Städtische

REALSCHULE I. ORDNUNG

zu

ELBING.

No. 14 (32).

Ostern 1874.

Einladung zu den öffentlichen Prüfungen

im

Hörsaale der Realschule

am 26. und 27. März 1874.

Inhalt:

1. Abhandlung des ord. Lehrer Dr. Schneider.
2. Schulnachrichten vom Director.

Elbing, 1874.

Druck von Neumann-Hartmann (Edw. Schlömp).

Ueber eine der Lemniskate der Gestalt nach ähnliche Curve.

1. Definition und Gleichung der Curve.

Die zu untersuchende Curve habe die Eigenschaft, dass bei rechtwinkeligen Coordinaten die im Punkte x, y gezogene Tangente von der y Achse eine Strecke $\frac{x^4}{a^2 y}$ abschneidet, wobei a eine gegebene Linie bedeutet.

Ist AB Fig. I. die Tangente im Punkte x, y der zu suchenden Curve in Beziehung auf rechtwinkelige Coordinaten, so soll $OA = \frac{x^4}{a^2 y}$ sein. Wir nennen $\angle$ CBA φ; es ist dann $tg(\pi - \varphi) = \frac{x^4}{a^2 y\,[x + y \cot g\,(\pi - \varphi)]}$ oder $a^2\,y\,(-x\,tg\,\varphi + y) = x^4$, oder, da $tg\,\varphi = \frac{dy}{dx}$ ist, so ist

$$a^2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} - a^2\,y^2 + x^4 = o; \text{ oder } a^2\,\frac{dy}{dx} - a^2\,\frac{y}{x} + x^2\,\frac{x}{y} = o.$$

Zur Sonderung der Variabeln setzt man $\frac{y}{x} = t$ oder $y = x \,.\, t$, $\frac{dy}{dx} = x\,\frac{dt}{dx} + t$. Obige Gleichung wird $a^2\,x\,\frac{dt}{dx} + a^2\,t - a^2\,t + \frac{x^2}{t} = o$ oder $a^2\,tdt = -\,x\,dx$, integriert $\frac{1}{2}\,a^2\,t^2 = -\,\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,c^2$, wo $\frac{c^2}{2}$ die Constante bedeuten soll; c ist analog dem a eine Strecke; also $t^2 = \frac{1}{a^2}\,(c^2 - x^2)$; oder $y = \pm\,\frac{x}{a}\,\sqrt{c^2 - x^2}$. Dies ist also die Gleichung der gesuchten Curve.

2. Discussion der Gleichung.

Da in der resultierenden Gleichung der Curve $y = \pm\,\frac{x}{a}\,\sqrt{c^2 - x^2}$ eine willkürliche Constante c vorkommt, so gibt es eine unendliche Anzahl von Curven von der verlangten Eigenschaft. Da aber die gefundene Differentialgleichung der Curve in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ nur vom ersten Grade ist, so kann keine die Schaar der Curven einhüllende Curve existieren.

Aus $y^2 = \frac{x^2}{a^2}(c^2 - x^2)$ ersehen wir, dass für $x = o$ $y = o$ wird; die Curve geht also durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems. Da für jedes x, das absolut genommen kleiner als c ist, zwei nur durch das Vorzeichen verschiedene Werte von y existieren, so liegt die Curve symmetrisch zur x Achse. Für $x = \pm c$ wird y wider Null; die Curve schneidet also von Neuem in diesen Punkten die x Achse; für $x > c$ wird y complex. Die Curve liegt also zwischen 2 Parallelen zur y Achse in der Entfernung $\pm$ c von derselben. Durch eine analoge Betrachtung finden wir, dass die Curve auch zwischen 2 Parallelen zur x Achse in der Entfernung $\pm \frac{c^2}{2a}$ von derselben symmetrisch zur y Achse liegt. Die Curve lässt sich also vollständig in ein bestimmtes Rechteck einzeichnen.

