Beiträge

zum

geometrischen Unterricht.

Von

C. Frenzel.

Beilage zum Programm des Progymnasiums
zu Lauenburg i. Pom.

Ostern 1883.

1883. Progr. Nr. 120.

Die vorliegende Abhandlung verfolgt den Zweck, einige besonders wichtige Partien der elementaren Planimetrie in einer den Anforderungen der Wissenschaft genügenden und der Fassungskraft der Schüler angemessenen Weise darzustellen. Dass das Lehrbuch von Kambly, welches unter allen mathematischen Leitfäden die relativ grösste Verbreitung geniesst und sich auch immer noch in den Händen meiner Schüler befindet, in wissenschaftlicher Hinsicht sehr verbesserungsbedürftig ist, dürfte wohl fast allgemein zugestanden werden; wie sollte es auch anders sein, wenn ein Lehrbuch im Laufe einer langen Reihe von Jahren, in denen die wissenschaftliche Forschung und die Methodik des mathematischen Unterrichts stetige Fortschritte gemacht haben, so gut wie gar keine nennenswerten Verbesserungen erfahren hat! Unter den anderen, insbesondere in letzter Zeit zahlreich erschienenen Lehrbüchern der Geometrie, die ich zum grössten Teil nicht nur aus Rezensionen sondern aus eigener Anschauung kennen zu lernen mich bemühte, habe ich leider keins gefunden, welches meinem Geschmack vollkommen entspricht. Am besten gefällt mir noch das kleine Lehrbuch von Mehler; sein Inhalt und die Form der Darstellung sind bis auf unwesentliche Ausnahmen durchaus korrekt. Doch ist die Darstellung stellenweise gar zu knapp, die ausführliche Lösung von Musteraufgaben, die einen wesentlichen Bestandteil jedes Lehrbuchs bilden sollte, fehlt gänzlich, endlich müsste die Trigonometrie von Grund aus eine Neubearbeitung erfahren, in der statt des Bogenmasses, welches ja für den Berufsmathematiker unentbehrlich ist, das Gradmass zu Grunde zu legen wäre. Die Lehrbücher von Lieber und v. Lühmann, welche sich besonders in unserer Provinz einer ausgedehnten und wachsenden Verbreitung erfreuen, sind insbesondere in ihrem geometrischen Teil (incl. Trigonometrie) den Kambly'schen Büchern gar zu ähnlich; sie gehen in der Reform nicht weit genug und lassen eine korrekte Ausdrucksweise an vielen Stellen vermissen. Andere Lehrbücher hingegen, wie diejenigen von Schlegel, Becker und das mit letzterem in manchen Punkten verwandte Lehrbuch von Henrici und Treutlein, welche sämmtlich der Bibliothek jedes Mathematikers zur Zierde gereichen würden, scheinen mir in der Reform der euklidischen Methode zu weit zu gehen. Mag diesen Lehrbüchern auch die Zukunft beschieden sein, was ich nicht glaube, so brechen dieselben doch meist ohne Not mit dem Althergebrachten. Was man der antiken Geomotrie, wie mir scheint, mit Recht zum Vorwurf machen kann, ist der Umstand, dass sie die einzelnen Lehrsätze zu individuell behandelt, ihren Zusammenhang nicht in genügender Weise hervortreten lässt und allgemeiner Prinzipien, welche eben diesen Zusammenhang vermitteln, fast gänzlich entbehrt. Auf die Beseitigung dieses Uebelstandes muss sich aber eine Reform des geometrischen Unterrichts meiner Ansicht nach beschränken. Reformen jedoch, welche über dieses Ziel soweit hinausschiessen, wie das für Progymnasien geschriebene Lehrbuch der Geometrie von Bunkofer (Freiburg im Breisgau, Herder'sche Verlagsbuchhandlung), müssten von der Kritik energisch zurückgewiesen und nicht, wie dies vom Rezensenten in der Hoffmann'schen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (XII. Jahrgang, pag. 273 ff.) geschieht, mit Beifall begrüsst werden.

Die vorliegende Abhandlung hat sich engere Grenzen für diese Reform gesteckt. Auf den Inhalt der einzelnen Abschnitte einzugehen, halte ich für überflüssig. Entweder spricht derselbe für sich selbst und rechtfertigt die Veröffentlichung dieser Arbeit, oder er findet nicht den Beifall meiner geehrten Herren Fachkollegen; im letzteren Falle würde eine ausführlichere Motivierung des Inhalts an dem Urteil nichts wesentliches zu ändern vermögen. Nur in Bezug auf den Anhang bemerke ich, dass ich zur Hinzufügung desselben durch die Verhandlungen und Beschlüsse der zehnten Direktorenkonferenz (Posen) veranlasst worden bin.

Erster Abschnitt.

Von den parallelen Linien.

§ 1.

Definition: Zwei gerade Linien heissen parallel, wenn sie in einer Ebene so liegen, dass sie sich, wie weit man sie auch verlängert, niemals schneiden.

§ 2.

Fig. 1. Es sei eine gerade Linie AB und ausserhalb derselben ein Punkt C gegeben. Unter den unzählig vielen Linien, welche durch den Punkt C gehen, und deren jede die Linie AB in einem Punkte schneidet, befindet sich eine und nur eine Linie, welche mit AB keinen Punkt gemeinsam hat, nämlich die zu AB parallele Gerade DE.

Grundsatz (3. geometrischer G.*): Durch einen Punkt ist zu einer geraden Linie nur eine Parallele möglich.

§ 3.

1. Lehrsatz: **Wenn eine gerade Linie eine von zwei Parallelen schneidet, so schneidet sie auch die andere.**

Fig. 2. Vor. AB || CD und EF schneidet AB.

Beh. EF schneidet CD.

Bew. (indirekt). Angenommen Linie EF schnitte CD nicht, so müsste sie parallel zu CD sein. Dann würden durch den Punkt G, in welchem sich nach der Voraussetzung die Linien AB und EF schneiden, zwei Linien gehen, die beide parallel zu CD wären; dies widerspricht aber dem 3. geom. Grundsatze, folglich ist das Gegenteil der Behauptung falsch, die Behauptung also richtig.

2. Lehrsatz: **Wenn eine gerade Linie der einen von zwei Parallelen parallel ist, so ist sie auch der andern parallel;**

oder in anderer Fassung:

Wenn zwei gerade Linien einer dritten parallel sind, so sind sie auch einander parallel.

Vor. AB || CD und EF || AB.

Beh. EF || CD.

*) Die beiden vorhergehenden geometrischen Grundsätze lauten:
1) Zwischen 2 Punkten ist nur eine einzige gerade Linie möglich.
2) Zwischen 2 Punkten ist die gerade Linie die kürzeste.
Ausser den geometrischen giebt es noch allgemeine Grundsätze, (Kambly II, § 5).

Bew. (indirekt). Angenommen EF schnitte CD etwa im Punkte G, so würden durch diesen Punkt zwei Linien EF und CD gehen, die beide zu AB parallel wären; dies widerspricht aber dem 3. geom. Grundsatze, folglich ist unsere Annahme falsch, die Behauptung also richtig. —

Anmerkung. Unter einem indirekten Beweise versteht man einen solchen, in welchem das Gegenteil der Behauptung als unmöglich bewiesen wird; in einem direkten Beweise wird unmittelbar gezeigt, dass auf Grund der vorhergehenden Grund- und Lehrsätze die Behauptung richtig ist.

§ 4.

Definitionen. Um zu untersuchen, ob zwei gerade Linien parallel sind oder nicht pflegt man dieselben durch eine dritte Gerade zu schneiden. Es entstehen dann 8 Winkel α, β, ... ϑ, und unter diesen unterscheidet man 3 Arten von Winkelpaaren, nämlich: Fig. 3.

1) Gegenwinkel oder korrespondierende Winkel (α und ε, β und ζ, γ und η, δ und ϑ), d. s. solche Winkel, welche auf derselben Seite der durchschneidenden und auf derselben Seite der geschnittenen Linien liegen.
2) Wechselwinkel (α und η, β und ϑ, γ und ε, δ und ζ), d. s. solche Winkel welche auf verschiedenen Seiten der durchschneidenden und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien liegen.
3) Entgegengesetzte Winkel (α und ϑ, β und η, γ und ζ, δ und ε), d. s. solche Winkel, welche auf derselben Seite der durchschneidenden, aber auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien liegen.

Die Winkel α, β, η, ϑ, welche auf der äusseren Seite der parallelen Linien liegen, nennt man äussere, die anderen γ, δ, ε, ζ hingegen innere Winkel, demnach sind:

α und η, β und ϑ äussere Wechselwinkel;
γ und ε, δ und ζ innere „ .
α und ϑ, β und η äussere entgegengesetzte Winkel;
γ und ζ, δ und ε innere „ „

§ 5.

Grundsatz (4. geom.): Verschiebt man einen Winkel längs des einen Schenkels, so ändert der andere Schenkel seine Richtung nicht, bleibt also der ursprünglichen Richtung parallel.

§ 6.

Lehrsatz: **Wenn zwei parallele Linien von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind**

1) je zwei Gegenwinkel gleich,

2) je zwei Wechselwinkel gleich, und

3) beträgt die Summe je zweier entgegengesetzter Winkel 2 R.

Vor. AB || CD.

Beh. 1) $\sphericalangle\ \alpha = \varepsilon$ (ebenso $\beta = \zeta$, $\gamma = \eta$ und $\delta = \vartheta$) Fig. 3.

2) $\sphericalangle\ \alpha = \eta$ (ebenso $\beta = \vartheta$, $\gamma = \varepsilon$ und $\delta = \zeta$)

3) $\sphericalangle\ \alpha + \vartheta = 2R$ (ebenso $\beta + \eta = 2R$, $\gamma + \zeta = 2R$ und $\delta + \varepsilon = 2R$). Fig. 4.

Bew. ad 1 (indirekt). Denken wir uns den Winkel α längs der Linie EF verschoben, bis sein Scheitelpunkt G mit dem Punkte H zusammenfällt. Wenn nun $\sphericalangle\ \alpha$ nicht gleich ε wäre, so müsste der Schenkel GA eine andere Lage erhalten als HC, etwa die Lage HK, sodass der Winkel AGE nach der Verschiebung die Lage KHG besitzt. Nach dem 4. geom. Grundsatze müsste alsdann HK || GA sein, während nach der Voraussetzung HC = GA st; es würden also durch den Punkt H zwei Linien gehen, die beide parallel zu AB wären, was dem dritten geom. Grundsatze widerspricht. Demnach ist unsere Annahme, dass $\measuredangle\ \alpha = \varepsilon$ sei, unrichtig, die Behauptung also richtig.

ad 2. Zum Beweise nehmen wir den Winkel ε zu Hülfe; dann ist

Fig. 5.

