Jahresbericht

über das

Königl. Progymnasium in Dt. Crone

vom

Herbst 1842 bis zum Herbst 1843,

womit

zu der am 21sten und 22sten August abzuhaltenden

öffentlichen Prüfung der Schüler

ergebenst einladet

der Director der Anstalt

Fr. Heinr. Malkowsky.

Inhalt: eine Abhandlung über die analytischen Facultäten, von dem Schulamts-Candidaten Carl Weierstraß, und Schulnachrichten von dem Director.

Deutsch-Crone,
gedruckt bei P. Garms.

Bemerkungen über die analytischen Facultäten.

§. 1.

Die analytischen Facultäten sind, nach Vandermonde und Kramp, in neuerer Zeit vorzüglich von Crelle*) nach eigenthümlicher Methode bearbeitet worden. Crelle definirt die analytische Facultät als eine von 3 Elementen, der Basis u, der Differenz x und dem Exponenten y abhängige und durch $(u, +x)^y$ bezeichnete Function, deren Grundeigenschaften in den Gleichungen

$$1.\quad (u, +x)^{y+k} = (u, +x)^{y} (u + yx, +x)^{k}$$

$$2.\quad (ku, +kx)^{y} = k^{y} (u, +x)^{y}$$

$$3.\quad (u, +x)^{1} = u$$

ausgesprochen werden. Aus diesen Gleichungen werden alle übrigen Eigenschaften der Facultät, so wie auch Formeln zur Berechnung ihrer Werthe für beliebige Werthe von u, x, y auf einfache Weise abgeleitet.

Diese Behandlungsart der Facultäten hat vielfach Beifall gefunden, wie denn namentlich Grunert in dem Artikel „Facultät" der Supplemente zu dem Klügel'schen Wörterbuche ihr ganz folgt. Gegen sie aber finden sich in den Schriften Ohm's einige gelegentliche Aeußerungen, welche ich, obwohl sie größtentheils aus Mißverständnissen hervorgegangen zu sein scheinen, hier anzuführen nicht umhin kann, weil sie mir Veranlassung zu einer genaueren Untersuchung der bisherigen Facultäten-Theorien gegeben haben, als deren Ergebniß ich allerdings die Ueberzeugung aussprechen muß, daß sich auch in der Crelle'schen Darstellung, wenn auch nicht in dem Sinne Ohm's, noch einige Schwierigkeiten finden, die aufgehellt und beseitigt werden müssen.

---

*) Theorie der analytischen Facultäten, 1824.
Mémoire sur la théorie des puissances, de fonctions angulaires et des facultés analytiques, 1831. (Ursprünglich im 7ten Bande des Journals für Mathematik erschienen). Diese Abhandlung wird im Folgenden durch Th. d. f. bezeichnet.

Ohm stellt (System der Mathematik, Thl. 2, §. 340) für Facultäten, deren Exponenten ganze Zahlen sind, fünf Gleichungen auf, von denen die erste mit Anwendung der Crelle'schen Bezeichnungsweise

$$4.\quad (u, + x)^{y} = (u + yx - x, - x)^{y}$$

heißt, die zweite und die fünfte mit den obigen Gleichungen (1, 2) übereinkommen, die dritte und die vierte aber aus der zweiten folgen, und fügt dann folgende Note hinzu:

„Es ist nicht möglich, einen Begriff der gebrochenen Factorielle (Facultät) hinzustellen, wofür alle fünf Nummern des §. 340 noch geltend bleiben. Und namentlich ist der Begriff der gebrochenen Factoriellen, wie solche in den Anwendungen von Vandermonde und Kramp gebraucht werden, von der Art, daß für diese gebrochenen Factoriellen nur die Formeln (Nr. 1 u. 2) [d. h. der hiesigen 1, 4], also natürlich auch die mit (Nr. 2) [hier 1] zugleich gegebenen (Nr. 3 und 4 des §. 340) noch stattfinden, nicht aber die Formel (Nr. 5) [hier (2)]. Wenn daher zuerst von Kramp stillschweigend, dann von Crelle ausdrücklich die allgemeine Factorielle als ein Ding bezeichnet wird, welches die in den (Nrn. 1, 2, 5 des §. 340) [in den Gleichungen 1, 2, 4] ausgesprochenen Eigenschaften hat, so rächt sich dies unlogische Verfahren sogleich dadurch, daß bei Kramp (**Réfractions astronomiques et terrestres, 1799**) sehr bedeutende, von ihm selbst zugestandene und ihm unbegreifliche Widersprüche hervorgehen, während bei Crelle („Theorie der analytischen Facultäten, 1824") die wenigsten Formeln wahr sind, ohne daß solches von dem Verfasser bemerkt wird, weil sich derselbe nicht, wie Kramp gethan, auf specielle Untersuchungen einläßt, sondern nur allgemeine Formeln auf allgemeine Formeln gehäuft hat, welche daher als solche größtentheils für todtgeborene gehalten werden müssen u. s. w."

In ähnlichem Sinne spricht sich Ohm noch an andern Stellen aus, namentlich in seiner analytischen Geometrie in einer Anmerkung, in der es heißt, daß die Definition der Facultät, wie sie Crelle gegeben, ihm selbst unbewußt einen Widerspruch aufgenommen habe.

Diese Einwendungen Ohm's, so weit sie die Crelle'sche Theorie betreffen, lassen sich jedoch leicht beseitigen. Denn die obige Gleichung (4), welche für gebrochene Werthe von y mit den übrigen (1, 2, 3) allerdings nicht vereinbar ist, wird von Crelle keineswegs, wie Ohm es aussagt, zur Definition der Facultät mit benutzt. Daß es aber eine Function giebt, welche den Gleichungen (1, 2, 3) genügt, ist nicht schwer nachzuweisen.

Denn setzt man mit Gauß *)

$$5.\quad \Pi(u) = \frac{1}{u+1} \cdot \frac{2^{u}}{1^{u}} \frac{2}{u+2} \cdot \frac{3^{u}}{2^{u}} \frac{3}{u+3} \cdot \ldots \frac{n^{u}}{(n-1)^{u}} \frac{n}{u+n} \cdots \infty,$$

*) Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\cdot\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$ Comment. recent. Soc. Gotting., Vol. II.

so ist

$$6.\quad (u, + x)^{y} = x^{y}\,\frac{\Pi\left(\frac{u}{x} - 1 + y\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x} - 1\right)}$$

eine Function, welche die in den genannten Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften hat. (S. den folgenden §.)

Größeres Gewicht aber hat eine andere Angabe Ohm's. Nachdem er (Syst. d. Mathem., Thl. 2, S. 89) den sogenannten binomischen Lehrsatz für ganze Facultäten, nämlich (nach der hier gebrauchten Bezeichnung) die Formel

$$7.\quad (u+k,+x)^{y} = (u,+x)^{y} + y_1\,(u,+x)^{y-1}\,(k,+x)^{1} + y_2\,(u,+x)^{y-2}\,(k,+x)^{2} + \cdots\cdots$$

bewiesen hat, fügt er hinzu, man würde sich sehr irren, wenn man mit Kramp, Crelle und so vielen Andern annehmen wollte, daß dieser binomische Lehrsatz für Facultäten auch dann noch gelten müsse, wenn y eine gebrochene Zahl, oder gar, wenn y allgemein sei. Im Gegentheil finde man, daß, wenn y eine ganze oder gebrochene Zahl sei, und wenn im letztern Falle die Reihe convergire, dann

$$8.\,(u,+1)^{y} + y_1\,(u,+1)^{y-1}\,(k,+1)^{1} + y_2\,(u,+1)^{y-2}\,(k,+1)^{2} + \cdots = \frac{\sin u\pi\,\sin(u+k+y)\pi}{\sin(u+y)\pi\,\sin(k+y)\pi}.(u+k,+1)^{y}$$

sein müsse.

Dieses Resultat fand ich bei näherer Prüfung vollkommen bestätigt, aber, was nach den angeführten Aeußerungen Ohm's, wonach derselbe unter einer Facultät etwas ganz anderes zu verstehen scheint als Crelle, auffallen muß, grade unter der Voraussetzung, daß man für den Ausdruck der Facultät $(u, + 1)^{y}$ die Formel $1^{y}.\,\frac{\Pi(u + y - 1)}{\Pi(u - 1)}$ nehme, welche der Crelle'schen Definition entspricht.