Da die Curve in Beziehung auf beide Achsen symmetrisch ist, so genügt es, die Eigenschaften des im ersten Quadranten liegenden Teiles der Curve aufzusuchen. Die Gleichung der Curve im ersten Quadranten ist $y = \frac{x}{a}\sqrt{c^2 - x^2}$ $x > o$. Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{a\sqrt{c^2 - x^2}} + \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{a} = \frac{c^2 - 2x^2}{a\sqrt{c^2 - x^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a\sqrt{c^2 - x^2}\,(-4x) - \frac{(c^2 - 2x^2)\,a\,(-x)}{\sqrt{c^2 - x^2}}}{a^2\,(c^2 - x^2)}$$

$$= \frac{-4x\,(c^2 - x^2) + x\,(c^2 - 2x^2)}{a\,(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Es wird $\frac{dy}{dx} = o$ für $x = \frac{c}{2}\sqrt{2}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird für $x = \frac{c}{2}\sqrt{2} = \frac{-2c\sqrt{2}\,\frac{c^2}{2}}{a\left(\frac{c^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{4}{a}$

also negativ. Die Curve hat demnach für $\frac{c}{2}\sqrt{2}$ ein Maximum. Sie steigt continuirlich bis zu diesem Punkte, fällt dann wider zur x Achse und schneidet dieselbe rechtwinkelig im Punkte $x = c$; denn $\frac{dy}{dx}$ wird für $x = c$ unendlich. Da $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\,(-3c^2 + 2x^2)}{a\,(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ für alle in Betracht kommende x, $x = o$ ausgenommen, negativ ist, so wendet die Curve der x Achse immer die concave Seite zu; für $x = o$ haben wir einen Inflexionspunkt. Andere ausgezeichnete Punkte hat die Curve nicht.

3. Construction der Curve.

Um den Anfangspunkt der Coordinaten O schlagen wir Fig. II. mit a und c als Radien Kreise; ihre Durchschnittspunkte mit der positiven x Achse nennen wir A und C, ziehen in A eine Tangente AB an den ersten Kreis, errichten in einem beliebigen Punkte D von OC ein Lot auf die x Achse, verlängern es bis es die Peripherie des mit c als Radius geschlagenen Kreises im Punkte E schneidet, ziehen durch E eine Parallele zur x Achse und verlängern sie bis sie AB im Punkte F schneidet, verbinden O mit F durch eine gerade Linie, so ist der Durchschnittspunkt G derselben mit DE ein Punkt der gesuchten Curve.

Beweis:

$$\overline{DE}^2 = (c + x)(c - x) = \overline{AF}^2.$$

$$AF : DG = a : x$$

$$DG = \frac{x}{a}\sqrt{c^2 - x^2}$$

Q. e. d.

Macht man obige Construction für jeden Punkt von OC, so erhält man zunächst alle im ersten Quadranten liegende Punkte der Curve und dann wegen der Symmetrie zu beiden Achsen leicht die ganze geschlossene Curve.

In der Anlage haben wir die Construction für 4 Verhältnisse von a und c in Fig. III, IV, V, VI ausgeführt und sehen, dass die Curven mehr oder weniger die Gestalt einer Lemniskate haben.

4. Gleichung und Construction der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale der Curve. Berechnung des Krumungskreises und der Evolute, und

5. Quadratur der Curve

sind aus Mangel an Raum weggelassen worden.

6. Rectification der Curve.

Es ist $ds^2 = dx^2 + dy^2$, also $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$; demnach ist die Länge des Bogens bis zum Punkte x, y

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Aus $y = \frac{x}{a}\sqrt{c^2 - x^2}$ fanden wir $\frac{dy}{dx} = \frac{c^2 - 2x^2}{a\sqrt{c^2 - x^2}}$, also ist

$$s = \int_0^x \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2 c^2 - a^2 x^2 + c^4 - 4c^2 x^2 + 4x^4}{c^2 - x^2}}\,dx.$$

Setzt man $x = cz$, $dx = cdz$, so ist

$$s = \int_0^{\frac{x}{c}} \frac{c}{a} \sqrt{\frac{4c^2z^4 - z^2(a^2+4c^2) + a^2 + c^2}{1 - z^2}}\, dz = \frac{2c^2}{a} \int_0^{\frac{x}{c}} \sqrt{\frac{z^4 - z^2 \frac{a^2+4c^2}{4c^2} + \frac{a^2+c^2}{4c^2}}{1 - z^2}}\, dz.$$

