Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Progymnasiums zu Lauenburg in Pommern.
Ostern 1889.

Anwendung

der

Weierstrass'schen Theorie der elliptischen Funktionen zur Bestimmung der Bewegung eines materiellen Punktes auf einem Kreise, einer Kettenlinie und einer Parabel,

von

C. Frenzel.

Danzig.
Druck von A. W. Kafemann.
1889.

1889. Progr. No. 128.

Anwendung der Weierstrass'schen Theorie der elliptischen Funktionen zur Bestimmung der Bewegung eines materiellen Punktes auf einem Kreise, einer Kettenlinie und einer Parabel.

Vorbemerkungen.

Während die neuere mathematische Litteratur keinen Mangel an trefflichen Werken über die Theorie der elliptischen Funktionen aufweist, fehlte es bisher an einer geeigneten Zusammenstellung von Aufgaben zur Anwendung dieser Theorie. Die meisten Anwendungen giebt Schellbach's grundlegendes Werk „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen" (Berlin 1864); Durège behandelt in seiner „Theorie der elliptischen Funktionen" (4. Auflage Leipzig 1887) das ebene und das sphärische Pendel; Thomae untersucht in seiner „Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden" (Halle 1876) die Bewegung eines materiellen Punktes auf einem Kreise und einer Parabel; Hermite unterwirft in dem Aufsatze „Sur quelques applications des fonctions elliptiques" (Comptes Rendus 1877) das Problem der Rotation eines Körpers um einen festen Punkt einer erneuten und ausführlichen Betrachtung; endlich giebt Bobek in seiner „Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen" (Leipzig 1884) auch eine Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Geometrie, nämlich auf die ebenen Kurven dritter Ordnung. Ausserdem liegen noch in den verschiedenen mathematischen Zeitschriften, Programmabhandlungen und Dissertationen Arbeiten vor, welche sich mit der Lösung solcher Aufgaben beschäftigen, die auf elliptische Funktionen führen.

Erst vor Kurzem ist diesem schon oft empfundenen Mangel an einer einheitlichen Behandlung der mittels elliptischer Funktionen lösbaren Probleme durch das Erscheinen des Halphen'schen Werkes „Théorie des fonctions elliptiques et de leurs applications" (Paris, Gauthier-Villars) abgeholfen worden. Der erste im Jahre 1886 erschienene Band dieses grossartig angelegten Werkes (Gross-Oktav, VIII. und 492 Seiten) enthält die Theorie der elliptischen Funktionen; der Ende vorigen Jahres herausgegebene zweite Band (659 Seiten) behandelt die Anwendungen der elliptischen Funktionen auf Probleme der Mechanik, der Physik, der Geodäsie, der Geometrie und der Integralrechnung; ein dritter Band endlich soll sich mit der Theorie der Transformation und mit den Anwendungen auf die Algebra und Arithmetik beschäftigen, sowie einen historischen Überblick über die elliptischen Funktionen geben. Während in den meisten der oben angeführten Abhandlungen und Werke die von Jacobi, dem Begründer der Theorie, eingeschlagenen Methoden zu Grunde gelegt sind, fusst das Halphen'sche Werk durchaus auf den neueren Weierstrass'schen Bezeichnungen und Methoden.

Es ist dies auch ganz natürlich. Denn, obwohl für manche Probleme, wie z. B. das Problem des gewöhnlichen Kreispendels, die Jacobi'sche Methode, für andere Probleme, wie z. B. das der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt die Weierstrass'sche Methode sich wie von selbst darzubieten scheint, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass diese letztere Methode vor jener mannigfache und gewichtige Vorzüge besitzt. Ihr wesentlichster Vorzug besteht, wie ich schon in meiner Abhandlung „Neue Lösung eines Rotationsproblems" (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXVI., pg. 104 ff.) hervorgehoben habe, darin, dass sie die so unerquickliche Rechnung mit elliptischen Integralen dritter Gattung vermeidet und überhaupt alle jene Methoden überflüssig macht, welche zur Reduktion elliptischer Integrale in reeller Form dienen, sowie die Untersuchung der mannigfachen Fälle, die bei dieser Reduktion zu unterscheiden sind. Andererseits ist man bei Anwendung der Weierstrass'schen Methode nicht in Verlegenheit um die zweckmässigste Substitution, welche das betreffende elliptische Differential auf die sog. Normalform überführt; der einzuschlagende Weg ist hier bestimmt vorgezeichnet, und auch hierin liegt ein gewiss nicht zu unterschätzender Vorzug.

Leider kommt dieser letzte Vorzug in der Halphen'schen Darstellung nicht zur vollen Geltung; es fehlt derselben das einheitliche Prinzip, welches den von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen gegebenen Lösungen zu Grunde lag und denselben eine so hervorragende Einfachheit und Klarheit verlieh. Die Herausgabe der Weierstrass'schen Vorlesungen über die Anwendungen der elliptischen Funktionen würde daher auch heute noch einem dringenden Bedürfnisse abhelfen, umsomehr, als es nur bedauert werden kann, dass es einem französischen Mathematiker zuerst vorbehalten war, die von unserm grössten deutschen Mathematiker gewonnenen Resultate in allerdings durchaus selbständiger Weise zu verarbeiten und der Öffentlichkeit zu übergeben.

Die vorliegende Abhandlung verfolgt einen dreifachen Zweck: Erstens soll sie an einigen der einfachsten mechanischen Probleme, die bereits von anderen Mathematikern wenn auch auf anderem Wege gelöst worden sind*), die Weierstrass'sche Theorie zur Anwendung bringen; sie soll ferner nach dem Vorgange von Schellbach diese Theorie durch einige vollständig durchgeführte numerische Berechnungen erläutern, da durch diese das Verständnis der Theorie wesentlich gefördert wird; endlich soll sie zeigen, wie bei diesen numerischen Berechnungen die hyperbolischen Funktionen in gleicher Weise zur Anwendung kommen, wie die gewöhnlichen Kreisfunktionen. In dieser letzten Beziehung wird, wie ich hoffe, auch dem schon so vielfach behandelten Probleme des Kreispendels eine neue Seite abgewonnen werden, welche der Aufmerksamkeit der Mathematiker bisher entgangen zu sein scheint. Zwar hat bereits Hoüel in einem kurzen aber inhaltsreichen Aufsatze „Notices sur les fonctions hyperboliques et sur quelques tables de ces fonctions" (Nouvelles annales de mathématiques, Jahrgang 1864, pg. 416 ff.) auf die Verwendbarkeit der hyperbolischen Funktionen zur Berechnung elliptischer Funktionen hingewiesen und an einem numerischen Beispiele zu Jacobi's bekannter Abhandlung „Sur la rotation d'un corps" (Jacobi's gesammelte Werke, herausgegeben von Weierstrass, 2. Bd. pg. 329) erläutert; ferner hat Günther in seinem Werke „Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen" (Halle a./S. 1881) andere interessante Anwendungen der hyperbolischen Funktionen auf die Theorie der elliptischen Funktionen gegeben. Doch jene ausgedehnte Verwendbarkeit, welche die hyperbolischen Funktionen bei den meisten auf elliptische Funktionen führenden Problemen finden können, ist auch in diesem an litterarischen Nachweisen überaus reichhaltigen Werke nicht hervorgehoben worden, und in Halphen's oben besprochenem Werke ist von hyperbolischen Funktionen überhaupt an keiner Stelle die Rede.

*) Die Lösung des Pendelproblems befindet sich u. A. in den oben angeführten Werken von Schellbach, Durège und Thomae, sowie in dem vorzüglichen Lehrbuche der analytischen Mechanik von Rausenberger (Leipzig 1888); die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Parabel behandelt Thomae a. a. O.; endlich hat im Programm der Realschule I. Ordnung zu Stralsund, Ostern 1873, Herr Dr. Gentzien die „Bewegung eines materiellen Punktes auf einer gemeinen Kettenlinie" bestimmt.

I. Abschnitt.

Die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Kreislinie.

Zur Bestimmung der Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene unter dem alleinigen Einflusse der Schwerkraft braucht man nicht auf die Differentialgleichungen der Bewegung zurückzugehen; es genügt vielmehr das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft in Verbindung mit der Gleichung der Bahnkurve und den gegebenen Anfangsbedingungen.

Die Gleichung des Kreises sei unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, z:

$$1)\quad x^2 + z^2 = l^2,$$

sodass l den Radius des Kreises oder die Pendellänge bezeichnet und der Anfangspunkt der Koordinaten mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammenfällt; die z-Axe besitze die Richtung der Schwerkraft, die Beschleunigung werde wie üblich mit g, und die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes zur Zeit t mit v bezeichnet. Dann liefert das oben genannte Prinzip folgende Gleichung:

$$2)\quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\,gz + h.$$

Zur Bestimmung der Konstanten h werde angenommen, dass der bewegliche Punkt für $z = l$, also beim unteren Durchgange durch die Vertikale, die Geschwindigkeit v_0 besitze. Die Gleichung (2) geht alsdann über in

$$v_0^{\,2} = 2\,gl + h\,,\ \text{sodass}$$

$$3)\quad h = v_0^{\,2} - 2\,gl$$

ist.

Durch Differentiation der Gleichung (1) nach t ergiebt sich

$$x\,\frac{dx}{dt} + z\,\frac{dz}{dt} = 0\,,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{z^2}{x^2}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{z^2}{l^2 - z^2}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

substituiert man diesen Ausdruck in Gleichung (2), so erhält man zur Bestimmung von z folgende Differentialgleichung I. Ordnung:

$$4)\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)(2\,gz + h) = R\,(z),$$

in welcher unter R (z) das Polygon 3ten (oder 4ten) Grades auf der rechten Seite der Differentialgleichung zu verstehen ist, also ein Polynom, welches in allgemeiner Gestalt die Form

$$5)\quad R\,(z) = Az^4 + 4\,Bz^3 + 6\,Cz^2 + 4\,B'z + A'$$

besitzt. Im vorliegenden Falle ist

$$6)\quad A = 0,\ B = -\frac{g}{2\,l^2},\ C = \frac{h}{6\,l^2},\ B' = \frac{g}{2},\ A' = h.$$

Die Wurzeln der Gleichung $R\,(z) = 0$ sind hier sämtlich reell; ihre Werte sind (in irgend welcher Grössenfolge):

$$\alpha' = 1,\ \alpha'' = -1,\ \alpha''' = -\frac{h}{2\,g} = 1 - \frac{v_0^{\,2}}{2\,g}\,.$$

Die grösste dieser 3 Wurzeln ist α', ferner ist $\alpha'' \gtreqless \alpha'''$, je nachdem $\frac{v_0^2}{2g} \gtreqless 2l$ ist. Um demnach die 3 Wurzeln, die wir jetzt mit α_1, α_2, α_3 bezeichnen wollen, ihrer Grösse nach zu ordnen, indem wir

$$7) \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$$

annehmen, müssen wir 2 Fälle unterscheiden. Im ersten sei

$$\frac{v_0^2}{2g} < 2l,$$

dann ist

$$7a) \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1 - \frac{v_0^2}{2g}, \quad \alpha_3 = -1;$$

im zweiten Falle sei

$$\frac{v_0^2}{2g} > 2l,$$

dann wird

$$7b) \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 1 - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Im ersten Falle ist, wie aus den Gesetzen des freien Falls und aus dem Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft hervorgeht, die Bewegung eine oscillatorische; im zweiten Falle durchläuft der materielle Punkt die ganze Kreisperipherie und führt eine fortdauernde Rotation aus. Im Grenzfalle $\frac{v_0^2}{2g} = 2l$ nähert sich der bewegliche Punkt dem höchsten Punkte der Kreisperipherie asymptotisch.

Die nächste Aufgabe besteht darin, die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = R(z)$$

auf die Weierstrass'sche Normalform

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = S$$

zurückzuführen, in welcher S das Polynom 3^{ten} Grades

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)$$

bezeichnet. Es geschieht dies, wenn man unter z_0 eine willkürliche Konstante versteht, mittels der Substitution:

$$8) \quad s = \frac{\sqrt{R(z_0)}\,\sqrt{R(z)} + R(z_0)}{2(z - z_0)^2} + \frac{\frac{1}{4}R'(z_0)}{z - z_0} + \frac{1}{24}R''(z_0),$$

welche das allgemeine Integral der Differentialgleichung $\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \pm \frac{ds}{\sqrt{S}}$ darstellt*).

Wählt man insbesondere für z_0 eine Wurzel der Gleichung $R(z) = 0$, so geht die vorige Gleichung über in:

$$9) \quad s = \frac{\frac{1}{4}R'(z_0)}{z - z_0} + \frac{1}{24}R''(z_0)\,^{**})$$

---

*) Die Herleitung obiger Formel findet man in der inhaltsreichen Abhandlung von G. Mittag-Leffler „En metod att komma i analystik besittning af de elliptiska funktionerna“ (Helsingfors 1876), sowie in der Abhandlung meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Prof. Scheibner „Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form“ (Separatabdruck aus dem XII. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften) Artikel 5. Vgl. auch Schlömilch's Compendium der höheren Analysis, 1. Bd. § 109; Halphen l. c. 2. Bd., 9. Kapitel.

**) Vgl. Scheibner l. c., Art. 10.

oder umgekehrt:

$$10)\quad z = z_0 + \frac{\frac{1}{4}R'(z_0)}{s - \frac{1}{24}R''(z_0)},$$

und dies ist die wichtige, bei jedem mechanischen oder geometrischen Probleme wiederkehrende Substitution.

