Programm

des

Königlichen Kathol. Gymnasiums

in

Deutsch-Krone

für

das Schuljahr 1883 — 1884

mit welchem zu der

am 2. April 1884 in der Aula

stattfindenden

Schlußfeier und Entlassung der Abiturienten

ergebenst einladet

der Direktor des Gymnasiums

Professor A. Lowiński,

Ritter des Rothen Adler-Ordens IV. Klasse.

NEUE FOLGE

XXIX

Deutsch-Krone.
Druck von F. Garms.
1884.

1884. Progr. Nr. 26.

Geometrische Untersuchung

der auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Gleichung:

$$ax^4 + c^3xy + by^4 = 0$$

(Fortsetzung und Schluß der Programm-Abhandlung von 1873.)

Als ich vor mehreren Jahren den ersten Theil meiner geometrischen Untersuchung über die vorliegende Gleichung dem hiesigen Schulprogramme als wissenschaftliche Abhandlung beifügte, wurde ich alsbald zu meiner großen Freude gewahr, daß das von mir aus einem rein wissenschaftlichen Interesse zur Discussion gewählte Thema bei mehreren Fachkollegen und Freunden der mathematischen Disciplin eine günstige Aufnahme gefunden habe. — Durch diesen Umstand ermuthigt und gestärkt faßte ich den festen Entschluß, jede sich darbietende Gelegenheit zu ergreifen, um dem vorausgeschickten ersten Theile sobald als möglich seinen wesentlichen Ergänzungstheil nachzusenden, damit der sich dafür interessirende Leser in den Stand gesetzt würde, ein in sich abgeschlossenes Ganze seiner Betrachtung und Prüfung unterziehen zu dürfen. — Leider hat sich eine passende Gelegenheit zur Ausführung dieses meines Vorhabens viel später dargeboten, als ich ursprünglich gedacht habe; denn ein Zwischenraum von zehn Jahren hat sich nach und nach zwischen die beiden, gleichsam von einander unzertrennbaren Theile meiner kurzen Abhandlung ausgebreitet, die Totalität derselben gänzlich zerrissen und das Verständniß des vorliegenden zweiten Theiles fast unmöglich gemacht; weil dasselbe an Bedingungen geknüpft ist, die kaum oder sehr schwer erfüllt werden dürften. Um die vielen Uebel, welche durch die genannte lange Zeitreihe für das Verständniß und somit auch für das Interesse meiner vorliegenden Abhandlung erwachsen sind, auf ein Minimum der Empfindbarkeit und Schädlichkeit zu beschränken, habe ich das Wichtigste und Nothwendigste aus den einzelnen Abschnitten des ersten Theiles kurz extrahirt und es mit der gegenwärtigen Abhandlung zu einem geordneten und abgerundeten Ganzen derartig verknüpft, daß ihr Charakter als Fortsetzung soviel als möglich verwischt werde.

§ 1.

Wenn man unter der Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems in die vorliegende Gleichung:

$$ax^4 + c^3xy + by^4 = 0$$

den Hilfswinkel φ einführt, so erhält man nach einigen Umformungen und Betrachtungen an ihre Stelle die leicht discutirbaren Gleichungen:

$$\text{I.}\quad\left\{\begin{aligned} x &= \pm c \sqrt{\frac{m \operatorname{tang} \varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi}} \\ y &= \pm c \operatorname{tang} \varphi \sqrt{\frac{m \operatorname{tang} \varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi}} \end{aligned}\right.$$

und II. die Polargleichung: $r = \pm c \sec \varphi \sqrt{\frac{m \operatorname{tang} \varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi}}$

wobei zu bemerken ist, daß absolut genommen, $m = \frac{c}{a}$ und $n = \frac{b}{a}$ gesetzt wurde. Außerdem ist zu erwähnen, daß m stets > 0 zu nehmen ist, während $n \gtreqless 0$ genommen werden kann, wenn nur dafür gesorgt wird, daß bei $n < 0$ die Bedingung erfüllt werde:

$$1 + n \operatorname{tand}^4 \varphi > 0.$$

§ 2.

Eine eingehende Betrachtung der erwähnten Polargleichung

$$r = \pm c \sec \varphi \sqrt{\frac{m \operatorname{tang} \varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi}}$$

führt, wie s. Z. gezeigt wurde, zu dem Schlußresultate, daß

1) für $n > 0$ eine geschlossene und durch einen vielfachen Punkt im Pol ausgezeichnete Curve durch diese repräsentirt wird, während in den beiden Fällen,
2) für $n < 0$ und
3) für $n = 0$ ungeschlossene, aber auch mit einem vielfachen Polpunkte ausgestattete Curvenarten durch die genannte Gleichung vorgestellt werden. — Der Kürze und Einfachheit wegen mögen, wie früher, die erwähnten Curvenarten also benannt werden:

1) Curve A $(n > 0)$; 2) Curve B $(n < 0)$ und 3) Curve C $(n = 0)$

und es sei hierbei bemerkt, daß die nummerischen Werthe von m und n nur einen Einfluß auf die geometrische Größe der in Rede stehenden Gebilde ausüben, nicht aber auf die Gestalt derselben, die, wie gesagt, lediglich an die Relation: $n \gtreqless 0$ geknüpft ist.

§ 3.

Eine streng vorgenommene Prüfung und Untersuchung der leicht zu bildenden Differenzialquotienten:

$$1)\quad \frac{dx}{d\varphi} = \frac{mc \sec^2 \varphi\ (1 - 3\, n \operatorname{tang}^4 \varphi)}{2 \sqrt{m \operatorname{tang} \varphi\ (1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi)^3}}$$

$$2)\quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{mc \sec^2 \varphi \operatorname{tang} \varphi\ (3 - n \operatorname{tang}^4 \varphi)}{2 \sqrt{m \operatorname{tang} \varphi\ (1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi)^3}}$$

$$3)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tang} \varphi\ (3 - n \operatorname{tang}^4 \varphi)}{1 - 3\, n \operatorname{tang}^4 \varphi}$$

$$4)\quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{cm \sec \varphi\ (3 \operatorname{tang}^2 \varphi - 3\, n \operatorname{tang}^4 \varphi - n \operatorname{tang}^6 \varphi + 1)}{2 \sqrt{m \operatorname{tang} \varphi\ (1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi)^3}}$$

5) $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{mc \sec\varphi}{2} \left[\left(V + 6 \sec^2\varphi\,(1 - 2\,n \tang^2\varphi - n \tang^4\varphi)\right) 2 \tang\varphi\, Z - m \sec^2\varphi . (1 + n \tang^4\varphi)^2\, (1 + 13\, n \tang^4\varphi)\, V\right] : 2\,\dot{Z} \sqrt{Z}$, worin der Kürze und Einfachheit halber gesetzt worden ist:

$$V = 3 \tang^2\varphi - 3\,n \tang^4\varphi - n \tang^6\varphi + 1$$
und $$Z = m \tang\varphi\, (1 + n \tang^4\varphi)^3$$

6) $\frac{d^2x}{d\varphi^2} = mc \sec^2\varphi\, (4 \tang\varphi\, MZ - m\, NU) : 4Z \sqrt{Z}$ und

7) $\frac{d^2y}{d\varphi^2} = mc \sec^2\varphi\, (2\, PZ - m\, NW) : 4Z \sqrt{Z}$, worin aus besonderen Gründen bezeichnet worden sind:

α. $1 - 6\,n \tang^2\varphi - 9\,n \tang^4\varphi$ mit M
β. $(1 + n \tang^4\varphi)^2\, (1 + 13\, n \tang^4\varphi)$ mit N
γ. $3 + 9 \tang^2\varphi - 5\,n \tang^4\varphi - 7\,n \tang^6\varphi$ mit P
δ. $\sec^2\varphi\, (1 \quad 3\,n \tang^4\varphi)$ mit U und
ε. $\sec^2\varphi\, (3 \tang\varphi \quad n \tang^5\varphi)$ mit W

führt, wie s. Z. weitläufig auseinander gesetzt wurde, zur Ermittelung der sog. merkwürdigen Punkte (Culminations-Inflexions-Potenzpunkte) unserer Curvenarten und zu einer befriedigenden Fixirung des Laufs derselben rücksichtlich des zu Grunde gelegten Coordinatensystems, wodurch der Vorstellungskraft des forschenden Geistes ziemlich genaue und klare Bilder der in Rede stehenden geometrischen Gebilde zur Anschauung entgegen geführt werden. — Um die fraglichen Gebilde durch eine Zeichnung zur Anschauung zu bringen, genügt es, den Größen m und n solche Zahlenwerthe beizulegen, welche für die Rechnung mit Wurzelgrößen am bequemsten sind, zumal da dadurch nur die geometrische Größe, aber keineswegs die Natur der qu. Gebilde beeinflußt wird.

§ 4.

Wenn man von der Polargleichung: $r = c \sec\varphi \sqrt{\frac{m \tang\varphi}{1 + n \tang^4\varphi}}$ ausgeht und in derselben der Einfachheit wegen $m = 4$ und $n = \pm 1$, sowie $n = 0$ nimmt, so erhält man zur Darstellung der drei Curvenarten durch Zeichnung nachstehende Punkten-Tabellen:

Tafel I. für Curve A $(n = 1)$.

φ	$\tang\varphi$	$\pm r$	φ	$\tang\varphi$	$\pm r$
0°	0,00	0,00c	45°	1,00	2,00c
10°	0,17	0,83c	50°	1,19	1,95c
20°	0,36	1,26c	60°	1,73	1,66c
30°	0,57	1,85c	70°	2,74	1,27c
40°	0,86	1,96c	80°	5,87	0,83c

Tafel II. für Curve B ($n = -1$).

φ	tang φ	$\pm r$	φ	tang φ	$\pm r$
0°	0,00	0,00c	30°	0,57	1,64c
10°	0,17	0,83c	40°	0,86	3,63c
20°	0,36	1,28c	45°	1,00	∞

Tafel III. für Curve C ($n = 0$).

φ	tang φ	$\pm r$	φ	tang φ	$\pm r$
0°	0,00	0,00c	45°	1,00	2,82c
10°	0,17	0,83c	50°	1,19	3,39c
20°	0,36	1,27c	60°	1,73	5,25c
30°	0,57	1,73c	70°	2,74	9,63c
40°	0,86	2,44c	80°	5,87	28,86c

Auf Grundlage der vorstehenden Tafeln kann man etwa folgendermaßen einige Punkte der drei Curvenarten bestimmen und dadurch den Lauf derselben fixiren (vide Fig.-Tafel). Man beschreibe aus dem Anfangspunkte des unserer ursprünglichen Curvengleichung zu Grunde liegenden rechtwinkligen Coordinaten-Systems X, Y (Fig. I., II. und III.) mit der in der qu. Polargleichung vorkommenden und nach Belieben zu wählenden geraden Linie c als Radius einen Kreis und ebenso mit 2c (= dem Maximum des Vectors r) einen damit concentrischen Kreis, theile die Peripherie des einen von ihnen z. B. des äußeren, in Theile von 10 zu 10 Grad ein, ziehe aus dem Polpunkte 0 Strahlen nach den einzelnen Theilungspunkten hin, trage auf denselben die aus den einzelnen Tafeln entnommenen bezüglichen Werthe für r nach beiden Richtungen ab, wobei man die Bruchtheile von r aus der zehntheiligen Skala von c nimmt, und verbinde schließlich die also zum Vorschein getretenen Curvenpunkte durch eine continuirliche krumme Linie mit einander, so erhält man die in Figur I., II. und III. dargestellten Gebilde, welche aus pecuniären Gründen in dem ersten Theile keine Aufnahme finden konnten und gleichzeitig die Entstehung einer Fortsetzung desselben zur Folge hatten.

Nachdem ich nunmehr durch diese kurz gefaßte, aber für das Verständniß des Ganzen, wie ich glaube, hinlänglich ausreichende Recapitulation der Hauptmomente aus dem ersten Theile meiner früheren Abhandlung der vorliegenden Arbeit eine möglichst abgerundete Form gegeben, und durch die Hinzufügung der betreffenden Figuren den Werth derselben keineswegs geschädigt, nehme ich den s. Z. unterbrochenen Faden in seiner früheren Gestalt wieder auf.

§ 5.

Beantwortung der Frage nach den Asymptoten.

Um sowohl die vorliegende Frage nach den Asymptoten unserer Curvenarten zu erledigen, als auch eine Untersuchung über die nachfolgenden geometrischen Eigenschaften derselben zu ermöglichen, wollen wir der Einfachheit und Uebersichtlichkeit wegen statt der bis jetzt benutzten Polargleichung die beiden mit ihr in § 1 gleichzeitig erwähnten Gleichungen

$$\begin{cases} x = \pm c \sqrt{\dfrac{m \operatorname{tang} \varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi}} \\ y = \pm c \operatorname{tang} \varphi \sqrt{\dfrac{m \operatorname{tang} \varphi}{1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi}} \end{cases}$$

in Betracht ziehen und nachträglich bemerken, daß in Curve A, bei welcher überhaupt von den sog. Culminations-Punkten die Rede sein kann, die Coordinaten für nachstehende Werthe von φ das Maximum erreichen:

$$x \text{ für } \varphi = \operatorname{arc\,tang} \sqrt[4]{\frac{1}{3n}}$$

$$y \text{ für } \varphi = \operatorname{arc\,tang} \sqrt[4]{\frac{3}{n}}$$

Da Linie A ein in sich geschlossenes Gebilde ist, so kann die Frage nach den sog. Asymptoten sich nur auf die Linien B und C beziehen. — Es sei $x'\,y'$ ein Curvenpunkt, so lautet auf Grund unseres rechtwinkligen Coordinatensystems für denselben die allgemeine Gleichung der Asymptote:

$$y = g\,x + k, \text{ worin } \begin{cases} g = \lim \dfrac{dy'}{dx'} \\ k = \lim \left(y' - \dfrac{dy'}{dx'}\, x'\right) \end{cases}$$

ist für $x' = \infty$.

