KAZIMIERZ GRODZIŃSKI

# TRYGONOMETRIA PŁASKA

PODRĘCZNIK DLA I KLASY LICEUM
HUMANISTYCZNEGO I MATEMATYCZNEGO

INTERIM TREASURY COMMITTEE
FOR POLISH QUESTION – EDUCATIONAL BRANCH

JEROZOLIMA 1946

KAZIMIERZ GRODZIŃSKI

# TRYGONOMETRIA PŁASKA

## PODRĘCZNIK DLA I KLASY LICEUM HUMANISTYCZNEGO I MATEMATYCZNEGO



INTERIM TREASURY COMMITTEE
FOR POLISH QUESTION — EDUCATIONAL BRANCH

JEROZOLIMA 1946

# ROZDZIAŁ I

## Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

### § 1. *Zadanie trygonometrii*

Bardzo wiele zagadnień z geometrii i jej zastosowań sprowadza się do wyznaczania pewnych odcinków i kątów, jeżeli dane są inne odcinki lub kąty. W szczególności odnosi się to do trójkątów.

Trójkąty posiadają 3 boki i 3 kąty zwane ogólnie *elementami trójkąta.* Jak wiadomo z planimetrii, dla wyznaczenia trójkąta nie wymagana jest znajomość wszystkich 6 elementów; trójkąt jest już wyznaczony, jeżeli dane są jego 3 elementy zgodnie z jedną z czterech cech przystawania trójkątów. Jeżeli np. znane są w trójkącie dwa boki i kąt zawarty między nimi (2 cecha przystawania trójkątów), to trójkąt ten możemy skonstruować, a następnie nieznane elementy trójkąta zmierzyć przy pomocy linialu i kątomierza.

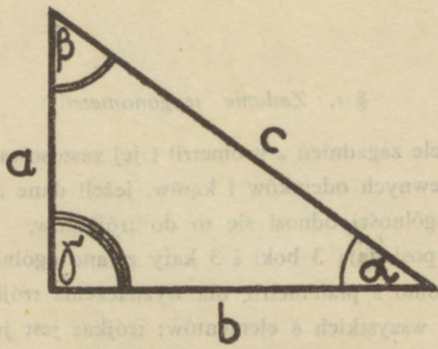
Przybliżenie, z jakim wyznaczymy te nieznane elementy, zależy od dokładności przyrządów rysunkowych, od chropowatości papieru, od granicy naszego widzenia i od wielu innych czynników. Ze względu na to, iż takie przybliżenie bardzo często w praktyce nie wystarcza (np. dla miernictwa, topografii, astronomii itp.), jak również ze względów czysto naukowych staramy się nieznane elementy trójkąta wyznaczyć przy pomocy rachunku.

Zagadnienie wyznaczenia nieznanych elementów trójkąta, gdy znane są jego trzy elementy, nazywamy *rozwiązywaniem trójkątów*, a gałąź matematyki zajmującą się tym zagadnieniem — *trygonometrią* (z greckiego „trigonon" = trójkąt i „metreo" = mierzę).

### § 2. *Definicje funkcyj trygonometrycznych*

Ponieważ trzy odpowiednio dobrane elementy trójkąta wystarczają dla wyznaczenia pozostałych 3 elementów, przeto zachodzić muszą między liczbami wymiarowymi wszystkich 6 elementów pewne związki, pewne równania. Zgodnie ze złotą zasadą algebry: „ile niewiadomych, tyle równań", musimy mieć trzy takie związki, ponieważ mamy trzy nieznane elementy.

Zależności te przedstawiają się bardzo prosto w trójkącie prostokątnym:




Rys. 1.

Niechaj a, b, c oznaczają przyprostokątne i przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, zaś $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ — kąty leżące naprzeciwko odpowiednich boków (rys. 1). Z planimetrii wiemy, iż suma kątów w trójkącie wynosi $180^0$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0;$$

ponieważ zaś w trójkącie prostokątnym kąt $\gamma$ jest prosty, pozostaje jako pierwsza zależność:

$$\alpha + \beta = 90^0 \tag{1}$$

lub

$$\alpha = 90^0 - \beta; \tag{1a}$$

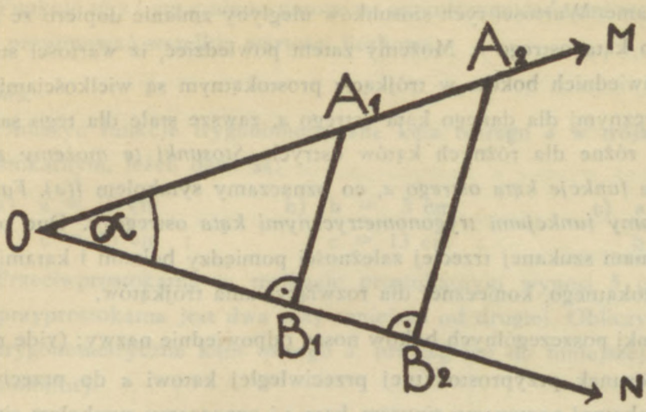
Z planimetrii znamy również związek zachodzący między bokami trójkąta prostokątnego, a mianowicie *twierdzenie Pitagorasa:*

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{2}$$

Równanie (1) pozwala obliczyć jeden z kątów ostrych, gdy znany jest drugi kąt — równanie (2) pozwala obliczyć jeden z boków, gdy dane są dwa pozostałe.

Brakujące nam jeszcze trzecie równanie, podające zależność między bokami i kątami trójkąta, wyszukamy przy pomocy podobieństwa trójkątów.

Wykreślmy dowolny kąt ostry $\alpha$ o ramionach *OM* i *ON* (rys. 2).




*Rys. 2.*

Obierzmy na jednym ramieniu kąta (np. na ramieniu OM) dowolny punkt $A_1$, różny od O i poprowadźmy z tego punktu prostopadłą $A_1B_1$ do drugiego ramienia ON. Powstanie w ten sposób trójkąt prostokątny $OB_1A_1$ o kącie ostrym $A_1OB_1 = a$. Obierzmy teraz na tym samym ramieniu OM inny dowolny punkt $A_2$, różny od O i $A_1$, i poprowadźmy znowu prostopadłą $A_2B_2$ do ramienia ON. Powstanie znowu trójkąt prostokątny $OB_2A_2$ o kącie ostrym $A_2OB_2 = a$.

Oba powstałe trójkąty prostokątne są podobne:

$$\triangle\, O B_1 A_1 \sim \triangle\, O B_2 A_2;$$

ponieważ posiadają jeden kąt ostry wspólny (1. cecha podobieństwa trójkątów prostokątnych), ich boki są zatem odpowiednio proporcjonalne:

$$\frac{A_1B_1}{O A_1} = \frac{A_2B_2}{O A_2}$$

$$\frac{A_1B_1}{O B_1} = \frac{A_2B_2}{O B_2}$$

oraz

$$\frac{O B_1}{O A_1} = \frac{O B_2}{O A_2}$$

Widzimy, iż w obu trójkątach prostokątnych *stosunek odpowiednich boków jest wielkością stałą*, niezależną od bezwzględnej długości poszczególnych boków ,tj. *niezależną od położenia punktu* $A_2$ *względem* $A_1$ *na ramieniu kąta OM*. Gdybyśmy np. obrali sobie jeszcze jakiś trzeci punkt $A_3$ na tym ramieniu OM i skonstruowali analogicznie trójkąt prostokątny $A_3OB_3$, to i dla tego trzeciego trójkąta stosunki odpowiednie boków byłyby takie same. Wartości tych stosunków uległyby zmianie dopiero ze zmianą samego kąta ostrego $\alpha$. Możemy zatem powiedzieć, iż wartości stosunków odpowiednich boków w trójkącie prostokątnym są wielkościami charakterystycznymi dla danego kąta ostrego $\alpha$, zawsze stałe dla tego samego kąta $\alpha$, a różne dla różnych kątów ostrych. *Stosunki te możemy zatem uważać za funkcje kąta ostrego $\alpha$*, co oznaczamy symbolem $f(\alpha)$. *Funkcje te nazywamy funkcjami trygonometrycznymi kąta* ostrego $\alpha$. One to dostarczają nam szukanej trzeciej zależności pomiędzy bokami i kątami trójkąta prostokątnego, koniecznej dla rozwiązywania trójkątów.

Stosunki poszczególnych boków noszą odpowiednie nazwy: (vide rys. 1)

I. Stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi $\alpha$ do przeciwprostokątnej nazywamy *sinusem* kąta $\alpha$ i oznaczamy symbolem sin $\alpha$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \tag{3}$$

II. Stosunek przyprostokątnej przyległej kątowi $\alpha$ do przeciwprostokątnej nazywamy *cosinusem* kąta $\alpha$ i oznaczamy symbolem cos $\alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \tag{4}$$

III. Stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi $\alpha$ do przyprostokątnej przyległej nazywamy *tangensem* kąta $\alpha$ i oznaczamy symbolem tg $\alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \tag{5}$$

IV. Stosunek przyprostokątnej przyległej kątowi $\alpha$ do przyprostokątnej przeciwległej nazywamy *cotangensem* kąta $\alpha$ i oznaczamy symbolem ctg $\alpha$:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \tag{6}$$

Funkcje cosinus i cotangens nazywamy *kofunkcjami* należącymi odpowiednio do funkcyj sinus i tangens.

Ze względu na to, iż przeciwprostokątna jest zawsze większa od każdej przyprostokątnej, funkcje sin $\alpha$ i cos $\alpha$ jako stosunki odpowiednich przyprostokątnych do przeciwprostokątnej, przyjmują tylko wartości ułamkowe; obie te funkcje są zatem mniejsze od jedności:

$$\sin \alpha < 1 \quad ; \quad \cos \alpha < 1$$

(Podkreślamy już na tym miejscu, że *nierówności te słuszne są tylko dla kąta $\alpha < 90^0$*; przy uogólnianiu pojęcia funkcyj trygonometrycznych na dowolne kąty nierówności te ulegną pewnej zmianie).

Funkcje tg $\alpha$ i ctg $\alpha$ nie są natomiast ograniczone żadnymi warunkami i mogą przyjmować wszelkie wartości liczbowe.

*Zadania.*

1. Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta ostrego $\alpha$ w trójkącie prostokątnym, jeżeli dane są:

a) $a = 9$ cm  
$c = 15$ cm ;  
b) $b = 5$ cm  
$c = 13$ cm ;  
c) $a = 4$ cm  
$b = 5$ cm.

2. Przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym wynosi 5 cm; jedna przyprostokątna jest dwa razy mniejsza od drugiej. Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta ostrego $\alpha$, przyległego do mniejszej przyprostokątnej.

3. Wykreślić na papierze milimetrowym trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej $c = 8$ cm i jednym kącie ostrym $\alpha = 50^0$. Znaleźć funkcje trygonometryczne tego kąta.

## § 3. *Funkcje trygonometryczne kątów dopełniających*

Dwa kąty, których suma wynosi $90^0$, nazywamy *kątami dopełniającymi.* Ponieważ w trójkącie prostokątnym suma obu kątów ostrych wynosi $90^0$, kąty te są dopełniające:

$$\alpha + \beta = 90^0$$

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

Wyznaczmy funkcje trygonometryczne obu tych kątów. Zgodnie z definicjami poprzedniego paragrafu otrzymamy dla kąta $\alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Ponieważ przyprostokątna przyległa do kąta $\alpha$ jest przyprostokątną przeciwległą do kąta $\beta = 90^0 - \alpha$ i na odwrót, otrzymamy dla kąta $\beta$:

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$$

Porównując wyniki, dochodzimy do następujących zależności:

$$\sin \beta = \sin (90^0 - \alpha) = \cos \alpha$$
$$\cos \beta = \cos (90^0 - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (90^0 - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$
$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} (90^0 - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha,$$

które możemy wyrazić w następującym twierdzeniu:

*funkcje trygonometryczne kąta ostrego równe są kofunkcjom kąta dopełniającego:*

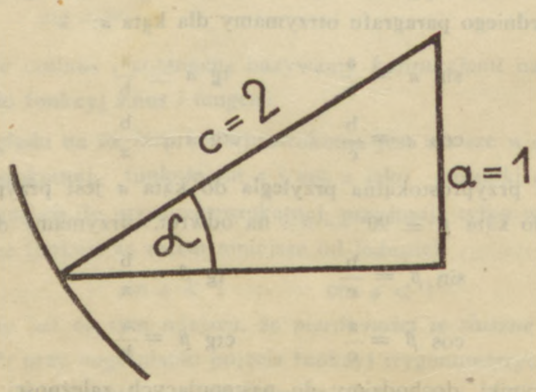
$$f(\alpha) = \operatorname{cof}(90^0 - \alpha) \tag{7}$$

## § 4. *Budowa kąta ostrego o danej funkcji trygonometrycznej*

Ponieważ każdej (dopuszczalnej) wartości liczbowej funkcyj trygonometrycznych odpowiada ściśle określony kąt ostry i na odwrót — każdemu kątowi ostremu przyporządkowane są ściśle określone wartości funkcyj trygonometrycznych, możemy przy znanym kącie obliczyć poszczególne funkcje trygonometryczne, a przy znanej wartości funkcji — skonstruować odpowiedni kąt ostry. W pierwszym wypadku budujemy dowolny trójkąt prostokątny, którego jednym kątem ostrym jest dany kąt $\alpha$, mierzymy jego boki z mniejszą lub większą dokładnością i obliczamy w przybliżeniu wartości poszczególnych funkcyj trygonometrycznych. W wypadku drugim, w zależności od tego, jaka funkcja trygonometryczna jest dana, postępujemy w sposób następujący:

I) dany jest $\sin \alpha$: $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

Ponieważ wszystkie trójkąty prostokątne, w których stosunek jednej przy-

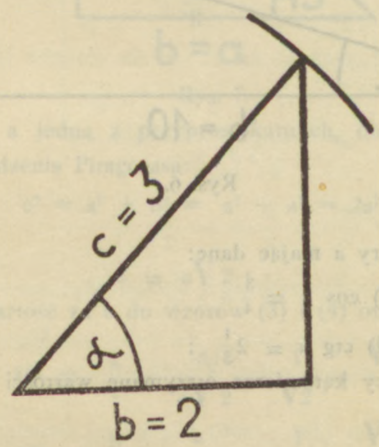



Rys. 3.

prostokątnej do przeciwprostokątnej wynosi ½, będą podobne, tj. będą miały ten sam ostry kąt $a$, budujemy trójkąt o jednej przyprostokątnej $a = 1$ i przeciwprostokątnej $c = 2$ (rys. 3); szukany kąt $a$ jest kątem przeciwległym przyprostokątnej $a = 1$.

II) dany jest cos $a$: $\cos a = \frac{2}{3}$

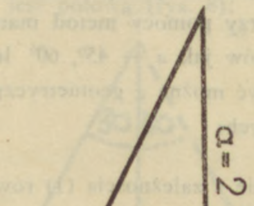
Postępujemy w ten sam sposób jak uprzednio ($b = 2$, $c = 3$) z tym tylko, iż szukanym kątem będzie kąt przyległy do boku $b = 2$ (rys. 4):




Rys. 4.

III) dany jest tg $a$: $\operatorname{tg} \alpha = 2$

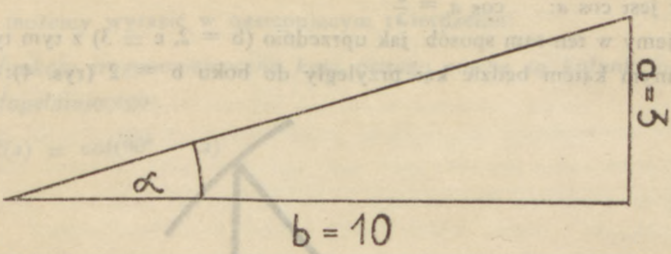
Budujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a = 2$ i $b = 1$ (rys. 5); szukany kąt $a$ jest kątem ostrym leżącym naprzeciw boku $a = 2$.




Rys. 5.

IV) dany jest ctg $\alpha$: $\quad \operatorname{ctg} \alpha = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

Analogicznie jak uprzednio budujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a = 3 i b = 10 (rys. 6); szukany kąt $\alpha$ przylega do boku b = 10.




Rys. 6.

*Zadania*:

1) Zbudować kąt ostry $\alpha$ mając dane:

a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$; b) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$

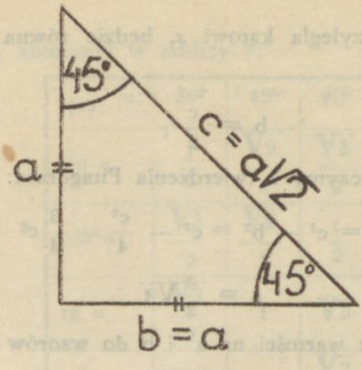
c) $\operatorname{tg}\alpha = 0.7$; d) $\operatorname{ctg} \alpha = 2\frac{1}{3}$;

odczytać przy pomocy kątomierza otrzymane wartości na $\alpha$.

## § 5. *Funkcje trygonometryczne kąta 45°, 60° i 30°*

Wartości funkcyj trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha$ oblicza się z dowolną dokładnością przy pomocy metod matematyki wyższej — dla niektórych specjalnych kątów jak $\alpha = 45^0$, $60^0$ lub $30^0$ wartości funkcyj trygonometrycznych obliczyć można z geometrycznych właściwości odnośnych trójkątów prostokątnych:

I) Jeżeli $\alpha = 45^0$, to zgodnie z zależnością (1) również $\beta = 45^0$; odnośny trójkąt prostokątny jest zatem równoramienny, ponieważ oba kąty ostre są równe (rys. 7).




Rys. 7.

Oznaczając przez a jedną z przyprostokątnych, obliczymy przeciwprostokątną c z twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

lub

$$c = a\sqrt{2}\ ;$$

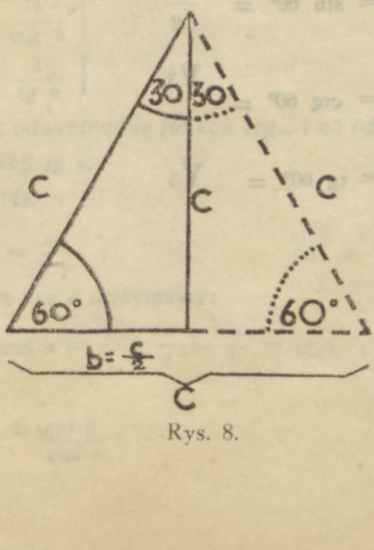
podstawiając tę wartość za c do wzorów (3) i (4) otrzymamy:

$$\sin 45^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^0 = \frac{b}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1 \qquad \operatorname{ctg} 45^0 = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

II) Jeżeli $\alpha = 60^0$, to trójkąt prostokątny da się uzupełnić do trójkąta równobocznego, którego jest połową (rys. 8):




Rys. 8.

przyprostokątna b, przyległa kątowi $a$, będzie równa połowie przeciwprostokątnej c:

$$b = \frac{c}{2};$$

przyprostokątną a obliczymy z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 = c^2 - b^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4}c^2$$

$$a = \frac{c}{2}\sqrt{3}$$

Podstawiając powyższe wartości na a i b do wzorów (3), (4), (5) i (6), otrzymamy:

$$\sin 60^0 = \frac{a}{c} = \frac{c}{2}\sqrt{3} : c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^0 = \frac{b}{c} = \frac{c}{2} : c = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^0 = \frac{a}{b} = \frac{c}{2}\sqrt{3} : \frac{c}{2} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^0 = \frac{b}{a} = \frac{c}{2} : \frac{c}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

III) Ponieważ $a = 30^0 = (90^0 - 60^0)$ jest kątem dopełniającym kąta $60^0$, otrzymamy zgodnie z zależnością (7) następujące wartości funkcyj trygonometrycznych kąta $30^0$:

$$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \operatorname{ctg} 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^0 = \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$$

Otrzymane wyniki zbieramy w tablicy I:

| $f(\alpha)$: $\alpha$: | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ |
|---|---|---|---|
| sin $\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos $\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg $\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| ctg $\alpha$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

Tabl. I.

### § 6. *Zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta*

Funkcje trygonometryczne sin $a$, cos $a$, tg $\alpha$, ctg $\alpha$ nie są niezależne od siebie, lecz są związane pewnymi zależnościami, wynikającymi bezpośrednio z ich definicyj:

I) Według zależności (5) i (6):

$$\operatorname{tg} a = \frac{a}{b}\ ; \qquad \operatorname{ctg} a = \frac{b}{a}\ ;$$

zatem

$$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \text{ skąd}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \operatorname{ctg} a &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

*Funkcja tg a jest odwrotnością funkcji ctg a i na odwrót funkcja ctg α jest odwrotnością funkcji tg a.*

II) Według (3) i (4):

$$\sin a = \frac{a}{c}\ ; \qquad \cos a = \frac{b}{c}\ ;$$

Dzieląc sin $a$ przez cos $a$ otrzymamy:

$$\sin a : \cos a = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} a,$$

zatem

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \tag{9}$$

*Funkcja tg $\alpha$ równa jest ilorazowi funkcyj sin $\alpha$ i cos $\alpha$.*

Z zależności (8) i (9) wynika, że analogicznie

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \tag{9a}$$

III) Według definicji: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ; $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ ; oba te równania podnosimy do kwadratu:

$$\sin^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} \quad ; \quad \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2}$$

i dodajemy do siebie stronami:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

ale według Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$

zatem $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{c^2}{c^2} = 1$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \tag{10}$$

*Suma kwadratów funkcyj sin $\alpha$ i cos $\alpha$ jest równa jedności.*

Zależność ta przedstawia nam twierdzenie Pitagorasa w postaci trygonometrycznej.

Przy pomocy wyprowadzonych zależności możemy obliczyć wartości 3 funkcyj trygonometrycznych, gdy znana jest wartość funkcji czwartej; np.:

1) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ; znaleźć cos $\alpha$, tg $\alpha$, ctg $\alpha$.

a) z zależności (10) wynika:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$
$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

zatem

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}$$

b) z zależności (9) wynika:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

$$\text{tg}\ \alpha = 2{,}4$$

c) z zależności (8) wynika:

$$\text{ctg } a = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\text{ctg } a = \frac{5}{12}$$

2) $\text{tg } a = \frac{7}{24}$ ; znaleźć $\text{ctg } a$; $\sin a$; $\cos a$;

a) $\text{ctg } a = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$; $\qquad \text{ctg } a = \frac{24}{7}$

$$\text{ctg } a = 3\frac{3}{7}$$

b) $\text{tg } a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} = \frac{7}{24}$

zatem:

$$24 \sin a = 7 \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

otrzymujemy równanie pierwiastkowe, które rozwiązujemy podnosząc obie strony równania do kwadratu:

$$576 \sin^2 a = 49 (1 - \sin^2 a)$$

lub

$$625 \sin^2 a = 49$$

$$\sin^2 a = \frac{49}{625}$$

$$\sin a = \frac{7}{25}$$

c) $\cos a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{49}{625}$

$\cos^2 a = \frac{576}{625} \qquad \cos a = \frac{24}{25}$

*Zadania.*

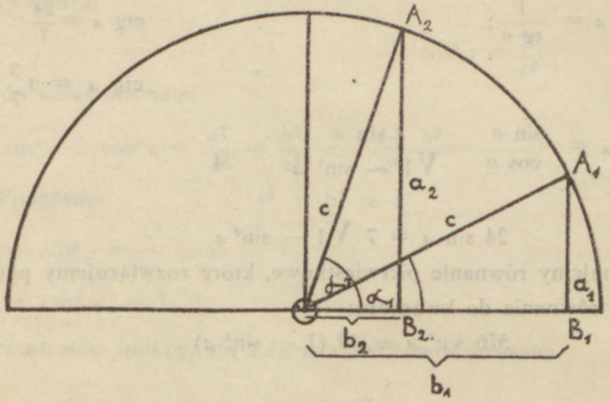
1) Wyrazić funkcje trygonometryczne kąta $a$ przez a) $\cos a$, b) $\text{tg } a$, c) $\text{ctg } a$;

2) $\cos a = \frac{4}{17}$ ; obliczyć pozostałe funkcje;

3) $\text{ctg } a = \frac{5}{12}$ ; obliczyć pozostałe funkcje.

## § 7. *Zmienność funkcyj trygonometrycznych kąta ostrego*

Przechodzimy obecnie do zagadnienia zmienności funkcyj trygonometrycznych kąta ostrego tj. do zagadnienia, *w jaki sposób zmieniają się* *poszczególne funkcje trygonometryczne, gdy kąt ostry a rośnie lub maleje.* Dla ułatwienia zadania rozpatrywać będziemy trójkąty prostokątne o stałej przeciwprostokątnej c. W tym celu budujemy trójkąty prostokątne oparte na średnicy półkola, których jeden wierzchołek leży w środku koła, a których przeciwprostokątne są promieniami (rys. 9).




Rys. 9.

*Jeżeli kąt a wzrasta* ($a_2 > a_1$), to wzrasta również przyprostokątna przeciwległa kątowi $a$ ($a_2 > a_1$), maleje natomiast przyprostokątna przyległa ($b_2 < b_1$); przeciwprostokątna c jako promień koła pozostaje bez zmiany. Powoduje to, iż wzrasta funkcja $\sin a = \frac{a}{c}$, ($\sin a_2 > \sin a_1$), maleje natomiast funkcja $\cos a = \frac{b}{c}$, ($\cos a_2 < \cos a_1$); jeżeli *kąt a maleje, maleje również funkcja sin a, wzrasta natomiast cos a.*

Zmiana kąta ostrego $a$ pociąga za sobą również zmianę funkcji tg $a$ i ctg $a$. *Ze wzrostem kąta a* ($a_2 > a_1$) *funkcja* $\operatorname{tg} a = \frac{a}{b}$ *wzrasta i to szybciej niż funkcja sin a*, ponieważ wzrost tangensa spowodowany jest dwoma czynnikami: wzrostem przyprostokątnej a, ($a_2 > a_1$ i maleniem przyprostokątnej b, ($b_2 < b_1$). Analogicznie funkcja ctg $a$ maleje ze wzrostem kąta $a$ i to szybciej niż cos $a$, ponieważ jednocześnie maleje przyprostokątna b (licznik), a wzrasta przyprostokątna a (mianownik).

*Ze wzrostem kąta ostrego a wzrastają zatem tylko sin a i tg a, podczas gdy obie kofunkcje: cosinus i cotangens a maleją.*

## § 8. *Tablice funkcyj trygonometrycznych*

Aby stosować funkcje trygonometryczne do rozmaitych zagadnień praktycznych, należy znać ich wartości liczbowe dla poszczególnych kątów ostrych. Przy pomocy metod matematyki wyższej można obliczyć wartości liczbowe wszystkich funkcyj trygonometrycznych dla każdego kąta ostrego $a$ z dowolną dokładnością. Obliczenia takie wykonuje się zazwyczaj dla kąta $a$ co $1^0$, $1'$ lub nawet $1''$ z dokładnością do czterech, pięciu, siedmiu lub dziesięciu miejsc dziesiętnych, a wyniki zbiera się w specjalnych tablicach funkcyj trygonometrycznych.

Ze względu na zależność (7):

$$f(a) = \text{cof}\,(90^0 - a)$$

zawierają tablice wartości funkcyj tylko dla kątów $a \leq 45^0$, ponieważ dla kątów ostrych $a > 45^0$ wartości funkcyj powtarzają się w wartościach kofunkcyj. Jeżeli mamy np. obliczyć sin $67^0 42'$, to zamiast tego obliczamy wartość kofunkcji kąta dopełniającego tj. cos $22^0 18'$.

W tablicy II podajemy część wartości funkcji sin $a$ dla kątów ostrych w odstępach co $1^0$, zaokrąglonych do czterech miejsc dziesiętnych:

| $a^0$ | sin $a$ | $a^0$ | sin $a$ |
|---|---|---|---|
| | | 20 | 0,3420 |
| 10 | 0,1736 | 21 | 0,3584 |
| 11 | 0,1908 | 22 | 0,3746 |
| 12 | 0,2079 | 23 | 0,3907 |
| 13 | 0,2250 | 24 | 0,4067 |
| 14 | 0,2419 | 25 | 0,4226 |
| 15 | 0,2588 | 26 | 0,4384 |
| 16 | 0,2756 | 27 | 0,4540 |
| 17 | 0,2924 | 28 | 0,4695 |
| 18 | 0,3090 | 29 | 0,4848 |
| 19 | 0,3256 | 30 | 0,5000 |

Tabl. II.

Z tablicy tej możemy odczytać, jaką wartość przyjmuje funkcja sin $a$ dla danego kąta ostrego $a$ i na odwrót, jaki kąt $a$ odpowiada danej wartości funkcji sin $a$. Dla kątów pośrednich, nie zawartych w tabeli, oblicza się wartości funkcji przy pomocy *interpolacji*. Słowo interpolacja oznacza wstawianie pomiędzy dwie znane wielkości trzeciej nieznanej.

I tak, jeżeli mamy podać wartość funkcji sin $15^0 15'$, to postępujemy w sposób następujący:

z tablicy znajdujemy: sin $15^0 = 0{,}2588$

sin $16^0 = 0{,}2756$;

wzrostowi kąta od $15^0$ do $16^0$ tj. o $1^0 = 60'$ odpowiada wzrost funkcji sinusa od 0,2588 do 0,2756, tj. o 0,0168, zatem wzrostowi kąta o 1' odpowiada przyrost funkcji sin $\alpha$ o $\frac{0{,}0168}{60}$ a wzrostowi kąta o 15' wzrost sinusa

$$\text{o } \triangle \sin a = 0{,}0168 \; \frac{15}{60} = 0{,}0042.$$

Szukany sinus kąta $15^0 15'$ uzyskamy zatem przez dodanie do wartości sin $15^0$ otrzymanej poprawki $\triangle$ sin na 15':

$$\sin 15^0 15' = 0{,}2588 + 0{,}0042 = 0{,}2630.$$

Ogólnie: celem obliczenia poprawki należy różnicę dwóch sąsiednich wartości w tablicy tzw. *różnicę tablicową* pomnożyć przez liczbę wskazującą, jaką częścią jednego stopnia jest dodatkowy kąt, dla którego obliczamy poprawkę. Różnice tablicowe są zazwyczaj podane przy rubrykach odpowiednich funkcyj trygonometrycznych w rubryce d 1', co oznacza różnicę na 1' (d = differentia = różnica).

Podobnie postępuje się przy wyznaczaniu kąta $a$, gdy dana wartość funkcji nie znajduje się w tablicach. Np.:

$$\sin a = 0{,}2345; \text{ znaleźć kąt } a.$$

Wyszukujemy z tablicy dwie sąsiednie wartości na sin $a$, z których jedna jest mniejsza, a druga większa od danej wartości:

$$\sin 13^0 = 0{,}2250 < 0{,}2345$$
$$\sin 14^0 = 0{,}2419 > 0{,}2345,$$

szukany kąt $a$ zawarty jest zatem między $13^0$ a $14^0$:

$$13^0 < a < 14^0$$

Poprawkę, o którą musimy zwiększyć kąt $13^0$, aby otrzymać $a$, wyszukujemy przy pomocy interpolacji: różnicy sinusów 0,2250 i 0,2419 tj. różnicy 0,0169 odpowiada wzrost kąta o $1^0 = 60'$; różnicy sinusów 0,0001 odpowiada zatem wzrost kąta o

$$\triangle_1 \, a = \left(\frac{60}{169}\right)' \quad ;$$

różnica między danym sinusem a sinusem $13^0$ wynosi 0,0095; różnicy tej odpowiada przyrost kąta:

$$\triangle\, \alpha = 60'\left(\frac{95}{169}\right) = 34'.$$

Szukany kąt wynosi zatem:

$$\alpha = 13^0\ 34'$$

Stosując interpolację do funkcyj trygonometrycznych należy mieć na uwadze, iż zgodnie z wywodami paragrafu poprzedniego *przy funkcjach sin a i tg a poprawkę należy dodać, przy funkcjach cos a i ctg a natomiast odjąć.*

W wielu wypadkach dogodne jest użycie logarytmów funkcyj trygonometrycznych. Do tego celu używa się specjalnych tablic zawierających logarytmy dziesiętne funkcyj trygonometrycznych; — tablice te są sporządzone w ten sam sposób jak tablice wartości funkcyj, a i sposób ich użycia jest taki sam.

*Przykłady:*

1) Obliczyć *lg ctg* 20⁰ 26'.