Setzen wir $\frac{a^2 + 4c^2}{4c^2} = a'$, $\frac{a^2 + c^2}{4c^2} = c'$ und $z = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$, $dz = \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1 + t^2}\, dt$ $= \frac{dt}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$; es ist dann $z^2 + z^2 t^2 - t^2 = 0$, $t = \frac{z}{+\sqrt{1 - z^2}}$; die untere Grenze bleibt demnach o, die obere wird $\frac{\frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}$; also ist

$$s = 2\frac{c^2}{a} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{\frac{\frac{t^4}{(1 + t^2)^2} - \frac{t^2 a'}{1 + t^2} + c'}{1 - \frac{t^2}{1 + t^2}}}\, \frac{dt}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\frac{c^2}{a} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{t^4 - a' t^2 - a' t^4 + c' + 2c' t^2 + c' t^4}\, \frac{dt}{(1 + t^2)^2}$$

$$= 2\frac{c^2}{a} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{t^4 (1 - a' + c') - t^2 (a' - 2c') + c'}\, \frac{dt}{(1 + t^2)^2}$$

$$1 - a' + c' = \frac{4c^2 - a^2 - 4c^2 + a^2 + c^2}{4c^2} = \frac{1}{4}$$

$$a' - 2c' = \frac{a^2 + 4c^2 - 2a^2 - 2c^2}{4c^2} = \frac{2c^2 - a^2}{4c^2};$$ demnach wird

$$s = \frac{a^2}{a} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{t^4 - t^2 \left(\frac{2c^2 - a^2}{c^2}\right) + \frac{a^2 + c^2}{c^2}}\, \frac{dt}{(1 + t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\left(t^2 - \frac{2c^2-a^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{-4c^4+4c^2a^2-a^4+4c^2a^2+4c^4}{4c^4}}\ \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\left(t^2 - \frac{2c^2-a^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{8a^2c^2-a^4}{4c^4}}\ \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Es sind hier drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nemlich $8c^2 \lesseqgtr a^2$ ist.

I. Fall. $8c^2 = a^2$.

Wir erhalten jetzt

$$s = \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} (t^2+3)\,\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \frac{1+t^2+2}{(1+t^2)^2}\,dt;$$

setzt man $t = \operatorname{tg}\varphi$, $dt = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$ so bleibt die untere Grenze o, die obere wird $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}$; also

$$s = \frac{c^2}{a}\int_0^{\varphi} (1+2\cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{c^2}{a}\int_0^{\varphi}(2-\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{c^2}{a}\,(2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi), \text{ oder nur durch a ausgedrückt}$$

$$s = \frac{a}{8}\left[2\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-8x^2}} - \frac{1}{2}\sin 2\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-8x^2}}\right]$$

Dies ist also in diesem Falle die allgemeine Auflösung.

Es drückt sich hier die Länge der ganzen Curve überraschend einfach aus; für $x = c = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ wird nemlich

$$s = \frac{a}{8}\cdot[2\,.\operatorname{arctg}\infty - \tfrac{1}{2}\sin 2\operatorname{arctg}\infty] = \frac{a}{8}\,\pi.$$

Die ganze Curve also gleich $\frac{a}{2}\pi = \frac{1}{4}\, 2a\pi$, also gerade so lang als ein Quadrant des mit dem Radius a geschlagenen Hilfskreises.

II. Fall. $8c^2 < a^2$.

$$\text{Es war } s = \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{\left(t^2 - \frac{2c^2 - a^2}{2c^2}\right) + \frac{8a^2c^2 - a^4}{4c^4}}\, \frac{dt}{(1 + t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{\left(t^2 + \frac{a^2 - 2c^2}{2c^2}\right)^2 - \frac{a^4 - 8a^2c^2}{4c^4}}\, \frac{dt}{(1 + t^2)^2}$$

Da $a^2 > 8c^2$ ist, so ist $a^2 - 2c^2 > o$ und $a^4 - 8a^2c^2 > o$; wir setzen darum zur Abkürzung $\frac{a^2 - 2c^2}{2c^2} = \alpha^2$, $\frac{a^4 - 8a^2c^2}{4c^4} = \beta^4$, so ist

$$s = \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{(t^2 + \alpha^2 + \beta^2)\,(t^2 + \alpha^2 - \beta^2)}\, \frac{dt}{(1 + t^2)^2}$$