$\measuredangle\ \alpha = \varepsilon$ nach dem 1. Teil dieses Lehrsatzes,
$\measuredangle\ \eta = \varepsilon$ als Scheitelwinkel,

$\measuredangle\ \alpha = \eta$, q. e. d.

ad 3. Zum Beweise nehmen wir den Winkel ε zu Hülfe; dann ist

Fig. 6.

$\measuredangle\ \alpha = \varepsilon$ nach dem 1. Teil dieses Lehrsatzes,
$\measuredangle\ \varepsilon + \vartheta = 2\,R$ als Nebenwinkel,

$\measuredangle\ \alpha + \vartheta = 2\,R$, q. e. d.

§ 7.

Lehrsatz: **Wenn zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und es sind entweder**

1) zwei Gegenwinkel gleich, oder

2) zwei Wechselwinkel gleich, oder

3) es beträgt die Summe zweier entgegengesetzter Winkel 2 R.

so sind die Linien parallel.

Vor. 1) $\measuredangle\ \alpha = \varepsilon$ (oder ?)
2) $\measuredangle\ \alpha = \eta$ (oder ?)
3) $\measuredangle\ \alpha + \vartheta = 2\,R$ (oder ?)

Beh. AB || CD.

Fig. 7.

Bew. ad 1 (indirekt). Angenommen AB wäre nicht parallel CD, dann müsste sich durch den Punkt G eine andere zu CD parallele Gerade ziehen lassen, etwa KL. Ist aber KL || CD, so ist nach dem 1. Teil des vorigen Lehrsatzes

$\measuredangle$ KGE = CHG; nach Vor. ist ferner
$\measuredangle$ AGE = CHG,

$\measuredangle$ KGE = AGE.

Dies ist aber nicht möglich, da der eine dieser Winkel nur ein Teil des anderen Winkels ist, der Teil aber immer kleiner als das Ganze sein muss. Folglich ist unsere Annahme unrichtig, die Behauptung also richtig.

ad 2. Zum Beweise nehmen wir den Winkel ε zu Hülfe; dann ist

Fig. 5.

$\measuredangle\ \alpha = \eta$ nach Vor.
$\measuredangle\ \varepsilon = \eta$ als Scheitelwinkel,

$\measuredangle\ \alpha = \varepsilon$;

α und ε sind aber Gegenwinkel, also sind die beiden Linien AB und CD parallel nach dem 1. Teil dieses Lehrsatzes.

ad 3. Zum Beweise nehmen wir den Winkel ε zu Hülfe; dann ist

Fig. 6.

$\measuredangle\ \alpha + \vartheta = 2R$ nach Vor.,
$\measuredangle\ \varepsilon + \vartheta = 2R$ als Nebenwinkel,

$\measuredangle\ \alpha + \vartheta = \varepsilon + \vartheta$;

subtrahieren wir von beiden gleichen Winkelsummen den Winkel ϑ, so bleibt

$$\sphericalangle\ \alpha = \varepsilon;$$

folglich sind die beiden Linien AB und CD parallel nach dem 1. Teil dieses Lehrsatzes.

Anmerkung: Man nennt diesen zweiten Satz über parallele Linien die Umkehrung des ersten Satzes. Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man nämlich einen neuen Satz, in welchem Vor. und Beh. des alten Satzes ganz oder teilweise mit einander vertauscht sind.

Zweiter Abschnitt.

Die Kongruenz der Dreiecke.

§ 1.

Definition: Zwei beliebige (gradlinig oder krummlinig begrenzte) Figuren heissen kongruent, wenn sie sich so auf einander legen lassen, dass ihre Begrenzungen sich vollkommen decken. Insbesondere sind zwei gradlinig begrenzte Figuren (Dreiecke, Vierecke, . . . Polygone) kongruent, wenn sie sich so auf einander legen lassen, dass sich die Endpunkte der einen Figur mit den entsprechend gelegenen (homologen) Eckpunkten der andern Figur decken; denn dann decken sich nach dem 1. geom. Grundsatze auch sämtliche homologe Seiten und Winkel.

§ 2.

Wir schicken den Sätzen über die Kongruenz der Dreiecke einige Hülfssätze voraus.

1. Hülfssatz: **In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser, und die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite;** — oder in anderer Fassung:

Jede Dreiecksseite ist kleiner als die Summe, aber grösser als die Differenz der beiden andern Seiten. (Kambly II., § 39.)

2. Hülfssatz: **Wenn über derselben Grundlinie zwei Dreiecke errichtet sind und zwei Seiten derselben sich durchschneiden, so ist die Summe der sich schneidenden Seiten grösser als die Summe der sich nicht schneidenden Seiten.**

Beh. (Fig. 8) $AC' + BC > AC + BC'$.

Bew. Bezeichnet man den Schnittpunkt der beiden Seiten AC' und BC' mit F, so ist in den beiden Scheiteldreiecken AFC und BFC':

$$AF + FC > AC$$
$$BF + FC' > BC'$$

Addirt man diese beiden Ungleichheiten, so ergiebt sich

$$AC' + CB > AC + BC', \text{ q. e. d.}$$

die Seiten des einen diejenigen des andern einschliessen, so ist die Summe der einschliessenden grösser als die Summe der eingeschlossenen Seiten.

Beh. (Fig. 9) $AC + BC > AC' + BC'$. Fig. 8 und 9.

Bew. Verlängert man AC' bis zum Durchschnittspunkt F mit BC, so ist in den beiden Dreiecken AFC und BCF:

$$AC + CF > AC' + C'F$$
$$C'F + FB > BC'$$

Addiert man diese beiden Ungleichheiten, so ergiebt sich

$$AC + BC + C'F > AC' + BC' + C'F,$$

mithin $AC + BC > AC' + BC'$, q. e. d.

3. Hülfssatz: **Wenn in einem Dreieck die Grösse eines Winkels sich ändert, während die Grösse der denselben einschliessenden Seiten unverändert bleibt, so wächst mit dem Winkel auch die Länge der demselben gegenüberliegenden Seite.**

Fig. 10. Erläuterung der Figur nebst Vor. und Beh.: Es sei ABC ein beliebiges Dreieck, und zwar sei, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden darf, $AB \leqq AC$. Beschreibt man um den Punkt A mit AC als Radius einen Kreis, und nimmt auf der Peripherie des über der Linie AB liegenden Halbkreises DCE einen beliebigen Punkt C' an, so erhält man durch Verbindung dieses Punktes mit den Punkten A und B ein neues Dreieck ABC', welches mit dem ursprünglichen Dreieck ABC in zwei Seiten übereinstimmt. Bezeichnen wir die Winkel BAC und BAC' mit α und α' und setzen voraus, dass $\sphericalangle\ \alpha' > \alpha$ sei, so lautet die Behauptung: $BC' > BC$.

Bew. Da sich die Seiten AC und BC' der beiden Dreiecke ABC und ABC' schneiden, so ist nach dem vorigen Hülfssatze:

$$AC + BC' > AC' + BC;$$

subtrahieren wir beiderseits die beiden gleichen Strecken AC und AC', so bleibt

$$BC' > BC, \text{ q. e. d.}$$

4. Hülfssatz: **Von einem Punkte auf eine gerade Linie ist nur eine Senkrechte (Normale, Lot) zu fällen möglich; dieselbe ist die kürzeste unter allen Strecken, die man von jenem Punkte nach der geraden Linie ziehen kann und wird deshalb der Abstand des Punktes von der Geraden genannt. Von jeder die Länge des Lotes übertreffenden Länge können zwei Strecken von dem Punkte nach der Geraden gezogen werden; dieselben schliessen alle kürzeren Strecken ein, die längeren aus.**

Fig. 11. Bew. Es sei P ein beliebiger Punkt ausserhalb der Geraden LM, und PA sei $\perp$ LM. Um zunächst zu beweisen, dass PA die einzige Senkrechte von P auf LM ist, nehmen wir an, es gebe ausser PA noch eine zweite Senkrechte PA' auf LM. Dann würden die Winkel PAM und $PA'M$ als Rechte einander gleich sein; dies sind aber Gegenwinkel, folglich würden nach dem ersten Teil des zweiten Lehrsatzes über parallele Linien die Linien PA und PA' parallel sein, was der Definition paralleler Linien widerspricht. — Nehmen wir ferner auf dem Strahle AM beliebige Punkte B, C, D, . . . an und verbinden dieselben mit P, so ist zweitens zu beweisen, dass

$$PA < PB < PC < PD \ldots.$$

ist. Zum Beweise dessen drehen wir die Halbebene oberhalb der Geraden LM, in welcher der Punkt P liegt, um die Gerade LM, bis sie mit der anderen Halbebene unterhalb LM zusammenfällt. Bezeichnen wir die Lage, in welche alsdann der Punkt P gelangt, mit P' und verbinden P' mit A, B, C, . . ., so ist zunächst

$$PA = P'A,\ PB = P'B,\ PC = P'C, \ldots,$$

weil sich diese Strecken beim Aufeinanderliegen der beiden Halbebenen decken. Aus demselben Grunde ist $\sphericalangle\ P'AM = PAM$, also auch $\sphericalangle\ P'AM = R$ und somit $P'AP$ eine gerade Linie. Nach dem 1. und 2. Hülfssatze ist nun

$$PA + P'A < PB + P'B < PC + P'C \ldots, \text{ d. h.}$$
$$2PA < 2PB < 2PC \ldots, \text{ folglich auch}$$
$$PA < PB < PC \ldots.$$

— Drittens ist zu zeigen, dass jede Verbindungsstrecke zwischen P und irgend einem Punkte der Geraden LM, die grösser ist als PA, paarweise vorhanden ist. Zum Beweise drehen wir die Halbebene auf der rechten Seite der Linie PP' um diese Linie, bis sie sich mit der andern Halbebene links deckt. Dann wird der Strahl AM die Lage von AL annehmen, und die Punkte B, C, D, . . . des Strahles AM werden mit denjenigen Punkten B', C', D', . . . des

Strahles AL zur Deckung gelangen, die vom Punkte A bez. dieselbe Entfernung haben, wie die Punkte B, C, D u. s. w. Es ist demnach

$$PA = PA', \; PB = PB', \; PC = PC' \ldots . \; -$$

Endlich geht aus der Figur hervor, dass der Winkelraum, den irgend zwei gleich lange Strecken, z. B. PC und PC', begrenzen, alle kleineren Strecken, z. B. PB und PB' einschliesst, die grösseren Strecken hingegen, z. B. PD und PD' ausschliesst.