Somit erschien mir die Facultäten-Theorie Crelle's gegen die Behauptung Ohm's, daß schon in den Grundgleichungen derselben ein Widerspruch liege, völlig gerechtfertigt, und nur insofern einer Berichtigung bedürftig, als an die Stelle der Formel (7) die Gleichung (8) treten müßte. Aber bei weiterer Untersuchung überzeugte ich mich gleichwohl, daß sie, auch nach der neuen Bearbeitung, die sie in dem angeführten Mémoire erfahren, noch an verschiedenen andern, wie es mir scheint, nicht unwesentlichen Mängeln leiden. Von dem hochverehrten Verfasser der eben genannten Schrift, dem ich mündlich meine Bemerkungen mittheilte, zur Veröffentlichung derselben aufgefordert, glaube ich die gegenwärtige Gelegenheit dazu benutzen zu dürfen.

§. 2.

Die Definition der Facultät durch die drei Gleichungen (1, 2, 3) ist nach dem Vorhergehenden in so weit zulässig, als sie mit einander nicht im Widerspruche stehen. Aber es läßt sich zeigen, daß sie allein zur Bestimmung der Facultät gar nicht hinreichen, sondern daß es vielmehr unendlich viele, ganz von einander verschiedene Functionen giebt, welche die in ihnen ausgesprochenen Eigenschaften besitzen. Aus den Gleichungen (1, 2) ergiebt sich nämlich (**Th. d. f., 55.**)

$$9.\quad (u,+x)^{y} = x^{y}\,\frac{(1,+1)^{\frac{u}{x}+y-1}}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}},$$

oder wenn man $(1,+1)^{y}$ durch $F(y)$ bezeichnet,

$$10.\quad (u,+x)^{y} = x^{y}\,\frac{F(\frac{u}{x}+y-1)}{F(\frac{u}{x}-1)}.$$

Aber in dieser Formel kann, wenn $(u,+x)^{y}$ zunächst nur in so weit bestimmt werden soll, daß den Gleichungen (1, 2) genügt werde, die Function F ganz willkührlich angenommen werden. Denn welche Form man ihr auch geben mag, man hat

$$11.\quad (u,+x)^{y+k} = x^{y+k}\,\frac{F(\frac{u}{x}+y+k-1)}{F(\frac{u}{x}-1)}$$

$$= x^{y}\,\frac{F(\frac{u}{x}+y-1)}{F(\frac{u}{x}-1)}\cdot x^{k}\,\frac{F\left(\frac{u+yx}{x}+k-1\right)}{F\left(\frac{u+yx}{x}-1\right)} = (u,+x)^{y}\,(u+yx,+x)^{k},$$

und

$$12.\quad (ku,+kx)^{y} = (kx)^{y}\,\frac{F\left(\frac{ku}{ka}+y-1\right)}{F\left(\frac{ku}{ka}-1\right)} = k^{y}\,x^{y}\,\frac{F\left(\frac{u}{x}+y+1\right)}{F\left(\frac{u}{x}-1\right)} = k^{y}\,(u,+x)^{y}.$$

Damit nun ferner auch der Bedingung (3) Genüge geschehe, hat man in (10) $y = 1$ zu setzen, wodurch man findet, daß

$$13.\quad u = x\,\frac{F\left(\frac{u}{x}\right)}{F\left(\frac{u}{x}-1\right)},$$

oder wenn man y für $\frac{u}{x}$ schreibt

$$14.\quad F(y) = y\,F(y-1)$$

sein muß. Eine Function, welche diese Eigenschaft besitzt, ist $\Pi(y)$. Wird nun, um die allgemeinste Form von F zu bestimmen,

$$15.\quad F(y) = \psi(y)\,\Pi(y)$$

gesetzt, so findet sich

$$16.\quad \psi(y)\,\Pi(y) = \psi(y-1)\cdot y\,\Pi(y-1),$$

woraus, weil

$$17.\quad \Pi(y) = y\,\Pi(y-1)$$

$$18.\quad \psi(y) = \psi(y-1)$$

folgt, d. h. die Function $\psi(y)$ oder $\frac{F(y)}{\Pi(y)}$ muß für jede zwei Werthe ihres Arguments, deren

Differenz $= 1$ ist, denselben Werth haben. Dies findet z. B. statt, wenn $\psi(y)$ eine willkürliche eindeutige Function von $\cos(2y\pi)$ und $\sin(2y\pi)$ ist.

Das Resultat, welches sich aus dem Vorstehenden ergiebt, läßt sich nun so aussprechen. Wird durch $\psi(y)$ irgend eine Function bezeichnet, welche der Bedingung (18) genügt, und wird

$$19.\ (u, + x)^{y} = x^{y}\,\frac{\psi(\frac{u}{x} + y - 1)}{\psi(\frac{u}{x} - 1)}\;\frac{\Pi(\frac{u}{x} + y - 1)}{\Pi(\frac{u}{x} - 1)}$$

gesetzt, so besitzt diese Function die durch die Gleichungen (1, 2, 3) ausgedrückten Eigenschaften. Es kann daher $(u, + x)^{y}$, ohne aufzuhören, den genannten Gleichungen zu genügen, gleich wie $\psi(y)$ unendlich viele verschiedene Formen annehmen. Zugleich ist aber auch durch die Formel (19) die allgemeinste Bestimmung von $(u, + x)^{y}$ gegeben.

Hierdurch ist nicht nur die ausgesprochene Behauptung, es seien die Gleichungen (1, 2, 3) nicht hinreichend, um $(u, + x)^{y}$ vollständig zu bestimmen, gerechtfertigt, und die Nothwendigkeit nachgewiesen, in die Definition der Facultät noch eine, in jenen Gleichungen nicht enthaltene Bestimmung aufzunehmen; sondern es ergiebt sich auch daraus, daß die Entwickelungen, durch die man aus den Gleichungen (1, 2, 3) völlig bestimmte Darstellungen von $(u, + x)^{y}$ hergeleitet hat, nicht ganz fehlerfrei sein können, und daher einer Revision bedürfen.

§. 3.

Ehe ich aber die verschiedenen von Crelle u. a. entwickelten Formeln in dieser Rücksicht durchgehe, will ich auf einen bisher, wie es scheint, ganz übersehenen Umstand aufmerksam machen, aus dessen Nichtbeachtung große Irrthümer hervorgehen können und wirklich hervorgegangen sind. Ich bemerke zuvor, daß ich mich bei allen folgenden Entwickelungen auf reelle Werthe der Basis, der Differenz und des Exponenten beschränke. Denn wenn es auch nicht schwer ist, auch imaginäre Werthe dieser Veränderlichen mit in Betracht zu ziehen, so würde das doch einige vorläufige Erörterungen nöthig machen, die hier der Raum nicht gestattet.

Setzt man in den Gleichungen (1, 3) $x = o$, so erhält man

$$20.\ (u, + o)^{y+k} = (u, + o)^{y}\,(u, + o)^{k}$$

$$21.\ (u, + o)^{1} = u.$$

Hieraus ergiebt sich, daß

$$22.\ (u, + o)^{y} = u^{y}$$

sein muß. Aber man darf daraus nicht schließen, daß $(u, + x)^{y}$, wenn der numerische Werth von x unendlich klein wird, nothwendig der Potenz u^{y} unendlich nahe komme. Vielmehr läßt sich zeigen, daß jede Function, welche den Gleichungen (1, 2, 3) genügt, in der Nähe von $x = o$, sich nicht stetig ändert. Setzt man nämlich $x = \frac{1}{p}$, unter p eine **positive** Veränderliche verstanden, so erhält man nach (19)

$$23. \quad \left(1, +\frac{1}{p}\right)^{y} = \frac{\psi(p+y-1)}{\psi(p-1)} \cdot p^{-y} \frac{\Pi(p+y-1)}{\Pi(p-1)}$$

oder wegen (17, 18)

$$24. \quad \left(1, +\frac{1}{p}\right)^{y} = \frac{\psi(p+y)}{\psi(p)} \frac{\Pi(p+y-1)}{p^{y-1}\,\Pi(p)}$$

Nun ist bekanntlich (s. die angeführte Abhandlung von Gauß) für einen unendlich großen **positiven** Werth von p

$$25. \quad \frac{\Pi(p+y)}{p^{y}\,\Pi(p)} = 1,$$

oder richtiger wegen der Vieldeutigkeit von p^{y}

$$26. \quad \frac{\Pi(p+y)}{p^{y}\,\Pi(p)} = 1^{y}$$

Der Factor $\frac{\psi(p+y)}{\psi(p)}$ ist aber der Formel (18) gemäß eine **periodische** Function von p, und nähert sich deshalb, wenn p unendlich groß wird, keiner bestimmten Grenze, wofern nicht etwa die Function ψ eine bloße Constante ist. Daher nähert sich auch $\left(1, +\frac{1}{p}\right)^{y}$ nur in diesem Falle einer bestimmten Grenze.