Man setze $t = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{u}\sqrt{1 - u^2}$, $dt = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, \frac{\frac{-u^2}{\sqrt{1 - u^2}} - \sqrt{1 - u^2}}{u^2}\, du$

$= -\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{u^2\sqrt{1 - u^2}}\, du$; es wird dann

$$t^2 + \alpha^2 + \beta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{u^2}$$

$$t^2 + \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\,u^2 + (\alpha^2 - \beta^2)\,u^2}{u^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta^2 u^2}{u^2} = \frac{\left(1 - \frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\, u^2\right)(\alpha^2 + \beta^2)}{u^2}$$; setzt man $\frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$

$= \varkappa^2$ und bemerkt, dass $\varkappa^2 < 1$, so ist

$$t^2 + \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\,\frac{1 - \varkappa^2 u^2}{u^2}$$

$$t^2 + 1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - u^2\,(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}{u^2}.$$

Aus $t = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{u} \sqrt{1 - u^2}$ sehen wir, dass für $t = o$, $u = 1$ wird; aus $u^2 t^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2) u^2$ wird $u = +\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{t^2 + (\alpha^2 + \beta^2)}}$; für $t = \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}$ wird also $u = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2)(c^2 - x^2)}{x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)(c^2 - x^2)}}$; dieser Wert von u wird also die obere Grenze des Integrals. Für den grössten Wert von x nemlich $x = c$ wird $u = o$. Es wird demnach jetzt

$$s = -\frac{c^2}{a} (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}} \int_1^u \frac{\sqrt{1 - \varkappa^2 u^2}}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{[\alpha^2 + \beta^2 - u^2(\alpha^2 + \beta^2 - 1)]^2}$$

Setzt man $\frac{c^2}{a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = A$, $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2} = h$, so wird

$$s = A \int_u^1 \frac{(1 - \varkappa^2 u^2)\, du}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{(1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2)}}.$$

Es sei $\frac{1 - \varkappa^2 u^2}{(1 - hu^2)^2} = \frac{A_0}{(1 - hu^2)^2} + \frac{A_1}{1 - hu^2}$, also $1 - \varkappa^2 u^2 = A_0 + A_1 - A_1 hu^2$, also $A_0 + A_1 = 1$; $hA_1 = \varkappa^2$; $A_1 = \frac{\varkappa^2}{h}$; $A_0 = \frac{h - \varkappa^2}{h}$. Bezeichnen wir $(1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2)$ mit U, so ist

$$s = A \frac{h - \varkappa^2}{h} \int_u^1 \frac{du}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{U}} + A \frac{\varkappa^2}{h} \int_u^1 \frac{du}{(1 - hu^2)\sqrt{U}}.$$

Es ist $\dfrac{d \frac{u\sqrt{U}}{1 - hu^2}}{du} = \dfrac{(1 - hu^2)\left(u \frac{d\sqrt{U}}{du} + \sqrt{U}\right) + 2hu^2 \sqrt{U}}{(1 - hu^2)^2}$,

$$\frac{d\sqrt{U}}{du} = -\frac{\varkappa^2 u (1 - u^2) + u(1 - \varkappa^2 u^2)}{\sqrt{U}} = -\frac{u(1 + \varkappa^2 - 2\varkappa^2 u^2)}{\sqrt{U}}, \text{ also}$$

$$\frac{d \frac{u\sqrt{U}}{1 - hu^2}}{du} = \frac{(1 - hu^2)[-u^2(1 + \varkappa^2 - 2\varkappa^2 u^2) + (1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2)] + 2hu^2[(1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2)]}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{U}}$$

$$= \frac{(1 - hu^2)(-u^2 - \varkappa^2 u^2 + 2\varkappa^2 u^4 + 1 - u^2 - \varkappa^2 u^2 + \varkappa^2 u^2) + 2u^2 h(1 - u^2 - \varkappa^2 u^2 + \varkappa^2 u^4)}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{U}}$$

$$= \frac{1 - u^2(2 + 2\varkappa^2 - h) + u^4(3\varkappa^2 + 2h[1 + \varkappa^2] - 2h[1 + \varkappa^2]) - h\varkappa^2 u^6}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{U}.}$$