Um die Grenzwerthe von g und k näher zu bestimmen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Da die Gleichungen der Curve B, wenn wir in die allgemeinen, zu Anfange dieses § erwähnten Curvengleichungen für $n = -1$ setzen, die Form annehmen,

$$\begin{cases} x = \pm c \sqrt{\dfrac{m \operatorname{tang} \varphi}{1 - n \operatorname{tang}^4 \varphi}} \\ y = \pm c \operatorname{tang} \varphi \sqrt{\dfrac{m \operatorname{tang} \varphi}{1 - n \operatorname{tang}^4 \varphi}} \end{cases}$$

so können wir die Bedingung $x = \infty$ nunmehr ersetzen durch

$$1 - n \operatorname{tang}^4 \varphi = 0 \text{ oder } \operatorname{tang} \varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{n}}$$

Auf Grund dieser Relation und unter Berücksichtigung der hier geltenden und aus § 3 1., entnommenen Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tang} \varphi\ (3 + n \operatorname{tang}^4 \varphi}{1 + 3 n \operatorname{tang}^4 \varphi}$$

erhalten wir:

$$g = \lim \left[\frac{\operatorname{tang} \varphi\ (3 + n \operatorname{tang}^4 \varphi)}{1 + 3 n \operatorname{tang}^4 \varphi}\right] \text{ für } \operatorname{tang} \varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{n}}$$

woraus beim Uebergang zur Grenze sich ergiebt:

$$g = \sqrt[4]{\frac{1}{n}}$$

Es nähern sich also die aufeinander folgenden Tangenten der Curve B einer bestimmten Grenzlage, d. h. sie hat Asymptoten. Nehmen wir $n = 1$, so wird $g = 1$, d. h. die qu. Asymptoten halbiren den Achsenwinkel unseres Systems.

1. Bemerkung.

Der Einfachheit und Kürze wegen wurde x und ebenso $\frac{dy}{dx}$ im absoluten Sinne genommen, weil dazu die symmetrische Lage der Curvenzweige in den einzelnen Quadranten die volle Berechtigung giebt.

2. Bemerkung.

Die Wahl $n = 1$, welche vorhin getroffen wurde, ist infolge der Grundbedeutung von n (1. Theil § 1) stets zulässig und auch in den aufgestellten Gleichungen für B als erlaubt stillschweigend vorausgesetzt.

Da, wie oben gezeigt wurde, für $x' = \infty$ der Werth $\operatorname{tang}\varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{n}}$ wird, so erhalten wir

$$k = \lim\left[x \operatorname{tang}\varphi - \frac{\operatorname{tang}\varphi\,(3 + n \operatorname{tang}^4\varphi)}{1 + 3\,n \operatorname{tang}^4\varphi}\,x\right] = \lim\left(1 - \frac{3 + n\operatorname{tang}^4\varphi}{1 + 3\,n\operatorname{tang}^4\varphi}\right).x\operatorname{tang}\varphi$$

$$\text{für}\left\{\begin{array}{l} x = \infty \\ \operatorname{tang}\varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{n}} \end{array}\right.$$

woraus bei wirklichem Uebergange zur Grenze sich ergiebt: $k = 0\,\infty$, ein Ausdruck, dessen wahrer Werth sich also ermitteln läßt. —

Drücken wir x durch $\operatorname{tang}\varphi$ aus, so erhalten wir zur näheren Untersuchung den Ausdruck,

$$k = \lim\left(1 - \frac{3 + n\operatorname{tang}^4\varphi}{1 + 3\,n\operatorname{tang}^4\varphi}\right) c\operatorname{tang}\varphi\sqrt{\frac{m\operatorname{tang}\varphi}{1 - n\operatorname{tang}^4\varphi}}$$

für $n \operatorname{tang}^4\varphi = 1$, welcher durch Einführung der Bezeichnungen

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - \dfrac{3 + n\operatorname{tang}^4\varphi}{1 + 3\operatorname{tang}^4\varphi} \text{ mit } \psi(\varphi) \text{ und} \\ c\operatorname{tang}\varphi\sqrt{\dfrac{m\operatorname{tang}\varphi}{1 - n\operatorname{tang}^4\varphi}} \text{ mit } \chi(\varphi) \end{array}\right.$$

nachstehende, leicht discutirbare Form annimmt:

$$\psi(\varphi)\,\chi(\varphi) = 0\,\infty \text{ für } \operatorname{tang}\varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{n}}$$

Setzt man $\chi(\varphi) = \frac{1}{X(\varphi)}$ und bezeichnet die Ableitungen von $\psi(\varphi)$ und $X(\varphi)$ nach φ entsprechend mit $\psi'(\varphi)$ und $X'(\varphi)$, so wird bekanntlich der wahre Werth von $\psi(\varphi)\,\chi(\varphi)$ durch die Gleichung

$$\psi(\varphi)\,\chi(\varphi) = \frac{\psi(\varphi)}{X(\varphi)} = \frac{\psi'(\varphi)}{X'(\varphi)}$$

vollständig bestimmt. — Es ist aber, wie leicht zu finden,

$$\left\{\begin{array}{l} \psi'(\varphi) = \dfrac{32\,n\operatorname{tang}^3\sec^2\varphi}{(1 + 3\,n\operatorname{tang}^4\varphi)^2} \text{ und} \\ X'(\varphi) = -\dfrac{(m\operatorname{tang}^4\varphi + 3)\sec^2\varphi\sqrt{m\operatorname{tang}\varphi}}{2\,mc\operatorname{tang}^4\varphi\sqrt{1 - n\operatorname{tang}^4\varphi}} \end{array}\right.$$

und daher:

$$\frac{\psi'(\varphi)}{X'(\varphi)} = -\frac{2.32\,mnc\operatorname{tang}^2\varphi\sqrt{1 - n\operatorname{tang}^4\varphi}}{(1 + 3\,n\operatorname{tang}^4\varphi)\,(n\operatorname{tang}^4\varphi + 3)\sqrt{m\operatorname{tang}\varphi}}$$

woraus für $n \operatorname{tang}^4 \varphi = 1$ folgt:

$$\frac{\psi'(\varphi)}{X'(\varphi)} = 0, \text{ daher auch } \psi(\varphi)\, \chi(\varphi) = 0.$$

Der Abschnitt k, den die Asymptoten auf der Y-Achse bilden, fällt also mit dem Mittelpunkte des Coordinatensystems zusammen.

Aus dem bisher Gesagten folgt daher als Gleichung der Asymptoten für Curve B

$$y = \sqrt[4]{\frac{1}{n}}\, x$$

Was die qu. Asymptotenfrage in Bezug auf Curve C anbelangt, so wird sie mit Hilfe des Vorhergehenden dahin beantwortet, daß die Y-Achse im Unendlichen die fragliche Curve tangirt; denn setzt man in den obigen Ausdrücken für g und k an Stelle n den Werth 0, so werden:

$$g = \infty \text{ und } k = -\infty.$$

§ 6.

Bestimmung der Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen.

I. Bezeichnen wir mit T die Länge der im Punkte $(x' y')$ eine jede in rechtwinkligen Coordinaten gegebene Curve tangirenden Geraden, so erhalten wir bekanntlich

$$T = y' \sqrt{1 + \left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2},$$

welche Relation nach Einführung der im vorigen § vorgekommenen Werthe für y' und $\frac{dx'}{dy'}$ übergeht in

$$T = c \sqrt{\frac{m \operatorname{tang} \varphi' \left[\operatorname{tang}^2 \varphi' \,(3 - n \operatorname{tang}^4 \varphi')^2 + (1 - 3\, n \operatorname{tang}^4 \varphi')^2\right]}{(1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi')\,(3 - n \operatorname{tang}^4 \varphi')^2}}$$

und in dem speziellen, dem Entwurfe unserer drei Figuren zu Grunde gelegten Falle $m = 4$, für den Punkt $\operatorname{tang} \varphi' = 1$, wobei

$$\begin{cases} x = c \sqrt{\dfrac{4}{1+n}} \\ y = c \sqrt{\dfrac{4}{1+n}} \end{cases}$$

ist, liefert

1) für Curve A in Fig. I. $(n = 1)$ $T = 2\, c$, wobei $x = c \sqrt{2}$ und $y = c \sqrt{2}$ ist
2) für Curve B in Fig. II. $(n = -1)$ $T = \infty$, wobei $x = \infty$ und $y = \infty$ ist,
3) für Curve C in Fig. III. $(n = 0)$ $T = 2{,}1\, c$, wobei $x = 2\, c$ und $y = 2\, c$ ist.

Bemerkung.

Auch bei der gegenwärtigen und späteren Untersuchung kommen die darin vorkommenden Wurzeln im absoluten Sinne zur Geltung, indem die qu. Curvenarten nur im 1. Quadranten des Achsensystems im Auge behalten zu werden brauchen.

II. Bezeichnen wir mit N die Länge der Normale in dem Punkte $(x' y')$ so erhalten wir auf Grund des allgemeinen Ausdrucks $N = y' \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}$ für unsere Curvenarten:

$$N = c \sqrt{\frac{m \operatorname{tang}^3 \varphi' \left[(1 - 3\, n \operatorname{tang}^4 \varphi')^2 + \operatorname{tang}^2 \varphi' \,(3 - n \operatorname{tang}^4 \varphi_,)^2\right]}{(1 + n \operatorname{tang}^4 \varphi')\,(1 + 3\, n \operatorname{tang}^4 \varphi')^2}}$$

woraus sich z. B. für $\operatorname{tang} \varphi' = 1$ ergiebt,

1) für Curve A in Fig. I.: $N = 2\,c$,
2) für Curve B in Fig. II.: $N = \infty$,
3) für Curve C in Fig. III.: $N = 6,\,3\,c$.

Anmerkung.

Bei Curve A und B sind in dem Punkte $\varphi' = 45^\circ$ die Linien, Tangente und Normale bezw. einander gleich, während in Curve C die Normale des qu. Punktes dreimal so lang als die dazu gehörige Tangente ist.

III. Bezeichnen wir mit St die sog. Subtangente, so erhalten wir infolge des hierfür allgemein giltigen Ausdrucks $St = \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, für den Punkt (x, y') oder (φ'):

$$St = \frac{(1 - 3\,n\,\mathrm{tang}^4\,\varphi')\,\sqrt{m\,\mathrm{tang}\,\varphi'}}{(3 - n\,\mathrm{tang}^4\,\varphi')\,\sqrt{1 + n\,\mathrm{tang}^4\varphi'}}$$

und daraus für $\mathrm{tang}\,\varphi' = 1$ in den bezüglichen Figuren:

1) für Curve A: $St = \quad 1,\,4\,c$,
2) für Curve B: $St = \infty$,
3) für Curve C: $St = 0,\,6\,c$.

IV. Bezeichnet man endlich die Länge der Subnormale in dem Punkte $(x'\,y')$ oder (φ') mit Sn, so erhält man unter Berücksichtigung des allgemeinen Ausdrucks $Sn = y'\,\frac{dy'}{dx}$, nachstehende Gleichung:

$$Sn = \frac{c\,\mathrm{tang}^2\,\varphi'\,(3 - n\,\mathrm{tang}^4\,\varphi')}{1 - 3\,n\,\mathrm{tang}^4\,\varphi'}\sqrt{\frac{m\,\mathrm{tang}\,\varphi'}{1 + n\,\mathrm{tang}^4\,\varphi'}}$$

Nehmen wir als Ausgangspunkt der Richtung der Subtangenten und Subnormalen den Fußpunkt der Ordinaten y an und rechnen von hier aus diese Richtung in demselben Sinne, wie die der Abscissen, so kommen wir sofort zu der Ueberzeugung, daß die gemeinten Linien eine entgegengesetzte Richtung haben müssen, was auch die bezüglichen Gleichungen zeigen. Für $\mathrm{tang}\,\varphi' = 1$ ergeben sich für unsere Figuren=Gebilde:

1) für Curve A: $Sn = +\,1,\,4\,c$,
2) für Curve B: $Sn = -\,\infty$
3) für Curve C: $Sn = -\,6,\,0\,c$.

Bemerkung.

Für die im § 5 erwähnten merkwürdigen Punkte der Curve A:

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \sqrt[4]{\frac{3}{n}} \text{ und } \mathrm{tang}\,\varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{3\,n}}$$

erhält man beziehungsweise

α. T und $St = \infty$, $N = 1,\,5\,c$ ungefähr, und $Sn = 0$,
β. $T = 1,\,2\,c$ ungefähr, $St = 0$, $N = \infty$ und $Sn = -\,\infty$.

Man kann hiernach bei Curve A in den beiden Punkten, welche durch die Culmination der Coordinaten x und y zum Vorschein kommen, die Tangenten zeichnen.

§ 7.

Der Krümmungsradius und die Gleichung der Evolute.

I. Für jeglichen Punkt einer auf ein orthogonales Coordinatensystem bezogenen Curve lautet die Relation für den Krümmungshalbmesser ρ also:

$$\rho = \frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{N\,3}{y^3\,\frac{d^2y}{dx^2}}$$

worin N die Normale für den qu. Punkt bedeutet. — Um diese Relation näher zu discutiren, wollen wir in den auf Grund der Thatsache, daß x und y Funktionen der unabhängigen Variabelen φ sind, leicht zu bildenden und allgemein giltigen Ausdruck:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^3}$$

die im § 3 erwähnten und ohne besondere Mühe leicht zu bildenden Ableitungen einführen:

$$\alpha)\ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{mc\,U}{2\sqrt{Z}};\quad \beta)\ \frac{dy}{d\varphi} = \frac{mc\,W}{2\sqrt{Z}};\quad \gamma)\ \frac{d^2x}{d\varphi^2} = \frac{mc.\sec^2\varphi\,(4\tang\varphi\,.\,MZ - m\,NU)}{4\,Z\sqrt{Z}};$$

$$\delta)\ \frac{d^2y}{d\varphi^2} = \frac{mc\,.\,\sec^2\varphi\ (2\,PZ - m\,NW)}{4\,Z\sqrt{Z}}$$

Mit Hilfe dieser Relationen erhalten wir nach einigen unbedeutenden Umformungen nachstehenden Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\sec^3\varphi\sqrt{Z}\,(PU - 2\tang\varphi\,MW)}{mc\,U^3},$$

welcher Werth in die einfachere Gleichung für ρ substituirt folgendes Resultat liefert, wenn man gleichzeitig y durch tang φ ausdrückt:

$$\rho = \frac{N^3\,U^3}{2\,mc^2\sec^2\varphi\,.\,\tang^5\varphi\,(PU - 2\,.\tang\varphi\,.\,MW)}$$

Nehmen wir, wie früher, der Einfachheit wegen den Curvenpunkt tang φ = 1, so erhalten wir

1) für Curve A: $\rho = -0{,}3c$; da $N = 2c$; $U = 4$; $M = -14$, und $W = 4$ gefunden werden;
2) für Curve B: $\rho = \infty$; da hier $N = \infty$; $U = 8$; $P = 24$, $M = 16$ und $W = 8$ sind;
3) für Curve C: $\rho = 10{,}4c$; weil hierfür $N = 6{,}3c$; $U = 2$; $P = 12$; $M = 1$ und $W = 6$ sind.