§ 3.

Lehrsatz: **Dreiecke sind kongruent, wenn in ihnen entweder**

1) **eine Seite und 2 Winkel** (1. Kongruenzsatz), oder
2) **zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel** (2. K.-S.), oder
3) **zwei Seiten und der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel** (3. K.-S.) oder endlich
4) **die drei Seiten** (4. K.-S.)

bezüglich gleich sind.

ad 1.

1. Teil: Die beiden Dreiecke ABC und A'B'C' mögen übereinstimmen in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Vor. AB = A'B', $\measuredangle\, \alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ Fig. 12.

Beh. $\triangle$ ABC $\cong$ A'B'C'.

Bew. Wir legen das Dreieck ABC so auf das Dreieck A'B'C', dass sich die als gleich vorausgesetzten Seiten AB und A'B' decken, d. h. **A auf A'** und **B auf B'** fällt, und dass das Dreieck ABC auch auf derselben Seite von A'B' liegt, wie das Dreieck A'B'C'. Dann fällt, da nach Vor. $\measuredangle\, \alpha = \alpha'$ ist, AC in die Richtung von A'C', mithin der Punkt C auf den Strahl A'D; ebenso fällt, da nach Vor. $\measuredangle\, \beta = \beta'$ ist, BC in die Richtung von B'C', mithin der Punkt C auch auf den Strahl B'E. Es muss somit der Punkt C in den Schnittpunkt der beiden Strahlen A'D und B'E, d. h. es muss **C auf C'** fallen.

2. Teil: Die beiden Dreiecke mögen übereinstimmen in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel.

Vor. AB = A'B', $\measuredangle\, \alpha = \alpha'$ und $\measuredangle\, \gamma = \gamma'$.

Beh. $\triangle$ ABC $\cong$ A'B'C'.

Bew. Da $\measuredangle\, \alpha = \alpha'$ und $\measuredangle\, \gamma = \gamma'$ ist, so muss auch $\measuredangle\, \beta = \beta'$ sein; denn wären diese Winkel β und β' ungleich, so würde die Winkelsumme in dem einen Dreieck verschieden sein von derjenigen im andern Dreieck, was dem Lehrsatze, dass in jedem Dreieck die Winkelsumme 2R beträgt, widerspricht. Damit ist aber dieser 2. Teil unseres Kongruenzsatzes auf den ersten Teil zurückgeführt.

ad 2.

Der Beweis ist ähnlich wie beim 1. Kongruenzsatz (Kambly II, § 44).

ad 3.

Vor. AC = A'C', BC = B'C', $\measuredangle\, \alpha = \alpha'$; BC > AC und B'C' > A'C'. Fig. 13.

Beh. $\triangle$ ABC $\cong$ A'B'C'.

Bew. Man lege das Dreieck ABC so auf das Dreieck A'B'C', dass sich die als gleich vorausgesetzten Seiten AC und A'C' decken, d. h. **A auf A'** und **C auf C'** fällt, und dass das Dreieck ABC auch auf derselben Seite von A'C' liegt, wie das Dreieck A'B'C'. Dann fällt, da nach Vor. $\sphericalangle\ \alpha = \alpha'$ ist, AB in die Richtung von A'B', mithin der Punkt B auf den Strahl A'D. Aus dem 4. Hülfssatze geht aber hervor, dass es auf diesem Strahle nur einen Punkt giebt, dessen Entfernung von C' gleich der Strecke CB ist, da CB $>$ C'B' ist; B' ist ein solcher Punkt, also muss **B auf B'** fallen.

ad 4.

Der Beweis des 4. Kongruenzsatzes wird mit Hülfe des dritten Hülfssatzes auf den 2. Kongruenzsatz zurückgeführt (Kambly II, § 47).

Dritter Abschnitt.

Die Parallelogrammsätze.

1. Lehrsatz: **In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich, und je zwei derselben Seite anliegende Winkel ergänzen sich zu 2 R.** (Kambly II, § 72).

2. L.-S.: **In jedem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.** (Kambly II, § 78.)

3. L.-S.: **Wenn in einem Viereck entweder**

a) **je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich sind, oder**

b) **je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, oder**

c) **zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel sind, oder endlich**

d) **die Diagonalen sich gegenseitig halbieren,**

so ist dasselbe ein Parallelogramm. (Kambly II, § 76.)

4. L.-S.: **Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind es alle.** (Kamdly II, § 73.)

5. L.-S.: **Im Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.** (Kambly II, § 79.)

6. L.-S.: **Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen einander gleich sind, so ist dasselbe ein Rechteck.**

7. L.-S.: **Im Rhombus stehen die Diagonalen auf einander senkrecht.** (Kambly II, § 80.)

8. L.-S.: **Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen auf einander senkrecht stehen, so ist dasselbe ein Rhombus.**

Zum Beweise der Lehrsätze 1, 3_a und 3_c zieht man eine Diagonale und zeigt, dass die beiden Dreiecke, in welche das Parallelogramm durch diese Diagonale geteilt wird, einander kongruent sind. Zum Beweise der übrigen Lehrsätze sind keine Hülfslinien nötig. Insbesondere werden die beiden Lehrsätze 3_b und 4 ohne Zuhülfenahme der Diagonalen bewiesen; man benutzt zu ihrem Beweise den zweiten Lehrsatz über parallele Linien, und den Satz, dass in jedem Viereck die Winkelsumme 4 R beträgt. —

Vierter Abschnitt.

Sehnen und Tangenten am Kreise.

§ 1.

Aus dem 4. Hülfssatze im II. Abschnitt oder auch mittels der Kongruenzsätze ergeben sich unmittelbar folgende Sätze über das gleichschenklige Dreieck (Kambly II, §§ 62, 64 und 65):

1) Die Linie, welche den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert, halbiert auch die Basis und steht auf ihr senkrecht.
2) Die Linie, welche die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Basis verbindet, steht auf der Basis senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.
3) Die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis gefällte Senkrechte halbiert die Basis und den Winkel an der Spitze.
4) Die auf der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks in ihrem Halbierungspunkte errichtete Senkrechte trifft die Spitze des Dreiecks und halbiert den Winkel an der Spitze.
5) Wenn auf derselben Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke errichtet und ihre Spitzen durch eine gerade Linie verbunden werden, so halbiert diese Verbindungslinie
    a) die Winkel an der Spitze,
    b) die gemeinschaftliche Basis und
    c) steht sie senkrecht auf der Basis.

Aus diesen Lehrsätzen lassen sich ohne weiteres wichtige Eigenschaften des Kreises ableiten.

Zieht man in einem Kreise zwei Radien CA und CB, und verbindet deren Endpunkte A und B durch die Sehne AB, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ACB. Die Anwendung der 4 ersten der obigen Lehrsätze auf dieses gleichschenklige Dreieck führt daher zu folgenden Sätzen über Kreissehnen:

1) **Die Halbierungslinie eines Centriwinkels halbiert auch die zugehörige Sehne und steht auf derselben senkrecht.**
2) **Die Linie, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit dem Halbierungspunkt einer Sehne verbindet, steht auf dieser senkrecht.**
3) **Die vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbiert dieselbe.**
4) **Die auf einer Sehne im Halbierungspunkt errichtete Senkrechte trifft den Mittelpunkt des Kreises.**

Dieser letzte Satz sagt aus, dass jede auf einer Sehne errichtete Mittelsenkrechte ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt des Kreises ist.

§ 2.

Aus dem oben erwähnten Hülfssatze folgt ferner, dass, wenn eine Gerade mit einem Kreise einen Punkt gemeinsam hat, sie mit demselben stets noch einen andern Punkt gemein hat, sonst aber weiter keinen. Denn zufolge jenes Hülfssatzes giebt es auf einer Geraden stets zwei und nur 2 Punkte, welche von einem ausserhalb der Geraden gelegenen Punkte gleiche Entfernung besitzen. Eine solche unbegrenzte gerade Linie, welche den Kreis in zwei Punkten schneidet, heisst eine Sekante; dieselbe ist also nichts anderes als eine unbegrenzte Sehne.

Fig. 14. Nimmt man einen der beiden Schnittpunkte A einer Sekante mit einem Kreise als fest an, und dreht die Sekante um diesen festen Punkt, sodass sich der andere Schnittpunkt B dem ersten immer mehr nähert, so wird schliesslich die Sekante eine gewisse Grenzlage AT annehmen, bei welcher die beiden Schnittpunkte in einen einzigen Punkt, nämlich in A. zusammenfallen. Diese Grenzlage der Sekante nennt man eine Tangente.

Definition: Unter einer Tangente eines Kreises versteht man eine Gerade, welche mit der Kreisperipherie nur einen Punkt (oder 2 zusammenfallende Punkte) gemein hat; dieser Punkt heisst der Berührungspunkt.

Fig. 15. Anmerkung: Die soeben gegebene Definition der Tangente lässt sich auch auf beliebige krumme Linien (Kurven) ausdehnen. Das charakteristische Merkmal einer Tangente besteht darin, dass alle dem Berührungspunkt unmittelbar benachbarten Punkte auf derselben Seite der Kurve liegen, sodass man von einem Tangentenpunkte auf der einen Seite des Berührungspunktes zu einem solchen auf der anderen Seite gelangen kann. ohne die Kurve zu überschreiten; im weiteren Verlauf kann eine Tangente die betreffende Kurve auch schneiden. Bei einer Kreistangente liegen jedoch sämtliche ihr angehörige Punkte bis auf den Berührungspunkt ausserhalb der Kreisperipherie.

§ 3.

Da nach dem Vorhergehenden die Tangente nur ein specieller Fall einer Sehne resp. Sekante ist, so kann man aus jedem Lehrsatze über Kreissehnen unmittelbar einen andern Lehrsatz über Kreistangenten ableiten, indem man die beiden Durchschnittspunkte der Sekante und der Kreisperipherie in einem Punkt zusammenfallen lässt. Mit den beiden Endpunkten fällt aber auch gleichzeitig der Halbierungspunkt der Sehne zusammen, alle drei Punkte gehen über in den Berührungspunkt der Tangente. Da nun nach dem zweiten Sehnensatze (§ 1) die Linie, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit dem Halbierungspunkt einer Sehne verbindet, auf dieser senkrecht steht, so erhalten wir durch den obigen Grenzübergang folgenden Satz über Kreistangenten:

1) **Die Linie, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit dem Berührungspunkt einer Tangente verbindet, steht auf dieser senkrecht.**

Umgekehrt:

2) **Die auf einem Kreisradius in seinem äusseren Endpunkte errichtete Senkrechte ist eine Tangente des Kreises.**

Denn hätte diese Senkrechte auf CA im Punkte A mit der Kreisperipherie ausser A noch einen andern Punkt B gemeinsam, so würde, wenn wir noch B mit dem Mittelpunkte C des Kreises verbinden, ACB ein gleichschenkliges Dreieck, also auch $\sphericalangle$ CBA ein rechter sein; das Dreieck ABC würde also zwei rechte Winkel enthalten, was unmöglich ist.

