{b}{a} s \cdot \sqrt{2} & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

*) S. Schülen a. a. O.

Hieraus folgt

$$12 \left(\frac{b}{a}\right)^2 s (1 - s) - 2 \leq \begin{cases} 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 (1 - s)^2 & \text{wenn } s > \frac{1}{2} \\ 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 s^2 & \text{wenn } s < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Eine Umformung dieser Bedingung ergibt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq \begin{cases} (1 - s)(7s - 1) & \text{wenn } s > \frac{1}{2} \\ s(6 - 7s) & \text{wenn } s < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (77)$$

Hieraus und mit Rücksicht auf 75 ergibt sich also Folgendes:

„Wenn für ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche (Grundkante a , Seitenkante b , spec. Gew. s)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 > 6s(1 - s) \quad (78)$$

so schwimmt es in aufrechter Lage stabil; wenn

$$6s(1 - s) > \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq \begin{cases} (1 - s)(7s - 1) & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ s(6 - 7s) & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (78a)$$

so schwimmt es aufrecht labil und nach einer Drehung um den Winkel φ_1 in schiefer Lage stabil, wo φ_1 durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{12 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 s (1 - s) - 2} \quad (78b)$$

bestimmt ist. Im letzteren Falle bleibt die Stabilität in jeder Lage, die das Prisma durch Drehung um seine Hauptachse erhält.

$$\text{Ist jedoch } \left(\frac{a}{b}\right)^2 < \begin{cases} (1 - s)(7s - 1) & \text{für } s < \frac{1}{2} \\ s(6 - 7s) & \text{für } s > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (78c)$$

so kann das Prisma in der schiefen stabilen Lage nur soweit um die Hauptachse gedreht werden, bis eine der Grundflächen den Wasserspiegel durchschneidet. Die Grenzbedingung dafür, die also den grössten Wert von ω bestimmt, folgt aus 76:

$$\sin^2 (45^\circ + \omega) \leq \begin{cases} \frac{(1 - s)^2}{6s(1 - s) - \left(\frac{a}{b}\right)^2} & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \frac{s^2}{6s(1 - s) - \left(\frac{a}{b}\right)^2} & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (78d)$$

Ist diese Bedingung auch für $\omega = 0$ nicht erfüllt, so gibt es unter der obigen Voraussetzung überhaupt keine stabile Gleichgewichtslage. Die Bedingung für diesen

Fall nimmt, wenn $\sin^2(45^\circ) = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, nach einigen Umformungen folgende Form an:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left\{ \begin{array}{ll} 2(1-s)(4s-1) & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ 2s(3-4s) & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (78e)$$

D. Der Würfel.*)

Setzt man in den Ergebnissen des vorigen Abschnitts (C) $\frac{a}{b} = 1$, so erhält man aus 78:

$$1 > 6s(1-s)$$

und hieraus

$$\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{12}$$

also entweder:

$$\left. \begin{array}{l} s > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} \text{ d. h. } s > 0,7887 \\ \text{oder} \\ s < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}} \text{ d. h. } s < 0,2113 \end{array} \right\} \quad (79)$$

Aus 78 a:

$$\left\{ \begin{array}{l} s > \frac{1}{2} \text{ und } 1 \geq (1-s)(7s-1) \\ s < \frac{1}{2} \text{ und } 1 \geq s(6-7s) \end{array} \right.$$

und hieraus:

$$\left\{ \begin{array}{l} s > \frac{1}{2} \text{ und } \left(s - \frac{4}{7}\right)^2 > \frac{2}{49} \\ s < \frac{1}{2} \text{ und } \left(s - \frac{3}{7}\right)^2 > \frac{2}{49} \end{array} \right.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist die erste dieser Bedingungen nur erfüllbar für $s > \frac{4}{7}$ und die zweite nur für $s < \frac{3}{7}$ und man erhält

$$\left. \begin{array}{l} s > \frac{1}{2} \text{ und } s > \frac{1}{7}(4 + \sqrt{2}) \text{ d. i. } > 0,7735 \\ s < \frac{1}{2} \text{ und } s < \frac{1}{7}(3 - \sqrt{2}^1) \text{ d. i. } < 0,2265 \end{array} \right\} \quad (80)$$

Aus 79 und 80 ergibt sich also:

„Ein Würfel schwimmt in aufrechter Lage stabil, wenn sein spec. Gewicht $s > 0,7887$ oder $s < 0,2113$ ist.“

(81)

*) Schülen hat (a. a. O.) die schiefe stabile Lage nur für $\omega = 0$ bestimmt.

Liegt dagegen sein spec. Gew. entweder
 zwischen 0,7735 und 0,7887
 oder zwischen 0,2113 und 0,2265,
 so schwimmt er in aufrechter Lage labil, gelangt aber durch Drehung um eine beliebige horizontale Achse in eine schiefe stabile Lage, in der weder seine obere noch seine untere Fläche vom Wasserspiegel durchschnitten wird, und deren Drehungswinkel (φ_1) aus der Gleichung (78 b)

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = 2 \cdot \left\{ b s (1 - s) - 1 \right\} \quad (81 a)$$

bestimmt werden kann.

Ist endlich sein spec. Gew.
 zwischen 0,2265 und 0,7735,
 so gelangt er ebenfalls aus der labilen aufrechten Lage in eine schiefe stabile (die auch aus Gleichung 81 zu bestimmen ist), wenn die Drehungsachse entweder mit einer Grundkante parallel ist oder mit ihr einen Winkel ω bildet, dessen Grenze der Bedingung (s. 78 d)

$$\sin^2 (45^\circ + \omega) \leq \begin{cases} \frac{(1-s)^2}{b s (1-s) - 1} & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ \frac{s^2}{b s (1-s) - 1} & \text{für } s < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (82)$$

unterliegt. Für $s = \frac{1}{2}$ ergibt diese Bedingung

$$\sin^2 (45^\circ + \omega) = \frac{1}{2}$$

$$\text{woraus } \sin (45^\circ + \omega) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

also $\omega = 0$ folgt.

D. h. ein Würfel vom spec. Gew. $\frac{1}{2}$ kann aus der aufrechten labilen Lage nur durch Drehung um eine horizontale Achse, die einer Kante parallel ist, in eine schiefe stabile Lage gelangen. Der Drehungswinkel ist in diesem Falle (nach 81) $\varphi_1 = 45^\circ$, der Wasserschnitt fällt also mit einem rechteckigen Diagonalschnitt des Würfels zusammen.

E. Das n-seitige gerade regelmässige Prisma.

Um nach der bisher entwickelten Theorie das allgemeine regelmässige Prisma von beliebiger Seitenzahl behandeln zu können, muss man in erster Linie das Trägheitsmoment seiner Grundfläche, T_1 bestimmen.

A B C D seien einige aufeinander folgende Ecken eines regelmässigen n-Ecks. M sei die Mitte einer Seite, O der Schwerpunkt (Mittelpunkt) des Polygons und M O N eine Symmetrieachse. Verbindet man O mit sämtlichen Ecken des Polygons, so wird dieses in n kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt und sein Trägheitsmoment T_1 ist die Summe aus den Trägheitsmomenten sämtlicher Dreiecke für die Achse M N.

Bestimmen wir zunächst das Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Dreiecks B C O für eine beliebige durch die Spitze O gehende Achse L. Die Höhe sei O Q = h, die Basis B C = a und L bilde mit O Q den Winkel φ .

Das Trägheitsmoment für die Hauptachse O Q sei T_x und für die auf O Q senkrechte Achse (O R) sei T_y . Dann ist (mit Bezugnahme auf frühere Betrachtungen) das Trägheitsmoment für die Achse L

$$T = T_y \cdot \sin^2 \varphi + T_x \cdot \cos^2 \varphi$$

(da O Q eine Symmetrieachse ist und folglich die Summe $\int x y d f$, bezogen auf die Dreiecksfläche, Null ist).

Daraus folgt

$$T = \frac{1}{2} (T_x + T_y) + \frac{1}{2} (T_x - T_y) \cos 2 \varphi. \quad (83)$$

Bezeichnet man nun den Centriwinkel (Fig. 15) A O B = B O C mit α , so bildet für das Dreieck B O C die Achse M N mit der Höhe O V den Winkel $\varphi = \alpha$. Für das zweite Dreieck C O D ist offenbar $\varphi = 2 \alpha$ u. s. f., für das letzte Dreieck A O B ist $\varphi = n \alpha$. Es ist folglich nach 83 das Trägheitsmoment des ganzen nEcks

$$T_1 = \frac{n}{2} (T_x + T_y) + \frac{1}{2} (T_x - T_y) \left(\cos 2 \alpha + \cos 4 \alpha + \dots \right) \quad (84)$$

Bildet man nun in derselben Weise die Trägheitsmomente der einzelnen Dreiecke B O C, C O D u. s. w. für die auf M N senkrechte, ebenfalls durch O gehende Achse, und zwar in derselben Reihenfolge, so ist für diese der Reihe nach $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{\pi}{2} + 2 \alpha$, $\frac{\pi}{2} + 3 \alpha$, u. s. f. für das letzte Dreieck $\frac{\pi}{2} + n \alpha$, folglich da das Trägheitsmoment des Polygons für alle durch O gehenden Achsen denselben Wert hat,

$$T_1 = \frac{n}{2} (T_x + T_y) + \frac{1}{2} (T_x - T_y) \left\{ \cos (\pi + 2 \alpha) + \cos (\pi + 4 \alpha) + \dots \right\} \quad (85)$$

Addiert man nun die Gleichungen 84 u. 85 und berücksichtigt, dass $\cos (\pi + p \alpha) = - \cos p \alpha$ folglich $\cos p \alpha + \cos (\pi + p \alpha) = 0$ ist, so erhält man

$$2 T_1 = n (T_x + T_y) \quad \text{oder} \quad T_1 = \frac{n}{2} (T_x + T_y) \quad (86)$$

Man findet nun leicht nach den bekannten Methoden die Trägheitsmomente

$$T_x = A \cdot \frac{a^2}{24}, \quad T_y = A \cdot \frac{h^2}{2}$$

wenn A der Inhalt des Dreiecks O B C (Fig. 16) ist. Folglich wird

$$T_1 = \frac{n A}{4} \left(\frac{a^2}{12} + h^2 \right)$$

Es ist aber n A der Inhalt des Polygons F₁ und $h = \frac{a}{2} \omega \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right)$, folglich

$$T_1 = \frac{F_1 a^2}{16} \left\{ \frac{1}{3} + \omega \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\} \quad (86a)$$