Rachunek przeprowadzamy w sposób następujący:

$$\text{z tablicy: } \lg \operatorname{ctg} 20^0\ 20' = 0{,}4311;$$

poprawkę obliczamy dla 6', przy czym poprawkę tę odejmujemy (§ 7). Poprawka tablicowa dla 1' wynosi 3,8, zatem dla 6'

$$\triangle \lg \operatorname{ctg} = 3{,}8 \cdot 6 \sim 23;$$

otrzymamy zatem

$$\lg \operatorname{ctg} 20^0\ 26' = 0{,}4311 - 0{,}0023,$$

skąd

$$\lg \operatorname{ctg} 20^0 26' = 0{,}4288.$$

2) Wyznaczyć kąt ostry $\alpha$, jeżeli $\lg \cos \alpha = \bar{1}{,}9457$; z tablicy otrzymujemy:

$$\lg \cos 28^0 10' = \bar{1}{,}9453$$
$$\lg \cos 28^0 = \bar{1}{,}9459$$

dla 10' różnica logarytmów wynosi 0,0006; różnica między danym logarytmem a lg cos 28⁰10' wynosi 0,0004, zatem:

różnicy 0,0006 odpowiada różnica kąta 10'

„ 0,0001 „ „ „ $\frac{10'}{6}$

„ 0,0004 „ „ „ $10' \cdot \frac{4}{6} = \frac{40'}{6} \sim 7'$

wynika stąd zatem, że

$$\alpha = 28^0\ 10' - 7' = 28^0\ 3'$$
$$\alpha = 28^0\ 3'.$$

*Zadania:*

1) Przy pomocy tablic funkcyj trygonometrycznych o odstępach 10' (czterocyfrowe tablice Łomnickiego) wyznaczyć:

a) tg $36^0\ 24'$ b) cos $40^0\ 5'$

c) ctg $15^0\ 53'$ d) sin $72^0\ 16'$

e) ctg $60^0\ 37'$ f) cos $80^0\ 6'$

g) tg $86^0 52'$.

2) Wyznaczyć z dokładnością do 1' kąt $\alpha$, mając dane:

a) $\sin \alpha = 0{,}8543$ b) $\cos \alpha = 0{,}2468$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}9250$ d) $\operatorname{ctg} \alpha = 1{,}6043$.

3) Obliczyć: a) lg sin $73^0\ 6'$; b) lg cos $24^0 33'$; c) lg tg $50^0\ 41'$; d) lg ctg $68^0\ 37'$.

4) Znaleźć kąt $\alpha$, jeżeli: a) $\lg \sin \alpha = \bar{1},8651$, b) $\lg \cos \alpha = \bar{1},4926$, c) $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}2519$, d) $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 0{,}6510$.

## § 9. *Związki między bokami i kątami trójkąta prostokątnego*

Z definicji sinusa kąta $\alpha$ i $\beta$:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad ; \qquad \sin \beta = \frac{b}{c} \quad ;$$

oraz cos kąta $\alpha$ i $\beta$:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad ; \qquad \cos \beta = \frac{a}{c} \quad ;$$

wynika, po uwolnieniu się od wspólnego mianownika c, że:

$$\left.\begin{array}{ll} a = c \cdot \sin \alpha \ ; & b = c \cdot \sin \beta \ ; \\ \text{i} & \\ b = c \cdot \cos \alpha \ ; & a = c \cdot \cos \beta \ ; \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Zależności te możemy ująć w następujące *twierdzenie* I: ***przyprostokątna w trójkącie prostokątnym równa się iloczynowi przeciwprostokątnej i sinusa kąta przeciwległego lub cosinusa kąta przyległego.***

Analogicznie wynika z definicji funkcji tg i ctg:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad ; \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \ ;$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \quad ; \qquad \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} \ ,$$

że:

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cdot \operatorname{tg} \alpha ; & b &= a \cdot \operatorname{tg} \beta ; \\ &\text{i} & & \\ b &= a \cdot \operatorname{ctg} \alpha ; & a &= b \cdot \operatorname{ctg} \beta ; \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

co wyrazimy *w twierdzeniu II*:

*przyprostokątna w trójkącie prostokątnym równa się iloczynowi drugiej przyprostokątnej i tangensa kąta przeciwległego lub cotangensa kąta przyległego do pierwszej przyprostokątnej.*

Przy pomocy zależności (11) i (12) możemy przystąpić do zagadnienia rozwiązywania trójkąta prostokątnego.

## § 10. *Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych*

W zależności od znanych elementów trójkąta rozróżniamy 4 następujące wypadki rozwiązywania trójkąta prostokątnego:

1) gdy dane są obie przyprostokątne *a i b;*
2) gdy dane są jedna przyprostokątna i przeciwprostokątna: *a, c* lub *b, c;*
3) gdy dane są jedna przyprostokątna i jeden kąt ostry: a, $\alpha$; b, $\alpha$; a, $\beta$; b, $\beta$;
4) gdy dane są przeciwprostokątna i jeden kąt ostry: c, $\alpha$ lub c, $\beta$.

Wypadki te kolejno omówimy:

*1) Dane są obie przyprostokątne*: a = 329
b = 436

I) Zgodnie z zależnością (5):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{329}{436}$$

stąd

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg 329 - \lg 436 = \left| \begin{array}{r} 2{,}5172 \\ -\ 2{,}6395 \\ \hline \bar{1}{,}8777 \end{array} \right.$$

lub

$$\alpha = 37^\circ\, 2',$$

i zgodnie z (1): $\beta = 90^\circ - \alpha = 52^\circ 58'$

$\beta = 52^\circ\ 58'$.

II) Zgodnie z (11): $a = c \cdot \sin \alpha$

skąd

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{329}{\sin 37^\circ 2'}$$

zatem

$$\lg c = \lg 329 - \lg \sin 37^\circ 2' = \left\{ \begin{array}{r} 2{,}5172 \\ -\ \bar{1}{,}7798 \\ \hline 2{,}7374 \end{array} \right.$$

skąd

$$c = 546.$$

2) *Dane są przeciwprostokątna i przyprostokątna*: c = 64,2 , b = 47,9.

I) Zgodnie z zależnością (4):

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{47{,}9}{64{,}2}$$

stąd

$$\lg \cos \alpha = \lg 47{,}9 - \lg 64{,}2 = \left\{ \begin{array}{r} 1{,}6803 \\ -\ 1{,}8075 \\ \hline \bar{1}{,}8728 \end{array} \right.$$

zatem

$$\alpha = 41^\circ\ 45' \quad \text{i} \quad \beta = 48^\circ\ 15'$$

II) Zgodnie z (11):

$$a = c \cdot \sin \alpha = 64{,}2 \cdot \sin 41^\circ 45',$$

stąd

$$\lg a = \lg 64{,}2 + \lg \sin 41^\circ\ 45' = \left\{ \begin{array}{r} 1{,}8075 \\ +\ \bar{1}{,}8234 \\ \hline 1{,}6309 \end{array} \right.$$

zatem

$$a = 42{,}7\ .$$

3) *Dane są przyprostokątna i jeden kąt ostry:*

$$b = 8{,}43 \qquad \alpha = 32^\circ\ 47' ;$$

I) $\beta = (90^\circ - \alpha)$; $\quad \beta = 57^\circ\ 13'$ ;

II) z twierdzenia I:

$$b = c \cdot \cos \alpha,$$

skąd

$$c = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{8{,}43}{\cos 32^\circ\ 47'}$$

$$\lg c = \lg 8{,}43 - \lg \cos 32^\circ\ 47' = \left\{ \begin{array}{r} 0{,}9258 \\ -\ \bar{1}{,}9246 \\ \hline 1{,}0012 \end{array} \right.$$

zatem

$$c = 10{,}03;$$

III) z twierdzenia II:

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = 8{,}43 \cdot \operatorname{tg} 32^0\ 47'$$

stąd $\lg a = \lg 8{,}43 + \lg \operatorname{tg} 32^0 47' = \begin{cases} \phantom{+}\ 0{,}9258 \\ +\ \bar{1}{,}8089 \\ \hline \phantom{+}\ 0{,}7347 \end{cases}$

zatem $a = 5{,}43.$

4) *Dane są przeciwprostokątna i jeden kąt ostry:*

$$c = 0{,}93; \quad \alpha = 50^0\ 4'.$$

I) $\beta = (90^0 - \alpha) = 90^0 - 50^0\ 4'$

$\beta = 39^0\ 56'$;

II) z twierdzenia I:

$$a = c \cdot \sin \alpha = 0{,}93 \cdot \sin 50^0 4'.$$

stąd $\lg a = \lg 0{,}93 + \lg \sin 50^0 4' = \begin{cases} \phantom{+}\ \bar{1}{,}9685 \\ +\ \bar{1}{,}8847 \\ \hline \phantom{+}\ \bar{1}{,}8532 \end{cases}$

zatem $a = 0{,}71;$

III) z twierdzenia I: $b = c \cdot \cos \alpha,$

stąd $\lg b = \lg 0{,}93 + \lg \cos 50^0\ 4' = \begin{cases} \phantom{+}\ \bar{1}{,}9685 \\ +\ \bar{1}{,}8075 \\ \hline \phantom{+}\ \bar{1}{,}7760 \end{cases}$

zatem $b = 0{,}60.$

*Zadania:*

*A) teoretyczne:*

1) Rozwiązać trójkąt prostokątny, mając dane:

a) $c = 3{,}794$ $\quad \alpha = 53^0\ 23'$;

b) $a = 40{,}3$ $\quad \beta = 44^0\ 29'$;

c) $b = 2{,}07$ $\quad \beta = 63^0\ 12'$;

d) $a = 18{,}16$ $\quad b = 23{,}04$;

e) $a = 0{,}761$ $\quad c = 1{,}059$.

2) Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna $c = 80{,}5$ cm, a kąt $\beta = 39^0 56'$.

3) Jakie kąty tworzy z bokami prostokąta przekątna, jeżeli boki wynoszą: $a = 50{,}5$ cm, $b = 37{,}9$ cm?

4) Ramię trójkąta równoramiennego wynosi 16,8 cm, kąt przy wierzchołku $\alpha = 115^0\ 32'$; rozwiązać ten trójkąt.

5) Obliczyć pole odcinka kołowego o promieniu $r = 12$ i kącie środkowym $\alpha = 42^0\ 15'$.

6) W kole o promieniu 16 cm pewna cięciwa ma długość 13 cm. Jak wielki łuk odcina ta cięciwa?

7) Siłę 800 kg rozłożono na dwie składowe w kierunkach tworzących ze sobą kąt prosty, a z daną siłą kąty $\alpha = 21^0\ 7'$ i $\beta = (90^0 - \alpha)$. Obliczyć wielkość składowych siły.

8) Siłę 600 kg należy rozłożyć na dwie składowe, tworzące ze sobą kąt prosty, z których jedna byłaby dwa razy większa od drugiej. Znaleźć wielkość obu składowych i ich kąty nachylenia względem danej siły.

*B) praktyczne*:

1) Szczyt góry widać z odległości 1200 m od podstawy góry pod kątem wzniesienia $35^0 17'$. Obliczyć wysokość góry.

2) Jeden obserwator widzi samolot wprost nad sobą, drugi zaś, oddalony od pierwszego w tym samym poziomie o 1,7 km, widzi ten samolot pod kątem wzniesienia $28^0$. Na jakiej wysokości znajduje się ten samolot?

3) Słupek o wysokości 1,5 m rzuca cień o długości 84 cm. Pod jakim kątem względem poziomu padają promienie słoneczne?

4) Droga wznosi się pod kątem $24^0 5'$. Ile km mierzonych w poziomie odpowiada 8,5 km drogi?

5) Odległość księżyca od ziemi wynosi około 380.000 km, a kąt widzenia tarczy księżyca wynosi 31'; obliczyć promień księżyca.

6) Ze stanowiska baterii przybrzeżnej znajdującej się na skale wzniesionej o 800 m nad poziom morza widać okręt pod kątem depresji $4^0\ 13'$. Obliczyć odległość okrętu od brzegu (kąt depresji = kąt poziomu z prostą łączącą okręt z okiem obserwatora).

7) Lotnik znajdujący się na wprost nad nieprzyjacielskim celem melduje obserwatorowi na baterii wysokość samolotu $h = 2300$ m. Lotnik widziany jest z baterii pod kątem $\gamma = 19^0\ 16'$. Obliczyć odległość baterii od celu.

8) Z dwóch okien latarni morskiej, leżących pod sobą w odstępie 8 m, widać okręt pod kątami depresji $\alpha = 15^0$ i $\beta = 15^0\ 34'$. Jak daleko jest okręt od podnóża latarni i na jakiej wysokości nad poziom morza znajdują się okna latarni?

# ROZDZIAŁ II

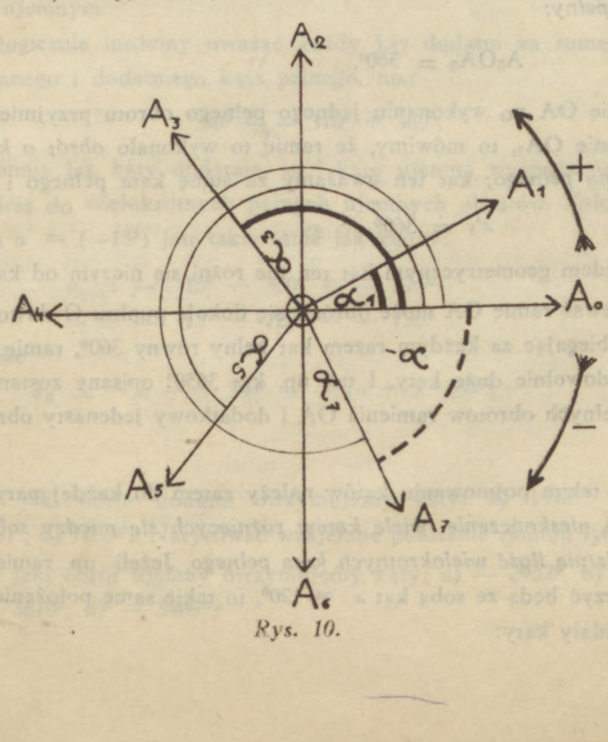
## Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

### § 11. *Uogólnienie pojęcia kąta*

Ponieważ w trójkątach mogą występować kąty rozwarte, większe od kąta prostego, a w niektórych zagadnieniach geometrycznych należy uwzględniać nawet kąty większe od kąta półpełnego, musimy pojęcie funkcyj trygonometrycznych, określonych w poprzednim rozdziale tylko dla kątów ostrych, rozszerzyć i uogólnić na dowolne kąty. W tym celu musimy przede wszystkim uogólnić pojęcie samego kąta.

W dotychczasowych naszych rozważaniach, mówiąc o kącie, mieliśmy zawsze na myśli część płaszczyzny ograniczoną dwiema półprostymi wychodzącymi z jednego punktu. Obecnie nie będziemy mówili o tym, co to jest kąt, a tylko, w jaki sposób kąt powstaje. Będziemy bowiem uważali, *że kąt powstaje przez obrót, jaki wykonuje jedno jego ramię.*

Niechaj $OA_0$ będzie początkowym położeniem ruchomego ramienia $OA$ ( rys. 10 ). Przyjmując *jako dodatni kierunek obrotu na płaszczyźnie*




*Rys. 10.*

— *obrót przeciwny do ruchu wskazówek zegarka*, a jako ujemny kierunek — obrót zgodny z ruchem wskazówki zegarka, mówimy, *że promień OA opisał kąt* $a_1 = \sphericalangle A_0OA_1$, *jeżeli ramię OA obróciło się dokoła punktu O w dodatnim kierunku z położenia początkowego* $OA_0$ *i przyjęło po raz pierwszy położenie* $OA_1$.

Jeżeli ramię OA wykonuje ćwierć pełnego obrotu i zajmuje położenie $OA_2$, to mówimy, iż ramię to opisało *kąt prosty* $\sphericalangle A_0OA_2 = 90^0$. Jeżeli ramię OA przekracza położenie $OA_2$, nie osiągając jednak położenia $OA_4$, to otrzymujemy kąt rozwarty: $a_3 = \sphericalangle A_0OA_3 > 90^0$.
Osiągając położenie $OA_4$ ramię OA wykonuje połowę pełnego obrotu; opisany kąt nazywamy *kątem półpełnym:* $\sphericalangle A_0OA_4 = 180^0$.

Wszystkie dotychczas otrzymane kąty nazywamy *kątami wypukłymi*, obecnie po przekroczeniu $OA_4$ ramię ruchome OA opisywać będzie *kąty* wklęsłe: $a_5 = \sphericalangle A_0OA_5 > 180^0$ i $a_7 = \sphericalangle A_0OA_7 > 270^0$. Osiągając położenie $OA_6$, ramię OA wykonuje trzy czwarte pełnego obrotu; otrzymany kąt równy jest trzem kątom prostym:

$$\sphericalangle A_0OA_6 = 270^0.$$

Po wykonaniu pełnego obrotu wracamy do pierwotnego położenia $OA_0$. Temu pełnemu obrotowi przyporządkowujemy także pewien kąt, a mianowicie *kąt pełny:*

$$A_0OA_0 = 360^0.$$

Jeżeli ramię OA po wykonaniu jednego pełnego obrotu przyjmie *ponownie* położenie $OA_1$, to mówimy, że ramię to wykonało *obrót o kąt większy od kąta pełnego;* kąt ten uważamy za sumę kąta pełnego i kąta $a_1$:

$$a'_1 = 360^0 + a_1.$$

Pod względem geometrycznym kąt ten nie różni się niczym od kąta $a_1$.

Ponieważ ramię OA może obrócić się dokoła punktu O dowolną ilość razy, przebiegając za każdym razem kąt pełny równy $360^0$, ramię to może opisywać dowolnie duże kąty. I tak np. kąt $3650^0$ opisany zostanie przez dziesięć pełnych obrotów ramienia OA i dodatkowy jedenasty obrót o kąt $a = 50^0$.

Przy takim pojmowaniu kątów należy zatem do każdej pary ramion $OA_0$ i OA *nieskończenie wiele kątów różniących się między sobą o dowolną dodatnią ilość wielokrotnych kąta pełnego.* Jeżeli np. ramiona $OA_0$ i OA tworzyć będą ze sobą kąt $a = 120^0$, to takie same położenie ramion będą posiadały kąty:

$$\alpha_1 = 360^0 + 120^0 = 480^0$$
$$\alpha_2 = 720^0 + 120^0 = 840^0$$
$$\alpha_3 = 1080^0 + 120^0 = 1200^0 \quad \text{itd.},$$

ogólnie

$$\alpha_n = (n \cdot 360^0 + \alpha),$$

gdzie: n = 1,2,3, ... itd.

Ponieważ ramię OA po wykonaniu jednego pełnego obrotu powraca do swego wyjściowego położenia $OA_0$, opisując pełny kąt = 360°, możemy i temu wyjściowemu położeniu $OA_0$ przyporządkować zgodnie z powyższymi rozważaniami pewien kąt, a mianowicie kąt 0°: czy to bowiem ramię $OA_0$ wykona pewną ilość pełnych obrotów, czy też nie wykona żadnego obrotu, końcowe położenie będzie takie same.

Jeżeli ramię OA obracać będziemy w kierunku ujemnym, otrzymamy *kąty ujemne*, np.

$$\sphericalangle A_0OA_7 = -\alpha .$$

Każdy kąt ujemny możemy uważać za sumę pełnego ujemnego kąta i pewnego kąta dodatniego. Jeżeli np. ramię OA opisało kąt ujemny (— $\alpha$), przechodząc w położenie $OA_7$, to taki sam kąt otrzymamy, obracając ramię OA w kierunku dodatnim o kąt $\alpha_7$, a następnie wykonując pełny obrót w kierunku ujemnym.

Analogicznie możemy uważać każdy kąt dodatni za sumę jakiegoś kąta ujemnego i dodatniego kąta pełnego, np.:

$$50^0 = -310^0 + 360^0.$$

Podobnie jak kąty dodatnie, są i kąty ujemne wyznaczone tylko z dokładnością do wielokrotnych pełnych ujemnych obrotów. Położenie ramion kąta $\alpha = (-15^0)$ jest takie same jak kątów:

$$\alpha_1 = -15^0 - 360^0 = -375^0$$
$$\alpha_2 = -15^0 - 720^0 = -735^0$$

itd., ogólnie

$$\alpha_n = -\alpha - n \cdot 360^0 = -(\alpha + n \cdot 360^0).$$

*Zadania:*

1) Przez jaki obrót dodatni otrzymujemy kąty: a) 1492°, b) 1260°, c) 3431°, d) 7505°? Narysować wzajemne położenie ramion tych kątów.

2) Przez jaki obrót ujemny otrzymujemy kąty: a) — 2952°, b) — 3393°, c) — 3870°, d) — 5400°?

3) Przy pomocy jakiego kąta dodatniego i pełnych obrotów ujemnych można wyznaczyć następujące kąty ujemne: a) $-1000^0$, b) $-1500^0$, c) $-2400^0$?

## § 12. *Jednostki miar kąta*

I(a) Najprostszą jednostką podstawową do mierzenia kątów jest znany nam z planimetrii *kąt prosty*, który zazwyczaj oznaczamy literą „d" (z francuskiego „droit" = prosty). Jest on połową kąta półpełnego, a czwartą częścią kąta pełnego. Kąt prosty od najdawniejszych czasów *) dzielono na 90 równych części, zwanych *stopniami*, które oznaczano symbolem $1^0$:

$$d = 90^0 \quad \text{lub} \quad 1^0 = \frac{d}{90^0}$$

Przy użyciu stopnia jako jednostki otrzymujemy dla kąta półpełnego

$$2d = 180^0,$$

a dla kąta pełnego

$$4d = 360^0.$$

Jeden stopień jest zatem jedną trzystasześćdziesiątą częścią kąta pełnego. Jednostkami mniejszymi od $1^0$ są: *minuta* (1') i *sekunda* (1"), przy czym:

$$1^0 = 60' \qquad \text{lub} \quad 1' = \frac{1^0}{60}$$

$$1' = 60'' \qquad \text{lub} \quad 1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^0}{3600}$$

Liczbę wymiarową dowolnego kąta wyrażaną w stopniach nazywamy *miarą stopniową kąta.*

I (b) Z chwilą wprowadzenia dziesiętnego systemu miar i wag (podczas rewolucji francuskiej) wprowadzono również nową jednostkę miary kąta, opartą na tym systemie, a mianowicie tzw. *gradusy. Jeden gradus* ($1^g$) jest setną częścią kąta prostego:

$$d = 100^g \qquad \text{lub} \quad 1^g = 0{,}01 \ d.$$

Gradus dzieli się na 100 *minut centezymalnych* ($1^{\grave{}}$) **), które z kolei dzielą się na 100 *sekund centezymalnych* ($1^{\grave{}\grave{}}$):

$$1^g = 100^{\grave{}} = 10.000^{\grave{}\grave{}}.$$

---

*) Podział ten pochodzi zapewne od starożytnych Babilończyków, którzy rok dzielili na 360 dni.

**) Kreski u góry pisze się pochylone w prawo dla odróżnienia od zwykłych minut i sekund.

Ponieważ

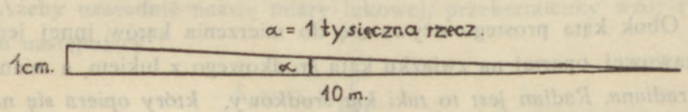
$$90^{\circ} = 100^{g},$$

zatem dla przeliczenia kąta z jednego układu na drugi otrzymujemy zależności:

$$1^{\circ} = \frac{10^{g}}{9} \quad \text{lub} \quad 1^{g} = 0{,}9^{\circ}.$$

W ostatnich czasach podział kąta prostego na gradusy rozpowszechnia się coraz bardziej.

I (c) W artylerii używa się jako jednostki miary kąta tzw. *tysięcznych* $(1^{t})$. Jedna tysięczna, albo dokładniej: *jedna tysięczna rzeczywista* jest to kąt, pod jakim widzimy odcinek o długości 1 m z odległości 1 km lub odcinek 1 cm z odległości 10 m (rys. 11).




Rys. 11.

Można łatwo obliczyć, że kąt pełny zawiera 6283 tysięcznych rzeczywistych, tj. że jedna tysięczna rzeczywista wynosi $\frac{1}{6283}$ część kąta pełnego. W praktyce artyleryjskiej zaokrągla się ten ułamek do 1 sześciotysięcznej lub do jednej sześćtysięcyczterysetnej i rozróżnia pomiędzy *tysięczną Rimaillot* (czytaj Rimajo) a tysięczną zwykłą.

*Tysięczna Rimaillot* $(1^{tR})$ jest jedną sześciotysięczną częścią kąta pełnego:

$$1^{tR} = \frac{4d}{6000} = \frac{d}{1500}$$

lub jedną tysiącpięćsetną częścią kąta prostego; używana jest ona w armii sowieckiej.

Tysięczna zwykła jest jedną sześćtysięcyczterysetną częścią kąta pełnego:

$$1^{t} = \frac{4d}{6400} = \frac{d}{1600}$$

lub 1 tysiącszeźćsetną częścią kąta prostego; używana była w armii polskiej i francuskiej.

Zależności pomiędzy poszczególnymi jednostkami miar kąta podaje tablica III:

| | $1^0$ | $1^g$ | $1^t$ | $1^{tR}$ |
|---|---|---|---|---|
| $1^0$ | 1 | $\frac{10}{9}$ | 17,8 | 16,7 |
| $1^g$ | 0,9 | 1 | 16 | 15 |
| $1^t$ | 3,4' | $\frac{1}{16}$ | 1 | $\frac{15}{16}$ |
| $1^{tR}$ | 3,6' | $\frac{1}{15}$ | $\frac{16}{15}$ | 1 |

Tabl. III

II). Obok kąta prostego używa się do mierzenia kątów innej jednostki podstawowej, opartej na związku kąta środkowego z łukiem, a mianowicie tzw. *radiana. Radian jest to taki kąt środkowy, który opiera się na łuku równym promieniowi koła.* Wielkość radiana w stopniach możemy wyznaczyć opierając się na zależności między kątem środkowym a długością odpowiadającego mu łuku.

Oznaczmy przez $r$ promień dowolnego koła, przez $s$ — długość łuku odpowiadającego kątowi środkowemu $\alpha^0$ mierzonemu miarą stopniową. Ponieważ długość łuku tak się ma do całego obwodu koła jak kąt środkowy do kąta pełnego, otrzymamy proporcję:

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{\alpha^0}{360^0}$$

skąd:

$$s = \left(\frac{\alpha^0}{180^0}\right) \cdot \pi r \qquad \text{lub } \alpha^0 = \frac{180^0 \cdot s}{\pi r}.$$

Jeżeli łuk ma być równy promieniowi: $s = r$, to otrzymamy dla kąta $\alpha^0$:

$$\alpha^0 = \frac{180^0 \cdot r}{\pi r} = \frac{180^0}{\pi} \ ^{*)} \qquad (11)$$

Po wykonaniu dzielenia otrzymamy:

$$\alpha^0 = 57^0\ 17'\ 44{,}8''...$$

Tyle stopni zawiera jeden radian.

*Liczbę wymiarową dowolnego kąta wyrażoną przy pomocy radianów nazywamy miarą łukową kąta.*

---

*)Ze wzoru (11) wynika, że wielkość radiana nie zależy od promienia koła.

Ponieważ ze wzoru (11) wynika, iż jeden radian $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$, zatem kąt półpełny $180^0$ zawiera $\pi$ radianów, kąt pełny zaś $2\pi$ radianów. Aby wyznaczyć miarę łukową $\beta$ danego kąta $\beta^0$ wyrażonego w miarze stopniowej, wyznaczamy stosunek jego miary stopniowej do miary stopniowej jednego radiana, ponieważ stosunek ten równy jest stosunkowi miary łukowej danego kąta do miary łukowej radiana, przyjętego za jednostkę:

$$\beta^0 : \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 = \beta : 1$$

skąd

$$\beta = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi \text{ radianów *)} . \tag{12}$$

*Łukowa miara kąta $\beta^0$ równa jest iloczynowi liczby $\pi$ i ułamka wskazującego, jaką częścią kąta półpełnego jest dany kąt $\beta^0$.*

Ażeby uzasadnić nazwę miary łukowej, przekształcimy wzór (12) w sposób następujący:

$$\beta = \pi \cdot \frac{\beta^0}{180^0}$$

długość łuku $s$ leżącego naprzeciwko kąta $\beta^0$ wynosi:

$$s = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi \cdot r; \qquad \text{zatem } \frac{\beta^0}{180^0} = \frac{s}{\pi \cdot r}$$

Podstawiając za $\frac{\beta^0}{180^0}$ uzyskaną wartość do wzoru (12), otrzymujemy:

$$\beta = \frac{s}{r} \quad \text{radianów} \tag{12a}$$

*W dowolnym kole łukowa miara kąta równa się stosunkowi długości łuku należącego do tego kąta, jako kąta środkowego, do promienia koła.*

Jeżeli promień okręgu równy jest jednostce długości: $r = 1$, to wówczas otrzymamy ze wzoru (12a):

$$\beta = \frac{s}{r} = \frac{s}{1}$$

$$\beta = s \text{ radianów} \tag{12b}$$

tj. *łukowa miara kąta równa jest długości łuku, należącego do tego kąta jako kąta środkowego, w kole o promieniu równym jednostce długości.*

*Przykłady:*

1) *Znaleźć miarę łukową kąta $\alpha^0 = 15^0$.*

*) Dla odróżnienia będziemy w paragrafie tym oznaczali miarę stopniową kąta przez $\beta^0$, a miarę łukową przez $\beta$ (bez kóleczka u góry).

Ze wzoru (12) wynika: $\alpha = \pi \cdot \frac{15^0}{180^0} = \frac{\pi}{12}$ radiana.

2) *Znaleźć miarę stopniową kąta $\alpha = 2½$ radiana.*

1 radian = $57^0\ 17'\ 45''$,

zatem

$$\begin{aligned} \alpha^0 = 2{,}5\ .\ (57^0\ 17'\ 45'') &= 142^0\ 30' \\ &+ \quad 42'\ 30'' \\ &+ \quad\ \ 1'\ 53'' \\ \hline &\ 143^0\ 14'\ 23'' \end{aligned}$$

$$\alpha^0 = 143^0\ 14'\ 23''.$$

3) Znaleźć długość łuku s i pole wycinka $P_s$, odpowiadającego kątowi środkowemu $\alpha$, mierzonemu miarą łukową.

a) $s : 2\pi r = \alpha : 2\pi$ (kąt pełny zawiera $2\pi$ radianów),

zatem

$$s = \alpha \cdot r.$$

b) analogicznie: $P_s : \pi \,.\, r^2 = \alpha : 2\pi$,

skąd

$$P_s = \frac{r^2}{2} \cdot \alpha\,.$$

*Zadania:*

1) Wyrazić w gradusach kąt: a) $\alpha_1 = 2{,}9^0$, b) $\alpha_2 = 175^t$, c) $\alpha_3 = 212^{tR}$.

2) Wyrazić w tysięcznych zwykłych kąt: a) $\alpha_1 = 45^0$, b) $\alpha_2 = 90^g$, c) $\alpha_3 = 120^{tR}$.

3) Wyrazić w tysięcznych Rimaillot kąt: a) $\alpha_1 = 184^0$, b) $\alpha_2 = 246^g$, c) $\alpha_3 = 1600^t$.

4) Wyrazić w mierze łukowej kąty: a) $65^0\ 30'$, b) $125^0$, c) $225^0$, d) $315^0$.

5) Wyrazić w mierze stopniowej kąty: a) $\frac{\pi}{3}$, b) $\frac{2}{3}\pi$, c) $\frac{1}{9}\pi$, d) $\frac{\pi}{10}$.
e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{1}{3}$, g) 3 radiany.

6) Obliczyć długość łuku i pole wycinka koła o promieniu 20 cm, należące do kąta środkowego $\alpha = 3$ radiany.

7) Jak wielki jest łuk południka ziemskiego, należący do kąta $2^0$ (promień ziemi R = 6370 km) ?

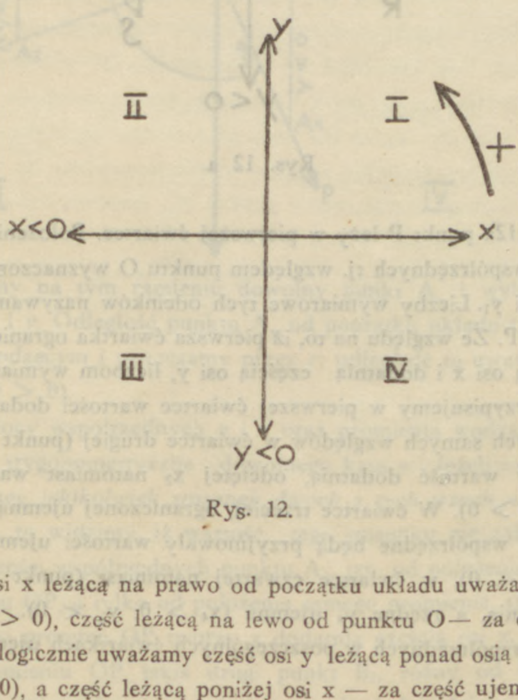
8) Znaleźć zależność pomiędzy liczbą gradusów g, liczbą stopni *s* i liczbą radianów *r* tego samego kąta.
(wynik: $20\ r = \pi \cdot [g - s]$).

§ 13. *Uogólnienia pojęcia funkcyj trygonometrycznych*

Po uogólnieniu pojęcia kąta przechodzimy obecnie do uogólnienia pojęcia funkcyj trygonometrycznych na dowolne kąty. W tym celu posługujemy się prostokątnym układem współrzędnych.

Jak wiadomo z algebry, prostokątny układ współrzędnych składa się z 2 osi przecinających się pod kątem prostym. Oś poziomą nazywamy *osią odciętych* lub osią x, oś pionową — *osią rzędnych* lub osią y. Punkt przecięcia się obu osi nazywamy *początkiem układu* i oznaczamy przez O.