Setzt man ferner in der Formel (19) $-x$ für x, so erhält man

$$27. \quad (u,-x)^{y} = (-1)^{y} \frac{\psi\left(-\frac{u}{x}+y-1\right)}{\psi\left(-\frac{u}{x}-1\right)} x^{y} \frac{\Pi\left(-\frac{u}{x}+y+1\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x}-1\right)}$$

Es ist aber, wie bekannt,

$$28. \quad \Pi(-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi \,.\, \Pi(x-1)},$$

daher, wenn $\frac{(-1)^{\frac{u}{x}}}{(-1)^{\frac{u}{x}-y}}$ für $(-1)^{y}$ gesetzt wird

$$29. \quad (u,x)^{y} = \frac{(-1)^{\frac{u}{x}} \sin\frac{u}{x}\pi \cdot \psi\left(-\frac{u}{x}+y-1\right)}{(-1)^{\frac{u}{x}-y} \sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi \cdot \psi\left(-\frac{u}{x}-1\right)} \cdot x^{y} \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)},$$

oder wenn man

$$30. \quad \frac{\psi(-y-1)}{(-1)^{y} \sin y\pi} = \frac{\psi(-y)}{(-1)^{y} \sin y\pi} = \varphi(y)$$

setzt, wo denn φ gleich wie ψ der Bedingung

$$31.\quad \varphi(y) = \varphi(y-1)$$

genügt,

$$32.\quad (u,-x)^{y} = \frac{\varphi\left(\frac{u}{x}-y\right)}{\varphi\left(\frac{u}{x}\right)} \cdot x^{y}\, \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)}$$

Mithin

$$33.\quad \left(1,-\frac{1}{p}\right)^{y} = \frac{\varphi(p-y)}{\varphi(p)} \cdot \frac{p^{-y}\,\Pi(p)}{\Pi(p-y)}$$

Hieraus ergiebt sich ebenso wie vorhin, daß $\left(1,-\frac{1}{p}\right)^{y}$, wenn p unendlich groß wird, nur dann einer bestimmten Grenze sich nähert, wenn die Function φ sich auf eine Constante reducirt.

Da nun φ und ψ nicht zugleich constant sein können, so folgt, daß der Werth von $(1,+x)^{y}$, und daher auch der von $(u,+x)^{y} = u^{y}\left(1,+\frac{x}{u}\right)^{y}$ jedenfalls entweder für einen positiven, oder für einen negativen unendlich kleinen Werth von x unbestimmt bleibt. Die Function $(u,+x)^{y}$ ändert sich also in der Nähe von $x = o$ nicht stetig.*)

Zu bemerken ist jedoch hierbei, daß dies nur gilt, wenn y keine ganze Zahl ist. Denn in diesem Falle ergiebt sich aus (18 und 31)

$$34.\quad \psi(u \pm y) = \psi(u),\ \varphi(u \pm y) = \varphi(u),$$

und die Functionen ψ, φ fallen aus den Ausdrücken für $(u,+x)^{y}$ und $(u,-x)^{y}$ fort.

§. 4.

Nach dem im §. 2 Gesagten ist es zur vollständigen Definition der Facultät noch nöthig, hinsichtlich der Function ψ eine Bestimmung zu treffen. Eine solche ist, wie so eben nachgewiesen, enthalten in der Annahme, daß $(1,+x)^{y}$ entweder für einen positiven oder negativen Werth von x, wenn dieser ohne Ende abnimmt, der Grenze 1^{y} sich nähere, indem im ersten Falle ψ, im zweiten die Function φ sich auf eine Constante reduciren muß. Eine dieser Annahmen ist, wie sich ergeben wird, nothwendig, wenn die Analogie der Facultäten und der Potenzen durchgehends behauptet werden soll. Ohne für jetzt näher zu untersuchen, welche von diesen beiden Annahmen zweckmäßiger sei, obwohl mir die letztere aus mehreren Rücksichten den Vorzug zu verdienen scheint,

*) Die hierdurch als unzulässig sich herausstellende Voraussetzung, es sei $(u,+x)^{y}$ sowohl für einen positiven als negativen unendlich kleinen Werth von x unendlich wenig von u^{y} verschieden, hat zum Theil Schuld an den Widersprüchen und paradoxen Resultaten, auf die man in der Theorie der Facultäten gerathen ist. — Auch ergiebt sich aus dem Gesagten die Unmöglichkeit, $(u,+x)^{y}$ nach ganzen Potenzen von x in eine convergirende Reihe zu entwickeln.

will ich beide Arten von Facultäten, die sich aus ihnen ergeben, in Betracht ziehen. Die erste Art, für welche allein fortan die Bezeichnung $(u,+x)^{y}$ bestimmt bleiben soll, hat die in den obigen Gleichungen (1, 2, 3) ausgedrückten Grundeigenschaften, und ist ferner dadurch charakterisirt, daß für einen unendlich kleinen *positiven* Werth von x $(1,+x)^{y}$ der Potenz 1^{y} unendlich nahe kommt. Man hat für sie den Ausdruck (gemäß 19.)

$$35.\quad (u,+x)^{y} = x^{y}\,\frac{\Pi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}$$

Für die andere Art soll, mit Aenderung des Zeichens von x, die Bezeichnung $[u,-x]^{y}$ gebraucht werden. Sie wird demnach definirt durch die Grundgleichungen

$$36.\quad [u,-x]^{y+k} = [u,-x]^{y}\,[u-yx,-x]^{k},$$

$$37.\quad [ku,-kx]^{y} = k^{y}\,[u,-x]^{y}$$

$$38.\quad [u,-x]^{1} = u,$$

und die Bestimmung, daß ebenfalls für einen unendlich kleinen *positiven* Werth von x $[1,-x]^{y}$ von der Potenz 1^{y} unendlich wenig verschieden sei. Ihr Ausdruck ist (nach 32.)

$$39.\quad [u,-x]^{y} = x^{y}\,\frac{\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)}.$$

§. 5.

Ich gehe jetzt zunächst über zu den Entwickelungen von $(u+k,+x)^{y}$ und $[u+k,-x]^{y}$. Crelle entwickelt in dem erwähnten **Mémoire** (§. 41, Nr. 373) die Formel

$$40.\quad (u+k,+x)^{y} = (u,+x)^{y}\left\{1 + y_1\frac{k}{u} + y_2\frac{k(k-x)}{u(u+x)} + \cdots + y_n\frac{(k,-x)^{n}}{(u,+x)^{n}}\right\} + \mathbf{R}_n,$$

wo durch y_1, y_2 u. s. w. die Binomial-Coefficienten bezeichnet sind. Der nach dem nten Gliede hinzugefügte Rest $\mathbf{R}_n$ ist ein Ausdruck, welcher entwickelt die vorstehende Gleichung zu einer identischen macht. In so fern ist sie, die einzig aus den Gleichungen (1, 2, 3) hergeleitet worden, für alle möglichen Arten von Facultäten, welche diesen Gleichungen entsprechen, gültig. In wie fern sie aber grade für die besondere Art, die hier betrachtet wird, eine *convergirende* Entwickelung gebe, bedarf noch einer nähern Untersuchung. Diese kann aber nicht nach den von Crelle (**Th. d. f.**, §. 23) gegebenen Bestimmungen durchgeführt werden. Nach derselben würde die von ihm mit dem Namen der *allgemeinen Taylor'schen Reihe* bezeichnete Formel

41. $$F(x+k)=F(x)+\frac{k}{\alpha}\,\Delta F(x)+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\,\Delta^2 F(x)+\cdots+\frac{(k,-\alpha)^n}{(1,+1)^n\,\alpha^n}\,\Delta^n F(x)+R_n,$$

wo $\Delta x=\alpha$ gesetzt ist, immer dann eine convergirende Entwickelung von $F(x+k)$ geben, sobald der größeste und der kleinste Werth des $(n+1)$ten Gliedes dieser Reihe für die verschiedenen Werthe des Arguments der Function F von x bis $x+k$ beide für $n=\infty$ auf Null sich reducirten. Dieser Satz ist aber hergeleitet aus einer Bestimmung der Grenzen von R_n, welche, wie Crelle selbst in einer spätern Abhandlung über diesen Gegenstand bemerkt hat, nur dann gültig ist, wenn $\frac{k}{\alpha}$ eine ganze positive Zahl ist. Seine Anwendbarkeit ist daher zweifelhaft, wie sich auch leicht auf folgende Weise nachweisen läßt. Denn gesetzt, die Reihe (41) sei, nachdem für α ein bestimmter Werth gewählt worden, für eine gewisse Form der Function F wirklich convergent, und es sei $\psi(x)$ eine Function, die für keinen Werth von x unendlich groß wird, und der Bedingung

42. $$\psi(x+\alpha)=\psi(x)$$

genügt, z. B. eine ganze Function von $\cos\frac{2x}{\alpha}\pi$ und $\sin\frac{2x}{\alpha}\pi$; so würde die Reihe für $\psi(x+k)\,F(x+k)$, da man alsdann

43. $$\Delta^n\cdot\psi(x)\,F(x)=\psi(x)\,\Delta^n F(x)$$

hat, zugleich mit der für $F(x+k)$ convergiren, wenn der in Rede stehende Satz allgemein richtig wäre. Man würde daher erhalten

44. $$\psi(x+k)\,F(x+k)=\psi(x)\left\{F(x)+\frac{k}{\alpha}\,\Delta F(x)+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\,\Delta^2 F(x)+\cdots\infty\right\}.$$

Aus (41, 44) würde sich dann für jeden Werth von k, für den die Reihe (41) convergirt, ergeben

45. $$\psi(x+k)=\psi(x),$$

ein offenbar falsches Resultat.