Den Zähler des Bruches setzen wir gleich
$b_0 + b_1(1 - hu^2) + b_2(1 - hu^2)^2 + b_3(1 - hu^2)^3 =$
$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 - hu^2(b_1 + 2b_2 + 3b_3) + h^2u^4(b_2 + 3b_3) - h^3 b_3 u^6;$
demnach ist

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &= 1. \\ h(b_1 + 2b_2 + 3b_3) &= 2(1 + \varkappa^2) - h \\ h^2(b_2 + 3b_3) &= 3\varkappa^2 \\ h^3 b_3 &= h\varkappa^2; \text{ also ist} \end{aligned}$$

$$b_3 = \frac{\varkappa^2}{h^2},\ b_2 = 0,\ b_1 = -\left[1 - \frac{2(1-\varkappa^2)}{h} - \frac{3\varkappa^2}{h^2}\right],\ b_0 = 2\left(1 - \frac{1+\varkappa^2}{h} + \frac{\varkappa^2}{h^2}\right).$$

Also ist

$$\frac{d\dfrac{u\sqrt{U}}{1-hu^2}}{du} = \frac{b_0}{(1-hu^2)^2\sqrt{U}} + \frac{b_1}{(1-hu^2)\sqrt{U}} + \frac{b_3(1-hu^2)}{\sqrt{U}},$$

$$\frac{u\sqrt{U}}{1-hu^2} = b_0\int\frac{du}{(1-hu^2)^2\sqrt{U}} + b_1\int\frac{du}{(1-hu^2)\sqrt{U}} + b_3\int\frac{(1-hu^2)\,du}{\sqrt{U}}$$

also

$$\int_u^1\frac{du}{(1-hu^2)^2\sqrt{U}} = \frac{1}{b_0}\left[\frac{u\sqrt{U}}{1-hu^2}\right]_{u_0}^1 - \frac{b_1}{b_0}\int_u^1\frac{du}{(1-\lambda u^2)\sqrt{U}} - \frac{b_3}{b_0}\int_u^1\frac{du}{\sqrt{U}} + \frac{b_3h^2}{b_0}\int_u^1\frac{u^2\,du}{\sqrt{U}}.$$

Das letzte Integral $\int_{u_0}^1\frac{u^2\,du}{\sqrt{U}}$ verwandelt sich durch die Substitution $u = \sin\varphi$ in

$\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$. Bezeichnen wir $\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}$ mit $\Delta(\varphi)$, so ist das Integral gleich

$$\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} = -\frac{1}{\varkappa^2}\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\varkappa^2\sin^2\varphi + 1 - 1}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi = -\frac{1}{\varkappa^2}\left\{\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\Delta(\varphi)\,d\varphi - \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\right\} =$$

$-\frac{1}{\varkappa^2}\left[E\left(\varkappa,\frac{\pi}{2}\right) - E(\varkappa,\varphi) - F\left(\varkappa,\frac{\pi}{2}\right) + F(\varkappa,\varphi)\right]$ wo die F und E die bekannten, durch die Landen'sche Substitution zu berechnenden elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung sind. Da in diesem Teile der Modul immer $\varkappa$ ist, so wollten wir ihn unbezeichnet lassen. Das vorletzte Integral $\int_u^1\frac{du}{\sqrt{U}}$ ist $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\varphi)$.

Das vorhergehende Integral ist das Legendre'sche Integral dritter Gattung; wir bezeichnen es vorläufig mit $\Pi_0(\varkappa, -\lambda, \varphi)$, oder bei weggelassenem Modul mit $\Pi_0(-\lambda, \varphi)$.