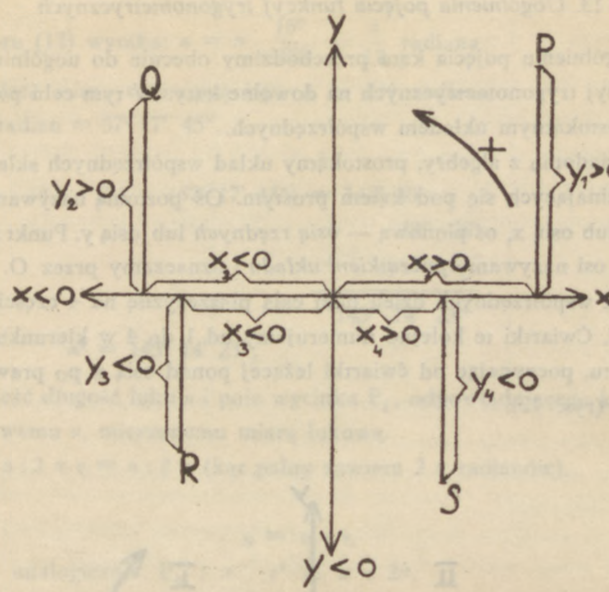
Układ współrzędnych dzieli nam całą płaszczyznę na 4 części, zwane *ćwiartkami.* Ćwiartki te kolejno numerujemy od 1 do 4 w kierunku dodatniego obrotu, poczynając od ćwiartki leżącej ponad osią x po prawej stronie osi y (rys. 12).




Rys. 12.

Część osi x leżącą na prawo od początku układu uważamy za dodatnią część ($x > 0$), część leżącą na lewo od punktu O— za część ujemną ($x < 0$). Analogicznie uważamy część osi y leżącą ponad osią x za część dodatnią ($y > 0$), a część leżącą poniżej osi x — za część ujemną ($y < 0$).

Przy pomocy układu współrzędnych możemy określić położenie każdego punktu P na płaszczyźnie, podając jego odległości od obu osi układu. Odległość punktu P od osi x nazywamy *rzędną punktu P* i *oznaczamy przez y;* odległość od osi y mierzoną wzdłuż osi x nazywamy *odciętą punktu P* i *oznaczamy przez x.*




Rys. 12 a.

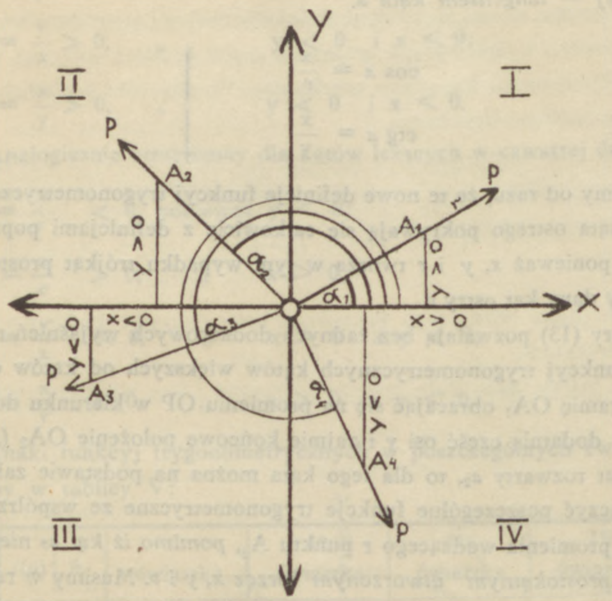
Na rys. 12a punkt P leży w pierwszej ćwiartce. Położenie jego względem układu współrzędnych tj. względem punktu O wyznaczone jest przez 2 odcinki: $x_1$ i $y_1$. Liczby wymiarowe tych odcinków nazywamy *współrzędnymi* punktu P. Ze względu na to, iż pierwsza ćwiartka ograniczona jest dodatnią częścią osi x i dodatnią częścią osi y, liczbom wymiarowym odcinków x i y przypisujemy w pierwszej ćwiartce wartości dodatnie ($x_1 > 0$; $y_1 > 0$). Z tych samych względów w ćwiartce drugiej (punkt Q rzędnej $y_2$ przypisujemy wartość dodatnią, odciętej $x_2$ natomiast wartość ujemną ($x_2 < 0$; $y_2 > 0$). W ćwiartce trzeciej, ograniczonej ujemną częścią osi x i osi y, obie współrzędne będą przyjmowały wartości ujemne (punkt R: $x_3 < 0$, $y_3 < 0$), w ćwiartce czwartej natomiast (punkt S) odcięta $x_4$ będzie dodatnia, a rzędna $y_4$ ujemna ($x_4 > 0$, $y_4 < 0$).

Znaki współrzędnych w poszczególnych ćwiartkach ujęte są w tablicy IV:

| ćwiartka: | I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|---|
| x | + | — | — | + |
| y | + | + | — | — |

Tabl. IV

Obierzmy w układzie współrzędnych prostokątnych dowolny promień OP, wychodzący z początku układu i tworzący kąt $a_1$ z dodatnią częścią osi x (rys. 13).




Rys. 13.

Przyjmijmy na tym ramieniu dowolny punkt $A_1$ i wykreślmy jego współrzędne *x* i *y*. Odległość punktu $A_1$ od początku układu O nazywamy *promieniem wodzącym* i oznaczamy przez *r*; odległość tę uważamy zawsze za dodatnią ($r > 0$).

Przy pomocy współrzędnych *y* i *x* oraz promienia wodzącego *r* określamy funkcje trygonometryczne dowolnego kąta $a$. Jeżeli weźmiemy bowiem pod uwagę *jakikolwiek stosunek dwóch z tych trzech* wielkości, np. stosunek (y:x), to widzimy, iż wartość tego stosunku nie zależy od bezwzględnej wartości współrzędnych punktu $A_1$, tzn. od położenia tego punktu na promieniu OP, a tylko od położenia samego promienia, tj. od wielkości kąta $a_1$, jaki promień OP tworzy z dodatnią częścią osi x. Jeżeli obierzemy na promieniu OP jakiś drugi punkt $B_1$, różny od O i $A_1$, to i dla tego nowego punktu stosunek jego rzędnej do odciętej będzie taki sam (wynika to z podobieństwa odpowiednich trójkątów prostokątnych). Jeżeli natomiast zmienimy położenie promienia OP, to stosunek (y:x) przybierze zupełnie inną wartość. *Stosunek ten może być zatem uważany za funkcję kąta a.* To samo dotyczy oczywiście i innych stosunków wielkości *x*, *y* i *r*.

*Stosunek rzędnej do promienia wodzącego nazywamy sinusem kąta $a$; stosunek odciętej do promienia wodzącego — cosinusem kąta $a$; stosunek odciętej do rzędnej — cotangensem kąta $a$; stosunek rzędnej do odciętej — tangensem kąta $a$.*

$$\left.\begin{array}{ll} \sin a = \frac{y}{r} & \cos a = \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} a = \frac{y}{x} & \operatorname{ctg} a = \frac{x}{y} \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Widzimy od razu, że te nowe definicje funkcyj trygonometrycznych w wypadku kąta ostrego pokrywają się całkowicie z definicjami poprzednio podanymi, ponieważ $x$, $y$ i $r$ tworzą w tym wypadku trójkąt prostokątny, zawierający dany kąt ostry $a$.

Wzory (13) pozwalają bez żadnych dodatkowych wyjaśnień na wyznaczenie funkcyj trygonometrycznych kątów większych od kątów ostrych. Jeżeli np. ramię $OA_1$ obracając się na promieniu OP w kierunku dodatnim przekroczy dodatnią część osi y i zajmie końcowe położenie $OA_2$ (rys. 13) opisując kąt rozwarty $a_2$, to dla tego kąta można na podstawie zależności (13) wyznaczyć poszczególne funkcje trygonometryczne ze współrzędnych x i y oraz promienia wodzącego r punktu $A_2$, *pomimo iż kąt $a_2$ nie leży w trójkącie prostokątnym utworzonym przez $x$, $y$ i $r$.* Musimy w rachunku uwzględnić tylko, iż dla kąta rozwartego, tj. dla kąta w drugiej ćwiartce, x jest ujemne, a y dodatnie. Spowoduje to, iż tylko funkcja sinus będzie dodatnia:

$$\sin a = \frac{y}{r} > 0,$$

podczas gdy pozostałe funkcje przybiorą wartości ujemne:

$$\cos a = \frac{x}{r} < 0, \qquad \text{ponieważ } x < 0,$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{y}{x} < 0 \qquad \text{„ } x < 0, y > 0,$$

$$\operatorname{ctg} a = \frac{x}{y} < 0, \qquad \text{„ } x < 0, y > 0.$$

Jeżeli ramię $OA_1$ opisze kąt $a_3$, przyjmując położenie końcowe $OA_3$, to i dla tego kąta leżącego w trzeciej ćwiartce wyznaczamy ze współrzędnych i promienia wodzącego punktu $A_3$ wartości funkcyj trygonometrycznych; uwzględniając tablicę IV, otrzymamy w trzeciej ćwiartce:

$\sin\alpha = \frac{y}{r} < 0$, ponieważ $x < 0$;

$\cos\alpha = \frac{x}{r} < 0$, „ $x < 0$;

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} > 0$, „ $y < 0$ i $x < 0$;

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y} > 0$, „ $y < 0$ i $x < 0$.

Analogicznie otrzymamy dla kątów leżących w czwartej ćwiartce ($a_4$):

$\sin\alpha = \frac{y}{r} < 0$, ponieważ $y < 0$;

$\cos\alpha = \frac{x}{r} > 0$, „ $x > 0$;

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} < 0$, „ $x > 0$ a $y < 0$;

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y} < 0$, „ $x > 0$ a $y < 0$.

Znaki funkcyj trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach ujmujemy w tablicy V:

| f(α) \ α | I ćwiartka | II ćwiartka | III ćwiartka | IV ćwiartka |
|---|---|---|---|---|
| sin α | + | + | — | — |
| cos α | + | — | — | + |
| tg α | + | — | + | — |
| ctg α | + | — | + | — |

Tabl. V

*Zadania:*

1) Wyznaczyć funkcje trygonometryczne kąta $\alpha$, utworzonego przez promień wodzący $OA = r$, z dodatnią częścią osi x, jeżeli dane są współrzędne punktu A:

a) $x = 3$, $y = 4$, b) $x = -5$, $y = 12$, c) $x = -2$, $y = -4$, d) $x = 1$, $y = -2$.

Podać, w jakich ćwiartkach leżą poszczególne punkty.

§ 14. *Zmienność funkcyj trygonometrycznych sin a i cos a*

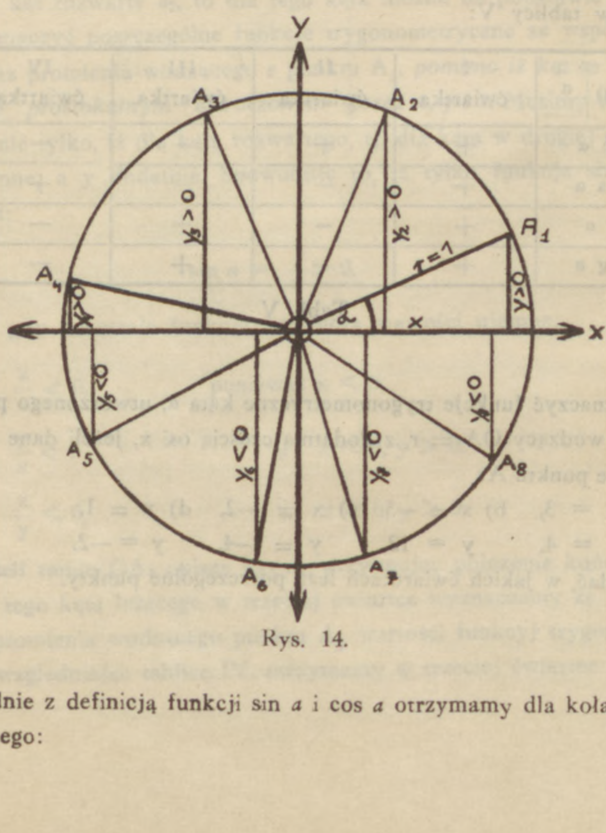
W § 7 badaliśmy już, w jaki sposób zmieniają się funkcje trygonometryczne kąta ostrego, gdy kąt ten wzrasta lub maleje w pierwszej ćwiartce. Obecnie opierając się na nowych definicjach funkcyj trygonometrycznych będziemy badali, w jaki sposób zmieniają się te funkcje, gdy kąt wzrasta od $0^0$ do $360^0$, a nawet kąt pełny przekracza. W tym celu posługujemy się tzw. *kołem trygonometrycznym.*

Podczas obrotu promienia wodzącego r = OA punkt A opisuje krąg koła, którego środkiem jest początek układu O. Jeżeli przyjmiemy promień OA równy jednostce długości

$$r = 1,$$

to powstałe przez obrót tego promienia koło nazywać będziemy kołem trygonometrycznym.

Niech będzie dane koło trygonometryczne i kąt wewnątrz tego koła (rys. 14):




Rys. 14.

Zgodnie z definicją funkcji sin *a* i cos *a* otrzymamy dla koła trygonometrycznego:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y\ ;$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x\ ;$$

zatem: *w kole trygonometrycznym liczba wymiarowa rzędnej dowolnego punktu na okręgu przedstawia wartość sinusa, liczba wymiarowa odciętej — wartość cosinusa kąta a, zawartego pomiędzy promieniem wodzącym punktu — a dodatnią częścią osi x.*

I) Jeżeli kąt $\alpha = 0$, to oba ramiona kąta pokrywają się ze sobą i leżą na dodatniej części osi x; rzędna każdego punktu tej półosi równa jest zeru: $y = 0$; odcięta natomiast równa jest promieniowi wodzącemu: $x = r = 1$, otrzymamy zatem

$$\left.\begin{aligned} \sin 0^0 &= 0 \\ \cos 0^0 &= +1 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

II) Jeżeli kąt $\alpha = 90^0$, to ramię ruchome OA pokrywa się z dodatnią częścią osi y; dla każdego punktu tej półosi odcięta równa jest zeru: $x = 0$, a rzędna równa jest promieniowi wodzącemu: $y = r = 1$; dla kąta $90^0$ otrzymamy zatem:

$$\left.\begin{aligned} \sin 90^0 &= +1; \\ \cos 90^0 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14a)$$

III) Dla kąta półpełnego $\alpha = 180^0$ ruchome ramię pokrywa się z ujemną częścią osi x; dla każdego punktu tej półosi rzędna przybiera wartość zero: $y = 0$, a odcięta ma wartość ujemną, równą co do wielkości promieniowi wodzącemu $x = -r = -1$; dla kąta tego otrzymamy zatem:

$$\left.\begin{aligned} \sin 180^0 &= 0; \\ \cos 180^0 &= -1. \end{aligned}\right\} \qquad (14b)$$

IV) Analogicznie otrzymujemy dla kąta $\alpha = 270^0$:

$$\left.\begin{aligned} \sin 270^0 &= -1; \\ \cos 270^0 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14c)$$

V) Dla kąta pełnego $\alpha = 360^0$ otrzymujemy te same wartości funkcyj $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ co dla kąta $0^0$, ponieważ w obu wypadkach oba ramiona kąta pokrywają się z dodatnią częścią osi x:

$$\left.\begin{aligned} \sin 360^0 &= 0; \\ \cos 360^0 &= +1. \end{aligned}\right\} \qquad (14d)$$

VI) Jeżeli kąt wzrasta od $0^0$ w pierwszej ćwiartce (rys. 14), to sinus jego jako rzędna punktu A wzrasta również ($y_2 > y_1$), przebiegając wszystkie wartości od 0 do + 1, którą to wartość sinus osiąga dla kąta $a = 90^0$; gdy kąt $a$ wzrasta nadal w drugiej ćwiartce, sinus maleje ($y_4 < y_3$), a przy $a = 180^0$ ponownie przybiera wartość 0. W ćwiartce trzeciej sinus maleje w dalszym ciągu, przybierając coraz większe wartości ujemne ($y_6 > y_5$) i osiąga najmniejszą wartość (—1) dla kąta $a = 270^0$. W ćwiartce czwartej sinus pozostaje nadal ujemny, wzrasta jednak, ponieważ przyjmuje coraz mniejsze wartości ujemne ($y_8 < y_7$), osiągając wartość zerową dla $a = 360^0$.

Funkcja cosinus maleje ze wzrostem kąta $a$ w pierwszej ćwiartce od (+ 1) do 0 ($a = 90^0$), maleje w dalszym ciągu w ćwiartce drugiej, przybierając wartości ujemne i osiąga swoją najmniejszą wartość (—1) dla kąta $a = 180^0$. W ćwiartce trzeciej cosinus zaczyna wzrastać, przybierając coraz mniejsze wartości ujemne, osiąga 0 dla $a = 270^0$ i wzrasta nadal w ćwiartce czwartej, dochodząc ponownie do wartości (+1) dla kąta $a = 360^0$. Przebieg zmienności funkcyj sin $a$ i cos $a$ przedstawia tablica VI.

| $f(\alpha)$ \ $\alpha$ | $0^0$ | I ćw. | $90^0$ | II ćw. | $180^0$ | III ćw. | $270^0$ | IV ćw. | $360^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin $\alpha$ | 0 | + ↗ | 1 | + ↘ | 0 | - ↘ | -1 | - ↗ | 0 |
| cos $\alpha$ | 1 | + ↘ | 0 | - ↘ | -1 | - ↗ | 0 | + ↗ | 1 |

Tabl. VI*)

Z tablicy tej widać wyraźnie, iż cały zasób wartości liczbowych funkcyj sin $a$ i cos $a$ mieści się w granicach od (—1) do (+1):

$$(-1) \leq \begin{matrix}\sin a \\ \cos a\end{matrix} \leq (+1)$$

Rozpatrzmy teraz kąty większe od kąta pełnego, uzyskane przez jeden lub więcej pełnych obrotów promienia wodzącego OA. Ponieważ położenie ramion każdego kąta $a < 360^0$ i kąta ($a + n \cdot 360^0$), gdzie n = 1, 2, 3,... itd. jest identyczne, dla kątów większych od $360^0$ powtórzy się ponownie cały zasób wartości liczbowych funkcyj sin $a$ i cos $a$, uzyskanych uprzednio dla kąta $a$ w granicach od $0^0$ do $360^0$. Otrzymamy zatem po jednym pełnym obrocie ramienia OA wzory:

---

*) ↗ = wzrasta, ↘ = maleje.

$$\sin(\alpha + 360^0) = \sin\alpha$$

i

$$\cos(\alpha + 360^0) = \cos\alpha,$$

lub ogólniej, po wykonaniu przez ramię OA pełnych n obrotów :

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha + n\cdot 360^0) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha + n\cdot 360^0) = \cos\alpha\end{array}\right\} \qquad (15)$$

Tę właściwość funkcyj trygonometrycznych przyjmowania ponownie całego zasobu wartości liczbowych, przyjętych już uprzednio dla mniejszych wartości kąta, nazywamy *okresowością.*

Najmniejszą wartość kąta, o którą musimy powiększyć dowolny kąt $\alpha$, aby po raz pierwszy otrzymać te same wartości funkcyj trygonometrycznych, nazywamy *okresem funkcji.*

Widzimy zatem, że funkcje $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ są *funkcjami okresowymi,* a ich okresem jest kąt pełny $360^0$ lub w miarze łukowej kąt $2\pi$.

Okresowość utrzymuje się także dla kątów ujemnych. Na tej podstawie możemy sprowadzić obliczenie wartości funkcyj trygonometrycznych kąta ujemnego do obliczenia wartości funkcyj odpowiedniego kąta dodatniego. I tak np. mając obliczyć cosinus kąta ujemnego $(-47^0)$ postępujemy w sposób następujący:

$$\cos(-47^0) = \cos(-47^0 + 360^0) = \cos 313^0.$$

Podobnie obliczamy:

$$\sin(-612^0) = \sin(-612^0 + 720^0) = \sin 108^0.$$

*Uwaga:*

W dotychczasowych badaniach algebraicznych funkcyj (całkowitej i ułamkowej, wymiernej i pierwiastkowej, wykładniczej i logarytmicznej) nie spotkaliśmy się jeszcze z taką właściwością, aby ze wzrostem zmiennej niezależnej powtarzał się cały zasób wartości funkcji w tym samym porządku. Ze względu na okresowość mają funkcje trygonometryczne szerokie zastosowanie przy badaniu zjawisk przyrody, odbywających się okresowo (np. drgania fal głosowych lub świetlnych, ruchy wahadłowe itp.).

*Zadania:*

1) Znaleźć wartość funkcyj $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ dla kąta:

a) $\alpha = 2190^0$, b) $\alpha = 1485^0$,

c) $\alpha = 2940^0$, d) $\alpha = 10800^0$,

e) $\alpha = 3780^0$, f) $\alpha = 810^0$,

g) $\alpha = 2790^0$.

2) Znaleźć przy pomocy tablic funkcyj trygonometrycznych wartości funkcyj sin $\alpha$ i cos $\alpha$ dla: a) $\alpha = 432^0$, b) $\alpha = 806^0$, c) $\alpha = 1505^0$, d) $\alpha = 2200^0$.

3) Znaleźć przy pomocy tablic funkcyj trygonometrycznych wartości funkcyj sin $\alpha$ i cos $\alpha$ dla kąta ujemnego:

a) $\alpha = -312^0$, b) $\alpha = -680^0$,
c) $\alpha = -1400^0$, d) $\alpha = -2100^0$,
e) $\alpha = -1800^0$, f) $\alpha = -3570^0$.

### § 15. *Zmienność funkcyj trygonometrycznych tg $\alpha$ i ctg $\alpha$*

Przebieg zmienności funkcyj tg $\alpha$ i ctg $\alpha$ można badać opierając się na tym, iż funkcje te są ilorazami funkcyj sin $\alpha$ i cos $\alpha$. Wyraźniej jednak wystąpi przebieg zmienności przy zastosowaniu koła trygonometrycznego.

I) Podobnie jak przy funkcji sin $\alpha$ i cos $\alpha$ będziemy się starali i przy funkcji tg $\alpha$ przedstawić jej wartość liczbową jako liczbę wymiarową jednego odcinka. W tym celu w punkcie C przecięcia okręgu koła trygonometrycznego z dodatnią częścią osi x (rys. 15) wykreślamy styczną do koła i przedłużamy promień wodzący OA aż do przecięcia się ze styczną w punkcie D. Oznaczamy przez s liczbę wymiarową odcinka CD stycznej i uważamy tę liczbę za dodatnią ($s > 0$), jeżeli punkt D leży po tej samej stronie osi odciętych, co dodatnia część osi rzędnych, a za ujemną ($s_1 < 0$), gdy punkt ten ($D_1$) leży po przeciwnej stronie.

Na podstawie twierdzenia Talesa otrzymujemy proporcję:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OC}$$

lub podstawiając wartości za odpowiednie odcinki:

$$\frac{y}{x} = \frac{s}{r} = \frac{s}{1} = s\ ;$$

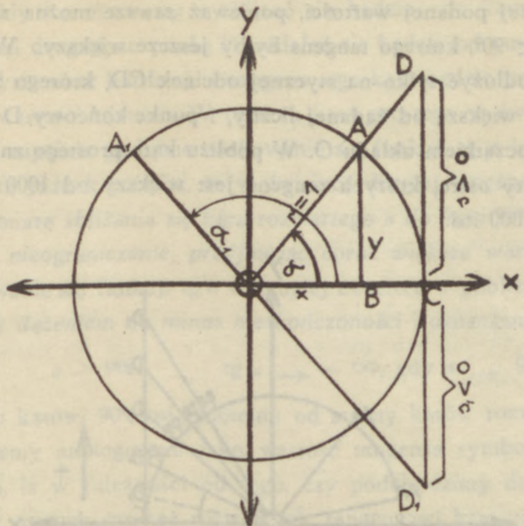
ponieważ jednak $\frac{y}{x} = \text{tg}\ \alpha$, zatem

$$\text{tg}\ \alpha = s.$$

*W kole trygonometrycznym tg*) kąta $\alpha$ równy jest liczbie wymiarowej odcinka stycznej do tego koła; odcinek ten zawarty jest pomiędzy punktem styczności a punktem przecięcia się stycznej z przedłużeniem promienia wodzącego.*

---

*) Stąd nazwa łacińska „tangens", co oznacza po polsku „styczna".




Rys. 15.

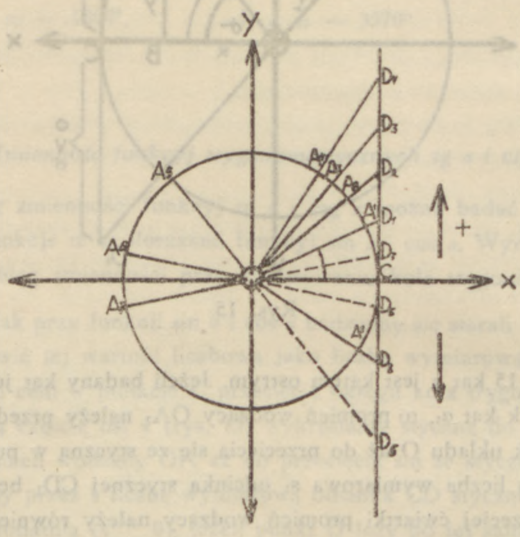
Na rys. 15 kąt $a$ jest kątem ostrym. Jeżeli badany kąt jest np. kątem rozwartym jak kąt $a_1$, to promień wodzący $OA_1$ należy przedłużyć wstecz poza początek układu O aż do przecięcia się ze styczną w punkcie $D_1$. W tym wypadku liczba wymiarowa $s_1$ odcinka stycznej $CD_1$ będzie ujemna. Dla kątów trzeciej ćwiartki promień wodzący należy również przedłużyć wstecz — punkt przecięcia $D_2$ otrzymamy wówczas powyżej osi x, liczba wymiarowa $s_2$ odcinka stycznej będzie zatem dodatnia. W ćwiartce czwartej punkt przecięcia $D_3$ będzie leżał poniżej osi x, a liczba wymiarowa $s_3$ odcinka stycznej będzie ujemna.

Przechodzimy obecnie do badania samego przebiegu zmienności funkcji tg $a$ (rys. 16).

Dla kąta $a = 0$ promień OA pokrywa się z dodatnią częścią osi x, zatem odcinek $s = CD = 0$; otrzymujemy stąd, że:

$$\text{tg}\ 0^0 = 0. \tag{16}$$

Gdy kąt $a$ wzrasta od $0^0$ pozostając kątem ostrym, to punkt D posuwa się po stycznej w dodatnim kierunku (w górę), odcinek $s = CD$ staje się coraz większym ($CD_1 < CD_2 < CD_3 < ...$), *tangens zatem wzrasta i jest dodatni.* W miarę, gdy kąt ostry $a$ coraz bardziej wzrasta i zbliża się do kąta prostego, punkt D oddala się coraz bardziej od punktu C i tangens staje się coraz większy. W pobliżu samego kąta prostego tangens może przyjmować dowolnie duże (dodatnie) wartości — może być większym od dowolnie dużej podanej wartości, ponieważ zawsze można zbudować taki kąt ostry $a < 90^0$, którego tangens byłby jeszcze większy. Wystarczyło by w tym celu odłożyć tylko na stycznej odcinek CD, którego liczba wymiarowa byłaby większą od żądanej liczby, i punkt końcowy D tego odcinka połączyć z początkiem układu O. W pobliżu kąta prostego znajdują się zatem takie kąty ostre, których tangens jest większy od 1000 lub 1,000.000 lub 1,000.000.000 itd.




Rys. 16.

Takie zachowanie się funkcji tg $a$ dla *ostrych* kątów $a$ w *pobliżu kąta* $90^0$ nazywamy *dążeniem do dodatniej nieskończoności; gdy kąt ostry a dąży zatem do 90⁰, tangens jego dąży do plus nieskończoności, co wyrażamy symbolem:*

$$a < 90^0: \qquad \text{tg } a \longrightarrow +\infty, \text{ gdy } a \longrightarrow 90^0.$$

Ponieważ dla samego kąta $90^0$ promień wodzący jest równoległy do stycznej, nie ma tg $90^0$ żadnej określonej wartości. Ze względu jednak na zachowanie się funkcji tg w pierwszej ćwiartce w pobliżu kąta prostego *przyporządkowujemy tangensowi kąta* $90^0$ *symbol* $+\infty$.

Gdy kąt $a$ wzrośnie nieco ponad $90^0$ ($\sphericalangle$ $COA_5$ na rys. 16), punkt przecięcia się przedłużenia jego promienia wodzącego i stycznej (punkt $D_5$) znajdzie się poniżej osi x, w odległości tym większej od punktu C, im mniej się będzie różnił kąt rozwarty $a_5$ od kąta prostego. Tangens tego kąta przyjmuje zatem wartość ujemną, bardzo wielką co do wartości bezwzględnej. Gdy kąt rozwarty $a$ zbliżać się będzie do kąta prostego od strony ćwiartki drugiej, to punkt D oddalać się będzie od punktu C w kierunku ujemnym coraz bardziej, a tangens tego kąta będzie przyjmował coraz większe wartości ujemne. W pobliżu kąta prostego w ćwiartce drugiej mamy zatem zupełnie podobne zachowanie się funkcji tg $a$ jak w ćwiartce pierwszej, z tą jednak różnicą, że w ćwiartce drugiej tangens będzie stale ujemny: W miarę *zbliżania się kąta rozwartego $a$ do kąta $90^0$ tangens jego będzie malał nieograniczenie, przyjmując coraz większe wartości ujemne.* Takie zachowanie się funkcji tg $a$ w drugiej ćwiartce w pobliżu kąta prostego nazywamy *dążeniem do minus nieskończoności* i oznaczamy symbolem:

$$a > 90^0: \qquad \text{tg}\, a \longrightarrow -\infty, \text{ gdy } a \longrightarrow 90^0.$$

Samemu kątowi $90^0$, osiągniętemu od strony kątów rozwartych przyporządkowujemy analogicznie jako wartość tangensa symbol $-\infty$. Widzimy zatem, iż w zależności od tego, czy podchodzimy do kąta $90^0$ od strony kątów ostrych czy też rozwartych, tangensowi kąta prostego możemy przyporządkować symbol $+\infty$ lub $-\infty$. Należy to rozumieć w ten sposób, iż *dla kąta prostego następuje przeskok od nieograniczenie dużych* wartości *dodatnich tangensa do nieograniczenie dużych wartości ujemnych.* Symbolicznie wyrażamy to w sposób następujący:

$$\text{tg}\, 90^0 = \pm \infty. \tag{17}$$

Gdy kąt rozwarty wzrasta w kierunku kąta półpełnego ($\sphericalangle COA_6 > \sphericalangle COA_5$), to punkt D posuwa się po stycznej od dołu ku C; odcinek CD jest coraz mniejszy, jego liczba wymiarowa przybiera coraz mniejsze wartości ujemne, tg $a$ zatem wzrasta. Dla $a = 180^0$ punkt D pokrywa się z punktem C, odcinek s = CD = 0, tangens przybiera zatem wartość zerową:

$$\text{tg}\, 180^0 = 0. \tag{17a}$$

W dyskusji naszej nad zmiennością funkcji tg $a$ dochodzimy zatem do następujących ogólnych wyników: *ze wzrostem kąta od $0^0$ do $90^0$ tangens* kąta *$a$ wzrasta od 0 do $+\infty$, przybierając wszystkie dodatnie wartości; dla kąta $90^0$ następuje przeskok od $+\infty$ do $-\infty$; ze wzrostem kąta od $90^0$ do $180^0$ tangens wzrasta od $-\infty$ do 0, przybierając wszystkie wartości ujemne.*

Jeżeli kąt $a$ wzrasta ponad $180^0$, przebiegając trzecią i czwartą ćwiartkę, to *funkcja tg $a$ zmienia się dokładnie tak samo jak w ćwiartce pierwszej i drugiej.* I tak, gdy $a$ przebiega trzecią ćwiartkę od $180^0$ do $270^0$, punkt D przebiega dodatnią część stycznej od punktu C w górę. Gdy $a$ przebiega ćwiartkę czwartą od $270^0$ do $360^0$, punkt D przebiega ujemną część stycznej od punktu C w dół. Dla kąta 270° następuje podobnie jak dla $a = 90°$ przeskok od nieskończenie wielkich dodatnich wartości tangensa do nieskończenie wielkich wartości ujemnych:

$$\operatorname{tg} 270° = \pm\infty. \tag{17b}$$

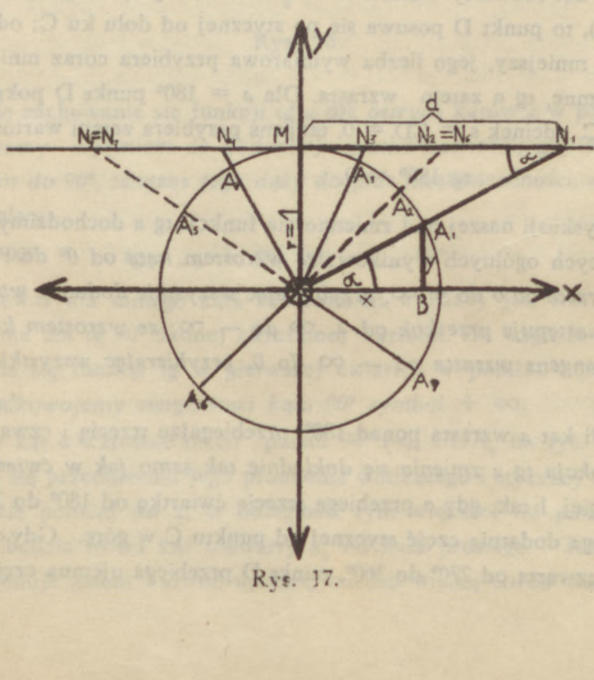
Wynika to stąd, że *promień wodzący kąta a nakrywa się z przedłużeniem promienia wodzącego kąta* ($\alpha + 180°$), co powoduje, iż punkt przecięcia się D jest w obu wypadkach ten sam.