Die Frage nach der Convergenz der Reihe wird indeß leicht auf einem andern Wege entschieden.

Setzt man mit Gauß in der angeführten Abhandlung

46. $$F(\alpha,\beta,\gamma)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}+\cdots\infty,$$

welche Reihe eine endliche Summe hat, wenn $\alpha+\beta-\gamma$ negativ ist, so hat man, wie Gauß a. a. O. bewiesen,

47. $$F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

Setzt man in dieser Formel $\gamma=\frac{u}{x}$, $\alpha=-y$, $\beta=-\frac{k}{x}$, so erhält man

48. $$F\left(-y,-\frac{k}{x},-\frac{u}{x}\right)=\frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x}+y-1\right)\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)\Pi\left(\frac{u+k}{x}-1\right)}$$

Mithin gemäß (35)

$$\frac{(u+k, +x)^{y}}{(u, +x)^{y}} = F\left(-y, -\frac{k}{x}, \frac{u}{x}\right),$$

oder

$$49.\quad \frac{(u+k, +x)^{y}}{(u, +x)^{y}} = 1 + y_1 \frac{k}{u} + y_2 \frac{k(k-x)}{u(u+x)} + \ldots\ldots + y_n \frac{(k, -x)^{n}}{(u, +x)^{n}} \ldots\ldots \infty,$$

welche Reihe, da $\gamma - \alpha - \beta = \frac{u+k}{x} + y$ ist, convergirt, sobald $\frac{u+k}{x} + y$ positiv ist.

Die Reihe (40) giebt demnach in allen Fällen, wo sie eine endliche Summe hat, den richtigen Werth von $(u+k, +x)^{y}$. Anders verhält es sich aber mit der andern, von Crelle im §. 40 entwickelten Reihe.

Setzt man nämlich $\gamma = -\frac{u}{x} - y + 1$, $\alpha = -y$, $\beta = \frac{k}{x}$, so ist

$$50.\quad F\left(-y, \frac{k}{x}, -\frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{\Pi\left(-\frac{u+k}{x}\right)\Pi\left(-\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x} - y\right)\Pi\left(-\frac{u+k}{x} - y\right)},$$

woraus nach (28)

$$51.\quad F\left(-y, \frac{k}{x}, -\frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x}\right)\pi \sin\frac{u}{x}\pi} \cdot \frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x} + y - 1\right)\Pi\left(\frac{u}{x} + y - 1\right)}{\Pi\left(\frac{u+k}{x} - 1\right)\Pi\left(\frac{u}{x} - 1\right)}$$

folgt. Daher (35)

$$52.\quad \frac{(u+k, +x)^{y}}{(u, +x)^{y}} = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}\right)\pi \sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi} \cdot F\left(-y, \frac{k}{x}, -\frac{u+k}{x} + 1\right)$$

oder

$$53.\quad \frac{(u+k, +x)^{y}}{(u, +x)^{y}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}\right)\pi \sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi} \cdot \left\{1 + y_1 \frac{k}{u + yx - x} + y_2 \frac{k(k+x)}{(u + yx - x)(u + yx - 2x)} + \cdots \infty\right\}$$

oder

54. $(u+k,+x)^{y}$

$$=\frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}\right)\pi\ \sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x}+y\right)\pi\sin\left(\frac{u}{x}+y\right)\pi}\cdot\left\{(u,+x)^{y}+y_1(u,+x)^{y-1}(k,+x)^{1}+y_2(u,+x)^{y-2}(k,+x)^{2}+\cdots\infty\right\}$$

Diese Reihe convergirt, wenn $\gamma-\alpha-\beta=1-\frac{u+k}{x}$ positiv ist.

Wenn y eine ganze Zahl ist, so erhält man hieraus die bereits von Kramp aufgestellte Binomial-Formel, welche demnach, wie oben (§. 1) bemerkt worden, für gebrochene Werthe von y ihre Gültigkeit nicht behält.

§. 6.

Zum Behufe der Entwickelung von $[u+k,-x]^{y}$ mögen zuvörderst folgende, aus den Gleichungen (36, 37, 38) sich ergebende Formeln hier ihren Platz finden.

$$55.\quad [u,-x]^{y-k}=\frac{[u,-x]^{y}}{[u-yx+kx,-x]^{k}}$$

$$56.\quad [u,-x]^{y}=u(u-x)(u-2x)\cdots(u-yx+x),$$

und

$$57.\quad [u,-x]^{-y}=\frac{1}{(u+x)(u+2x)\cdots(u+yx)},$$

wenn y eine ganze positive Zahl ist.

Setzt man nun in der Formel (47) $\alpha=-y$, $\beta=-\frac{k}{x}$, $\gamma=\frac{u}{x}-y+1$, so erhält man

$$58.\quad F\left(-y,-\frac{k}{x},\frac{u}{x}-y+1\right)=\frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x}\right)\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)}{\Pi\left(\frac{u+k}{x}-y\right)\Pi\left(\frac{u}{x}\right)},$$

oder vermöge (39)

$$59.\quad F\left(-y,-\frac{k}{x},\frac{u}{x}-y+1\right)=\frac{[u+k,-x]^{y}}{[u,-x]^{y}},$$

oder

$$60.\quad \frac{[u+k,-x]^{y}}{[u,-x]^{y}}=1+y_1\frac{k}{u-yx+x}+y_2\frac{k(k-x)}{(u-yx+x)(u-yx+2x)}+\cdots+y_n\frac{[k,-x]^{n}}{[u-yx+nx,-x]^{n}}\cdots\infty,$$

woraus endlich (nach 55, 56)

$$61.\quad [u+k,-x]^{y}=[u,-x]^{y}+y_1[u,-x]^{y-1}[k,-x]^{1}+\cdots+y_n[u,-x]^{y-n}[k,-x]^{n}+\cdots\infty$$

Diese Reihen (60, 61) convergiren, wenn $\gamma-\alpha-\beta=\frac{u+k}{x}+1$ positiv ist. Die Formel (61) hat die größeste Aehnlichkeit mit der Binomial-Formel

$$62.\quad (u+k)^{y} = u^{y} + y_1\, u^{y-1}\, k + \dots + y_n\, u^{y-n}\, k^{n} + \dots\infty,$$

welche aus ihr hervorgeht, wenn man $x=0$ setzt. Ebenso stellt sich die Aehnlichkeit der Formel (40) mit derselben heraus, wenn man der letzteren die Form

$$63.\quad (u+k)^{y} = u^{y}\left\{1+y_1\frac{k}{u}+y_2\frac{k^2}{u^2}+\dots+y_n\frac{k^n}{u^n}+\dots\infty\right\}$$

giebt. Diese Analogie der Facultäten und der Potenzen würde aber, wie aus der vorhergehenden Darstellung erhellt, verloren gehen, wenn man hinsichtlich der Functionen ψ, φ eine andere Bestimmung träfe. Die Reihe (40) für $(u+k,+x)^{y}$ würde alsdann noch mit dem Factor $\dfrac{\psi\left(\frac{u+k}{x}+y\right)\psi\left(\frac{u}{x}\right)}{\psi\left(\frac{u+k}{x}\right)\psi\left(\frac{u+k}{x}+y\right)}$, und die Reihe (61) für $[u+k,-x]^{y}$ noch mit dem Factor $\dfrac{\varphi\left(\frac{u+k}{x}\right)\varphi\left(\frac{u}{x}-y\right)}{\varphi\left(\frac{u+k}{x}-y\right)\varphi\left(\frac{u}{x}\right)}$ zu multipliciren sein.

§. 7.