Führt man statt der Seite a den grossen Halbmesser r des Polygons ein, setzt also

$$a = 2 r \cdot \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

so ergeben sich die andern Formen

$$T_1 = \frac{1}{12} \cdot F_1 r^2 \left\{ 1 + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\} \quad (87)$$

$$\text{oder} \quad T_1 = \frac{1}{12} \cdot F_1 r^2 \left\{ 2 + \cos \left(\frac{2 \pi}{n} \right) \right\}$$

Für das gleichseitige Dreieck z. B. ist

$$n = 3, F_1 = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}, \quad \frac{\pi}{n} = 60^\circ, \quad \omega \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) = \frac{1}{3}$$

also aus 86

$$T_1 = F_1 \cdot \frac{a^2}{24} = \frac{a^4}{96} \cdot \sqrt{3} = \frac{F_1^2}{6 \sqrt{3}}$$

Für das Quadrat ist $n = 4, F_1 = a^2, \frac{\pi}{n} = 45^\circ, \omega \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) = 1$, also

$$T_1 = \frac{F_1 a^2}{12} = \frac{a^4}{12} = \frac{F_1^2}{12}$$

Für den Kreis ist in 87

$$F_1 = \pi r^2, \quad n = \infty, \quad \frac{2 \pi}{n} \rightarrow 0, \quad \cos \frac{2 \pi}{n} = 1$$

zu setzen, also

$$T_1 = \frac{1}{12} \cdot \pi r^4 \cdot 3 = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{F_1^2}{4 \pi}$$

Alle drei Werte stimmen mit den bekannten und oben benutzten überein. Die Grösse u_m (s. 53) kann leicht, wie beim dreiseitigen und vierseitigen Prisma bestimmt werden. Man findet

$$u_m = r \cdot \sin \left(\frac{n-2}{2n} \cdot \pi + \omega \right) \quad (88)$$

Mit Hilfe dieser Werte (86 bis 88) können nach den früher entwickelten Kriterien für jedes regelmässige gerade Prisma die Bedingungen des Gleichgewichts und der Stabilität angegeben werden.

F. Vergleich von regelmässigen geraden Prismen verschiedener Seitenzahl, die gleiche Grundfläche, gleiche Höhe und gleiches spec. Gewicht haben.

Die Grundfläche eines geraden regelm. n -seitigen Prismas ist $F_1 = n \cdot \frac{r^2}{2} \sin \frac{2 \pi}{n}$.

woraus

$$r^2 = \frac{2 F_1}{n \cdot \sin \frac{2 \pi}{n}} = \frac{F_1}{\pi} \frac{\frac{2 \pi}{n}}{\sin \frac{2 \pi}{n}}$$

folgt. Setzt man diesen Wert in 87 ein, so ergibt sich

$$T_1 = \frac{F_1^2}{12 \pi} \cdot \frac{\frac{2 \pi}{n}}{\sin \frac{2 \pi}{n}} \cdot \left(2 + \cos \frac{2 \pi}{n} \right) \quad (89)$$

oder kürzer, wenn $\frac{2 \pi}{n} = \alpha$ gesetzt wird,

$$T_1 = \frac{F_1^2}{12 \pi} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot (2 + \cos \alpha) \quad (89a)$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass der vorstehende Ausdruck bei unverändertem F_1 mit abnehmendem α oder mit zunehmender Seitenzahl n abnimmt, d. h.: „Alle regelmässigen Polygone von gleichem Flächeninhalt haben ein um so kleineres Trägheitsmoment, je grösser ihre Seitenzahl ist“.

Das grösste Trägheitsmoment hat hiernach das Dreieck, nämlich $\frac{F_1^2}{6\sqrt{3}}$,

das kleinste der Kreis, nämlich $\frac{F_1^2}{4\pi}$. Für alle regelmässig geraden Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe und gleichem spezifischem Gewicht ist also die Grösse

$$T_1 - V_1 e_1$$

auch um so kleiner, je grösser die Seitenzahl ist. Folglich wird auch nach dem Duhamel'schen Satze die Möglichkeit der aufrechten Stabilität (und ihre Grösse) mit zunehmender Seitenzahl abnehmen.

Nach 55 ist ferner

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{F b^2 s (1-s)}{T_1} - 2$$

und hieraus ersieht man, dass der Winkel φ_1 , der die schiefe Stabilitätslage bestimmt, mit wachsender Seitenzahl zunehmen muss. Von allen oben erwähnten Prismen schwimmt also der Cylinder in der schiefesten Lage stabil, das dreiseitige Prisma ist der aufrechten Lage am nächsten.

VII.

Das zweite Drehungsgebiet des geraden Prismas, eine Grundfläche durchschneidet den Wasserspiegel.

In den Abschnitten IV bis VI wurde die Drehung eines schwimmenden geraden Prismas innerhalb des ersten Gebietes betrachtet, d. h. es wurde vorausgesetzt, dass keine der beiden Grundflächen den Wasserspiegel durchschneide. Eine weitere Drehung führt den Körper in das zweite Gebiet. Es soll dabei das spec. Gew. $s > \frac{1}{2}$

vorausgesetzt werden, sodass also die obere Grundfläche zum Teil eintaucht. Das Prisma befinde sich in einer Gleichgewichtslage und Fig. 17 stelle den Schnitt vor, der senkrecht zur horizontalen Drehungsachse durch den Schwerpunkt S des Prismas gelegt ist. $N_1 N$ sei die Schnittlinie mit der Ebene des Wasserspiegels, $O O_1$ die Hauptschwimmachse (der aufrechten Lage) und $S_2 S_3$ die Schwerpunkte des unter und des über dem Wasserspiegel befindlichen Körperteils. Da nun S_2 senkrecht unter S liegt, so muss auch S_3 senkrecht über S liegen, es können daher die beiden Bedingungen des Gleichgewichts (s. 1) statt für S_2 ebenso gut für S_3 abgeleitet werden. Die erste dieser Bedingungen ist daher folgende:

„Das statische Moment des über dem Wasser befindlichen Körperteils für die durch S senkrecht zur Drehungsachse gelegte Vertikalebene (Ebene der Figur 17) ist Null.“ (95)

In Fig. 18 sei $A B C D$ die obere Grundfläche, O ihr Schwerpunkt, $G H$ ihr Durchschnitt mit dem Wasserspiegel, $E O N F$ (dieselbe Gerade wie in Fig. 17) senkrecht auf $G H$. Dann ist der über dem Wasser befindliche Körperteil ein gerades durch den Wasserschnitt schief abgestumpftes Prisma mit der Grundfläche $A G H C D$. In der letzteren sei P der Schwerpunkt eines Elements df , $P Q = y$ und $P R = x$ seine

Coordinaten für die (positiven) Achsen N G und N E und z die Höhe des auf d f senkrecht stehenden prismatischen Raumelements P Z, dessen andere Grundfläche im Wasserschnitt liegt. Das Volumen dieses Körperelements ist $z \cdot df$ und sein stat. Mom. für die durch E F gelegte Vertikalebene $z \cdot y \cdot df$, oder da $z = x \operatorname{tg} \varphi_2$ ist, $x y \cdot df \cdot \operatorname{tg} \varphi_2$, wenn der Drehungswinkel (aus der aufrechten in die schiefe Gleichgewichtslage) wieder mit φ_2 bezeichnet wird. Folglich ist das stat. Moment des ganzen Körperteils $\int x y df \cdot \operatorname{tg} \varphi_2$ also die erste Gleichgewichtsbedingung (nach 95)

$$\int x y \cdot df = 0 \quad (95a)$$

wo die Summe $\int df = A G H C D$ ist.

Bemerkung. Die Bedingung 95 a gilt auch für die Fläch. B G H, wenn die Grundfläche ein reguläres Polygon, also das Prisma ein regelmässiges ist. In diesem Falle ist (aus 95 a)

$$\int x y \cdot = \int_1 x y df - \int_2 x y df$$

wo $\int_1 df = A B C D$ und $\int_2 df = B G H$.

In der ersten der beiden rechts stehenden Summen soll der Coordinatenanfangspunkt von N nach O geschoben und in der zweiten die + X-achse in die entgegengesetzte Richtung (N F) gelegt werden. Ist $O N = x_0$, so ergibt sich

$$\int x y df = \int_s (x_0 + x) y df + \int_2 x y df \quad (96)$$

wo nun das Summenzeichen \int_s sich auf die Schwerpunktsachse J K (Fig. 18) bezieht.

Es ist aber

$$\int_s (x_0 + x) y df = x_0 \cdot \int_s y df + \int_s x y df$$

und $\int y df$ das statische Moment der Grundfläche für die durch ihren Schwerpunkt gehende Achse E F, also gleich Null.

Folglich ergibt sich aus 96 und 95a:

$$\int x y df = \int_s x y df + \int_2 x y df = 0 \quad (97)$$

Ist nun das Prisma regelmässig, so ist nach Abschnitt V auch $\int_s x y df = 0$, folglich die erste Gleichgewichtsbedingung:

$$\int x y df = \int_2 x y df = 0 \quad (98)$$

wo nun also das Summenzeichen nach Belieben auf den eintauchenden oder auf den nicht eintauchenden Teil der oberen Grundfläche bezogen werden kann.