Dla kątów większych od 360° powtarza się znowu ten sam przebieg co dla kątów w przedziale od 0° do 180°. Jeżeli zatem kąt $a$ wzrośnie o 180° lub ogólniej o $n \cdot 180°$, gdzie $n = 1, 2, 3, ....$ itd., to wartość jego tangensa się nie zmieni:

$$\operatorname{tg} (n \cdot 180° + \alpha) = \operatorname{tg} a. \tag{18}$$

*Funkcja tg a jest zatem funkcją okresową o okresie równym 180°*, ponieważ już w przedziale 180° wyczerpuje wszystkie swoje wartości liczbowe.

II) Przebieg zmienności funkcji ctg $\alpha$ badamy również przy pomocy koła trygonometrycznego (rys. 17). W tym celu wykreślamy w punkcie M przecięcia się okręgu koła trygonometrycznego z dodatnią częścią osi y styczną do koła i przedłużamy promień wodzący OA kąta $a$ aż do przecięcia się ze styczną w punkcie N. Liczbę wymiarową odcinka MN oznacza-




Rys. 17.

my przez d i uważamy ją za dodatnią, jeżeli punkt N leży po tej samej stronie osi rzędnych co dodatnia część osi odciętych; w wypadku gdy punkt N leży po stronie przeciwnej (np. $N_4$ lub $N_5$), liczbę wymiarową odcinka MN uważamy za ujemną.

Bierzemy pod uwagę trójkąty prostokątne $A_1B_1O$ i $OMN_1$. Ponieważ styczna $MN_1$ jest równoległa do osi x, trójkąty te są podobne ($\sphericalangle MN_1O = \sphericalangle A_1OB_1$), ich boki zatem odpowiednio proporcjonalne:

$$\frac{OB_1}{A_1B_1} = \frac{MN_1}{OM}$$

podstawiając za odpowiednie odcinki ich wartości, otrzymamy:

$$\frac{x}{y} = \frac{d}{r} = \frac{d}{1} = d,$$

ale

$$\frac{x}{y} = \operatorname{ctg} a, \text{ zatem:}$$

$$\operatorname{ctg} a = d.$$

*W kole trygonometrycznym cotangens kąta zawartego między promieniem wodzącym a dodatnią częścią osi x jest równy liczbie wymiarowej odcinka stycznej, której punktem styczności jest punkt przecięcia się okręgu koła z dodatnią częścią osi y.*

Na (rys. 17) kąt $a = \sphericalangle A_1OB_1$ jest kątem ostrym i jego cotangens dodatni. Jeżeli weźmiemy np. kąt rozwarty ($\sphericalangle B_1OA_4$ lub $\sphericalangle B_1OA_5$), to dla takiego kąta odcinek stycznej leży po tej stronie osi y, co ujemna część osi x, ctg $a$ jest zatem ujemny. Dla kąta trzeciej ćwiartki ($\sphericalangle B_1OA_6$) przedłużamy promień wodzący poza początek układu — otrzymujemy wtedy dodatni odcinek stycznej ($MN_6 > 0$) i cotangens tego kąta jest dodatni. Dla kąta czwartej ćwiartki ($\sphericalangle B_1OA_7$) odcinek stycznej jest ujemny ($MN_7 < 0$), cotangens tego kąta jest zatem również ujemny.

Badając przebieg zmienności funkcji ctg $a$ w analogiczny sposób jak w wypadku tg $a$ dochodzimy do następujących rezultatów:

1) W miarę jak kąt ostry $a$ malejąc zbliża się od strony pierwszej ćwiartki do kąta $0^0$, cotangens rośnie nieograniczenie i jest stale dodatni:

$$a > 0: \quad \operatorname{ctg} a \longrightarrow +\infty, \quad \text{gdy } a \longrightarrow 0.$$

2) W miarę zbliżania się kąta $a$ do kąta $0^0$ od strony kątów ujemnych (czwartej ćwiartki) cotangens przyjmuje coraz większe wartości ujemne:

$$a < 0: \quad \operatorname{ctg} a \longrightarrow -\infty, \quad \text{gdy } a \longrightarrow 0.$$

3) Gdy kąt $a$ wzrasta od $0^0$ do $90^0$, cotangens maleje od $+\infty$ do 0, przebiegając wszystkie wartości dodatnie.

4) Gdy kąt $a$ wzrasta od $90^0$ do $180^0$, cotangens maleje w dalszym ciągu, przybierając coraz większe wartości ujemne.

5) Gdy kąt $a$ zbliża się do kąta $180^0$ od strony drugiej ćwiartki, cotangens maleje nieograniczenie, przebiegając wszystkie wartości ujemne:

$$a < 180^0: \qquad \text{ctg}\, a \longrightarrow -\infty, \text{ gdy } a \longrightarrow 180^0.$$

6) Gdy kąt $a$ zbliża się do kąta $180^0$ od strony ćwiartki trzeciej, cotangens rośnie nieograniczenie, przyjmując wartości dodatnie:

$$a > 180^0: \qquad \text{ctg}\, a \longrightarrow +\infty, \text{ gdy } a \longrightarrow 180^0.$$

7) Tak jak tg $a$ jest i ctg $a$ funkcją okresową, a okresem jej jest $180^0$:

$$\text{ctg}\,(a + n \cdot 180^0) = \text{ctg}\, a.$$

Wyniki badania nad przebiegiem zmienności funkcji tg $a$ i ctg $a$ zebrane są w tablicy VII.

| $f(\alpha)$ \ $\alpha$ | $0^0$ | I ćw. | $90^0$ | II ćw. | $180^0$ | III ćw. | $270^0$ | IV ćw. | $360^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tg$\alpha$ | 0 | + ↗ | $+\infty \downarrow -\infty$ | − ↗ | 0 | + ↗ | $+\infty \downarrow -\infty$ | − ↗ | 0 |
| ctg$\alpha$ | $+\infty \uparrow -\infty$ | + ↘ | 0 | − ↘ | $+\infty \uparrow -\infty$ | + ↘ | 0 | − ↘ | $+\infty \uparrow -\infty$ |

Tabl. VII

*Zadania:*

1) W których ćwiartkach funkcja tg $a$ maleje?

2) W których ćwiartkach funkcja ctg $a$ rośnie?

3) Znaleźć wartości funkcyj tg $a$ i ctg $a$ dla kąta:

a) $a = 570^0$, b) $a = 1500^0$, c) $a = 2025^0$,
d) $a = 2520^0$, e) $a = 2430^0$.

4) Znaleźć przy pomocy tablic wartości funkcyj tg $a$ i ctg $a$:

a) $a = 975^0$, b) $a = 1643^0$, c) $a = 2718^0$,
d) $a = 2160^0$, e) $a = -94^0$, f) $a = -285^0$,
g) $a = -1580^0$, h) $a = -2506^0$.

## § 16. *Wykresy funkcyj sin x i cos x*

Celem uzyskania wyraźniejszego i pełniejszego obrazu zmienności funkcyj trygonometrycznych posługujemy się graficznym przedstawieniem tych funkcyj. Jak wiadomo z algebry, każdą funkcję $y = f(x)$ — można przedstawić graficznie przy pomocy układu współrzędnych. W tym celu należy po obraniu stosownej jednostki długości na obu osiach wyznaczyć odpowiednią ilość punktów o współrzędnych $x$ i $y = f(x)$ i tak otrzymane punkty połączyć linią ciągłą.

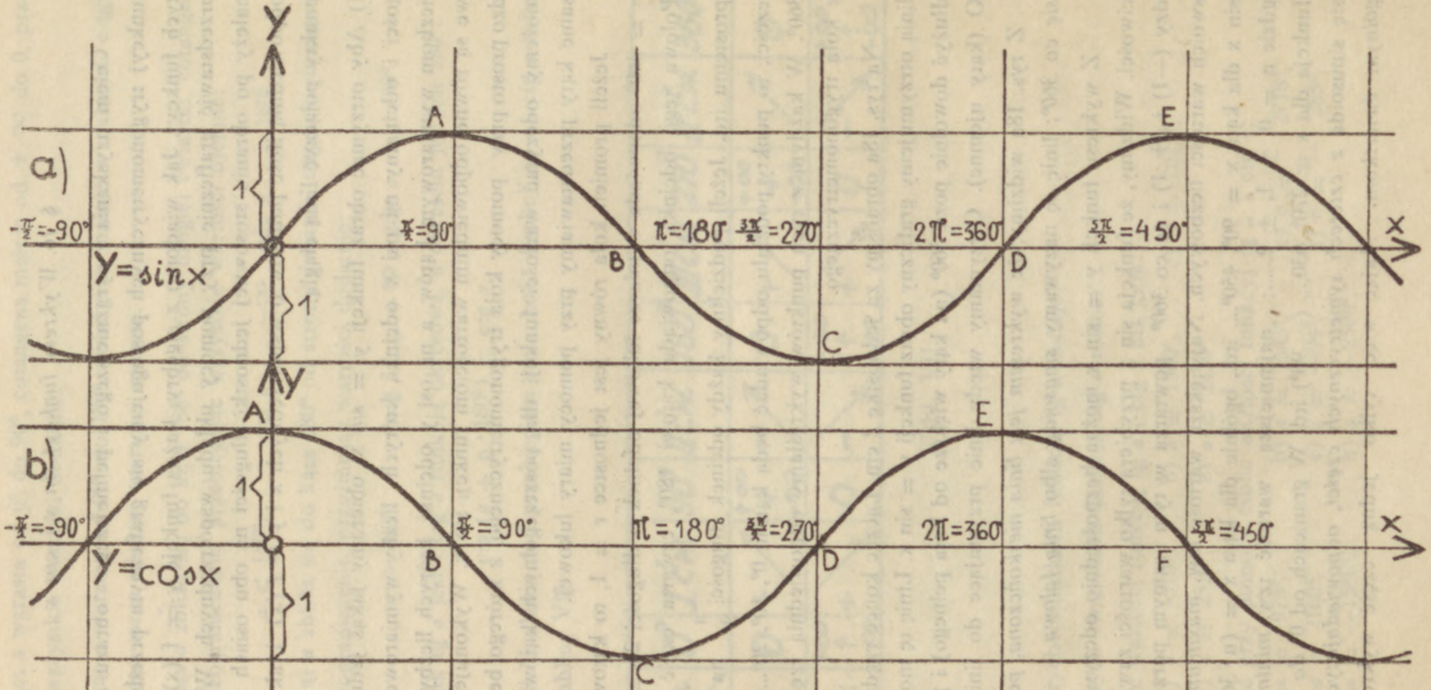
1) Aby otrzymać obraz funkcji $y = \sin x$, obieramy jakąś jednostkę długości i odcinamy na osi x odcinki, których liczby wymiarowe równe są liczbom wymiarowym kątów, a na osi y odcinki, których liczby wymiarowe są równe odpowiednim wartościom funkcji sin x. Wykonujemy to bardzo prosto przy pomocy koła trygonometrycznego, z którego bezpośrednio możemy odczytać wartości funkcji dla poszczególnych kątów (rys. 14); same kąty przedstawiamy przy pomocy miary łukowej.

Jeżeli promień koła równy jest jednostce $r = 1$, to kątowi pełnemu $\alpha = 360^0$ odpowiada w mierze łukowej odcinek o długości $2\pi = 6{,}28318....$ Połowa tego odcinka odpowiada kątowi $180^0$, czwarta część — kątowi prostemu itd. Jeżeli podzielimy każdy odcinek długości $\frac{\pi}{2}$ na 9 równych części, to punkty podziału odpowiadać będą kątom $0^0$, $10^0$, $20^0$.... itd. aż do $360^0$. W każdym z tych punktów wykreślamy odpowiednią rzędną wziętą z koła trygonometrycznego.

Na rys. 18a obraliśmy za jednostkę 2 cm. Łącząc końce rzędnych ciągłą linią otrzymujemy graficzny obraz funkcji $y = \sin x$. Linię tę możemy przedłużyć dowolnie poza $360^0$ (na kąty większe od kąta pełnego) i poza punkt O (kąty ujemne). Otrzymamy wtedy linie przystające do linii OABCD.

Z rys. 18a widzimy, że *wykresem jest linia nieskończona, powtarzająca się co $360^0$;* linię tę nazywamy *sinusoidą* albo *linią falową.*

Z wykresu funkcji $y = \sin x$ można bezpośrednio odczytać jej właściwości. Widzimy, że funkcja sin x przybiera tylko wartości zawarte pomiędzy $(-1)$ i $(+1)$ i że co $360^0$ powtarza w tym samym porządku zasób swoich wartości liczbowych. Największą wartość tzw. *maximum* przybiera sin x dla kąta $x = 90^0$, $450^0$,... itd., ogólnie dla kąta $x = (n \cdot 360^0 + 90^0)$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, .....$; najmniejszą wartość tzw. *minimum* osiąga funkcja dla $x = 270^0$, 630,... $(-90^0)$ itd. W granicach od $0^0$ *do* $360^0$ składa się sinusoida *z czterech symetrycznych części, odpowiadających poszczególnym ćwiartkom.* Mając więc tylko jedną część wykresu funkcji


a)
y
x
$-\frac{\pi}{2}=-90°$
$\frac{\pi}{2}=90°$
$\pi=180°$
$\frac{3\pi}{2}=270°$
$2\pi=360°$
$\frac{5\pi}{2}=450°$
A
B
C
D
E
1
1
y=sinx
b)
y
x
$-\frac{\pi}{2}=-90°$
$\frac{\pi}{2}=90°$
$\pi=180°$
$\frac{3\pi}{2}=270°$
$2\pi=360°$
$\frac{5\pi}{2}=450°$
A
B
C
D
E
F
1
1
y=cosx

Rys. 18.

$y = \sin x$, np. część odpowiadającą pierwszej ćwiartce, możemy pozostałe części uzyskać przez symetryczne odbicie. Wynika z tego, że znajomość *wartości funkcji w ćwiartce pierwszej dla kątów od $0^0$ do $90^0$ wystarcza całkowicie dla wyznaczenia wartości funkcji dla kątów w pozostałych trzech ćwiartkach.*

Z wykresu funkcji $\sin x$ wynika dalej, że do *każdej wartości kąta x należy tylko jedna wartość funkcji sinus, natomiast do każdej wartości funkcji należy nieskończenie wiele różnych kątów.* Tak np. dla kąta $x = 30^0$ otrzymamy tylko jedną wartość funkcji, a mianowicie $+\frac{1}{2}$, do sinusa $+\frac{1}{2}$ należą jednak — prócz kąta $a_0 = 30^0$ następujące kąty dodatnie: $150^0$, $390^0$, $510^0$,......,

i ujemne: $-210^0$, $-330^0$,.....,

ogólnie kąty:

$$\left.\begin{array}{l} 30^0 + n \cdot 360^0 \\ \text{i } 150^0 + n \cdot 360^0 \end{array}\right\} \text{gdzie } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ponieważ $n \cdot 360^0 = (2n \cdot 180^0)$ i $150^0 = (180^0 - 30^0)$, możemy wszystkie kąty, których sinus równy jest połowie, wyrazić następującymi wzorami:

$$a = 30^0 + 2n \cdot 180^0 = 2n \cdot 180^0 + 30^0$$

i

$$a = 180^0 - 30^0 + 2n \cdot 180^0 = $$
$$= (2n + 1) \cdot 180^0 - 30^0.$$

Liczba $2n$ jest zawsze parzysta, liczba $2n + 1$ zawsze nieparzysta, widzimy zatem, iż w wypadku parzystej ilości półobrotów należy kąt $30^0$ dodać, w wypadku nieparzystej ilości natomiast — odjąć. Z tego względu możemy wszystkie kąty posiadające ten sam sinus równy $\frac{1}{2}$ wyrazić ogólnie jednym wzorem:

$$a = 180^0 + (-1)^n \cdot 30^0;$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

[$(-1)^n$ oznacza, że dla parzystego n kąt $30^0$ dodajemy, a dla nieparzystego — odejmujemy].

Ogólnie: *oznaczając przez $a_0$ najmniejszą wartość kąta a w granicach od ($-90^0$) do ($+90^0$) posiadającego sinus równy danej wartości a, otrzymamy dla wszystkich kątów, posiadających ten sam sinus następujący wzór:*

$$\sin a = a; \; a = [n \cdot 180^0 + (-1)^n \cdot a_0]; \tag{20}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots$$

*Kąt $a_0$ nazywamy głównym pierwiastkiem równania $\sin x = a$.*

II) Przy pomocy tego samego koła trygonometrycznego otrzymamy w analogiczny sposób wykres funkcji $y = \cos x$ (rys. 18b). Porównując ten wykres z wykresem funkcji sinus x stwierdzamy, iż obrazem funkcji $y = \cos x$ (tzw. *cosinusoida*) jest *ta sama nieskończona, powtarzająca się okresowo linia, co w przypadku funkcji $y = \sin x$, przesunięta tylko w lewo o odcinek odpowiadający kątowi $90^0$*. Tam zatem, gdzie $\sin x = 0$, cos x przybiera wartość (+ 1) lub (—1) i na odwrót, gdzie $\sin x = \pm 1$, cos x równa się 0. Podobnie jak funkcja sinus, przybiera i funkcja cosinus każdą wartość w granicach od (—1) do (+1) nieskończenie wiele razy. Jeżeli np. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, to $\alpha = 60^0, 300^0, 420^0, \ldots - 60^0, - 300^0, - 420^0, \ldots$ itd.

ogólnie: $\alpha = [n \cdot 360^0 \pm 60^0]$.

Jeżeli zatem kąt $\alpha_0$ oznacza kąt zawarty między $0^0$ i $180^0$ o danym cosinusie $\cos \alpha = b$, to zgodnie z powyższym wszystkie kąty posiadające ten sam cosinus wyrażać się będą wzorem:

$$\cos \alpha = b: \quad \alpha = [n \cdot 360^0 \pm \alpha_0]. \tag{21}$$

*Kąt $\alpha_0$ nazywamy głównym pierwiastkiem równania $\cos x = b$.*

*Zadania:*

1) Wykreślić na papierze milimetrowym obrazy funkcyj:
   a) $y = \sin (x + 45^0)$; b) $y = \cos (x + 60^0)$;
   c) $y = \sin (x - 120^0)$; d) $y = \cos (x + 225^0)$; porównać te wykresy z sinusoidą.
2) Wykreślić na papierze milimetrowym wykresy funkcyj:
   a) $y = \sin 2x$; b) $y = 2 \cdot \cos 3x$;
   c) $y = 2 \sin \frac{x}{2}$; d) $y = \cos \frac{x}{3}$;
   e) $y = \sin (2x - 45^0)$; f) $y = \cos (\frac{x}{3} + 30^0)$.
3) Wyznaczyć z wykresu funkcyj $y = \sin x$; $y = \cos x$; wszystkie kąty, dla których:
   a) $\sin x = - \frac{1}{2}$; b) $\sin x = + 0{,}75$;
   c) $\sin x = - 0{,}45$; d) $\cos x = - \frac{1}{2}$;
   e) $\cos x = - 0{,}85$; f) $\cos x = + 0{,}30$.

## § 17. *Wykresy funkcyj tg x i ctg x*

I) W celu sporządzenia wykresu funkcji $y = tg\ x$ posługujemy się ponownie kołem trygonometrycznym. W punktach na osi odciętej, odpowiadających kątom $0^0$, $10^0$, $20^0$, $30^0$,..... wykreślamy rzędne, których wielkość i kierunek wyznaczone są odpowiednimi odcinkami s stycznej do koła trygonometrycznego. W przeciwieństwie do wykresów funkcyj sin x i cos x, *nie otrzymamy dla funkcji* $y = tg\ x$ *jednej ciągłej linii* jako obrazu funkcji, ponieważ dla kątów $a = 90^0, 270^0, 450^0$,..... $-90^0$, $-270^0$,.... itd. funkcja tg x przeskakuje od nieskończenie dużych dodatnich do nieskończenie dużych ujemnych wartości. *Obrazem funkcji tg x będzie linia nieciągła, złożona z nieskończenie wielu oddzielnych gałęzi. Linię tę nazywamy tangensoidą.* (Rys. 19a).

Każda gałąź tangensoidy przybiera wszystkie możliwe wartości liczbowe od $(-\infty)$ do $(+\infty)$ w przedziałach po $180^0$: od $(-90^0)$ do $(+90^0)$, od $90^0$ do $270^0$ itd. Z rys. 19a wynika, że dla każdego kąta x, z wyjątkiem kąta $90^0$ i ogólnie kąta $(n \cdot 180^0 + 90^0)$, istnieje tylko jedna ściśle określona wartość funkcji tg x — do każdej wartości funkcji tg x należy natomiast nieskończenie wiele kątów, na każdej gałęzi tangensoidy jeden, różniących się między sobą tylko wielokrotnościami kąta półpełnego. Oznaczając kąt leżący w przedziale $(-90^0)$ i $(+90^0)$ przez $a_0$, otrzymamy dla wszystkich kątów posiadających ten sam tangens ogólny wzór:

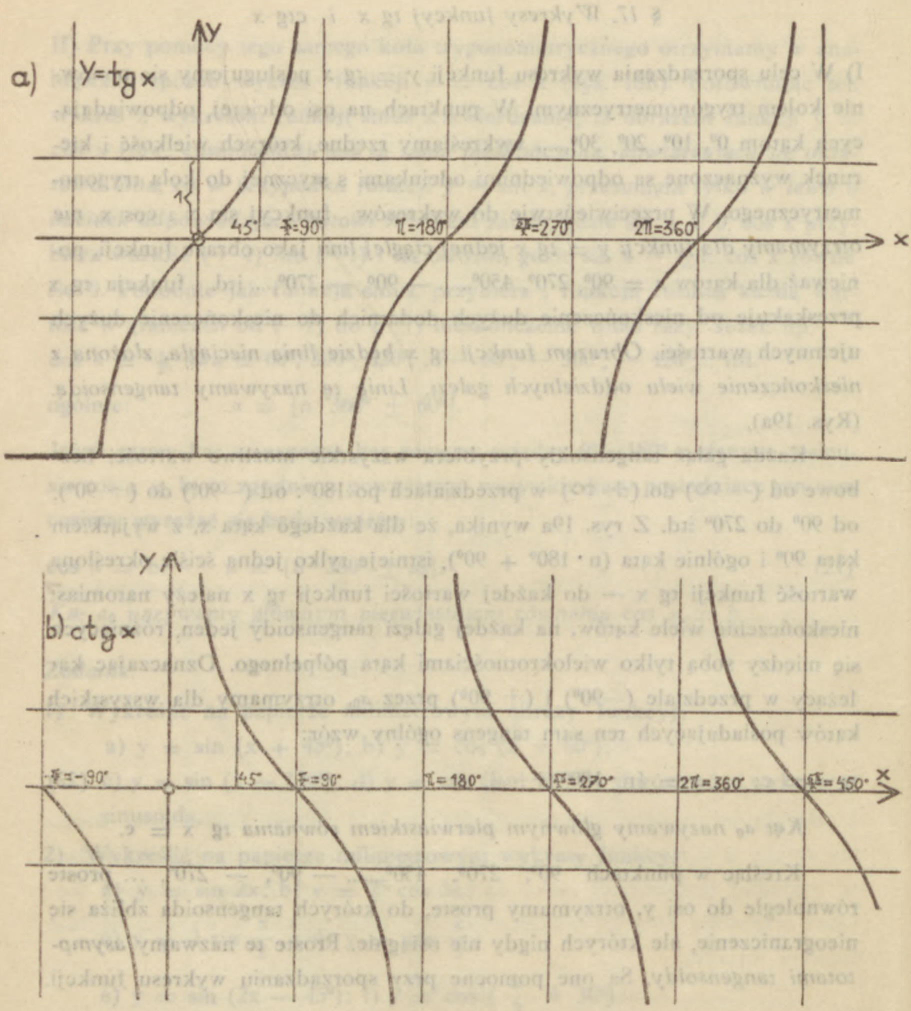
$$tg\ a = c: \quad a = [n \cdot 180^0 + a_0]. \tag{22}$$

*Kąt* $a_0$ *nazywamy głównym pierwiastkiem równania* $tg\ x = c$.

Kreśląc w punktach $90^0$, $270^0$, $450^0$,...... $-90^0$, $-270^0$, ... proste równolegle do osi y, otrzymamy proste, do których tangensoida zbliża się nieograniczenie, ale których nigdy nie osiągnie. Proste te nazwamy *asymptotami tangensoidy*. Są one pomocne przy sporządzaniu wykresu funkcji.

II) W analogiczny sposób sporządzamy wykres funkcji $y = ctg\ x$. Konstrukcję opieramy na rys. 17. Wykresem funkcji ctg x będzie również linia nieciągła, składająca się z nieskończenie wielu oddzielnych gałęzi (rys. 19b). Każda z gałęzi przyjmuje w przedziale $180^0$ wszystkie wartości od $(-\infty)$ do $(+\infty)$. Dla kąta $a = 0^0, 180^0, 360^0$, ...... $-180^0$, $-360^0$,... itd. cotangens przeskakuje od nieskończenie dużych dodatnich wartości do nieskończenie dużych ujemnych wartości. Wszystkie kąty posiadające ten sam cotangens wyrażać się będą wzorem:

$$ctg\ a = d: \quad a = [n \cdot 180^0 + a_0], \tag{23}$$




Rys. 19.

gdzie

*kąt $a_0$ zawarty pomiędzy (—90°) i (+ 90°) jest głównym pierwiastkiem równania ctg $x = d$.*

Porównując wykresy funkcyj tg x i ctg x możemy stwierdzić, że *cotangensoida jest symetrycznym odbiciem tangensoidy względem prostej równoległej do osi y, w odległości $\frac{\pi}{4}$ (czyli 45°) od tej osi.*

*Zadania*:

1) Wykreślić na papierze milimetrowym obrazy funkcyj:
a) $y = \operatorname{tg}(x + 45^0)$; b) $y = \operatorname{ctg}(x - 45^0)$.

2) Wykreślić na papierze milimetrowym obrazy funkcyj:

a) $y = \operatorname{tg} 2x$ b) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

c) $y = \operatorname{ctg}(2x - 45^0)$ d) $y = \operatorname{tg}(\frac{x}{2} + 135^0)$.

3) Wyznaczyć wszystkie kąty, dla których:

a) $\operatorname{tg} x = -1$; b) $\operatorname{ctg} x = 1$; c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
d) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

## § 18. *Wzory redukcyjne*

Już w § 16, omawiając wykres funkcji $y = \sin x$ stwierdziliśmy, iż wystarczy znać wartości tej funkcji tylko dla kątów pierwszej ćwiartki, ponieważ dla kątów innych ćwiartek wartości funkcji możemy otrzymać z rozważań symetrii. Podobnie przedstawia się sprawa i z pozostałymi funkcjami trygonometrycznymi.

Zależności uzyskane z rozważań symetrii, przy pomocy których możemy funkcje trygonometryczne dowolnego kąta wyrazić przy pomocy funkcyj kąta ostrego, nazywamy ogólnie *wzorami redukcyjnymi*.

Jeżeli przez $a$ oznaczymy dowolny kąt pierwszej ćwiartki, to każdy kąt ćwiartki drugiej da się wyrazić w postaci:

$$(90^0 + a) \quad \text{lub} \quad (180^0 - a);$$

każdy kąt trzeciej ćwiartki — w postaci:

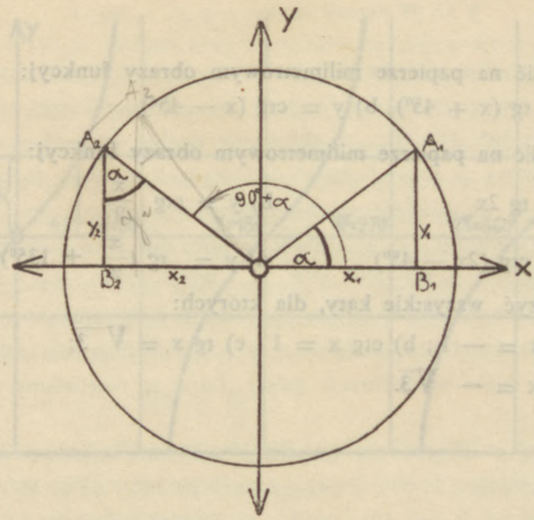
$$(180^0 + a) \quad \text{lub} \quad (270^0 - a);$$

każdy kąt ćwiartki czwartej — w postaci:

$$(270^0 + a) \quad \text{lub} \quad (360^0 - a).$$

Dla tych kątów musimy znaleźć odpowiednie wzory redukcyjne i w tym celu posługujemy się kołem trygonometrycznym.

I) Wykreślamy w kole trygonometrycznym dowolny kąt *ostry* $a$ i kąt *rozwarty* $(90^0 + a)$ (rys. 20).




Rys. 20.

Ponieważ kąty $A_1OB_1$ i $OA_2B_2$ mają ramiona odpowiednio prostopadłe ($OA_2 \perp OA_1$ i $A_2B_2 \perp OB_1$) są sobie równe, a trójkąty prostokątne $A_1B_1O$ i $A_2B_2O$ o jednakowej przeciwprostokątnej $OA_1 = OA_2 = r = 1$, są przystające:

$$\triangle\ A_1B_1O \cong \triangle\ A_2B_2O;$$

powoduje to równość pozostałych boków obu trójkątów. Uwzględniając, że liczby wymiarowe tych odcinków mogą być dodatnie lub ujemne, otrzymamy zgodnie z naszymi poprzednimi założeniami:

$$x_1 > 0,\ y_1 > 0 \qquad \text{(I ćw.)},$$
$$x_2 < 0,\ y_2 > 0 \qquad \text{(II ćw.)},$$

że:

$$x_2 = -y_1\ ; \quad \text{a} \quad y_2 = +x_1;$$

stąd wynika, że:

$$\sin(90^\circ + a) = y_2 = x_1 = \cos a;$$

$$\cos(90^\circ + a) = x_2 = -y_1 = -\sin a;$$

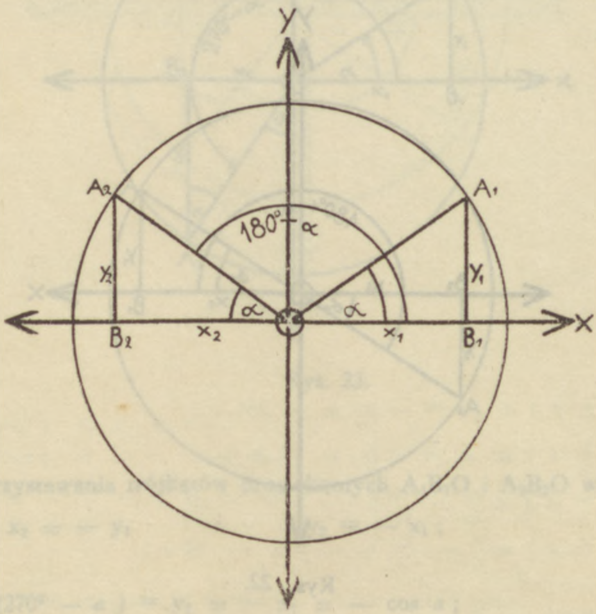
$$\operatorname{tg}(90^\circ + a) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{x_1}{-y_1} = -\frac{x_1}{y_1} = -\operatorname{ctg} a;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ + a) = \frac{x_2}{y_2} = \frac{-y_1}{x_1} = -\frac{y_1}{x_1} = -\operatorname{tg} a,$$

otrzymujemy zatem szukane zależności:

$$\left.\begin{aligned}
\sin(90^\circ + a) &= +\cos a > 0; \\
\cos(90^\circ + a) &= -\sin a < 0; \\
\mathrm{tg}(90^\circ + a) &= -\mathrm{ctg}\, a < 0; \\
\mathrm{ctg}(90^\circ + a) &= -\mathrm{tg}\, a < 0;
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

II) Wykreślamy w kole trygonometrycznym kąt ostry $a$ i kąt rozwarty $(180^\circ - a)$, (rys. 21)




Rys. 21.