Bemerkung:

1) Für den früher erwähnten Culminationspunkt der Curve A, der bei $\tang\varphi = \sqrt{\frac{3}{n}}$, oder vielmehr $\tang\varphi = \sqrt[4]{3}$ zum Vorschein kommt, findet man:

$$\rho = -0{,}57c;\ \text{da}\ N = 1{,}5c;\ U = -8\,(1+\sqrt{3});\ P = -12\,(1+\sqrt{3});$$
$$M = -(26 + 6\sqrt{3})\ \text{und}\ W = 0$$

berechnet werden.

2) Für den ebenfalls schon früher hervorgehobenen Punkt derselben Curve, in welchem die Abscisse x ihr Maximum erreicht und der bei $\tang\varphi\ \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ zum Vorschein kommt, findet man:

$$\rho = 0,\ \text{weil hierfür sich ergeben:}\ N = \infty;\ U = 0;\ P = \frac{4}{3}\left(1 + 5\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right);$$
$$M = -2\left(1 + 3\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\ \text{und}\ W = \frac{8}{3}\left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}$$

Da also für diesen letzteren ausgezeichneten Punkt der Krümmungsradius ρ = 0 ist, so folgt daraus die seiner Zeit (I. Theil der Abhandlung) auf einem anderen Wege gefundene Eigenschaft der Curve A, daß sie an dieser Stelle einen Inflexionspunkt hat.

II. Bezeichnen wir die Mittelpunkts-Coordinaten des Krümmungskreises mit u und v, so erhalten wir die leicht aufzustellenden und für ein rechtwinkliges Coordinatensystem allgemein giltigen Gleichungen:

$$\alpha)\ u = y + \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\beta)\ v = x - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

welche in unserer Curvenuntersuchung nachstehende Gestalt annehmen. —

Da $\rho = \left(\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)\frac{N}{y}$ ist, worin N die Normale für denselben Punkt bedeutet, so ergiebt sich daraus nach Verlegung des Faktors $\frac{N}{y}$,

$$\gamma)\ \frac{\rho y}{N} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Da aber nach einer Transposition von y in Gleichung (α) sich ebenfalls ergiebt,

$$\delta)\ u - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

so erhält man daraus (aus γ und δ) die folgende einfache Relation: $u - y = \frac{\rho \, . \, y}{N}$, aus welcher für u der einfache Werth gefunden wird.

$$\varepsilon)\ u = \left(1 + \frac{\rho}{N}\right)y = \left(1 + \frac{\rho}{N}\right).\ c\ .\ \mathrm{tang}\,\varphi.\sqrt{\frac{m\ \mathrm{tang}\,\varphi}{1 + n\ .\ \mathrm{tang}^4\,\varphi}}$$

Um den Werth für v zu ermitteln, multipliciren wir zunächst die sub (γ) angegebene Gleichung

$$\frac{\rho y}{N} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ mit } \frac{dy}{dx}$$

und subtrahiren alsdann beide Seiten derselben von x; hierdurch gelangen wir zu dem nachstehenden Resultate:

$$\zeta)\ x - \frac{\rho y}{N} \cdot \frac{dy}{dx} = x - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = v \text{ (cfr. Gleichung } \beta).$$

Da zufolge der bekannten Beziehungen:

$$x = r\cos\varphi \text{ und } y = r\sin\varphi$$

sich für y der Ausdruck: $y = x \tang \varphi$ ergiebt, so kann man unter Benutzung dieses eben genannten Werthes für y der Relation (ζ):

$$v = x - \frac{\rho y}{N} \cdot \frac{dy}{dx}$$

nachstehende Form geben:

$$\eta)\ v = y - \frac{\rho}{N} \cdot x \,.\, \tang \varphi \,.\, \frac{dy}{dx} = \left(1 - \frac{\rho}{N} \cdot \frac{dy}{dx} \,.\, \tang \varphi\right) . \, x =$$

$$\left[1 - \frac{\rho}{N} \cdot \frac{\tang^2 \varphi \,(3 - n \,.\, \tang^4 \varphi)}{1 - 3\,n \,.\, \tang^4 \varphi}\right) c \,.\, \sqrt{\frac{m \tang \varphi}{1 + n \,.\, \tang^4 \varphi}}$$

Hiermit sind wir in den Stand gesetzt, die Frage nach dem Mittelpunkte des Krümmungskreises für einen beliebigen Punkt unserer Curvenarten zu beantworten. Nehmen wir beispielsweise den schon so oft der Einfachheit halber zur Erläuterung der Untersuchungs-Resultate gewählten Punkt ($\tang \varphi = 1$), so erhalten wir für unsere Figurengebilde:

1) für Curve A: $\left\{ \begin{array}{l} u = 1{,}2c \\ v = 1{,}2c; \end{array} \right.$ da hier bekanntlich die Linien $N = 2c$ und $\rho = -0{,}3c$ sind,

2) für Curve B: $\left\{ \begin{array}{l} u = \infty \\ v = \infty; \end{array} \right.$ da hier $N = \infty$ und $\rho = \infty$ sind,

3) für Curve C: $\left\{ \begin{array}{l} u = 5{,}3c \\ v = -7{,}9c; \end{array} \right.$ weil hier $N = 6{,}3c$ und $\rho = 10{,}4c$ sind.

Bemerkung.

Fassen wir die beiden Gleichungen für u und v, in welchen als unabhängige Variable der Hilfswinkel (φ) dominirt, als eine unzertrennbare Totalität auf, so können wir sie als die einfachsten Gleichungen der Evoluten unserer Curven bezeichnen, indem wir erwägen, daß die darin vorkommenden Größen ρ und N sich durch tang φ ersetzen lassen.

§ 8.

Rectification und Quadratur der Curven.

I. Bezeichnen wir mit ds das Differenzial des Bogenelements s einer beliebigen Curve, so erhalten wir in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System den allgemeinen und leicht aufzustellenden Ausdruck:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

welcher durch Einführung der schon oft angewandten Werthe für dx und $\frac{dy}{dx}$ in:

$$ds = \frac{mc \,.\, \sec^2 \varphi}{2\,(1 + n \,.\, \tang^4 \varphi)} \sqrt{\frac{(1 - 3\,n \,.\, \tang^4 \varphi)^2 + \tang^2 \varphi \,(3 - n \,.\, \tang^4 \varphi)^2}{m \tang \varphi \,(1 + n \,.\, \tang^4 \varphi)}}\, d\varphi$$

übergeht und zur Werthermittelung des nachstehenden Integrals führt:

$$s = \frac{c}{2} \sqrt{m} \int_{\varphi = 0}^{\varphi = \varphi} \frac{\sec^2 \varphi \,.\, d\varphi}{\sqrt{\tang \varphi \,(1 + n \,.\, \tang^4 \varphi)^3}} \left[(1 - 3\,n \,.\, \tang^4 \varphi)^2 + (3 \tang \varphi - n \,.\, \tang^5 \varphi)\right]^{\frac{1}{2}}$$

worin, wie schon die Integrationsgrenzen zeigen, der Bogen s gleich vom Anfangspunkte des Coordinatensystems genommen ist. —

Um das vorstehende Integral näher zu untersuchen, wollen wir den sich in der höheren Analysis sehr oft als unvermeidlich darbietenden und zum Ziel führenden Weg der Reihen einschlagen. —

Entwickeln wir daher nach dem binomischen Lehrsatze den Ausdruck: $\left[(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^2 + (3\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe, so erhalten wir, wenn wir das erste Glied derselben von den übrigen isoliren und das Produkt der natürlichen Zahlen $1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,p$ mit $p!$ bezeichnen, folgende Gleichung:

$$\left[(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^2 + (3\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi + (-1)^{3\,p\,-\,1}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2\,p - 3)\,.\,(2\,p - 1)}{2^p\,.\,p!\,(2\,p - 1)}\,.\,\sum\frac{(3\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^{2\,p}}{(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^{2\,p\,-\,1}}$$

Bemerkung.

Der Faktor $(2\,p - 1)$ ist deswegen in den Zähler und Nenner des vorstehenden Ausdrucks eingefügt worden, damit das eingeführte Summations-Zeichen seine Giltigkeit auch für $p = 1$ behält.

Wir sind hiermit in den Stand gesetzt, wenn wir der Reihe nach $p = 1, 2, 3, 4\,.\,.$ ꝛc. nehmen, eine beliebige Anzahl von Gliedern der in Rede stehenden Binomialreihe zu summiren und dadurch für den Bogen s einen Nährungswerth zu bestimmen. — Um jedoch die Genauigkeit und Brauchbarkeit des auf diesem Wege etwa ermittelten Werthes für s beurtheilen zu können, müssen wir die Frage nach der Convergenz der qu. Binomialreihe einer eingehenden Erörterung unterziehen.

Es ist bekannt, daß eine Reihe mit alternirenden Vorzeichen alsdann konvergirt, wenn ihre successiven Glieder immer mehr und mehr abnehmen. Nehmen wir daher die beiden unmittelbar auf einander folgenden Glieder unserer fraglichen Reihe:

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,(2\,p - 3)\,.\,(2\,p - 1)\,(3\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^{2\,p}}{2^p\,.\,p!\,(2\,p - 1)\,(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^{2\,p\,-\,1}},\ \text{und}$$

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,(2\,p - 3)\,(2\,p - 1)\,(2\,p + 1)\,(3\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^{2\,p\,+\,2}}{2^{p\,+\,1}.\,(p + 1)!\,(2\,p + 1)\,(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^{2\,p\,+\,1}}$$

und bilden daraus das Produkt

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,(2\,p - 3)\,(2\,p - 1)\,(3\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^{2\,p\,+\,2}.\,2^p.\,p!\,(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^{2\,p\,-\,1}}{2^{2\,p\,+\,1}(2\,p + 1)!\,1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,(2\,p - 1)\,(3\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^{2\,p}} =$$

$$\frac{(2\,p - 1)\,(3\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^2}{2\,(p + 1)\,(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^2} = \frac{\left(2 - \frac{1}{p}\right)(3\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^2}{\left(2 + \frac{2}{p}\right)(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^2}$$

so erhalten wir:

$$\lim\frac{\left(2 - \frac{1}{p}\right)(3\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^2}{\left(2 + \frac{2}{p}\right)(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^2} = \frac{(3\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi)^2}{(1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)^2},$$

wenn $p = \infty$ wird.

Für die Convergenz der in Rede stehenden Reihe muß daher nach der Natur ihrer aufeinander folgenden Glieder stattfinden:

$$\left(\frac{3\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\,.\,\mathrm{tang}^5\,\varphi}{1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi}\right)^2 < 1\ \text{oder}\ \frac{\mathrm{tang}\,\varphi\,(3 - n\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)}{1 - 3\,n\,\mathrm{tang}^4\,\varphi} < 1,$$

d. h. es muß $\mathrm{tang}\,\varphi < 1$ genommen werden. —

Da unsere Binomialreihe durch die Potenzirung eines Ausdrucks mit einem positiven und ächten Bruchexponenten entstanden ist, so convergirt sie auch, wenn

$$\frac{\mathrm{tang}\,\varphi\,(3 - n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi)}{1 - 3\,n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi} = -1,\ \text{d. h.}\ n\,.\,\mathrm{tang}^4\,\varphi = 1\ \text{gewählt wird.}$$

Nachdem wir hiermit die Grenzen von tang φ ermittelt, innerhalb deren die gedachte Binomial-Reihe convergirt, können wir unter vorläufiger Vernachlässigung der Integrationsgrenzen dem oben erwähnten Ausdrucke für s die Form geben,

$$s = \frac{c}{2}\sqrt{m}\int\frac{\sec^2\varphi\,.\,d\varphi}{\sqrt{\tang\varphi(1+n\tang^4\varphi)^3}}.\left[1 - 3n\,.\,\tang^4\varphi + (-1)^{3p-1}\frac{1.3\,..\,(2p-3)(2p-1)}{2^p\,.\,p!\,(2p-1)}.\right.$$

$$\left.\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(3\tang\varphi - n\,.\,\tang^5\varphi)^{2p}}{(1-3n\,.\,\tang^4\varphi)^{2p-1}}\right],$$

woraus wir sofort ersehen, daß nunmehr folgende Integrale zu behandeln sind:

$$1)\int\frac{(1-3n\,.\,\tang^4\varphi)\sec^2\varphi\,.\,d\varphi}{\sqrt{\tang\varphi\,(1+n\,.\,\tang^4\varphi)^3}}\quad\text{und}$$

$$2)\,\frac{(-1)^{3p-1}1.3.5\,..\,(2p-3)(2p-1)}{2^p.\,p!\,(2p-1)}\int\frac{(3.\tang\varphi - n.\tang^5\varphi)^{2p}\sec^2\varphi\,.\,d\varphi}{(1-3n.\tang^4\varphi)^{2p-1}\sqrt{\tang\varphi\,(1+n.\tang^4\varphi)^3}}$$

ad 1) Was den Werth des ersten Integrals anbelangt, so leistet zur Ermittelung desselben die im § 3 angegebene Relation:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{mc\,.\,\sec^2\varphi\,(1-3n\,.\,\tang^4\varphi)}{2\sqrt{m\tang\varphi\,(1+n\,.\,\tang^4\varphi)^3}}$$

den ausreichendsten Dienst, wenn man nur dabei nicht vergißt, daß sie durch Differenziation der Gleichung:

$$x = c\sqrt{\frac{m\,.\,\tang\varphi}{1+n\,.\tang^4\varphi}}$$

nach φ entstanden ist und auf der identischen Gleichung beruht:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{d\left(c\sqrt{\frac{m\,.\,\tang\varphi}{1+n\,.\,\tang^4\varphi}}\right)}{d\varphi}$$

Aus dieser und der vorhin angegebenen Relation für $\frac{dx}{d\varphi}$ ergiebt sich Folgendes:

$$\frac{d\left(c\,.\sqrt{\frac{m\,.\,\tang\varphi}{1+n\,.\,\tang^4\varphi}}\right)}{d\varphi} = \frac{mc\,.\,\sec^2\varphi\,(1-3n\,.\,\tang^4\varphi)}{2\sqrt{m\,.\,\tang\varphi\,(1+n\,.\,\tang^4\varphi)^3}},$$

woraus nach bekannten Grundsätzen folgt:

$$c\sqrt{m}\,.\,d\left(\sqrt{\frac{\tang\varphi}{1+n\,.\,\tang^4\varphi}}\right) = \frac{c}{2}\sqrt{m}\cdot\frac{\sec^2\varphi\,(1-3n\,.\,\tang^4\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\tang\varphi\,(1+n\tang^4\varphi)^3}},\ \text{oder}$$

$$2\,d\left(\sqrt{\frac{\tang\varphi}{1+n\,.\,\tang^4\varphi}}\right) = \frac{\sec^2\varphi\,(1-3n\,.\,\tang^4\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\tang\varphi\,(1+n\,.\,\tang^4\varphi)^3}},$$

oder nach unbestimmter Integration:

$$2\sqrt{\frac{\tang\varphi}{1+n\,.\,\tang^4\varphi}} = \int\frac{\sec^2\varphi\,(1-3n\,.\,\tang^4\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\tang\varphi\,(1+n\tang^4\varphi)^3}},$$

oder schließlich nach Vertauschung der Seiten:

$$\int\frac{\sec^2\varphi\,(1-3n\,.\,\tang^4\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\tang\varphi\,(1+n\tang^4\varphi)^3}} = 2\sqrt{\frac{\tang\varphi}{1+n\tang^4\varphi}}$$