Die zweite Gleichgewichtsbedingung ist (analog mit 95) folgende:

„Das statische Moment des über dem Wasser befindlichen Körperteils für die durch S parallel zur Drehungsachse gelegte Vertikalebene ist Null.“

Um diese Bedingung zu formulieren, ziehen wir (in Fig. 17) $S_3 P_3 \perp EF$ und $S_3 O_3 \perp OS$ und setzen

$$S_3 P_3 = z_3 \quad N P_3 = x_3$$

Es ist dann (vgl. Fig. 18)

$$S_3 O_3 = P_3 O = x_3 - x_0,$$

S O, die halbe Höhe des Prismas, nach der früheren Bezeichnung = $\frac{b}{2}$,

$$S O_3 = S O - O_3 O = \frac{b}{2} - z_3.$$

Das statische Moment des Schwerpunktes S_3 (d. h. des über dem Wasser befindlichen Körperteils) für die durch S parallel zur Drehungsachse gelegte Vertikalebene ist durch Coordinatentransformation (vgl. 5 und Fig. 2)

$$M_3 = V_3 \cdot \overline{S_3 O_3} \cdot \cos \varphi_2 - V_3 \cdot \overline{S O_3} \cdot \sin \varphi_2,$$

also mit Benutzung der Werte $S_3 O_3 = x_3 - x_0$ und $S O_3 = \frac{b}{2} - z_3$ erhält man die Gleichgewichtsbedingung

$$M_3 = V_3 (x_3 - x_0) \cos \varphi_2 - V_3 \left(\frac{b}{2} - z_3 \right) \cdot \sin \varphi_2 = 0. \quad (99)$$

Es soll hier daran erinnert werden, dass das für $M_3 = 0$ eintretende Gleichgewicht ein (wenigstens für die Drehungsachse) stabiles sein muss, wenn M_3 mit wachsendem φ aus dem Negativen durch Null in's Positive übergeht, dagegen ein labiles, wenn das Umgekehrte der Fall ist.

Bezeichnet, wie früher, V das Volumen des ganzen Körpers, so ist das $\frac{1}{2}$ Volumen des über dem Wasser befindlichen Teils

$$V_3 = V \cdot (1 - s) = F_1 \cdot b \cdot (1 - s) \quad (100)$$

wo F_1 die Grundfläche ist. Bezeichnet ferner T das Trägheitsmoment von F in Bezug auf die Schnittachse GH, so sind analog den früheren Betrachtungen (bei Aufsuchung der ersten Bedingung) die statischen Momente von V_3 für die Grundfläche ABCD und für die senkrecht zu derselben durch die Schnittkante GH gelegte Ebene:

$$\left. \begin{aligned} V_3 z_3 &= \int \frac{1}{2} z^2 \cdot d f = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_2 \cdot \int x^2 d f = \frac{1}{2} T \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_2 \\ V_3 x_3 &= \int z x \cdot d f = \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \int x^2 d f = T \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Setzt man diese beiden Werte in die Gleichung 99, nachdem man sie mit V_3 multipliziert hat, ein, so wird

$$M_3 = T \sin \varphi_2 - V_3 x_0 \cos \varphi_2 - V_3 \frac{b}{2} \sin \varphi_2 + \frac{1}{2} T \operatorname{tg}^2 \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 = 0$$

oder

$$M_3 = \sin \varphi_2 \cdot \left\{ T \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_2 \right) - V_3 \cdot \frac{b}{2} - V_3 x_0 \operatorname{cotg} \varphi_2 \right\} = 0 \quad (102)$$

Bezeichnet ferner x_s die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche F von der Schnittkante GH (Fig. 18) so ist $x_s \operatorname{tg} \varphi_2$ seine Entfernung vom Wasserschnitt, also

$$V_3 = F \cdot x_s \cdot \operatorname{tg} \varphi_2$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus 100:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{F_1 \cdot b (1 - s)}{F \cdot x_s} \quad (103a)$$

und aus 102:

$$\frac{M_3}{\sin \varphi_2} = T \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_2 \right) - F_1 \frac{b^2}{2} \cdot (1 - s) - F x_s \cdot x_0 = 0 \quad (103b)$$

Die beiden Gleichungen 103a und 103b enthalten die zweite Gleichgewichtsbedingung in möglichst einfacher Form.

Wenn das spec. Gew. $s < \frac{1}{2}$ ist, so ist der über dem Wasser befindliche Körperteil mit dem eintauchenden zu vertauschen, also s statt $1 - s$ zu setzen. Die erste Gleichgewichtsbedingung (98) bleibt dieselbe.

$$\int x y \, d f = 0$$

wo nun die Integration auf den eintauchenden Teil der unteren Grundfläche auszudehnen ist.

Die Bedingung für die Stabilität erhält man aus dem Duhamelschen Satze. Ist e_2 wieder die Entfernung SS_2 (Fig. 17) und $SS_3 = e_3$, so ist $V_1 e_2 = V_3 e_3$, also wenn T_m das kleinste von allen Trägheitsmomenten des Wasserschnitts bezeichnet, deren Achsen durch seinen Schwerpunkt gehen, so ist das Gleichgewicht stabil, wenn

$$T_m - V_3 e_3 > 0 \quad (104)$$

Fig. 19 stelle den Wasserschnitt dar, O_1 seinen Schnittpunkt mit der Hauptachse des Prismas, $H N$ seine Schnittkante mit der oberen Grundfläche. Es sei ferner $E_1 O_1 N \perp H N$, S^1 der Schwerpunkt der Fläche, $S^1 L \perp H N$, $J_1 K_1 \perp S^1 L$ und $P Q$ eine beliebige Schwerpunktsachse, die mit $J_1 K_1$ den Winkel μ bildet. Nimmt man $S S^1$ als $(+ x)$ Richtung, $S^1 J_1$ als $(+ y)$ Richtung an, bezeichnet die Trägheitsmomente des Wasserschnitts für die Hauptachse $J_1 K_1$ mit T_2 , für die $(+ x)$ Hauptachse mit T_2^1 und für die Achse $P Q$ mit T_μ , so ist (nach bekannter Coordinatentransformation), wenn $d f$ ein Flächenelement ist

$$T_\mu = \int_s (x \cos \mu - y \sin \mu)^2 \cdot d f$$

$$\text{oder } T_\mu = T_2 \cdot \cos^2 \mu + T_2^1 \sin^2 \mu - \int_s x y \, d f \cdot \sin 2 \mu \quad (105)$$

(die \int_s zeichnen auf den ganzen Wasserschnitt bezogen.)

Verschiebt man für die Summe $\int_s x y \, d f$ den Coordinatenanfangspunkt nach N , setzt also $x - m$ statt x und $y + n$ statt y (wenn $S^1 L = m$, $N L = n$ ist), so wird

$$\begin{aligned} \int_s x y \, d f &= \int_1 (x - m) (y + n) \, d f \\ &= \int_1 x y \, d f - \int_1 m y \, d f + \int_1 n x \, d f - m n F_2 \end{aligned}$$

wo F_2 den Inhalt des Wasserschnitts bezeichnet und das Zeichen \int_1 auf den Anfangs-

punkt N zu beziehen ist. Es ist aber, wie man leicht sieht, $\int_1 y \, d f = - n F_2$ und $\int_1 x \, d f = m F_2$, folglich $\int_s x y \, d f = \int_1 x y \, d f + m n \cdot F_2$

Nach der ersten Gleichgewichtsbedingung (95a) ist aber $\int x y \, d f = 0$ (das \int zeichen bezogen auf den Teil der Grundfläche F) und, wie leicht einzusehen, ist die linke Seite dieser Gleichung $\int x y \, d f = \int_1 x y \, d f \cdot \cos^2 \varphi_2 = 0$ folglich auch $\int_1 x y \, d f = 0$

$$\text{und } \int_s x y \, d f = m n F_2 = k \cdot \quad (106)$$

Aus 105 folgt also

$$T_\mu = T_2 \cdot \cos^2 \mu + T_2^1 \sin^2 \mu - k \sin 2 \mu. \quad (107)$$

Hieraus ist nun das kleinste Trägheitsmoment T_m zu bestimmen.

Setzt man den Differentialquotienten von T_μ gleich Null, so erhält man

$$\begin{aligned} (T_2^1 - T_2) \sin 2 \mu - 2 k \cdot \cos 2 \mu &= 0 \\ \text{oder } \operatorname{tg} 2 \mu &= \frac{2 k}{T_2^1 - T_2} \end{aligned} \quad (108)$$

Aus 107 folgt durch Umformung

$$T_\mu = \frac{1}{2} (T_2 + T_2^1) - \frac{1}{2} \cos 2 \mu \left\{ T_2^1 - T_2 - 2 k \operatorname{tg} 2 \mu \right\} \quad (109)$$

und aus 108

$$\cos 2 \mu = \pm \frac{T_2^1 - T_2}{\sqrt{(T_2^1 - T_2)^2 + 4 k^2}}$$

also durch Einsetzen der Werte von $\operatorname{tg} 2 \mu$ und $\cos 2 \mu$ in 109 und Umformung

$$T_\mu = \frac{1}{2} (T_2 + T_2^1) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(T_2 - T_2^1)^2 + 4 k^2}$$

wo von der Quadratwurzel der absolute Wert zu nehmen ist.

Die beiden Werte von T_μ geben das Maximum und das Minimum. Für das untere Zeichen des zweiten Gliedes ergibt sich das kleinste Trägheitsmoment:

$$T_m = \frac{1}{2} (T_2 + T_2^1) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(T_2 - T_2^1)^2 + 4 k^2} \quad (110)$$

Bezeichnet man in der Grundfläche (Fig. 18) die Schwerpunktsachsen, die mit EF bzw. mit JK parallel laufen, als Hauptachsen und die Trägheitsmomente der Fläche F für diese Achsen mit T_1^1 und T_1 , so erkennt man leicht, dass

$$T_2 = \frac{T_1}{\cos^3 \varphi_2} \text{ und } T_2^1 = \frac{T_1^1}{\cos \varphi_2} \text{ ist.} \quad (111)$$

Sind ferner x_s und y_s die Coordinaten des Schwerpunktes von F für die Achsen GH und EN (Fig. 18), so ist, wie leicht einzusehen, (s. 106 Fig. 19)

$$m = \frac{x_s}{\cos \varphi_2} \quad n = y_s \quad F_2 = \frac{F}{\cos \varphi_2}$$

$$\text{folglich (106) } k = \frac{x_s y_s \cdot F}{\cos^2 \varphi_2} \quad (112)$$