Crelle entwickelt ferner im §. 43 seiner Schrift eine bemerkenswerthe Reihe für $\log(u,+x)^{y}$. Dabei fällt es jedoch sogleich auf, daß dieselbe einzig aus den Gleichungen (1, 2, 3) hergeleitet wird, während doch bewiesen ist, daß diese allein zur Bestimmung von $(u,+x)^{y}$ oder $\log(u+x)^{y}$ nicht hinreichend sind. Dieser scheinbare Widerspruch findet aber darin seine Erklärung, daß die Convergenz der Reihe auf die im §. 5 als unzuverlässig nachgewiesene Weise bestimmt wird. Die Formel selbst ist jedoch richtig, und kann auf folgende Art hergeleitet werden.

Setzt man in der Formel (40) $x=1$, und nimmt an, daß $u+y$ positiv sei; so kann man den Werth von k so klein nehmen, daß die Reihe (40) convergirt und nach ganzen Potenzen von k entwickelt werden kann. Bestimmt man in dieser Entwickelung den Coefficienten von k, so findet sich

$$64.\quad \frac{d(u,+1)^{y}}{du} = (u,+1)^{y}\left\{y_1\frac{1}{u}-y_2\frac{1}{u(u+1)}+\dots+(-1)^{n-1}y_n\frac{1\cdot2\cdots(n-1)}{u(u+1)\cdots(u+n-1)}\dots\infty\right\}$$

Es ist aber, wie bekannt,

$$65.\quad \frac{(-1)^{n-1}\,1.2\dots(n-1)}{u(u+1)\dots(u+n-1)} = \Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) \text{ für } \Delta u = 1,$$

daher

66. $$\frac{d(u,+1)^{y}}{du} = (u,+1)^{y}\left\{y_1\frac{1}{u} + y_2\,\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots + y_n\,\Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots \infty\right\},$$

oder 67. $$\frac{d\log(u,+1)^{y}}{du} = y_1\frac{1}{u} + y_2\,\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots + y_{n+1}\,\Delta^{n}\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots \infty,$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn man auch u als positiv annimmt, und bemerkt, daß

68. $$\Delta^n\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u+n} - \frac{n_1}{u+n-1} + \frac{n_2}{u+n-2} - \cdots + (1)^n\frac{1}{u}$$
$$= \frac{d}{du}\left\{\log(u+n) - n_1\log(u+n-1) + n_2\log(u+n-2) - \cdots + (-1)^n\log u\right\}$$
$$= \frac{d\cdot\Delta^n\log u}{du}$$

ist,

69. $$\log(u,+1)^{y} = C + y_1\log u + y_2\,\Delta\log u + \cdots + y_{n+1}\,\Delta^n\log u + \cdots \infty,$$

wo C eine noch zu bestimmende Constante bedeutet.

Es ist $\log(u,+1)^{y} = \log.u^{y}\left(1,+\frac{1}{u}\right)^{y} = y\log u + \log\left(1,+\frac{1}{u}\right)^{y}$, daher

70. $$\log\left(1,+\frac{1}{u}\right) = C + y_2\log u + \cdots + y_{n+1}\,\Delta^n\log u + \cdots \infty$$

Nun ist aber $\Delta^n\log u = 0$ für $n = \infty$, also

71. $$\Delta^n\log u = \int_\infty^u \Delta^n\left(\frac{1}{u}\right)\cdot du,$$

und daher auch

72. $$y_2\,\Delta\log u + \cdots + y_{n+1}\,\Delta^n\log\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots\infty = \int_\infty^u\left\{y_2\,\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots + y_{n+1}\Delta^n\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots\infty\right\}du.$$

Die Summe der Reihe $y_2\,\Delta\log u +$ u. s. w. verschwindet also für $u = \infty$, und da $\left(1,+\frac{1}{u}\right)^{y} = 1$ wird für $u = \infty$, so verschwindet auch $\log\left(1,+\frac{1}{u}\right)^{y}$ für $u = \infty$; es muß daher $C = 0$ sein. Man hat daher

73. $$\log(u,+1)^{y} = y_1\log u + y_2\,\Delta\log u + \cdots + y_{n+1}\,\Delta^n\log u + \cdots\infty.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich sofort unter der Bedingung, daß $\frac{u}{x}$ und $\frac{u}{x} + y$ beide positiv sind,

74. $$\log(u,+x)^{y} = y_1\log u + y_2\,\Delta\log u + \cdots + y_{n+1}\,\Delta^n\log u + \cdots\infty,$$

wo $\Delta u = x$ zu nehmen ist. Diese Formel stimmt überein mit der von Crelle a. a. O. unter Nro. 399 aufgestellten.

Bemerkt man, daß

75. $(u,+x)^{y} = (u,+x)^{n+y-n} = (u,+x)^{n}(u+nx,+x)^{y-n}$

ist, so sieht man, wie man aus der Formel (74) immer eine andere herleiten kann, welche zur Berechnung von $\log(u,+x)^{y}$ dient, sobald nur $\frac{u}{x}+y$ positiv ist. Zu dem Ende braucht man nur für n eine so große positive ganze Zahl zu setzen, daß auch $\frac{u+nx}{x} = \frac{u}{x}+n$ positiv wird.

Setzt man in der Formel (35) $-u$ für u und $-y$ für y, so erhält man

76. $(-u,+x)^{-y}(u+x,+x)^{y} = \frac{\Pi\left(-\frac{u}{x}-y-1\right)\Pi\left(\frac{u}{x}+y\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x}-1\right)\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}$,

oder vermöge (28)

77. $(-u,+x)^{-y}(u+x,+x)^{y} = \frac{\sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\left(\frac{u}{x}+y\right)\pi}$.

Aus dieser Formel sieht man, daß die Facultät $(u,+x)^{y}$ für den Fall, daß $\frac{u}{x}+y$ negativ ist, auf eine andere, für die $\frac{u}{x}+y$ positiv ist, zurückgeführt werden kann. Die Reihe (74) reicht also für alle Fälle zur Berechnung von $(u,+x)^{y}$ aus.

§. 8.

Aus der Formel (60) erhält man, nachdem $x=1$ gesetzt worden, unter der Voraussetzung, daß $u+1$ positiv sei

78. $\frac{d\log[u,-1]^{y}}{du}$

$$= y_1\frac{1}{u-y+1} - y_2\frac{1}{(u-y+1)(u-y+2)} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot2\cdots(n-1)}{(u-y+1)(u-y+2)\cdots(u-y+n)}\dots\infty$$

Setzt man hier $u-y$ für u, und $-y$ für y, so findet sich, wenn $u-y+1$ positiv ist,

79. $\frac{d\log[u-y,-1]^{-y}}{du}$

$$= -y\frac{1}{u+1} + \frac{y(y+1)}{1\cdot2}\frac{1}{(u+1)(u+2)} - \dots - (-1)^{n-1}\frac{y(y+1)\cdots(y+n-1)}{1\cdot2\cdots n}\frac{1\cdot2\cdots(n-1)}{(u+1)(u+2)\cdots(u+n)}\dots\infty$$

Aber es ist

80. $[u-y,-1]^{-y} = \frac{1}{[u,-1]^{y}}$

81. $\log[u-y,-1]^{-y} = -\log[u,-1]^{y}$

Hiernach ergiebt sich aus (79) durch Integration auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden §., wenn auch $u+1$ als positiv angenommen wird,

82. $\log[u, -1]^{y}$

$$=y\log(u+1)+\frac{y(y+1)}{1\cdot 2}\,\Delta\log(u+1)+\cdots+\frac{y(y+1)\cdots(y+n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\,\Delta^{n-1}\log(u+1)+\cdots\infty$$

und hieraus, unter der Bedingung, daß $\frac{u}{x}+1$ und $\frac{u}{x}-y+1$ beide positiv sind,

83. $\log[u, -x]^{y}$

$$=y\log(u+x)+\frac{y(y+1)}{1\cdot 2}\,\Delta\log(u+x)+\cdots+\frac{y(y+1)\cdots(y+n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\,\Delta^{n-1}\log(u+x)+\cdots\infty,$$

wo $\Delta u = x$ zu setzen ist.

Da man

$$84.\quad [u, -x]^{y} = [u, -x]^{-n}\,[u+nx, -x]^{y+n}$$

hat, so läßt sich, indem man für n eine ganze Zahl so wählt, daß $\frac{u}{x}+n$ positiv wird, aus (83) immer eine Reihe zur Berechnung von $[u, -x]^{y}$ herleiten, sobald $\frac{u}{x}-y+1$ positiv ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so kann man die Formel

$$85.\quad [u, -x]^{y}\,[-u-x, -x]^{-y} = \frac{\sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi}{\sin\frac{u}{x}\pi},$$

die sich aus (28, 39) ergiebt, anwenden, um die Facultät $[u, -x]^{y}$ auf eine andere zurückzuführen, die sich mit Hülfe der Reihe (83) berechnen läßt.