Hiermit ist die dem ersten Integrale unserer Untersuchungsreihe für s zu Grunde liegende Funktion vollständig ermittelt, sodaß die bei unbestimmten Integralen sich sehr oft als nothwendig zeigende Constante weggelassen werden konnte.

ad 2) Um das zweite der oben angegebenen Integrale einer Untersuchung zu unterziehen, setzen wir der Uebersicht halber,

$$\text{tang}\,\varphi = z^2 \text{ und folglich } \sec^2\varphi\,.\,d\varphi = 2z\,dz$$

in den qu. Ausdruck ein, so erhalten wir nach einigen leicht auszuführenden Umformungen zur näheren Prüfung:

$$(-1)^{3p-1}\frac{1.3.5..(2p-3)(2p-1)}{2^{p-1}.\,p!\,(2p-1)}\int\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{2^{4p}(3-nz^8)^{2p}(1+nz^8)^{-\frac{3}{2}}\,dz}{(1-3nz^8)^{2p-1}}$$

Nicht so einfach und klar, kurz und bequem, wie im vorigen Falle, ist auch der Weg beschaffen, den wir zur Ermittelung des vorgenannten Integrals einschlagen und gehen wollen; denn er führt nicht direct und vollständig, sondern indirect, durch das keineswegs romantische Gebiet der Reihen, und nur annähernd zu dem erstrebten Ziele. —

Wir entwickeln zunächst die Binome: $(3-nz^8)^{2p}$, $(1+nz^8)^{-\frac{3}{2}}$ und $\frac{1}{(1-3nz^8)}^{2p-1}$ in Reihen nach dem sog. binomischen Satze und wenden alsdann auf die daraus hervorgegangene Reihe die unbestimmte Integration an. — Wir erhalten nunmehr:

$$\alpha.\ (3-nz^8)^{2p} = 3^{2p} - \frac{2p.3^{2p-1}}{1}(nz)^8 + \frac{2p(2p-1).3^{2p-2}}{1.2}.(nz)^2 - \frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3}.3^{2p-3}.(nz)^3$$

$$+\frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3).3^{2p-4}}{1.2.3.4}.(nz)^4 - \ldots\ldots\ldots = (-1)^{3r-2}\binom{2p}{r}.3^{2p-r}.n^r\sum_{r=0}^{r=2p}z^{8r},$$

worin nach dem allgemeinen Gebrauch: $\binom{2p}{r} = \frac{2p(2p-1)(2p-2)\ldots(2p-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r}$ bedeutet und wobei für $p = 0$ zu nehmen ist:

$$\binom{2p}{r} = 1.$$

$$\beta.\ (1+nz^8)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}nz^8 + \frac{3.5\,(nz^8)^2}{2^2.1.2} - \frac{3.5.7.(nz)^3}{2^3.1.2.3} + \frac{3.5.7.9\,(nz)^4}{2^4.1.2.3.4} - \ldots\ldots\ldots$$

$$= (-1)^{t+2}\frac{1.3.5\ldots(2t+1)}{2^t.t!}\sum_{t=0}^{t=\infty}(nz^8)^t,\ \text{worin } t! = 1.2.3\ldots t \text{ ist.}$$

$$\gamma.\ \frac{1}{(1-3nz^8)^{2p-1}} = 1 + (2p-1).3nz^8 + \frac{(2p-1).2p}{1.2}.(3nZ^8)^2 + \frac{(2p-1)(2p)(2p+1)}{1.2.3}(3nZ^8)^3$$

$$+\ldots\ldots = 1 + (3n)^v\sum_{v=1}^{v=\infty}\binom{2p+v-2}{v}_{v=1}^{v=v}.\,z^{8v},$$ worin der Ausdruck $\binom{2p+v-2}{v}_{v=1}^{v=v}$ das Produkt der aufeinander folgenden Zahlen bedeutet, welche für $v = 1, 2, 3, 4, \ldots.$ zum Vorschein kommen. —

Wenn wir die eben aufgestellten Summen (α, β, γ) in den ursprünglichen, oben ad 2 verzeichneten Ausdruck einführen, so erhalten wir unter Berücksichtigung des ad 1 ermittelten Werthes nach einigen Umformungen:

$$s = \frac{c}{2}\sqrt{m}\left\{2.\sqrt{\frac{\text{tang}\,\varphi}{1+n.\text{tang}^4\varphi}} + (-1)^{2p-1}\frac{1.3.5..(2p-3)(2p-1)}{2^{p-1}p!\,(2p-1)}\int dz\sum_{p=\infty}^{p=\infty}(-1)^{8r-2}\right.$$

$$\binom{2p}{r} 3^{2p-r} . n^r . \sum_{r=0}^{r=2p} (-1)^{t+2} \frac{1 . 3 . 5 . (2t+1) . n^t}{2^t . t!} \sum_{t=0}^{t=\infty} \Big[z^{4p+8r+8t} + (3n)^v . \sum_{v=1}^{v=\infty} \Big(\frac{2p+v-z}{v}\Big) .$$

$$. \sum_{v=1}^{v=\infty} z^{4p+8r+8t+8v} \Big] \Big\} ,$$

woraus durch unbestimmte Integration sich ergiebt:

$$s = \frac{c}{2} \sqrt{m} \Big\{ 2 . \sqrt{\frac{\tan\varphi}{1 + n . \tan^4\varphi}} + (-1)^{3p-1} \frac{1 . 3 . 5 . . (2p-3)(2p-1)}{2^{p-1} . p! (2p-1)} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-2)^{3r-2}$$

$$\binom{2p}{r} 3^{2p-r} . n^r . \sum_{r=0}^{r=2p} (-1)^{t+3} \frac{1 . 3 . 5 . . . (2t+1) . n^t}{2^t . t!} \sum_{t=0}^{t=\infty} \Big[\frac{z^{4p+8r+8t+1}}{4p+8r+8t+1} + (3n)^v$$

$$\Big(\frac{2p+v-z}{v}\Big)_{v=1}^{v=\infty} . \sum \frac{z^{2p+8r+8t+8v+1}}{4p+8r+8t+8v+1} \Big] \Big\} + C$$

Berücksichtigen wir, daß die vorhin unter α und β angegebenen Reihen für $z < \sqrt[8]{\frac{1}{n}}$ und die unter γ aufgestellte für $z < \sqrt[\infty]{\frac{1}{3n}}$ konvergiren, wie man sich leicht durch eine kleine, darüber anzustellende Untersuchung überzeugen kann, so können wir s innerhalb dieser Grenzen so genau, wie wir es nur wollen, berechnen. indem wir nur

$$\begin{aligned} p &= 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \\ r &= 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \\ t &= 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \\ v &= 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \end{aligned}$$

in den betreffenden Ausdrücken der Reihe nach setzen.

Bemerkung.

Da die auf Grundlage der eben aufgestellten Summenformel auszuführenden Rechnungen ziemlich umständlich und schwierig sind, so wollen wir des Beispiels wegen nur diejenige unserer drei Curvenarten wählen, welche für den zu erreichenden Zweck die einfachste ist — nämlich Curve C. Zählen wir den zu rektificirenden Bogen vom Anfangspunkte des Coordinatensystems an, so verschwindet die in dem für s aufgestellten Ausdrucke vorkommende Constante und wir erhalten, da $n = e$ und $m = 4$ ist,

$$s = c \Big[2z + (-1)^{3p-1} \frac{1 . 3 . 5 . . (2p-3)(2p-1)}{2^{2p-1} . p! (2p-1)} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{3^{2p} z^{4d+1}}{4p+1} \Big]$$

woraus für $z = \sqrt[8]{\frac{1}{3}}$ oder $\tan\varphi = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ sich ergiebt:

$$s = 2{,}647 \text{ c.}$$

II. Die Quadratur.

So complicirt und weitläufig der Weg war, auf dem wir die Beantwortung der Rectifications-Frage des Bogens s unserer Curven zu erreichen gesucht haben, ebenso einfach und kurz ist dagegen der Weg, auf dem wir zur Lösung der Frage nach der Quadratur der von den qu. Linien umzeichneten Flächen gelangen. –

Um die vorliegende Frage so genau als möglich zu beantworten, gehen wir aus

a. von der Polargleichung:

$$r = c \sec \varphi \sqrt{\frac{m \cdot \tang \varphi}{1 + n \cdot \tang^4 \varphi}}$$

und bezeichnen mit dF ein beliebiges Flächenelement unserer Curvenarten. Hiernach erhalten wir unter Berücksichtigung der allgemeinen Gleichung

$$F = \frac{1}{2} \int_{\varphi = 0}^{\varphi = \varphi} r^2 \, . \, d\varphi$$

für unsere Curvenarten den nachstehenden einfachen Ausdruck:

$$F = \frac{mc^2}{2} \int_{\varphi = 0}^{\varphi = \varphi} \frac{\sec^2 \varphi \, . \, \tang \varphi \, . \, d\varphi}{1 + n \, . \, \tang^4 \varphi},$$

den wir auf folgende Weise näher ergründen können. — Setzen wir:

$$\tang^2 \varphi = z, \text{ also } \tang \varphi \, . \, \sec^2 \varphi \, . \, d\varphi = \frac{dz}{2}$$

und führen diese neue Größe in das vorliegende Integral ein, so gelangen wir zu der Relation:

$$F = \frac{mc^2}{4} \int_{z = 0}^{z = z} \frac{dz}{1 + n z^2},$$

deren einfaches Integral durch die bekannte Gleichung:

$$\int \frac{dz}{1 + nz^2} = \sqrt{\frac{1}{n}} \text{ arc tang } (z \, . \, \sqrt{n}) + C$$

sehr leicht ermittelt wird und in den Integrations-Grenzen,

$$z = 0 \text{ und } z = \infty$$

1) für die Curve A $(n = 1)$ die Quadratur eines Quadrantenblattes im nachstehenden Ausdrucke liefert:

$$F = c^2 \int_0^\infty \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi c^2}{2}.$$

Bemerkung.

Multipliciren wir die vorgenannte Gleichung mit 4, d. h. berücksichtigen wir die vier Blätter, aus denen Curve A besteht, so erhalten wir:

$$4F = 2\pi c^2$$

d. h. die Fläche der vier Curvenblätter ist dem doppelten inneren Kreise gleich, welcher in den Figuren vorkommt. —

2) Für Curve B $(n = -1)$ erhalten wir in Bezug auf unsere Figur:

$$F = c^2 \int \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{c^2}{2} \, l. \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \text{ für } z < 1.$$

Bemerkung.

Integrirt man den Ausdruck für F zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = \frac{e-1}{e+1}$, worin e die Basis des natürlichen Logarithmen-Systems bedeutet, so erhalten wir

$$F = \frac{c^2}{2} \int_0^{\frac{e-1}{e+1}} \frac{dz}{1-z^2} = \frac{c^2}{2}$$

3) Für Curve C ($n = 0$) wird innerhalb der Grenzen $z = 0$ und $z = 1$ sein:

$$F = c^2 \int_0^1 dz = c^2.$$

Zum Schlusse unserer Untersuchung über die Quadratur der qu. Curvenarten wollen wir gleichsam zur Prüfung der gewonnenen Resultate noch auf einem anderen Wege zu dem erstrebten Ziele zu gelangen versuchen, indem wir:

b) von den beiden Gleichungen ausgehen:

$$\begin{cases} x = c \sqrt{\dfrac{m \,.\, \operatorname{tang} \varphi}{1 + n \,.\, \operatorname{tang}^4 \varphi}} \\ y = c \,.\, \operatorname{tang} \varphi \sqrt{\dfrac{m \,.\, \operatorname{tang} \varphi}{1 + n \,.\, \operatorname{tang}^4 \varphi}} \end{cases}$$

Bezeichnen wir auch jetzt mit dF ein Flächenelement irgend einer in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Curve, so gilt für die Quadratur derselben der allgemeine Ausdruck:

$$F = \int_{x=0}^{x=x} y \,.\, dx$$

Dieser Ausdruck nimmt nun für unsere Curvenarten die Form:

$$F = \frac{mc^2}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi} \frac{(1 \quad 3\,n \,.\, \operatorname{tang}^4 \varphi)\, \operatorname{tang} \varphi \,.\, \sec^2 \varphi \,.\, d\varphi}{(1 + n \,.\, \operatorname{tang}^4 \varphi)^2}$$

an und geht nach Einführung der Bezeichnungen:

$$\operatorname{tang}^2 \varphi = z \text{ und folglich } \operatorname{tang} \varphi \,.\, \sec^2 \varphi \,.\, d\varphi = \frac{dz}{2}$$

in den nachstehenden über:

$$F = \frac{mc^2}{4} \int_{z=0}^{z=z} \frac{dz}{(1+nz^2)^2} - \frac{3\,mnc^2}{4} \int_{z=0}^{z=z} \frac{z^2\,dz}{(1+nz^2)^2}$$

Da aber, wie leicht zu ermitteln, (Schlömilch: Algebraische Analysis § 69, 2 und 3) folgende Gleichungen bei unserer Untersuchung stattfinden:

$$\int \frac{dz}{(1+nz^2)^2} = \frac{z}{2\,(1+nz^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+nz^2} = \frac{z}{2\,(1+uz^2)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}} \operatorname{arc\,tang} (z \sqrt{n})$$

und

$$\int \frac{z^2\,dz}{(1+nz^2)^2} = -\frac{z}{n\,(1+nz^2)} + \frac{1}{n} \int \frac{dz}{(1+nz^2)^2} = -\frac{z}{n\,(1+nz^2)} + \frac{1}{2n} \cdot \left(\frac{z}{1+n\,z^2} + \sqrt{\frac{1}{n}} \operatorname{arc\,tang} \,.\, z \sqrt{n} \right)$$

so gestaltet sich nach einigen Zusammenziehungen und Umformungen die Relation für F also:

$$F = \frac{mc^2}{4}\left(\frac{2z}{1+nz^2} - \sqrt{\frac{1}{n}}\text{ arc tang }(z\sqrt{n})\right) + C.$$

Hieraus erhalten wir für unsere Curvenarten und Figurengebilde folgende Werthe.