Wir wählen für z_0 die Wurzel l, also denjenigen Wurzelwert, den die Variable z sowohl im ersten wie auch im zweiten Falle im Laufe der Bewegung anzunehmen imstande ist. Dann ist

$$11)\quad s = \frac{\frac{1}{4}R'(l)}{z - l} + \frac{1}{24}R''(l);\quad z = l + \frac{\frac{1}{4}R'(l)}{s - \frac{1}{24}R''(l)}.$$

Zur Ermittelung der Werte von e_1, e_2, e_3 hat man diejenigen Werte von s zu bestimmen, für welche S verschwindet. Nun folgt aber aus (11) und (4)

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\frac{1}{4}R'(l)}{(z-l)^2}\cdot\frac{dz}{dt},\ \text{also}$$

$$S = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{[\frac{1}{4}R'(l)]^2}{(z-l)^4}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\left[\frac{1}{4\,l}R'(l)\right]^2\cdot\frac{(z+l)(2gz+h)}{(z-l)^3}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet dann und nur dann, wenn z einen der Werte

$$\infty,\ -l,\ -\frac{h}{2g} = l - \frac{v_0^2}{2g}$$

annimmt. Die entsprechenden Werte von s, die einstweilen mit e', e'', e''' bezeichnet werden mögen, sind

$$e' = \frac{1}{24}R''(l),\quad e'' = \frac{1}{24}R''(l) - \frac{1}{8\,l}R'(l),\quad e''' = \frac{1}{24}R''(l) - \frac{g}{2\,v_0^2}R'(l),$$

oder da

$$12)\quad \left|\begin{aligned} R'(l) &= -\frac{2\,v_0^2}{l} \\ R''(l) &= -\frac{2\,v_0^2}{l^2} - \frac{8\,g}{l}\end{aligned}\right.$$

ist:

$$e' = -\frac{v_0^2}{12\,l^2} - \frac{g}{3\,l},\quad e'' = \frac{v_0^2}{6\,l^2} - \frac{g}{3\,l},\quad e''' = -\frac{v_0^2}{12\,l^2} + \frac{2\,g}{3\,l}.$$

Von diesen drei Grössen, die wieder sämtlich reell sind, ist offenbar, da $R'(l)$ wesentlich negativ ist, e' die kleinste; da nun

$$e'' - e''' = \frac{v_0^2 - 4\,gl}{4\,l^2}$$

ist, so wird $e'' \gtrless e'''$, je nachdem $\frac{v_0^2}{2g} \gtrless 2\,l$ ist, d. h. je nachdem der zweite oder erste Fall vorliegt. Setzt man daher, wie üblich, die Reihenfolge

$$13)\quad e_1 > e_2 > e_3$$

fest, so ist im ersten Falle $e_1 = e'''$, $e_2 = e''$, $e_3 = e'$

und im zweiten Falle $e_1 = e''$, $e_2 = e'''$, $e_3 = e'$,

d. h. es ist, wenn wir wie bisher die auf den ersten bezw. zweiten Fall bezüglichen Formeln mit den Indices a bezw. b bezeichnen:

$$13_a)\quad \left|\begin{aligned} &e_1 = -\frac{v_0^2}{12\,l^2} + \frac{2\,g}{3\,l},\quad e_2 = \frac{v_0^2}{6\,l^2} - \frac{g}{3\,l},\quad e_3 = -\frac{v_0^2}{12\,l^2} - \frac{g}{3\,l} = \frac{1}{24}R''(l) \\ &e_2 - e_3 = \frac{v_0^2}{4\,l^2},\quad e_1 - e_3 = \frac{g}{l},\quad e_1 - e_2 = \frac{g}{l} - \frac{v_0^2}{4\,l^2};\end{aligned}\right.$$

$$13b)\quad \left|\begin{array}{lll} e_1 = \frac{v_0^2}{6\,l^2} - \frac{g}{3\,l}, & e_2 = -\frac{v_0^2}{12\,l^2} + \frac{2\,g}{3\,l}, & e_3 = -\frac{v_0^2}{12\,l^2} - \frac{g}{3\,l} = \frac{1}{24}R''(l) \\ e_2 - e_3 = \frac{g}{l}, & e_1 - e_3 = \frac{v_0^2}{4\,l^2}, & e_1 - e_2 = \frac{v_0^2}{4\,l^2} - \frac{g}{l}. \end{array}\right.$$

Durch Substitution (11) ist nunmehr die Differentialgleichung (4) übergegangen in

$$14)\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4\,(s - e_1)\,(s - e_2)\,(s - e_3)\,,$$

deren vollständiges Integral

$$15)\quad s = \wp\,(t - t_0)$$

ist, wo $\wp$ die bekannte Weierstrass'sche doppelt periodische Funktion mit den primitiven Perioden $2\,\omega$, $2\,\omega'$ und t_0 eine willkürliche Konstante bezeichnet, welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängt. Aus den Gleichungen (11), (12) und (15) ergiebt sich somit als das vollständige Integral der ursprünglichen Differentialgleichung (4):

$$16)\quad z = l - \frac{\frac{v_0^2}{2\,l}}{\wp\,(t - t_0) - e_3}.$$

Bei den weiteren Rechnungen werde ich mich auf die „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz" (Göttingen 1885) beziehen. Die in denselben angewandten Thetafunktionen sind definiert durch die Reihen

$$17)\quad \left|\begin{array}{l} \vartheta_1(v, q) = 2\,q^{\frac{1}{4}}\,(\sin v\pi - q^2 \sin 3\,v\pi + q^6 \sin 5\,v\pi \mp \ldots) \\ \vartheta_2(v, q) = 2\,q^{\frac{1}{4}}\,(\cos v\pi + q^2 \cos 3\,v\pi + q^6 \cos 5\,v\pi + \ldots) \\ \vartheta_3(v, q) = 1 + 2\,q \cos 2\,v\pi + 2\,q^4 \cos 4\,v\pi + 2\,q^9 \cos 6\,v\pi + \ldots \\ \vartheta_0(v, q) = 1 - 2\,q \cos 2\,v\pi + 2\,q^4 \cos 4\,v\pi - 2\,q^9 \cos 6\,v\pi \pm \ldots\,, \end{array}\right.$$

ferner ist

$$18)\quad \left|\begin{array}{l} q = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}, \quad \varkappa^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad \varkappa'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \\ e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1. \end{array}\right.$$

Zunächst ergiebt sich, da nach der Formelsammlung Art. (18)

$$\wp(u) - e_3 = \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma^2(u)}$$

ist:

$$z = l - \frac{v_0^2}{2\,l} \cdot \frac{\sigma^2(t - t_0)}{\sigma_3^2(t - t_0)},$$

also

$$1 - \frac{z}{l} = \frac{v_0^2}{2\,l^2} \cdot \frac{\sigma^2(t - t_0)}{\sigma_3^2(t - t_0)}.$$

Nun ist $\frac{z}{l}$ der Cosinus desjenigen Winkels, den das Pendel zur Zeit t mit der z-Axe, d. h. mit der Richtung der Schwere bildet; bezeichnet man diesen Winkel mit ψ, so erhält man

$$1 - \cos\psi = 2 \sin^2\frac{\psi}{2} = \frac{v_0^2}{2\,l^2} \cdot \frac{\sigma^2(t - t_0)}{\sigma_3^2(t - t_0)},$$

mithin

$$\sin\frac{\psi}{2} = \pm\frac{v_0}{2\,l} \cdot \frac{\sigma\,(t - t_0)}{\sigma_3\,(t - t_0)}.$$

Geht man endlich von den σ- zu den ϑ-Funktionen über (Formelsammlung Art. 34 und 35) und setzt

$$19) \quad u = \frac{t - t_0}{2\omega},$$

so wird

$$\sin\frac{\psi}{2} = \pm\frac{v_0\omega}{l}\cdot\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_1'(o)}:\frac{\vartheta_0(u)}{\vartheta_0(o)} = \pm\frac{v_0\omega}{l\pi}\cdot\frac{1}{\vartheta_2(o)\vartheta_3(o)}\cdot\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)} = \pm\frac{v_0}{2l}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}}\cdot\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)},$$

oder endlich, da nach (13_a) und (13_b) in beiden Fällen

$$(e_1 - e_3)(e_2 - e_3) = \frac{v_0^{\,2} g}{4 l^3}$$

ist:

$$20) \quad \sin\frac{\psi}{2} = \pm\sqrt[4]{\frac{v_0^{\,2}}{4gl}}\cdot\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)}. -$$

Für die weitere Entwickelung ist eine Trennung der beiden Fälle erforderlich.

1. Fall $\left(\frac{v_0^{\,2}}{2g} < 2l\right)$.

Aus den Gleichungen (13_a) ergiebt sich

$$\varkappa^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{v_0^{\,2}}{4gl}, \text{ also}$$

$$20_a) \quad \sin\frac{\psi}{2} = \pm\sqrt{\varkappa}\cdot\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)}.$$

Nimmt man an, dass für $v = 0$ $z = z_0$ sei und bezeichnet den Winkel, den das Pendel in der höchsten Lage mit der positiven z-Axe bildet, (die sog. Amplitude) mit α, so ist nach Gleichung (2) u. (3)

$$\begin{aligned} h &= -2gz_0 \\ v_0^{\,2} &= 2g(l - z_0) \\ \varkappa^2 &= \frac{v_0^{\,2}}{4gl} = \frac{l - z_0}{2l} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z_0}{l}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) = \sin^2\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

also

$$21_a) \quad \varkappa = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Schliesslich ist noch der Wert der Konstanten t_0 und das Vorzeichen der Quadratwurzel in (20_a) zu bestimmen. Rechnet man die Zeit von einem derjenigen Momente an, in denen das Pendel durch die Vertikale geht, sodass für $t = 0$ auch $\psi = 0$ wird, so ist

$$22_a) \quad t_0 = 0$$

zu setzen. Nimmt man ferner an, dass zu Anfang der Bewegung ψ positiv sei, so ist in (20_a) das positive Vorzeichen zu wählen, sodass definitiv

$$23_a) \quad \sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)}, \quad u = \frac{t}{2\omega}$$

wird.

Da, wie aus den Gleichungen (17) hervorgeht,

$$\begin{aligned} \vartheta_1(v + 1) &= -\vartheta_1(v) \\ \vartheta_0(v + 1) &= \vartheta_0(v) \end{aligned}$$

ist, so besitzt der Quotient $\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)}$ als Funktion von u die reelle Periode 2, als Funktion von t hingegen die reelle Periode 4ω, d. h. das Pendel befindet sich immer nach Verlauf von 4ω Zeiteinheiten wieder in demselben Bewegungszustande, oder m. a. W.: Die ganze Schwingungsdauer ist gleich $4\,\omega$. Bezeichnet man die einfache Schwingungsdauer, d. h. die Zeit eines Hin- oder Herganges mit T, so ist demnach

$$24_a)\quad T = 2\,\omega,$$

und ω selber stellt die Zeit dar, die das Pendel braucht, um aus der höchsten Lage in die tiefste (vertikale) Lage zu gelangen, oder umgekehrt.

Will man als Anfangspunkt der Zeit nicht wie oben einen Durchgang des Pendels durch die Vertikale wählen, sondern einen derjenigen Zeitmomente, in denen das Pendel die höchste Lage besitzt, so hat man, wie soeben gezeigt wurde,

$$25_a)\quad t_0 = \omega$$

zu wählen; man erhält alsdann

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)},\quad u = \frac{t-\omega}{2\,\omega} = \frac{t}{2\,\omega} - \frac{1}{2},$$

sodass in der That für $t = \omega$ $\psi = 0$ wird. Nun ergiebt sich aber aus den Definitionsgleichungen der ϑ-Funktionen, dass

$$\begin{aligned}\vartheta_1(v - \tfrac{1}{2}) &= -\vartheta_2(v)\\ \vartheta_0(v - \tfrac{1}{2}) &= \vartheta_3(v)\end{aligned}$$

ist; somit ist bei dieser Konstantenbestimmung

$$26_a)\quad \sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_3(u)},\quad u = \frac{t}{2\,\omega}.$$

Zur Bestimmung der reellen Periode $2\,\omega$ oder der Schwingungsdauer dient eine der drei Formeln (Formelsammlung Art. 35):

$$27)\quad \left|\begin{aligned}\frac{2\,\omega}{\pi}\sqrt{e_2 - e_3} &= \vartheta_2^{\,2}(o) = [2\,q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \ldots)]^2\\ \frac{2\,\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - e_3} &= \vartheta_3^{\,2}(o) = (1 + 2\,q + 2\,q^4 + 2\,q^9 + \ldots)^2\\ \frac{2\,\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - e_2} &= \vartheta_0^{\,2}(o) = (1 - 2\,q + 2\,q^4 - 2\,q^9 \pm \ldots)^2,\end{aligned}\right.$$

in denen das Wurzelzeichen positiv zu nehmen ist. Wählt man, um zu dem bekannten Ausdruck für die Schwingungsdauer zu gelangen, die mittlere dieser Formeln, so wird mit Rücksicht auf (13_a)

$$28_a)\quad T = 2\,\omega = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\vartheta_3^{\,2}(o) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot(1 + 2\,q + 2\,q^4 + \ldots)^2.$$

Für sehr kleine Werte der Amplitude α nähert sich, wie im Verlaufe der numerischen Rechnung gezeigt werden wird, q der Grenze 0; man hat also für solche Werte von α die aus der elementaren Mechanik bekannte Formel $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. —

Vorbereitungen zur numerischen Rechnung.

(Die lineare Transformation der ϑ-Funktionen.)

Ist der Ausschlagswinkel oder die Amplitude α gegeben, so ergiebt sich nach Gleichung (21_a)

$$\varkappa = \sin\frac{\alpha}{2},\quad \varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2} = \cos\frac{\alpha}{2}\ \text{und}\ v_0^{\,2} = 4\,gl\,.\,\varkappa^2.$$

Somit sind zunächst die Grössen e_1, e_2, e_3 bekannt. Um ferner die reelle Periode 2ω (d. i. die einfache Schwingungsdauer) zu berechnen, bedarf es zufolge der Gleichungen (27) erst der Berechnung von q. Aus (18) und (27) ergeben sich aber folgende Beziehungen zwischen q einerseits und $\varkappa$, $\varkappa'$ andererseits:

$$29)\quad \left| \begin{aligned} \varkappa &= \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = 4\,q^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1 + q^2 + q^6 + \ldots.}{1 + 2\,q + 2\,q^4 + \ldots.}\right)^2 \\ \varkappa' &= \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = \left(\frac{1 - 2\,q + 2\,q^4 \mp \ldots.}{1 + 2\,q + 2\,q^4 + \ldots.}\right)^2; \end{aligned} \right.$$

durch Umkehrung einer dieser beiden Gleichungen, etwa der zweiten, erhält man, wenn zur Abkürzung

$$30)\quad \lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{\varkappa'}}{1 + \sqrt{\varkappa'}}$$

gesetzt wird:

$$31)\quad q = \lambda + 2\,\lambda^5 + 15\,\lambda^9 + 150\,\lambda^{13} + 1707\,\lambda^{17} + \ldots.\,^{*)}.$$

Ist somit q gefunden, so liefert jede der drei Gleichungen (27) unmittelbar den Wert von 2ω, d. h. die Grösse der einfachen Schwingungsdauer des Pendels.

Der weitere Verlauf der numerischen Rechnung lehnt sich, wie weiter unten gezeigt werden wird, unmittelbar an die Gleichungen (17) und (26_a) an, bietet also zunächst keinen Anlass zu weiteren allgemeinen Bemerkungen.

Letzteres ist jedoch der Fall mit der Gleichung (31), die zur Berechnung von q dient. Diese Reihenentwickelung konvergiert im allgemeinen sehr gut, besser als sämtliche in der elementaren Mathematik vorkommende Reihen. Benützt man bei der Rechnung siebenstellige Logarithmentafeln, so kommt für solche Werte von $\frac{\alpha}{2}$, die kleiner als $38^0\,15'$ sind, schon das 2te Glied der Reihenentwickelung nicht mehr in Betracht, während, wenn $\frac{\alpha}{2}$ grösser als der soeben angegebene Winkel aber kleiner als $66^0\,47'$ ist, die beiden ersten Glieder obiger Reihe genügen**). Also nur für verhältnismässig sehr grosse Werte von α braucht man zur Berechnung von q mehr als die beiden ersten Glieder jener Reihe. Es ist nun die Bemerkung von Wichtigkeit, dass man in keinem Falle mehr als die beiden ersten Glieder braucht.

Um diese Behauptung zu beweisen, müssen wir auf eine Umformung der Definitionsgleichungen (17) für die ϑ-Funktionen eingehen, die unter dem Namen der „linearen Transformation" bekannt ist.

Führt man in den Gleichungen (17) statt der trigonometrischen Funktionen die Exponentialfunktion ein, indem man

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i}$$

und ausserdem $q = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$ setzt, so gehen dieselben über in

---

*) Die einfachste Herleitung dieser Reihe (von den Konvergenzbedingungen abgesehen) giebt Schlömilch in seinem Compendium der höheren Analysis, 2. Bd. pag. 438; vgl. auch Schellbach l. c. § 43, Bobek l. c. pag. 211 ff., Thomae „Elementare Theorie der analytischen Funktionen" (Halle 1880) pag. 125.