In dem Vorstehenden glaube ich nun meine im Anfange ausgesprochene Ansicht über die bisherige Theorie der Facultäten gehörig begründet, und die wichtigsten Formeln für beide in Betracht gezogene Arten dieser Functionen strenge bewiesen zu haben. Es ist jedoch, da es mir zunächst nur darauf ankam, sichere Resultate festzustellen, und diese so viel als möglich aus bekannten Sätzen herzuleiten, der Gang der Entwickelung nicht immer derjenige, welcher bei einer systematischen Darstellung des Gegenstandes zu befolgen sein würde. Ich gedenke, da die Grenzen dieses Aufsatzes keine größere Ausführlichkeit gestatten, bei einer andern Gelegenheit auf die analytischen Facultäten zurückzukommen.

Dt. Crone, im August 1843.

Karl Weierstraß.

Schulnachrichten.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Lehrverfassung.

Prima.

Ordinarius: der Director.

Latein. Virg. Aen. IX. 122 bis zu Ende und X. 1—300. 2 St. Liv. I. 25—58 u. V. 1—35. 4 Std. Einzelne, besonders dazu geeignete, Stellen wurden memorirt. — Grammatik nach Zumpt cap. 69—76 und 78—81, 6. 2 Std. Extemporalien und Exercitien. 1 Std. Versuche in freien latein. Arbeiten. Malkowsky, Director.

Griechisch. Hom. Ilias VII. V. 109 bis zu Ende und VIII. und III. ganz. Das Gelesene wurde theilweise auswendig gelernt. 2 Std. Xenoph. Cyrop. l. II. cap. 2—4 incl. u. lib. III. cap. 1. 2 Std. Buttmann's Gramm. Wiederholung der Formenlehre, vorzüglich mit Rücksicht auf die Dialecte, und einzelne Abschnitte aus der Syntax. Exercitia und Extemporalia. 2 Std. Malkowsky.

Deutsch. Alle drei bis vier Wochen ein Aufsatz; kurze Uebersicht der verschiedenen Dichtungsarten, durch passende Beispiele veranschaulicht. 2 Std. Director. Mündliche Vorträge 1 Std. mit II. comb. Oberl. Martini.

Französisch. Wiederholung der regelmäßigen Formenlehre, auch zum Theil die unregelmäßige, nach Hirzel. Exercitien. Les Incas l. 7—10 und Guillaume Tell lib. I. 2 Std. Gymn. L. Zanke.

Hebräisch. Nach Pfingsten d. J. Leseübungen. Das Nothwendigste aus der Elementarlehre. Das Personal-Pronom. und das regelm. Verbum nach Gesenius. Malkowsky. 2 Std.

Religion. a. kathol. Ein Theil der Glaubenslehre und die Sittenlehre nach Münscher. 2 Std. Rel. L. Mader. b. evang. Glaube an Jesum Christum und Pflichten gegen Gott und gegen uns selbst nach Hanstein, mit steter Beziehung auf Luther's Katechismus. Gelesen wurde die Apostelgeschichte und der größte Theil des 1sten Briefes Pauli an die Corinther. 2 Std. Pfarrer Weise.

Mathematik. Buchstabenrechnung bis zur Lehre von den Potenzen, Ausziehung der Quadratwurzel, Gleichungen des ersten und zweiten Grades. In der Geometrie: Wiederholung der Anfangsgründe, Kreislehre nach Grunert. Schriftliche Uebungen. 4 Std. Cand. Weierstraß.

Geschichte. Die der asiatischen Völker, der Aegypter, Karthaginienser und Griechen bis auf den Frieden des Antalkidas, nach Pütz. Im Winter 2, im Sommer 3 Std. Oberl. Martini.

Geographie. Vor Ostern das Wichtigste aus der mathemat. und physikal. Geographie. 2 Std. Weierstraß; nach Ostern Europa übersichtlich, Deutschland speciell. 1 Std. Martini.

Physik. Die wägbaren Stoffe. Nach Fischer. 2 Std. Weierstraß.

Secunda.

Ordinarius: Oberlehrer Martini.

Latein. Ovid. Metam. lib. XII. 1—145 XIII. 408—575 und 904 bis zu Ende. Vorausgeschickt wurde das Nothwendigste über Prosodie und den Bau des Hexameter. Im Winter Martini; im Sommer lib. VII. 1—100, Metrik, G. L. Dr. Laws. 2 Std. Caesar de B. civ. lib. II. und III. bis cap. 60 mit Memorirübungen 4 Std. Grammatik nach Zumpt cap. 77—83. Exercitia und Extemporalia. 3 Std. Martini.

Griechisch. Hom. Odyss. lib. IV. bis gegen das Ende. 2 Std. Xenoph. Anab. lib. I. bis an's Ende. 2 Std. Grammatik nach Buttmann bis §. 110. Exercitia. 2 Std. Martini.

Deutsch. Lesung und Erklärung von Musterstücken und mündl. Vorträge. 1 Std. mit I. comb. Die Lehre vom Satze nach Heyse und Correctur der alle 14 Tage bis 3 Wochen gelieferten Aufsätze. 2 Std. Martini.

Französisch. Die Formenlehre mit Einschluß der regelm. Conjugat. nach Hirzel, nebst Uebersetzung der Uebungsstücke. 2 Std. Zanke.

Religionslehre mit I. combinirt.

Mathematik. Buchstabenrechnung bis zur Lehre von den Potenzen, Gleichungen des ersten Grades mit einer und mit mehreren unbekannten Größen. Geometrie: die gradlinigen Figuren mit Ausschluß der Aehnlichkeitslehre. Schriftl. Uebungen. 4 Std. Weierstraß.

Geschichte, Geographie und Physik mit I. combinirt.

Tertia.

Ordinarius: Religions-Lehrer Mader.

Latein. Phaedr. fab. mit Auswahl. 2 Std. Corn. Nep. Eumen., Dio, Hannib. 3 Std. Grammatik nach Zumpt, über die Casus und Modi. 2 Std. Exercitia. 1 Std. Mader.

Griechisch. Die Formenlehre bis zu den Verbis in μι nach Buttmann. Jacobs Leseb. 1ste Declin. bis zum Passivum. 5 Std. Dr. Laws.

Deutsch. Das Verbum und dessen Gebrauch, die Lehre vom Satz nach Heyse. Schriftliche Arbeiten, Lectüre und Uebungen im mündlichen Vortrage. 5 Std. Mader. Religionslehre mit I. und II. combinirt.

Mathematik. Anfangsgründe der Buchstabenrechnung und Begründung der gewöhnlichen Rechnungsarten durch dieselbe. Einfache Gleichungen. Geometrie: die Lehre von den Winkeln und von den Parallelen, die ersten Sätze über die Dreiecke. Schriftliche Uebungen. 4 Std. Weierstraß.

Geschichte. Die der neuern Zeit bis zu den schlesischen Kriegen. Nach Welter. 2 Std. Laws.

Geographie. Das Nöthigste aus der mathem. Geogr., die Geogr. von Europa im Allgemeinen und speciell von Deutschland, nach Volger. 2 Std. Weierstraß.

Naturgeschichte. Die der Thiere und der Pflanzen, nach Stein. 2 Std. Weierstraß.

Quarta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Zanke.

Latein. Grammatik nach Zumpt. Die Formenlehre und die leichtere Syntax nebst schriftlichen und mündlichen Uebungen. Jacob's Leseb. 5ter Abschn. Buch I. bis VI. mit einigen Erzählungen aus Abschn. IV. 8 Std. Zanke.

Deutsch. Grammatik nach Heyse, schriftliche und mündliche Uebungen. 5 Std. Zanke. Declam. 1 Std. Laws.

Religion. a. kathol. Die vier ersten Abschnitte der Glaubenslehre nach Ontrup; biblische Geschichte des N. T. nach dem „Kern der bibl. Geschichte." 2 Std. Mader. b. evang. Erklärung des 3ten Artikels des zweiten Hauptstücks und der 3 letzten Hptst. des Katech. Luther's, bibl. Gesch. des A. T. bis zum Auszuge der Israel. aus Egypten. 2 Std. Weise.

Rechnen. Decimalbrüche, bürgerl. Rechnungsarten. 4 Std. Zanke.

Geschichte. Die der alten Welt mit Ausnahme der ~~Länder~~ Römer, nach Welter. 2 Std. Laws.

Geographie. Allgem. Vorbegriffe, die Länder am atlant. Meere, nach Volger. 2 Std. Zanke.

Naturgeschichte. Die der Thiere und Pflanzen, nach Stein. 2 Std. Weierstraß.

Zeichnen nach Vorlegeblättern und
Schönschreiben 2 Std. Weierstraß.