1) Für Curve A $(n = 1)$ und in den Grenzen $z = 0$ und $z = \infty$

$$F = -\frac{\pi c^2}{2}$$

Bemerkung.

Der hier ermittelte Werth für F stimmt bis auf das Vorzeichen mit dem früher angegebenen überein. Der Grund dieser Abweichung liegt in dem Umstande, daß die Abscisse x von der Stelle, wo $\text{tang}^4\varphi = \frac{1}{3n}$, oder in unserem speziellen Falle, $\text{tang}^4\varphi = \frac{1}{3}$ wird, negativ wächst.

2) Für Curve B $(n = -1)$ führt die obige Gleichung:

$$F = \frac{mc^4}{4}\left(\frac{2z}{1+nz^2} - \sqrt{\frac{1}{n}}\text{ arc tang }(z\sqrt{n})\right) + C$$

auf das Gebiet des Imaginären und kann daher ohne weiteres nicht benutzt werden. — Wir nehmen daher unsere Zuflucht zu der primären Gleichung für F, welche in dem vorliegenden Falle die Form annimmt:

$$F = c^2\int_{z=0}^{z=z}\frac{dz}{(1-z^2)^2} + 3c^2\int_{z=0}^{z=z}\frac{z^2\,dz}{(1-z^2)^2}$$

Da hier die beiden Integrale, wie man sich leicht durch Anwendung der Differenziation überzeugen kann, die Werthe annehmen:

$$\int\frac{dz}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{1-z^2} + \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] + C \text{ und}$$

$$\int\frac{z^2\,dz}{(1-z^2)^2} = \frac{z}{1-z^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{z}{1-z^2} + \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] + C'$$

so erhalten wir:

$$F = c^2\left[\frac{2z}{1-z^2} - \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] + C$$

und für die Grenzen: $z = 0$ und $z = \frac{e-1}{e+1}$ schließlich: $F = \frac{c^2}{2}\left(\frac{e^2-e-1}{e}\right)$,

welches die zwischen der X-Achse und dem Curvenbogen $z = 0$ und $z = \frac{e-1}{c+1}$ eingeschlossene Fläche bedeutet.

3) Für Curve C $(n = 0)$ erhalten wir endlich, wenn wir die Grenzen $z = 0$ und $z = 1$ nehmen und von dem Ausdrucke:

$$F = \frac{mc^2}{4}\int_{z=0}^{z=z}\frac{dx}{(1+nz^2)^2} - \frac{3mnc^2}{4}\int_{z=0}^{z=z}\frac{z^2dz}{(1+nz^2)^2}$$ ausgehen: $$F = c^2\int_{z=0}^{z=1}dz = c^2.$$

Hiermit wollen wir die Untersuchung über unsere drei Curvenarten als abgeschlossen betrachten, indem wir die Cubatur ihrer etwaigen Rotations-Körper als nicht hierher gehörend unberücksichtigt lassen.

Zieliński.

Figuren-Tafel.

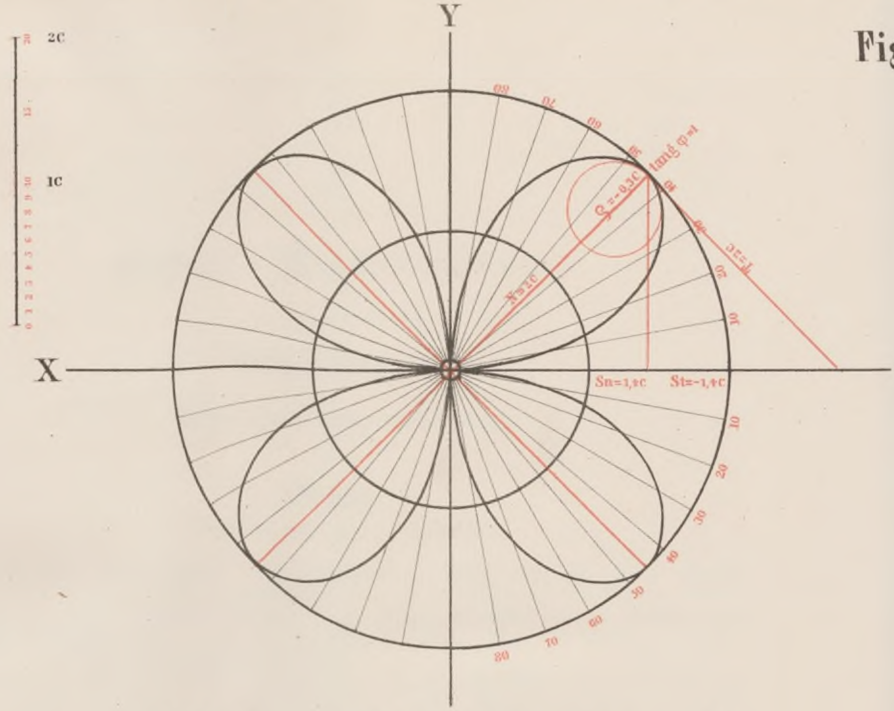


Fig. 1 nach Tafel 1 für Curve A.

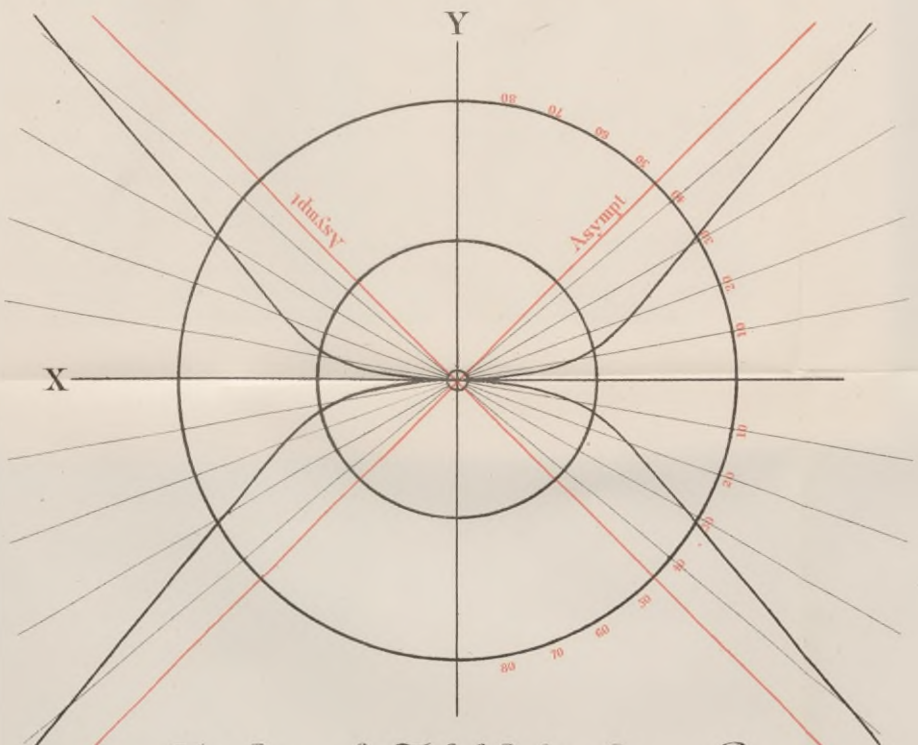
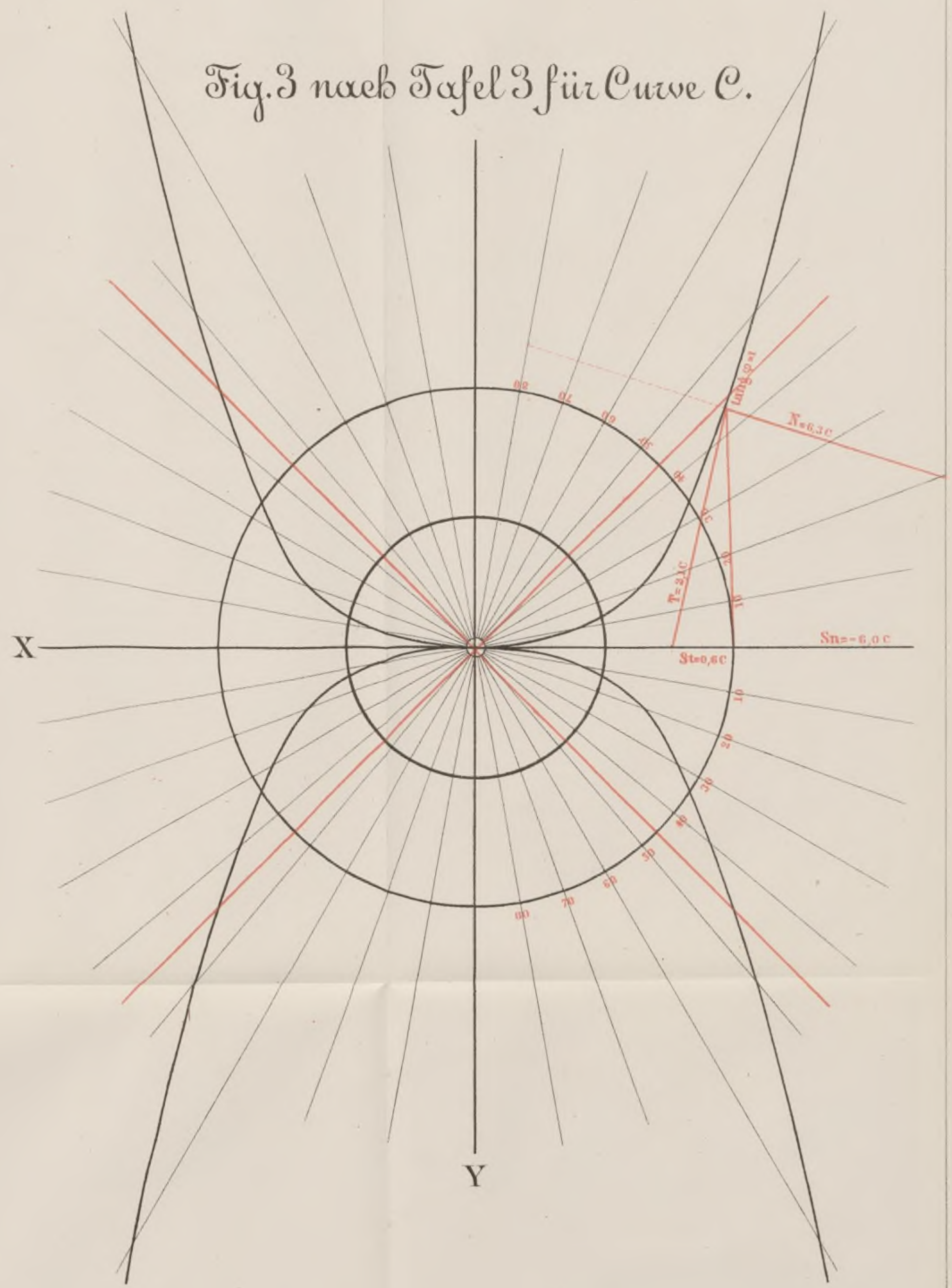


Fig. 2 nach Tafel 2 für Curve B.

Fig. 3 nach Tafel 3 für Curve C.



Lith. Anst. v. H. Keil, Gotha.

Schul-Nachrichten.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Lehrverfassung.

Prima.

Ordinarius: Herr Professor **Weierstraß**.

Deutsch. Uebersicht der neueren Litteraturgeschichte mit Proben aus Deycks. Lectüre: Göthe's Torquato Tasso, Lessing's Laokoon, Shakespeare's Coriolan. Leitung der Privatlectüre. Grundlehren der Psychologie. Dispositions-Uebungen. Freie Vorträge. Monatliche Aufsätze. Klassenarbeiten. 3 St. Herr Oberlehrer Loens. (In I. B Dispositions-Uebungen. Monatliche Aufsätze und Klassenarbeiten. 1 St. Herr Gymnasiallehrer Dr. Otto.)

Latein. Cic. pro Murena. De officiis I. Orator. Repetitionen aus der Grammatik. Syntaxis ornata und Stillehre. 14-tägige Exercitien nach Süpfle, 14-tägige Probearbeiten. Monatliche Aufsätze. Uebungen im Lateinsprechen. Leitung der Privatlektüre und freie Vorträge. Extemporiren. 5 St. Der Ordinarius. Horat. carm. lib. I. und II. und Carmen. saec. Ausgewählte Satiren. Wiederholung von lib. III. und IV. der Oden nebst metrischen Uebungen. 2 St. Der Direktor. Cursorische Lectüre: Tacitus Annal. lib. I. und Hor. epist. ad Pis. 1 St. Derselbe.

Griechisch. Plat. Euthyphron und Phaedon (mit Auswahl). Demosth. Philipp. 1. Olynth. I. II. Grammatische Repetitionen nach Buttmann. Correctur der 14-tägigen Exercitien. Extemporalien und Klassenarbeiten. 4 St. Der Direktor. Hom. Iliad. lib. 7. 8. 11. 15. 16. Repetition und Extemporiren ausgewählter Stellen. Sophocles Antigone. 2 St. Der Ordinarius.

Französisch. Lamartine: mort de Louis XVI. Bazancourt: l'expédition de Crimée. Corneille: le Cid. 14-tägige Exercitien und Extemporalien. Monatliche Klassenarbeiten. Repetition der Grammatik nach Knebel. Sprechübungen. 2 St. Herr Oberlehrer Dr. Bludau.

Hebräisch. Wiederholung der Formenlehre nach Vosen, die unregelmäßigen Verba und die wichtigsten Regeln aus der Syntax. Uebersetzt und erklärt wurden Psalmen und einige Kapitel aus den Büchern Samuel. Schriftliche Uebungen. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. Nach Dubelman die Glaubenslehre. Aus der Kirchengeschichte 1. 2. Zeitalter. Wiederholung der Sittenlehre. 2 St. Herr Probst Wurst. b. Für die evangelischen Schüler. Lectüre des Galaterbriefes. Die Kirchengeschichte bis Konstantin. Dogmatik. Christologie und die Lehre von dem heiligen Geiste. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Geschichte. Nach Pütz Geschichte der neueren Zeit. Repetitionen aus dem ganzen Gebiete der Geschichte. 2 St. Herr Oberlehrer Loens.

Geographie. Die Länder Europa's, namentlich Preußens und Deutschland. Wiederholungen aus dem ganzen Gebiete der Geographie. 1 St. Derselbe.

Mathematik. Trigonometrie, Stereometrie. Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit (abwechselnd häusliche und Klassenarbeiten). 4 St. Herr Oberlehrer Luke.