Ferner gehen die Sehnensätze (3) und (4) über in die folgenden Tangentensätze:

3) **Die vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Tangente gefällte Senkrechte trifft deren Berührungspunkt.**

4) **Die auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkte errichtete Senkrechte trifft den Mittelpunkt des Kreises.**

Wird daher von einem Kreise verlangt, dass er eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühre, so ist die auf der Geraden in diesem Punkte errichtete Senkrechte ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt des Kreises.

§ 4.

Die Schenkel eines beliebigen Peripheriewinkels sind Sekanten des Kreises. Lässt man einen Schenkel zur Tangente werden, so geht der Satz: Alle Peripheriewinkel auf demselben Kreisbogen sind einander gleich (Kambly II, § 93) über in den folgenden:

Der Perpheriewinkel, den eine Tangente mit einer durch ihren Berührungspunkt gehenden Sehne bildet, ist gleich jedem Peripheriewinkel auf dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Kreisbogen. (Kambly II, § 94.)

§ 5.

Ebenso wie eine Gerade und ein Kreis können auch 2 Kreise mit einander höchstens 2 Punkte gemein haben. Fallen die beiden Schnittpunkte in einen zusammen, so sagt man, die beiden Kreise berühren sich in diesem Punkte, und zwar von aussen, wenn die eine Kreisfläche ausserhalb der andern, von innen, wenn sie innerhalb der andern liegt. Drittens endlich können die beiden Kreise so liegen, dass ihre Peripherien keinen gemeinsamen Punkt haben.

Zwei Kreise mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt heissen koncentrisch. Bei zwei nicht koncentrischen Kreisen heisst die Verbindungslinie (resp. Verbindungsstrecke) der beiden Mittelpunkte die Centrale der beiden Kreise.

Betrachten wir zunächst zwei sich schneidende Kreise. Verbinden wir die beiden Fig. 16. Mittelpunkte C_1 und C_2 mit den beiden Schnittpunkten A und B der beiden Kreise, so ergiebt sich aus dem 1. Hülfssatz im II. Abschnitt und aus dem 5. Lehrsatz über gleichschenklige Dreiecke unmittelbar der folgende

1. Lehrsatz: **Die Centrale zweier sich schneidender Kreise ist grösser als die Summe und kleiner als die Differenz der beiden Radien; sie steht ferner senkrecht auf der gemeinsamen Sehne und halbiert dieselbe.** —

Nehmen wir ferner den einen der beiden Kreise, etwa denjenigen mit dem Mittelpunkt C_1 als fest an und bewegen den andern Kreis so, dass sein Mittelpunkt C_2 auf der Centrallinie bleibt, so wird, mögen sich die beiden Punkte C_1 und C_2 von einander entfernen oder einander nähern, ein Moment eintreten, wo die beiden Schnittpunkte A und B zusammenfallen. In diesem Grenzfalle wird die gemeinschaftliche Sehne resp. Sekante zur gemeinschaftlichen Tangente beider Kreise, und die beiden Schnittpunkte A und B, sowie der Halbierungspunkt der Strecke AB, gehen über in den gemeinsamen Berührungspunkt beider Kreise. In diesem Grenzfalle nimmt der vorhergehende Lehrsatz folgende Fassung an:

2. Lehrsatz: **Die Centrallinie zweier sich von aussen oder innen berührender Kreise ist gleich der Summe resp. Differenz der beiden Radien; sie trifft ferner den Berührungspunkt und steht auf der gemeinsamen Tangente senkrecht.** —

Lassen wir endlich die Mittelpunkte C_1 und C_2 der beiden Kreise sich noch weiter von einander entfernen resp. einander noch näher rücken, so erhalten wir Kreise, deren

Peripherien keinen Punkt mehr gemeinsam haben. Liegt die eine Kreisfläche ausserhalb der andern, so ist, wie aus der Anschauung unmittelbar hervorgeht, die Centrallinie grösser als die Summe der beiden Radien; liegt hingegen die eine Kreisfläche innerhalb der andern, so ist die Centrallinie kleiner als die Differenz der beiden Radien. Was in diesem Falle aus der gemeinschaftlichen Sehne oder Tangente wird, kann erst an einem späteren Orte gezeigt werden (Potenzlinie).

Fünfter Abschnitt.

Die pythagoreischen Lehrsätze.

§ 1.

Fig. 17. Definition: Unter der Projektion einer Strecke AB auf eine Linie MN versteht man die Entfernung der Fusspunkte A′ und B′ derjenigen beiden Lote, die von den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke auf die gegebene Linie gefällt werden können.

Die drei hierbei möglichen Fälle sind aus der Fig. 17 ersichtlich.

§ 2.

Der pythagoreische Lehrsatz.

Teil I.: **In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der ganzen Hypotenuse und der Projektion der betr. Kathete auf die Hypotenuse.**

Teil II.: (Der eigentliche Pythagoras.) **In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.**

Teil III.: **In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Reckteck aus den beiden Kathetenprojektionen** (Hypotenusenabschnitten).

Fig. 18a. ad I. Beh. Q (AC) = R (AB, AD)
Q (BC) = R (AB, DB).

Bew. Zum Beweise der ersten Behauptung ziehe man die Hülfslinien BE und CJ. Dann ist $\triangle$ BAE $\cong$ JAC wegen Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels. Das erste dieser Dreiecke ist aber gleich der Hälfte des Quadrats AF, das zweite Dreieck gleich der Hälfte des Rechtecks AL (nach Kambly § 112, Zus. 1), also sind diese beiden Parallelogramme ebenfalls einander gleich. — In analoger Weise ist die zweite Behauptung zu erweisen.

ad II. Beh. Q (AB) = Q (AC) + Q (BC).

Fig. 18b. Bew. Nach Teil I. ist
das Rechteck AL gleich dem Quadrat AF
und das Rechteck BL gleich dem Quadrat BG, folglich die
Summe, d. h. das Quadrat AK gleich AF + BG.

Fig. 18c. ad III. Beh. Q (CD) = R (AD, DB).

Bew. Zum Beweise stellen wir uns das R (AD, DB) dadurch her, dass wir über AD das Quadrat AMND konstruieren, dann besitzt das Rechteck ML zu Seiten die beiden Strecken AD und DB. Konstruieren wir ferner noch das Q (AC), so folgt aus dem II. Teil, dass

Q (CD) = Q (AC) — Q (AD);

nach Teil I. ist aber

Q (AC) = R (AB, AD) d. h. = AL, folglich ist
Q (CD) = AL — AN = ML, q. e. d.

§ 3.

Hülfssatz: **Projiciert man zwei Dreieckseiten auf einander, so sind die Rechtecke aus je einer Seite und der Projektion der andern auf sie einander gleich.**

Beh. R (AB, AF) = R (AC, AE) oder FM = EL. Fig. 19a. u. b.

Bew. Man ziehe die Hülfslinien BL und CM; dann ist

$\triangle$ BAL $\cong$ MAC u. s. w.

(vergl. den Beweis zum I. Teil des Pythagoras).

§ 4.

Der verallgemeinerte Pythagoras: **In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite, die einem spitzen (resp. stumpfen) Winkel gegenüberliegt, gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Dreieckseiten, vermindert (resp. vermehrt) um das doppelte Reckteck aus einer dieser beiden Seiten und der Projektion der andern auf sie.**

Beh. Q (BC) = Q (AB) + Q (AC) $\mp$ 2 R (AB, AF) Fig. 20a. u. b.

= Q (AB) + Q (AC) $\mp$ 2 R (AC, AE),

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die Seite BC einem spitzen oder stumpfen Winkel gegenüberliegt.

Bew. Man vervollständige die beiden Figuren zum vorigen Hülfssatz dadurch, dass man die Quadrate über den Dreiecksseiten konstruiert; ferner fälle man noch die Höhe AD und verlängere sie bis zum Durchschnitt mit der gegenüberliegenden Quadratseite. Dann ist nach vorigem Hülfssatz

R (AB, AF) = R (AC, AE) oder AK = AH

R (BC, BD) = R (BA, BF) „ BG = BK

R (CA, CE) = R (CB, CD) „ CH = CG,

mithin

Q (BC) = BG + CG = BK + CH,

oder da BK = Q (AB) $\mp$ AK und CH = Q (AC) $\mp$ AH ist:

Q (BC) = Q (AB) + Q (AC) $\mp$ (AH + AK);

dies ist aber unsere Behauptung, da AH = AK, d. h. R (AC, AE) = R (AB, AF) ist.

§ 5.

Folgerungen aus dem verallgemeinerten Pythagoras.

1. L.-S.: **In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate zweier Seiten gleich der Summe aus dem doppelten Quadrat der halben dritten Seite und dem doppelten Quadrat der zugehörigen Mittellinie.**

2. L.-S.: **In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate aller 4 Seiten gleich der Summe der Quadrate über beiden Diagonalen.**

3. L.-S.: **In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate aller 4 Seiten gleich der Summe der Quadrate über beiden Diagonalen, vermehrt um das vierfache Quadrat über der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte beider Diagonalen.**

ad 1. Beh. $Q\,(AC) + Q\,(BC) = 2\,Q\left(\frac{1}{2}\,AB\right) + 2\,Q\,(CD)$

$= \frac{1}{2} Q\,(AB) + 2\,Q\,(CD).$

Bew. Fällt man die Höhe CE, so ist in den Dreiecken ADC und BDC nach dem verallgemeinerten Pythagoras:

Fig. 21.

$$Q\,(AC) = Q\,(AD) + Q\,(CD) - 2\,R\,(CD,\,ED)$$
$$Q\,(BC) = Q\,(BD) + Q\,(CD) + 2\,R\,(CD,\,ED),$$

folglich:

$$Q\,(AC) + Q\,(BC) = 2\,Q\,(AD) + 2\,Q\,(CD)$$
$$= 2\,Q\,(BD) + 2\,Q\,(CD), \text{ q. e. d.}$$

ad 2 und 3: Die Beweise der beiden anderen Lehrsätze ergeben sich leicht durch mehrmalige Anwendung des eben bewiesenen ersten Lehrsatzes. Zum Beweise von (3) hat man noch zwei Hülfslinien zu ziehen, nämlich die Verbindungslinien eines der beiden Mittelpunkte der Diagonalen mit denjenigen beiden Eckpunkten des Vierecks, mit denen derselbe noch nicht durch eine der beiden Diagonalen verbunden ist.