Es ist also dann

$$s = A\frac{h-\varkappa^2}{h}\left\{-\frac{1}{b_0}\frac{u\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2u^2)}}{1-hu^2} - \frac{b_1}{b_0}\left[\Pi_0\left(-h,\frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0(-h,\varphi)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{b_3}{b_0}\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\varphi)\right] + \frac{b_3 h^2}{b_0\varkappa^2}\left[E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E(\varphi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(\varphi)\right]\right\}$$
$$+ A\frac{\varkappa^2}{h}\left[\Pi_0\left(-h,\frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0(-h,\varphi)\right].$$

Dies ist also in diesem Falle die allgemeine Auflösung. Es erübrigt aber noch das vorkommende Legendre'sche Integral in gebrauchsfertigerer Form zu geben; wir führen es darum auf die Jacobi'sche Normalform zurück.

$$\text{Es ist } \Pi_0(\varkappa, -h, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)} = \int_0^\varphi \frac{1-h\sin^2\varphi + h\sin^2\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}\,d\varphi$$

$$= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + h\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}.$$

Setzen wir $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = u$, also $\varphi = \operatorname{am} u$, $d\varphi = \Delta \operatorname{am} u\, du$, so ist

$\Pi_0(\varkappa, -h, \varphi) = u + h\int_0^u \frac{\sin^2\operatorname{am} u\,du}{1-h\sin^2\operatorname{am} u}$; setzt man noch $h = +\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} b$, wo also b eine constante durch $\int_0^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}}$ definierte Grösse ist, so ist

$$\Pi_0(\varkappa, -h, \varphi) = u + \frac{\sin\operatorname{am} b}{\cos\operatorname{am} b\,\Delta\operatorname{am} b}\int_0^u \frac{\varkappa^2\sin\operatorname{am} b\cos\operatorname{am} b\,\Delta\operatorname{am} b\sin^2\operatorname{am} u\,du}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} b\sin^2\operatorname{am} u}$$

$= u + \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am} b}{\Delta\operatorname{am} b}\,\Pi(\operatorname{am} u, \operatorname{am} b, \varkappa)$ wo nun mit Π das Jacobi'sche Integral dritter Gattung bezeichnet wird.

Den Wert der Constante b müssen wir noch näher betrachten. Zunächst ist zu untersuchen, ob die obere Grenze reell, und ob sie in diesem Falle grösser, gleich oder kleiner als Eins ist.

Da $\varkappa$ eine reelle Zahl, so ist $\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}$ nur dann reell, wenn $h > o$ ist. Es war $\varkappa^2 = \frac{2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$, $h = \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2}$, für $\alpha^2 = \frac{a^2-2c^2}{2c^2}$, $\beta^4 = \frac{a^4-8a^2c^2}{4c^4}$ und $a^2 > 8c^2$;

da α^2 und β^2 reelle positive Grössen sind, so ist $h \geqq o$, wenn

$$\alpha^2+\beta^2 \geqq 1, \text{ d. h. } a^2-2c^2+a\sqrt{a^2-8c^2} \geqq 2c^2, \text{ oder } a^2-4c^2+a\sqrt{a^2-8c^2} \geqq o;$$

da $a^2 > 8c^2$ ist, so ist immer das obere Zeichen richtig, also h positiv. Ferner ist $\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}} = \sqrt{\frac{a^2-4c^2+\sqrt{a^4-8a^2c^2}}{2\sqrt{a^4-8a^2c^2}}}$ grösser als Eins; denn wäre $\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}} \leqq 1$, so müsste $a^2-4c^2+\sqrt{a^4-8a^2c^2} \leqq 2\sqrt{a^4-8a^2c^2}$ sein, d. h.

$a^2-4c^2 \leqq \sqrt{a^4-8a^2c^2}$ und da $a^2 > 8c^2$ also auch $> 4c^2$ ist, so müsste

$a^4-8a^2c^2+16c^4 \leqq a^4-8a^2c^2$ sein, d. h. $16c^4 \leqq o$; dies ist unmöglich, also

$\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}} > 1$. Also wird in $b = \int\limits_o^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}}$ die obere Grenze grösser als Eins; b also complex. Wir versuchen den reellen vom imaginären Teil zu sondern. Der geradlinigte Integrationsweg von o bis $\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}$ führt durch den Verzweigungspunkt $z = 1$ hindurch; erreicht aber nicht mehr den Verzweigungspunkt $z = \frac{1}{\varkappa}$; denn $h = \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2} = 1 - \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}$; wir sahen, dass $h > o$ war, jetzt finden wir es kleiner als Eins; also $\sqrt{h} < 1$, also $\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}} < \frac{1}{\varkappa}$; also haben wir den Verzweigungspunkt $+\frac{1}{\varkappa}$ $\left(\text{wie auch } -1 \text{ und } -\frac{1}{\varkappa}\right)$ nicht in Betracht zu ziehen. Um den Verzweigungspunkt $\frac{1}{\varkappa}$ zu vermeiden, zerlegen wir