Physik. Akustik und Optik. 2 St. Derselbe.

Ober-Secunda.

Ordinarius: Herr Oberlehrer **Dr. Bludau.**

Deutsch. Uebersicht über die Poetik. Aufsatzlehre und Dispositions-Uebungen. Lectüre: Schiller's Wilhelm Tell. Didactische Gedichte aus Schiller. Einige Oden Klopstocks. Prosaische Stücke aus dem Lesebuch von Deycks. Freie Vorträge und Declamationen. Monatliche Aufsätze. 2 St. Herr Professor Weierstraß.

Latein. Liv. lib. XXI. und XXII. Cicero in Cat. I. und II. und pro lego Manilia, Laelius. Erklärung zum Theil lateinisch. Privatim: Sallust und Livius. Wöchentlich Extemporiren ungelesener Stellen aus Livius und Sallust. Grammatik nach Ellendt-Seyffert: Repetitionen. Syntaxis verbi. Mündliches Uebersetzen aus Süpfle. Correctur der 14-tägigen Exercitien. Außerdem 14-tägige Extemporalien. Einige Aufsätze. 6 St. Der Ordinarius. Virgil. Aen. lib. VIII. und IX und ausgewählte Eklogen. Metrische und Memorir-Uebungen. 2 St. Der Direktor.

Griechisch. Xenoph. Hell. III. und IV. Herod. lib. II. Grammatik nach Buttmann: Die Lehre von den Temporibus und Modis. Wiederholung der Formenlehre. Extemporalien und Correctur der 14-tägigen Exercitien. Monatliche Klassenarbeiten. 5 St. Herr Professor Weierstraß. Hom. Odyss. lib. XIII—XVIII, privatim und cursorisch XIX—XXII. Homerische Metrik. Ausgewählte Stellen wurden memorirt. 2 St. Der Direktor.

Französisch. Michaud: histoire de la troisième croisade. Grammatik nach Knebel: die Syntax des Verbums. Repetition der Formenlehre. 14-tägige Exercitien und Klassenarbeiten. Uebungen aus Höchsten. 2 St. Der Ordinarius.

Hebräisch. Nach Vosen die Elementar- und Formenlehre. Schriftliche Uebungen. Gelesen und analysirt wurden einige Kapitel aus den Büchern Sam. und dem Buche der Richter. 2. St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Religionslehre. a. Für katholische Schüler. Comb. mit Prima. b. Für die evangelischen Schüler. Die Bibelkunde des N. T. Lectüre des Evang. Marci. Einiges aus der Kirchengeschichte. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Geschichte. Nach Pütz Geschichte der Römer. Wiederholungen aus der Geschichte der Griechen und der Geschichte des Mittelalters. 2 St. Herr Oberlehrer Loens.

Geographie. Nach Pütz vergleichende Geographie der außereuropäischen Erdtheile unter besonderer Hervorhebung der natürlichen Verhältnisse. Uebungen im Kartenzeichnen. 1 St. Derselbe.

Mathematik. Wiederholung der Aehnlichkeitslehre. Trigonometrie. Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Renten-Rechnung. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit (abwechselnd häusliche und Klassen-Arbeiten). 4 St. Herr Oberlehrer Luke.

Physik. Von den Eigenschaften der Körper im Allgemeinen. Die Wärmelehre. 2 St. Derselbe.

Unter - Secunda.

Ordinarius: Herr Oberlehrer **Loens.**

Deutsch. Aufsatzlehre, Uebungen im Disponiren. Das Hauptsächlichste aus der Rhetorik (über die Figuren und Stilarten). Lectüre: Balladen von Schiller, Uhland, Rückert, Göthe. Kleine lyrische Gedichte. Ausgewählte Stücke aus Schiller's Dramen. Göthe's Hermann und Dorothea. Lectüre von Musterstücken aus dem Lesebuche von Deycks. Declamationen und Vorträge. Correctur der monatlichen Aufsätze und Klassenarbeiten. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Bordihn.

Latein. Liv. lib. II. und Cicero de imp. Cn. Pomp. Cato maior. Inhaltsangaben lateinisch. Privatim: Sallust. bell. Jugurth. und Cic. pro Archia poeta (einige Capitel wurden memorirt). Extemporiren ungelesener Stellen aus Cicero und Livius. Grammatik nach Ellendt-Seyffert: Repetitionen und das Hauptsächlichste aus der Syntaxis nominis et verbi. Mündliches Uebersetzen aus Süpfle. Correctur der 14-tägigen Exercitien. Schriftliche und mündliche Extemporalien; monatlich eine Klassenarbeit. 6 St. Der Ordinarius. Vergil. Aen. lib. I. und II. Memorir- und metrische Uebungen. 2 St. Herr Prof. Weierstraß.

Griechisch. Wiederholung der unregelmäßigen Verba und andere Repetitionen, das Wichtigste aus der Syntax, besonders die Lehre von den Casus. 14-tägige Exercitien, Extemporalien im Anschluß an die Grammatik und die Lectüre. Monatliche Klassenarbeiten. Lectüre Xenoph. Hell. lib. I. und II. Herodot. lib. VII. Extemporiren ungelesener Stellen aus Herod. und Xenoph. Anab. 5 St. Herr Gymnasiallehrer Bordihn.

Französisch. Lectüre von Choix de Contes et de Récits aus der Goebel'schen Sammlung. Grammatik nach Knebel aus der Syntax die Wortstellung, Lehre vom Artikel, Gebrauch der Casus, Lehre vom Adjektiv. Extemporalien und 14-tägige Exercitien. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Sioda.

Hebräisch: comb. mit Ober-Sekunda.

Religionslehre: comb. mit Prima resp. Secunda.

Geschichte und Geographie: comb. mit Ober-Secunda.

Mathematik: Wiederholung des Pensums der Ober-Tertia, insbesondere der Potenzen- und Wurzellehre. Gleichungen des 2. Grades mit einer und zwei Unbekannten, Logarithmen und Progressionen, sowie Zinseszinsrechnung. Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren. 4 St. Herr Gymnasiallehrer Zielinski.

Physik: comb. mit Ober-Secunda.

Ober - Tertia.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer **Dr. Otto.**

Deutsch. Lectüre aus dem 2. Theile von Linnig, verbunden mit Belehrungen über Periodenbau, Stilistik und das Versmaß der gelesenen Gedichte. Declamiren von Gedichten und Reproductionen erklärter Prosastücke ihrem Hauptinhalte nach. Correctur der 3-wöchentlichen Aufsätze. 2 St. Der Ordinarius.

Latein. Caes. bell. gall. lib. IV—VI. incl. und bell. civ. lib. I. Inhaltsangaben lateinisch. Extemporiren nicht gelesener Stellen. Grammatik nach Ellendt-Seyffert: Syntax des Nomens und des Verbums. Wiederholung der Formenlehre. Mündliches Uebersetzen aus Ostermann. Correctur der 14-tägigen Exercitien und monatlichen Klassenarbeiten. 7 St. Der Ordinarius. Ovid. Metam. ausgewählte Stücke nach der Ausgabe von Keck. Einzelnes wurde memorirt. Metrische Uebungen. 2 St. Der commissar. Gymnasiallehrer Herr Moczynski.

Griechisch. Nach Buttmann Wiederholung und Erweiterung des Pensums der Unter-Tertia, die Verba auf μι und die unregelmäßigen Verba. Gesammte Formenlehre des attischen Dialekts und die Hauptmomente der Wortbildung. Aus der Syntax das Nothwendigste bei der Lectüre. Wöchentliche häusliche Exercitien abwechselnd mit Klassenarbeiten. Lectüre: aus Jacobs Cursus I. 10, 11, 12 und Cursus II., im Winter-Semester Xenoph. Anab. lib. I. und II. 7. St. Herr Gymnasiallehrer Bordihn.

Französisch. Rollin: histoire d'Alexandre le Grand. Die ganze Formenlehre und die Syntax des Nomens nach Knebel. 14-tägige Exercitien und monatliche Klassenarbeiten. Uebungen nach Höchsten. 2 St. Herr Oberlehrer Dr. Bludau.

Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. Nach dem größeren Diöcesan-Katechismus die Lehre von der Gnade; die Lehre von den h. Sacramenten und von dem Gebete. Die Lehre vom Kirchenjahr. Wiederholung aus der biblischen Geschichte. 2 St. Herr Probst Wurst. b. Für die evangelischen Schüler. Ausführliche Erklärung des 3. 4. und 5. Hauptstückes. Leben Jesu nach dem Evang. Lucae. Bibellesen. Kirchenlieder nebst kurzen Lebensabrissen der wichtigsten Kirchenlieder-Dichter. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Geschichte. Nach Pütz deutsche und brandenburgisch-preußische Geschichte. 2 St. Herr Oberlehrer Loens.

Geographie. Preußen und Deutschland. Kartenlehre und Uebungen im Kartenzeichnen. 1 St. Derselbe.

Mathematik. Wiederholung des Pensums der Unter-Tertia. Gleichungen des ersten und zweiten Grades, Ausziehen der Quadrat-Wurzeln. Lehre vom Viereck und vom Kreise. Uebungen in der geometrischen Analysis. Alle drei Wochen eine schriftliche Arbeit. 3 St. Herr Gymnasiallehrer Zielinski.

Naturkunde. Mineralogie und Anthropologie. 2 St. Herr Oberlehrer Luke.

Unter-Tertia.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer **Bordihn**.

Deutsch. Lectüre aus Linnig II. Theil. Satzlehre. Declamationen. Correctur der 3-wöchentlichen Aufsätze. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Latein. Caes. bell. gall. lib. I—IV. Einiges wurde memorirt. Lateinische und deutsche Inhaltsangaben und Extemporiren nicht gelesener Stellen. Grammatik nach Ellendt-Seyffert: Die Lehre von den Casus und die Syntax des Verbums. Repetition der Formenlehre. Mündliches und schriftliches Uebersetzen aus Meiring's und Ostermann's Uebungsbuch im Anschluß an die Grammatik. Correctur der wöchentlichen Exercitien abwechselnd mit Klassenarbeiten. Vokabellernen aus Bonnell II. Theil. 7 St. Der Ordinarius. Ovid. Metam. nach Keck's Ausgabe. Einiges wurde memorirt. Prosodie und metrische Uebungen. 2 St. Der commissar. Gymnasiallehrer Herr Moczynski.

Griechisch. Grammatik nach Buttmann: Die regelmäßige Formenlehre bis zu den Verbis liquidis. Correctur der wöchentlichen Exercitien (abwechselnd mit Klassenarbeiten). Uebersetzt wurde aus Jacobs Cursus 1—9. 7 St. Der commissar. Gymnasiallehrer Herr Barwinski.

Französisch. Nach Knebel's Grammatik die Formenlehre bis zu den unregelmäßigen Verben. Lectüre aus Knebel's Lesebuch. Uebungen aus Höchsten. 14-tägige Exercitien und Extemporalien, monatlich eine Klassenarbeit. 2 St. Herr Oberlehrer Dr. Bludau.

Religioslehre: comb. mit Ober-Tertia.

Geschichte. Nach Welter die römische Geschichte bis zum Untergange des weströmischen Reiches. Wiederholung der Geschichte der Griechen. Brandenburgisch-preußische Geschichte. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Dr. Otto.

Geographie. Nach Nieberding Geographie von Europa mit Ausschluß von Deutschland. Uebungen im Kartenzeichnen. 1 St. Derselbe.

Mathematik Die 4 Species in allgemeinen Ausdrücken, Gleichungen des ersten Grades. Planimetrie bis zur Kreislehre excl. Alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit (abwechselnd häusliche und Klassenarbeiten). 3 St. Herr Oberlehrer Luke.

Naturkunde. Im Winter Zoologie, im Sommer Botanik. 2 St. Derselbe.

Quarta.

Ordinarius: Der commissar. Gymnasiallehrer Herr **Barwinski**.

Deutsch. Lectüre aus Linnig II. Theil mit besonderer Berücksichtigung der Lehre vom Satzbau und der Interpunktion. Vortrag auswendig gelernter Gedichte und Wiedererzählen der erklärten Prosastücke. Correctur der 14-tägigen schriftlichen häuslichen Arbeiten resp. Klassenarbeiten. 2 St. Der Ordinarius.

Latein. Corn. Nep. I—XII. Die Biographie des Miltiades wurde memorirt. Extemporiren ungelesener Stellen. Grammatik nach Ellendt-Seiffert: Wiederholung der Formenlehre aus der Syntax, die Uebereinstimmung der Satztheile, vom Gebrauch der Casus, das Nothwendigste über den Acc. c. inf., Abl. abs., Conjunctiv nach ut. ne, quo, quin 2c. Mündliches Uebersetzen aus Meiring im Anschluß an die Grammatik. Vokabellernen nach Bonnell. Correctur der wöchentlichen Exercitien abwechselnd mit Klassenarbeiten. 7 St. Der Ordinarius. Ausgewählte Fabeln aus Phaedrus, von denen mehrere memorirt wurden. Das Nothwendigste aus der Prosodie und über den jambischen Senar. 2 St. Derselbe.

Französisch. Nach Probst's Vorschule Wiederholung des Pensums der Quinta, die regelmäßigen Conjugationen, das rückbezügliche Zeitwort, das Wichtigste über die Pronomina und die gebräuchlichsten unregelmäßigen Verba. Correctur der 14-tägigen Exercitien und monatlichen Klassenarbeiten. 5 St. Der Ordinarius.

Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. Combinirt mit Tertia AB. b. Für die evangelischen Schüler. Ausführliche Erklärung des ersten Hauptstückes. Das Kirchenjahr und die evang. Gottesdienst-Ordnung. Die Lehre vom Worte Gottes. Ausgewählte biblische Geschichten des A. T. Kirchenlieder. Wiederholung der Gebete. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Geschichte. Nach Welter Geschichte der orientalischen Völker und Griechen bis zum Tode Alexanders. 2 St. Derselbe.

Geographie. Nach Nieberding Geographie der außereuropäischen Erdtheile. Uebungen im Kartenzeichnen. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Dr Otto.

Mathematik und Rechnen. Wiederholung der Pensums der Quinta. Regeldetri und bürgerliche Rechnungsarten. Buchstabenrechnung. Anfangsgründe der Geometrie. Congruenz der Dreiecke. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. 4 St. Herr Gymnasiallehrer Zielinski.

Naturkunde. Im Winter Anthropologie und Einiges aus der Zoologie (Säugethiere), im Sommer Botanik. 2. St. Derselbe.

Quinta.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer **Zielinski**.