Z przystawania trójkątów prostokątnych $A_1B_1O$ i $A_2B_2O$ wynika, po uwzględnieniu znaków współrzędnych, że

$$y_2 = +y_1$$

i

$$x_2 = -x_1$$

a zatem:

$$\sin(180^\circ - a) = y_2 = y_1 = +\sin a;$$

$$\cos(180^\circ - a) = x_2 = -x_1 = -\cos a;$$

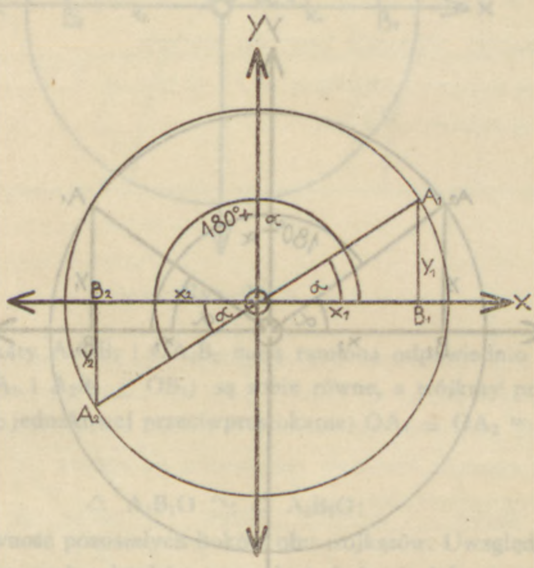
$$\mathrm{tg}(180^\circ - a) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{-x_1} = -\frac{y_1}{x_1} = -\mathrm{tg}\, a;$$

$$\mathrm{ctg}(180^\circ - a) = \frac{x_2}{y_2} = \frac{-x_1}{y_1} = -\frac{x_1}{y_1} = -\mathrm{ctg}\, a;$$

skąd:

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^0 - a) &= +\sin a > 0\,; \\ \cos(180^0 - a) &= -\cos a < 0\,; \\ \mathrm{tg}(180^0 - a) &= -\mathrm{tg}\, a < 0\,; \\ \mathrm{ctg}(180^0 - a) &= -\mathrm{ctg}\, a < 0\,. \end{aligned}\right| \quad (25)$$

III) Wykreślamy kąt ostry $a$ i kąt trzeciej ćwiartki $(180^0 + a)$, (rys. 22);




Rys. 22.

Z przystawania trójkątów prostokątnych $A_1B_1O$ i $A_2B_2O$ otrzymamy:

$$y_2 = -y_1 \quad \text{i} \quad x_2 = -x_1\,;$$

zatem:

$$\sin(180^0 + a) = y_2 = -y_1 = -\sin a\,;$$

$$\cos(180^0 + a) = x_2 = -x_1 = -\cos a\,;$$

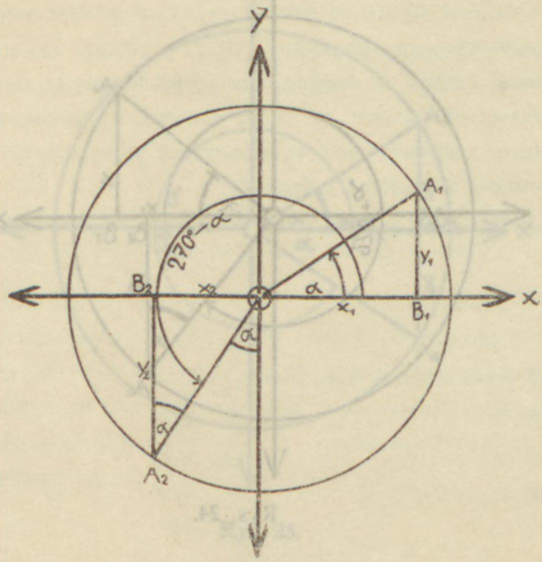
$$\mathrm{tg}(180^0 + a) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-y_1}{-x_1} = \frac{y_1}{x_1} = \mathrm{tg}\, a\,;$$

$$\mathrm{ctg}(180^0 + a) = \frac{x_2}{y_2} = \frac{-x_1}{-y_1} = \frac{x_1}{y_1} = \mathrm{ctg}\, a\,;$$

skąd:

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^0 + a) &= -\sin a < 0\,; \\ \cos(180^0 + a) &= -\cos a < 0\,; \\ \mathrm{tg}(180^0 + a) &= +\mathrm{tg}\, a > 0\,; \\ \mathrm{ctg}(180^0 + a) &= +\mathrm{ctg}\, a > 0\,. \end{aligned}\right| \quad (26)$$

IV) Wykreślamy kąt ostry $\alpha$ i kąt trzeciej ćwiartki $(270^0 - \alpha)$, (rys. 23).




Rys. 23.

Z przystawania trójkątów prostokątnych $A_1B_1O$ i $A_2B_2O$ wynika, że:

$$x_2 = -y_1 \qquad \text{i} \qquad y_2 = -x_1\,;$$

zatem:

$$\sin(270^0 - \alpha) = y_2 = -x_1 = -\cos\alpha\,;$$

$$\cos(270^0 - \alpha) = x_2 = -y_1 = -\sin\alpha\,;$$

$$\mathrm{tg}\,(270^0 - \alpha) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-x_1}{-y_1} = \frac{x_1}{y_1} = +\ \mathrm{ctg}\,\alpha\,;$$

$$\mathrm{ctg}\,(270^0 - \alpha) = \frac{x_2}{y_2} = \frac{-y_1}{-x_1} = \frac{y_1}{x_1} = +\ \mathrm{tg}\,\alpha\,;$$

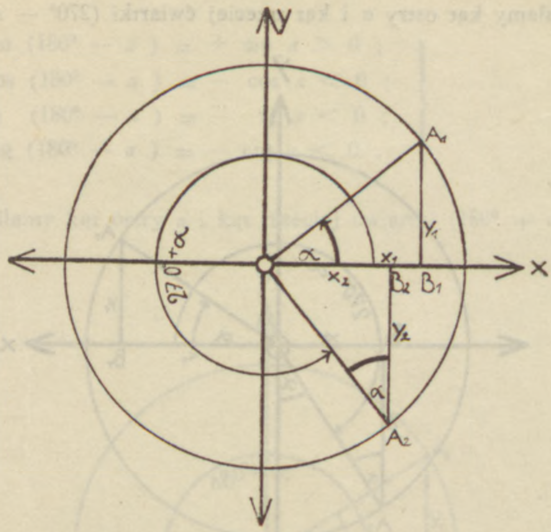
skąd:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(270^0 - \alpha) = -\cos\alpha < 0\,; \\ \cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha < 0\,; \\ \mathrm{tg}\,(270^0 - \alpha) = +\ \mathrm{ctg}\,\alpha > 0\,; \\ \mathrm{ctg}\,(270^0 - \alpha) = +\ \mathrm{tg}\,\alpha > 0\,; \end{array}\right\} \qquad (27)$$

V) Wykreślamy kąt ostry $\alpha$ i kąt czwartej ćwiartki $(270^0 + \alpha)$, (rys. 24).

Z przystawania trójkątów prostokątnych $A_1B_1O$ i $A_2B_2O$ wynika, że:

$$y_2 = -x_1 \qquad \text{i} \qquad x_2 = +y_1;$$




Rys. 24.

zatem:

$$\sin (270^0 + \alpha) = y_2 = -x_1 = -\cos \alpha \; ;$$

$$\cos (270^0 + \alpha) = x_2 = + y_1 = + \sin \alpha \; ;$$

$$\operatorname{tg} (270^0 + \alpha) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-x_1}{y_1} = -\frac{x_1}{y_1} = -\operatorname{ctg} \alpha \; ;$$

$$\operatorname{ctg} (270^0 + \alpha) = \frac{x_2}{y_2} = \frac{y_1}{-x_1} = -\frac{x_1}{y_1} = -\operatorname{tg} \alpha \; ;$$

skąd:

$$\left.\begin{array}{l} \sin (270^0 + \alpha) = -\cos \alpha < 0 \; ; \\ \cos (270^0 + \alpha) = +\sin \alpha > 0 \; ; \\ \operatorname{tg} (270^0 + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha < 0 \; ; \\ \operatorname{ctg} (270^0 + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha < 0 \; . \end{array}\right\} \qquad (28)$$

VI) Kąt czwartej ćwiartki ($360^0 - \alpha$) uważamy za kąt ujemny $-\alpha$; dla kąta tego otrzymamy z rysunku 25:

$$y_2 = -y_1 \qquad \text{i} \qquad x_2 = + x_1 \; ;$$

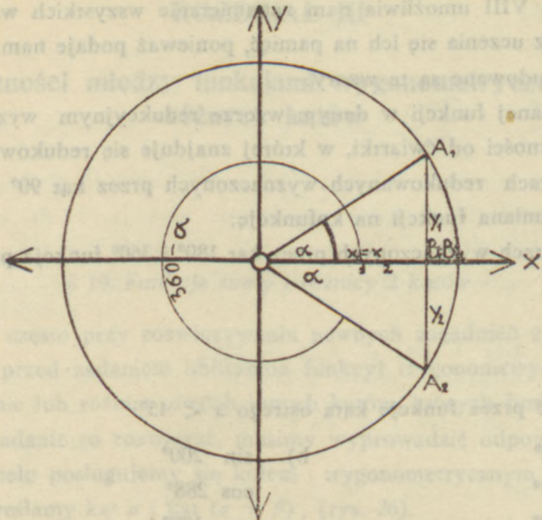
zatem:

$$\sin (-\alpha) = y_2 = -y_1 = -\sin \alpha \; ;$$

$$\cos (-\alpha) = x_2 = + x_1 = + \cos \alpha \; ;$$

$$\operatorname{tg} (-\alpha) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-y_1}{x_1} = -\frac{y_1}{x_1} = -\operatorname{tg} \alpha \; ;$$

$$\operatorname{ctg} (-\alpha) = \frac{x_1}{y_2} = \frac{x_1}{-y_1} = -\frac{x_1}{y_1} = -\operatorname{ctg} \alpha \; ;$$




Rys 25.

stąd:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha < 0\ ;\\
\cos(-\alpha) &= +\cos\alpha > 0\ ;\\
\mathrm{tg}\ (-\alpha) &= -\mathrm{tg}\ \alpha < 0\ ;\\
\mathrm{ctg}\ (-\alpha) &= -\mathrm{ctg}\,\alpha < 0\ .
\end{aligned}
\right\}
\qquad (29)
$$

W tablicy VIII zebrane są wszystkie wzory redukcyjne:

| $\alpha$ \ $f(\alpha)$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $(90^0 + \alpha)$ | $+\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $(180^0 - \alpha)$ | $+\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
| $(180^0 + \alpha)$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $+\mathrm{tg}\,\alpha$ | $+\mathrm{ctg}\,\alpha$ |
| $(270^0 - \alpha)$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $+\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $+\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $(270^0 + \alpha)$ | $-\cos\alpha$ | $+\sin\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $(360^0 - \alpha)$ $(-\alpha)$ | $-\sin\alpha$ | $+\cos\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ |

Tabl. VIII

Tablica VIII umożliwia nam zapamiętanie wszystkich wzorów redukcyjnych bez uczenia się ich na pamięć, ponieważ podaje nam ona zasadę, na jakiej zbudowane są te wzory:

1) Znak danej funkcji w danym wzorze redukcyjnym wyznaczony jest w zależności od ćwiartki, w której znajduje się redukowany kąt;
2) przy kątach redukowanych wyznaczonych przez kąt $90^0$ i $270^0$ następuje zamiana funkcji na kofunkcję;
3) przy kątach wyznaczonych przez kąt $180^0$ i $360^0$ funkcja pozostaje bez zmiany.

*Zadania:*

1) Wyrazić przez funkcję kąta ostrego $a < 45^0$:

a) $\sin 125^0$, $\cos 139^0$, $\operatorname{tg} 92^0$, $\operatorname{ctg} 163^0$

b) $\sin 200^0$, $\cos 288^0$, $\operatorname{tg} 199^0$, $\operatorname{ctg} 315^0$

c) $\sin 430^0$, $\cos 538^0$, $\operatorname{tg} 620^0$, $\operatorname{ctg} 726^0$

d) $\sin 98^0\ 12'$, $\cos 110^0\ 38'$, $\operatorname{tg} 143^0\ 15'$, $\operatorname{ctg} 129^0\ 7'$.

2) Obliczyć (bez użycia tablic) wartości funkcyj dla kątów:
a) $120^0$, b) $240^0$, c) $330^0$, d) $135^0$,
e) $225^0$, f) $315^0$, g) $150^0$, h) $210^0$,
i) $300^0$.

3) Obliczyć wartości funkcyj $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{ctg} a$, jeżeli $\operatorname{tg} a = -4$, a kąt $a$ leży:
a) w II ćwiartce, b) w IV ćwiartce.

4) Obliczyć wartości funkcyj trygonometrycznych rozwartego kąta $a$, którego sinus wynosi $+\frac{2}{\quad}$ .

5) Wyrazić przez funkcje kąta ostrego, mniejszego od $45^0$, następujące wyrażenia:

a) $$y = \frac{\cos 110^0 \cdot \sin 250^0 \cdot \operatorname{tg} 290^0}{\cos 20^0 \cdot \sin 340^0}$$

b) $$y = \frac{\sin 72^0 \cdot \cos 198^0 \cdot \operatorname{ctg} 252^0}{\operatorname{tg} 162^0 \cdot \sin 342^0 \cdot \cos 288^0}$$

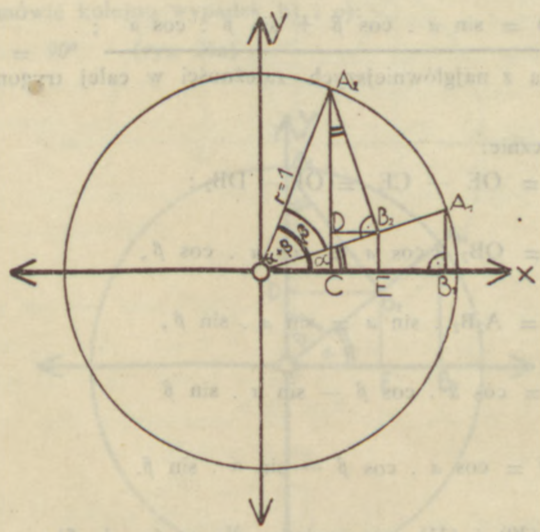
c) $$y = \frac{\sin 114^0 \cdot \cos 228^0 \cdot \operatorname{tg} 336^0}{\operatorname{ctg} 246^0 \cdot \sin 132^0 \cdot \cos 204^0}$$

# ROZDZIAŁ III

## Zależności między funkcjami trygonometrycznymi różnych kątów

### § 19. *Funkcje sumy i różnicy 2 kątów*

Bardzo często przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień z trygonometrii stajemy przed zadaniem obliczenia funkcyj trygonometrycznych kąta równego sumie lub różnicy dwóch innych kątów, których funkcje są znane. Ażeby zadanie to rozwiązać, musimy wyprowadzić odpowiednie wzory. W tym celu posługujemy się kołem trygonometrycznym (r = 1), w którym wykreślamy kąt $\alpha$ i kąt $(\alpha + \beta)$, (rys. 26).




Rys. 26.

Zgodnie z definicjami funkcyj trygonometrycznych w kole otrzymujemy:

$\sin \alpha = A_1B_1$ $\qquad\qquad$ $\sin(\alpha + \beta) = A_2C$

$\cos \alpha = OB_1$ $\qquad\qquad$ $\cos(\alpha + \beta) = OC.$

Opuszczając z wierzchołka $A_2$ prostopadłą do promienia $OA_1$, otrzymamy trójkąt prostokątny $A_2B_2O$, w którym

$$\sin \beta = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_2B_2}{r} = A_2B_2$$

i

$$\cos \beta = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_2}{r} = OB_2$$

Staramy się teraz odcinki $A_2C$ i $OC$, których liczby wymiarowe równe są sinusowi względnie cosinusowi kąta $(\alpha + \beta)$, wyrazić przy pomocy odcinków $A_1B_1$ i $OB_1$ oraz $A_2B_2$ i $OB_2$. W tym celu prowadzimy dwa odcinki pomocnicze $B_2D \perp A_2C$ i $B_2E \perp OB_1$, otrzymamy wtedy:

I) $A_2C = A_2D + DC = A_2D + B_2E;$

ale

$$A_2D = A_2B_2 \cdot \cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos \alpha,$$

a

$$DC = B_2E = OB_2 \cdot \sin \alpha = \cos \beta \cdot \sin \alpha,$$

zatem:

$$\underline{\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha} \quad ; \qquad (30)$$

jest to jedna z najgłówniejszych zależności w całej trygonometrii.

II) Analogicznie:

$$OC = OE - CE = OE - DB_2;$$

ale

$$OE = OB_2 \cdot \cos \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \beta,$$

a

$$DB_2 = A_2B_2 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

zatem

$$OC = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

lub

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \qquad (31)$$

Ze wzorów (30) i (31) otrzymujemy dla $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$:

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

licznik i mianownik wyrażenia po prawej stronie dzielimy przez $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ i otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \alpha}}{1 - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}$$

lub

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \tag{32}$$

Analogicznie znajdujemy dla funkcji cotangens:

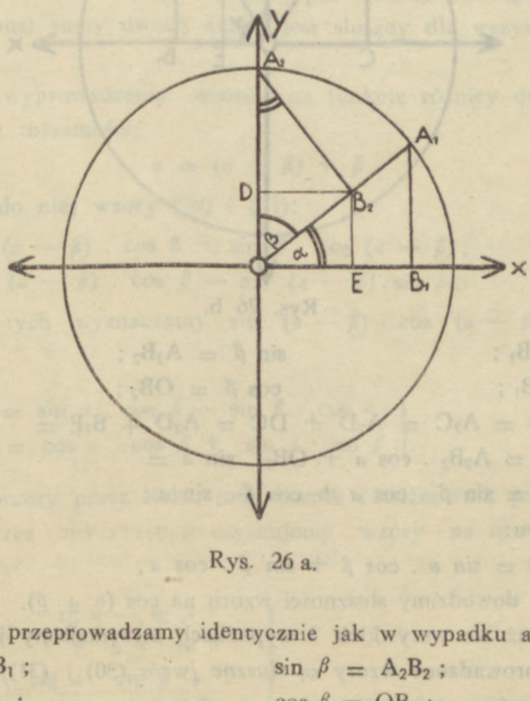
$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}. \tag{32a}$$

Wzór (30) wyprowadziliśmy z rys. 26, na którym wszystkie trzy kąty $\alpha$, $\beta$ i $(\alpha + \beta)$ są ostre; dla uzupełnienia dowodu musimy omówić także i inne możliwości:

A) $\alpha$ i $\beta$ *są kątami ostrymi:* zachodzą wtedy nastęþujce 3 możliwości:
a) $\alpha + \beta < 90^0$ (rys. 26)
b) $\alpha + \beta = 90^0$
c) $\alpha + \beta > 90^0$

Ponieważ zasadniczy dowód przeprowadziliśmy dla wypadku a), musimy omówić kolejno wypadek b) i c):

*b)* $\alpha + \beta = 90^0$ (rys. 26a)




Rys. 26 a.

Dowód przeprowadzamy identycznie jak w wypadku a):

$\sin\alpha = A_1B_1$ ; $\sin\beta = A_2B_2$ ;
$\cos\alpha = OB_1$ ; $\cos\beta = OB_2$ ;

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin 90^0 = OA_2 = A_2D + DO = \\ &= A_2D + B_2E = \\ &= A_2B_2 \,.\, \cos\alpha + OB_2 \,.\, \sin\alpha = \\ &= \sin\beta \,.\, \cos\alpha + \cos\beta \,.\, \sin\alpha \end{aligned}$$

tj.

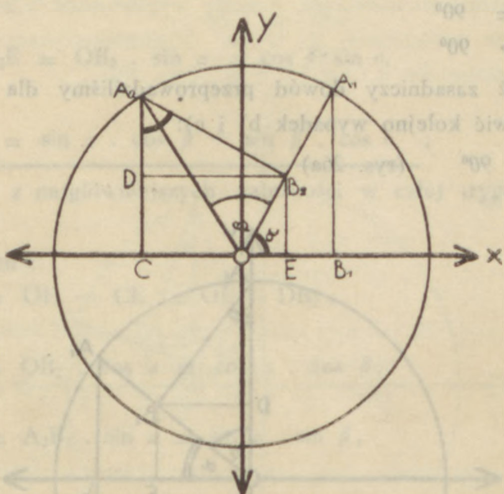
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\beta \,.\, \cos\alpha$ ;

otrzymujemy ten sam wynik, co poprzednio.

Ponieważ $(\alpha + \beta) = 90^0$, zatem $\beta = (90^0 - \alpha)$ i

$$\begin{aligned} \sin 90^0 &= \sin\alpha \,.\, \cos(90^0 - \alpha) + \sin(90^0 - \alpha) \,.\, \cos\alpha = \\ &= \sin\alpha \,.\, \sin\alpha + \cos\alpha \,.\, \cos\alpha = \\ &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \,; \end{aligned}$$

*c)* $\alpha + \beta > 90^0$ (rys. 26 b):




Rys. 26 b.

$\sin\alpha = A_1B_1$ ; $\sin\beta = A_2B_2$ ;

$\cos\alpha = OB_1$ ; $\cos\beta = OB_2$ ;

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= A_2C = A_2D + DC = A_2D + B_2E = \\ &= A_2B_2 \,.\, \cos\alpha + OB_2 \,.\, \sin\alpha = \\ &= \sin\beta \,.\, \cos\alpha + \cos\beta \,.\, \sin\alpha \,; \end{aligned}$$

zatem znowu:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\beta \,.\, \cos\alpha$ ;

analogicznie dowodzimy słuszności wzoru na $\cos(\alpha + \beta)$.

Ponieważ we wszystkich 3 wypadkach otrzymaliśmy jednakowe rezultaty, wyprowadzone wzory są *słuszne* /wzór (30) i (31)/ *dla każdych 2 ostrych kątów* $\alpha$ *i* $\beta$.

B) Wykażemy teraz, że wzory (30) i (31) są słuszne również, gdy *kąty $\alpha$ i $\beta$ nie są ostre, a zupełnie dowolne.*

a) Zakładamy początkowo, że jeden kąt jest ostry: $\alpha < 90^0$, a drugi rozwarty $\beta > 90^0$.

$$\beta = 90^0 + \gamma, \text{ gdzie } \gamma < 90^0:$$
$$\gamma = (\beta - 90^0).$$

Ponieważ wzory (30) i (31) są słuszne dla kątów ostrych $\alpha$ i $\gamma$, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha + \gamma + 90^0) = \sin[(\alpha + \gamma) + 90^0] = \\
&= \cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha \,.\, \cos\gamma - \sin\alpha \,.\, \sin\gamma = \\
&= \cos\alpha \,.\, \cos(\beta - 90^0) + \sin\alpha \cdot \sin(\beta - 90^0) = \\
&= \cos\alpha \,.\, \cos(90^0 - \beta) - \sin\alpha \cdot \sin(90^0 - \beta) = \\
&= \cos\alpha \,.\, \sin\beta + \sin\alpha \,.\, \cos\beta \,.
\end{aligned}$$

I w tym wypadku zatem wzór (30) jest słuszny.

b) Z poprzedniego wynika, iż wzór (30) jest nadal słuszny, jeżeli jeden z kątów ostrych ($\gamma$) zwiększymy o $90^0$, $(\gamma + 90^0) = \beta$. Ponieważ każdy dowolny kąt II, III lub IV ćwiartki możemy otrzymać przez zwiększenie kąta ostrego o $90^0$, $2 \cdot 90^0$ lub $3 \cdot 90^0$, wyprowadzony wzór (30) i (31) na sinus (i cosinus) sumy dwóch kątów jest słuszny dla wszystkich kątów $\alpha$ i $\beta$.

Celem wyprowadzenia wzorów na funkcje różnicy dwóch kątów, korzystamy z tożsamości;

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$$

i stosujemy do niej wzory (30) i (31):

$$\sin\alpha = \sin(\alpha - \beta) \,.\, \cos\beta + \sin\beta \,.\, \cos(\alpha - \beta);$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha - \beta) \,.\, \cos\beta - \sin(\alpha - \beta) \,.\, \sin\beta;$$

ze wzorów tych wyznaczamy $\sin(\alpha - \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$ i otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\beta \,.\, \cos\alpha; \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta;
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

dzieląc oba wzory przez siebie oraz licznik i mianownik prawej strony równania przez $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ uzyskujemy wzory na tg i ctg różnicy dwóch kątów:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \\
\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Wszystkie wzory na funkcje sumy i różnicy dwóch kątów zbieramy w tablicy IX:

| | |
|---|---|
| $\sin(\alpha \pm \beta)$ | $\sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$ |
| $\cos(\alpha \pm \beta)$ | $\cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$ |
| $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ | $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ |
| $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$ | $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}$ |

Tabl. IX.

Przy obliczaniu funkcyj sumy więcej niż 2 kątów, powyższe wzory stosujemy wielokrotnie. Np.:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] =$$
$$= \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\gamma + \sin\gamma \cdot \cos(\alpha + \beta) =$$
$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma +$$
$$+ \sin\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

zatem:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma +$$
$$+ \sin\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

*Zadania:*

1) Obliczyć: a) $\cos(\alpha - \beta - \gamma)$
b) $\sin(\alpha - \beta + \gamma)$
c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$
d) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta - \gamma)$.

2) Obliczyć: a) $\operatorname{tg}(45^0 \pm \alpha)$, b) $\operatorname{ctg}(45^0 \pm \alpha)$,
c) $\sin(30^0 \pm \alpha)$, d) $\cos(60^0 \pm \alpha)$,
e) $\operatorname{tg}(30^0 - \alpha)$, f) $\operatorname{ctg}(60^0 + \alpha)$,
g) $\sin(45^0 - \alpha)$, h) $\cos(30^0 + \alpha)$.

3) Znając wartości funkcyj kąta $30^0$ i $45^0$, obliczyć funkcje kąta:
a) $\alpha = 15^0$; b) $\alpha = 75^0$.

4) Znając wartości funkcyj $19^0$ i $12^0$, obliczyć funkcje kąta $7^0$ i $31^0$.
(Dane: $\sin 19^0 = 0{,}3256$; $\sin 12^0 = 0{,}2079$;
$\cos 19^0 = 0{,}9455$; $\cos 12^0 = 0{,}9781$;
$\operatorname{tg} 19^0 = 0{,}3443$; $\operatorname{tg} 12^0 = 0{,}2126$;
$\operatorname{ctg} 19^0 = 2{,}9042$; $\operatorname{ctg} 12^0 = 4{,}7046$).

### § 20. *Funkcje kąta podwójnego i połowy kąta*

1) Jeżeli we wzorach na funkcje sumy dwóch kątów przyjmiemy, że $\alpha = \beta$, to otrzymamy wzory na funkcje kąta $2\alpha$, tj. wzory pozwalające obliczyć wartość funkcyj trygonometrycznych kąta dwa razy większego od kąta, którego funkcje są znane. I tak z wzoru (30) otrzymamy:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \, . \cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha \, . \cos\alpha + \sin\alpha \, . \cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \, . \cos\alpha \tag{35}$$

Analogicznie otrzymamy dla pozostałych funkcyj:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,; \tag{36}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}\,; \tag{37}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\,. \tag{38}$$

Jeżeli kąt $2\alpha$ nazwiemy $\beta$, to $\alpha = \frac{\beta}{2}$, a wzory (35—38) przyjmą następującą postać:

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}\,;$$

$$\cos\beta = \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\,;$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}\,;$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}\,;$$

Wzory te służą do wyrażania funkcyj całego kąta za pomocą funkcyj połowy tego kąta. Przy pomocy tych wzorów można wyrazić wszystkie funkcje kąta $\beta$ przez tangens połowy tego kąta. Oznaczając przez $p$ tangens połowy kąta $\beta$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = p,$$

otrzymamy:

a) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2p}{1-p^2}\,;$ b) $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{1-p^2}{2p}\,;$

c) $\sin\beta = 2\sin\dfrac{\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2}\,;$

ponieważ $\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} = 1,$

zatem

$$\frac{\sin \beta}{1} = \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + 1}$$

lub

$$\sin \beta = \frac{2p}{1 + p^2}$$

d) Analogicznie: $\cos \beta = \frac{1 - p^2}{1 + p^2}$.

Widzimy, że wszystkie funkcje kąta $\beta$ wyrażają się przez tangens połowy tego kąta *jednoznacznie* i *wymiernie*, tj. bez pierwiastków.

II) Wychodząc ze wzoru :

$$\cos a = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

możemy obliczyć funkcje trygonometryczne kąta $\frac{\alpha}{2}$, gdy znane są wartości funkcyj całego kąta $a$. Jak wiadomo, dla każdego kąta suma kwadratów sinusa i cosinusa tego kąta równa jest jeden, zależność ta jest słuszna zatem i dla kąta $\frac{\alpha}{2}$. Dla kąta tego mamy więc następujące dwa równania:

$$1 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Dodając i odejmując stronami oba te równania otrzymamy:

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

skąd

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \tag{39}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \tag{40}$$

Jeżeli $a$ różne jest od $180^0$ lub ogólnie nierówne $(n \cdot 180^0)$, to dzieląc oba te równania przez siebie, otrzymamy wzór na $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ :

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha} = \pm\frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{1+\cos\alpha}$$

$$= \pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

zatem

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{41}$$

Co się tyczy znaku przed pierwiastkiem, to zależy on od ćwiartki, w której znajduje się kąt $\frac{\alpha}{2}$.

*Zadania:*

1) Znając wartości funkcyj kąta $30^0$ i $45^0$, obliczyć funkcje trygonometryczne kąta a) $15^0$, b) $22\frac{1}{2}^0$, c) $7\frac{1}{2}^0$.
2) Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta a) $3\alpha$; b) $4\alpha$; c) $5\alpha$.
3) Udowodnić prawdziwość następujących wzorów, zwanych *wzorami Simpsona*, przy pomocy których oblicza się tablice wartości funkcyj trygonometrycznych:
   $\sin[(n+1)\cdot\alpha] = 2\cos\alpha\cdot\sin n\alpha - \sin(n-1)\cdot\alpha$;
   $\cos[(n+1)\cdot\alpha] = 2\cos\alpha\cdot\cos n\alpha - \cos(n-1)\cdot\alpha$.
4) Wychodząc z wartości $\cos 90^0$ obliczyć kolejno $\cos 45^0$; $\cos 22^030'$; $\cos 11^015'$ itd. Podać ogólny wzór na $\cos\frac{90^0}{2^n}$
5) Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta $10^0$ wiedząc, że $\operatorname{tg} 20^0 = 0{,}3640$.
6) Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta $8^0$ wiedząc, że $\cos 4^0 = 0{,}9976$.
7) Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta $\alpha$, jeżeli $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$; podać wszystkie kąty $\alpha$ spełniające ten warunek.
8) Obliczyć $\operatorname{tg}(4\alpha - \beta)$; wykazać, że jeżeli: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{239}$, to $(4\alpha - \beta) = 45^0$.

### § 21. *Zamiana sumy i różnicy dwóch funkcyj trygonometrycznych na iloczyn*

Przy rozwiązywaniu zadań trygonometrycznych w praktyce stosujemy zazwyczaj w rachunku logarytmy. Ponieważ jednak logarytmować można tylko iloczyn lub iloraz, potęgę lub pierwiastek, nie można natomiast logarytmować ani sumy ani różnicy, a w zagadnieniach trygonometrycznych występują przeważnie sumy lub różnice funkcyj, musimy wyrażenia te przekształcić w jakikolwiek sposób na iloczyn lub iloraz *(zagadnienie sprowadzania do postaci logarytmicznej)*. Uzyskujemy to w bardzo łatwy sposób, wychodząc ze wzorów na funkcje sumy i różnicy 2 kątów.

Niech będą dane dwa kąty $\gamma$ i $\delta$; oznaczmy przez $\alpha$ sumę, a przez $\beta$ różnicę tych kątów:

$$\alpha = \gamma + \delta; \quad \beta = \gamma - \delta; \qquad \text{lub} \qquad \gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta); \quad \delta = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Według wzorów (30) i (33) otrzymamy:

$$\sin(\gamma + \delta) = \sin\gamma \cdot \cos\delta + \sin\delta \cdot \cos\gamma;$$
$$\sin(\gamma - \delta) = \sin\gamma \cdot \cos\delta - \sin\delta \cdot \cos\gamma;$$

dodając i odejmując stronami oba równania, otrzymamy następujące nowe równania:

$$\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta) = 2\sin\gamma \cdot \cos\delta;$$
$$\sin(\gamma + \delta) - \sin(\gamma - \delta) = 2\cos\gamma \cdot \sin\delta;$$

wyrażamy $\gamma$ i $\delta$ przez $\alpha$ i $\beta$ i dochodzimy do wzorów:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

które pozwalają nam zamienić sumę lub różnicę sinusów dwóch kątów na iloczyn.