**) Die oben angegebenen Werte ergeben sich durch eine einfache Rechnung aus den Gleichungen $2\,\lambda^5 = 0{,}00000005$ bezw. $15\,\lambda^9 = 0{,}00000005$.

$$32)\quad \left|\begin{aligned}
\vartheta_1(v,q) &= \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)v\pi i} &&= \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n e^{((n+\frac{1}{2})^2\omega' + (2n+1)v\omega)\frac{\pi i}{\omega}} \\
\vartheta_2(v,q) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)v\pi i} &&= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{((n+\frac{1}{2})^2\omega' + (2n+1)v\omega)\frac{\pi i}{\omega}} \\
\vartheta_3(v,q) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n q^{n^2} e^{2nv\pi i} &&= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{(n^2\omega' + 2nv\omega)\frac{\pi i}{\omega}} \\
\vartheta_0(v,q) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n q^{n^2} e^{2nv\pi i} &&= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n e^{(n^2\omega + 2nv\omega)\frac{\pi i}{\omega}}.
\end{aligned}\right.$$

Die weitere Umformung möge auf eine dieser ϑ-Funktionen, etwa auf ϑ_3 beschränkt werden. Schreibt man die dritte Gleichung in der Form

$$\vartheta_3(v,q) = e^{\frac{v^2\omega\pi}{\omega' i}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{\left(n+\frac{v\omega}{\omega'}\right)^2 \cdot \frac{\omega'\pi i}{\omega}},$$

und führt eine neue Variable t ein mittels der Gleichung

$$33)\quad \frac{v\omega}{\omega'} = \frac{t}{2\pi} \quad \text{oder} \quad v = \frac{\omega'}{2\omega\pi}\cdot t,$$

so ergiebt sich

$$\vartheta_3\left(\frac{\omega' t}{2\omega\pi}, q\right) = e^{\frac{\omega' t^2}{4\omega\pi i}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}\cdot\left(\frac{t}{2\pi}+n\right)^2}$$

oder

$$\varphi_3(t) = e^{-\frac{\omega' t^2}{4\omega\pi i}} \cdot \vartheta_3\left(\frac{\omega' t}{2\omega\pi}, q\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}\cdot\left(\frac{t}{2\pi}+n\right)^2}.$$

Diese Funktion $\varphi_3(t)$ bleibt ihrem Werte nach unverändert, wenn man n durch $n+1$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, t durch $t + 2\pi$ ersetzt, besitzt also die Periode 2π. Daher kann dieselbe in eine Fourier'sche Reihe entwickelt werden von der Form

$$\varphi_3(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m a_m e^{mti},$$

wo

$$a_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_3(t) e^{-mti}\, dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}\left(\frac{t}{2\pi}+n\right)^2 - mti}\, dt$$

ist. Um den Summenindex n unter dem Integralzeichen wegzuschaffen, braucht man nur

$$\frac{t}{2\pi} + n = u$$

zu setzen, dann wird

$$a_m = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}u^2 - 2mu\pi i}\, du.$$

Die Glieder dieser Summe schliessen sich mit ihren Grenzen stetig an einander, sodass sich a_m in der Form darstellt

$$a_m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}u^2 - 2mu\pi i}\, du.$$

Nun ist aber, wie aus der Theorie der Γ Funktionen bekannt ist,

$$34)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 \pm bx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{b^2}{4a}},$$

mithin wird

$$a_m = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot e^{-m^2 \frac{\omega \pi i}{\omega'}}$$

und somit

$$\varphi_3(t) = e^{\frac{\omega' t^2}{4\omega\pi i}} \cdot \vartheta_3\left(\frac{\omega' t}{2\omega\pi}, q\right) = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, e^{-n^2 \frac{\omega\pi i}{\omega'} + nti},$$

oder endlich mit Rücksicht auf die Substitutionsgleichung (33)

$$e^{\frac{\omega\pi i}{\omega'} \cdot v^2} \cdot \vartheta_3(v, q) = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, e^{(-n^2\omega + 2nv\omega)\frac{\pi i}{\omega'}}.$$

Die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung hat wieder die Form einer ϑ-Reihe. Führt man nähmlich neben den Argumenten v und q zwei neue Argumente v' und q' ein, indem man

$$35)\quad \left| \begin{array}{l} q' = e^{-\frac{\omega\pi i}{\omega'}} \\ v' = \frac{\omega i}{\omega'} \cdot v \end{array} \right.$$

setzt, sodass die symmetrischen Relationen bestehen

$$36)\quad \omega v = \frac{\omega'}{i} v' \quad \text{und} \quad \operatorname{Log} q \,.\, \operatorname{Log} q' = \pi^2 \;*),$$

so ergiebt sich

$$37)\quad \left| \begin{array}{l} e^{\frac{\omega\pi i}{\omega'} v^2}\, \vartheta_3(v, q) = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \vartheta_3(v'i, q'), \quad \text{und analog} \\ e^{\frac{\omega\pi i}{\omega'} v^2}\, \vartheta_0(v, q) = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \vartheta_2(v'i, q'), \\ e^{\frac{\omega\pi i}{\omega'} v^2}\, \vartheta_1(v, q) = i\sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \vartheta_1(v'i, q'), \\ e^{\frac{\omega\pi i}{\omega'} v^2}\, \vartheta_2(v, q) = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \vartheta_0(v'i, q'), \end{array} \right.$$

wo

$$\vartheta_3(v'i, q') = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, q'^{n^2} e^{2nv'\pi} = 1 + q'\left(e^{2v'\pi} + e^{-2v'\pi}\right) + q'^4\left(e^{4v'\pi} + e^{-4v'\pi}\right) + \ldots$$

$$\vartheta_0(v'i, q') = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, (-1)^n q'^{n^2} e^{2nv'\pi} = 1 - q'\left(e^{2v'\pi} + e^{-2v'\pi}\right) + q'^4\left(e^{4v'\pi} + e^{-4v'\pi}\right) \mp \ldots$$

---

*) Es sind hier und im folgenden die Bezeichnungen von Gronau angewendet worden, deren sich dieser um die Theorie der hyperbolischen Funktionen hochverdiente Danziger Mathematiker in seinen Schriften über hyperbolische Funktionen bedient, insbes. in seinen „Tafeln für sämtliche trigonometrische Funktionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren“ (Danzig 1863, im Selbstverlage der Danziger Naturforschenden Gesellschaft). Danach werden die Briggs'schen Logarithmen mit dem Zeichen log, die natürlichen mit dem Zeichen Log; die cyklischen Funktionen mit sin, cos etc., die hyperbolischen mit Sin, Cos etc. bezeichnet.

$$i\vartheta_1(v'i, q') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q'^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)v'\pi} = q'^{\frac{1}{4}}\left(e^{v'\pi} - e^{-v'\pi}\right) - q'^{\frac{9}{4}}\left(e^{3v'\pi} - e^{-3v'\pi}\right) \pm \ldots$$

$$\vartheta_2(v'i, q') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q'^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)v'\pi} = q'^{\frac{1}{4}}\left(e^{v'\pi} + e^{-v'\pi}\right) + q'^{\frac{9}{4}}\left(e^{3v'\pi} + e^{-3v'\pi}\right) + \ldots,$$

d. h.

$$38)\quad \left|\begin{array}{l} \vartheta_3(v'i, q') = 1 + 2q' \operatorname{Cos} 2v'\pi + 2q'^4 \operatorname{Cos} 4v'\pi + 2q'^9 \operatorname{Cos} 6v'\pi + \ldots \\ \vartheta_0(v'i, q') = 1 - 2q' \operatorname{Cos} 2v'\pi + 2q'^4 \operatorname{Cos} 4v'\pi - 2q'^9 \operatorname{Cos} 6v'\pi \pm \ldots \\ i\vartheta_1(v'i, q') = 2q'^{\frac{1}{4}}(\operatorname{Sin} v'\pi - q'^2 \operatorname{Sin} 3v'\pi + q'^6 \operatorname{Sin} 5v'\pi \mp \ldots) \\ \vartheta_2(v'i, q') = 2q'^{\frac{1}{4}}(\operatorname{Cos} v'\pi + q'^2 \operatorname{Cos} 3v'\pi + q'^6 \operatorname{Cos} 5v'\pi + \ldots) \end{array}\right.$$

ist. — Die Formeln (37) gelten für beliebige reelle oder komplexe Werte von ω und ω'; der Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}$ ist, wie bei der Bestimmung des Integrals in (34) gezeigt wird, derjenige ihrer beiden Werte beizulegen, dessen reeller Bestandteil positiv ist. Hier, wo ω und $\frac{\omega'}{i}$ positiv reell sind, ist also jene Wurzel ebenfalls positiv zu nehmen.

Für $v = o$ wird auch $v' = o$. und demnach

$$39)\quad \left|\begin{array}{l} \vartheta_3(o, q) = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \vartheta_3(o, q') \\ \vartheta_0(o, q) = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \vartheta_2(o, q') \\ \vartheta_2(o, q) = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \vartheta_0(o, q'), \end{array}\right.$$

während $\vartheta_1(o)$ identisch verschwindet. Die Gleichungen (27) gehen daher über in:

$$\frac{2\omega}{\pi}\sqrt{e_2 - e_3} = \vartheta_2^2(o, q) = \frac{\omega i}{\omega'}\vartheta_0^2(o, q')$$

$$\frac{2\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - e_3} = \vartheta_3^2(o, q) = \frac{\omega i}{\omega'}\vartheta_3^2(o, q')$$

$$\frac{2\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - e_2} = \vartheta_0^2(o, q) = \frac{\omega i}{\omega'}\vartheta_2^2(o, q'),$$

aus denen sich mit Hülfe der Gleichungen (38) ergiebt:

$$27)^*\quad \left|\begin{array}{l} \frac{2\omega'}{\pi i}\sqrt{e_2 - e_3} = \vartheta_0^2(o, q') = (1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 \pm \ldots)^2 \\ \frac{2\omega'}{\pi i}\sqrt{e_1 - e_3} = \vartheta_3^2(o, q') = (1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + \ldots)^2 \\ \frac{2\omega'}{\pi i}\sqrt{e_1 - e_2} = \vartheta_2^2(o, q') = [2q'^{\frac{1}{4}}(1 + q'^2 + q'^6 + \ldots)]^2, \end{array}\right.$$

und somit nach (29):

$$29)^*\quad \left|\begin{array}{l} \varkappa = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = \left(\frac{1 - 2q' + 2q'^4 \mp \ldots}{1 + 2q' + 2q'^4 + \ldots}\right)^2 \\ \varkappa' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = 4q'^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 + q'^2 + q'^6 + \ldots}{1 + 2q' + 2q'^4 + \ldots}\right)^2. \end{array}\right.$$

Der unmittelbare Anblick der Gleichungen (29) und (29)* zeigt, dass $\varkappa$ bezw. $\varkappa'$ in derselben Weise von q abhängen, wie $\varkappa'$ bezw. $\varkappa$ von q'; umgekehrt ist also q dieselbe Funktion von $\varkappa$ bezw. $\varkappa'$, wie q' von $\varkappa'$ bezw. $\varkappa$.

Anstatt also, wie dies oben in den Gleichungen (30) und (31) geschehen ist, die Grössen λ und q als Funktionen von $\varkappa'$ darzustellen, kann man auch λ' und q' als Funktionen von $\varkappa$ berechnen, indem man λ' definiert durch die Gleichung

$$30)^* \quad \lambda' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{\varkappa}}{1+\sqrt{\varkappa}};$$

alsdann wird

$$31)^* \quad q' = \lambda' + 2\,\lambda'^5 + 15\,\lambda'^9 + 150\,\lambda'^{13} + 1707\,\lambda'^{17} + \ldots .$$

Ist auf diese Weise der Wert von q' gefunden, so ergiebt sich aus einer der Gleichungen (27)* der Wert von $\frac{\omega'}{i}$, und hieraus nach Gleichung (35):

$$40) \quad \omega = \frac{\omega'}{\pi i} . \operatorname{Log} \frac{1}{q'} . \text{ —}$$

Die Reihenentwickelungen (31) und (31)* ergänzen sich hinsichtlich ihrer Konvergenz. Man wird die erste oder zweite dieser Reihen anwenden, je nachdem

$$\varkappa' \gtreqless \sqrt{\tfrac{1}{2}} \gtreqless \varkappa, \text{ d. h. (da } e_1 + e_2 + e_3 = o \text{ ist)}$$

$$e_2 \lesseqgtr o \qquad \text{oder}$$

$$\frac{\alpha}{2} \lesseqgtr 45^0$$

ist. Wenn daher $\frac{\alpha}{2} < 45^0$ ist, so wird man der Reihe nach die Grössen λ, q und ω mit Hülfe der Gleichungen (30), (31) und (27) berechnen; ist hingegen $\frac{\alpha}{2} > 45^0$, so wird man ebenso die Grössen λ', q' und $\frac{\omega'}{i}$ aus den Gleichungen (30)*, (31)* und (27)*, und sodann den Wert von ω mit Hülfe der Gleichung (40) ermitteln.

Damit ist auch die oben (pg. 11) aufgestellte Behauptung bewiesen: Für die meisten Werte von $\frac{\alpha}{2}$ genügt bei Anwendung siebenstelliger Logarithmentafeln das 1te Glied der Reihenentwickelung (31) resp. (31)*; nur für verhältnismässig wenige Werte von $\frac{\alpha}{2}$ werden 2, niemals aber mehr Glieder jener Reihenentwickelung erforderlich sein.

Die obigen Entwickelungen sind nun auch von Einfluss auf die Gleichung (26a), welche für eine gegebene Zeit t den Wert von ψ bestimmt. Die in dieser Gleichung auftretenden ϑ-Funktionen können sowohl mittels der Gleichungen (17) durch cyklisch-trigonometrische Funktionen, als auch mittels der Gleichungen (38) durch hyperbolische Funktionen berechnet werden. Da die Reihenentwickelungen (17) und (38) nach Vielfachen von q bezw. q' fortschreiten und daher um so schneller konvergieren, je kleiner q bezw. q' ist, so wird man aus den oben angegebenen Gründen die Rechnung mit cyklisch-trigonometrischen Funktionen vorziehen, wenn $\frac{\alpha}{2} < 45^0$ ist, hingegen mit hyperbolischen Funktionen, wenn $\frac{\alpha}{2} > 45^0$ ist. Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass die Rechnung mit hyperbolischen Funktionen leichter von statten geht, als die Rechnung mit cyklischen Funktionen, da bei diesen auf den Wechsel der Vorzeichen in den verschiedenen Quadranten zu achten ist, was bei jenen Funktionen nicht der Fall ist. Dabei bliebe nur zu wünschen übrig, dass die Gronau'schen Tafeln, welche m. E. den Forti'schen („Tavole de' numeri e delle funzioni circolari ed iperboliche", Torino-Firenze-Milano 1870) trotz der entgegengesetzten Meinung Günther's bei weitem vorzuziehen sind, von 5 auf 7 Dezimalen vervollständigt würden.

Numerische Rechnung.