Sechster Abschnitt.

Die Flächenmessung.

§ 1.

Eine Strecke messen heisst angeben, wie oft eine andere Strecke, die sog. Masseinheit, in der gegebenen Strecke enthalten ist. Diese Verhältniszahl der gegebenen Strecke zur Masseinheit heisst die Masszahl der betreffenden Strecke. Die Masseinheit kann willkürlich angenommen werden; gewöhnlich nimmt man dazu das Meter oder die aus demselben abgeleiteten dezimalen Einheiten, das Decimeter, Centimeter oder Millimeter (m, dm, cm, mm).

In derselben Weise wird eine Fläche gemessen. Als Flächeneinheit benutzt man ein Quadrat, dessen Seiten gleich der Längeneinheit sind (qm, qdm, qcm, qmm).

Beim Messen von Strecken oder Flächen, wie überhaupt beim Messen stetiger Grössen, hat man drei Fälle zu unterscheiden: Entweder ist die zu Grunde gelegte Masseinheit in der zu messenden Grösse eine gewisse Anzahl mal enthalten, dann ist die Masszahl eine ganze Zahl; oder es ist zwar nicht die ganze Masseinheit, wohl aber irgend ein Bruchteil derselben in der betreffenden Grösse eine gewisse Anzahl mal enthalten, dann ist die Masszahl eine gebrochene Zahl. In diesen beiden ersten Fällen lässt sich das Verhältniss der gegebenen Grösse zur Masseinheit durch ganze Zahlen genau angeben, man nennt daher ein solches Verhältnis rational. Endlich aber ist auch der Fall denkbar, dass kein noch so kleiner Bruchteil der Masseinheit in der betreffenden Grösse eine ganze Anzahl mal enthalten, das Verhältnis der gegebenen Grösse zur Masseinheit also nicht genau durch ganze Zahlen angebbar ist; dann nennt man die Masszahl eine irrationale Zahl. Ist insbesondere die zu messende Grösse eine Strecke, so nennt man dieselbe in Bezug auf die Längeneinheit kommensurabel oder inkommensurabel, je nachdem ihr Verhältnis zur Längeneinheit durch eine rationale oder irrationale Zahl gemessen wird; zwei Strecken heissen in Beziehung auf einander kommensurabel, oder inkommensurabel, je nachdem die Masszahl der einen Strecke in Beziehung auf die andere Strecke als Masseinheit eine rationale resp. irrationale Zahl ist.

Rationale Zahlen erscheinen in der Form von ganzen Zahlen oder gemeinen Brüchen oder von endlichen oder unendlichen periodischen Decimalbrüchen: die letzteren, sowohl die endlichen, als auch die unendlichen periodischen Decimalbrüche lassen sich stets in gemeine Brüche verwandeln. Die irrationalen Zahlen hingegen besitzen die Form von unendlichen nicht periodischen Decimalbrüchen. Die Entstehungsweise dieser verschiedenen Arten von Masszahlen lässt sich beim Messen von Strecken in besonders anschaulicher Weise verfolgen, wenn man als Masseinheit das Meter und die durch decimale Teilung aus demselben abgeleiteten Einheiten, das dm, cm und mm benutzt; wir denken uns diese Teilung noch weiter fortgesetzt, indem wir das mm nochmals in 10 gleiche Teile, einen solchen Teil wieder in 10 gleiche Teile teilen, u. s. w. Ist nun irgend eine gegebene Strecke AB zu messen, so kann dieselbe zunächst entweder ein ganzzahliges Vielfaches des Meters (z. B. AB = 3 m) oder eines decimalen Bruchteiles desselben (z. B. AB = 3,14 m) sein; im ersten Falle ist die Masszahl eine ganze Zahl (3), im zweiten ein endlicher Decimalbruch (3,14), den man auch als gemeinen Bruch darstellen kann. Andererseits ist es möglich, dass kein noch so kleiner Decimal-Bruchteil des m in der gegebenen Strecke aufgeht, so dass die Masszahl als unendlicher Decimalbruch erscheint. Ist derselbe periodisch, ist z. B. AB = $3{,}14\overline{159}$ m, so kann man diesen periodischen Decimalbruch stets in einen gemeinen Bruch verwandeln (für das angenommene Beispiel ergiebt sich AB = $\frac{20923}{6660}$ m); es würde dann irgend ein nicht decimaler Bruchteil des m (hier der 6660. Teil) in der gegebenen Strecke eine bestimmte Anzahl (20923) mal enthalten sein. In allen diesen 3 Fällen ist das Verhältnis der gegebenen Strecke zur Masseinheit genau durch ganze Zahlen angebbar (im ersten Fulle 3 : 1, im zweiten 157 : 50, im dritten 20923 : 6660). Ist hingegen der unendliche Decimalbruch nicht periodisch, ist z. B. AB = 3,14159265 . . . m, wo die Decimalziffern in bunter Aufeinanderfolge ohne irgend welche Gesetzmässigkeit auftreten, so lässt sich das Verhältnis der Strecke AB zur Masseinheit nicht mehr genau, sondern nur a n n ä h e r n d durch ganze Zahlen darstellen. Dieser Annäherung kann stets jeder beliebige Grad von Genauigkeit verliehen werden; so ergiebt sich, wenn die obige Strecke z. B. bis auf hundertstel mm genau gemessen werden soll, so dass tausendstel mm nicht mehr in Betracht kommen, für AB der Wert 3,14159 m.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass das Verhältnis irgend einer stetigen Grösse zur Masseinheit oder das Verhältnis irgend zweier gleichartiger Grössen stets genau oder bis auf jeden beliebig verlangten Grad von Genauigkeit angenähert durch ganze Zahlen dargestellt werden kann; im ersten Falle ist das Verhältnis rational, im andern irrational.

§ 2.

Wir bezeichnen im Folgenden die Längeneinheit mit λ und die entsprechende Flächeneinheit, d. h. das Quadrat über der Strecke λ, mit φ, und stellen uns zunächst die Aufgabe, aus den Seitenlängen eines beliebigen Rechsecks den Flächeninhalt desselben zu berechnen. Angenommen die eine Seite des Rechtecks sei gleich $a\lambda$, die andern gleich $b\lambda$, wo a und b unbenannte Zahlen bedeuten.

Es seien zunächst a und b ganze Zahlen (z. B. 3 und 4); teilt man dann die Rechtecksseiten in a resp. b (3 resp. 4) gleiche Teile, von denen jeder gleich der Längeneinheit λ ist, und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zu den Rechtecksseiten, so zerlegen diese Parallelen das gegebene Rechteck in a . b (12) Quadrate, die alle gleich der zu λ gehörigen Flächeneinheit φ sind. D i e M a s s z a h l f ü r d e n F l ä c h e n i n h a l t e i n e s R e c h t e c k s i s t a l s o g l e i c h d e m P r o d u k t d e r M a s s z a h l e n f ü r d i e L ä n g e n z w e i e r a n s t o s s e n d e r

Seiten, wofür man kürzer zu sagen pflegt: Der Flächeninhalt eines Rechteckts ist gleich dem Produkt zweier anstossender Seiten. Sind insbesondere die beiden Seiten des Rechtecks einander gleich, und ist jede derselben gleich $a\lambda$, so ist der Flächeninhalt gleich $a \cdot a$ oder a^2 Flächeneinheiten. Die Masszahl, für den Flächeninhalt eines Quadrats ist also gleich dem (arithmetischen) Quadrat der Masszahl einer Seite.

Sind hingegen die Masszahlen zweier anstossender Rechteckseiten Brüche, so können wir uns diese Brüche auf gleiche Nenner gebracht denken, es sei etwa $a = \frac{m}{p}$ und $b = \frac{n}{p}$. Teilen wir nun die Längeneinheit λ in p gleiche Teile und bezeichnen einen solchen Teil mit λ', so dass $\lambda' = \frac{\lambda}{p}$ ist, so zerfällt die eine Seite des Rechtecks in m, die andere in n Längeneinheiten λ', wo m und n ganze Zahlen bedeuten; es ist demnach der Flächeninhalt des Rechtecks gleich $m \cdot n$ Flächeneinheiten φ', wo φ' ein Quadrat mit der Seitenlänge λ' bedeutet. Die ursprüngliche Flächeneinheit φ besteht aber nach dem oben gesagten aus $p \cdot p$ oder p^2 solcher Flächeneinheiten φ', mithin ist der Flächeninhalt des in Rede stehenden Rechtecks

gleich $m \cdot n$ Flächeneinheiten φ', oder da $\varphi' = \frac{\varphi}{p^2}$ ist,

„ $\frac{m}{p} \cdot \frac{n}{p}$ „ φ;

es wird somit auch in diesem allgemeineren Falle die Masszahl für den Flächeninhalt eines Rechtecks dadurch gefunden, dass man die Masszahlen zweier anstossenden Seiten mit einander multipliziert. Ist also ABCD ein beliebiges Quadrat, und ist dessen Seitenlänge AB = a Längeneinheiten, wo a eine unbenannte rationale oder irrationale Zahl darstellt, so ist der Flächeninhalt

$$\text{I)}\quad Q\,(AB) = a^2.$$

Ist ferner ABCD ein beliebiges Rechteck, und sind a und b die Masszahlen zweier anstossenden Seiten AB und BC, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks

$$\text{II)}\quad R\,(AB, BC) = a \cdot b.$$

Dabei haben wir uns sowohl in der Formel I, als auch in der Formel II zu den auf der rechten Seite stehenden Masszahlen für den Flächeninhalt die Flächeneinheit als Benennung hinzuzudenken. Ueberhaupt haben wir es hier bei der Ausmessung von Strecken und Flächen stets mit Zahlen zu thun, zu denen als Benennung entweder die Längeneinheit oder die Flächeneinheit zu ergänzen ist.

§ 3.