Analogicznie otrzymujemy ze wzorów na cosinus sumy i różnicy dwóch kątów następujące równania:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\gamma + \delta) + \cos(\gamma - \delta) &= 2\cos\gamma \cdot \cos\delta; \\ \cos(\gamma + \delta) - \cos(\gamma - \delta) &= -2\sin\gamma \cdot \sin\delta; \end{aligned}\right\}$$

skąd po podstawieniu wartości za $\gamma$ i $\delta$:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

*Przykłady*:

*a)* $\sin 15^0 + \sin 45^0 = 2\sin 30^0 \cdot \cos 15^0 =$
$= \cos 15^0$ ;

*b)* $\cos 60^0 - \cos 30^0 = - 2\sin 45^0 \cdot \sin 15^0 =$
$= - \sqrt{2} \cdot \sin 15^0$ ;

*c)* $\sin \alpha + \cos \beta = \sin \alpha + \sin (90^0 - \beta) =$
$$= 2\sin \frac{\alpha + 90^0 - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - 90^0 + \beta}{2}$$

zatem

$$\sin \alpha + \cos \beta = 2\sin \left(45^0 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(45^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Sumę i różnicę 2 tangensów lub cotangensów sprowadzamy do postaci logarytmicznej przedstawiając te funkcje jako iloraz funkcyj sinus i cosinus, a następnie sprowadzając do wspólnego mianownika. Na przykład:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} =$$
$$= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} =$$
$$= \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} ;$$

zatem

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} . \tag{44}$$

W wielu rozumowaniach potrzebna jest odwrotna zamiana, a mianowicie iloczynu na sumę lub różnicę 2 składników. Do tej zamiany służą te same wzory (42) i (43):

$$2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} . \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \alpha + \sin \beta;$$

$$2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} . \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \alpha - \sin \beta;$$

$$2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} . \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \alpha + \cos \beta;$$

$$-2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} . \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \alpha - \cos \beta = - (\cos \beta - \cos \alpha);$$

dogodniej jest jednak, dzieląc wszystkie równania przez 2 i wprowadzając z powrotem kąty $\gamma$ i $\delta$, otrzymać następujące wzory:

$$\left.\begin{aligned} \sin \gamma \cdot \cos \delta &= \tfrac{1}{2} \cdot [\sin (\gamma + \delta) + \sin (\gamma - \delta)] \\ \sin \gamma \cdot \cos \delta &= \tfrac{1}{2} \cdot [\sin (\gamma + \delta) - \sin (\gamma - \delta)] \\ \cos \gamma \cdot \cos \delta &= \tfrac{1}{2} \cdot [\cos (\gamma + \delta) + \cos (\gamma - \delta)] \\ \sin \gamma \cdot \cos \delta &= \tfrac{1}{2} \cdot [\cos (\gamma - \delta) - \cos (\gamma + \delta)] \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

*Zadania:*

1) Sprowadzić do postaci logarytmicznej wyrażenia:

a) $\cos\alpha - \sin\beta$ ; b) $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$ ;

c) $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$ ; d) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}$ .

2) Sprowadzić do postaci logarytmicznej wyrażenia:

a) $1 \pm \sin\alpha$ ; b) $1 \pm \operatorname{ctg}\alpha$ ;

c) $1 \pm \operatorname{tg}\alpha$ ; d) $1 - \operatorname{ctg}^2\alpha$ ;

e) $\sqrt{3} \pm \operatorname{ctg}\alpha$ ; f) $\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ;

g) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha$ ; h) $\sin\alpha - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ;

i) $\dfrac{1}{4} - \cos^2\alpha$ .

3) Wykazać, że dla $(\alpha + \beta + \gamma) = 180^0$ zachodzą następujące zależności:

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$ ;

b) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$ ;

c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$ ;

d) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ .

4) Sprowadzić do postaci logarytmicznej wyrażenia:

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$ , jeżeli $(\alpha + \beta + \gamma) = 180^0$.

5) Wykazać, że:

a) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$ ;

b) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$ ;

c) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$ ;

d) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ ;

e) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$ ;

f) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$ ;

g) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$ .

6) Wykazać, że:

a) $\sin(30^0 + \alpha) + \sin(30^0 - \alpha) = \cos\alpha$ ;

b) $\cos(30^0 - \alpha) - \cos(30^0 + \alpha) = \sin\alpha$ ;

7) Wykazać, że:

a) $\sin (60^0 + \alpha) = \sin (30^0 - \alpha) + \sin \alpha$ ;

b) $\sin (30^0 + \alpha) = \sin (30^0 - \alpha) + \sqrt{3} \cdot \sin \alpha$ .

8) Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = \sin x \cdot \cos x$ w przedziale od $0^0$ do $90^0$ ; dla jakiego kąta x jest $y$ największe ?

9) Zbadać przebieg zmienności funkcji $y = tg\ x + ctg\ x$ w przedziale od $0^0$ do $90^0$. Dla jakiej wartości na x jest y najmniejsze?

# ROZDZIAŁ IV

## Rozwiązywanie trójkątów ukośnokątnych

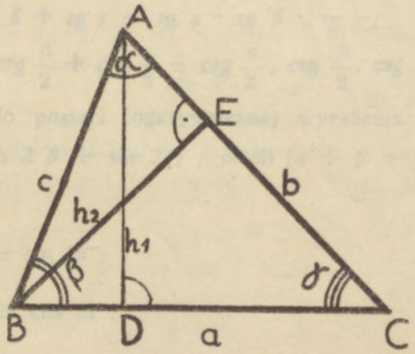
### § 22. *Twierdzenie sinusów*

Przystępujemy obecnie do rozwiązywania trójkątów ukośnokątnych. Ponieważ z pośród 6 elementów trójkąta ukośnokątnego trzy są wyznaczone za pomocą pozostałych 3 elementów, zgodnie z 4 cechami przystawania, przeto muszą istnieć trzy niezależne związki pomiędzy elementami dowolnego trójkąta. Jeden z tych związków znany jest z planimetrii — jest to zależność zachodząca między kątami trójkąta:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \text{ lub } \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta);$$

pozostałe dwa związki wyprowadzimy badając zależności między bokami a funkcjami trygonometrycznymi kątów.

Niech dany będzie dowolny trójkąt ukośnokątny ABC (rys. 27).




Rys. 27.

Opuśćmy wysokość $h_1$ z wierzchołka A na bok BC i obliczmy jej długość dwoma sposobami, badając oba powstałe trójkąty prostokątne. Zgodnie z twierdzeniem I (§ 9) otrzymamy dla $h_1$ z trójkąta ADB:

$$h_1 = c \cdot \sin \beta,$$

a z trójkąta ADC:

$$h_1 = b \cdot \sin \gamma.$$

Ponieważ w obu wypadkach $h_1$ *jest to samo, zatem:*

$$c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma$$

lub
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \,. \tag{a}$$

Opuśćmy teraz wysokość $h_2$ z wierzchołka B na bok AC i obliczmy jej długość w analogiczny sposób z trójkątów BEA i BEC — otrzymamy wtedy:

$$h_2 = c \cdot \sin\alpha \quad \text{i} \quad h_2 = a \cdot \sin\gamma,$$

zatem

$$c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma,$$

lub

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \,. \tag{b}$$

Obie proporcje (a) i (b), które stanowią szukane dwie zależności, piszemy zazwyczaj w postaci:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \,. \tag{46}$$

Proporcje te nazywamy *twierdzeniem sinusów* i wypowiadamy je w następujący sposób:

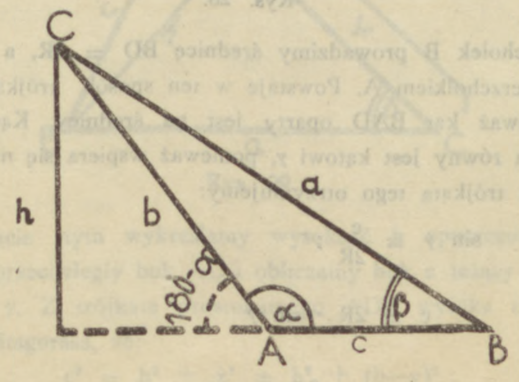
*W trójkącie stosunek każdego boku do sinusa kąta przeciwległego jest wielkością stałą.*

Twierdzenie sinusów piszemy czasami w postaci:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma\,;$$

mówimy wtedy, że boki *trójkąta mają się do siebie, jak sinusy kątów przeciwległych.*

Na rys. 27 twierdzenie sinusów wyprowadziliśmy dla trójkąta ostrokątnego, ważne jest ono jednak dla każdego trójkąta prostokątnego i rozwartokątnego (rys. 27a).




Rys. 27a.

W trójkącie rozwartokątnym występuje co prawda kąt ($180^0$ — $\alpha$), ze względu jednak na wzór redukcyjny $\sin (180^0 - \alpha) = \sin \alpha$, otrzymujemy ten sam wynik:

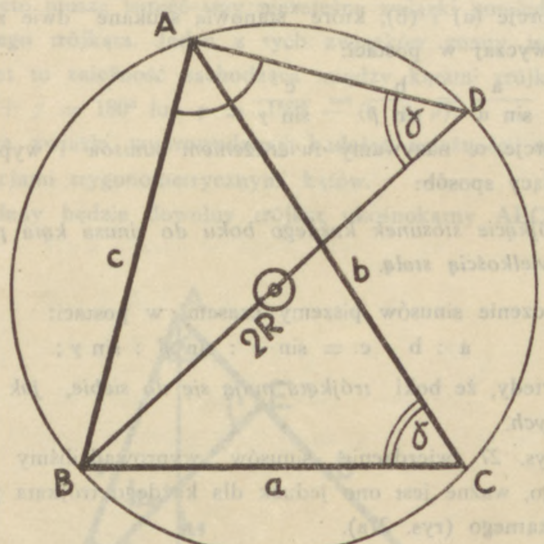
$$h = a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin (180^0 - \alpha) = b \cdot \sin \alpha$$

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$$

lub

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Ażeby obliczyć, ile wynosi ten stały stosunek boku trójkąta do sinusa kąta przeciwległego, opisujemy na trójkącie ABC koło; promień koła oznaczamy przez R. (rys. 28).




Rys. 28.

Przez wierzchołek B prowadzimy średnicę $BD = 2R$, a punkt D łączymy z wierzchołkiem A. Powstaje w ten sposób trójkąt prostokątny BAD, ponieważ kąt BAD oparty jest na średnicy. Kąt ostry ADB tego trójkąta równy jest kątowi $\gamma$, ponieważ wspiera się na tym samym łuku AB. Z trójkąta tego otrzymujemy:

$$\sin \gamma = \frac{c}{2R};$$

stąd

$$c = 2R \cdot \sin \gamma$$

lub

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2\,R.$$

Twierdzenie sinusów możemy zatem uzupełnić, wypowiadając je w sposób następujący:

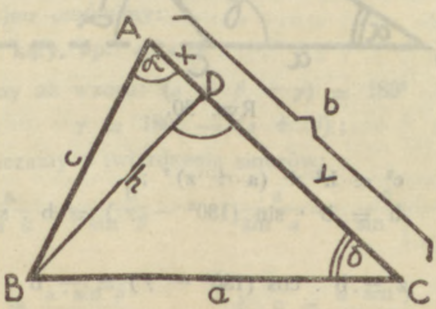
*W trójkącie stosunek każdego boku do sinusa kąta przeciwległego jest wielkością stałą, równą średnicy koła opisanego na tym trójkącie.*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \tag{46a}$$

## § 23. *Twierdzenie cosinusów*

Zasadniczo znajomość twierdzenia sinusów i zależności zachodzącej między kątami ($\alpha + \beta + \gamma = 180^0$) wystarcza dla rozwiązania dowolnego trójkąta ukośnokątnego, w którym dane są trzy elementy zgodnie z cechami przystawania. W niektórych wypadkach jednak (np. gdy dane są trzy boki trójkąta) rozwiązanie układu 3 równań o trzech niewiadomych jest bardzo skomplikowane i dlatego staramy się o *wynalezienie zależności zachodzącej między trzema bokami i jednym kątem trójkąta.* Zależność ta odpowiadać będzie w trójkącie prostokątnym twierdzeniu Pitagorasa i stanowić będzie jego uogólnienie na trójkąty ukośnokątne.

I) Bierzemy pod uwagę *trójkąt ostrokątny ABC* (rys. 29).




Rys. 29.

W trójkącie tym wykreślamy wysokość h opuszczoną z wierzchołka B na przeciwległy bok AC i obliczamy bok c leżący naprzeciwko kąta ostrego $\gamma$. Z trójkąta prostokątnego ADB wynika na podstawie twierdzenia Pitagorasa, że:

$$c^2 = h^2 + x^2 = h^2 + (b-y)^2 ;$$

z trójkąta CDB otrzymujemy, że:

$$h = a \cdot \sin\gamma \qquad \text{i} \qquad y = a \cdot \cos\gamma$$

zatem

$$c^2 = a^2 \sin^2\gamma + (b - a \cdot \cos\gamma)^2$$

$$c^2 = a^2 \cdot \sin^2\gamma + b^2 - 2\,ab \,.\, \cos\gamma + a^2 \,.\, \cos^2\gamma,$$

$$c^2 = a^2 (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2\,ab \,.\, \cos\gamma\,;$$

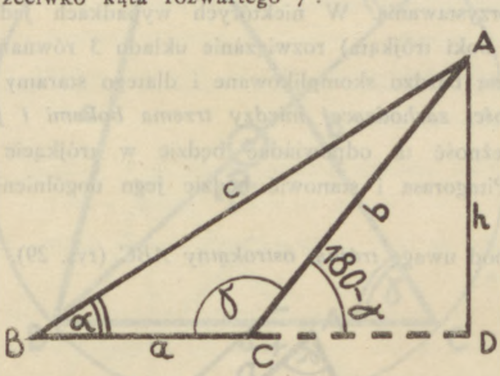
ponieważ $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$, zatem:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \,.\, \cos\gamma. \tag{47}$$

Analogicznie wyprowadzamy wzory dla pozostałych boków biorąc pod uwagę dwie inne wysokości: patrz str. 126.-VIII.

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,bc \,.\, \cos\alpha\,; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,ac \,.\, \cos\beta\,; \end{aligned}\right\} \tag{47a}$$

II) Jeżeli trójkąt jest rozwartokątny (rys. 30), otrzymamy dla boku c, leżącego naprzeciwko kąta rozwartego $\gamma$:




Rys. 30.

$$c^2 = h^2 + (a + z)^2\,;$$

ale
$$h = b \cdot \sin(180^0 - \gamma) = b \,.\, \sin\gamma$$

a

$$z = b \,.\, \cos(180^0 - \gamma) = -\,b \,.\, \cos\gamma$$

zatem

$$c^2 = b^2 \cdot \sin^2\gamma + (a - b \,.\, \cos\gamma)^2$$

$$c^2 = b^2 \,.\, \sin^2\gamma + a^2 - 2ab \cdot \cos\gamma + b^2 \cdot \cos^2\gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \cdot (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) - 2ab \cdot \cos\gamma$$

i ostatecznie

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma. \tag{47b}$$

Widzimy, że i w wypadku kąta rozwartego dochodzimy do tej samej zależności, co w wypadku kąta ostrego. Wyprowadzone wzory (47) są słuszne zatem dla każdego trójkąta ukośnokątnego. Wyrażają one tzw. *twierdzenie cosinusów* lub *wzory C a r n o t a:*

*kwadrat boku w trójkącie jest równy sumie kwadratów pozostałych dwóch boków, zmniejszonej o podwójny iloczyn tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.*

Twierdzenie to jest uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa na trójkąty ukośnokątne. Jeżeli bowiem $\gamma = 90^0$, to $\cos \gamma = 0$, i wzór (47) redukuje się do postaci : $c^2 = a^2 + b^2$.

### § 24. *4 wypadki rozwiązywania trójkątów ukośnokątnych*

Stosownie do 4 cech przystawania trójkątów, rozróżniamy następujące 4 wypadki rozwiązywania trójkątów:

I) gdy dany jest jeden bok i dwa kąty,
II) gdy dane są dwa boki i jeden z kątów przyległych,
III) gdy dane są dwa boki i kąt zawarty pomiędzy nimi,
IV) gdy dane są trzy boki.

Wypadki te kolejno omówimy:

I) Dane bok i 2 kąty, np.: a, $\alpha$, $\beta$ :

1) kąt $\gamma$ obliczamy ze wzoru: $(\alpha + \beta + \gamma) = 180^0$

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta);$$

2) boki *b* i c obliczamy z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}; \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

skąd :

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} \quad i \quad c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

**Przykład:**

$$a = 788 \text{ cm}; \ \alpha = 52^0\ 4'\ 7''; \ \beta = 55^0 43' 18''$$

1) $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 107^0\ 47'25''$

$$\gamma = 72^0 12' 35'';$$

2) $\lg b = (\lg a - \lg \sin \alpha) + \lg \sin \beta$

$\lg c = (\lg a - \lg \sin \alpha) + \lg \sin \gamma$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lg a$ | $= 2{,}8965$ | | $2{,}8965$ |
| $-\lg \sin \alpha$ | $= \bar{1}{,}8969$ | | $-\ \bar{1}{,}8969$ |
| | $2{,}9996$ | | $2{,}9996$ |
| $+\lg \sin \beta$ | $= \bar{1}{,}9172$ | $\lg \sin \gamma =$ | $\bar{1}{,}9787$ |
| $\lg b$ | $= 2{,}9168$ | $\lg c$ | $= 2{,}9783$ |
| $b$ | $= 825{,}5$ cm, | $c =$ | $951{,}2$ cm |

*II) Dane: 2 boki i kąt przyległy do jednego z nich.*

Zachodzić tu mogą dwie możliwości:

a) *gdy dany kąt przylega do boku mniejszego, tj. gdy leży on naprzeciw boku większego;*

b) *gdy dany kąt leży naprzeciwko boku mniejszego.*

Rozpatrzmy kolejno obie te możliwości:

a) dane są dwa boki i kąt: $a > b$ i $\alpha$:

1) kąt $\beta$ obliczamy z twierdzenia sinusów:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$$

stąd

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a};$$

ponieważ $a > b$, $\frac{b}{a} < 1$, na $\sin \beta$ otrzymujemy razem ułamek właściwy: $\sin \beta < 1$.

Jak wiadomo, do takiej samej wartości sinusa należą dwa różne kąty wypukłe: kąt ostry $\beta_1$ i kąt rozwarty $\beta_2 = (180^0 - \beta_1)$. Ponieważ $a > b$, to kąt $\alpha$ jako leżący naprzeciw większego boku w trójkącie będzie większy od kąta $\beta$, kąt $\beta$ musi być zatem kątem ostrym:

$$\beta = \beta_1 < 90^0,$$

gdyż inaczej mielibyśmy dwa kąty rozwarte w trójkącie: $\beta_2$ i $\alpha > \beta_2$, co jest niemożliwe.

2) Znając kąt $\beta$, obliczamy kąt $\gamma$ ze wzoru:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta);$$

3) bok c obliczamy z twierdzenia sinusów:

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha},$$

*Przykład:*

$a = 12{,}38$ m, $b = 5{,}19$ m, $\alpha = 78^0 18'$.

1) $\lg \sin \beta = \lg b + \lg \sin \alpha - \lg a$

$$\lg \sin \beta = \left\{ \begin{array}{r} 0,7152 \\ + \bar{1},9909 \\ \hline 0,7061 \\ -1,0927 \\ \hline \bar{1},6134 \end{array} \right. \qquad \beta = 24^{0}14' < 90^{0}$$

2) $\gamma = 180^{0} - (a + \beta) = 77^{0}\,28'$

$$\gamma = 77^{0}28' \;;$$

3) $\lg c = \lg a + \lg \sin \gamma - \lg \sin a$

$$\lg c = \left\{ \begin{array}{r} 1,0927 \\ + \bar{1},9895 \\ \hline 1,0822 \\ - \bar{1},9909 \\ \hline 1,0913 \end{array} \right. \qquad c = 12,34 \text{ m}$$

b) Dane są dwa boki i kąt: $a < b$ *i* $a$;

Ponieważ kąt $a$ leży naprzeciwko mniejszego boku, jest on mniejszy od kąta $\beta$:

$$a < \beta \quad \textit{lub} \quad \beta > a$$

Wynika z tego, że kąt $a$ musi być kątem ostrym:

$$a < 90^{0}$$

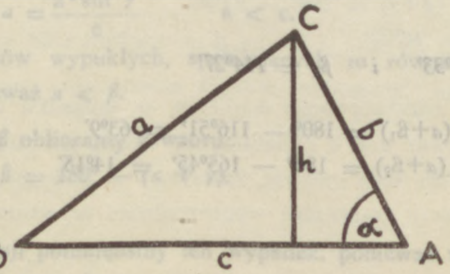
Obliczając kąt $\beta$ z twierdzenia sinusów:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin a}{a}$$

natrafić możemy na jedną z następujących 3 możliwości:

*1)* $\sin \beta > 1$ tj. $b \cdot \sin a > a$

Wypadek ten jest niemożliwy, ponieważ sinus może przybierać tylko wartości w granicach od (—1) do (+1); *kąt $\beta$ wtedy nie istnieje.* Geometrycznie oznacza to, że wysokość $h = b \cdot \sin a$ (rys. 31) ma być większa od boku a, co jest niemożliwe, ponieważ przyprostokątna nie może być większą od przeciwprostokątnej.




$$h = b \cdot \sin a < a$$

Rys. 31.

*Przykład:*

*a = 36 cm; b = 42 cm;* $\alpha = 72^0\ 30'$;

$\lg \sin \beta = \lg b + \lg \sin \alpha - \lg a$

$$\lg \sin \beta = \begin{cases} \phantom{+}1{,}6232 \\ +\bar{1}{,}9794 \\ \hline \phantom{+}1{,}6026 \\ -1{,}5563 \\ \hline \phantom{+}0{,}0463 \qquad \sin \beta = 1{,}1125 > 1 \end{cases}$$

A to jest niemożliwe: *nie istnieje więc trójkąt o takich elementach: a,b,* $\alpha$.

2) $\sin \beta = 1$, tj. $b \cdot \sin \alpha = a$;

kąt $\beta = 90^0$ — dany trójkąt jest trójkątem prostokątnym.

3) $\sin \beta < 1$, tj. $b \cdot \sin \alpha < a$;

ponieważ kąt $\beta > \alpha$, może on być zarówno kątem *ostrym,* jak i *rozwartym;* otrzymujemy zatem dwie różne wartości na $\beta$, a więc i dwa różne trójkąty: *ostrokątny i rozwartokątny.*

*Przykład:*

*a = 36 cm, b = 42 cm,* $\alpha = 51^0\ 18'$;

1) $\lg \sin \beta = \lg b + \lg \sin \alpha - \lg a$

$$\lg \sin \beta = \begin{cases} \phantom{+}1{,}6232 \\ +\bar{1}{,}8923 \\ \hline \phantom{+}1{,}5155 \\ -1{,}5563 \\ \hline \phantom{+}\bar{1}{,}9592 \end{cases}$$

stąd:

$$\beta_1 = 65^0 33' \quad i \quad \beta_2 = 114^0 27'$$

2) $\gamma_1 = 180^0 - (\alpha + \beta_1) = 180^0 - 116^0 51' = 63^0 9'$

$\gamma_2 = 180^0 - (\alpha + \beta_2) = 180^0 - 165^0 45' = 14^0 15'$

$\gamma_1 = 63^0 9'$ ;

$\gamma_2 = 14^0 15'$.

3) $\lg c = \lg a + \lg \sin \gamma - \lg \sin \alpha$

$$\lg c_1 = \left\{\begin{array}{r} 1{,}5563 \\ +\ \bar{1}{,}9505 \\ \hline 1{,}5068 \\ -\ \bar{1}{,}8923 \\ \hline 1{,}6145 \end{array}\right. \qquad \lg c_2 = \left\{\begin{array}{r} 1{,}5563 \\ +\ \bar{1}{,}3912 \\ \hline 0{,}9475 \\ -\ \bar{1}{,}8923 \\ \hline 1{,}0552 \end{array}\right.$$

$c_1 = 41{,}2$ cm; $\qquad c_2 = 12{,}4$ cm.

Wyniki dyskusji drugiego wypadku rozwiązywania trójkątów ujmujemy w tablicy X:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dane a, b, $\alpha$. | $a > b$ | | jedno rozwiązanie |
| | $a < b$ ($\alpha < 90^0$) | $b \cdot \sin\alpha > a$ | nie ma rozwiązania |
| | | $b \cdot \sin\alpha = a$ | jedno rozwiązanie (trójkąt prostokątny) |
| | | $b \cdot \sin\alpha < a$ | dwa rozwiązania (trójkąt ostrokątny i rozwartokątny) |
| | $a = b$ *) | | jedno rozwiązanie |

Tabl. X

III) *Dane: 2 boki i kąt zawarty*, np. $a, b, \gamma$.

1) Przy pomocy twierdzenia cosinusów obliczamy trzeci bok c:
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}.$$

2) Przy pomocy twierdzenia sinusów obliczamy ten kąt, który leży naprzeciw mniejszego z danych boków. Jeżeli takim kątem jest np. kąt $\alpha$, to otrzymamy:
$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c} \qquad a < c.$$

Z dwóch kątów wypukłych, spełniających to równanie, obieramy kąt ostry $\alpha_1$, ponieważ $\alpha < \beta$.

3) Trzeci kąt $\beta$ obliczamy z wzoru:
$$\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma).$$

---

*) W dyskusji pominęliśmy ten wypadek, ponieważ wtedy $\alpha = \beta$ i do obliczenia kąta $\beta$ nie potrzeba używać twierdzenia sinusów.

*Przykład:*

$a = 748\ cm,\ b = 375\ cm,\ \gamma = 63^0 36'$.

1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

$c^2 = (748)^2 + (375)^2 - 2 \cdot 748 \cdot 375 \cdot \cos 63^0 36'$.

Ponieważ wyrażenie na $c^2$ nie nadaje się jako suma algebraiczna kilku składników do logarytmowania, musimy każdy składnik obliczyć osobno. Pierwsze dwa wyrazy obliczamy z tablic kwadratów, trzeci — jako iloczyn 4 wyrazów — przy pomocy logarytmów:

$$\begin{array}{rcr} a^2 = (748)^2 & = & 559.504 \\ + b^2 = (375)^2 & = & 140.625 \\ \hline & & 700.129 \\ - 2ab \cdot \cos \gamma & & 249.400 \\ \hline c^2 = & & 450.729 \end{array} \qquad \lg 2\,ab \cdot \cos \gamma = \left\{ \begin{array}{r} 0,3010 \\ 2,8739 \\ 2,5740 \\ \bar{1},6480 \\ \hline 5,3969 \end{array} \right.$$

$$2\,ab \cdot \cos \gamma = 249.400$$

skąd

$c = 671\ cm.$

2) Ponieważ $b < a$, obliczamy $\sin \beta$:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \gamma}{c}$$

lub

$$\lg \sin \beta = \lg b + \lg \sin \gamma - \lg c$$

$$\lg \sin \beta = \left\{ \begin{array}{r} 2,5740 \\ + \bar{1},9522 \\ \hline 2,5262 \\ - 2,8267 \\ \hline \bar{1},6995 \end{array} \right.$$

skąd

$\beta_1 = 30^0\ 2'$.

3) $\alpha = (180^0 - (\beta + \gamma) = 180^0 - 93^0 38'$

$\alpha = 86^0 22'$

Ten sposób rozwiązywania trójkątów w wypadku III jest bardzo niedogodny, ponieważ bok c obliczamy ze wzoru, nie nadającego się do logarytmowania. Aby tego uniknąć, stosujemy w praktyce zamiast wzoru cosinusów tzw. *wzory tangensów*, wyprowadzone ze wzoru sinusów.

Gdy dane są a, b, $\gamma$, otrzymujemy na wyznaczenie kątów $\alpha$ i $\beta$ następujące dwa równania:

$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ lub $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$

oraz ze wzoru sinusów:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

Stosując do ostatniej proporcji twierdzenie *o sumie i różnicy wyrazów proporcji*, otrzymamy:

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{a - b}{a + b}$$

lub po zastosowaniu wzorów na sumę i różnicę sinusów:

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{a - b}{a + b}$$

lub

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b}$$

ale

$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = (90^0 - \frac{\gamma}{2})$, a $\operatorname{ctg}(90^0 - \frac{\alpha}{2}) = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$

zatem:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \tag{48a}$$

Z równania tego możemy wyznaczyć kąt $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, a ponieważ znany nam jest kąt $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, możemy obliczyć same kąty $\alpha$ i $\beta$. Cały rachunek można przeprowadzić przy pomocy logarytmów.

Gdy dane są inne boki trójkąta, otrzymujemy w analogiczny sposób następujące wzory:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{a - c}{a + c} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}; \tag{48b}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \tag{48c}$$

*IV) Dane trzy boki trójkąta: a, b, c.*

1) Przy pomocy twierdzenia Carnota obliczamy największy z kątów, np. $\alpha$:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

$2bc \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$,

skąd

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}$$

2) Drugi kąt $\beta$ obliczamy również ze wzoru cosinusów, względnie, jeżeli chcemy zastosować logarytmy, ze wzoru sinusów:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac} \quad \text{wzgl.} \quad \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$$

3) Trzeci kąt $\gamma$ obliczamy ze wzoru:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

*Przykład:*

$a = 1011$ *cm*, $b = 956$ *cm*, $c = 533$ *cm.*

1) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$

$$
\begin{array}{lr}
b^2 = (956)^2 = & 913.936 \\
c^2 = (533)^2 = & +284.089 \\
\hline
 & 1,198.025 \\
-\ a^2 = & 1,022.121 \\
\hline
b^2 + c^2 - a^2 = & 175.904
\end{array}
$$

$\lg\cos\alpha = \lg(b^2 + c^2 - a^2) - \lg 2\,bc$

$\lg 2\,bc = \lg 2 + \lg b + \lg c$

$$\lg 2\,bc = \left\{\begin{array}{r} 0{,}3010 \\ 2{,}9805 \\ 2{,}7267 \\ \hline 6{,}0082 \end{array}\right. \qquad \lg(b^2 + c^2 - a^2) = \lg 175.904 = 5{,}2453$$

zatem

$$\lg\cos\alpha = \left\{\begin{array}{r} 5{,}2453 \\ -6{,}0082 \\ \hline \bar{1}{,}2371 \end{array}\right.$$

skąd

$$\alpha_1 = 80^0\ 3' \quad ^{*)}$$

2) Ponieważ największy kąt trójkąta $\alpha$ jest kątem ostrym, zatem i pozostałe kąty muszą być mniejsze od kąta prostego, dla kąta $\beta < 90^0$ otrzymamy wtedy ze wzoru sinusów:

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$$

lub

$$\lg\sin\beta = \lg b + \lg\sin\alpha - \lg a$$

---

*) kąt $\alpha$ jest kątem ostrym, ponieważ w tym wypadku wyrażenie $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} > 0$, a cosinus kąta rozwartego jest ujemny.

$$\lg \sin \beta = \left\{ \begin{array}{r} 2{,}9805 \\ +\,\bar{1}{,}9934 \\ \hline 2{,}9739 \\ -3{,}0048 \\ \hline \bar{1}{,}9691 \end{array} \right.$$

skąd

$$\beta = 68^0 38'$$

3) $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 148^0 41'$

$$\gamma = 31^0\ 19'$$

Ze względu na stosowanie twierdzenia cosinusów dla obliczenia największego kąta, jest ten sposób rozwiązywania trójkątów bardzo niedogodny, ponieważ nie możemy używać logarytmów.

Tę niedogodność możemy jednak usunąć przekształcając odpowiednio wzory Carnota na tzw. ***wzory połówkowe.***

Oznaczmy przez p — połowę obwodu trójkąta:

$$p = \tfrac{1}{2}(a + b + c),$$

otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} (p - a) &= \tfrac{1}{2}(b + c - a)\ ; \\ (p - b) &= \tfrac{1}{2}(a + c - b)\ ; \\ (p - c) &= \tfrac{1}{2}(a + b - c)\ ; \end{aligned} \tag{49}$$

Jak wiadomo z paragrafu 20:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}\ ;$$

za cos $\alpha$ podstawiamy wyrażenie otrzymane ze wzoru cosinusów:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{(2bc + b^2 + c^2) - a^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4\ bc}} = \sqrt{\frac{(a + b + c)\cdot(b + c - a)}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{2p\cdot 2\,(p - a)}{4\ bc}} = \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{bc}}$$

zatem

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{bc}}\,.$$

Podobnie obliczymy

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

dzieląc wyrażenie na $\sin\frac{\alpha}{2}$ przez wyrażenie na $\cos\frac{\alpha}{2}$ otrzymamy ostatecznie:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \tag{50a}$$

Analogicznie otrzymamy dla pozostałych kątów:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}. \tag{50b}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \tag{50c}$$

Ponieważ kąty $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ są kątami trójkąta, kąty $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ są kątami ostrymi, pierwiastki mają zatem zawsze znak dodatni.

*Przykład* (jak poprzednio):

$a = 1011\ cm$, $b = 956\ cm$, $c = 533\ cm$.

1) $2p = a + b + c = 2500$

$p = 1250;$

$(p - a) = 239$

$(p - b) = 294$

$(p - c) = 717$

2) $\lg \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cdot[\lg(p-b) + \lg(p-c) - \lg p - \lg(p-a)]$

$$\begin{array}{lcll} \lg(p-b) &=& \lg 294 &= \phantom{+}\,2{,}4683 \\ +\lg(p-c) &=& \lg 717 &= +\,2{,}8555 \\ \hline & & & \phantom{+}\,5{,}3238 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcll} \lg p &=& \lg 1250 &= \phantom{+}\,3{,}0969 \\ +\lg(p-a) &=& \lg 239 &= +\,2{,}3784 \\ \hline & & & \phantom{+}\,5{,}4753 \end{array}$$

$\lg \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(5{,}3238 - 5{,}4753) = \frac{1}{2}(\bar{1}{,}8485) = \bar{1}{,}9242$

$\frac{\alpha}{2} = 40^0\ 1'30''$,

*skąd* $\alpha = 80^0\ 3'$.