Bezeichnet man das Trägheitsmoment der Fläche F für die Achse GH (Fig. 18), wie früher, mit T und für die Achse EN mit T^1 , so ist nach einem bekannten Satze über Trägheitsmomente

$$T_1 = T - F \cdot x_s^2 \quad T_1^1 = T^1 - F \cdot y_s^2 \quad (113)$$

Die Bedingung 104 geht durch Multiplikation mit $\cos \varphi_2$ in folgende über:

$$T_m \cos \varphi_2 - V_3 e_3 \cos \varphi_2 > 0. \quad (114)$$

Das erste Glied wird (nach 110, 111, 112):

$$T_m \cdot \cos \varphi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{T_1}{\cos^2 \varphi_2} + T_1^1 \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{T_1}{\cos^2 \varphi_2} - T_1^1 \right)^2 + \frac{(2 F x_s y_s)^2}{\cos^2 \varphi_2}} \quad (115)$$

und das zweite Glied folgt aus Fig. 17:

$$V_3 e_3 \cdot \cos \varphi_2 = V_3 \cdot \left(\frac{b}{2} - z_3 \right)$$

oder (s. 101):

$$V_3 e_3 \cos \varphi_2 = \frac{1}{2} \left\{ F_1 b^2 (1 - s) - T \operatorname{tg}^2 \varphi_2 \right\}$$

also nach 102 b):

$$V_3 e_3 \cos \varphi_2 = T - F x_s \cdot x_0 \quad (116)$$

Die Bedingung der Stabilität wird daher (aus 114, 115, 116) folgende:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{T_1}{\cos^2 \varphi_2} + T_1^1 + 2 F x_s x_0 - 2 T \\ & - \sqrt{\left(\frac{T_1}{\cos^2 \varphi_2} - T_1^1 \right)^2 + \frac{(2 F x_s y_s)^2}{\cos^2 \varphi_2}} \right\} > 0 \quad (117) \end{aligned}$$

wo
(nach 102 a) $\frac{1}{\cos^2 \varphi_2} = \left| \frac{F_1 \cdot b (1 - s)}{F x_s} \right|^2 + 1$

$$T_1 = T - F \cdot x_s^2$$

$$T_1^1 = T^1 - F \cdot y_s^2.$$

Für $s < \frac{1}{2}$ ist s statt $1 - s$ zu setzen.

Wenn der Punkt N (s. Fig. 17 und 18) zwischen O und E liegt, so wird x_0 negativ.

No. 95 a, 103 a, b und 117 enthalten die vollständigen Bedingungen des Gleichgewichts und der Stabilität eines geraden Prismas (von beliebiger Form) für das zweite Drehungsgebiet.

VIII.

Das dritte Drehungsgebiet des geraden Prismas, beide Grundflächen durchschneiden den Wasserspiegel.

Das Prisma befinde sich in einer Gleichgewichtslage des dritten Drehungsgebietes und die Figuren 20 und 21 mögen den Figuren 17 und 18 des zweiten Drehungsgebietes entsprechen, so dass auch die Buchstaben hier dieselbe Bedeutung haben wie dort bis auf den Punkt N, welcher hier (Fig. 20) in der unteren Grundfläche, dort in einer Seitenfläche liegt. Die Niveaulinie des Vertikalschnitts (Fig. 20) schneide die nach unten verlängerte Seitenwand in N_0 . D M L in Fig. 21 sei die Projektion des nicht eintauchenden Teils der unteren Grundfläche auf die obere, also $M L \parallel G H$ und N_2 (in beiden Figuren) die Projektion von N_1 . Der Drehungswinkel (aus der aufrechten Lage) heisse jetzt φ_3 . Das Volumen des nicht eintauchenden Körperteils (V_3) ist jetzt die Differenz aus zwei schief abgestumpften Prismen mit den Grundflächen $G B H$ und $M D L$, deren Projektionen auf die Vertikalebene (Fig. 20) $E N N_0$ und $H_1 N_1 N_0$ sind. Analog zu den Entwicklungen im vorigen Abschnitt wird daher die erste Gleichgewichtsbedingung (Vgl. 95 a)

$$\int x y d f - \int^1 x y d f = 0 \quad (118)$$

wo das Zeichen \int auf die Fläche $G H D = F$ und das Zeichen \int^1 auf die Fläche $D M L = f$ auszudehnen ist. Die Koordinatenanfangspunkte sind N und N_2 und die positiven Richtungen der Coordinatenachsen für beide Flächen dieselben (s. Fig. 21).

Für die zweite Gleichgewichtsbedingung hat man, wie in 99, das Moment

$$M_3 = V_3 (x_3 - x_0) \cos \varphi_3 - V_3 \left(\frac{b}{2} - z_3 \right) \sin \varphi_3 = 0 \quad (119)$$

Hier haben aber die Grössen x_3 und z_3 andere Werte wie dort. Ist nämlich $O N_2 = x_0^1$ und x_3^1 die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche f von $M L$, ferner τ das Trägheitsmoment von f für die Achse $M L$, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} V_3 z_3 &= \frac{1}{2} (T - \tau) \operatorname{tg}^2 \varphi_3 - b \cdot f x_s^1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_3 \\ V_3 x_3 &= (T - \tau) \operatorname{tg} \varphi_3 - (x_0 + x_0^1) x_s^1 \cdot f \cdot \operatorname{tg} \varphi_3 \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

also aus 119:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_3}{\sin \varphi_3} &= (T - \tau) \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_3 \right) - (x_0 + x_0^1 + b \operatorname{tg} \varphi_3) \cdot f x_s^1 \\ &\quad - V_3 \cdot \frac{b}{2} - V_3 \cdot x_0 \cdot \operatorname{cotg} \varphi_3 \end{aligned} \right\} = 0. \quad (121)$$

Hierzu kommen noch zwei Gleichungen:

In Fig. 20 ist Winkel $N_2 N N_1 = \varphi_3$, $N_1 N_2 = b$ und $N N_2 = x_0 + x_0^1$, folglich

$$(x_0 + x_0^1) \operatorname{tg} \varphi_3 = b \quad (121 a)$$

Ferner ist das Volumen des nicht eintauchenden Körperteils

$$V_3 = (F x_s - f x_s^1) \operatorname{tg} \varphi_3 = F_1 \cdot b (1 - s) \quad (121 b)$$

Mit Benutzung dieser Gleichungen geht die Bedingung 121 in folgende über:

$$\left. \begin{aligned} (T - \tau) \operatorname{tg} \varphi_3 \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_3 \right) &= F_1 b (1 - s) \left(x_0 + \frac{b}{2} \operatorname{tg} \varphi_3 \right) \\ &+ b \cdot f x_s^1 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_3) \\ (x_0 + x_0^1) \operatorname{tg} \varphi_3 &= b \\ (F x_s - f x_s^1) \operatorname{tg} \varphi_3 &= F_1 b (1 - s) \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Die Bedingungen für die Stabilität in ebenso allgemeiner Form, wie die Gleichgewichtsbedingungen, anzugeben, dürfte nicht zweckmässig sein, da für jeden besondern Fall eine direkte Ableitung derselben wohl einfacher sein würde.

IX.

Die Gleichgewichtslagen eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Drehungsachse einer horizontalen Kante parallel ist.

A. Das erste Drehungsgebiet.

Ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten a, b, c befinde sich in aufrechter Gleichgewichtslage mit vertikaler Kante b und horizontaler Grundfläche (a, c). Nach dem Duhamelschen Satze schwimmt es in dieser Lage stabil, wenn

$$\frac{T_1}{V_1} - e_1 > 0 \quad (122)$$

ist. Nimmt man $c > a$ an, so ist das kleinste aller hier in Betracht kommenden Trägheitsmomente

$$T_1 = \frac{c a^2}{12}$$

und seine Achse mit c parallel. Es ist ferner $V_1 = a b c \cdot s$ und $e_1 = \frac{b}{2} (1 - s)$, folglich die Bedingung der Stabilität:

$$\frac{c a^3}{12 a b c s} - \frac{b}{2} (1 - s) > 0.$$

oder

$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 6 s (1 - s) > 0 \quad (123)$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist die aufrechte Lage labil. Nach allen Richtungen ist sie labil, wenn (in 122) für T_1 das grösste Trägheitsmoment $\frac{a \cdot c^3}{12}$ gesetzt wird. Dann wird

$$\frac{T_1^1}{V_1} - e_1 = \frac{a c^3}{12 a b c s} - \frac{b}{2} (1 - s)$$

Wenn also
$$\left(\frac{c}{b} \right)^2 - 6 s (1 - s) < 0, \quad (124)$$

so ist das Gleichgewicht der aufrechten Lage nach allen Richtungen labil.

In Abschnitt V wurde nun gezeigt (47), dass im ersten Drehungsgebiet eine zweite (stabile) Gleichgewichtslage nur dann möglich ist, wenn entweder $\omega = 0$ oder $\omega = \frac{\pi}{2}$ ist, d. h. wenn die Drehungsachse die Richtung einer horizontalen Kante hat.

Die dritte Lösung der Bedingungsgleichung (46) $T_x = T_y$ ist hier ausgeschlossen, da $c > a$ vorausgesetzt ist. Es soll daher zunächst eine Drehung um eine mit c parallele Achse angenommen und diese weiter verfolgt werden. Gelangt der Körper bei dem Drehungswinkel φ_1 in eine neue Gleichgewichtslage, so hat man zur Bestimmung von φ_1 die Bedingungsgleichung 32:

$$T_1 \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_1\right) - V_1 e_1 = 0$$

oder da $T_1 = \frac{c a^3}{12}$, $V_1 e_1 = \frac{a b^2 c}{2} s (1 - s)$ ist,

$$1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_1 = 6 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot s (1 - s)$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = 12 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot s (1 - s) - 2 \quad (125)$$

Die Bedingung für die Stabilität ist

$$\text{(nach 43a)} \quad T_1^1 > T_1 \quad (126)$$

wo T_1 das Trägheitsmoment der Grundfläche für die zur Drehungsachse des Prismas parallele, T_1^1 das Trägheitsmoment der Grundfläche für die zur Drehungsachse senkrechte Schwerpunktsachse ist.

$$\begin{array}{l} \text{Hier ist nun} \quad T_1^1 = \frac{a c^3}{12}, \quad T_1 = \frac{c a^3}{12}, \\ \text{also} \quad T_1^1 > T_1 \end{array} \quad (127)$$

da $c > a$ vorausgesetzt ist.

Das durch Gleichung 125 bestimmte schiefe Gleichgewicht ist daher stabil.

Wenn das Gleichgewicht der aufrechten Lage allseitig labil ist (Bedingung 124), so kann das Parallelepiped sich auch um eine mit a parallele Achse drehen und wird bei einem Drehungswinkel φ_1^1 eine Gleichgewichtslage erreichen, welche durch die Gleichung (s. 125)

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1^1 = 12 \left(\frac{b}{c}\right)^2 \cdot s (1 - s) - 2 \quad (128)$$

bestimmt ist.