Mit Hülfe der in den Formeln I und II gegebenen Flächenbestimmungen eines Quadrats und Rechtecks lassen sich die pythagoreischen Sätze über das rechtwinklige Dreieck in einfacherer Gestalt darstellen. Es sei ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, C der Scheitelpunkt des rechten Winkels, CD die von C auf die Hypotenuse gefällte Höhe. Bezeichnen wir nun

die beiden Katheten BC und AC mit a resp. b,
die Hypotenuse AB „ c
die Höhe CD „ h

und die beiden Hypotenusenabschnitte BD und AD mit p resp. q, wo unter allen diesen Grössen a, b, c, h, p, q, die Masszahlen der betreffenden Strecken zu verstehen sind, so nehmen die pythagoreischen Sätze (V. Abschnitt, § 2) folgende Form an:

$$\text{III)} \left\{ \begin{array}{l} a^2 = c\,p \text{ und } b^2 = c\,q. \\ c^2 = a^2 + b^2 \\ h^2 = p\,q. \end{array} \right.$$

Insbesondere folgt aus der zweiten dieser Formeln, dess aus den Längen zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge der dritten Seite berechnet werden kann. Sind z. B. die beiden Katheten a und b gegeben, so ist die Hypotenuse

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

ist hingegen die Hypotenuse c und eine der beiden Katheten, etwa a gegeben, so ist die Länge der andern Kathete

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}. -$$

Aus dem verallgemeinerten Pythagoras hatten wir den Satz abgeleitet (V. Abschnitt, § 5, 1), dass in einem beliebigen Dreieck die Summe der Quadrate zweier Seiten gleich ist der Summe aus dem doppelten Quadrat der halben dritten Seite und dem doppelten Quadrat der zugehörigen Mittellinie. Bezeichnen wir die Masszahlen der Dreiecksseiten mit a, b, c und die Masszahlen der zugehörigen Mittellinien mit t_a, t_b, t_c, so ist zufolge dieses Satzes:

$$\text{IV)} \left\{ \begin{array}{l} b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2\,t_a^2 \\ c^2 + a^2 = \frac{b^2}{2} + 2\,t_b^2 \\ a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2\,t_c^2; \end{array} \right.$$

diese Formeln liefern, wenn a, b, c bekannt sind, die Längen von t_a, t_b und t_c.

§ 4.

Auf die Flächenbestimmung des Quadrats und Rechtecks lassen sich diejenigen vieler anderen Figuren zurückführen.

Da Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen einander flächengleich sind, so kann der Flächeninhalt eines beliebigen Parallelogramms durch denjenigen eines Rechtecks ersetzt werden, welches mit dem gegebenen Parallelogramm gleiche Grundlinie und Höhe besitzt. Bezeichnen wir also die Grundlinie (d. h. eine beliebige Seite) eines Parallelogramms mit g, die zugehörige Höhe mit h, so ergiebt sich für den Flächeninhalt desselben der Wert

$$\text{V)} \quad \text{Pgr.} = gh,$$

d. h. die Masszahl für den Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt der Masszahlen von Grundlinie und Höhe.

Ein Trapez lässt sich leicht in ein Parallelogramm verwandeln, indem man durch den Halbierungspunkt einer der nicht parallelen Seiten die Parallele zu der andern nicht parallelen Seite zieht. Die Grundlinie des so entstehenden Parallelogramms ist gleich der Verbindungsstrecke der Halbierungspunkte der beiden nicht parallelen Trapezseiten, und die Höhe desselben ist gleich der Höhe des Trapezes. Bezeichnen wir die letztere mit h und die Längen der beiden parallelen Trapezseiten mit a und b, so ist der Flächeninhalt des Trapezes

$$\text{VI)}\quad \mathrm{Tr.} = \frac{a+b}{2}\cdot h,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der halben Summe der beiden parallelen Seiten und der Höhe.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist halb so gross als derjenige eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe. Bezeichnen wir also in einem beliebigen Dreieck die Grundlinie (d. h. irgend eine Seite) mit g und die zugehörige Höhe mit h, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$\text{VII)}\quad \triangle = \frac{g\,h}{2},$$

d. h. die Masszahl für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus den Masszahlen von Grundlinie und Höhe.

Insbesondere erhält man für den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks nach den Bezeichnungen im § 3 einen der beiden Ausdrücke

$$\text{VIII)}\quad \triangle_r = \frac{a\,b}{2} = \frac{c\,h}{2}.$$

Der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks lässt sich auch durch die Masszahlen der Dreiecksseiten a, b, c darstellen. Fällen wir im Dreieck ABC die Höhe $CD = h_c$, so ist zunächst

$$\triangle = \frac{c\,.\,h_c}{2};$$

ferner ist im rechtwinkligen Dreieck BCD, wenn wir wie üblich die Strecke BD mit p bezeichnen, nach Formel III_2

$$h_c^2 = a^2 - p^2 \text{ und somit}$$

$$\triangle = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - p^2}.$$

Es erübrigt also nur noch, die Masszahl p durch die Masszahlen a, b, c der Dreiecksseiten auszudrücken. Dies geschieht am einfachsten mit Hülfe des verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatzes (V. Abschnitt, § 4), zufolge dessen

$$b^2 = a^2 + c^2 \mp 2\,c\,p$$

ist, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem der Dreieckswinkel β ein spitzer oder stumpfer ist. Hieraus ergiebt sich

$$p = \pm\,\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c},$$

also

$$a^2 - p^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c}\right)^2 = \left(a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c}\right).\left(a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c}\right)$$

$$= \frac{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}{4\,c^2}$$

und somit

$$\triangle = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}\,.$$

Bezeichnen wir noch zur Abkürzung die halbe Seitensumme mit s, setzen also

$$a + b + c = 2s,$$

so geht jener Ausdruck über in:

$$\text{IX)}\ \triangle = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}. \quad \text{(Heronische Formel.)}$$

Siebenter Abschnitt.

Die Proportionalität von Strecken.

§ 1.

1. Lehrsatz: **Schneiden mehrere Parallelen von dem einen Schenkel eines Winkels gleiche Stücke ab, so schneiden sie auch von dem andern Schenkel gleiche Stücke ab.**

Vor. $AB = BC = CD \ldots$

$BB' \parallel CC' \parallel DD' \ldots$;

Beh. $AB' = B'C' = C'D' \ldots$. Fig. 22.

Bew. Zieht man durch die Teilpunkte B', C', . . . des einen Winkelschenkels Parallelen zum andern Winkelschenkel, so entstehen die Dreiecke B'GC', C'HD' u. s. w.; welche sämtlich dem Dreieck ABB' kongruent sind. Denn nach Vor. ist

$AB = BC = CD$, also da

$BC = B'G,\ CD = C'H$ ist:

$AB = B'G = C'H$; ferner ist

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\ BAB' = GB'C' = HC'D' \\ \sphericalangle\ AB'B = B'C'G = C'D'H\end{array}\right\}\ \text{als Gegenwinkel an parallelen Linien.}$$

Die Dreiecke ABB', B'GC', C'HD' . . . stimmen als überein in 1 Seite und 2 Winkeln. Folglich ist auch

$$AB' = B'C' = C'D' \ldots, \text{ q. e. d.}$$

Anmerkung: Auf dem vorhergehenden Satze beruht die Lösung der Aufgabe: Eine gegebene Strecke in eine beliebig gegebene Anzahl gleicher Teile zu teilen.

2. Lehrsatz: **Werden die Schenkel eines Winkels von parallelen Linien geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte des einen Schenkels wie die entsprechenden Abschnitte des andern Schenkels; ferner verhalten sich die zwischen den Schenkeln liegenden Parallelenstücke wie die bis zu diesen Parallelen reichenden Schenkelstücke auf einem der beiden Winkelschenkel.** — Dabei kann man unter einem Abschnitt entweder ein Schenkelstück verstehen, welches zwischen zwei beliebigen Parallelen liegt, als auch ein solches, welches sich vom Scheitelpunkte bis zu einer Parallele erstreckt.

Vor. $BB' \parallel CC' \parallel DD' \ldots$

Beh. I) $AB : BC : CD : AC : BD \ldots =$

$AB' : B'C' : C'D' : AC' : B'D' \ldots$; Fig. 23.

II) $BB' : CC' : DD' \ldots = AB : AC : AD \ldots$

$= AB' : AC' : AD' \ldots$ *)

*) Nicht mit Unrecht macht Herr Matthiessen in der von ihm neu bearbeiteten Heis'schen Aufgabensammlung darauf aufmerksam (pag. 125, Anm.), dass die oben gewählte Form einer fortlaufenden Proportion nicht eindeutig ist, und dass man sie daher besser durch die korrektere Schreibweise

$$AB : AB' = BC : B'C' = CD : C'D' \text{ u. s. w.}$$

ersetzt. Bei Zugrundelegung dieser Form kann man den ersten Teil des obigen Satzes folgendermassen in Worte fassen: Werden die Schenkel eines Winkels von parallelen Linien geschnitten, so ist das Verhältnis

Bew. Angenommen, die Teilstrecken AB, BC, CD, . . ., in welche der eine Winkelschenkel durch die Parallelen zerlegt wird, verhalten sich zu einander wie die Zahlen m, n, p . . . . Diese Zahlen können stets als absolute ganze Zahlen vorausgesetzt werden; denn sind die Strecken AB, BC, CD, . . . kommensurabel, besitzen sie also ein endliches gemeinschaftliches Mass, so kann man dasselbe auf jenen Strecken eine gewisse Anzahl (m, n, p, . . .) mal ohne Rest abtragen; sind jene Strecken jedoch inkommensurabel, so kann man wenigstens annähernd und bis auf jeden beliebig verlangten Grad von Genauigkeit ihr Verhältnis durch ganze Zahlen darstellen, indem man als Masseinheit eine hinreichend kleine Strecke annimmt. Teilen wir nun AB, BC, CD, . . . resp. in m, n, p, . . . gleiche Teile und ziehen durch die Teilpunkte Parallelen zu den bereits vorhandenen Parallelen, so teilen dieselben nach dem vorigen Lehrsatz auch die Strecken AB′, B′C′, C′D′ . . . resp. in m, n, p, . . . gleiche Teile; mithin verhalten sich diese letzteren Strecken wie die Strecken AB, BC, CD, . . . , d. h. es ist

$$AB : AB' = BC : B'C' = CD : C'D' \ldots .$$

Durch Anwendung des aus der Arithmetik bekannten Satzes: „In jeder fortlaufenden Proportion verhält sich die Summe mehrerer Vorderglieder zur Summe der entsprechenden Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede“ erhält man hieraus folgende weitere Proportion:

$$\frac{AB + BC}{AB' + B'C'} = \frac{BC + CD}{B'C' + C'D'} = \frac{AB + BC + CD}{AB' + B'C' + C'D'} \ldots = \frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \ldots ,$$

d. h.

$$\text{I)}\; AC : AC' = BD : B'D' = AD : AD' \ldots = AB : AB' = BC : B'C' \ldots —$$

Zieht man ferner durch die Punkte B′, C′, . . . Parallelen zu AD, welche die Parallelen CC′, DD′, . . . resp. in den Punkten G, H, . . . schneiden mögen, so kann man die vorige Proportion anwenden auf die Schenkel der Winkel AC′C, AD′D . . . . , die von den Parallelen B′G und AC, C′H und AD, . . . geschnitten werden. Man erhält alsdann die Proportionen

$AB' : AC' = CG : CC'$,

$AC' : AD' = DH : DD'$ u. s. w.; nun ist aber

$CG = BB'$, $DH = CC'$, . . . , also ergiebt sich durch Substitution dieser Grössen und durch gleichzeitige Vertauschung der Innenglieder

$$\text{II)}\; AB' : BB' = AC' : CC' = AD' : DD' \ldots ,$$

oder in anderer Form:

$$BB' : CC' : DD' \ldots = AB' : AC' : AD' \ldots$$
$$= AB : AC : AD \ldots .$$

§ 2.