Ein Pendel von der Länge $l = 1$ m besitze zu Anfang der Bewegung die Neigung $\alpha^0 (o < \alpha < \pi)$ gegen die abwärts gerichtete Vertikale und werde ohne Anfangsgeschwindigkeit eine Stunde lang in Bewegung gelassen; die Beschleunigung der Schwerkraft sei $g = 9{,}81$. Wo befindet sich das Pendel genau nach Ablauf dieser Stunde?

1. Beispiel: Der Ausschlagswinkel α sei gleich 80^0, also $\frac{\alpha}{2} = 40^0$. Für diesen Wert wird

$$\begin{aligned}
\varkappa' &= \cos 40^0 = 0{,}7660444 \\
\sqrt{\varkappa'} &= 0{,}8752396, \\
\log \lambda &= 0{,}5219900 - 2; \quad \lambda = 0{,}03326519 \\
5 \log \lambda &= 0{,}6099500 - 8 \\
\log 2 &= \underline{0{,}3010300} \\
& \quad 0{,}9109800 - 8; \; \underline{2\lambda^5 = 0{,}00000008} \\
& \qquad\qquad\qquad q = 0{,}03326527 \\
& \qquad\qquad\quad \log q = 0{,}5219910 - 2 \\
\vartheta_3(o, q) &= 1 + 2q + 2q^4 + \ldots = 1{,}06653299,
\end{aligned}$$

mithin nach Gleichung (28_a)

$$\log \omega = 0{,}7562340 - 1; \quad \omega = 0{,}57047158$$
$$T = 2\omega = 1{,}14094316.$$

Die Dauer einer einfachen Schwingung beträgt somit 1,14094316 Sekunden. Um die Anzahl der Schwingungen zu berechnen, welche das Pendel innerhalb einer Stunde ausführt, hat man mit 1,14094316 in 3600 zu dividieren und findet als Quotient 3155 mit dem Rest 0,32433. Das Pendel führt somit in einer Stunde 3155 einfache Schwingungen aus und fällt nachher noch 0,32433 Sekunden.

Wo befindet sich nun das Pendel nach Verlauf dieser 0,32433 Sekunden?

Da dieser Zeitraum kleiner ist als die Dauer einer halben einfachen Schwingung, so wird das Pendel aus der höchsten Lage noch so weit fallen, bis sein Neigungswinkel ψ gegen die Vertikale den durch die Gleichung (26_a)

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\varkappa} \cdot \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_3(u)} = \sqrt{\varkappa} \,.\, 2 q^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\cos\frac{t\pi}{2\omega} + q^2 \cos\frac{3\,t\pi}{2\omega} \Big| + q^6 \cos\frac{5\,t\pi}{2\omega} + \ldots}{1 + 2q\cos\frac{2\,t\pi}{2\omega} + 2q^4\cos\frac{4\,t\pi}{2\omega} \Big| + \ldots}$$

bestimmten Wert erhält. Die Glieder hinter dem vertikalen Striche kommen bei Anwendung siebenstelliger Logarithmentafeln nicht mehr in Betracht, in den meisten Fällen genügen sogar noch weniger Glieder.

Nun ist

$$\frac{t\pi}{2\omega} = \frac{t\,.\,180^0}{2\omega} = 51^0{,}167667 = 51^0\,10'\,3'',6$$

$$\cos\frac{t\pi}{2\omega} = \sin 38^0\,49'\,56'',4 = 0{,}62704357$$

$$2q\cos\frac{2\,t\pi}{2\omega} = -2q\sin 12^0\,20'\;7'',2 = -0{,}01421311$$

$$q^2 \cos \frac{3\,t\pi}{2\,\omega} = -\ q^2 \sin 63^0\,30'\,10'',8 = -0{,}00099034$$

$$2\,q^4 \cos \frac{4\,t\pi}{2\,\omega} = -2\,q^4 \sin 65^0\,19'\,45'',6 = -0{,}00000223\ ,$$

mithin, wenn man zur Abkürzung den Zähler des obigen Bruches mit Z, den Nenner mit N bezeichnet,

$$Z = 0{,}62605323$$
$$N = 0{,}98578466\ .$$

Da ferner $\varkappa = \sin \frac{\alpha}{2} = \sin 40^0$ ist, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \log \varkappa &= 0{,}9040337 - 1 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \tfrac{1}{4} \log q &= 0{,}6304978 - 1 \\ \log Z &= 0{,}7966113 - 1 \\ \log \frac{1}{N} &= 0{,}0062179 \\ \hline \log \sin \frac{\psi}{2} &= 0{,}6383907 - 1 \\ \frac{\psi}{2} &= 25^0\,46'\,44'',45\ , \end{aligned}$$

und somit

$$\underline{\psi = 51^0\,33'\,28'',9}\ .\ -$$

2. Beispiel: Der Ausschlagswinkel α sei gleich 100^0, also $\frac{\alpha}{2} = 50^0$.

In diesem Falle ist

$$\varkappa = \sin 50^0 = \cos 40^0\ ,$$

also ebenso gross wie $\varkappa'$ im vorigen Beispiele. Demnach wird auch

$$\lambda' = 0{,}03326519$$
$$q' = 0{,}03326527\ ;\ \log q' = 0{,}5219910 - 2\ ,$$

und da zufolge der Gleichungen (27) und (27)*, nämlich

$$\frac{2\,\omega}{\pi} \sqrt{e_1 - e_3} = \vartheta_3{}^2\,(o, q) = (1 + 2\,q + 2\,q^4 + \ldots)^2$$

$$\frac{2\,\omega'}{\pi i} \sqrt{e_1 - e_3} = \vartheta_3{}^2\,(o, q) = (1 + 2\,q' + 2\,q'^4 + \ldots)^2,$$

$\frac{\omega'}{i}$ dieselbe Funktion von q' ist, wie ω von q:

$$\frac{\omega'}{i} = 0{,}57047158\ ;\ \ \log \frac{\omega'}{i} = 0{,}7562340 - 1\ .$$

Zur Berechnung von ω dient die Formel (40), nämlich

$$\omega = \frac{\omega'}{\pi i} \cdot \mathrm{Log} \frac{1}{q'}\ .$$

Aus dem obigen Werte von $\log q'$ ergiebt sich zunächst

$$\log \frac{1}{q'} = 1{,}4780090\ ,$$

und hieraus mit Benutzung einer Tafel zur Verwandlung der gemeinen Logarithmen in natürliche

$$\mathrm{Log}\,\frac{1}{q'} = 3{,}4032415$$
$$\log \mathrm{Log}\,\frac{1}{q'} = 0{,}5318927$$
$$\log \frac{\omega'}{i} = 0{,}7562340 - 1$$
$$\log \frac{1}{\pi} = 0{,}5028501 - 1$$
$$\log \omega = 0{,}7909768 - 1\,; \quad \omega = 0{,}61798343\,.$$

Die Dauer einer einfachen Schwingung beträgt also für den vorliegenden Fall

$$T = 2\,\omega = 1{,}23596686 \text{ Sekunden.}$$

Daraus folgt, dass das Pendel innerhalb einer Stunde 2912 einfache Schwingungen ausführt und ausserdem noch weitere 0,8645 Sekunden in Bewegung ist. Der Ausschlagswinkel, den das Pendel nach Verlauf dieser Zeit besitzt, wird bestimmt durch die Gleichung (26_a)

$$\sin\psi = \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_3(u)}, \quad u = \frac{t}{2\,\omega}; \quad t = 0{,}8645$$

und ist, da t grösser ist als der Wert der halben einfachen Schwingungsdauer, nämlich $= \omega + 0{,}24652$, negativ. Das Pendel wird demnach während der Zeit t den halben Schwingungsbogen zurücklegen und nach dem Durchgange durch die Vertikale noch 0,24652 Sekunden lang steigen. Bezeichnen wir den Winkel, den das Pendel während dieser Zeit beschreibt, mit φ, so ist nach Gleichung (23_a)

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{\vartheta_1(v,q)}{\vartheta_0(v,q)}, \quad v = \frac{\tau}{2\,\omega}, \quad \tau = 0{,}24652\,.$$

Führen wir endlich mittels der Formeln (37) und (38) statt des Moduls q den oben berechneten Modul q′ ein, so erhalten wir

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{i\vartheta_1(v'i,q')}{\vartheta_2(v'i,q')} = \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,v'\pi - q'^2\,\mathrm{Sin}\,3\,v'\pi + q'^6\,\mathrm{Sin}\,5\,v'\pi \mp \ldots}{\mathrm{Cos}\,v'\pi + q'^2\,\mathrm{Cos}\,3\,v'\pi + q'^6\,\mathrm{Cos}\,5\,v'\pi + \ldots}$$
$$= \sqrt{\varkappa}\cdot\frac{Z}{N}, \text{ wo } \quad v' = \frac{\omega i}{\omega'}v$$
$$\text{also } v'\pi = \frac{\tau\pi i}{2\,\omega'}, \text{ ist.}$$

Aus den obigen Werten für τ und $\frac{\omega'}{i}$ ergiebt sich

$$\log(v'\pi) = 0{,}8317381 - 1\,;$$

addiert man hierzu, um zu den Logarithmen der hyperbolischen Funktionen überzugehen,

$$\log M = 0{,}6377843 - 1\,,$$

wo M den Modul des Briggs'schen Logarithmensystems bedeutet, so erhält man

$$\log(Mv'\pi) = 0{,}4695224 - 1\,,$$

also

$$Mv'\pi = 0{,}29479|7 = 0{,}29480$$
$$3\,Mv'\pi = 0{,}88439$$
$$5\,Mv'\pi = 1{,}47398\,,$$

und hieraus mit Benutzung der Gronau'schen Tafeln:

$$\log \operatorname{Sin} v'\pi = 0{,}86460 - 1 \qquad \log \operatorname{Cos} v'\pi = 0{,}09320$$
$$\log \operatorname{Sin} 3\,v'\pi = 0{,}57591 \qquad \log \operatorname{Cos} 3\,v'\pi = 0{,}59069$$
$$\log \operatorname{Sin} 5\,v'\pi = 1{,}17246 \qquad \log \operatorname{Cos} 5\,v'\pi = 1{,}17344\,.$$

Da ferner

$$\log q' = 0{,}521991 - 2$$
$$2 . \log q' = 0{,}043982 - 3$$
$$6 . \log q' = 0{,}131946 - 9$$

ist, so kommen in den obigen Reihenentwickelungen für Z und N wieder nur die beiden ersten Glieder in Betracht, und es wird

$$\operatorname{Sin} v'\pi = 0{,}73215 \qquad \operatorname{Cos} v'\pi = 1{,}23937$$
$$q'^2 . \operatorname{Sin} 3\,v'\pi = 0{,}00417 \qquad q'^2 . \operatorname{Cos} 3\,v'\pi = 0{,}00431\,,$$

also

$$Z = 0{,}72798 \qquad N = 1{,}24368\,.$$

Setzt man diese Werte ein in die obige Formel $\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\varkappa} \cdot \frac{Z}{N}$ und berücksichtigt, dass

$$\varkappa = \sin 50^0\,, \qquad \tfrac{1}{2} \log \varkappa = 0{,}94213 - 1$$

ist, so erhält man

$$\frac{\varphi}{2} = 30^0\,49',1\,; \quad \text{also } \varphi = 61^0\,38',2\,.$$

Das Pendel führt also innerhalb einer Stunde 2912 einfache Schwingungen aus, fällt dann bis zur Vertikalen und beschreibt endlich noch einen Winkel von $61^0\,38',2$. —

Von praktischem Interesse sind insbesondere die Werte für die Schwingungsdauer des Pendels bei verschiedenen Amplituden. Wie aus den beiden vorhergehenden Beispielen ersichtlich, braucht man dieselben nur für Ausschlagswinkel bis zu 90^0 $\left(\frac{\alpha}{2} = 45^0\right)$ direkt zu berechnen; die Werte der Schwingungsdauer für Ausschlagswinkel zwischen 90^0 und 180^0 erhält man aus jenen mittels des Überganges von den künstlichen zu den natürlichen Logarithmen. Dabei ergiebt sich, dass, während der Winkel $\frac{\alpha}{2}$ von 0^0 bis 90^0 wächst, ω die Werte von 0,50152 bis ∞ durchläuft. Für $\frac{\alpha}{2} = 45^0$ ist $\omega = 0{,}59196$, für $\frac{\alpha}{2} = 80^0$ $\omega = 1{,}00679$, für $\frac{\alpha}{2} = 89^0$ $\omega = 1{,}73524$; erst bei dem Übergange von $\frac{\alpha}{2} = 89^0$ zu $\frac{\alpha}{2} = 90^0$ wächst ω von dem soeben angegebenen bis zu einem unendlich grossen Werte. —

2. Fall $\left(\frac{v_0^2}{2\,g} > 2\,l\right)$.

Für diesen Fall gelten die Formeln (18) bis (20) und (13_b), aus denen sich ergiebt

$$\sin\frac{\psi}{2} = \pm \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{4\,gl}} \cdot \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)}\,, \quad u = \frac{t - t_0}{2\,\omega}$$

$$41) \quad \varkappa^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{4\,gl}{v_0^2}\,, \quad \varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2,$$

wo v_0 die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher das Pendel die tiefste Lage passiert.

Nimmt man an, dass sich zur Zeit $t = o$ das Pendel in seiner tiefsten Lage befindet und ferner, dass der Winkel ψ gleichzeitig mit t wächst, so hat man $t_0 = o$ zu setzen und der Quadratwurzel das positive Vorzeichen zu geben; es wird demnach

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa}} \cdot \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)}, \quad u = \frac{t}{2\,\omega}.$$

Da $\varkappa^2$ und $\varkappa'^2$ positiv und kleiner als 1 sind, so kann man auch in diesem Falle

$$21\mathrm{b})\quad \left|\begin{array}{l} \varkappa = \sin\frac{\alpha}{2} \\ \\ \varkappa' = \cos\frac{\alpha}{2} \end{array}\right. \qquad o < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$$

setzen. Eine unmittelbare mechanische Bedeutung kommt hier dem Winkel α nicht zu; doch hängt von der Grösse desselben der Wert von v_0 ab, und umgekehrt entspricht jedem beliebig gegebenen Werte von v_0, der grösser als $2\sqrt{gl}$ ist, ein eindeutig bestimmter Winkel α.

Aus (23b) folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (17) und (27), dass

$$\text{für } t = o \quad u = o, \quad \sin\frac{\psi}{2} = o, \text{ also } \psi = o \text{ wird;}$$

hingegen wird für $t = \omega \quad u = \tfrac{1}{2}, \quad \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(o)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2})}{\vartheta_0(\frac{1}{2})} = \frac{\vartheta_2(o)}{\vartheta_3(o)} = \sqrt{\varkappa}, \quad \sin\frac{\psi}{2} = 1, \text{ also } \psi = \pi.$

Mithin ist die Dauer eines ganzen Umlaufs

$$24\mathrm{b})\quad T = 2\,\omega.$$

Zur Berechnung von ω kann zunächst wieder eine der Gleichungen (27) benutzt werden; die zweite derselben liefert, da

$$e_1 - e_3 = \frac{v_0^{\,2}}{4\,l^2} \text{ ist,}$$

$$\omega = \frac{l\pi}{v_0} \cdot \vartheta_3^{\,2}(o, q),$$

und somit

$$28\mathrm{b})\quad T = 2\,\omega = \frac{2\,l\pi}{v_0} \cdot \vartheta_3^{\,2}(o, q) = \frac{2\,l\pi}{v_0} \cdot (1 + 2\,q + 2\,q^4 + \ldots)^2\ {}^{*)}.$$

Den Wert von q erhält man wie im ersten Falle mittels der Gleichungen (30) und (31).