Deutsch. Lectüre aus Linnig I. Theil, verbunden mit Belehrungen über den einfachen und zusammengesetzten Satz, über Interpunktion und Orthographie. Uebungen im mündlichen Vortrage des Gelesenen und im Declamiren auswendig gelernter Gedichte. Correctur der wöchentlichen schriftlichen Arbeiten (abwechselnd mit Klassenarbeiten). 2 St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Latein. Nach Ellendt-Seyffert Einübung der gesammten Formenlehre und einiger Regeln aus der Syntax. Uebersetzt wurden aus dem Uebungsbuch von Schultz die entsprechenden Uebungsbeispiele und einige zusammenhängende Stücke. Correctur der wöchentlichen Exercitien (abwechselnd mit Klassenarbeiten). Vokabellernen im Anschluß an das Lesebuch und die Grammatik. 9 St. Herr Gymnasiallehrer Sioda.

Französisch. Aus der Vorschule von Probst bis zum 3. Abschnitt. Aussprache, Conjugation von avoir und être, das Substantiv, Adjectiv, Zahlwort nnd die regelmäßigen Conjugationen. Correctur der 14-tägigen schriftlichen Arbeiten. 4 St. Herr Oberlehrer Dr. Bludau.

Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. Nach Kabath die biblische Geschichte des N. T. nebst Wiederholungen aus der biblischen Geschichte des A. T. Nach dem kleinen Diöcesan-Katechismus das Glaubensbekenntniß, die zehn Gebote, die fünf Kirchengebote, von der Tugend, von der Sünde; von der Gnade und den Gnadenmitteln. 2 St. Herr Probst Wurst. b. Für die evangelischen Schüler. Ausgewählte biblische Geschichten des A. und N. T. Das zweite Hauptstück. Kirchenlieder. Gebete. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Geschichte. Biographische Erzählungen aus der Geschichte des Mittelalters. 1 St. Herr Oberlehrer Loens.

Geographie. Nach Nieberding Wiederholung des Pensums der Sexta, die Länder Europa's, besonders Deutschland und Preußen. Uebungen im Kartenzeichnen. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Dr. Otto.

Rechnen. Wiederholung des Pensums der Sexta. Die gewöhnlichen Brüche und die Decimalbrüche; die bürgerlichen Rechnungsarten. Kopfrechnen. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. 4 St. Der Ordinarius.

Naturkunde. Im Winter Zoologie nach Leunis, im Sommer Botanik nach Burmeister. 2 St. Derselbe.

Sexta.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer **Sioda**.

Deutsch. Uebungen im richtigen Lesen (I. Theil von Linnig). Belehrung über die Wortarten und deren Beugung, ferner über den Satz und dessen Erweiterung. Nacherzählen kurzer gelesener Stücke. Declamiren auswendig gelernter Gedichte. Uebungen in der Orthographie und Interpunktion. Correctur der wöchentlichen schriftlichen Arbeiten. 3 St. Der commissar. Gymnasiallehrer Herr Moczynski.

Latein. Grammatik nach Ellendt-Seyffert: die regelmäßige Formenlehre. Uebersetzen der Uebungsstücke aus Schultz bis § 76. Die Vokabeln und einige Sätze wurden memorirt. Wöchentlich ein Exercitium oder eine Klassenarbeit (abwechselnd). 9 St. Der Ordinarius.

Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. Comb. mit Quinta. b. Für die evangl. Schüler. Ausgewählte biblische Geschichten des A. und N. T. Das erste Hauptstück. Kirchenlieder. Gebete. 3 St. Herr Gymnasiallehrer Wallat.

Geschichte. Sagen und biographische Erzählungen aus dem Alterthum. 1 St. Herr Gymnasiallehrer Dr. Otto.

Geographie. Nach Nieberding die wichtigsten Vorbegriffe. Beschreibung der Oceane und ihrer Theile. Allgemeine oro- und hydrographische Uebersicht der Erdtheile. 2 St. Derselbe.

Rechnen. Das Zahlensystem. Die 4 Species in unbenannten und benannten Zahlen. Münz-, Maaß-, Gewicht- und Jahresrechnung. Einfache Regeldetri. Kopfrechnen. Alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit. 4 St. Der commissar. Gymnasiallehrer Herr Moczynski.

Naturkunde. Im Winter Zoologie nach Leunis, im Sommer Botanik nach Burmeister unter besonderer Berücksichtigung der einheimischen Pflanzen. 2 St. Derselbe.

Uebersicht

der Vertheilung der Ordinariate und Unterrichtsgegenstände an die einzelnen Lehrer.

Lehrer.	Ordinariat.	I	IIA	IIB	IIIA	IIIB	IV	V	VI	Sa.	Bemerkungen
1. Prof. **Lowinski**, Direktor.		2 Horaz. 4 Griech. 1 Latein.	2 Verg. 2 Homer.							11 St.	
2. Prof. **Weierstraß**, Oberlehrer.	I	5 Latein. 2 Homer.	2 Deutsch. 5 Griech.	2 Verg. 2 Hom.						18	
3. Vacat. (Kommissar.) **Luke**, Oberlehrer.		4 Math. 2 Physik.	4 Math. 2 Physik.		2 Naturk.	3 Math. 2 Naturk.				19	Außerdem 3 St. Turnen.
4. Dr. **Bludau**, Oberlehrer.	II A	2 Franz.	6 Latein. 2 Franz.		2 Franz.	2 Franz.		4 Franz.		18	
5. **Loens**, Oberlehrer.	II B	3 Deutsch. 3 Gesch. u. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.	6 Lat.	3 Gesch u. Geogr.			1 Gesch		19	
6. **Zielinski**, Gymnasiallehrer.	V			4 Math.	3 Math Polnisch in 2 außerord. St. 2. Abth.		4 Math. 2 Naturk.	4 Rchn. 2 Naturk.		21	
7. Vacat.*)											
8. **Sioda**, Gymnasiallehrer.	VI	Poln. in 2 auß. St. 1. Abth.		2 Franz.				9 Lat.	9 Lat.	22	war beurlaubt im April, Mai, Juni v. J.
9. **Bordihn**, Gymnasiallehrer.	III B			2 Deutsch. 5 Griech.	7 Griechisch.	7 Lat.				21	
10. Vacat. (Kommissar.) Dr. **Otto**, Gymnasiallehrer.	III A	1 Deutsch. (Ib)			2 Dtsch 7 Lat.	3 Gesch u. Geogr.	2 Geogr.	2 Geogr.	3 Gesch u Geogr.	20	
11. **Wallat**, Gymnasiallehrer.		2 Relig. 2 Hebr.	2 Rel. 2 Hebr.		2 Religion.	2 Dtsch	2 Relig. 2 Gesch.	2 Relig 2 Dtsch	3 Relig	23	Außerdem 3 St. Turnen.
12. **Barwinski**, Kommissar. Gym.-Lehr.	IV					7 Griechisch.	2 Deutsch. 9 Latein. 5 Franz.			23	
13. **Moczynski**, Kommissar. Gym.-Lehr.					2 Ovid	2 Ovid	2 Zeichn.	2 Zeichnen. 2 Schr.	3 Dtsch. 4 Rech. 2 Naturkunde. 2 Zeich. 2 Schr.	23**)	

*) Der hiesige Ortspfarrer Probst Wurst ertheilte den kathol. Religionsunterricht in 6 außerordentlichen Stunden. S. Abschnitt III.

**) Der hiesige Chorrektor Greckſch leitete den Gesangunterricht in 5 wöchentlichen Stunden.

Fertigkeiten.

Zeichnen. a. In Sexta. 2 St. Uebungen nach Vorlagen von Adler. Die Elemente des Zeichnens mit Formenlehre. b. In Quinta. 2 St. Freihandzeichnen nach Vorlagen von Adler; das Schattiren; Naturzeichnen nach Körpern. c. In Quarta. 2 St. Landschaften und Kopfstudien nach Mustern von Adler. Der commissar. Gymnasiallehrer Herr Moczynski.

Schreiben. a. In Sexta. 2 St. Die einfachsten Formen der deutschen und lateinischen Handschrift. b. In Quinta. 2 St. Die deutsche und lateinische Handschrift; Verschönerung der einfachen Züge. Derselbe.

Singen. a. In Sexta (comb. mit Quinta). 2 St. Notenkenntniß; Gehör- und Tonbildung; rhythmische und dynamische Uebungen, ein- und zweistimmige Lieder. b. Für den Gymnasialchor. 3 St. Gesangstücke für Männer- und gemischten Chor nebst theoretischen Anweisungen. Herr Chorrector Grecksch.

Turnen. Marsch-, Frei- und Ordnungsübungen nach Rothstein und Niggeler. Geräthe-übungen nach Ravenstein und Dieter's Merkbüchlein. Die Schüler turnten im Sommer in 2 Abth. (jede Abth. 2 mal wöchentlich je $1^1/_2$ St.), im Winter in 3 Abth. (jede Abth. 2 mal wöchentlich je 1 St.) unter Leitung des Herrn Oberlehrer Luke und des Herrn Gymnasiallehrer Wallat. Die Vorturner wurden in besonderen Stunden geübt.

Der Unterricht in der polnischen Sprache

wurde für diejenigen deutschen Schüler, welche diese Sprache zu erlernen wünschten, und für die polnischen Schüler in 2 außerordentlichen Stunden ertheilt. I. Abth. Lectüre nach dem Lesebuche von Kampmann. Literaturgeschichte nach Nehring. Declamiren auswendig gelernter Gedichte. Aufsätze, Exercitien und Extemporalien. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Sioda. II. Abth. Nach Wolinski's Lesebuch Lese-Uebungen und Formenlehre nebst Uebersetzen der bezüglichen Stücke. Declamiren auswendig gelernter Gedichte. 14-tägige Exercitien. 2 St. Herr Gymnasiallehrer Zielinski.

Die Aufgaben zu der schriftlichen Prüfung der Abiturienten für den diesjährigen Ostertermin:

a. Für den deutschen Aufsatz:
Charakterschilderung des Tasso und des Antonius. Nach Goethe's Torquato Tasso.

b. Für den lateinischen Aufsatz:
Dies Alliensis et Chaeronensis comparentur.

c. Für die Mathematik:

1) Auf eine Schuld werden nach 4 Jahren 1000 Mark, nach weiteren 3 Jahren wieder 1000 Mark und vom Ende des 10. Jahres an jährlich 500 Mark abgezahlt; wenn nun die Schuld nach 6 Terminen von 500 Mark getilgt ist, wie groß war die Schuld (4 %)?
2) Einem gegebenen Kreise ein Dreieck einzubeschreiben, wenn der Winkel an der Spitze α und die Differenz der Quadrate der Scheitelseiten $b^2 - c^2 = \delta^2$ gegeben ist.
3) Von einem Dreieck ist gegeben: der Radius r des umbeschriebenen Kreises $= 15$, der Winkel an der Spitze $a = 74^\circ\ 15'\ 36''$ und der Flächeninhalt $i = 200$; das Dreieck zu berechnen.
4) Durch die Grundkante eines Tetraeders und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenkante ist eine Ebene gelegt; den Neigungswinkel dieser Ebene gegen die Grundfläche und den Inhalt dieser Schnittfläche zu berechnen; ferner wie verhalten sich die beiden Theile, in welche das Tetraeder durch diese Schnittfläche getheilt wird? (Die Kante $a = 20$).

Zweiter Abschnitt.

Verfügungen des Königlichen Provinzial-Schul-Kollegiums.

1) Vom 13. März 1883. Ein Exemplar der von dem Herrn Minister der geistlichen ꝛc. Angelegenheiten erlassenen allgemeinen Bestimmungen, betreffend Aenderungen in der Abgrenzung der Lehrpensa ꝛc., wird zur Kenntnißnahme und Nachachtung bei der Aufstellung resp. Ausführung des Lehrplanes für das neue Schuljahr der Direktion übersendet.

2) Vom 22. März 1883. Der Ministerial-Erlaß vom 15. März 1883, durch welchen die gegenwärtig geltenden Lehrpläne der Gymnasien und Realgymnasien bezüglich des Ueberganges von einer Kategorie der Schulen zur anderen näher erläutert werden, wobei es sich namentlich um die Versetzung nach Unter-Tertia handelt, wird mitgetheilt.

3) Vom 2. April 1883. Betrifft die Bewilligung des von dem Gymnasiallehrer Sioda zu einer wissenschaftlichen Reise nachgesuchten Urlaubs. Zu seiner Vertretung für die Monate April, Mai und Juni wird der cand. prob. Günther aus Elbing der Anstalt zugewiesen.

4) Unter demselben Datum. An Stelle des an das Königliche Gymnasium zu Culm versetzten Gymnasiallehrers Dr. Lehmann wird der Gymnasiallehrer Dr. Otto aus Konitz dem Gymnasium zugewiesen.

5) Vom 21. April 1883. Der eingereichte Lehrplan für das Schuljahr 1883|84 wird genehmigt.

6) Unter demselben Datum. Im Auftrage des Herrn Ministers der geistlichen ꝛc. Angelegenheiten wird der zweite Oberlehrer Professor Rautenberg an das Gymnasium zu Marienburg vom 15. Mai 1883 ab versetzt. Gleichzeitig wird Oberlehrer Luke aus Marienburg an das hiesige Gymnasium versetzt.

7) Vom 16. Juli 1883. Betrifft die durch Ministerial-Erlaß vom 23. April 1883 über die Vorschule getroffenen allgemeinen Anordnungen.

8) Vom 17. August 1883. Da nach dem Allerhöchsten Erlasse vom 21. Mai d. J. der 400jährige Geburtstag Dr. Martin Luthers als ein evangelisches Kirchen- und Schulfest gefeiert wird, so sind am 10. November die Lehrer und Schüler des Gymnasiums, welche der evangelisch-unirten oder der lutherischen bez. reformirten Konfession angehören, vom Unterricht zu dispensiren, damit sie sich an einer anderweiten Feier betheiligen können. In den Schulräumen selbst ist eine solche Feier nicht zu veranstalten, vielmehr bleibt der Unterrichtsbetrieb an der Anstalt im regelmäßigen Gange.

9) Vom 23. Oktober 1883. Der Ministerial-Erlaß vom 17. Oktober 1883, betreffend den Unterricht im Stenographiren an den höheren Schulen, wird mitgetheilt.

10) Vom 5. Januar 1884. Die Ferien an den höheren Lehranstalten werden für das Jahr 1884 in folgender Weise bestimmt:

Ostern,	Schulschluß am	2. April,	Anfang am	17. April.
Pfingsten,	„ „	30. Mai,	„ „	5. Juni.
Sommer,	„ „	5. Juli,	„ „	4. August.
Michaelis,	„ „	27. September,	„ „	13. Oktober.
Weihnachten,	„ „	20. Dezember,	„ „	5. Januar.