Werden die Schenkel eines Winkels durch Transversalen BB′, CC′, . . . so geschnitten, dass zwischen den Abschnitten der Winkelschenkel die Proportionen (I) bestehen, so sagt man, dass jene Transversalen die Winkelschenkel in proportionale Teile teilen. Mit Benutzung dieses Begriffs lässt der erste Teil des vorigen Lehrsatzes folgende Umkehrung zu.

---

der Abschnitte des einen Schenkels zu den entsprechenden Abschnitten des andern Schenkels konstant. — Bei Proportionen zwischen geometrischen Grössen kann jedoch die im Text gewählte und durch den Gebrauch sanktionierte Schreibweise kaum missverstanden werden.

Lehrsatz: **Zwei (oder mehrere) Linien, welche die Schenkel eines Winkels in proportionale Abschnitte teilen, sind einander parallel.**

Vor. $AB : BC = AB' : B'C'$. Fig. 24.

Beh. $BB' \parallel CC'$.

Bew. (indirekt): Angenommen, nicht BB', sondern irgend eine andere durch B gehende Gerade, etwa BG sei parallel zu CC'. Dann müsste nach dem vorigen Lehrsatz die Proportion bestehen:

$$AB : BC = AG : GC';$$

nach Vor. ist aber

$$AB : BC = AB' : B'C',$$

also müsste

$$AG : GC' = AB' : B'C',$$

oder wenn man die Innenglieder vertauscht:

$$AG : AB' = GC' : B'C'$$

sein. Dies ist aber unmöglich, da nach der Figur von den beiden Verhältnissen in dieser Proportion das eine < 1, das andere > 1 ist; also ist unsere Annahme: BB' nicht $\parallel CC'$ unrichtig, die Beh. also richtig.

§ 3.

Mit Hülfe des zweiten Lehrsatzes in § 1 sind wir imstande, zwei Fundamentalaufgaben von besonderer Wichtigkeit zu lösen. Wir schicken dazu folgende Bemerkungen voraus:

Wenn 4 Strecken a, b, c, d zu einander in der Beziehung stehen, dass sich verhält

$$a : b = c : d,$$

so nennt man d die vierte Proportionale zu den Strecken a, b und c. — Wenn man ferner auf einer gegebenen Strecke AB oder auf ihre Verlängerung irgend einen Punkt annimmt, so nennt man die Abstände dieses Punktes von den Endpunkten der Strecke die Abschnitte der Strecke, mag nun der betreffende Punkt auf der Strecke AB selbst oder auf ihrer Verlängerung liegen; man spricht im ersten Falle von einer inneren, im zweiten von einer äusseren Teilung der Strecke AB.

1. Aufgabe: In drei gebenen Strecken a, b und c die vierte Proportionale zu konstruieren.

Der zweite Lehrsatz in § 1 liefert mehrere sehr einfache Lösungen dieser Aufgabe, Man zeichne einen beliebigen Winkel, mache etwa $AB = a$, $BC = b$, $AB' = c$, verbinde alsdann B mit B' und ziehe durch C die Parallele zu BB', welche AB' in C' schneide; dann ist $B'C'$ die verlangte vierte Proportionale. Andere Lösungen!

2. Aufgabe: Eine gegebene Strecke AB innen und aussen nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen.

Das gegebene Verhältnis kann entweder ein Streckenverhältnis $(a : b)$ oder ein Zahlenverhältnis $(m : n)$ sein*). Sollen sich die beiden Teile von AB wie zwei gegebene Strecken a und b verhalten (sodass der am Endpunkt A liegende Teil der Strecke a, und der am Endpunkte B liegende Teil der Strecke b entspricht), und ist $a > b$, so trage man an AB im Endpunkte A einen beliebigen Winkel an, mache $AE = a$ und $EF = EF' = b$, Fig. 25.

*) Theoretisch sind diese beiden Fälle nicht wesentlich von einander verschieden, da sich ein Streckenverhältnis leicht in ein Zahlenverhältnis umwandeln lässt, und umgekehrt. Für die Praxis empfiehlt es sich jedoch, diese beiden Fälle von einander zu unterscheiden.

verbinde B mit F und F' und ziehe durch E zu BF und BF' Parallelen, welche die Strecke AB oder ihre Verlängerung in D und D' schneiden mögen. Dann sind D und D' die verlangten Teilungspunkte; denn es verhält sich nach dem ersten Teil des zweiten Lehrsatzes in § 1

$$AD : BD = AE : EF = a : b$$
$$\text{und } AD' : BD' = AE : EF' = a : b.$$

Ist $a < b$, so trage man nicht in A, sondern in B einen beliebigen Winkel an und verfahre sonst wie oben. — Ist hingegen das gegebene Verhältnis in Zahlen ausgedrückt (m : n), so ändert sich der Wortlaut der obigen Konstruktion nur derart, dass man statt der Strecken a und b m resp. n Teile einer beliebigen Masseinheit zu setzen hat.

§ 4.

Fig. 26. Definitionen: Teilt man eine Strecke innen und aussen nach demselben Verhältnis, so sagt man, die gegebene Strecke sei durch die beiden Teilpunkte harmonisch geteilt; bezeichnet man die beiden Teilpunkte der Strecke AB mit A' und B', so muss sich verhalten:

$$AA' : BA' = AB' : BB'.$$

Vier solche Punkte, wie A, B, A' und B', nennt man harmonische Punkte; die beiden Endpunkte A und B der Strecke, sowie die beiden Teilpunkte A' und B' heissen einander zugeordnet oder konjugiert.

Steht die Masszahl einer Strecke x zu den Masszahlen zweier gegebener Strecken a und b in einer der drei Beziehungen:

$$x = \frac{1}{2}(a + b)$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$
$$x = \sqrt{a\,.\,b} \text{ oder } a : x = x : b,$$

so nennt man die Strecke x im ersten Falle das arithmetische, im zweiten das harmonische und im dritten das geometrische Mittel der beiden Strecken a und b. Mit Benutzung dieser Begriffe lassen sich folgende Sätze über harmonische Punkte aufstellen:

1. Lehrsatz: Wird die Strecke AB durch die beiden Punkte A' und B' harmonisch geteilt, so wird auch die Strecke A'B' durch die beiden Punkte A und B harmonisch geteilt.

Denn die vorausgesetzte Eigenschaft, dass AB durch A' und B' harmonisch geteilt ist, wird ausgedrückt durch die Proportion:

$$AA' : BA' = AB' : BB';$$

aus dieser folgt durch Vertauschung der Innenglieder

$$A'A : B'A = A'B : B'B,$$

d. h. die Strecke A'B' wird durch die beiden Punkte A und B harmonisch geteilt, wie behauptet wurde.

2. Lehrsatz: Sind A, B, A', B' vier harmonische Punkte (A und B, A' und B' zugeordnet), so ist AB das harmonische Mittel zu AA' und AB', ebenso A'B' das harmonische Mittel zu AB' und BB', d. h. es ist

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AA'} + \frac{1}{AB'}\right) \text{ und } \frac{1}{A'B'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB'} + \frac{1}{BB'}\right).$$

Denn ersetzt man in der Proportion

$$AA' : BA' = AB' : BB'$$

alle Strecken durch solche, die im Punkte A anfangen, so erhält man:

$$\frac{AA'}{AB - AA'} = \frac{AB'}{AB' - AB}.$$

Durch Umkehrung dieser Quotienten und Ausführung der Division ergiebt sich

$$\frac{AB}{AA'} - 1 = 1 - \frac{AB}{AB'}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{AB}{AA'} + \frac{AB}{AB'} = 2 \quad \text{, folglich}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AA'} + \frac{1}{AB'}\right) = \frac{1}{AB}.$$

3. Lehrsatz: Sind A, B, A', B' vier harmonische Punkte, und ist M der Halbierungspunkt der Strecke AB, M' der Halbierungspunkt der Strecke A'B', so ist MA = MB das geometrische Mittel zu den Strecken MA' und MB', ebenso MA' = MB' das geometrische Mittel zu den Strecken M'A und M'B, d. h. es ist Fig. 27.

$$MA^2 = MB^2 = MA' . MB' \text{ und } M'A'^2 = M'B'^2 = M'A . M'B.$$

Denn aus der Proportion

$$AA' : BA' = AB' : BB'$$

folgt

$$AA' . BB' = AB' . BA';$$

ersetzt man in dieser Proportion alle Strecken durch solche, die im Punkte M anfangen, so erhält man

$$(MA + MA'). (MB' - MB) = (MA + MB'). (MB - MA').$$

Löst man endlich die Klammern auf und berücksichtigt, dass MA = MB ist, so reduziert sich diese Gleichung auf

$$MA^2 = MB^2 = MA'. MB'.$$

Ebenso beweist man die andere Relation $M'A'^2 = M'B'^2 = M'A . M'B$.

§ 5.

Auf harmonische Punkte wird man auch durch folgenden Satz geführt.