Die Frage der Stabilität wird (nach 126, 127) entschieden, wenn T_1 mit T_1^1 vertauscht wird. Es wird dann $T_1 > T_1^1$, das Gleichgewicht ist also (teilweise) labil. Die Grenzbedingungen für φ_1 und φ_1^1 sind noch zu bestimmen.

Damit keine der beiden Grundflächen den Wasserspiegel durchschneide, muss, wie leicht zu erkennen ist,

$$\left. \begin{array}{l} \left(\text{für } s > \frac{1}{2}\right) \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varphi_1 \leq b (1 - s) \\ \text{und } \frac{c}{2} \operatorname{tg} \varphi_1^1 \leq b (1 - s) \end{array} \right\} \quad (129)$$

sein. Aus der ersten dieser Bedingungen folgt

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 \leq 4 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 (1 - s)^2$$

also (nach 125)

$$12 \left(\frac{b}{a}\right)^2 s (1 - s) - 2 \leq 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (1 - s)^2$$

und nach gehöriger Reduktion

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq 2(1-s)(4s-1) \quad (130)$$

so dass die vollständige Bedingung für die schiefe Gleichgewichtslage (für $s > \frac{1}{2}$)

$$\begin{array}{l} 6s(1-s) > \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq 2(1-s)(4s-1) \\ \text{beziehungsweise} \\ 6s(1-s) > \left(\frac{c}{b}\right)^2 \geq 2(1-s)(4s-1) \end{array} \quad (131)$$

wird.

Wenn $s < \frac{1}{2}$ ist, so ist, wie früher, $1-s$ statt s zu setzen; dann bleibt $6s \cdot (1-s)$ ungeändert, dagegen wird die untere Grenze von $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ resp. $\left(\frac{c}{b}\right)^2$

$$2s(3-4s).$$

Es ergibt sich also Folgendes:

Ein rechtwinkliges Parallelepiped schwimmt in aufrechter Lage ($c > a$ die horizontalen Kanten, b die vertikale) stabil,

$$\text{wenn} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 > 6s(1-s), \quad (132a)$$

in aufrechter Lage labil, dagegen in schiefer Lage stabil (Drehungsachse $\parallel c$) wenn

$$6s(1-s) > \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq \begin{cases} 2(1-s)(4s-1) & \left(\text{für } s > \frac{1}{2}\right) \\ 2s(3-4s) & \left(\text{für } s < \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad (132b)$$

und in aufrechter und schiefer Lage labil*) (Drehungsachse $\parallel a$) wenn

$$6s(1-s) > \left(\frac{c}{b}\right)^2 \geq \begin{cases} 2(1-s)(4s-1) & \text{für } s > \frac{1}{2} \\ 2s(3-4s) & \text{„ } s < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (132c)$$

Der Drehungswinkel der schiefen Gleichgewichtslage ist aus 125 und 128 zu bestimmen.

B. Das zweite Drehungsgebiet.

Das Parallelepiped sei um eine mit c parallele Achse um den Winkel φ_2 gedreht und Fig. 22 sei ein durch den Körperschwerpunkt S senkrecht zur Drehungsachse gelegter Vertikalschnitt. HG sei die Projektion des Wasserschnitts, die mit DC den Drehungswinkel φ_2 bildet, S_2 der Schwerpunkt des eintauchenden, S_3 der des nicht eintauchenden Körperteils, SP_3 die Vertikallinie, $AB = a$, $BC = b$, KL die Hauptachse des Körpers, $S_3P_3 = m_3$ senkrecht auf SP_3 und endlich $DH = x$.

*) Letzteres aber nur teilweise.

In der Gleichgewichtslage muss $m_3 = 0$ sein und es ergibt sich entweder durch Anwendung von 103a und 103b, oder auch auf direktem Wege, als zweite Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{m_3}{b} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^3 = \sin \varphi_2 \cdot \left\{ \left(\frac{x}{b}\right)^4 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^3 + 3 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot (1-s) \frac{x}{b} - 4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot (1-s)^2 \right\} = 0$$

oder wenn $\frac{x}{b} = z$ gesetzt wird,

$$\frac{3 m_3}{b} \cdot \frac{z^3}{\sin \varphi_2} = z^4 - \frac{3}{2} \cdot z^3 + 3 \left(\frac{a}{b}\right)^2 (1-s) z - 4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 (1-s)^2 = 0 \quad (133)$$

Diese Gleichung hat Schülen*) auf direktem Wege abgeleitet.

Es sind zunächst die Grenzen für z zu bestimmen. Der Drehungswinkel φ_2 hat offenbar seinen kleinsten Wert, wenn (Fig. 22) die obere, durch C gehende Kante seinen grössten, wenn die untere, durch A gehende Kante im Wasserspiegel liegt.

Aus Gleichung 103a folgt nun

$$x^2 = 2 a b (1-s) \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \quad (134)$$

Für den kleinsten Wert von φ_2 ist aber

$$x = a \operatorname{tg} \varphi_2, \text{ folglich } x = 2 b (1-s)$$

oder

$$\frac{x}{b} = z = 2 (1-s) \quad (135a)$$

Für den grössten Wert von φ_2 ergibt sich $\frac{x}{b} = z = 1$

$$(135b)$$

Setzt man der Kürze wegen die linke Seite der Gleichung (133) = $F(z)$, ferner $1-s = \sigma$ und $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = n$, so wird

$$F(z) = z^4 - \frac{3}{2} z^3 + 3 n \sigma \cdot z - 4 n \sigma^2 \quad (136)$$

und es ist nun zu untersuchen, wieviel reelle Wurzeln die Gleichung $F(z) = 0$ innerhalb der Grenzen (135 a, b) $z = 2 \sigma$ und $z = 1$ hat. Zu diesem Zweck soll die Gleichung $F(z) = 0$ in Bezug auf ihre sämtlichen Wurzeln diskutiert werden. Die abgeleiteten Funktionen sind

$$F'(z) = 4 z^3 - \frac{9}{2} z^2 + 3 \sigma n \quad (137)$$

$$F''(z) = 3 z (4 z - 3) \quad (138)$$

$$\text{Da für } z = -\infty \quad F(z) = +\infty$$

$$,, \quad z = 0 \quad F(z) = -4 \sigma^2 n$$

$$,, \quad z = +\infty \quad F(z) = +\infty$$

wird, so hat die Gleichung $F(z) = 0$ in diesen beiden Gebieten wenigstens je eine reelle Wurzel. Zwischen $z = \infty$ und $z = 0$ liegt aber nur eine Wurzel, da (nach 137, 138) $F'(z)$ beständig zunimmt. Da $F'(0) = 3 \sigma n$, also positiv ist, so hat $F(z)$ zwischen

*) a. a. O.

— ∞ und 0 ein Minimum. Ausserdem ist (nach 138) $z = 0$ ein Wendepunkt der Curve $F(z)$. Von $z = 0$ bis zu dem zweiten Wendepunkt $z = \frac{3}{4}$ nimmt also $F'(z)$ ab. Ist hier (für $z = \frac{3}{4}$) $F'(z)$ noch positiv, so bleibt es auch positiv bis $z = \infty$. In diesem Falle nimmt $F(z)$ beständig zu, hat also zwischen $z = 0$ und $z = \infty$ auch nur eine reelle Wurzel. Dieser Fall tritt ein, wenn $F'(\frac{3}{4}) \geq 0$, also (s. 137)

$$4 \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \sigma n \geq 0$$

$$\text{oder } 3 \left(\sigma n - \frac{9}{32}\right) \geq 0 \quad (139)$$

Nimmt man nun (ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen) $a > b$ an, so ist der kleinste Wert, den $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = n$ haben kann, $n = 1$ und die Bedingung 139 ist sicher erfüllt, wenn sie für diesen kleinsten Wert erfüllt ist, d. h.

$$\text{wenn } \sigma - \frac{9}{32} \geq 0$$

$$\text{oder } 1 - s - \frac{9}{32} \geq 0$$

$$\text{also wenn } s \leq \frac{23}{32} \text{ ist.} \quad (140)$$

Unter der Voraussetzung 140 hat also die Gleichung $F(z) = 0$ zwischen $z = 0$ und $z = \infty$ nur eine reelle Wurzel. Diese liegt in dem hier in Betracht kommenden Gebiet (zwischen $z = 2\sigma$ und $z = 1$) wenn $F(z)$ für $z = 2\sigma$ negativ und für $z = 1$ positiv ist. Es wird aber (136)

$$F(2\sigma) = 16(1-s)^4 - 12(1-s)^3 + 6n(1-s)^2 - 4n(1-s)^2$$

$$= 2(1-s)^2 \cdot \left\{ 8(1-s)^2 - 6(1-s) + n \right\}$$

$$\text{oder } F(2\sigma) = 2(1-s)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2(1-s)(4s-1) \right\} \quad (141)$$

und für $z = 1$ nach einigen Reduktionen

$$F(1) = (1-s)(4s-1) \cdot \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{1}{2(1-s)(4s-1)} \right\} \quad (142)$$

Die Bedingung $F(2\sigma) < 0$ kann nur erfüllt werden (141), wenn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < 2(1-s)(4s-1)$ ist. Da aber $\frac{a}{b} \geq 1$ vorausgesetzt ist, so muss um so mehr $2(1-s)(4s-1) > 1$ sein. Dann ist aber $\frac{1}{2(1-s)(4s-1)} < 1$, also die Bedingung 142 schon von selbst erfüllt. Es ergibt sich also:

Für $s \leq \frac{23}{32}$ hat $F(z) = 0$ eine reelle Wurzel (zwischen $z = 2\sigma$ und $z = 1$) d. h. im zweiten Drehungsgebiet giebt es eine Gleichgewichtslage, wenn

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 < 2(1-s)(4s-1) \quad (143)$$

d. h. wenn (s. 132 b) im ersten Drehungsgebiet (ausser der aufrechten Lage) kein Gleichgewicht existiert. Und zwar ist das Gleichgewicht (zunächst für die Drehungsachse) stabil, da $F(z)$ aus dem Negativen in's Positive gehend gleich Null wird.