Quinta.

Ordinarius: Gymn. L. Dr. Laws.

Latein. Grammatik nach Zumpt, die Formenlehre bis zur Syntax. 5 Std. Vocabellernen. 1 Std. Jacob's Leseb. Beispiele aus den einfachen u. erweiterten Sätzen nebst einigen Fabeln. 3 Std., wöchentlich zwei Exertitia. Laws.

Deutsch. Vor Ostern: Formenlehre, orthogr. Uebungen, einfach. und zusammenges. Satz, Anfertigen kleiner Erzählungen. 2 Std., Lesen 2 Std. Laws. Nach Ostern: Lesen 2 Std. Weierstraß. Declam. Uebungen, combinirt mit IV. Laws.

Religion combinirt mit IV.

Rechnen. Die 4 Species. Lehre von den Brüchen. Einfache Proportionsrechnung.

Geographie, Naturgeschichte, Zeichnen und Schönschreiben, combin. mit IV.

Unterricht im Gesange ertheilte in zwei Stunden wöchentlich Herr Lehrer Conitzer.

Verfügungen des Königl. Hochlöblichen Provinzial-Schul-Collegiums zu Königsberg.

1. Vom 27. August 1842. Bei den größeren Ansprüchen, welche an die geistige Ausbildung der Jugend nach dem Entwickelungsgange und dem jetzigen Standpunkte der Bildung gemacht werden müssen, ist es nothwendig, der Erhaltung und Kräftigung der körperlichen Gesundheit der Jugend eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen, um durch eine harmonische Ausbildung der geistigen und körperlichen Kräfte dem Vaterlande tüchtige Söhne zu erziehen. Des Königs Majestät haben daher mittelst Allerhöchster Ordre vom 6. Juni c. zu bestimmen geruht, daß die Leibesübungen als ein nothwendiger und unentbehrlicher Bestandtheil der männlichen Erziehung förmlich anerkannt und in den Kreis der Volkserziehungsmittel aufgenommen werden. Die Gymnastik soll dem gemäß dem Ganzen des Erziehungswesens angereiht, und es sollen zunächst mit den Gymnasien, den höhern Stadtschulen und den Schullehrer-Seminarien Anstalten für gymnast. Uebungen verbunden werden.

2. Von jedem Knaben, welcher in das Progymnasium aufgenommen wird, soll das Pokken-Impfungs-Attest vorgezeigt werden. 5ten Decemb. 1842.

3. Ein Circular des Vereins gegen Thierquälerei in Berlin wird am 10. December 1842 unter der Aufforderung an die Directoren der Gelehrtenschulen und Schullehrer-Seminare mitgetheilt, um den Endzweck des Vereins nach Kräften zu fördern.

4. Auf den Bericht des Unterzeichneten wird genehmigt, daß bei den lateinischen Memorirübungen die von Meiring und Remacly herausgegebene Sammlung zu Grunde gelegt werde. 18ten März 1843.

5. Unter dem 29sten März d. J. wird ein Auszug aus dem Erlaß des Königl. Ministeriums der ꝛc. Unterrichts-Angelegenheiten vom 12ten September 1840 nebst einem Exemplar des Abdrucks der Erklärung, welche der Privatgelehrte Dr. Ruthard in Breslau in Bezug auf den von ihm herrührenden Vorschlag und Plan einer innern und äußern Vervollständigung der grammatikalischen Methode die klassischen Sprachen zu lehren, zur Kenntnißnahme und Beachtung mitgetheilt. Mit demselben Datum:

6. Zusendung einer Abschrift des über die Anwendung der Ruthard'schen Methode ergangenen Rescripts des Königl. Ministeriums der rc. Unterrichts-Angelegenheiten vom 24. Februar 1843.

7. Vom 13ten Mai d. J., den Unterricht in der Muttersprache betreffend.

8. Genehmigung, daß der Religionslehrer Mader, vorläufig während der Krankheit des Officials Herrn Perzynski, an Sonn- und Feiertagen anstatt in der Progymnasialkapelle in der Pfarrkirche den Gottesdienst abhalten darf. 20sten Juni 1843.

9. Die gehörige Beaufsichtigung der Büchersammlungen und wissenschaftlichen Apparate wird dringend empfohlen. 1sten Juli 1843.

10. Unter dem 27sten Juli wird auf den von dem Premier-Lieutenant v. Wedell in Posen bearbeiteten und in der Alex. Duncker'schen Buchhandlung in Berlin erscheinenden historisch-geographischen Hand-Atlas aufmerksam gemacht. Dieses Werk ist auf sechs Lieferungen berechnet, deren jede im Ladenpreise $1\frac{2}{3}$ Rthlr. kostet. Bei Abnahme größerer Partieen wird auf zehn Exemplare ein Freiexemplar gegeben.

Zweiter Abschnitt.

Chronik des Königlichen Progymnasiums.

Nachdem am 26sten August vorigen Jahres die öffentliche Prüfung aller Klassen abgehalten worden war, wurden die Schüler für die Zeit der Herbstferien bis zum 3ten October zu den Ihrigen entlassen. Auf den zuletzt genannten, sowie auf den folgenden Tag fielen die Translocationsprüfungen, nach deren Beendigung, am 5ten October der Unterricht wieder begann. Der Herr Rel. Lehrer Mader hielt an diesem Tage die h. Messe und ließ auf dieselbe eine der Bedeutung des Gegenstandes entsprechende Anrede an die anwesenden Lehrer und Schüler der Anstalt folgen. Der Director machte darauf in dem Locale der I. das Ergebniß der Versetzungsprüfungen bekannt und las schließlich die Disciplinargesetze vor.

Weil der Eintritt eines sechsten Lehrers nahe bevorstand, so wurde bis zur Ankuuft desselben noch nach dem Lectionsplane des Sommer-Semesters unterrichtet; auch unterblieb bis dahin der vorgeschriebene Ordinariatswechsel in den drei untern Klassen.

Der für die neu gegründete Lehrstelle der Mathematik und Physik berufene Candidat, Herr Carl Weierstraß, traf am 30sten October v. J. hier ein und übernahm sofort vorzugsweise den mathematischen Unterricht in den drei obern Klassen, den physikalischen in II. und I., so wie die naturhistorischen Lectionen in III., IV. und V.

Herr Carl Weierstraß ist geboren zu Ostenfelde im Regierungs-Bezirk Münster am 31. October 1815. Sein Vater, Hauptamts-Rendant zu Westernkotten bei Lippstadt, Herr Wilhelm Weierstraß, lebt noch; seine Mutter, eine geborene von der Forst, hat er frühzeitig verloren. Den ersten Unterricht erhielt er durch Privatlehrer, besuchte darauf ein Jahr die Vorbereitungsschule des Gymnasiums in Münster und dann das Gymnasium in Paderborn von Ostern 1829 bis zum Herbst 1834. Mit dem Zeugniß der Reife entlassen, bezog er nunmehr die Universität Bonn, an welcher er sich drei und ein halbes Jahr lang staatswissenschaftlichen, naturwissenschaftlichen und mathematischen Studien widmete. Nachdem er darauf ein halbes Jahr bei den Seinigen zugebracht hatte, besuchte er noch die Akademie zu Münster, um sich unter der Leitung des Herrn Prof. Gudermann in der höheren Mathematik weiter auszubilden. Zu Ostern 1841 unterwarf er sich bei der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Münster der Prüfung pro facultate docendi, und hielt darauf im Schuljahre 184½ an dem dortigen Gymnasium das vorschriftsmäßige Probejahr ab. Gleich nach der Beendigung desselben wurde er laut Verfügung des Königlichen Ministerii der Geistlichen-, Unterrichts- und Medicin. Angel. vom 20. September 1842 mit der Ertheilung des mathematischen und physikalischen Unterrichts bei dem hiesigen Königlichen Progymnasium beauftragt, welches gegenwärtig seiner definitiven Anstellung entgegen sieht.

Das hohe Geburtsfest Sr. Majestät des Königs wurde in gewohnter Weise feierlich begangen, indem Lehrer und Schüler der Anstalt zum Gottesdienste in der Progymnasialkirche sich versammelten, wo der Herr Rel. Lehrer Mader die h. Messe absolvirte und mit einer der Bedeutung des Tages entsprechenden Rede schloß.

Herr Predigtamtskandidat Adolf Skubich übersandte am 15ten Februar d. J. in dankbarem Andenken an die hiesige Anstalt, deren Schüler er einst gewesen ist, und an welcher er auch vor drei Jahren durch mehrere Monate als Hülfslehrer gearbeitet hat, 57 Exemplare seiner in Culm erschienenen Gedichte, „Klänge aus Osten" mit der Bestimmung, den Erlös aus denselben, das Exemplar zu 5 sgr., für arme Schüler zu verwenden. Bereits sind zwei griechische Wörterbücher von Rost angeschafft und dürftigen Zöglingen zum Gebrauch übergeben worden.