Statt dessen kann man auch mittels der Gleichungen (30)* und (31)* erst die Grösse q' berechnen, und sodann den aus (27)* resultierenden Wert von

$$42)\quad \frac{\omega'}{i} = \frac{l\pi}{v_0} \cdot \vartheta_3^{\,2}(o, q').$$

Der erste Weg wird im allgemeinen vorzuziehen sein, wenn

$$\varkappa^2 < \tfrac{1}{2}, \quad \frac{\alpha}{2} < 45^0, \text{ also } v_0^{\,2} > 8\,gl$$

ist; hingegen wird man den zweiten Weg einschlagen, wenn

$$\varkappa^2 > \tfrac{1}{2}, \quad 45^0 < \frac{\alpha}{2} < 90^0, \text{ also } 4\,gl < v_0^{\,2} < 8\,gl$$

ist. —

---

*) Für $q = o$ geht diese Gleichung über in die bekannte Formel für die Centralbewegung: $T = \frac{2\,l\pi}{v}$

Numerische Rechnung.

Es werde wie im vorigen Falle

$$l = 1 \text{ m} \quad \text{und} \quad g = 9{,}81$$

angenommen; dann ist $\sqrt{8\,gl} = 8{,}858894$. Je nachdem also

$$v_0 \gtrless 8{,}858894$$

ist, wird man der Reihe nach die Grössen

$$\lambda, \ q, \ \omega$$

$$\text{bezw.} \quad \lambda', \ q', \ \frac{\omega'}{i}, \ \omega$$

berechnen.

Nehmen wir, um das Schellbach'sche Beispiel (l. c. § 103) vorzuführen, an, es sei

$$v_0 = 7,$$

d. h. der materielle Punkt besitze im tiefsten Punkte der Kreisbahn eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit von 7 m. Wo wird sich alsdann das Pendel nach Verlauf von 1 Stunde befinden?

Nach Formel (41) ist

$$\varkappa^2 = \frac{4\,gl}{v_0^2} = \frac{4 \,.\, 9{,}81}{49}; \quad \varkappa = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{39{,}24} = 0{,}8948834150495$$

$$\sqrt{\varkappa} = 0{,}945982777354$$

$$\lambda' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{\varkappa}}{1 + \sqrt{\varkappa}} = 0{,}01387916|257 = q',$$

also

$$\log \lambda' = \log q' = 0{,}1423633 - 2$$

$$\vartheta_3(o, q') = 1 + 2\,q' + 2\,q'^4 + \ldots = 1{,}02775840$$

und hieraus nach Formel (42)

$$\log \frac{\omega'}{i} = 0{,}6758339 - 1\,.$$

Zur Berechnung von ω dient wieder die Gleichung (40); dieselbe liefert, da $\mathrm{Log}\,\frac{1}{q'} = 4{,}2773666$ ist:

$$\log \omega = 0{,}8098605 - 1\,; \quad \omega = 0{,}6454469\,.$$

Somit beträgt die Dauer eines ganzen Umlaufs

$$T = 1{,}2908938 \text{ Sekunden.}$$

Da nun 3600 : T gleich 2788 mit dem Reste 0,98809 ist, so macht das Pendel innerhalb einer Stunde 2788 volle Umläufe und ist alsdann noch 0,98809 Sekunden in Bewegung.

Während dieser 0,98809 Sekunden durchläuft das Pendel noch die halbe Kreisperipherie, gelangt also aus der tiefsten Lage in die höchste, wozu es 0,64545 Sekunden gebraucht, und bewegt sich dann wieder abwärts während eines Zeitraums von

$$\tau = t - \omega = 0{,}34264$$

Sekunden. Setzen wir daher in der Formel (23b)

$$t = \tau + \omega,$$

so wird, da

$$\vartheta_1(v + \tfrac{1}{2}) = \vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_0(v + \tfrac{1}{2}) = \vartheta_3(v)$$

ist:

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa}} \cdot \frac{\vartheta_2(v, q)}{\vartheta_3(v, q)}, \quad v = \frac{\tau}{2\,\omega}, \quad \tau = 0{,}34264\,.$$

Auch hier empfiehlt sich wieder die Rechnung mit hyperbolischen Funktionen. Durch Einführung derselben mittels der Gleichungen (37) und (38) ergiebt sich

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{\vartheta_0(v'i, q')}{\vartheta_3(v'i, q')} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{1 - 2q'\operatorname{Cos} 2v'\pi + 2q'^4 \operatorname{Cos} 4v'\pi \mid \mp \ldots}{1 + 2q'\operatorname{Cos} 2v'\pi + 2q'^4 \operatorname{Cos} 4v'\pi \mid + \ldots} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\frac{Z}{N},$$

wo $v'\pi = \frac{\tau\pi i}{2\omega'}$ ist.

Setzt man für τ und $\frac{\omega'}{i}$ die oben angegebenen Werte ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\log(v'\pi) &= 0{,}0551241\,, \text{ also da} \\
\log M &= 0{,}6377843 - 1 \text{ ist,} \\
\log(Mv'\pi) &= 0{,}6929084 - 1\,, \text{ und hieraus:} \\
Mv'\pi &= 0{,}49307 \\
2\,Mv'\pi &= 0{,}98614\,; \quad \log \operatorname{Cos} 2v'\pi = 0{,}68972 \\
4\,Mv'\pi &= 1{,}97228\,; \quad \log \operatorname{Cos} 4v'\pi = 1{,}67130\,.
\end{aligned}$$

Nun ist $\log q' = 0{,}14236 - 2$ und $4\log q' = 0{,}56945 - 8$, mithin wird

$$\begin{aligned}
2q'\operatorname{Cos} 2v'\pi &= 0{,}135866 \\
2q'^4 \operatorname{Cos} 4v'\pi &= 0{,}000003481\,,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
Z = 0{,}864137\,; \quad \log Z &= 0{,}93658 - 1 \\
N = 1{,}135869\,; \quad \log N &= 0{,}05533 \\
\tfrac{1}{2}\log\varkappa &= 0{,}97588 - 1 \\
\hline
\log\sin\frac{\psi}{2} &= 0{,}90537 - 1 \\
\frac{\psi}{2} &= \begin{cases} 53^0\,32' \\ 126^0\,28'\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Von diesen beiden Werten ist der letztere zu nehmen, da, wie oben gezeigt wurde, das Pendel bei der letzten unvollständigen Schwingung noch mehr als einen Halbkreis zurücklegt. Es ist demnach

$$\psi = 252^0\,56'\,.$$

Das Pendel hat somit, von der vertikal nach abwärts gerichteten Ruhelage ausgehend, während einer Stunde 2788 volle Umläufe vollendet und ausserdem noch $252^0\,56'$ zurückgelegt.

Das erhaltene Resultat weicht von dem Schellbach'schen ($\psi = 252^0\,17'$) nicht unerheblich ab. Man würde jedoch fehl gehen, wenn man diese Abweichung auf Konto der von mir angewandten hyperbolischen Funktionen setzen wollte; vielmehr ergiebt die Rechnung mit den gewöhnlichen siebenstelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln auf Grund der Formel (23b) bis auf die letzte Dezimalstelle genau das oben erhaltene Resultat. —

II. Abschnitt.

Die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Kettenlinie.

Die Gleichung der Kettenlinie in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen horizontale x-Axe vom Scheitelpunkt der Kurve den Abstand a besitzt, und dessen vertikal nach oben gerichtete z-Axe durch den Scheitelpunkt geht, besitzt die Form

$$1)\quad \left|\begin{array}{l} z = \frac{a}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{x}{a} \quad \text{oder umgekehrt:} \\ x = a\,.\,\mathrm{Log}\left(\frac{z}{a} \pm \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1}\right)\,. \end{array}\right.$$

Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft liefert die Gleichung

$$2)\quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gz + h\,,$$

aus welcher sich, da nach Gleichung (1)

$$\frac{dz}{dt} = \mathrm{Sin}\,\frac{x}{a}\cdot\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1}\cdot\frac{dx}{dt} \quad \text{und umgekehrt:}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\sqrt{z^2 - a^2}}\cdot\frac{dz}{dt}$$

ist, ergiebt:

$$\left(\frac{a^2}{z^2 - a^2} + 1\right)\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gz + h\,,$$

d. h.

$$\frac{z^2}{z^2 - a^2}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gz + h\,,$$

$$3)\quad dt = \frac{zdz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(-2gz + h)}} = z\cdot\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}\,,$$

wo R(z) das Polynom dritten Grades

$$4)\quad R(z) = (z^2 - a^2)(-2gz + h)$$

bedeutet.

Zur Bestimmung der Konstanten h nehmen wir an, dass im untersten Punkte der Kurve, also

$$\text{für } z = a \quad v = v_0$$

sei; dann ist

$$v_0{}^2 = -2ag + h\,, \qquad h = v_0{}^2 + 2ag$$

und somit

$$R(z) = (z^2 - a^2)\,.\,[v_0{}^2 - 2g(z - a)]\,.$$

Dieser Ausdruck verschwindet offenbar für

$$z = a\,, \quad z = -a \quad \text{und} \quad z = a + \frac{v_0{}^2}{2g}\,.$$

Bezeichnen wir diese letzte Wurzel zur Abkürzung mit b, setzen also

$$5)\quad a + \frac{v_0{}^2}{2g} = b\,,$$

so wird
$$6)\quad R(z) = 2g(z+a)(z-a)(b-z)$$
$$= -2gz^3 + 2bgz^2 + 2a^2gz - 2a^2bg\,. \;-$$

Es handelt sich nun zunächst wieder darum, den Differentialausdruck $\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ auf die kanonische Form $\frac{ds}{\sqrt{S}}$ zu bringen, wo S das Polynom $4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)$ bedeutet. Dies geschieht, wie im I. Abschnitt gezeigt wurde, am einfachsten mittels der Substitution

$$s = \frac{\frac{1}{4}R'(z_0)}{z-z_0} + \frac{1}{24}R''(z_0)\,; \qquad z = z_0 + \frac{\frac{1}{4}R'(z_0)}{s-\frac{1}{24}R''(z_0)}\,,$$

wo unter z_0 irgend eine Wurzel der Gleichung $R(z) = 0$ zu verstehen ist. Man wählt zweckmässig für z_0 einen Wurzelwert, den die Variable z im Laufe der Bewegung anzunehmen imstande ist, also entweder $z_0 = a$ oder $z_0 = b$ (nicht etwa $z_0 = -a$, da die Variable z für kein reelles t diesen Wert anzunehmen vermag). Wählen wir $z_0 = a$, so wird

$$7)\quad s = \frac{\frac{1}{4}R'(a)}{z-a} + \frac{1}{24}R''(a)\,; \qquad z = a + \frac{\frac{1}{4}R'(a)}{s-\frac{1}{24}R''(a)}\,,$$

und es ist, wie sich durch Differentiation der Gleichung (6) ergiebt:

$$8)\quad \left|\begin{aligned} R'(a) &= 4ag\,.(b-a) = 2av_0{}^2 \\ R''(a) &= 4g\,.(b-3a)\,. \end{aligned}\right.$$

Die Substitutionsgleichung (7) führt den Differentialausdruck $\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ über in $\frac{ds}{\sqrt{S}}$, d. h. es ist

$$9)\quad \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \pm\frac{ds}{\sqrt{S}}\,.$$

Hieraus folgt mit Benutzung der Gleichungen (7) und (6)

$$S = \left(\frac{ds}{dz}\right)^2 . R(z) = \frac{[\frac{1}{4}R'(a)]^2}{(z-a)^4}\cdot 2g(z+a)(z-a)(b-z)$$
$$= 2g\,.[\tfrac{1}{4}R'(a)]^2\cdot\frac{(z+a)(b-z)}{(z-a)^3}\,.$$

Bestimmt man diejenigen Werte von z, für welche dieser Ausdruck verschwindet, und berechnet mit Hülfe der Substitutionsgleichung (7) die zugehörigen Werte von s, so stellen diese letzteren die Grössen e_1, e_2 und e_3 dar. Nun verschwindet aber S für $z = -a$, $z = b$ und $z = \infty$; die entsprechenden Werte von s, die wieder einstweilen mit e', e'', e''' bezeichnet werden mögen, sind

$$e' = -\frac{\frac{1}{4}R'(a)}{2a} + \frac{1}{24}R''(a) = -\frac{1}{3}bg$$
$$e'' = \frac{\frac{1}{4}R'(a)}{b-a} + \frac{1}{24}R''(a) = \frac{1}{6}bg + \frac{1}{2}ag$$
$$e''' = \frac{1}{24}R''(a) = \frac{1}{6}bg - \frac{1}{2}ag\,.$$

Da diese Werte sämtlich reell sind, so können wir sie nach der üblichen Grössenfolge

$$e_1 > e_2 > e_3$$

ordnen und erhalten:

$$10)\quad \left|\begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{6}bg + \frac{1}{2}ag \\ e_2 = \frac{1}{6}bg - \frac{1}{2}ag = \frac{1}{24}R''(a) \\ e_3 = -\frac{1}{3}bg \end{array}\right| \begin{array}{l} e_1 - e_2 = ag \\ e_1 - e_3 = \frac{g}{2}(b + a) \\ e_1 - e_3 = \frac{g}{2}(b - a) = \frac{v_0^2}{4}. \end{array}$$

Nachdem somit die Wurzeln des Polynoms S bestimmt sind, führen wir noch eine Variable u ein mittels der Differentialgleichung

$$11)\quad \frac{ds}{\sqrt{S}} = du\,,$$

deren vollständiges Integral

$$s = \wp(u - u_0)$$

ist, wo u_0 eine willkürliche Konstante bezeichnet. Dann wird

$$12)\quad z = a + \frac{\frac{1}{4}R'(a)}{\wp(u - u_0) - \frac{1}{24}R''(a)} = a + \frac{ag(b - a)}{\wp(u - u_0) - e_2}\,,$$

und somit nach Gleichung (3)

$$13)\quad dt = z\,.\,du = \left(a + \frac{ag(b - a)}{\wp(u - u_0) - e_2}\right) du\,.$$

Die Gleichung (12) liefert z als Funktion von u, während mittels der Differentialgleichung (13) u als Funktion von t bestimmt ist. Nach Integration dieser Differentialgleichung wird demnach auch z als mittelbare Funktion von t bekannt sein.

Um das Differential $z\,.\,du$ integrieren zu können, unterwerfen wir den obigen Ausdruck für z einer einfachen Transformation. Wir setzen zunächst die willkürliche Konstante

$$14)\quad u_0 = \omega\,.$$

Dann ist

$$z = a + \frac{ag(b - a)}{\wp(u - \omega) - e_2}\,,$$

und dem Werte $u = \omega$ entspricht der Minimalwert von z, nämlich $z = a$, dem Werte $u = o$ hingegen der Maximalwert von z, nämlich $z = b$. Denn für $u = o$ ist $\wp(u - \omega) = \wp(\omega) = e_1$; da nun nach (10) $e_1 - e_2 = ag$ ist, so wird in der That für $u = o$ $z = a + (b - a) = b$.