1. Lehrsatz: **Die Halbierungslinie eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels teilen die gegenüberliegende Dreieckseite im Verhältnis der beiden andern Seiten.**

Bew. Es sei CD die Halbierungslinie des Winkels ACB, CD' die Halbierungslinie des Aussenwinkels. Zieht man durch A Parallelen zu CD und CD', welche die Seite BC und ihre Verlängerung in E und E' schneiden mögen, so erhält man nach dem ersten Teil des zweiten Lehrsatzes in § 1 Fig. 28.

da EA || CD ist: $AD : BD = CE : BC$, und

da E'A || CD' ist: $AD' : BD' = CE' : BC$;

da nun, wie leicht ersichtlich, die Dreiecke ACE und ACE' gleichschenklig sind, also CE = CA und CE' = CA ist, so ergiebt sich

$$AD : BD = AD' : BD' = AC : BC, \text{ q. e. d.} -$$

Umgekehrt lässst sich behaupten:

2. Lehrsatz: **Wenn man eine Dreieckseite innen und aussen im Verhältnis der beiden andern Seiten teilt und die Teilungspunkte mit dem dritten Endpunkte verbindet, so halbieren diese Verbindungslinien den an diesem Eckpunkte liegenden Dreieckswinkel und seinen Nebenwinkel.**

Bew. (indirekt): Denn nehmen wir an, nicht CD und CD', sondern etwa CG und CG' wären die Halbierungslinien des Winkels ACB und seines Nebenwinkels, so wäre nach dem vorigen Lehrsatz

$$AG : BG = AG' : BG' = AC : BC,$$

während nach der Vor.

$$AD : BD = AD' : BD' = AC : BC$$

ist; es müsste demnach

$$AG : BG = AD : BD \text{ und } AG' : BG' = AD' : BD'$$

oder

$$AG : AD = BG : BD \text{ und } AG' : AD' = BG' : BD'$$

sein, was aber unmöglich ist, da von den beiden Verhältnissen in jeder dieser Proportionen das eine < 1, das andere > 1 ist, wie aus der Anschauung unmittelbar hervorgeht.

§ 6.

Da die Halbierungslinien eines Winkels und seines Nebenwinkels auf einander senkrecht stehen, so ist in der zuletzt betrachteten Figur (28) $\sphericalangle$ DCD' ein rechter, folglich liegt die Spitze C des Dreiecks ABC auf der Peripherie des über der Strecke DD' als Durchmesser beschriebenen Kreises; die Endpunkte dieses Durchmessers teilen die Grundlinie AB harmonisch im Verhältnis der beiden Dreiecksseiten AC und BC.

Es giebt in der Ebene unendlich viele Punkte, deren Abstände von den Endpunkten der Strecke AB ein gegebenes Verhältnis haben, oder, was auf dasselbe hinauskommt, unendlich viele Dreiecke über der Grundlinie AB, deren Seiten ein konstantes Verhältnis besitzen. Angenommen ABC sei irgend eins dieser Dreiecke, ABC' ein anderes. Verbindet man C' mit den Punkten D und D', welche die Strecke AB innen und aussen nach dem Verhältnis AC : BC teilen, so ist nach unserer Annahme auch

$$AD : BD = AD' : BD' = AC' : BC'.$$

Hieraus folgt mit Hülfe des 2. Lehrsatzes im § 5, dass die Linien C'D und C'D' den Dreieckswinkel AC'B und seinen Nebenwinkel halbieren, mithin auf einander senkrecht stehen. Da demnach $\sphericalangle$ DC'D' ein rechter ist, so liegt auch der Punkt C' auf der Peripherie des über der Strecke DD' als Durchmesser beschriebenen Kreises, und man hat daher folgenden

Lehrsatz: **Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von den Endpunkten einer gegebenen Strecke AB ein gegebenes Verhältnis haben, ist der Kreis über derjenigen Strecke als Durchmesser, deren Endpunkte die Strecke AB in dem gegebenen Verhältnis teilen** (apollonischer Kreis).

Anhang.

Zusammenstellung der wichtigsten Fundamentalaufgaben und geometrischen Örter.

a. Fundamentalaufgaben.

1. Eine gegebene Strecke zu halbieren.
2. Einen gegebenen Winkel zu halbieren.
3. Auf einer graden Linie in einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu errichten.
4. Auf eine grade Linie von einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu fällen.
5. An eine grade Linie in einem gegebenen Punkte einen gegebenen Winkel anzutragen.
6. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen graden Linie die Parallele zu ziehen.
7. Zu einer graden Linie in gegebener Entfernung eine Parallele zu ziehen.
8. Über einer gegebenen Strecke als Sehne einen Kreisbogen zu zeichnen, welcher einen gegebenen Winkel als Peripheriewinkel fasst.
9. An einen gegebenen Kreis von einem ausserhalb desselben gegebenen Punkte die Tangenten zu ziehen.
10. An zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.
11. Den einem Dreieck umbeschriebenen Kreis zu konstruieren.
12. Die einem Dreieck ein- und anbeschriebenen Kreise zu konstruieren.
13. Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich der Summe oder Differenz zweier gegebenen Quadrate ist.
14. Ein Polygon in ein anderes zu verwandeln, welches eine Ecke weniger hat.
15. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.
16. Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, in welchem eine Seite einer gegebenen Strecke gleich ist.
17. Eine gegebene Strecke in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zu teilen.
18. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu suchen.
19. Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu suchen.
20. Eine gegebene Strecke stetig zu teilen. (Goldener Schnitt.)
21. Eine gegebene Strecke innen und aussen nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen.
22. Zu drei in grader Linie liegenden Punkten den vierten harmonischen Punkt zu konstruieren.
23. Zu drei von einem Punkte ausgehenden Strahlen den vierten harmonischen Strahl zu konstruieren.

b. Geometrische Örter.

1. Der geometrische Ort für alle Punkte, deren Abstand von einem gegebenen Punkte P einer gegebenen Strecke a gleich ist, ist der Kreis mit a um P.
2. Der g. O. für alle Punkte, welche von einer gegebenen graden Linie die Entfernung a besitzen, ist eine Parallele zu der gegebenen Linie im Abstande a.

3. Der g. O. für alle Punkte, welche von den Endpunkten einer gegebenen Strecke gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte der Strecke.
4. Der g. O. für alle Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels gleichweit entfernt sind, ist die Halbierungslinie des Winkels.

5a. Der g. O. für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke über einer gegebenen Strecke als Hypotenuse ist ein Halbkreis über dieser Strecke als Durchmesser.

5b. Der g. O. für die Spitzen aller Dreiecke über einer gegebenen Strecke a als Grundlinie und mit einem gegebenen Winkel α als Winkel an der Spitze ist ein Kreisbogen über der Sehne a, welcher den Winkel α als Peripheriewinkel fasst.

6. Der g. O. für die Halbierungspunkte aller Sehnen eines Kreises, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, ist derjenige Kreis, welcher die Verbindungsstrecke von P mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises zum Durchmesser hat.
7. Der g. O. für die Mittelpunkte der einem Dreieck ein- und anbeschriebenen Kreise ist ein System von drei Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Peripherie des dem gegebenen Dreieck umbeschriebenen Kreises liegen, und von denen jeder durch je zwei Eckpunkte des Dreiecks geht.
8. Der g. O. für die Spitzen aller Dreiecke über einer gegebenen Strecke a als Grundlinie und mit einem gegebenen Seitenverhältnis ist der sog. apollonische Kreis, d. h. der Kreis über derjenigen Strecke als Durchmesser, deren Endpunkte die Strecke a innen und aussen nach dem gegebenen Verhältnis teilen.

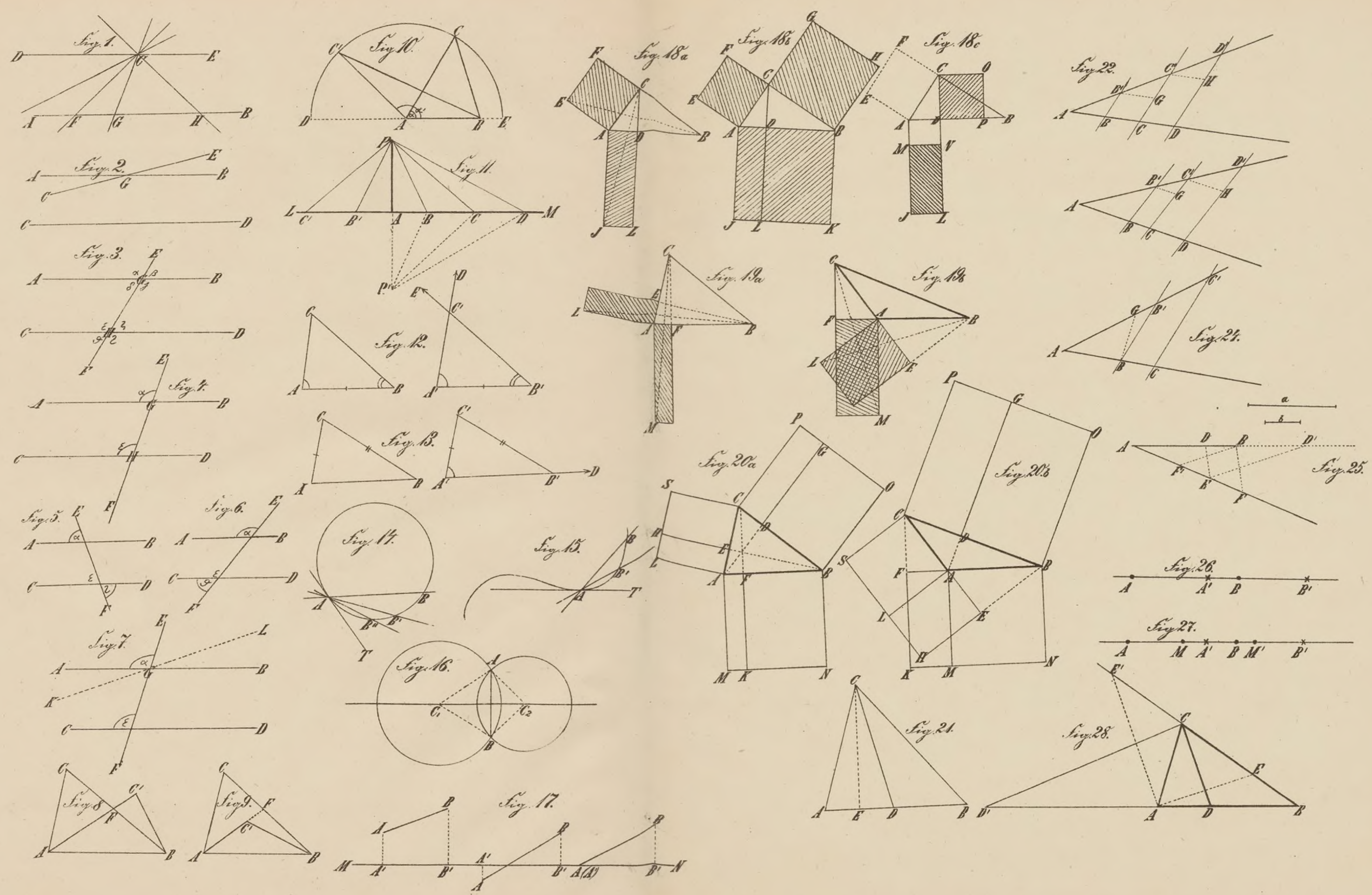
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18a
Fig. 18b
Fig. 18c
Fig. 19a
Fig. 19b
Fig. 20a
Fig. 20b
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.