11) Vom 13. Februar 1884. Für die Berathungen der nächsten im Jahre 1886 stattfindenden gemeinschaftlichen Direktoren-Konferenz der Provinzen Ost- und Westpreußen sind drei Themata in Vorschlag zu bringen.

Dritter Abschnitt.

Chronik des Gymnasiums.

Das neue Schuljahr wurde Donnerstag den 5. April v. J. mit feierlichem Gottesdienst in üblicher Weise eröffnet.

Die Prüfung und Aufnahme der neuen Schüler fand an den vorhergehenden Tagen statt.

Der Religionsunterricht für die katholischen Schüler wurde wiederum während des verflossenen Schuljahres von dem Ortspfarrer Herrn Probst Wurst in derselben Weise wie früher (S. vorjähr. Programm S. 32) und zwar in 3 comb. Abth. zu je 2 St. wöchentlich ertheilt. Die 1. Abth. umfaßte die Klassen I AB und II AB, die 2. Abth. die Klassen III AB und IV, die 3. Abth. die Klassen V und VI.

Mit dem Beginn des Schuljahres traten als neue Mitglieder in das Lehrer-Kollegium die Herren Gymnasiallehrer Dr. Otto aus Konitz und der Kandidat des höheren Schulamts Günther aus Elbing ein, der Erstere an Stelle des an das Gymnasium zu Culm versetzten Gymnasiallehrers Herrn Dr. Lehmann (S. II. Abschnitt Nr. 4), der Letztere zur Ableistung seines Probejahres und gleichzeitig zur Vertretung des beurlaubten Gymnasiallehrers Herrn Sioda (S. II. Abschnitt Nr. 3).

Durch Verfügung des Königlichen Provinzial-Schul-Kollegiums wurden die bisherigen kommissar. Gymnasiallehrer Herren Dr. Otto und Wallat zu ordentlichen Lehrern bei dem hiesigen Gymnasium vom 1. April pr. ernannt. Die vorschriftsmäßige Vereidigung beider durch den Unterzeichneten fand am 29. April v. J. statt.

Mit Genehmigung der Hohen Behörden wurde Herr Oberlehrer Luke vom Königl. Gymnasium zu Marienburg am 18. Mai pr. an das hiesige Gymnasium versetzt. Derselbe übernahm die mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtsstunden des von demselben Zeitpunkte ab an das Königl. Gymnasium zu Marienburg von hier versetzten 2. Oberlehrers Herrn Professor Rautenberg (S. II. Abschnitt Nr. 6).

Im Laufe des Sommers machten die Schüler klassenweise in Begleitung der Ordinarien und der beiden Turnlehrer mehrere Male Spaziergänge und Turnfahrten in die nächste Umgebung der hiesigen Stadt.

Die Sommer-Ferien dauerten vom 28. Juni bis 2. August v. J.

In Folge des Aufrufes Sr. Kaiserlichen und Königlichen Hoheit des Kronprinzen vom 10. August v. J. und der Bekanntmachung des Berliner Central-Komité's vom 13. August bez. des hiesigen Lokal-Komité's vom 21. August wurde von den Schülern der Anstalt für die Verunglückten auf der Insel Ischia die Summe von 28,95 Mark aufgebracht, welche an den Herrn Bürgermeister Müller hierselbst behufs Weiterbeförderung an die Centralstelle am 31. Aug. v. J. abgeliefert worden ist.

Mit Genehmigung des Königlichen Provinzial-Schul-Kollegiums trat der kommissarische Gymnasiallehrer Herr Moczynski vom Königlichen Gymnasium zu Neustadt am 15. August pr. in das hiesige Lehrer-Kollegium ein und übernahm zugleich den größten Theil der Unterrichtsstunden des früheren technischen Lehrers, während die Gesangstunden des Letzteren von demselben Zeitpunkte ab dem Chorrektor Herrn Greckſch übertragen wurden.

Am 1. September v. J. fand eine Vorfeier des Gedenktages der Schlacht von Sedan durch einen Schulactus mit Gesang, Declamation und Vorträgen statt. Die Festrede hielt Herr Gymnasiallehrer Sioda.

Die Herbst-Ferien dauerten vom 29. September bis 15. Oktober v. J.

Drei hoffnungsvolle liebe Schüler verloren wir durch den Tod, den Sextaner Alfred Tischer von hier († am 3. Mai 1883), den Primaner Aloysius Friske aus Schloppe († am 14. November 1883) und den Ober-Sekundaner Stefan Krzycki aus Potulice Kr. Wongrowitz († am 26. Febr. 1884). Möge Gott die trauernden Eltern über den frühen Heimgang der Dahingeschiedenen trösten!

Die h. Sakramente der Buße und des Altars empfingen die katholischen Schüler drei Mal in der Pfarrkirche. Den Herren Geistlichen, welche hierbei bereitwillige Aushülfe geleistet haben, ist die Anstalt zu Danke verpflichtet.

Die evangelischen Schüler nahmen in der von ihrem Religionslehrer bestimmten Ordnung an dem Gottesdienste in der evangelischen Pfarrkirche, sowie an den zweimal wöchentlich in der Aula abgehaltenen werktägigen Schulandachten Theil.

Am 2. März d. J. fand unter Leitung des Herrn Chorrektors Grecksch und unter Mitwirkung des Gymnasialchors sowie hiesiger Musikfreunde ein zahlreich besuchtes Symphonie-Konzert in der Aula des Gymnasiums statt. Der zur Abiturienten-Prüfung anwesende Herr Provinzial-Schulrath Dr. Kruse beehrte das Konzert gleichfalls durch seine Gegenwart.

Der nach Abzug sämmtlicher Unkosten übrig gebliebene Betrag von 71,25 Mk. ist an die Gymnasialkasse behufs Berichtigung von Schulgeldresten für 3 unbemittelte Schüler der Anstalt abgeführt worden.

Zu gleichem Zwecke hatte auch Herr Gymnasiallehrer Dr. Otto früher den unter Freunden und Gönnern der Anstalt gesammelten Betrag von 22,50 Mark der Gymnasial-Kasse überwiesen.

Die mündliche Abiturienten-Prüfung für den Oster-Termin wurde unter dem Vorsitze des Königl. Kommissarius Herrn Provinzial-Schulraths Dr. Kruse am 3. März abgehalten. Am darauf folgenden Tage wohnte derselbe den Unterrichtsstunden in einigen Klassen bei.

Das Hohe Geburtsfest **Sr. Majestät des Kaisers und Königs** wurde am 22. März d. J. zuerst durch einen festlichen Gottesdienst in der Pfarrkirche mit Te Deum und dann unter gewohnter zahlreicher Theilnahme Seitens der Behörden und Einwohner der Stadt durch einen Schulactus, bei welchem Herr Gymnasiallehrer Bordihn die Festrede hielt, in der festlich geschmückten Aula feierlichst begangen

Ueber die mit dem Beginn des neuen Schuljahres bevorstehenden Veränderungen im Lehrer-Kollegium kann erst im nächsten Programme berichtet werden.

Vierter Abschnitt.

Uebersicht der Frequenz.

A. Während des Sommer-Semesters 1883 waren in IAB 30, in IIA 20, in IIB 28, in IIIA 36, in IIIB 44, in IV 43, in V 34, in VI 19, zusammen **254** Schüler (darunter 44 neu aufgenommene). Von denselben waren 73 katholischer, 137 evangel. Confession, 44 jüdischen Glaubens, 126 einheimisch, 128 von auswärts.

B. Während des Winter-Semesters 1883—84 waren in IAB 27, in IIA 19, in IIB 28, in IIIA 36, in IIIB 42, in IV 44, in V 34, in VI 19, zusammen **249** Schüler (darunter 12 neu aufgenommene). Von denselben sind 75 katholischer, 129 evangelischer Confession, 45 jüdischen Glaubens, 114 einheimisch, 135 von auswärts.

Die Abiturienten-Prüfung für den Oster-Termin haben folgende 9 Ober-Primaner abgelegt und bestanden:

1) **Richard Ebert** aus Jastrow, Kreis Dt. Krone, evang. Confession, 3 Jahre in Prima, will Medicin studiren.
2) **Johannes Eichstädt** aus Breitenstein, Kreis Dt. Krone, kath. Confession, 2 Jahre in Prima, will Medicin studiren.
3) **Bruno Finger** aus Strasburg, Kreis Strasburg, evang. Confession, 2 Jahre in Prima, will Theologie studiren.
4) **Stefan Lowinski** aus Dt. Krone, kath. Confession, 2 Jahre in Prima, will Theologie studiren.
5) **Hugo Marquard** aus Rederitz, Kreis Dt. Krone, evang. Confession, 2 Jahre in Prima, will Rechtswissenschaft studiren.

6) **Georg Mayen** aus Dt. Krone, evang. Confession, 2 Jahre in Prima, will sich dem Baufache widmen.
7) **Hugo Scheel** aus Polajewo, Kreis Obornik, evang. Confession, 2 Jahre in Prima, will Theologie studiren.
8) **Andreas Stopierzynski** aus Usch, Kreis Kolmar i. P., kath. Confession, 3 Jahre in Prima, will sich dem Baufache widmen.
9) **Johannes Zadow** aus Freudenfier, Kreis Dt. Krone, kath. Konfession, 2 Jahre in Prima, will Medicin studiren.

Den Abiturienten **Finger, Lowinski** und **Marquard** ist die mündliche Prüfung erlassen worden.

Zur Erhaltung und Vermehrung der Bücher und Sammlungen ist die in dem Etat festgesetzte Summe verwendet worden.

Folgende Geschenke sind dem Gymnasium zugegangen:

I. Von den hohen Behörden:
1) Pädagogisches Archiv. Begründet von W. Langbein. Herausgegeben vom Direktor Dr. Krumme. 25. Jahrgang. Stettin. 1883.
2) Zeitschrift für das deutsche Alterthum. Von E. Steinmeyer. Fortsetzung. Berlin. 1883 und 1884.
3) Publikationen aus den Kgl. Preuß. Staats-Archiven. 16. 17. 18. Band. Leipzig. 1883.
4) Pierluigi da Palestrina's Werke. 15. Band (Messen 6 Buch) und 29. Band. Einstimmige Madrigale. (Erstes und zweites Buch).

II. Von einem dankbaren Schüler und Gönner der Anstalt: Weltgeschichte. Von Leopold Ranke. 3. Auflage. 4 Bände. Leipzig. 1883.

III. Von den Verlegern:
1) Friedrich Andreas Perthes in Gotha:
Griechisches Elementarbuch. Von Dr. E. Bachof. 1. Theil. Gotha. 1883.
2) Lipsius & Tischer in Kiel:
ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ ΑΝΑΒΑΣΙΣ. Griechisches Lesebuch für Unter-Tertia. Von Justus von Destinon. Kiel. 1883.
3) Hermann Schultze in Leipzig:
Lehrbuch der Planimetrie und Stereometrie. Von Dr. Rottok. Leipzig. 1883.
4) Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses in Halle a. S.
Elementarbuch zu der lateinischen Grammatik von Ellendt-Seyffert. Von Dr. Hennigs. 4. Abth. Uebungsstücke zur Syntax. Halle. 1883. – M. Tullii Ciceronis Cato Maior sive de senectute dialogus. Schulausgabe von Dr. J. Ley. Halle. 1883. — Leitfaden für den Unterricht in der Geographie. Von Dr. Daniel. (Herausg. von Dr. Volz). Halle 1884.
5) W. Fassinger in Kaiserslautern:
Philosophische Propädeutik für die höheren Lehranstalten Deutschlands. Von J. Brüsselbach. Kaiserslautern. 1883.
6) C. Winter's Universitäts-Buchhandlung in Heidelberg:
Ueber den Unsterblichkeitsglauben. Ein Vortrag von Dr. Schaarschmidt. Heidelberg. 1883.
7) C. Höckner in Dresden:
Abriß der Deutschen Metrik und Poetik nebst metrischen Aufgaben. Von Dr. E. Niemeyer. 5. Auflage. Dresden. 1883.
8) Helwing'sche Verlags-Buchhandlung in Hannover:
Schul-Botanik von Dr. H. Krause. Hannover 1884.

9) Ferdinand Schöningh in Paderborn:
Cornelius Nepos. Für den Schulgebrauch herausgegeben von Dr. G. Gemß. Paderborn. 1884.

10) Coppenrath'sche Buch- und Kunsthandlung in Münster:
Aufgaben für das theoretische und praktische Rechnen. Von Dr. Schellen. 1. Theil 17. Auflage (bearbeitet von Dr. Lemkes.) Münster 1884.

11) G. Freitag in Leipzig:
P. Ovidii Nasonis carmina. Vol. II Metamorphoses ed. Antonius Zingerle. Lipsiae 1884.

Für diese Geschenke, sowie für die von mehreren Familien der Stadt unbemittelten Schülern gewährten Freitische und für andere denselben erwiesene Wohlthaten spricht der Unterzeichnete im Namen der Anstalt den gebührenden Dank aus.

Fünfter Abschnitt.

Mittwoch, den 2. April Morgens 8 Uhr Schlußgottesdienst in der Pfarrkirche. Darauf um 10 Uhr in der Aula Gesang des Gymnasialchors, Abschiedsrede des Abiturienten Georg Mayen, welche von dem Primaner Anton Mielke erwidert wird, ein zweiter Gesang des Gymnasialchors, Entlassung der Abiturienten durch den Direktor, zuletzt Versetzung der Schüler und Censur-Vertheilung in den einzelnen Klassen.

Donnerstag, den 17. April wird das neue Schuljahr mit feierlichem Gottesdienste in der Pfarrkirche eröffnet.

Die **Aufnahme** in die Sexta findet Dienstag den 15. April Morgens 9 Uhr in dem Klassenzimmer der Quarta statt. Zur Annahme von Meldungen neuer Schüler für alle Klassen wird der Unterzeichnete Mittwoch, den 16. April (Vormittags 10 und Nachmittags 3 Uhr) im Gymnasium bereit sein.

Die Anmeldung neuer Schüler muß durch die Eltern oder deren Stellvertreter persönlich oder schriftlich erfolgen und sind dabei vorzulegen: 1) der Geburts- oder Taufschein; 2) ein Attest über Impfung, bei Schülern im Alter von mehr als 12 Jahren über Revaccination; 3) Nachweis über bisherige Führung und Unterricht resp. ein von der zuletzt besuchten Schule ausgestelltes Abgangszeugniß.

Die Wahl der Pensionen (resp. der spätere Wechsel derselben) für auswärtige Schüler bedarf der Zustimmung des Direktors. —

Deutsch-Krone, im März 1884.

Der Gymnasial-Direktor
Prof. **Lowinski**.