Da auch im vorliegenden Probleme alle drei Grössen e_1, e_2 und e_3 reell sind, so können die Perioden $2\,\omega$ und $2\,\omega'$ der Funktion $\wp(u)$ mittels der Gleichungen

$$\wp(\omega) = e_1\,,\quad \wp(\omega + \omega') = e_2\,,\quad \wp(\omega') = e_3\,,$$

stets so bestimmt werden, dass ω und $\frac{\omega'}{i}$ positiv reell sind. Während also z von b bis a abnimmt, d. h. während der materielle Punkt von seiner höchsten bis zur tiefsten Lage gelangt, wächst u von o bis ω.

Nach der Formelsammlung Art. (19) ist nun

$$15)\quad \left|\begin{array}{l} \wp(u \pm \omega) - e_1 = \dfrac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(u) - e_1} \\ \wp(u \pm \omega') - e_3 = \dfrac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\wp(u) - e_3}\,. \end{array}\right.$$

Aus der ersten dieser Formeln folgt

$$\wp(u-\omega) - e_2 = (e_1 - e_2) + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(u) - e_1} = (e_1 - e_2) \cdot \frac{\wp(u) - e_3}{\wp(u) - e_1} = ag \cdot \frac{\wp(u) - e_3}{\wp(u) - e_1},$$

mithin wird

$$z = a + (b-a) \cdot \frac{\wp(u) - e_1}{\wp(u) - e_3} = a + (b-a) \cdot \left(1 - \frac{e_1 - e_3}{\wp(u) - e_3}\right),$$

und dieser Ausdruck geht infolge der zweiten der Gleichungen (15) über in

$$z = a + (b-a) \cdot \left(1 - \frac{\wp(u+\omega') - e_3}{e_2 - e_3}\right) = a + (b-a) \cdot \frac{e_2 - \wp(u+\omega')}{e_2 - e_3}.$$

$$= a + \frac{2}{g} \cdot [e_2 - \wp(u+\omega')] = \left(a + \frac{2}{g} e_2\right) - \frac{2}{g} \cdot \wp(u+\omega'),$$

d. h.

$$16) \quad z = \frac{b}{3} - \frac{2}{g} \cdot \wp(u+\omega').$$

Folglich wird

$$dt = \left\{\frac{b}{3} - \frac{2}{g} \wp(u+\omega')\right\} du = \left\{\frac{b}{3} + \frac{2}{g} \cdot \frac{d}{du} \cdot \frac{\sigma'(u+\omega')}{\sigma(u+\omega')}\right\} du.$$

Dieser Ausdruck ist ein vollständiges Differential. Setzen wir zur Bestimmung der Integrationskonstanten noch fest, dass

$$\underline{\text{für } u = o,} \quad \text{d. h.} \quad \underline{\text{für } z = b} \quad \underline{t = o}$$

ist, rechnen wir also die Zeit von einem derjenigen Momente an, in denen der materielle Punkt seine höchste Lage besitzt, so ist die Anfangsgeschwindigkeit desselben gleich Null, und es ergiebt sich

$$t = \frac{b}{3} u + \frac{2}{g} \cdot \left\{\frac{\sigma'(u+\omega')}{\sigma(u+\omega')} - \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}\right\},$$

oder da nach Art. (18) der Formelsammlung

$$\sigma(u+\omega') = \sigma(\omega') e^{\eta' u} \sigma_3(u) = \sigma(\omega') e^{\eta' u + \frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot \frac{\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_0(o)}$$

und somit

$$\frac{\sigma'(u+\omega')}{\sigma(u+\omega')} = \eta' + \frac{\eta u}{\omega} + \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\vartheta_0'\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)},$$

$$\frac{\sigma'(u+\omega')}{\sigma(u+\omega')} - \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')} = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\vartheta_0'\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}$$

ist:

$$17) \quad t = \left(\frac{b}{3} + \frac{2\eta}{g\omega}\right) u + \frac{1}{g\omega} \cdot \frac{\vartheta_0'\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}.$$

Hieraus ergiebt sich die Zeit, welche vergeht, während u von o bis ω wächst, z also von b bis a abnimmt, indem man $u = \omega$ setzt. Für $u = \omega$ wird aber

$$\vartheta_0'\left(\frac{u}{2\omega}\right) = \vartheta_0'\left(\frac{1}{2}\right) = o \quad \text{und} \quad \vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right) = \vartheta_0\left(\frac{1}{2}\right) = \vartheta_3(o);$$

daher ist die Dauer einer einfachen Schwingung, d. h. eines Hin- oder Herganges:

$$18)\quad T = \left(\frac{b}{3} + \frac{2\eta}{g\omega}\right) . 2\omega = \frac{2b}{3}\cdot\omega + \frac{4}{g}\cdot\eta\ .$$

Führen wir noch diesen Wert von T in den obigen Ausdruck für t ein, so ergiebt sich definitiv:

$$19)\quad t = \frac{Tu}{2\omega} + \frac{1}{g\omega}\cdot\frac{\vartheta_0'\left(\frac{u}{2\omega}, q\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega}, q\right)}\ .$$

Um endlich auch den Wert von z durch ϑ-Funktionen darzustellen, gehen wir aus von dem oben abgeleiteten Ausdrucke

$$z = a + (b - a)\cdot\frac{\wp(u) - e_1}{\wp(u) - e_3}$$

und machen Gebrauch von den Eormeln:

$$\left.\begin{aligned}\wp(u) - e_1 &= \frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma^2(u)}\\ \wp(u) - e_3 &= \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma^2(u)}\end{aligned}\right|\ \text{Formels. Art. (17)},$$

sowie von den bekannten Formeln (Art. 34 und 35), die den Übergang von den σ-Funktionen zu den ϑ-Funktionen vermitteln. Wir erhalten alsdann:

$$z = a + (b - a)\cdot\frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma_3^2(u)} = a + (b - a)\cdot\frac{\vartheta_0^2(o)}{\vartheta_2^2(o)}\cdot\frac{\vartheta_2^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)} = a + (b - a)\sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3}}\cdot\frac{\vartheta_2^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}\ .$$

oder endlich mit Rücksicht auf die Gleichungen (10):

$$20)\quad z = a + \sqrt{2a(b - a)}\cdot\frac{\vartheta_2^2\left(\frac{u}{2\omega}, q\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{u}{2\omega}, q\right)}\ . -$$

Die Formeln (18), (19) und (20) enthalten die vollständige Lösung des Problems, falls es nur darauf ankommt, irgend eine analytische Form für das Resultat aufzustellen. Doch eignen sich dieselben nicht unter allen Umständen zur numerischen Berechnung. Vielmehr wird man, um möglichst rasch konvergente Reihenentwickelungen zu erzielen, bei denen höchstens die beiden ersten Glieder in Betracht kommen, jene Formeln für den Fall, dass $\varkappa > \varkappa'$ (d. h. $q > 0{,}043214 > q'$) ist, einer Transformation unterwerfen müssen, bei welcher der Modul q durch q' ersetzt wird, und demzufolge an Stelle der cyklischen Funktionen wieder die hyperbolischen Funktionen treten. Insbesondere gilt dies von der Gleichung (19), welche in Beziehung auf u transcendent ist, und welche, ebenso wie die ihrer Gestalt nach einfachere Kepler'sche Gleichung bei der Bestimmung einer Planetenbahn, „propter arcus et sinus heterogeneiam" (Kepler, Astronomia nova, seu Commentaria de stella Martis, Pragae 1609, pg. 300) nur durch ein Näherungsverfahren aufgelöst werden kann*). Der in beiden Fällen ($\varkappa < \varkappa'$ und $\varkappa > \varkappa'$) einzuschlagende Gang der Rechnung wird am zweckmässigsten an folgenden Beispielen erläutert werden.

*) Die Versuche, eine Gleichung von der Form $t = \alpha u + \beta\cdot\frac{\vartheta_0'(u)}{\vartheta_0(u)}$ nach u aufzulösen, d. h. u durch eine Reihenentwickelung darzustellen, die nach den sinus oder cosinus der Vielfachen von t fortschreitet, haben bisher zu keinem brauchbaren Resultate geführt. Denn mit der Aufstellung gewisser Integralformeln für die Koeffizienten einer solchen Reihenentwickelung ist für die practische Berechnung noch nicht viel gewonnen. (Cf. Scheibner, Supplement zu oben genannter Abhandlung, l. c. pag. XXIII).

Numerische Rechnung.

Es werde angenommen:

1) der Scheitelpunkt der Kettenlinie habe von der horizontalen x-Axe den Abstand
$$a = \tfrac{1}{2}\ \text{cm}, \quad \text{und}$$

2) die Ordinate des materiellen Punktes zu Anfange der Bewegung sei entweder
$$b = 1\ \text{cm (1. Beispiel)}$$
$$\text{oder} \quad b = 10\ \text{cm (2. Beispiel)}.$$

Wo befindet sich, fragen wir uns wieder, der materielle Punkt genau nach Ablauf einer Stunde?

1. Beispiel. ($a = \frac{1}{2}$, $b = 1$).

Aus den Gleichungen (10) ergiebt sich
$$\varkappa^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{b - a}{b + a} = \frac{1}{3}; \quad \varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2 = \frac{2}{3}.$$

Da somit $\varkappa' > \varkappa$ ist, so wird es sich, wie im vorigen Abschnitte gezeigt worden ist, hier empfehlen, der Reihe nach die Grössen λ, q und ω zu berechnen, und, da $q < q'$ ist, bei den folgenden trigonometrischen Rechnungen die cyklischen Funktionen zu Grunde zu legen.

Durch zweifaches Radizieren ergiebt sich:
$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{\varkappa'}}{1 + \sqrt{\varkappa'}} = 0{,}025319892556,$$
und hieraus:
$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + \ldots = 0{,}02531991337; \qquad \log q = 0{,}4034622 - 2$$
$$\vartheta_3(o, q) = 1 + 2q + 2q^4 + \ldots = 1{,}05064064875; \quad \log \vartheta_3(o) = 0{,}02145420,$$
mithin, da nach der zweiten der Gleichungen (27) im vorigen Abschnitte
$$21) \quad \omega = \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - e_3}} \cdot \vartheta_3{}^2(o),$$
im vorliegenden Falle also
$$22) \quad \omega = \frac{\pi}{\sqrt{2g(b + a)}} \cdot \vartheta_3{}^2(o) = \frac{\pi}{\sqrt{3g}} \cdot \vartheta_3{}^3(o, q)$$
ist:
$$\log \omega = 0{,}8056632 - 1; \quad \omega = 0{,}639239,$$
wo g wie früher gleich 9,81 angenommen worden ist.

Zur Berechnung von η dient die Formel
$$23) \quad \eta = \frac{\pi^2}{12\omega} \cdot \frac{1 - 3^3 q^2 + 5^3 q^6 \mp \ldots}{1 - 3q^2 + 5q^6 \mp \ldots} \quad \text{(Formels. Art. 35)};$$
da nun
$$27q^2 = 0{,}01730965; \quad 125q^6 = 0{,}000000033$$
$$3q^2 = 0{,}00192329; \quad 5q^6 = 0{,}000000001$$
und somit
$$1 - 27q^2 + 125q^6 \mp \ldots = 0{,}98269038$$
$$1 - 3q^2 + 5q^6 \mp \ldots = 0{,}99807671$$
ist, so wird nach obiger Formel
$$\log \eta = 0{,}1027080; \quad \eta = 1{,}2668.$$

Um endlich die Schwingungsdauer T zu ermitteln, wenden wir die Formel (18) an und erhalten

$$\frac{2\,b}{3}\cdot\omega = 0{,}4261592\,;\quad \frac{4}{g}\cdot\eta = 0{,}5165340\,,$$

mithin

$$T = 0{,}9426932 \text{ Sekunden.} —$$

Aus diesem Werte von T ergiebt sich, dass der materielle Punkt im Verlaufe einer Stunde 3818 einfache Schwingungen ausführt und ausserdem noch 0,79736 Sekunden lang in Bewegung ist.

Um zu ermitteln, welche Lage der materielle Punkt nach Ablauf dieser Zeit besitzt, haben wir in der Formel (19) $t = 0{,}79736$ zu setzen und den zugehörigen Wert von u zu berechnen. Ist dies geschehen, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung (20) sofort der gesuchte Wert von z, welcher die Lage des materiellen Punktes zur Zeit t in eindeutiger Weise bestimmt.

Die Gleichung (19) besitzt, ausführlicher geschrieben, die Form

$$24)\quad t = \frac{Tu}{2\,\omega} + \frac{4\,\pi}{g\omega}\cdot\frac{q\sin\frac{u\pi}{\omega} - 2\,q^4\sin\frac{2\,u\pi}{\omega}\,\Big|\, + 3\,q^9\sin\frac{3\,u\pi}{\omega} \mp \ldots}{1 - 2\,q\cos\frac{u\pi}{\omega} + 2\,q^4\cos\frac{2\,u\pi}{\omega}\,\Big|\, - 2\,q^9\cos\frac{3\,u\pi}{\omega} \pm \ldots}\,,$$

wofür auch geschrieben werden kann*):

$$25)\quad t = \frac{Tu}{2\,\omega} + \frac{4\,\pi}{g\omega}\cdot\left(\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{u\pi}{\omega} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\,u\pi}{\omega} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\,u\pi}{\omega} + \frac{q^4}{1-q^8}\sin\frac{6\,u\pi}{\omega}\,\Big|\, + \ldots\right).$$

Beide Gleichungen sind zur Berechnung von u in gleich hohem Grade brauchbar. Wir benutzen die erste derselben; aus ihr ergiebt sich

$$26)\quad u = \frac{2\,t\omega}{T} - \frac{8\,\pi}{gT}\cdot\frac{q\sin\frac{u\pi}{\omega} - 2\,q^4\sin\frac{2\,u\pi}{\omega} \pm \ldots}{1 - 2\,q\cos\frac{u\pi}{\omega} + 2\,q^4\cos\frac{2\,u\pi}{\omega} \mp \ldots} = \frac{2\,\omega}{T}\cdot t - \frac{8\,\pi}{gT}\cdot\frac{Z}{N}\,,$$

wo Z und N leicht verständliche Abkürzungen bezeichnen.

Beachten wir, dass q im Verhältnis zum ersten Gliede auf der rechten Seite dieser Gleichung eine kleine Grösse ist, so können wir, um den ersten Näherungswert u_1 von u zu erhalten, q nebst seinen höheren Potenzen vernachlässigen und erhalten

$$u_1 = \frac{2\,\omega}{T}\cdot t\,,$$

mithin, da

$$\log\omega = 0{,}8056632 - 1$$
$$\log T = 0{,}9743704 - 1$$
$$\log t = 0{,}9016544 - 1$$

ist:

$$\log u_1 = 0{,}0339772\,;\quad u_1 = 1{,}0813771\,.$$

Diesen Wert von u_1 setzen wir auf der rechten Seite der Gleichung (26) für u ein und erhalten so als zweiten Näherungswert von u:

$$u_2 = \frac{2\,\omega}{T}\cdot t - \frac{8\,\pi}{gT}\cdot\frac{q\sin\frac{u_1\pi}{\omega} - 2\,q^4\sin\frac{2\,u_1\pi}{\omega} \pm \ldots}{1 - 2\,q\cos\frac{u_1\pi}{\omega} + 2\,q^4\cos\frac{2\,u_1\pi}{\omega} \mp \ldots} = u_1 - \frac{8\,\pi}{gT}\cdot\frac{Z_1}{N_1}\,.$$

---

*) Cf. Scheibner l. c., Supplement pg. III.