3) Analogicznie obliczamy kąt $\beta$:

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \tfrac{1}{2} [\lg (p - a) + \lg (p - c) - \lg p - \lg (p - b)] =$$
$$= \tfrac{1}{2} \; [(2{,}3784 + 2{,}8555) - (3{,}0969 + 2{,}4683)] =$$
$$= \tfrac{1}{2} (5{,}2339 - 5{,}5652) = \tfrac{1}{2} (\bar{1}{,}6687) = \bar{1}{,}8343$$

skąd $\frac{\beta}{2} = 34^0 19' 30''$,

zatem $\beta = 68^0 39'$.

4) Kąt $\gamma$ obliczamy w analogiczny sposób i sprawdzamy, czy rzeczywiście $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2} [\lg (p - a) + \lg (p - b) - \lg p - \lg (p - c)] =$$
$$= \tfrac{1}{2} \; [(2{,}3784 + 2{,}4683) - (3{,}0969 + 2{,}8555)] =$$
$$= \tfrac{1}{2} \; (4{,}8467 - 5{,}9524) = \tfrac{1}{2} (\bar{2}{,}8943) = \bar{1}{,}4471,$$

skąd

$$\frac{\gamma}{2} = 15^0 39'$$
$$\gamma = 31^0 18'$$

*Sprawdzenie:*

$$\alpha = 80^0 \; 3'$$
$$\beta = 68^0 \; 39'$$
$$\gamma = 31^0 \; 18'$$
$$\overline{180^0 \; 00'}$$

*Zadania:*

1) Rozwiązać trójkąt ukośnokątny, znając:
   I) $a = 1{,}19$ m; $\beta = 61^0 24'$; $\gamma = 45^0 17'$.
   II) $b = 15{,}41$ m; $\alpha = 32^0 41'$; $\gamma = 102^0 \; 6'$;
   III) $c = 246$ cm; $\alpha = 58^0 27'$; $\beta = 85^0 12'$.

2) Rozwiązać trójkąt ukośnokątny, znając:
   I) $a = 42{,}6$ m; $b = 38{,}6$ m; $\alpha = 60^0 45'$;
   II) $a = 167$ cm; $c = 167$ cm; $\gamma = 49^0 33'$;
   III) $b = 24{,}86$ m; $c = 19{,}82$ m; $\beta = 115^0 23'$.

3) Rozwiązać trójkąt ukośnokątny, znając:
   I) $a = 4527$ cm; $b = 3251$ cm; $\beta = 25^0 15'$;
   II) $a = 23{,}6$ m; $c = 40{,}5$ m; $\alpha = 29^0 \; 4'$;
   III) $b = 7{,}16$ m; $c = 9{,}24$ m; $\beta = 44^0 44'$.

4) Zbadać, czy istnieje trójkąt, którego elementy wynoszą:
   I) $a = 22$ cm; $b = 52$ cm; $\alpha = 52^0 36'$;
   II) $b = 24$ cm; $c = 50$ cm; $\alpha = 50^0 17'$;
   III) $c = 26$ cm; $a = 48$ cm; $\alpha = 40^0 \; 5'$.

5) Rozwiązać trójkąt ukośnokątny, znając:

I) $a = 388$ cm; $b = 195$ cm; $\gamma = 102^0 14'$;

II) $b = 412,2$ m; $c = 371,3$ m; $\alpha = 55^0 46'$;

III) $c = 0,85$ km; $a = 0,58$ km; $\beta = 88^0 57'$.

6) Rozwiązać trójkąt ukośnokątny znając jego boki:

I) $a = 16,00$ m; $b = 18,00$ m; $c = 19,00$ m;

II) $a = 37,6$ cm; $b = 42,1$ cm; $c = 50,3$ cm;

III) $a = 0,672$ km; $b = 0,950$ km; $c = 0,803$ km.

7) Wykazać, że $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}}$

8) Obliczyć kąty trójkątów podobnych, których boki mają się do siebie jak 4 : 5 : 6.

# ROZDZIAŁ V

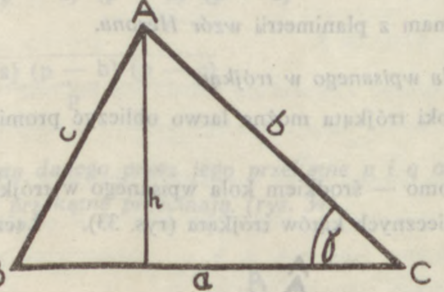
## Zastosowanie trygonometrii

### § 25. *Zadania z planimetrii*

*1) Pole trójkąta ukośnokątnego.*

Z planimetrii wiemy, że pole trójkąta P równe jest połowie iloczynu podstawy i wysokości opuszczonej na tę podstawę:

$$P = \tfrac{1}{2} a \cdot h$$




Rys. 32.

ale

$$h = b \cdot \sin \gamma,$$

zatem

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma. \tag{51a}$$

Jeżeli za podstawę trójkąta obierzemy bok b lub c, otrzymamy analogicznie wzory na pole trójkąta:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \tag{51b}$$

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta. \tag{51c}$$

Wzory te słuszne są również dla trójkąta rozwartokątnego. Otrzymujemy zatem ogólne twierdzenie, że

*pole trójkąta równa się połowie iloczynu dwóch boków i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.*

Jeżeli w trójkącie dane są 3 boki, pole trójkąta możemy obliczyć przy pomocy innego wzoru:

Ze wzoru (51a) wynika, że:

$$P = \tfrac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \sin \gamma;$$

$$\sin \gamma = \sin \left[2\, \frac{\gamma}{2}\right] = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2};$$

ponieważ jednak:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{a\,b}}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}$$

gdzie p równe jest połowie obwodu trójkąta, zatem

$$P = a.b \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b) \cdot p\,(p-c)}{a.b \cdot a.b}}$$

lub

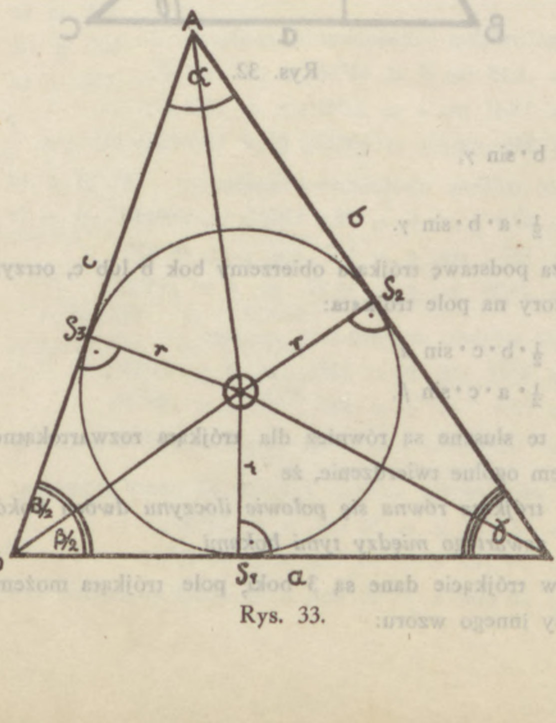
$$P = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \qquad (52)$$

Jest to znany nam z planimetrii *wzór Herona.*

*2) Promień koła wpisanego w trójkąt.*

Znając boki trójkąta można łatwo obliczyć promień koła wpisanego w ten trójkąt.

Jak wiadomo — środkiem koła wpisanego w trójkąt jest punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta (rys. 33). Łącząc środek koła O




Rys. 33.

z wierzchołkami trójkąta, otrzymujemy 3 trójkąty OAB, OAC i OBC. W każdym z tych trójkątów wysokością jest promień r, poprowadzony ze środka koła do punktów styczności $S_1$, $S_2$, $S_3$. Wielkość promienia tego otrzymamy porównując pole trójkąta ABC, obliczone bezpośrednio ze wzoru H e r o n a z wielkością, jaką otrzymamy, obliczając pola poszczególnych trójkątów OAB, OAC i OBC. W pierwszym wypadku

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

w drugim natomiast:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

$$P = \frac{1}{2}r(a+b+c) = pr$$

$$P = pr$$

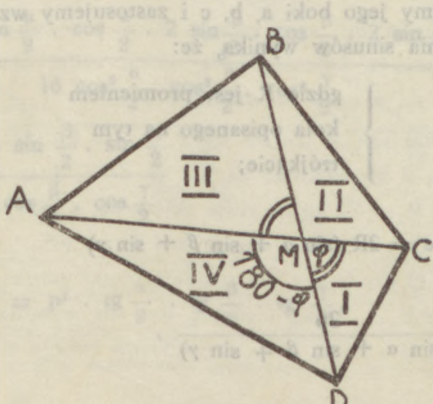
zatem :

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

lub

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad (53)$$

3) *Pole czworokąta danego przez jego przekątne p i q oraz kąt φ, pod którym się te przekątne przecinają. (rys. 34).*




Rys. 34.

Pole czworokąta wyznaczymy obliczając pola poszczególnych trójkątów, na które dzielą ten czworokąt obie przekątne:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4.$$

Na podstawie wzoru (51) otrzymamy:

$P_1 = \frac{1}{2} MD \cdot MC \cdot \sin \varphi$ ;

$P_3 = \frac{1}{2} MB \cdot MA \cdot \sin \varphi$ ;

$P_2 = \frac{1}{2} MC \cdot MB \cdot \sin (180^0 - \varphi) = \frac{1}{2} MC \cdot MB \cdot \sin \varphi$ ;

$P_4 = \frac{1}{2} MA \cdot MD \cdot \sin (180^0 - \varphi) = \frac{1}{2} MA \cdot MD \cdot \sin \varphi$ ;

zatem :

$P = \frac{1}{2} \sin \varphi (MD \cdot MC + MB \cdot MA + MC \cdot MB + MA \cdot MD)$

$P = \frac{1}{2} \sin \varphi [MC \cdot (MD + MB) + MA \cdot (MD + MB)]$

$P = \frac{1}{2} \sin \varphi (MD + MB) (MC + MA)$,

ale:

$MD + MB = BD = p$,

a:

$MC + MA = AC = q$,

zatem

$$P = \frac{1}{2}\, p \cdot q \cdot \sin \varphi. \tag{54}$$

*Pole dowolnego czworokąta równa się połowie iloczynu jego przekątnych i sinusa kąta zawartego między przekątnymi.*

*4) Pole trójkąta danego przez jego kąty i obwód:*

Dane są kąty $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i obwód $2p = a + b + c$; dla obliczenia pola trójkąta znajdziemy jego boki a, b, c i zastosujemy wzór (51a):

Z twierdzenia sinusów wynika, że:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2R \cdot \sin \alpha \;; \\ b &= 2R \cdot \sin \beta \;; \\ c &= 2R \cdot \sin \gamma \;; \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{gdzie R jest promieniem} \\ \text{koła opisanego na tym} \\ \text{trójkącie;} \end{array}$$

zatem:

$2p = a + b + c = 2R (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$

lub

$$2R = \frac{2p}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)},$$

skąd

$$a = \frac{2p \cdot \sin \alpha}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)}$$

$$b = \frac{2p \cdot \sin \beta}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)}$$

$$c = \frac{2p \cdot \sin \gamma}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)}.$$

Ze wzoru (51a) otrzymamy na pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{2p \cdot \sin\alpha \cdot 2p \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2}$$

$$P = \frac{2p^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2},$$

ale:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = (\sin\alpha + \sin\beta) + \sin[180^0 - (\alpha + \beta)] =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] =$$

$$= 2\cos\left[90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right] \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} =$$

$$= 4\cos\left[\frac{180^0 - (\alpha+\beta)}{2}\right] \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2};$$

zatem:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2};$$

podstawiając to wyrażenie na $(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ do wzoru na P, otrzymamy:

$$P = \frac{2p^2 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot 2\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{16\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\beta}{2} \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$P = \frac{p^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

lub ostatecznie:

$$P = p^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

*Zadania:*

1) Obliczyć pole trójkąta, mając dane:
   I) $a = 16{,}8$ cm; $b = 19{,}5$ cm; $\gamma = 105^0 10'$;
   II) $b = 26{,}1$ cm; $c = 18{,}7$ cm; $\alpha = 49^0 36'$;
   III) $c = 12{,}6$ cm; $a = 10{,}5$ cm; $\beta = 22^0 33'$.
2) Obliczyć pole równoległoboku, mając dane obie przekątne $d_1 = 24{,}6$ cm, $d_2 = 18{,}8$ cm i jeden z boków $a = 14{,}2$ cm.

3) Obliczyć boki i pole równoległoboku, mając dane jedną przekątną $d_1 = 16$ cm i kąty, jakie ta przekątna tworzy z bokami: $\alpha = 32^0 49'$; $\beta = 76^0 3'$.

4) Obliczyć pole prostokąta, jeżeli dane są różnica jego boków $(b - a) = 40$ cm i kąt $\alpha = 36^0\ 27'$, pod jakim przecinają się jego przekątne.

5) Bok rombu wynosi $a = 25$ cm, jeden z jego kątów ostrych $\alpha = 29^0 16'$. Znaleźć promień koła, którego pole jest dwa razy większe od pola tego rombu.

6) W trapezie dane są oba boki równoległe: $a = 4{,}2$ cm, $b = 2{,}4$ cm, jeden z boków nierównoległych $c = 1{,}3$ cm i kąt $\alpha = 66^0 55'$ zawarty pomiędzy bokiem a i c; obliczyć pole trapezu.

7) W trapezie równoramiennym dane są boki równoległe $a = 94$ cm, $b = 68$ cm i kąt przy podstawie a: $\alpha = 60^0 37'$; obliczyć pole trapezu.

8) Znaleźć przeciwprostokątną c trójkąta prostokątnego, jeżeli suma przyprostokątnych wynosi 42,6 cm a kąt ostry $\alpha = 49^0 17'$.

9) Pod jakim kątem $\varphi$ widać z punktu przecięcia się dwóch kół o promieniach $r_1 = 52$ cm, $r_2 = 83$ cm, odcinek łączący środki tych kół, jeżeli długość jego wynosi 102 cm?

10) Na kole o promieniu $r = 10$ cm opisano trójkąt o kątach $\alpha = 50^0$, $\beta = 70^0$; obliczyć boki tego trójkąta.

11) Sieczna i styczna do tego samego koła przecinają się pod kątem $\varphi = 60^0$; obliczyć średnicę koła, jeżeli część zewnętrzna siecznej równa jest 1 m, a część wewnętrzna 3 m.

12) Znaleźć wypadkową R dwóch sił $P = 276$ kg, $Q = 329$ kg, jeżeli siły te tworzą z wypadkową kąty $\alpha = 27^0 6'$, $\beta = 83^0 21'$.

13) Rozłożyć siłę $R = 72$ kg na dwie składowe, z których jedna $P = 35$ kg, a druga Q tworzy ze siłą R kąt $\beta = 30^0$.

14) Dwie siły P i Q działające na ten sam punkt tworzą ze sobą kąt $100^0$. Składowa siła $P = 50$ kg i równa jest sile wypadkowej R. Znaleźć siłę składową Q i kąty, jakie wypadkowa tworzy z obu składowymi.

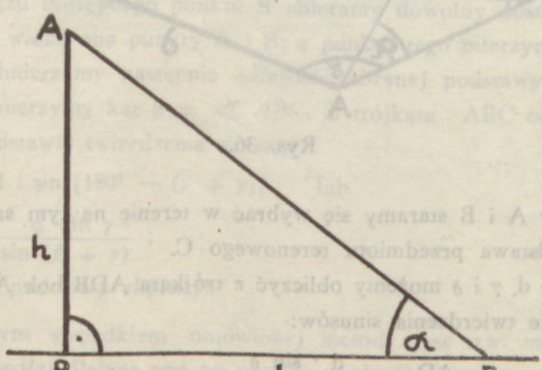
## § 26. *Zadania z miernictwa*

Zadaniem miernictwa jest mierzenie i przedstawianie na rysunku części powierzchni ziemi, tj. sporządzanie planów, jeżeli chodzi o małe obszary, lub map geograficznych, jeżeli chodzi o obszary większe.

Mierzenie wszystkich odcinków i kątów potrzebnych do narysowania planu sprawia bardzo często niepokonane trudności ze względu na przeszkody w terenie. Dlatego mierzymy tylko najkonieczniejsze elementy, pozostałe zaś obliczamy przy pomocy trygonometrii. *Przy pomiarach staramy się mierzyć jak najmniej długości*, ponieważ ścisłe pomiary długości są bardzo mozolne, *mierzymy natomiast jak najwięcej kątów*, do czego posiadamy bardzo dogodne i dokładne przyrządy (kątomierz — busola, lorneta nożycowa, teodolity itp.). W zależności od zadania i od trudności terenowych posługujemy się przy pomiarach różnymi metodami. Poniżej podajemy najczęściej stosowane metody.

*I. Obliczanie wysokości względnej.*

a) Obliczanie wysokości względnej przedmiotu terenowego, którego podstawa jest dostępna (np. wieża kościelna):




Rys. 35.

Od podstawy przedmiotu terenowego B (rys. 35) mierzymy długość d do jakiegoś dowolnego punktu $B_1$ w terenie i z punktu tego mierzymy kąt $a$, zawarty między poziomem $BB_1$ a kierunkiem widzenia $B_1A$ punktu A. *Odległość* $d = BB_1$ *nazywamy podstawą*, kąt $a = \sphericalangle BB_1A$ *kątem wzniesienia punktu A.*

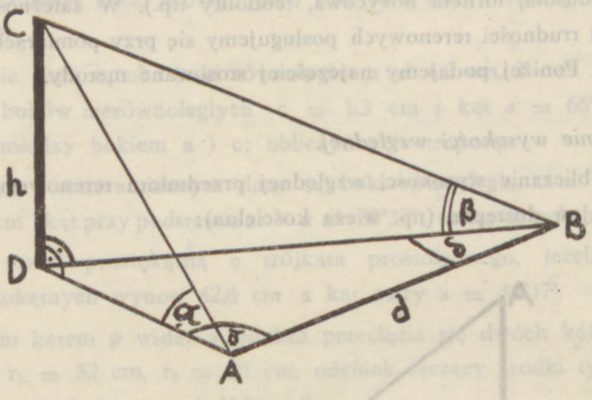
Z trójkąta $ABB_1$ otrzymamy:

$$h = d \cdot \operatorname{tg} a.$$

W praktyce obiera się za podstawę d wielokrotną 20 m, ponieważ taśmy miernicze, którymi mierzymy odległość w terenie, mają przeważnie 20 m długości.

*b) Obliczanie wysokości przedmiotu terenowego, którego podstawa jest niedostępna* (np. szczyt górski).

Jeżeli podstawa przedmiotu terenowego nie jest dostępna, obieramy w terenie dowolny odcinek AB o długości *d* i w punktach A i B mierzymy kąty wzniesienia $\alpha$ i $\beta$ wierzchołka C oraz kąty poziome $\gamma$ i $\delta$ utworzone przez ramiona AD i BD oraz podstawę AB (rys. 36).




Rys. 36.

Punkty A i B staramy się wybrać w terenie na tym samym poziomie co podstawa przedmiotu terenowego C.

Znając d, $\gamma$ i $\delta$ możemy obliczyć z trójkąta ADB bok AD (lub BD) na podstawie twierdzenia sinusów:

$$AD = \frac{d \cdot \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)} \quad ;$$

dla h otrzymamy wtedy z trójkąta prostokątnego CDA:

$$h = AD \; . \; \mathrm{tg}\, \alpha$$

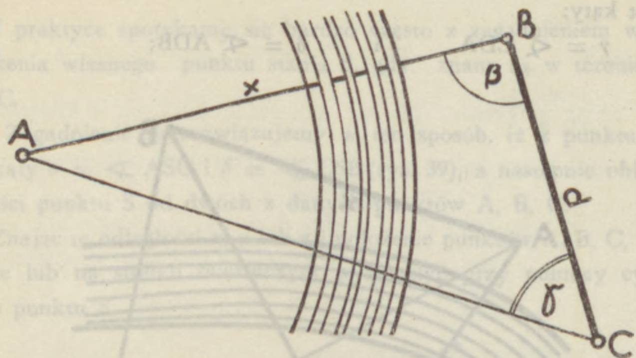
$$h = \frac{d \cdot \sin \delta \cdot \mathrm{tg}\, \alpha}{\sin (\gamma + \delta)} \, .$$

Wynik sprawdzamy obliczając h jeszcze raz z trójkąta CDB przy pomocy boku BD.

*II. Obliczanie odległości poziomej.*

a) Obliczanie odległości 2 punktów w terenie, z których jeden jest niedostępny (rys. 37).

$AB = x$




Rys. 37.

W pobliżu dostępnego punktu B obieramy dowolny dostępny punkt C, z którego widać oba punkty A i B; z punktu tego mierzymy kąt $\gamma = \sphericalangle ACB$, odmierzamy następnie odległość obranej podstawy $d = CB$, a następnie mierzymy kąt $\beta = \sphericalangle ABC$. Z trójkąta ABC otrzymujemy wtedy na podstawie twierdzenia sinusów:

$x : \sin \gamma = d : \sin [180^0 - (\beta + \gamma)]$ lub

$$x = \frac{d \cdot \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)};$$

(tzw. *metoda podstawy skośnej*).

Specjalnym wypadkiem omówionej metody jest tzw. *metoda podstawy prostopadłej*. Polega ona na tym, iż *punkt C obieramy na kierunku prostopadłym do kierunku AB*.

Kąt $\beta$ jest wtedy kątem prostym; dla obliczenia odległości $x = AB$ wystarcza zatem pomiar podstawy $d = BC$ i kąta $\gamma = \sphericalangle ACB$. W wyniku otrzymamy:

$$x = d \cdot tg\, \gamma.$$

*b) Obliczanie odległości 2 niedostępnych punktów* (tzw. *wcięcie* w przód) (rys. 38).

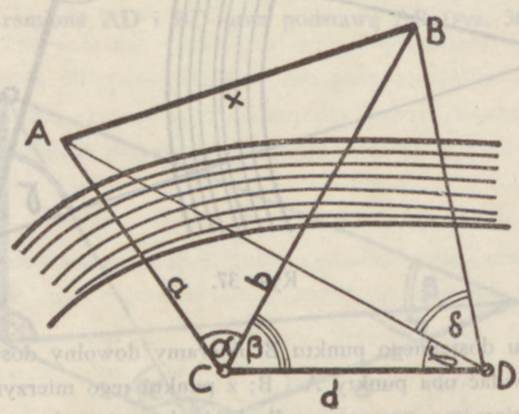
Obieramy w terenie dowolną podstawę $d = CD$*), w punkcie C

---

*) Zakładamy, że punkty terenowe A,B,C,D leżą na jednej płaszczyźnie, co w praktyce zazwyczaj ma miejsce.

mierzymy kąty $\alpha = \sphericalangle$ ACB i $\beta = \sphericalangle$ BCD, w punkcie D natomiast kąty:

$$\gamma = \sphericalangle CDA \quad \text{i} \quad \delta = \sphericalangle ADB;$$




Rys. 38.

1) Z trójkąta ACD obliczamy początkowo bok AC:

$$AC : \sin\gamma = CD : \sin\left[180^0 - (\alpha + \beta + \gamma)\right]$$

skąd

$$AC = \frac{d \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = a.$$

2) Analogicznie wyznaczamy z trójkąta BCD bok BC:

$$BC = \frac{d \cdot \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)} = b.$$

3) Znając w trójkącie ACB boki AC = a, BC = b oraz kąt ACB = $\alpha$, możemy przy pomocy wzoru Carnota obliczyć odległość x:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}$$

Z trójkąta ABC można również wyznaczyć kąty CAB lub ABC:

$$\sin\sphericalangle CAB = \frac{b \cdot \sin\alpha}{x};$$

$$\sin\sphericalangle ABC = \frac{a \cdot \sin\alpha}{x},$$

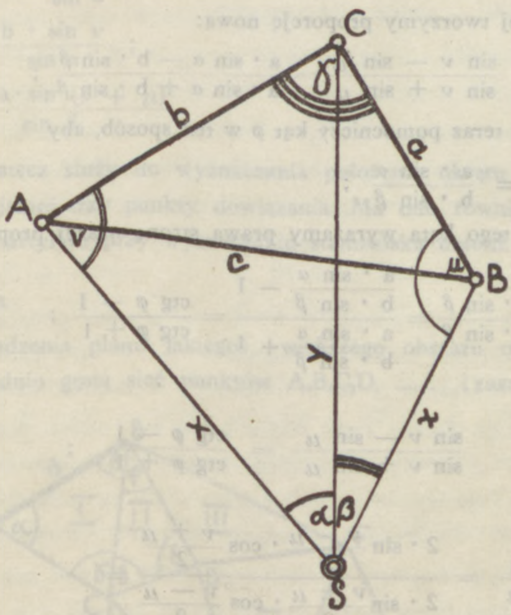
co w praktyce często jest potrzebne, szczególnie przy obliczeniach artyleryjskich (zobacz zadanie 10).

*c) Wyznaczanie położenia punktu przy pomocy trzech danych punktów w terenie* (tzw. *wcięcie wstecz).*

W praktyce spotykamy się bardzo często z zagadnieniem wyznaczenia położenia własnego punktu stania S, gdy znane są w terenie 3 punkty A,B,C.

Zagadnienie to rozwiązujemy w ten sposób, iż z punktu S mierzymy kąty $\alpha = \sphericalangle$ ASC i $\beta = \sphericalangle$ CSB (rys. 39), a następnie obliczamy odległości punktu S od dwóch z danych punktów A, B, C.

Znając te odległości x, y lub z i położenie punktów A, B, C, możemy na mapie lub na stoliku mierniczym wyznaczyć przy pomocy cyrkla położenie punktu S.




Rys. 39.

Ponieważ położenie punktów A, B, C jest nam znane, to znane jest nam również ich wzajemne położenie, tzn. *znane i dane są odcinki a, b, c i kąt γ.*

1) Wprowadzamy dwa kąty pomocnicze:

$$\sphericalangle \text{CAS} = \nu \qquad \text{i} \qquad \sphericalangle \text{CBS} = \mu;$$

ponieważ suma kątów w czworokącie wynosi 360°, zatem

$$\nu + \mu = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma) \tag{I}$$

Z trójkąta ASC wynika:

$$y = \frac{b \cdot \sin \nu}{\sin \alpha};$$

a z trójkąta CSB:

$$y = \frac{a \cdot \sin \mu}{\sin \beta};$$

zatem:

$$\frac{b \cdot \sin \nu}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot \sin \mu}{\sin \beta},$$

skąd

$$\frac{\sin \nu}{\sin \mu} = \frac{a \cdot \sin \alpha}{b \cdot \sin \beta}.$$

Z proporcji tej tworzymy proporcję nową:

$$\frac{\sin \nu - \sin \mu}{\sin \nu + \sin \mu} = \frac{a \cdot \sin \alpha - b \cdot \sin \beta}{a \cdot \sin \alpha + b \cdot \sin \beta};$$

wprowadzamy teraz pomocniczy kąt $\varphi$ w ten sposób, aby

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a \cdot \sin \alpha}{b \cdot \sin \beta}; \qquad \text{(II)}$$

przy pomocy tego kąta wyrażamy prawą stronę naszej proporcji:

$$\frac{a \cdot \sin \alpha - b \cdot \sin \beta}{a \cdot \sin \alpha + b \cdot \sin \beta} = \frac{\dfrac{a \cdot \sin \alpha}{b \cdot \sin \beta} - 1}{\dfrac{a \cdot \sin \alpha}{b \cdot \sin \beta} + 1} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi - 1}{\operatorname{ctg} \varphi + 1};$$

zatem:

$$\frac{\sin \nu - \sin \mu}{\sin \nu + \sin \mu} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi - 1}{\operatorname{ctg} \varphi + 1};$$

ale

$$\frac{\sin \nu - \sin \mu}{\sin \nu + \sin \mu} = \frac{2 \cdot \sin \dfrac{\nu - \mu}{2} \cdot \cos \dfrac{\nu + \mu}{2}}{2 \cdot \sin \dfrac{\nu + \mu}{2} \cdot \cos \dfrac{\nu - \mu}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{\nu - \mu}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\nu + \mu}{2} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\nu - \mu}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{\nu + \mu}{2}}$$

a:

$$\frac{\operatorname{ctg} \varphi - 1}{\operatorname{ctg} \varphi + 1} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} 45^0}{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} 45^0} =$$

$$= \frac{\sin (45^0 - \varphi)}{\sin \varphi \cdot \sin 45^0} : \frac{\sin (45^0 + \varphi)}{\sin \varphi \cdot \sin 45^0} =$$

$$= \sin (45^0 - \varphi) : \sin (45^0 + \varphi) =$$

$$= \frac{\cos(45^0 + \varphi)}{\sin(45^0 + \varphi)} = \operatorname{ctg}(45^0 + \varphi);$$

zatem:

$$\operatorname{tg}\frac{\nu - \mu}{2} = \operatorname{tg}\frac{\nu + \mu}{2} \cdot \operatorname{ctg}(45^0 + \varphi) \qquad \text{(III)}$$

Ponieważ $\nu + \mu$ jest znane (I), a $\varphi$ obliczyliśmy ze wzoru (II), możemy ze wzoru (III) wyznaczyć kąt $\frac{\nu - \mu}{2}$, a stąd kąt $\nu$ i $\mu$.

2) Mając obliczone już kąty $\nu$ i $\mu$ możemy z trójkąta CAS i CSB obliczyć odległości x, y, z punktu S od danych punktów:

$$x = \frac{b \cdot \sin(\alpha + \nu)}{\sin \alpha};$$

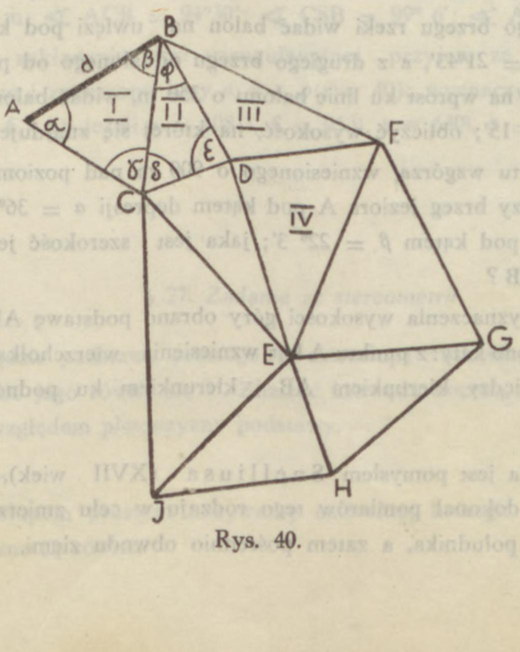
$$y = \frac{b \cdot \sin \nu}{\sin \alpha}; \qquad \text{(IV)}$$

$$z = \frac{a \cdot \sin(\beta + \mu)}{\sin \beta}.$$

Wcięcie wstecz służy do wyznaczania położenia okrętu na morzu, gdy znane są jakieś trzy punkty dowiązania. Ma ono również szerokie zastosowanie w artylerii przy wyznaczaniu stanowiska baterii.

*III. Triangulacja.*

Dla sporządzenia planu jakiegoś większego obszaru obieramy w terenie odpowiednio gęstą sieć punktów A,B,C,D, ....... i zaznaczamy je




Rys. 40.

przez wbicie pala lub chorągiewki (tzw. *punkty triangulacyjne*). Mierzymy następnie bardzo dokładnie jedną z odległości, np. AB = d, (rys. 40) i przyjmujemy ją za tzw. *podstawę lub bazę sieci triangulacyjnej.*

Następnie z każdego punktu triangulacyjnego mierzymy kąty zawarte między promieniami prowadzącymi do wszystkich innych punktów, np. kąty $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$,...... Na podstawie tych pomiarów możemy przy pomocy trygonometrii obliczyć wszystkie boki powstałych trójkątów i w ten sposób wyznaczyć kolejno położenie poszczególnych punktów C, D,..... Dla sprawdzenia pomiarów przyjmujemy za podstawę inną odległość, np. BC i powtarzamy całe postępowanie na nowo.