Umgekehrt hat $F(z) = 0$ keine reelle Wurzel zwischen $z = 2\sigma$ und $z = 1$, wenn

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 > 2(1-s)4s-1 \quad (144)$$

d. h. wenn im ersten Drehungsgebiet, die aufrechte Lage eingeschlossen, ein stabiles Gleichgewicht existiert*).

Wenn $s > \frac{23}{32}$ ist, so kann entweder die Bedingung 139 für genügend grosse Werte von n auch noch erfüllt sein, oder nicht und in diesem letzteren Falle hat $F(z)$ zwischen $z = 0$ und $z = \infty$ ein Maximum und ein Minimum und daher $F(z) = 0$ eine oder drei reelle Wurzeln. Dies soll nun in folgender Weise untersucht werden. Bringt man (136) $F(z)$ in die Form

$$F(z) = z^4 - \frac{3}{2}z^3 + \sigma n 3z - 4\sigma = z^4 - \frac{3}{2}z^3 + 3\sigma n(z - \frac{2}{3} \cdot 2\sigma) \quad (145)$$

so ist darin $z > 2\sigma$, also um so mehr $z > \frac{2}{3} \cdot 2\sigma$ und das dritte Glied folglich positiv. Daher muss $F(z)$ für jeden Wert von z zwischen $z = 2\sigma$ und $z = \infty$ mit wachsendem n zunehmen, mit abnehmendem n abnehmen. Hat also $F(z)$ für $n = n_1$ in ihrem Minimum eine Doppelwurzel, so ist $F(z)$ für $n > n_1$ in dem ganzen Gebiet positiv, für $n < n_1$ dagegen muss $F(z) = 0$ zwei Wurzeln haben. Liegt die Doppelwurzel im Maximum, so ist es umgekehrt.

Zur Bestimmung von n_1 muss aus den Gleichungen $F(z) = 0$ und $F'(z) = 0$ z eliminiert werden. Diese Gleichungen sind (136, 137) folgende:

$$\left. \begin{aligned} z^4 - \frac{3}{2}z^3 + 3n\sigma z - 4n\sigma^2 &= 0 \\ 4z^3 - \frac{9}{2}z^2 + 3n\sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Eliminiert man hieraus nach einander z^4 , z^3 und z^2 nach einer der bekannten Methoden und setzt der Kürze wegen

$$\frac{128\sigma - 9}{27} = t \quad (147)$$

so erhält man schliesslich die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{16\sigma}{3}(nt - 1) \cdot z + 2\sigma n(1 - t^2) &= 0 \\ (1 - t^2)z + \frac{16\sigma}{3}(t - n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Hieraus ergibt sich durch Elimination von z die Resultante:

$$\begin{aligned} 2\sigma n(1 - t^2)^2 - \left(\frac{16\sigma}{3}\right)^2 \cdot (nt - 1)(t - n) &= 0 \\ \text{oder} \quad 9(1 - t^2)^2 - 128\sigma\left(t - \frac{1}{n}\right)(t - n) &= 0 \end{aligned} \quad (149)$$

*) So weit hat auch Schülen a. a. O. die Gleichung 133 diskutiert.

Durch weitere Entwicklung dieser Gleichung zur Bestimmung von n erhält man

$$\begin{aligned} n + \frac{1}{n} &= \frac{128 \sigma (1 + t^2) - 9 (1 - t^2)^2}{128 \sigma t} \\ &= \frac{1 + t^2}{t} - \frac{9 (1 - t^2)^2}{128 \sigma t} \end{aligned}$$

und da (aus 147)

$$128 \sigma = 9 (1 + 3 t) \quad (150)$$

folgt, so wird die Bestimmungsgleichung für n :

$$n + \frac{1}{n} = \frac{1}{t} \cdot \left\{ 1 + t^2 - \frac{(1 - t^2)^2}{1 + 3 t} \right\}$$

Setzt man hierin der Kürze wegen die rechte Seite

$$\frac{1}{t} \cdot \left\{ 1 + t^2 - \frac{(1 - t^2)^2}{1 + 3 t} \right\} = S \quad (151)$$

so wird

$$n + \frac{1}{n} = S \quad (152)$$

Hieraus ergeben sich die Wurzeln

$$\begin{aligned} n_1 &= \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(S + \sqrt{S^2 - 4} \right) \\ n_2 &= \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(S - \sqrt{S^2 - 4} \right) \end{aligned} \quad (153)$$

wo unter $\sqrt{S^2 - 4}$ der absolute Wert zu verstehen ist.

Aus 151 folgt nach einigen Reduktionen

$$\begin{aligned} S - 2 &= \frac{(1 - t)^3}{1 + 3 t} \\ \text{und} \quad S + 2 &= \frac{(5 - t) (1 + t)^2}{1 + 3 t} \\ \text{folglich} \quad S^2 - 4 &= \frac{(5 - t) (1 + t)^2 \cdot (1 - t)^3}{(1 + 3 t)^2} \end{aligned} \quad (154)$$

Der Wert für die Doppelwurzel selbst folgt aus 148:

$$z = \frac{16 \sigma}{3} \cdot \frac{n - t}{1 - t^2}$$

oder (nach 150)

$$\begin{aligned} z &= \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{128} \cdot \frac{(1 + 3 t) (n - t)}{1 - t^2} \\ z &= \frac{3}{8} \cdot \left\{ \frac{n (1 + 3 t)}{1 - t^2} - \frac{t (1 + 3 t)}{1 - t^2} \right\} \end{aligned} \quad (155)$$

Um n herauszubringen, hat man (aus 153, 154)

$$S = 2 + \frac{(1-t)^3}{1+3t}$$

$$n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-t)^3}{1+3t} \pm \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{1+3t} \cdot \sqrt{(5-t)(1-t)} \quad (156)$$

$$\frac{n(1+3t)}{1-t^2} = \frac{1+3t}{1-t^2} + \frac{1}{2} \frac{(1-t)^2}{1+t} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(5-t)(1-t)}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in 155 und gehörige Reduktion erhält man

$$z = \frac{3}{16} \left\{ 3 + t \pm \sqrt{(5-t)(1-t)} \right\} \quad (157)$$

Von diesen beiden Werten entspricht der mit dem oberen Vorzeichen dem Werte n_1 , sodass also

$$z_1 = \frac{3}{16} \left\{ 3 + t + \sqrt{(5-t)(1-t)} \right\} \quad (158)$$

wird. Dies ist aber die grössere der beiden Doppelwurzeln, folglich liegt sie im minimum von $F(z)$.

Es ist nun zu untersuchen ob z_1 zwischen 2σ und 1 liegt. Der grösste hier in Betracht kommende Wert von $2\sigma = 2(1-s)$ ist der dem kleinsten Wert von s d. i. $\frac{23}{32}$ entsprechende, also $2 \left(1 - \frac{23}{32}\right) = \frac{9}{16}$.

Da nun der dem zweiten Wendepunkt zugehörige Wert $z = \frac{3}{4}$ offenbar kleiner ist als z_1 , so ist um so mehr $\frac{9}{16} < z_1$, folglich unter allen Umständen $2\sigma < z_1$.

Es fragt sich ferner ob $z_1 \leq 1$

$$\text{oder (158) ob } \frac{3}{16} \left\{ 3 + t + \sqrt{(5-t)(1-t)} \right\} \leq 1 \quad (159)$$

$$\text{oder } 3 \sqrt{(5-t)(1-t)} \leq 7 - 3t \quad (160)$$

$$\text{Nach 147 ist } t = \frac{119 - 128s}{27},$$

$$7 - 3t = 7 - \frac{119 - 128s}{9} = \frac{128s - 56}{9}$$

$$7 - 3t = \frac{8}{9} (16s - 7)$$

d. i. aber positiv, da $s > \frac{1}{2}$. Folglich ändert sich die Beziehung 160 nicht, wenn beide Seiten quadriert werden:

$$9(5-t)(1-t) \leq (7-3t)^2$$

woraus durch Reduktion

$$0 \leq 1 + 3t$$

und wenn für t der obige Wert gesetzt wird,

$$0 \leq 128(1-s)$$

Hier ist aber das obere Zeichen das richtige, also auch in 159:

$$z_1 < 1.$$

Die Doppelwurzel z_1 liegt also unbedingt zwischen 2σ und 1.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich für den Fall $s > \frac{23}{32}$ folgendes Resultat: (161)

Die Gleichung $F(z) = 0$ hat zwischen $z = 2\sigma$ und $z = 1$

- I. wenn $F(2\sigma) < 0$, $F(1) > 0$, $n > n_1$ ist, eine reelle Wurzel,
- II. wenn $F(2\sigma) < 0$, $F(1) > 0$, $n < n_1$ ist, drei reelle Wurzeln,
- III. wenn $F(2\sigma) > 0$, $F(1) > 0$, $n < n_1$ ist, zwei reelle Wurzeln,
- IV. wenn $F(2\sigma) > 0$, $F(1) < 0$, $n < n_1$ ist, eine reelle Wurzel,
- V. wenn $F(2\sigma) > 0$, $F(1) > 0$, $n > n_1$ ist, keine reelle Wurzel.

Setzt man der Kürze wegen

$$2(1-s)(4s-1) = \varrho \tag{161a}$$

und für n wieder $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, so erhält man aus 161 mit Rücksicht auf 141, 142 folgendes Ergebnis: (162)

Das rechtwinklige Parallelepipid hat unter der Voraussetzung $s \geq \frac{23}{32}$, wenn es um eine mit c parallele Achse gedreht wird, im zweiten Drehungsgebiet

- | | | | |
|-----------|------------------------------|--|--|
| I. wenn | $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ | $\left\{ \begin{array}{l} < \varrho \\ > \frac{1}{\varrho} \\ > n_1 \end{array} \right.$ | eine Gleichgewichtslage (stabil).*) |
| II. wenn | $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ | $\left\{ \begin{array}{l} < \varrho \\ > \frac{1}{\varrho} \\ < n_1 \end{array} \right.$ | drei Gleichgew. (stabil, labil, stabil). |
| III. wenn | $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ | $\left\{ \begin{array}{l} > \varrho \\ < \frac{1}{\varrho} \\ < n_1 \end{array} \right.$ | eine Gleichgew. (labil). |
| IV. wenn | $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ | $\left\{ \begin{array}{l} > \varrho \\ > \frac{1}{\varrho} \\ < n_1 \end{array} \right.$ | zwei Gleichgew. (labil, stabil). |
| V. wenn | $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ | $\left\{ \begin{array}{l} > \varrho \\ > \frac{1}{\varrho} \\ > n_1 \end{array} \right.$ | keine Gleichgew. |

*) Stabil und labil ist hier nur auf die Drehungsachse zu beziehen.