Nun ergiebt sich aber aus den obigen Werten von q, u_1 und ω:

$$\frac{u_1\pi}{\omega} = 5{,}314518 = 304^0{,}49944 = 304^0\,29'\,58''$$

$$q\,.\,\sin\frac{u_1\pi}{\omega} = -0{,}02086694\,;\quad 2\,q^4\,.\,\sin\frac{2\,u_1\pi}{\omega} = -0{,}0000007674$$

$$2\,q\,.\,\cos\frac{u_1\pi}{\omega} = 0{,}02868231\,;\quad 2\,q^4\,.\,\cos\frac{2\,u_1\pi}{\omega} = -0{,}0000003079\,,$$

also

$$Z_1 = -0{,}02086617\,;\quad N_1 = 0{,}97131738$$

$$\frac{8\,\pi}{gT}\cdot\frac{Z_1}{N_1} = -0{,}05838242$$

und somit

$$u_2 = 1{,}1397595\,.$$

In gleicher Weise erhält man als dritten Näherungswert

$$u_3 = \frac{2\,\omega}{T}\cdot t - \frac{8\,\pi}{gT}\cdot\frac{q\sin\frac{u_2\pi}{\omega} - 2\,q^4\sin\frac{2\,u_2\pi}{\omega} \pm \ldots}{1 - 2\,q\cos\frac{u_2\pi}{\omega} + 2\,q^4\cos\frac{2\,u_2\pi}{\omega} \mp \ldots} = u_1 - \frac{8\,\pi}{gT}\cdot\frac{Z_2}{N_2}\,,$$

wo

$$\frac{u_2\pi}{\omega} = 320^0{,}939 = 320^0\,56'\,20'',4$$

ist. Demnach wird

$$q\,.\,\sin\frac{u_2\pi}{\omega} = -0{,}01595528\,;\quad 2\,q^4\,.\,\sin\frac{2\,u_2\pi}{\omega} = -0{,}0000008044$$

$$2\,q\,.\,\cos\frac{u_2\pi}{\omega} = 0{,}03932059\,;\quad 2\,q^4\,.\,\cos\frac{2\,u_2\pi}{\omega} = 0{,}0000001692\,,$$

also

$$Z_2 = -0{,}01595448\,;\quad N_2 = 0{,}96067958$$

$$\frac{8\,\pi}{gT}\cdot\frac{Z_2}{N_2} = -0{,}04513408$$

und somit

$$u_3 = 1{,}1265112\,;\quad \frac{u_3\pi}{\omega} = 317^0{,}20701 = 317^0\,12'\,25'',24\,.$$

Setzt man die Rechnung in dieser Weise fort, so gelangt man zu folgender Reihe von Näherungswerten:

$$u_1 = 1{,}0813771\,;\quad \frac{u_1\pi}{\omega} = 304^0\,29'\,58''$$

$$u_2 = 1{,}1397595\,;\quad \frac{u_2\pi}{\omega} = 320^0\,56'\,20'',4$$

$$u_3 = 1{,}1265112\,;\quad \frac{u_3\pi}{\omega} = 317^0\,12'\,25'',24$$

$$u_4 = 1{,}1299263\,;\quad \frac{u_4\pi}{\omega} = 318^0\,10'\,12'',54$$

$$u_5 = 1{,}1290663\,;\quad \frac{u_5\pi}{\omega} = 317^0\,55'\,40'',8$$

$$u_6 = 1{,}1292839\,; \quad \frac{u_6\pi}{\omega} = 317^0\,59'\,21''$$

$$u_7 = 1{,}1292291\,; \quad \frac{u_7\pi}{\omega} = 317^0\,58'\,25'',7$$

$$u_8 = 1{,}1292429\,; \quad \frac{u_8\pi}{\omega} = 317^0\,58'\,40''$$

$$u_9 = 1{,}1292393\,; \quad \frac{u_9\pi}{\omega} = 317^0\,58'\,36''$$

$$u_{10} = 1{,}1292403\,; \quad \frac{u_{10}\pi}{\omega} = 317^0\,58'\,37''$$

$$u_{11} = 1{,}1292401\,; \quad \frac{u_{11}\pi}{\omega} = 317^0\,58'\,37''$$

Da dieser Näherungswert von u_{11} bezw. $\frac{u_{11}\pi}{\omega}$ mit dem folgenden übereinstimmt, so stellt derselbe denjenigen Wert von u dar, welcher der Gleichung (24) Genüge leistet, und es ist somit

$$u = 1{,}1292401\,; \quad \frac{u\pi}{\omega} = 317^0\,58'\,37''.$$

Endlich liefert die Formel (20):

$$z = a + \sqrt{2a(b-a)} \cdot \left\{ \frac{2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{u\pi}{2\omega} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3u\pi}{2\omega} + \ldots.}{1 - 2q\cos\frac{u\pi}{\omega} + 2q^4\cos\frac{2u\pi}{\omega} \mp \ldots.} \right\}^2;$$

für den zuletzt angegebenen Wert von u ist aber

$$2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{u\pi}{2\omega} = -0{,}7447557\,; \quad 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3u\pi}{2\omega} = -0{,}000231927$$

$$2q\cos\frac{u\pi}{\omega} = \quad 0{,}0376191\,; \quad 2q^4\cos\frac{2u\pi}{\omega} = \quad 0{,}000000085\,,$$

mithin

$$2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{u\pi}{2\omega} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3u\pi}{2\omega} + \ldots = -0{,}7449876$$

$$1 - 2q\cos\frac{u\pi}{\omega} + 2q^4\cos\frac{2u\pi}{\omega} \mp \ldots = \quad 0{,}9623810$$

und demgemäss, da $a = 0{,}5$ und $2a(b-a) = 0{,}5$ ist:

$$z = 0{,}92373\,. -$$

Die Bewegung geht also in der Weise vor sich, dass der materielle Punkt während einer Stunde 3818 einfache Schwingungen ausführt, sodann, da $t > \frac{T}{2}$ ist, bis zum tiefsten Punkte der Bahn fällt und von da aus endlich noch wieder steigt, bis er den Abstand $z = 0{,}92373$ cm von der Abscissenaxe erreicht.

2. Beispiel. ($a = \frac{1}{2}$, $b = 10$.)

a) Ableitung der zur numerischen Berechnung geeigneten Formeln.

Für diesen Fall wird zufolge der Gleichungen (10)

$$\varkappa^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{b-a}{b+a} = \frac{19}{21}\,; \quad \varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2 = \frac{2}{21}\,,$$

also umgekehrt wie für das vorige Beispiel: $\varkappa > \varkappa'$. Aus den im vorigen Abschnitte dargelegten Gründen werden wir daher hier der Reihe nach zunächst die Grössen λ', q', ω' und alsdann ω berechnen.

Zur Berechnung von λ', q' und ω dienen die Formeln (30)*, (31)* und (40) des vorigen Abschnittes, während sich zur Berechnung von $\frac{\omega'}{i}$ aus der zweiten der Gleichungen (27)* des vorigen Abschnittes die Formel ergiebt

$$27)\quad \frac{\omega'}{i} = \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - e_3}} \cdot \vartheta_3^{\,2}(o, q') = \frac{\pi}{\sqrt{2g(b+a)}} \cdot \vartheta_3^{\,2}(o, q') .$$

Die Ermittelung der Schwingungsdauer T erfordert ausserdem noch die Kenntnis der Grösse η Zu dem Zwecke berechnen wir zunächst die Grösse η', welche von q' bezw. ω' in derselben Weise abhängt, wie η von q bezw. ω, und welche daher bestimmt ist durch die Gleichung

$$\eta' = \frac{\pi^2}{12\,\omega'} \cdot \frac{1 - 27\,q'^2 + 125\,q'^6 \mp \ldots}{1 - 3\,q'^2 + 5\,q'^6 \mp \ldots}$$

oder

$$28)\quad \eta' i = \frac{\pi^2 i}{12\,\omega'} \cdot \frac{1 - 27\,q'^2 + 125\,q'^6 \mp \ldots}{1 - 3\,q'^2 + 5\,q'^6 \mp \ldots};$$

sodann ergiebt sich η mittels der bekannten Relation:

$$29)\quad \eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2} \cdot -$$

Ist auf diese Weise T gefunden, so hat man noch mit Hülfe der Gleichungen (19) und (20) den Wert von u und endlich denjenigen von z zu bestimmen. Führt man in die eben genannten Gleichungen statt des Moduls q den Modul q' ein, so treten daselbst statt der cyklischen Funktionen wieder die hyperbolischen Funktionen auf. Aus den Gleichungen (37) und (38) des vorigen Abschnittes ergiebt sich nämlich, wenn für den Augenblick $\frac{\omega i}{\omega'} \cdot v = v'$ gesetzt wird:

$$\vartheta_0(v, q) = e^{-\frac{\omega\pi i}{\omega'} v^2} \cdot \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \vartheta_2(v' i, q') ,$$

also

$$\frac{\vartheta_0'(v, q)}{\vartheta_0(v, q)} = -\frac{2\,\omega\pi i}{\omega'} \cdot v + \frac{\omega\pi i}{\omega'} \cdot \frac{2\,q'^{\frac{1}{4}} \operatorname{Sin} v'\pi + 6\,q'^{\frac{9}{4}} \operatorname{Sin} 3\,v'\pi + \ldots}{2\,q'^{\frac{1}{4}} \operatorname{Cos} v'\pi + 2\,q'^{\frac{9}{4}} \operatorname{Cos} 3\,v'\pi + \ldots},$$

d. h.

$$\frac{\vartheta_0'\left(\frac{u}{2\,\omega}, q\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2\,\omega}, q\right)} = -\frac{u\pi i}{\omega'} + \frac{\omega\pi i}{\omega'} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} + 3\,q'^2 \operatorname{Sin}\frac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} + 5\,q'^6 \operatorname{Sin}\frac{5\,u\pi i}{2\,\omega'} + \ldots}{\operatorname{Cos}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} + q'^2 \operatorname{Cos}\frac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} + q'^6 \operatorname{Cos}\frac{5\,u\pi i}{2\,\omega'} + \ldots};$$

mithin geht Gleichung (19) über in:

$$t = \left(\frac{T}{2} - \frac{\pi i}{g\omega'}\right) \cdot \frac{u}{\omega} + \frac{\pi i}{g\omega'} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} + 3\,q'^2 \operatorname{Sin}\frac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} + \ldots}{\operatorname{Cos}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} + q'^2 \operatorname{Cos}\frac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} + \ldots},$$

oder

$$30)\quad t = \alpha u + \beta \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} + 3\,q'^2 \operatorname{Sin}\frac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} + \ldots}{\operatorname{Cos}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} + q'^2 \operatorname{Cos}\frac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} + \ldots} = \alpha u + \beta \cdot \frac{Z}{N},$$

wo α und β zur Abkürzung gesetzt sind für

$$31)\quad \left|\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{T}{2\,\omega} - \dfrac{\pi i}{g\omega\omega'} \\[2ex] \beta = \dfrac{\pi i}{g\omega'}\,. \end{array}\right.$$

Die Gleichung (30) entspricht der obigen Gleichung (24) für den vorigen Fall, wo $\varkappa < \varkappa'$ war. Ihr zur Seite wollen wir nun noch eine andere Gleichung stellen, welche zu (30) in derselben Beziehung steht, wie Gleichung (25) zu (24), und welche für den vorliegenden Fall zur Berechnung von u geeigneter ist, als die Gleichung (30).

Aus der Theorie der elliptischen Funktionen ist bekannt*), dass sich der logarithmische Differentialquotient einer ϑ-Funktion in doppelter Weise darstellen lässt, nämlich entweder als Quotient zweier Fourier'schen Reihen oder als einfache Fourier'sche Reihe; so ist insbesondere

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\vartheta_2'(v, q)}{\vartheta_2(v, q)} = -\frac{\sin v\pi + 3\,q^2 \sin 3\,v\pi + \ldots.}{\cos v\pi + q^2 \cos 3\,v\pi + \ldots.}$$

$$= -\operatorname{tg} v\pi + 4\cdot\left(\frac{q^2}{1-q^2}\sin 2\,v\pi - \frac{q^4}{1-q^4}\sin 4\,v\pi \pm \ldots.\right),$$

also

$$\frac{\sin v\pi + 3\,q^2 \sin 3\,v\pi + \ldots}{\cos v\pi + q^2 \cos 3\,v\pi + \ldots} = \operatorname{tg} v\pi - 4\cdot\left(\frac{q^2}{1-q^2}\sin 2\,v\pi - \frac{q^4}{1-q^4}\sin 4\,v\pi \pm \ldots\right).$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung q durch q′ und v durch vi, so erhalten wir, da

$$\left.\begin{array}{l} \cos(vi) = \operatorname{Cos} v \\ \sin(vi) = i \operatorname{Sin} v \end{array}\right\} \text{ also } \operatorname{tg}(vi) = i \operatorname{Tg} v$$

ist:

$$\frac{\operatorname{Sin} v\pi + 3\,q'^2 \operatorname{Sin} 3\,v\pi + \ldots}{\operatorname{Cos} v\pi + q'^2 \operatorname{Cos} 3\,v\pi + \ldots} = \operatorname{Tg} v\pi - 4\cdot\left(\frac{q'^2}{1-q'^2}\operatorname{Sin} 2\,v\pi - \frac{q'^4}{1-q'^4}\operatorname{Sin} 4\,v\pi \pm \ldots\right);$$

zufolge dieser Relation nimmt die Gleichung (30) die Form an:

$$22)\quad t = \alpha u + \beta\cdot\left(\operatorname{Tg}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} - \frac{4\,q'^2}{1-q'^2}\operatorname{Sin}\frac{u\pi i}{\omega'} + \frac{4\,q'^4}{1-q'^4}\operatorname{Sin}\frac{2\,u\pi i}{\omega'} \mp \ldots\right),$$

welche sich für den vorliegenden Fall zur numerischen Berechnung von u als besonders geeignet erweisen wird.

Was endlich den Wert von z anbelangt, so ergiebt sich aus Gleichung (20) mit Rücksicht auf die Formeln (37) und (38) des vorigen Abschnitts:

$$33)\quad z = a + \sqrt{2\,a\,(b-a)}\cdot\frac{1}{4\sqrt{q'}}\cdot\left|\frac{1 - 2\,q'\operatorname{Cos}\dfrac{u\pi i}{\omega'} + 2\,q'^4\operatorname{Cos}\dfrac{2\,u\pi i}{\omega'} + \ldots}{\operatorname{Cos}\dfrac{u\pi i}{2\,\omega'} + q'^2\operatorname{Cos}\dfrac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} + q'^6\operatorname{Cos}\dfrac{5\,u\pi i}{2\,\omega'} + \ldots}\right|^2. -$$

b) Numerische Berechnung.