Całe to postępowanie nazywamy *triangulacją,*)* a zbiór występujących trójkątów — *siatką triangulacyjną.*

*Zadania:*

1) Obliczyć wysokość wieży kościelnej, oddalonej o 2,5 km, jeżeli jej wierzchołek widać pod kątem wzniesienia $2^0\ 3'$.
2) Pod jakim kątem widać wieżę o wysokości 65 m z odległości 182 m, jeżeli oko obserwatora znajduje się na wysokości 1,6 m ponad poziomem?
3) Z punktu wzniesionego o 18 m nad poziom podnóża wieży widać jej szczyt pod kątem wzniesienia $\alpha = 29^0\ 16'$ a podnóże wieży pod kątem depresji $\beta = 18^0\ 37'$. Obliczyć wysokość wieży.
4) Z jednego brzegu rzeki widać balon na uwięzi pod kątem wzniesienia $\alpha = 21^0 43'$, a z drugiego brzegu oddalonego od pierwszego w kierunku na wprost ku linie balonu o 350 m, widać balon pod kątem $\beta = 28^0\ 15'$; obliczyć wysokość, na której się znajduje balon.
5) Ze szczytu wzgórza, wzniesionego o 900 m nad poziom jeziora widać bliższy brzeg jeziora A pod kątem depresji $\alpha = 36^0 12'$, a dalszy brzeg B pod kątem $\beta = 22^0\ 3'$; jaka jest szerokość jeziora w kierunku AB ?
6) Celem wyznaczenia wysokości góry obrano podstawę AB = 4,2 km i zmierzono kąty: z punktu A kąt wzniesienia wierzchołka D: $\alpha = 7^0 25'$ i kąt między kierunkiem AB i kierunkiem ku podnóżu góry C,

---

*) Triangulacja jest pomysłem Snelliusa (XVII wiek), który po raz pierwszy dokonał pomiarów tego rodzaju w celu zmierzenia pewnej znanej części południka, a zatem pośrednio obwodu ziemi.

$\beta = 25^0 10'$; z punktu B: kąt wzniesienia wierzchołka D: $\gamma = 14^0 55'$ i kąt pomiędzy kierunkiem BA i BC: $\delta = 119^0 31'$. Obliczyć wysokość góry.

7) Z balonu na uwięzi widać po tej samej stronie dwa punkty A i B, leżące na jednym poziomie w tej samej płaszczyźnie pionowej co balon, pod kątami depresji: $\alpha = 63^0\ 1'$; $\beta = 39^0 57'$. Obliczyć wysokość, na jakiej się znajduje balon, jeżeli odległość obu punktów A i B od siebie wynosi 1,2 km.

8) Drzewo rosnące u stóp wzgórza rzuca na jego stok cień o długości 6,9 m, gdy promienie słoneczne padają pod kątem $60^0$ względem poziomu. Obliczyć wysokość drzewa, jeżeli nachylenie stoku wzgórza w kierunku cienia wynosi $\beta = 23^0\ 4'$.

9) Odległość ziemi Z od słońca S wynosi około 150,000.000 km, odległość Marsa M od słońca jest 1,5 razy większa. Jaka jest odległość Marsa od ziemi, jeżeli kąt MZS $= 143^0$?

10) Wyznaczyć odległość i kierunek strzału z baterii B do niewidocznego celu C, jeżeli z dwóch punktów obserwacyjnych $P_1$ i $P_2$, odległych od siebie o 1400 m, zmierzono kąty:

$\sphericalangle BP_1C = 1368^t$ ; $\quad \sphericalangle BP_1P_2 = 722^t$ ;

$\sphericalangle BP_2C = 1756^t$ ; $\quad \sphericalangle BP_2P_1 = 821^t$ .

11) Wyznaczyć miejsce stania S baterii przy pomocy trzech danych punktów dowiązania A, B, C, jeżeli znane są: AC $=$ 120 m, BC $=$ 1007 m; $\sphericalangle$ ACB $= 94^0 30'$; $\sphericalangle$ CSB $= 99^0\ 6'$; $\sphericalangle$ ASC $= 107^0 22'$.

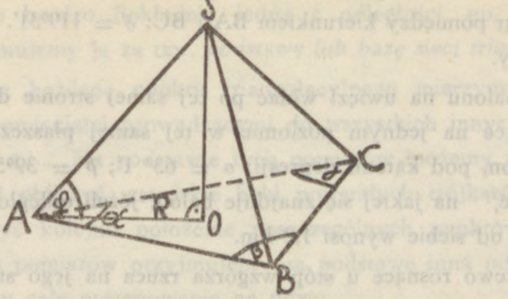
12) Przy zakładaniu sieci triangulacyjnej przyjęto za podstawę AB $=$ 2,2 km i zmierzono kąty $\alpha$, $\beta$ $\delta$, $\varphi$(rys. 40); wyznaczyć położenie punktów C i D, jeżeli $\alpha = 1081^t$, $\beta = 953^t$, $\delta = 630^t$, $\varphi = 720^t$.

## § 27. *Zadania ze stereometrii*

1) Krawędzie podstawy prostego *) ostrosłupa trójkątnego wynoszą a, b, c; objętość jego równa się *V*. Znaleźć krawędź boczną s i jej kąt nachylenia $\varphi$ względem płaszczyzny podstawy.

---

*) Ostrosłupem prostym nazywamy ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne są równe.




Rys. 41.

Ponieważ ostrosłup jest prosty, spodek wysokości O jest środkiem koła opisanego na podstawie ABC, odcinek OA = OB = OC jest zatem równy promieniowi R (rys. 41). Z trójkąta prostokątnego AOS wynika:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{R} \quad \text{i} \quad s = \frac{h}{\sin \varphi};$$

dla rozwiązania zadania należy zatem obliczyć tylko h i R.

*a) Obliczanie promienia R:*

Ze wzorów połówkowych wynika:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

gdzie $p = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$;

ponieważ $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, zatem

$$\sin \alpha = 2 \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 \cdot c^2}} = \frac{2P}{bc},$$

gdzie P = pole trójkąta ABC.

Z twierdzenia sinusów wynika:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

lub

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Podstawiając za $\sin \alpha$ uzyskane wyrażenie, otrzymamy:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \frac{2P}{bc}} = \frac{abc}{4P}$$

$$R = \frac{abc}{4P}$$

*b) Obliczanie wysokości h.*

Ze stereometrii wiadomo, iż objętość ostrosłupa równa jest

$$v = \frac{1}{3} P \cdot h;$$

ponieważ v jest dane, a P możemy obliczyć, z zależności tej wyznaczamy h:

$$h = \frac{3v}{P};$$

*c) znając R i h, obliczamy kąt φ:*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{R} = \frac{3v}{P} : \frac{a \cdot b \cdot c}{4P};$$

lub

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{12\ v}{a \cdot b \cdot c};$$

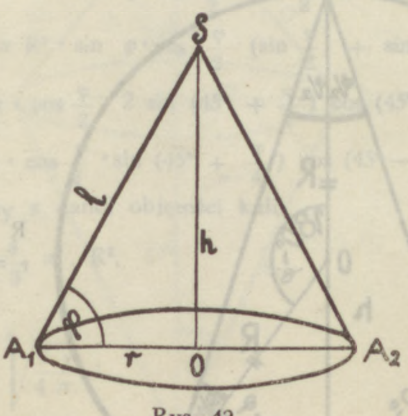
mając daną wartość tg φ, możemy obliczyć z tablic sam kąt φ, a następnie wartość sin φ, potrzebną do obliczenia długości krawędzi bocznej s:

$$s = \frac{h}{\sin \varphi} = \frac{3\ v}{P \cdot \sin \varphi}$$

lub

$$s = \frac{3\ v}{\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)} \cdot \sin \varphi}$$

2) Obliczyć powierzchnię całkowitą $P_c$ i objętość V stożka prostego, którego tworząca $l$ nachylona jest względem płaszczyzny podstawy pod kątym φ (rys 42).




Rys. 42.

a) Jak wiadomo

$$P_c = \pi\, r\, (r + l);$$

z trójkąta prostokątnego $A_1OS$ wynika:

$$r = l \cdot \cos \varphi ,$$

zatem

$$P_c = \pi l \cdot \cos \varphi \ (l \cdot \cos \varphi + l)$$

$$P_c = \pi l^2 \cdot \cos \varphi \ (\cos \varphi + 1)$$

$$P_c = \pi l^2 \cdot \cos \varphi \ (\cos \varphi + \cos 0^0)$$

$$P_c = \pi l^2 \cdot \cos \varphi \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} . \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$P_c = 2 \pi l^2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} ;$$

b)
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 . h$$

$$h = l \cdot \sin \varphi$$

zatem

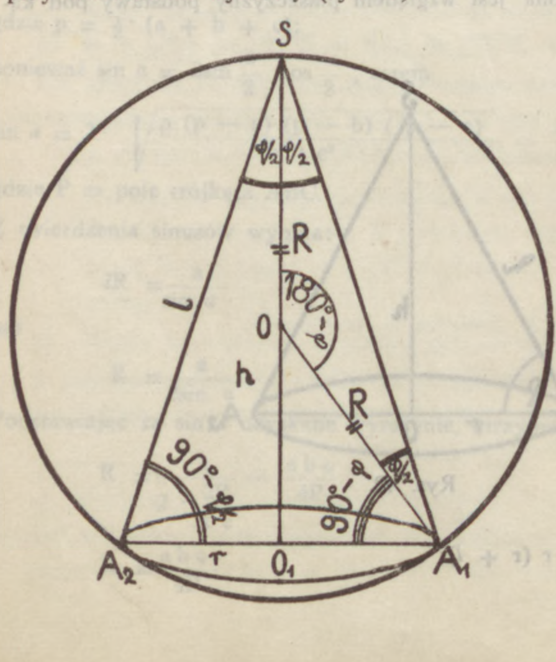
$$V = \frac{1}{3} l \cdot \sin \varphi \cdot \pi \cdot l^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$V = \frac{l^3}{3} . \pi \cdot (\sin \varphi \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \varphi$$

$$V = \frac{\pi}{6} l^3 \cdot (2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi) \cdot \cos$$

$$V = \frac{\pi}{6} l^3 \cdot \sin 2 \varphi \cdot \cos \varphi .$$

3) Stożek prosty wpisano w kulę o objętości v. Znaleźć powierzchnię całkowitą $P_c$ i objętość V stożka, jeżeli w przecięciu osiowym stożka kąt przy wierzchołku wynosi $\varphi$ (rys. 43):




R = promień kuli
r = promień podstawy stożka.

Rys. 43.

Z rys. 43 wynika:

1) $\sphericalangle A_1SO = \sphericalangle A_2SO = \frac{\varphi}{2}$ ; zatem

$OS = OA_1 = R$ $\sphericalangle SA_1O = \frac{\varphi}{2}$

II) $\sphericalangle OA_1O_1 = (90^0 - \frac{\varphi}{2}) - \frac{\varphi}{2} = 90^0 - \varphi$

a) *obliczenie* $P_c$

$P_c = \pi \cdot r \cdot (r + l)$.

Wyrażamy $P_c$ przy pomocy R:

$$r = R \cdot \cos (90^0 - \varphi) = R \cdot \sin \varphi$$

$$l = \frac{R \cdot \sin (180^0 - \varphi)}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{R \cdot \sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{2R \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} = 2R \cdot \cos \frac{\varphi}{2},$$

zatem

$$P_c = \pi \,.\, R \,.\, \sin \varphi \,(R \,.\, \sin \varphi + 2R \,.\, \cos \frac{\varphi}{2})$$

$$P_c = \pi \,.\, R^2 \cdot \sin \varphi \,.\, (\sin \varphi + 2 \cos \frac{\varphi}{2})$$

$$P_c = \pi \,.\, R^2 \cdot \sin \varphi \,.\, (2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2 \cos \frac{\varphi}{2})$$

$$P_c = 2 \pi R^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} (\sin \frac{\varphi}{2} + 1)$$

$$P_c = 2 \pi R^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} (\sin \frac{\varphi}{2} + \sin 90^0)$$

$$P_c = 2 \pi R^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \,.\, 2 \sin (45^0 + \frac{\varphi}{4}) \cos (45^0 - \frac{\varphi}{4})$$

$$P_c = 4 \pi R^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin (45^0 + \frac{\varphi}{4}) \cos (45^0 - \frac{\varphi}{4})$$

Promień R obliczamy z danej objętości kuli:

$$v = \frac{4}{3} \pi \,.\, R^3,$$

skąd

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 v}{4 \pi}} ;$$

zatem:

$$P_c = \sqrt[3]{36 \pi v^2} \,.\, \sin \varphi \,.\, \cos \frac{\varphi}{2} \,.\, \sin (45^0 + \frac{\varphi}{4}) \cos (45^0 - \frac{\varphi}{4})$$

b) Obliczanie objętości stożka $V_s$

$$V_{st} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$h = r \cdot \mathrm{tg}\,(90^0 - \frac{\varphi}{2}) = r \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2} = R \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}$$

$$h = 2R \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 2R \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

zatem

$$V_{st} = \frac{\pi}{3} R^2 \sin^2\varphi \cdot 2R \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

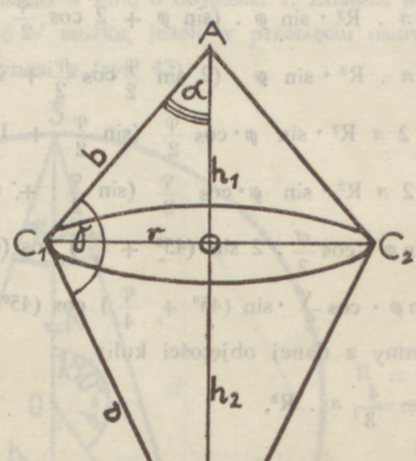
$$V_{st} = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2},$$

ale: $R^3 = \frac{3v}{4\pi}$,

zatem

$$V_{st} = \frac{V}{2} \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

4) Trójkąt o bokach a, b i kącie $\gamma$ obraca się dokoła trzeciego boku c; obliczyć objętość powstałej bryły obrotowej.
($a = 12$ cm; $b = 16$ cm; $\gamma = 80^0$):




Rys. 44

W wyniku obrotu otrzymamy 2 stożki oparte na wspólnej podstawie o promieniu r, których wierzchołki znajdują się po przeciwnych stronach podstawy (rys. 44).

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 (h_1 + h_2)$$

Przy pomocy wzoru tangensów obliczamy początkowo kąty $\alpha$ i $\beta$:

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{b - a}{b + a} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} .$$

Znając $\alpha$ i $\beta$ możemy obliczyć $h_1$ i $h_2$:

$h_1 = r \cdot \operatorname{tg} (90^0 - \alpha) = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha ;$

$h_2 = r \cdot \operatorname{tg} (90^0 - \beta) = r \cdot \operatorname{ctg} \beta ;$

ponieważ jednak

$$r = b \cdot \sin \alpha ,$$

zatem

$$h_1 = b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha ;$$
$$h_2 = b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta ;$$

stąd:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot b^2 \cdot \sin^2 \alpha \, (b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta)$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot b^3 \cdot \sin^3 \alpha \, (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot b^3 \sin^3 \alpha \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$V = \frac{\pi \cdot b^3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin (\alpha + \beta)}{3 \sin \beta} .$$

*Obliczenie:*

$a = 12$ cm ; $b = 16$ cm ; $\gamma = 80^0$ ;

$\alpha + \beta = 100^0$ ;

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{4}{28} \cdot \operatorname{ctg} 40^0$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\operatorname{ctg} 40^0}{7}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \lg \operatorname{ctg} 40^0 - \lg 7$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \left\{ \begin{array}{r} 0{,}0762 \\ -\ 0{,}8451 \\ \hline \overline{1}{,}2311 \end{array} \right.$$

skąd

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = 9^0 40'$$

zatem

$$\begin{array}{r} \beta + \alpha = 100^0 \\ \beta - \alpha = 19^0 20' \\ \hline 2\,\beta = 119^0 20' \\ 2\,\alpha = 80^0 40' \end{array}$$

lub

$$\alpha = 40^0 20' \;;\quad \beta = 59^0 40' \;;$$

$$\lg V = \lg \pi + 3 \lg b + 2 \lg \sin \alpha + \lg \sin (\alpha + \beta) -$$
$$- \lg 3 - \lg \sin \beta$$

$$\lg V = \left\{ \begin{array}{r} 0{,}4971 \\ 3{,}6123 \\ \bar{1}{,}6222 \\ \bar{1}{,}9934 \\ \hline 3{,}7250 \\ -\ 0{,}4771 \\ \hline 3{,}2479 \\ -\bar{1}{,}9361 \\ \hline 3{,}3118 \end{array} \right.$$

skąd

$$V = 2050 \text{ cm}^3.$$

*Zadania:*

1) Krawędzie boczne foremnego ostrosłupa dziesięciobocznego są równe $s$ i nachylone do podstawy pod kątem $\varphi$; znaleźć objętość tego ostrosłupa! ($s = 18$ cm; $\varphi = 35^0$).
2) Obliczyć objętość i powierzchnię całkowitą foremnego ostrosłupa pięciokątnego, jeżeli wysokość jest równa $h$, a krawędź boczna nachylona jest względem płaszczyzny podstawy pod kątem $\varphi$. ($h = 42$ cm; $\varphi = 64^0$).
3) Kąty podstawy trójkątnego graniastosłupa pochyłego wynoszą $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, objętość bryły wynosi $V$; znaleźć objętość walca opisanego na tym graniastosłupie! ($\alpha = 45^0$, $\beta = 33^0$, $V = 100$ cm$^3$).
4) Obliczyć pole powierzchni całkowitej i objętość stożka prostego, jeżeli dane są promień podstawy $r$ i kąt przy wierzchołku przekroju osiowego stożka $\alpha$. ($r = 25$ cm; $\alpha = 31^0$).

5) Na kole o promieniu $r$ jako na podstawie zbudowano po obu stronach proste stożki. Obliczyć pole powierzchni i objętość otrzymanej bryły, jeżeli tworzące obu stożków nachylone są względem podstawy pod kątem $\alpha$ wzgl. $\beta$ ($r = 12$ cm; $\alpha = 25^0$; $\beta = 40^0$).

6) Trójkąt o boku $b$ i kątach $\alpha$ i $\beta$ obraca się dokoła boku b; obliczyć pole powierzchni i objętość powstałej bryły obrotowej ($b = 10$ cm; $\alpha = 34^0$; $\beta = 22^0$).

7) Trójkąt o boku b i kątach $\alpha$ i $\beta$ obraca się dokoła osi przechodzącej przez wierzchołek trójkąta B i równoległej do boku b. Obliczyć objętość otrzymanej bryły obrotowej ($b = 10$ cm; $\alpha = 34^0$; $\beta = 22^0$).

8) Romb o boku $a$ i kącie ostrym $\alpha$ obraca się dokoła osi prostopadłej do podstawy, przechodzącej przez wierzchołek kąta ostrego; obliczyć objętość bryły obrotowej ($a = 8$ cm; $\alpha = 60^0$).

## § 28. *Równania trygonometryczne*

Równaniem trygonometrycznym nazywamy takie równanie, w którym niewiadoma występuje jako argument (kąt) funkcyj trygonometrycznych. Np.

$$1)\ 3 \sin x - 4 \cos x = 1\ ;$$
$$2)\ \sin 2x + \sin x = \operatorname{ctg} 4x\ .$$

Jeżeli w równaniu występuje tylko jeden niewiadomy kąt (przykład pierwszy), należy równanie to przekształcić przy pomocy zależności zasadniczych (vide § 6) w ten sposób, aby zawierało ono tylko jedną jakąś funkcję trygonometryczną nieznanego kąta.

Jeżeli natomiast równanie zawiera kilka niewiadomych (przykład drugi), należy uprzednio przekształcić równanie przy pomocy odpowiednich wzorów w ten sposób, aby pozostał tylko jeden niewiadomy kąt, a następnie sprowadzić je do postaci, w której występowałaby tylko jedna funkcja tego kąta.

Poniżej podane przykłady wyjaśniają bliżej omówione zasady rozwiązywania równań trygonometrycznych.

1. Rozwiązać równanie $2 \cos x = \operatorname{ctg} x$.

Jak wiadomo $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$,

a z twierdzenia Pitagorasa $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$,

zatem

$$2 \cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}};$$

obie strony tego równania podnosimy do kwadratu

$$4 \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

i uwalniamy się od mianownika

$$4 \cos^2 x - 4 \cos^4 x = \cos^2 x,$$

a następnie sprowadzamy równanie do zera i upraszczamy

$$4 \cos^4 x - 3 \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x (4 \cos^2 x - 3) = 0;$$

zatem: albo $\cos^2 x = 0$, albo $4 \cos^2 x - 3 = 0$.

I. $\cos^2 x = 0$

$\cos x = 0$

$x_0 = 90^0$;

Zgodnie z wywodami § 16 otrzymamy wszystkie kąty spełniające powyższe równanie stosując wzór 21:

$$x = n\, 360^0 \mp x_0$$

lub w naszym wypadku

$$x = n\, 360^0 \mp 90^0$$

$$x = 4n\, 90^0 \mp 90^0$$

$$x = (4n \mp 1)\, 90^0.$$

II. $4 \cos^2 x - 3 = 0$

$4 \cos^2 x = 3$

$\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha$) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\beta$) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

| | |
|---|---|
| $x_0 = 30^0$ | $x_0 = 150^0$ |
| $x = n\, 360^0 \mp 30^0$ | $x = n\, 360^0 \mp 150^0$ |
| $x = (12n \mp 1)\, 30^0$; | $x = (12n \mp 5)\, 30^0$. |

2. Rozwiązać równanie $a \cdot \sin(\alpha + x) = b \cdot \cos(\beta + x)$.

Stosujemy wzory na funkcje sumy dwóch kątów:

$$a [\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x] = b [\cos \beta \cos x - \sin \beta \sin x];$$

przemnażamy i porządkujemy

$\sin x\,(a\cos\alpha + b\sin\beta) = \cos x\,(b\cos\beta - a\sin\alpha)$;

obie strony równania dzielimy przez cos x :

$\operatorname{tg} x\,(a\cos\alpha + b\sin\beta) = b\cos\beta - a\sin\alpha$

skąd

$$\operatorname{tg} x = \frac{b\cos\beta - a\sin\alpha}{a\cos\alpha + b\sin\beta};$$

z równania tego wyznaczamy główny pierwiastek $x_0$ i zgodnie ze wzorem 22 otrzymujemy jako rozwiązanie

$$x = n\,180^\circ + x_0.$$

3. Rozwiązać równanie $a\sin x + b\cos x = c$.

Wyznaczamy cos x przy pomocy sin x

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x},$$

zatem

$$a\sin x + b\sqrt{1-\sin^2 x} = c;$$

izolujemy pierwiastek i podnosimy obie strony równania do kwadratu

$$b\sqrt{1-\sin^2 x} = c - a\sin x$$

$$b^2(1-\sin^2 x) = c^2 - 2ac\sin x + a^2\sin^2 x$$

$$-b^2 + b^2\sin^2 x + c^2 - 2ac\sin x + a^2\sin^2 x = 0$$

$$(a^2+b^2)\sin^2 x - 2ac\sin x + (c^2-b^2) = 0;$$

z równania tego wyznaczamy sin x :

$$\sin x = \frac{ac \mp b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2};$$

w zależności od znaku wyróżnika $\triangle$ nie mamy żadnego rozwiązania względnie mamy jedno podwójne lub też dwa różne.*)

Równanie $a\sin x + b\cos x = c$ można rozwiązać w sposób prostszy przez wprowadzenie tzw. *kąta pomocniczego:*

$$a\sin x + b\cos x = c;$$

obie strony równania dzielimy przez a :

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a};$$

wprowadzamy kąt pomocniczy $\varphi$, którego tangens ma być równy ułamkowi $\frac{b}{a}$ :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

*) Jeżeli $a^2 + b^2 < c^2$ nie ma rozwiązania; jeżeli $a^2 + b^2 = c^2$ mamy jedno rozwiązanie; jeżeli $a^2 + b^2 > c^2$ otrzymujemy dwa rozwiązania.

Przy znanych wartościach *a* i *b* kąt $\varphi$ można łatwo obliczyć. Otrzymamy wówczas

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a},$$

ale $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$,

zatem $$\sin x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos x = \frac{c}{a}$$

lub $$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cos \varphi$$

skąd

$$\sin (\varphi + x) = \frac{c}{a} \cos \varphi .$$

Ponieważ kąt $\varphi$ jest znany, znany jest również jego cosinus; z ostatniego równania można zatem wyznaczyć wartość kąta $(\varphi + x_0) = \nu_0$; otrzymamy wówczas

$$\varphi + x = n\, 180^0 + (-1)^n \cdot \nu_0$$

i

$$x = n\, 180^0 + (-1)^n \cdot \nu_0 - \varphi$$

4. Rozwiązać równanie $\sin 2x + 2 \sin x = 0$ .

Stosujemy wzór na $\sin 2x$ :

$$2 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin x = 0$$
$$\sin x (\cos x + 1) = 0 ;$$

I. $\sin x = 0$

$x_0 = 0^0$

$x = n\, 180^0$.

II. $\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

$x_0 = 180^0$

$x = n\, 360^0 \mp 180^0 = 180^0 (2n \mp 1);$

ponieważ dla $n = 1, 2, 3,$ itd. wyrażenie $(2n \mp 1)$ przyjmuje również kolejne wartości 1, 2, 3 itd., otrzymujemy na x ten sam wynik co w wypadku pierwszym:

$$x = n\, 180^0.$$

5. Rozwiązać równanie $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = -2$ .

Stosujemy wzór na $\operatorname{tg} 2x$:

$$\frac{\left(\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2\,x}\right)}{\mathrm{tg}\,x}+\frac{\mathrm{tg}\,x}{\left(\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2\,x}\right)}=-2\,;$$

upraszczamy i otrzymujemy

$$\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\,x}+\frac{1-\mathrm{tg}^2\,x}{2}=-2\,;$$

wprowadzamy zmienną pomocniczą z :

$$z=\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\,x}$$

i otrzymujemy równanie

$$z+\frac{1}{z}=-2$$

lub

$$z^2+2z+1=0$$

skąd

$$\Delta=4-4=0 \text{ i } z=\frac{-2}{2}=-1\,;$$

podstawiamy

$$-1=\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\,x}$$

lub

$$-1+\mathrm{tg}^2\,x=2$$

skąd

$$\mathrm{tg}^2 x=+3\,;$$

$\alpha$) $\mathrm{tg}\,x=\sqrt{3}$ ;

$x_0=60^0$

$x=n\,180^0+60^0$

$x=(3n+1)\,60^0$ ;

$\beta$) $\mathrm{tg}\,x=-\sqrt{3}$ ;

$x_0=120^0$

$x=n\,180^0+120^0$

$x=(3n+2)\,60^0$ .

*Zadania :*

Rozwiązać następujące równania trygonometryczne:

1. $2\sin x=\mathrm{tg}\,x$ .
2. $2\cos x=3\,\mathrm{tg}\,x$ .
3. $\sin x=\cos^2 x$ .
4. $\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{tg}\,x=4\sqrt{2}$ .
5. $\sin x+\mathrm{tg}\,x=1+\cos x$ .

6. $2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 5$ .

7. $2 \sin x + 3 \cos x = 1$.

8. $(\cos x - \sin x)^2 = \sin 2x$ .

9. $\cos 2x + 3 \sin x = 2$.

10. $2 \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$ .

11. $1 + \cos x = \sqrt{3} \cos \frac{x}{2}$ .

12. $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \frac{5}{4} \cos^2 x = 0$.

## § 29. *Szkic historyczny*

Powstanie swoje zawdzięcza trygonometria astronomii, a w szczególności konieczności rozwiązywania pewnych trójkątów płaskich i sferycznych. Przypuszczalnym jej twórcą był astronom *Hipparch z Niki*, który żył w połowie II wieku przed narodzeniem Chrystusa. On pierwszy używał długości cięciw koła dla pomiaru kąta. Menelaus z I wieku przed Chr. używał już cięciw dla rozwiązywania trójkątów płaskich i sferycznych.

Najstarsze tablice cięciw, jakie zachowały się do naszych czasów, znajdują się w słynnym dziele „Almagest" aleksandryjskiego astronoma Ptolomeusza z II wieku po Chr. Tablice te zawierają długości cięciw, wyrażone w sześćdziesiątych częściach promienia, odpowiadające kątom od $0^0$ do $180^0$ w odstępach co 30'. W Almageście znajdują się również obliczenia dotyczące rozwiązywania trójkątów.

W tym samym czasie uczeni hinduscy używali już dla obliczania kąta *połowy cięciwy podwójnego łuku tego kąta*, czyli sinusa. Z Indii przeszedł ten sposób obliczania kąta do Arabii, gdzie z biegiem czasu zaczęto używać również tangensa i cotangensa, a nawet sporządzono specjalne tablice wartości tych funkcyj.

W pierwszym stadium swojego rozwoju była trygonometria tylko „środkiem do celu", ponieważ służyła wyłącznie celom astronomii. Faktycznym twórcą trygonometrii jako samodzielnej nauki był uczony perski Nasir Eddin Tusi z XIII wieku po Chr. W dziele swoim o całkowitym czworokącie podaje on już pełną teorię funkcyj trygonometrycznych, łącznie z *twierdzeniem sinusów*, którego jest odkrywcą.

Dalszy swój rozwój zawdzięcza trygonometria matematykom XV i XVI stulecia. Zasługi tych uczonych polegały przede wszystkim na znacznym udoskonaleniu tablic i uproszczeniu ich przez wprowadzenie podziału dziesiętnego. Najlepsze tablice z tego okresu pochodzą od matematyka *Jerzego Joachima*, znanego pod imieniem *Rhäticus*. Ulepszono również sposoby rozwiązywania trójkątów przez odkrycie zasadniczych twierdzeń o trójkątach ukośnokątnych. W końcu XVI wieku *Fink* ogłasza w swojej geometrii *twierdzenie tangensów*, a w parę lat później *Vieta twierdzenie cosinusów*.

Wprowadzenie logarytmów w początku XVII wieku przez Szkota N a p i e r a i Anglika B r i g g s a ułatwiło znacznie rozwiązywanie trójkątów. Przyczyniło się ono również do dalszego rozwoju nauki o kącie (tzw. *goniometrii;* z greckiego: gony = kolano, kąt), przez sprowadzanie wyrażeń trygonometrycznych do postaci logarytmicznej.

Oznaczanie funkcyj trygonometrycznych symbolami sin, cos, tg i ctg pochodzi od szwajcarskiego matematyka *E u l e r a* (XVIII wiek). Do jego czasu funkcje te oznaczano specjalnymi literami.

Nazwa funkcji sinus pochodzi zapewne od skrótu s. *ins.*, co miało oznaczać semissis inscriptae = połowa wpisanej cięciwy. Określenie to spotyka się już w tłumaczeniach pism arabskich z XIII wieku. Polska nazwa tej funkcji jest *wstawa.* Analogicznie cosinus pochodzi od skrótu *co. sinus*, co miało oznaczać complementi sinus. Polska nazwa tej funkcji jest *dostawa.* Nazwa tangens oznacza *styczną*, a cotangens = complementi tangens — *dotyczną.*

Oprócz wymienionych powyżej 4 funkcyj trygonometrycznych istnieją jeszcze dwie: secans (po polsku sieczna) równy odwrotności cosinusa oraz cosecans (dosieczna) równy odwrotności sinusa. Obie te funkcje nie posiadają obecnie żadnego praktycznego zastosowania.

## SPIS ROZDZIAŁÓW

Str.

*Rozdział I.*

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.



*Rozdział II.*

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.



*Rozdział III.*

Zależności między funkcjami trygonometrycznymi różnych kątów.

## Zestawienie wzorów

*I. Wzory zasadnicze*

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ; $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ;

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$ ; $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ ;

*II. Wzory redukcyjne*

$f(\alpha) = \operatorname{cof} (90^0 - \alpha)$ ;

| kąt \ funkcja | sin | cos | tg | ctg |
|---|---|---|---|---|
| $90^0 + \alpha$ | $+ \cos \alpha$ | $- \sin \alpha$ | $- \operatorname{ctg} \alpha$ | $- \operatorname{tg} \alpha$ |
| $180^0 - \alpha$ | $+ \sin \alpha$ | $- \cos \alpha$ | $- \operatorname{tg} \alpha$ | $- \operatorname{ctg} \alpha$ |
| $180^0 + \alpha$ | $- \sin \alpha$ | $- \cos \alpha$ | $+ \operatorname{tg} \alpha$ | $+ \operatorname{ctg} \alpha$ |
| $270^0 - \alpha$ | $- \cos \alpha$ | $- \sin \alpha$ | $+ \operatorname{ctg} \alpha$ | $+ \operatorname{tg} \alpha$ |
| $270^0 + \alpha$ | $- \cos \alpha$ | $+ \sin \alpha$ | $- \operatorname{ctg} \alpha$ | $- \operatorname{tg} \alpha$ |
| $360^0 - \alpha$ | $- \sin \alpha$ | $+ \cos \alpha$ | $- \operatorname{tg} \alpha$ | $- \operatorname{ctg} \alpha$ |

*III. Funkcje sumy i różnicy kątów*

$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ ;

$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$ ;

$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ;

$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ;

$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ; $\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ;

*IV. Funkcje kątów podwójnych*

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ;

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ;

*V. Funkcje kątów połówkowych*

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ ;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\ ;$$

*VI. Suma i różnica funkcyj*

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ ;$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;$$

*VII. Twierdzenie sinusów*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\ ;$$

*VIII. Twierdzenie cosinusów*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha\ ;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta\ ;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma\ ;$$

*IX. Wzory tangensów*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{a-c}{a+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{a-c}{a+c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\ .$$

*X. Wzory połówkowe*

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p - b) \cdot (p - c)}{p\,(p - a)}} \;;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\,(p - c)}{p\,(p - b)}} \;;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\,(p - b)}{p\,(p - c)}} \;;$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\,(p - c)}{b\,c}} \;;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{b\,c}} \;;$$

gdzie p równe jest połowie obwodu trójkąta.

12