Am 28. Februar wohnten die Lehrer und Schüler des Progymnasii, in Folge einer besondern Einladung des Herrn Offizial und Domherrn Perzynski, der für den verstorbenen Hochwürdigsten Erzbischof, Herrn Martin von Dunin, verordneten Trauerfeierlichkeit in der hiesigen Pfarrkirche bei.

Die Klassenprüfungen für das Winterhalbjahr wurden am 6. und 7. April c. abgehalten. Darauf erhielten die Schüler die Censuren für das letzte Quartal und wurden auf die Osterferien entlassen, nachdem die Katholiken in Vereinigung mit ihren Lehrern am Palmsonntage das heilige Abendmahl genossen hatten.

Dritter Abschnitt.

Statistische Uebersicht.

Während des Schuljahres 184⅔ besuchten das Königl. Progymnasium im Ganzen 108 Schüler, und zwar: die I. 13, die II. 19, die III. 22, die IV. 31, die V. 23, zusammen 108.

Aus der I. gingen vier Schüler ab: einer, um sich dem Kaufmannsstande zu widmen, ein anderer auf die Gewerbschule in Graudenz, der dritte wird Apotheker, der vierte widmet sich dem Bureau-Dienste. Aus der II. gingen 3 über zur Oeconomie, einer auf eine andere Anstalt, einer zur Pharmacie und noch einer zu unbestimmtem Zweck.

Die III. verließen drei Schüler ohne weitere Anzeige, die IV. einer, um Sattler zu werden; der zweite ohne Meldung. Der Quartaner Albert Rakow, ein sittlich braver Schüler, erkrankte nach der Mitte des Monats März am Nervenfieber, wurde zu den Seinigen nach Woltersdorf abgeholt, und starb daselbst wenige Tage nachher. Ein Quintaner wurde von der Anstalt entfernt, und ein anderer verließ dieselbe ohne vorherige Meldung.

Die Gesammtzahl der Schüler am Ende des Schuljahres beträgt 90.

Die etatsmäßig zur Anschaffung von Unterrichtsmitteln ausgesetzte Summe ist zweckmäßig verwendet worden. Die Anstalt erhielt ferner die während des Schuljahres erschienenen Lieferungen von Graff's Althochdeutschem Sprachschatze und des Corpus script. hist. byzant., als Geschenk des Königl. hohen Ministerii der G. U. u. Med. Angel.; von dem Königl. Hochlöbl. Provinz.-Schul-Collegium in Königsberg: Das Museum des Rhein. Westfäl. Schulmänner-Vereins, 1sten Bandes 1stes Heft und 1sten Bandes 2tes Heft, Münster 1841 und 1842; desgleichen ein Exemplar der dritten Auflage von der im Verlage des Buchhändlers Habicht in Bonn erschienenen latein. Schulgrammatik für die untern und mittleren Klassen von Siberti u. Meiring, als Geschenk der betr. Buchhandlung.

Die Buchhandlung G. D. Bädecker in Essen übersandte mit dem 1sten August 1842: Erk u. Greef, Liederkranz. Auswahl heiterer und ernster Gesänge für Schule, Haus und Leben, ferner: J. Günther, von den Tropen und Figuren; Günther's Auszug aus J. Grimm's Grammatik. Vierter Theil: Syntax. E. Koppe, methodischer Leitfaden für den Unterricht im Rechnen in den untern Klassen der Gymnasien und höheren Bürgerschulen; Dr. J. A. Savels, Grundriß der vergleichenden Lehre vom Gebrauche der Modi in der deutschen, franz., latein. und griech. Sprache; desselben Verfassers Uebersicht der vergleichenden Lehre vom Gebr. der Casus in der deutschen, franz., lat. und griech. Sprache, und Schifflin's Anleitung zur Erlernung der englischen Sprache, 1ster Cursus. Von dem Commendarius Herrn Riebschläger hierselbst: ein Exemplar der hebr. Grammatik und des hebr. Lesebuches ed. Freitag, und von dem Herrn Dr. Bürstenbinder in Berlin, dessen Palästra für den lat. Unterricht. Endlich überwies der hiesige Apotheker, Herr Schilling, dem Progymnasium eine Anzahl von Schulbüchern, um dieselben dürftigen Schülern zur Benutzung zu übergeben.

Ich unterlasse es nicht, für diese Gaben den schuldigsten Dank im Namen der Anstalt hiermit auszusprechen. Zu nicht minderem Danke ist das Königl. Progymnasium denjenigen geehrten Familien verpflichtet, welche im Laufe des Schuljahres dürftigen Schülern Freitische gewährten.

In den Tagen vom 10ten bis zum 14ten August inclus. wurde die Anstalt durch den Königl. Provinzial=Schulrath, Herrn Prof. Dr. Lucas, revidirt. Indem ich, was das Ziel des hiesigen Königl. Progymnasii betrifft, auf meine desfallsige Auslassung in dem Programm des vorigen Jahres verweise, bemerke ich in Folge jener Revision zur Kenntnißnahme für die Eltern unserer gegenwärtigen Schüler, so wie für diejenigen, welche ihre Söhne der Anstalt anvertrauen wollen, daß die Prima derselben fortan die Ober= und Unter=Secunda eines vollständigen Gymnasii umfaßt, und daß also hier die Reife für die erste Klasse eines Gymnasii erlangt wird. Der Cursus für die II. ist von jetzt an ein zweijähriger, weil eben unsere zweite Klasse, der Ober= und Unter=Tertia des vollständ. Gymn. entspricht; von derselben Dauer ist der Cursus in Prima.

Zur Aufnahme neuer Schüler ist der Unterzeichnete in den drei letzten Tagen des Monats September bereit. Schul= nnd Impf=Atteste sind vorzuzeigen, und haben sich die Väter der Recipienden über die Wahl des Quartiers mit dem Director zu besprechen.

Das neue Schuljahr beginnt am 1sten October d. J.

Ordnung der Prüfung.

Vormittags von 8 bis 12 Uhr.

Gesang.

Latein in I. . . . . der Director.

Griechisch in II. . . . . . . Martini.

Geschichte in III. . . . . . . Dr. Laws.

Mathematik in I. . . . . . . Weierstraß.

Französisch in II. . . . . . . Zanke.

Rechnen in V. . . . . . . Mader.

Declamationen der Schüler und Schlußgesang. Vertheilung der Censuren im engern Kreise der Schule.

Malkowsky.

Uebersicht

der statistischen Verhältnisse des Königlichen Progymnasiums vom Herbst 1842 bis zum Herbst 1843.

Lehrer.

Director Malkowsky.
Oberlehrer Martini.
Relig. Lehrer Mader.
Gymn. Lehrer Dr. Laws.
Gymn. Lehrer Zanke.
Candidat Weierstraß.
Pfarrer Weise.
Gesang-Lehrer Konitzer.

Allgemeiner Lectionsplan.

Unterrichts-gegenstände.	wöchentliche Stundenzahl. I.	II.	III.	IV.	V.	über-haupt
Latein	9	9	8	8	8	42
Griechisch	6	6	5	—	—	17
Deutsch	3	3	5	6	5	22
Französisch	2	2	—	—	—	4
Hebräisch	2	—	—	—	—	2
Religion	2	2	2	2	2	4
Mathematik	4	4	4	—	—	12
Rechnen	—	—	—	4	4	8
Physik	2	2	—	—	—	2
Naturgesch.	—	—	2	2	2	4
Geschichte	3	3	2	2	—	7
Geographie	1	1	2	2	2	5
Zeichnen	—	—	—	2	2	2
Schönschr.	—	—	—	2	2	2
Gesang	—	—	—	—	—	2
Summa .	34	32	30	30	27	155

	Schüler-zahl während des Schul-jahres.	Ab-gang im Laufe des Schul-jahres.	sind am Schlusse desselben.
I.	13	4	9
II.	19	7	12
III.	23	3	20
IV.	31	3	28
V.	23	2	21
Sa.	109	19	90

Verbesserungen.

S. 6, Formel (12) statt $\frac{ku}{ka}$ l. beidemal $\frac{ku}{kx}$.

S. 8, Formel (29) statt $(u, x)^{y}$ l. $(u, -x)^{y}$.

S. 15, Formel (67) und (70) statt $\left(1, +\frac{1}{u}\right)$ l. $\left(1, +\frac{1}{u}\right)^{y}$.

S. 15, Formel (68) statt $(1)^{n}$ l. $(-1)^{n}$.