Die Bedingungen, welche durch die anderen schon von selbst erfüllt sind, sind eingeklammert.

Hierzu fügen wir noch die Bedingungen (141, 142) für $s \leq \frac{23}{32}$ *): 162 a

$$\begin{array}{l} \text{VI. wenn} \\ \text{VII. wenn} \end{array} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} < \varrho \\ > \frac{1}{\varrho} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{so giebt es} \\ \text{eine Gleichgewichtslage (stabil).} \\ \\ \text{keine Gleichgew.} \end{array}$$

Ist $s < \frac{1}{2}$, so ist in allen Bedingungen $1 - s$ statt s zu setzen.

Was die Stabilität des Gleichgewichts in den Fällen (162 I, II, IV, VI) betrifft, so ist dieselbe eine vollkommene, wenn (s. Fig. 22) $H G < c$ ist. Es ist aber $H G = \frac{x}{\sin \varphi_2}$, also die Bedingung für vollkommene Stabilität

$$\frac{x}{\sin \varphi_2} < c,$$

$$\text{oder, da (aus 134) } \cotg \varphi_2 = \frac{2 a b (1 - s)}{x^2},$$

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi_2} = 1 + \frac{4 a^2 b^2 (1 - s)^2}{x^4}, \text{ also}$$

$$\frac{x^2}{\sin^2 \varphi_2} = x^2 + \frac{4 a^2 b^2 (1 - s)^2}{x^2} \text{ folgt,}$$

so wird die Stabilitätsbedingung

$$x^2 + \frac{4 a^2 b^2 (1 - s)^2}{x^2} < c^2$$

oder $\frac{x}{b} = z$ gesetzt,

$$\left(\frac{c}{b} \right)^2 > z^2 + 4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \cdot \frac{(1 - s)^2}{z^2} \tag{163}$$

Hierin ist für z die Wurzel der Gleichung $F(z) = 0$ zu setzen, für welche $F(z)$ aus dem Negativen ins Positive übergeht. Diese Wurzel muss nach irgend einer der bekannten Methoden bestimmt werden, wenn s und $\frac{a}{b}$ gegebene Zahlenwerte haben.

Allgemein lässt sich der genaue Grenzwert von $\left(\frac{c}{b} \right)$ für die Stabilität nicht angeben.

Es findet aber sicher Stabilität statt, wenn c grösser als das maximum von $H G$ ist. Letzteres tritt aber für den kleinsten Wert von x oder z ein, nämlich für $z = 2 \sigma = 2 \cdot (1 - s)$. Dann folgt aus 163

$$\left(\frac{c}{b} \right)^2 > 4 (1 - s)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \tag{164}$$

Wenn die Bedingung 164 erfüllt ist, so ist das in den oben angegebenen Fällen (143, 161, 162) stattfindende Gleichgewicht vollkommen stabil.

Ist die Drehungsachse mit a parallel, so ist in allen Bedingungen a mit c zu vertauschen. Die Bedingung 164 kann dann natürlich nicht erfüllt sein.

*) Diese hat bereits Schülen a. a. O. angegeben, ebenso die Bedingungen für das 1. Drehungsgebiet.

C. Das dritte Drehungsgebiet.

Das Verhalten des Parallelepipeds im dritten Drehungsgebiet erhält man am einfachsten aus den Bedingungen des ersten Gebiets, wenn darin a mit b vertauscht und $90^\circ - \varphi$, statt φ_1 gesetzt wird.

In der aufrechten Lage (b horizontal, a vertikal) findet daher Stabilität statt (s. 123)

$$\text{wenn } \left(\frac{b}{a}\right)^2 > 6s(1-s) \text{ ist.}$$

Da $\frac{b}{a} < 1$ vorausgesetzt ist, so kann diese Bedingung nur für solche Werte von s erfüllt sein, für welche $6s(1-s) < 1$ oder (s. 79)

$$\left. \begin{aligned} s &> \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} \text{ d. i. } > 0,7887 \\ \text{und für } s < \frac{1}{2}, \quad s &< \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}} \text{ d. i. } < 0,2113 \end{aligned} \right\} \quad (164a)$$

ist. Im ersten Gebiet ist in diesem Falle die aufrechte Lage unbedingt stabil. Ist aber die Bedingung 164 nicht erfüllt,

$$\text{also } \left(\frac{b}{a}\right)^2 < 6s(1-s)$$

$$\text{oder } \left(\frac{a}{b}\right)^2 > \frac{1}{6s(1-s)},$$

so ist die aufrechte Lage labil, es giebt aber vorher eine schiefe stabile Lage, wenn (s. 131)

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq 2(1-s)(4s-1)$$

$$\text{oder } \left(\frac{a}{b}\right)^2 \leq \frac{1}{2(1-s)(4s-1)} \text{ ist } \cdot \left(s > \frac{1}{2}\right) \quad (165)$$

$$\text{Ist (s. 131) } \left(\frac{a}{b}\right)^2 < 2(1-s)(4s-1)$$

also im ersten Gebiet keine stabile Lage, so kann die Bedingung 165 um so weniger erfüllt sein, dann giebt es also im dritten Gebiet auch keine. Der Drehungswinkel für die stabile Lage (165) ist aus der Gleichung (s. 125)

$$\cotg^2 \varphi_3 = 12 \left(\frac{a}{b}\right)^2 s(1-s) - 2 \quad (166)$$

zu bestimmen. Dieses schiefe stabile Gleichgewicht ist übrigens noch an eine Bedingung für s gebunden. Da $\left(\frac{a}{b}\right)^2 > 1$ ist, so muss um so mehr $\frac{1}{2(1-s)(4s-1)} > 1$ sein oder $2(1-s)(4s-1) < 1$.

Wird diese Bedingung weiter entwickelt, so wird sie schliesslich

$$0 < \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(s - \frac{3}{4}\right)$$

ist also nur für $s > \frac{3}{4}$ erfüllt.

Im dritten Drehungsgebiet kann also ein schiefes stabiles Gleichgewicht stattfinden wenn $s < \frac{3}{4}$ d. i. $s < 0,75$ ebenso (für $s < \frac{1}{2}$) wenn $s > \frac{1}{4}$ oder $s > 0,25$ ist. Letzteres ist (nach 127) vollkommen stabil.

Aus den Abschnitten A und C folgt für das erste Drehungsgebiet:

- I. wenn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} > 6s(1-s), \\ > e \end{array} \right.$ eine Gleichgewichtslage,
 II. wenn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} < 6s(1-s), \\ > e \end{array} \right.$ zwei Gleichgewichtslagen,
 III. wenn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < e$ eine Gleichgewichtslage

und für das dritte Drehungsgebiet:

- I. wenn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{1}{6s(1-s)}$ eine Gleichgewichtslage,
 II. wenn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} > \frac{1}{6s(1-s)} \\ < \frac{1}{e} \end{array} \right.$ zwei Gleichgewichtslagen,
 III. wenn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} > \frac{1}{e} \\ \left(> \frac{1}{6s(1-s)} \right) \end{array} \right.$ eine Gleichgewichtslage.

Mit Hilfe der vorstehenden Uebersicht*) ist man nun leicht im Stande für gegebene Werte von s , a , b die sämtlichen vorhandenen Gleichgewichtslagen zu bestimmen. Es mag noch bemerkt werden, dass wenn das Parallelepipod aus einer geraden (aufrechten) Lage um 90° , also in eine andere gerade Lage gedreht wird, immer abwechselnd eine stabile (wenigstens in Bezug auf die Drehungsrichtung) und eine labile auf einander folgen müssen.

X.

Die Gewichtslagen eines schwimmenden Würfels.

Das erste Drehungsgebiet eines Würfels für eine beliebige horizontale Drehungsachse ist in Abschn. VI D erschöpfend behandelt.

Im zweiten und dritten Drehungsgebiet kann der Wasserschnitt ein Fünfeck, Dreieck, Sechseck, Trapez sein. In allen Fällen wird von einer oder von beiden Grundflächen je ein Dreieck abgeschnitten und es soll nun zunächst die erste Gleichgewichtsbedingung dafür untersucht werden.

Es stelle Fig. 23 die obere Würfel­fläche vor, von der das Dreieck BHG eintaucht. Es sei $LM \parallel BC$, $JK (\parallel GH)$ habe die Richtung der Drehungsachse und bilde mit LM den Winkel ω , sodass also auch $W \cdot BHG = \omega$. Es sei ferner $EONF \perp GH$, NF die $(+x)$ Richtung und NG die $(+y)$ Richtung.

*) sowie der in 162 enthaltenen und der früher entwickelten Stabilitätsbedingungen.