Wie bereits oben angegeben, ist für unser Beispiel

$$\varkappa^2 = \frac{19}{21} \text{ und } \varkappa'^2 = \frac{2}{21},$$

*) Cf. Scheibner, l. c. pg. III.

also $\sqrt{\varkappa} = 1{,}97528956275116$

$$\lambda' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{\varkappa}}{1+\sqrt{\varkappa}} = 0{,}006254889844$$

$$2\lambda'^5 = \underline{0{,}000000000019}\,,$$ also nach Gleichung (31)* des vorigen Abschnitts

$$q' = 0{,}006254889863\,; \quad \log q' = 0{,}7962197 - 3\,.$$

Hieraus folgt

$$2\,q' = 0{,}012509779726$$
$$\underline{2\,q'^4 = 0{,}000000003061}$$
$$\vartheta_3(o, q') = 1 + 2\,q' + 2\,q'^4 + \ldots = 1{,}012509782787\,; \quad \log \vartheta_3(o, q') = 0{,}00539923\,.$$

Nach Gleichung (27) ist aber

$$\frac{\omega'}{i} = \frac{\pi}{\sqrt{2\,g\,(b+a)}} \cdot \vartheta_3{}^2(o, q')\,,$$

mithin wird, da $2\,g\,(b+a) = 21\,g$ ist:

$$\log \frac{\omega'}{i} = 0{,}3510042 - 1\,; \quad \frac{\omega'}{i} = 0{,}2243904\,.$$

Ferner ist nach Gleichung (40) des vorigen Abschnittes

$$\omega = \frac{\omega'}{\pi i} \cdot \mathrm{Log}\,\frac{1}{q'}\,;$$

nun ist

$$\log q' = 0{,}7962193 - 3\,; \quad \log \frac{1}{q'} = 2{,}2037807\,,$$

also

$$\mathrm{Log}\,\frac{1}{q'} = 5{,}0743926\,; \quad \log \mathrm{Log}\,\frac{1}{q'} = 0{,}7053841$$

und somit

$$\log \omega = 0{,}5592384 - 1\,; \quad \omega = 0{,}3624419\,.$$

Zur Berechnung von η' und η dienen die Formeln (28) und (29). Aus Gleichung (28) ergiebt sich, da

$$27\,q'^2 = 0{,}0010563385$$
$$3\,q'^2 = 0{,}00011737094$$

ist, während die Glieder mit q'^6 auf die zehn (bezw. 11) ersten Dezimalstellen ohne Einfluss sind:

$$1 - 27\,q'^2 \pm \ldots = 0{,}9989436615$$
$$1 - 3\,q'^2 \pm \ldots = 0{,}99988262906\,,$$

folglich

$$\frac{1 - 27\,q'^2 \pm \ldots}{1 - 3\,q'^2 \pm \ldots} = 0{,}999060922\,,$$

mithin

$$\log (\eta' i) = 0{,}5637063\,;$$

hieraus folgt mit Hülfe von (29)

$$\log \eta = 0{,}0356215\,; \quad \eta = 1{,}085479\,.$$

Setzen wir endlich die soeben gefundenen Werte von ω und η in die Gleichung (18) ein, so ergiebt sich für die Schwingungsdauer T der Wert

$$T = 2{,}85888 \text{ Sekunden.}$$

Da nun $\frac{3600}{T} = 1259$ mit dem Reste 0,67 ist, so führt im vorliegenden Falle der materielle Punkt im Verlaufe einer Stunde 1259 einfache Schwingungen aus und befindet sich nachher noch 0,67 Sekunden lang in Bewegung.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, den dem Werte

$$t = 0{,}67$$

entsprechenden Wert von u mittels der Gleichung

$$32)\quad t = \alpha u + \beta \cdot \left(\mathrm{Tg}\,\frac{u\pi i}{2\,\omega'} - \frac{4\,q'^2}{1-q'^2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{u\pi i}{\omega'} + \frac{4\,q'^4}{1-q'^4}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\,u\pi i}{\omega'} \mp \ldots\right)$$

zu bestimmen; die konstanten Koeffizienten auf der rechten Seite dieser Gleichung besitzen die Werte

$$34)\quad \left|\begin{array}{lll} \alpha = \dfrac{T}{2\,\omega} - \dfrac{\pi i}{g\omega\omega'} = 0{,}0062546\,; & \log \alpha & = 0{,}7961995 - 3 \\ \beta = \dfrac{\pi i}{g\omega'} \qquad\qquad = 1{,}4271734\,; & \log \beta & = 0{,}1544767 \\ \qquad \dfrac{q'^2}{1-q'^2} = 0{,}0000391251777\,; & \log \dfrac{q'^2}{1-q'^2} & = 0{,}5924564 - 5 \\ \qquad \dfrac{q'^4}{1-q'^4} = 0{,}00000000153066\,; & \log \dfrac{q'^4}{1-q'^4} & = 0{,}1848787 - 9 \end{array}\right.$$

Wegen der Kleinheit der beiden letzten Koeffizienten werden wir dieselben zunächst vernachlässigen können und einen schon ziemlich genauen Näherungswert von u erhalten, wenn wir

$$35)\quad t = \alpha u + \beta\,.\,\mathrm{Tg}\,\frac{u\pi i}{2\,\omega'}$$

setzen. Aber auch diese Gleichung ist in Beziehung auf u transcendent. Beachten wir jedoch, dass α im Verhältnis zu β eine kleine Grösse ist, so werden wir den ersten Näherungswert von u_1 erhalten, indem wir $\alpha = o$ setzen; alsdann wird

$$36)\quad \mathrm{Tg}\,\frac{u_1\pi i}{2\,\omega'} = \frac{t}{\beta}\,,$$

also

$$\log \mathrm{Tg}\,\frac{u_1\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}6715981 - 1 = 0{,}67160 - 1\,.$$

Dazu gehört nach den Gronau'schen Tafeln das Argument

$$M \cdot \frac{u_1\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}22122\,,$$

mithin ist

$$\log u_1 = 0{,}8619244 - 2\,;\quad u_1 = 0{,}0727653\,.$$

Aus Gleichung (35) folgt nun

$$37)\quad \mathrm{Tg}\,\frac{u\pi i}{2\,\omega'} = \frac{t - \alpha u}{\beta}\,;$$

wir erhalten demnach zur Bestimmung des zweiten Näherungswertes u_2 von u die Gleichung

$$38)\quad \mathrm{Tg}\,\frac{u_2\pi i}{2\,\omega'} = \frac{t - \alpha u_1}{\beta}\,;$$

dieselbe liefert, da

$$t - \alpha u_1 = 0{,}66954488\,;\quad \log (t - \alpha u_1) = 0{,}8257797 - 1$$

ist:

$$\log \mathrm{Tg}\,\frac{u_2\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}6713030 - 1 = 0{,}67130 - 1\,,$$

$$M \cdot \frac{u_2\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}22104\,,$$

$$\log u_2 = 0{,}8615709 - 2\,;\quad u_2 = 0{,}072706\,.$$

Der dritte Näherungswert, den uns die Gleichung (37) liefern würde, stimmt mit u_2 überein. Wir werden daher zur Ermittelung des dritten Näherungswertes nunmehr die exakte Gleichung (32) benützen, aus der sich ergiebt:

$$39)\quad \operatorname{Tg}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} = \frac{t-\alpha u}{\beta} + 4\cdot\left(\frac{q'^2}{1-q'^2}\operatorname{Sin}\frac{u\pi i}{\omega'} - \frac{q'^4}{1-q'^4}\operatorname{Sin}\frac{2\,u\pi i}{\omega'} \pm \ldots\right);$$

folglich haben wir zur Ermittelung des dritten Näherungswertes u_3 von u die Gleichung:

$$40)\quad \operatorname{Tg}\frac{u_3\pi i}{2\,\omega'} = \frac{t-\alpha u_2}{\beta} + 4\cdot\left(\frac{q'^2}{1-q'^2}\operatorname{Sin}\frac{u_2\pi i}{\omega'} - \frac{q'^4}{1-q'^4}\operatorname{Sin}\frac{2\,u_2\pi i}{\omega'} \pm \ldots\right).$$

Aus dem oben gefundenen Werte von u_2 ergiebt sich aber

$$\frac{t-\alpha u_2}{\beta} = 0{,}4691408$$

$$M\cdot\frac{u_2\pi i}{\omega'} = 0{,}4420794 = 0{,}44208;\qquad \log\operatorname{Sin}\frac{u_2\pi i}{\omega'} = 0{,}080282$$

$$M\cdot\frac{2\,u_2\pi i}{\omega'} = 0{,}8841588 = 0{,}88416;\qquad \log\operatorname{Sin}\frac{2\,u_2\pi i}{\omega'} = 0{,}57567,$$

also mit Benützung der in (34) angegebenen Werte:

$$\frac{4\,q'^2}{1-q'^2}\cdot\operatorname{Sin}\frac{u_2\pi i}{\omega'} = 0{,}000188277$$

$$\frac{4\,q'^4}{1-q'^4}\cdot\operatorname{Sin}\frac{2\,u_2\pi i}{\omega'} = 0{,}000000023,$$

und demgemäss

$$\operatorname{Tg}\frac{u_3\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}4693291;\qquad \log\operatorname{Tg}\frac{u_3\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}67148-1$$

$$M\cdot\frac{u_3\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}22115$$

$$\log u_3 = 0{,}8617869-2;\qquad u_3 = 0{,}0727423.$$

Berechnet man in derselben Weise den vierten Näherungswert u_4 von u, indem man auf der rechten Seite der Gleichung (39) u durch den eben gefundenen Wert u_3 ersetzt, so erhält man

$$\operatorname{Tg}\frac{u_4\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}4693291 = \operatorname{Tg}\frac{u_3\pi i}{2\,\omega'};$$

es ist also bereits $u_4 = u_3$, und somit ist derjenige Wert von u, welcher der Gleichung (32) Genüge leistet und dem Werte $t = 0{,}67$ entspricht:

$$u = 0{,}0727423;\qquad \log u = 0{,}8617869-2\ .\ -$$

Endlich ist dieser Wert von u noch in Gleichung (33) einzusetzen und der zugehörige Wert von z zu berechnen. Für den soeben angegebenen Wert von u ist aber:

$$M\cdot\frac{u\pi i}{\omega'} = 0{,}44230;\qquad \log\operatorname{Cos}\frac{u\pi i}{\omega'} = 0{,}19451;\qquad 2\,q'\operatorname{Cos}\frac{u\pi i}{\omega'} = 0{,}0195777$$

$$M\cdot\frac{u\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}22115;\qquad \log\operatorname{Cos}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}054029;\qquad \operatorname{Cos}\frac{u\pi i}{2\,\omega'} = 1{,}13248$$

$$M\cdot\frac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}66345;\qquad \log\operatorname{Cos}\frac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}38241;\qquad q'^2\operatorname{Cos}\frac{3\,u\pi i}{2\,\omega'} = 0{,}0000944,$$

während die Entwickelungsglieder mit höheren Potenzen von q' nicht mehr in Betracht kommen.

Demnach wird, da $a = 0{,}5$ und $2a \,.\, (b - a) = 9{,}5$ ist:

$$z = 0{,}5 + 7{,}3011\,, \quad \text{d. h.}$$
$$z = 7{,}8011\,.$$

Im vorliegenden Falle beschreibt also der materielle Punkt innerhalb einer Stunde 1259 einfache Schwingungen, gelangt nach Zurücklegung der letzten vollen Schwingung zu dem der Anfangslage entgegengesetzten höchsten Punkte der Bahn und fällt von hier aus noch bis zu demjenigen auf derselben Seite der z-Axe liegenden Punkte der Bahnkurve, welcher von der Abscissenaxe den Abstand 7,8011 cm besitzt.

In ganz analoger Weise, wie die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Kettenlinie, lässt sich auch die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Parabel bestimmen, deren Axe vertikal nach oben gerichtet ist. Nehmen wir die Axe der Parabel zur z-Axe, die durch den Scheitelpunkt der Parabel gelegte Horizontale zur x-Axe und bezeichnen den Parameter mit $2a$, so lautet die Gleichung der Parabel:

$$x^2 = 4\,az$$

und die Differentialgleichung zur Bestimmung von z als Funktion von t:

$$dt = (z + a) \cdot \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}\,,$$

wo

$$R(z) = z\,(z + a)\,(-2\,gz + h) = 2\,gz\,(z + a)\left(\frac{v_0{}^2}{2\,g} - z\right) = 2\,gz\,(z + a)\,(b - z)$$

ist; v_0 und b haben dieselbe Bedeutung wie oben: v_0 stellt die Geschwindigkeit dar, welche der materielle Punkt in seiner tiefsten Lage, hier also für $z = o$, besitzt, und $b = \frac{v_0{}^2}{2\,g}$ den Maximalwert von z, der während der Bewegung erreicht wird.

Da sich die Rechnung in ihrem weiterem Verlaufe genau so gestaltet, wie für das zuletzt behandelte Problem, so wird es genügen, das Resultat derselben anzugeben. Die zur Berechnung der Perioden erforderlichen Grössen e_1, e_2, e_3 besitzen nebst ihren Differenzen die Werte

$$\begin{array}{rl|rl}
e_1 = & \frac{ag}{3} + \frac{bg}{6} & e_1 - e_2 = & \frac{ag}{2} \\
e_2 = & -\frac{ag}{6} + \frac{bg}{6} & e_1 - e_3 = & \frac{a + b}{2} \cdot g \\
e_3 = & -\frac{ag}{6} - \frac{bg}{3} & e_2 - e_3 = & \frac{bg}{2}\,;
\end{array}$$

endlich treten an Stelle der Gleichungen (18), (19) und (20) die folgenden:

$$T = \frac{2\,a + b}{3} \cdot 2\,\omega + \frac{4}{g} \cdot \eta$$

$$t = \frac{Tu}{2\,\omega} + \frac{1}{g\omega} \cdot \frac{\vartheta_0{}'\left(\frac{u}{2\,\omega}, q\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2\,\omega}, q\right)} \qquad z = \sqrt{ab} \cdot \frac{\vartheta_2{}^2\left(\frac{u}{2\,\omega}, q\right)}{\vartheta_0{}^2\left(\frac{u}{2\,\omega}, q\right)}\,.$$

Auf Grund dieser Formeln vollzieht sich die numerische Rechnung genau nach den oben angegebenen Vorschriften. —

Wesentlich anders gestaltet sich jedoch die Rechnung für die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Parabel mit horizontaler Axe. Bei diesem Probleme besitzt das Polynom dritten Grades $R(z)$, dessen Wurzeln in den bisher behandelten Fällen sämtlich reell waren, nur eine reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln: $z = 2ai$ und $z = -2ai$; infolge dessen wird auch von den Grössen e_1, e_2 und e_3 nur die eine (e_2) reell, während die beiden andern (e_1 und e_3) konjugiert komplexe Werte erhalten. Die bisher angewandten Formeln bedürfen daher, wenn die Resultate in möglichst reeller Form erscheinen sollen, für diesen Fall einer durchgreifenden Transformation, deren Grundzüge im Artikel (46) der „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen" angegeben sind. Es war ursprünglich meine Absicht, auch noch diesen Fall der Bewegung in ebenso erschöpfender Weise an dieser Stelle zu behandeln, wie die vorhergehenden. Doch muss ich aus Rücksicht auf den dieser Programmabhandlung zugemessenen Raum davon Abstand nehmen, und ich behalte mir daher, da eine blosse Mitteilung der resultierenden und zur numerischen Berechnung geeigneten Formeln ziemlich zwecklos wäre, vor, bei einer späteren Gelegenheit auf dieses ebenso interessante wie lehrreiche Problem zurückzukommen.