Dann ist die erste Gleichgewichtsbedingung (98)

$$\int x y \, d f = 0$$

$$\left(\int d f = B H G \right)$$

Bezeichnet man $N H$ mit u , $N G$ mit v , $B P$ ($\perp G H$) mit h und $B H$ mit ϱ so findet man für das Dreieck $H P B$ (wenn der Koordinatenanfangspunkt nach H gelegt wird)

$$\int x y \, d f = \frac{h^4}{8} \cotg^2 \omega - u \cdot \frac{h^3}{6} \cotg \omega^*)$$

und für das Dreieck GPB (wenn der Anfangspunkt der Koordinaten nach G gelegt wird)

$$\int x y \, d f = v \cdot \frac{h^3}{6} \tg \omega - \frac{h^4}{8} \tg^2 \omega$$

also für das ganze Dreieck HGB :

$$\int x y \, d f = \frac{h^3}{6} (v \tg \omega - u \cotg \omega) + \frac{h^4}{8} (\cotg^2 \omega - \tg^2 \omega) = 0$$

$$\int x y \cdot d f = h^3 \left\{ \frac{1}{6} (v \tg \omega - u \cotg \omega) + \frac{h}{8} (\cotg^2 \omega - \tg^2 \omega) \right\} = 0 \quad (167)$$

Wird die Seite des Quadrats mit a bezeichnet, so ist, wie man leicht findet,

$$u = \left(\varrho - \frac{a}{2} \right) \cos \omega + \frac{a}{2} \sin \omega$$

$$v = \frac{a}{2} \cos \omega - \left(\frac{a}{2} - \varrho \tg \omega \right) \sin \omega$$

Setzt man diese Werte in 104 ein, so erhält man nach einigen Reduktionen die Bedingungsgleichung

$$\int x y \, d f = \frac{h^3 (\cos \omega - \sin \omega)}{24 \sin \omega \cdot \cos^2 \omega} \cdot \left\{ 2 a \cdot \cos \omega - \varrho (\cos \omega + \sin \omega) \right\} = 0 \quad (168)$$

wo ω zwischen den Grenzen

$$0 < \omega \leq \frac{\pi}{4}$$

angenommen werden kann. Unter dieser Voraussetzung hat die Gleichung 168 nur zwei Lösungen

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega - \sin \omega = 0 \text{ also } \omega = \frac{\pi}{4} \\ \text{und } 2 a \cos \omega - \varrho (\cos \omega + \sin \omega) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Aus der letzteren folgt

$$\varrho = \frac{2 a \cos \omega}{\cos \omega + \sin \omega}$$

Da nun (s. Fig. 19) $BH < a$ und $BG < a$ oder $\varrho < a$ und $\varrho \cdot \tg \omega < a$ sein muss, so unterliegt die zweite Lösung den Bedingungen

$$\frac{2 a \cos \omega}{\cos \omega + \sin \omega} < a$$

woraus

$$\cos \omega < \sin \omega \quad (169a)$$

*) Die Entwicklung dieser Formeln kann ich aus Raummangel hier nicht mitteilen.

$$\begin{aligned} \text{und} \quad & \frac{2 a \cos \omega \cdot \operatorname{tg} \omega}{\cos \omega + \sin \omega} < a \\ \text{woraus} \quad & \sin \omega < \cos \omega \end{aligned} \quad (169b)$$

folgt. Die beiden Bedingungen 169 a, b sind aber unerfüllbar, folglich fällt die zweite Lösung 169 weg und es bleibt als einzige Lösung der Bedingungsleichung (168)

$$\omega = \frac{\pi}{4} \quad (170)$$

„Es kann also für einen fünfeckigen oder dreieckigen Wasserschnitt nur Gleichgewicht stattfinden, wenn die Drehungsachse der Diagonale einer Fläche parallel ist“.

Für den fünfeckigen Wasserschnitt erhält man unter dieser Voraussetzung ($\omega = \frac{\pi}{4}$), wenn die Kathete des abgeschnittenen Dreiecks mit x bezeichnet und der Einfachheit wegen die Kante $a = 1$ gesetzt wird, als zweite Gleichgewichtsbedingung die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} 2 T \left\{ z^2 + (1 - s)^2 \right\} &= z^3 (1 - x) + z^2 (1 - s) \\ \text{wo} \quad 2 T &= \frac{1}{6} + (1 - x)^2 - \frac{x^4}{12} \\ \text{und} \quad z &= 1 - x + \frac{x^3}{6} \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

und x zwischen 0 und 1 liegen muss.

Aus Mangel an Raum muss ich die ausführliche Diskussion dieser Gleichung*) mir leider versagen und mich auf Mitteilung des Resultats beschränken. Die Gleichung 171 hat (zwischen $x = 0$ und $x = 1$) eine reelle Wurzel, wenn

$$s < \frac{4 + \sqrt{2}}{7} \quad \text{oder} < 0,7735. \quad (172)$$

Für die schiefe Gleichgewichtslage im ersten Drehungsgebiet folgt aus 82, wenn darin $\omega = \frac{\pi}{4}$ gesetzt wird, die Bedingung (für $s > \frac{1}{2}$)

$$1 \leq \frac{(1 - s)^2}{6 s (1 - s) - 1}$$

woraus $s > \frac{4 + \sqrt{2}}{7}$ oder $> 0,7735$ folgt.

Hat also ein in aufrechter Lage labil schwimmender Würfel im ersten Drehungsgebiet keine neue Gleichgewichtslage, so hat er sicher eine im zweiten Gebiet (Fünfeckiger Wasserschnitt), wenn die obere Fläche mit einer Ecke eintaucht. Es lässt sich auch zeigen, dass dieses Gleichgewicht stabil ist, worauf ich jedoch hier ebenfalls nicht näher eingehen kann.

Für $s < \frac{1}{2}$ tritt dieses stabile Gleichgewicht im zweiten Drehungsgebiet ein,

wenn $s > \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$ d. i. $> 0,2265$ ist.

*) ebenso wie ihre Ableitung.

Taucht die obere Fläche des Würfels, wenn er aus der vorigen Lage in derselben Richtung weiter gedreht wird, tiefer ein, so kann bei genügend grossem specif. Gewicht der dreieckige Wasserschnitt entstehen. Die untere Grenze für s tritt ein, wenn der Wasserschnitt aus drei Flächendiagonalen gebildet wird. Dann ist das Volumen des über dem Wasser befindlichen Körperteils

$$\frac{a^3}{6} = a^3 (1 - s)$$

woraus

$$s = \frac{5}{6}$$

als untere Grenze folgt.

Da die Bedingung 170 für jede der drei durchschnittenen Würfelflächen stattfinden muss, so muss der dreieckige Wasserschnitt eine symmetrische Lage (senkrecht zu einer Würfeldiagonale) haben. Die Bedingungen ergeben, dass dieses Gleichgewicht stets labil ist.

Wenn $s < \frac{5}{6}$ (bzw. $> \frac{1}{6}$) ist, so geht der fünfeckige Wasserschnitt bei weiterem

Drehen in einen sechseckigen über. In diesem Falle wird von je zwei parallelen Flächen ein Dreieck abgeschnitten. Projiziert man das Dreieck der unteren Grundfläche auf die obere, so erhält man in der letzteren (s. Fig. 21) die beiden Dreiecke $G B H$ und $D L M$. Nach 118, 97, 98 ist dann die erste Gleichgewichtsbedingung

$$\int x y \, d f - \int x y \, d f = 0$$

wo $\int d f = G B H$ und $\int d f = L D M$ ist und in beiden Summen die $(+ x)$ Achsen entgegengesetzte Richtung, die $(+ y)$ Achsen gleiche Richtung haben. Giebt man den letzteren auch entgegengesetzte Richtungen ($N G$ und $N_2 L$) so wird die erste Gleichgewichtsbedingung

$$\int x y \cdot d f + \int x y \, d f = 0 \quad (173)$$

Das erste Glied hat nun (s. 168) den Wert

$$\int x y \, d f = \frac{h^3 (\cos \omega - \sin \omega)}{24 \sin \omega \cdot \cos^2 \omega} \cdot \left\{ 2 a \cos \omega - \varrho (\cos \omega + \sin \omega) \right\} \quad (174)$$

und oben wurde gezeigt, dass der Faktor $2 a \cos \omega - \varrho (\cos \omega + \sin \omega)$ nicht gleich Null sein kann und man sieht leicht ein, dass er stets positiv ist, wenn ω zwischen 0 und 45° liegt. Dasselbe gilt auch von den übrigen Faktoren. Die Summe $\int x y \cdot d f$ ist also positiv und nur für $\omega = 45^\circ$ gleich Null. Haben nun h_1 und ϱ_1 für das Dreieck $L D M$ dieselbe Bedeutung, wie h und ϱ für das Dreieck $G B H$, so ist (nach 174)

$$\int x y \cdot d f = \frac{h_1^3 \cdot (\cos \omega - \sin \omega)}{24 \cdot \sin \omega \cdot \cos^2 \omega} \cdot \left\{ 2 a \cos \omega - \varrho_1 (\cos \omega + \sin \omega) \right\} \quad (175)$$

und dieser Ausdruck ist ebenfalls (wie 174) für alle Werte von ω zwischen 0 und 45° positiv und nur für $\omega = 45^\circ$ gleich Null. Daher ist $\omega = 45^\circ$ die einzige Lösung der Gleichung 173. Es muss also auch beim Sechseckschnitt das von der Grundfläche abge-

schnittene Dreieck gleichschenkelig sein. Da dies aber für alle sechs Dreiecke der Fall sein muss, so ergibt sich:

In der Gleichgewichtslage hat der sechseckige, wie der dreieckige Wasserschnitt stets eine symmetrische Lage (senkrecht zu einer Würfel-diagonale).

Für $s = \frac{1}{2}$ ist das Sechseck ein regelmässiges und Schülen*) hat bereits gezeigt, dass das Gleichgewicht in diesem Falle stabil ist.

Ueber den trapezförmigen Wasserschnitt, ebenso über den sechseckigen (wenn s zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$ liegt), sind meine Untersuchungen noch nicht abgeschlossen.

Wird der Würfel um eine mit einer Kante parallele Achse gedreht, so bildet er einen speciellen Fall des rechtwinkligen Parallelepipeds, den bereits Schülen*) ausführlich behandelt hat.

*) a. a. O.

Druckfehler.

In der Figurentafel l ω statt w.



Inhalt.

	Seite
I. Gleichgewicht und Stabilität eines homogenen schwimmenden Körpers	3
II. Stabilität eines prismatischen Körpers	4
III. Stabilität eines beliebigen homogenen Körpers, Duhamel'scher Satz	6
IV. Uebergang von einem (labilen) Gleichgewicht ins andere (stabile). Gerades Prisma im ersten Drehungsgebiet	7
V. Gerades Prisma von besonderer Gestalt	11
VI. Das regelmässige gerade Prisma	14
A. Das dreiseitige Prisma	15
B. Der Kreiscylinder	20
C. Das vierseitige Prisma	24
D. Der Würfel	26
E. Das n seitige Prisma	27
F. Vergleich von Prismen mit verschiedener Seitenzahl	29
VII. Das zweite Drehungsgebiet des geraden Prismas	30
VIII. Das dritte Drehungsgebiet des geraden Prismas	36
IX. Die Gleichgewichtslagen eines rechtwinkligen Parallelepipeds	37
X. Die Gewichtslagen eines schwimmenden Würfels	48

Table

Faint, illegible text, likely a table or list of contents, spanning the middle section of the page.