$$b = \int\limits_o^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}} \text{ in } \int\limits_o^{1-\varrho} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}} + \int\limits_{1-\varrho}^{1+\varrho} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}} + \int\limits_{1+\varrho}^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}}$$

setzen dann im zweiten Summanden $z = 1 - \rho e^{i\vartheta}$; die untere Grenze wird dann o, die obere π; wir umkreisen dann also den betreffenden Punkt in einem Halbkreise mit dem Radius ρ und lassen im Resultate ρ gegen o convergieren. Es ist $dz = -\rho i e^{i\vartheta} d\vartheta$; wir erhalten also

$$b = \int_0^{1-\varrho} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} - i\sqrt{\rho}\int_0^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} d\vartheta}{\sqrt{e^{i\vartheta}(2-\rho e^{i\vartheta})(1-\varkappa^2[1-\rho e^{i\vartheta}]^2)}} + \int_{1+\varrho}^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Nehmen wir Lim $\rho = o$ und bemerken wir, dass das 2. Integral für Lim $\rho = o$ einen endlichen Wert hat, mit $\sqrt{\rho}$ multipliciert, also sich der Null nähert, so ist

$$b = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} - i\int_1^{\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Der Minuendus ist das vollständige elliptische Integral erster Gattung; wir bezeichnen es wie üblich mit K. Im Subtrahendus setzen wir $z = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\varkappa^2) z'^2}}$, $1 - \varkappa^2 = \varkappa'^2$; es ist dann $dz = \frac{\varkappa' z'^2 dz'}{(1-\varkappa'^2 z'^2)^{\frac{3}{2}}}$; $z^2 - 1 = \frac{\varkappa'^2 z'^2}{1-\varkappa'^2 z'^2}$; $1 - \varkappa^2 z^2 = 1 - \frac{\varkappa^2}{1-\varkappa'^2 z'^2}$

$$= \frac{1 - \varkappa' z'^2 - 1 + \varkappa'^2}{1 - \varkappa'^2 z'^2} = \frac{\varkappa'^2 (1 - z'^2)}{1 - \varkappa'^2 z'^2}.$$

Aus $z^2 = \frac{1}{1-\varkappa'^2 z^2}$ wird $z'^2 = \frac{z^2 - 1}{\varkappa'^2 z^2}$; für $z = 1$ wird $z' = o$, für $z = \sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}$ wird

$$z' = \sqrt{\frac{\frac{h}{\varkappa^2} - 1}{\varkappa'^2 \frac{h}{\varkappa^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\varkappa^2}{h}}{\varkappa'^2}}, \text{ also}$$

$$b = K - i\int_0^{\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa^2}{h}}{\varkappa'^2}}} \frac{\varkappa'^2 z' dz'}{(1-\varkappa'^2 z'^2)^{\frac{3}{2}-1} \varkappa' z' \varkappa' \sqrt{1-z'^2}} = K - i\int_0^{\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa_2}{h}}{\varkappa'^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa'^2 z^2)}}.$$

Die obere Grenze ist reell und ein ächter Bruch; denn, wenn man ihr die Form $\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa^2}{h}}{1-\varkappa^2}}$ gibt, so ist $\frac{\varkappa^2}{h} < 1$ wie bewiesen, also $1 - \frac{\varkappa^2}{h} > o$, und $\frac{\varkappa^2}{h} > \varkappa^2$; denn h war ein ächter Bruch, also $o < \sqrt{\dfrac{1-\frac{\varkappa^2}{h}}{1-\varkappa^2}} < 1$; das Integral bekommt also einen reellen Wert, der d sein möge, alsdann ist $b = K - id$. Dann ist $\Pi_0(-\lambda, \varphi) = u + \dfrac{\operatorname{tg}\operatorname{am}(K-id)}{\Delta\operatorname{am}(K-id)}\,\Pi(u, K-id)$. Wir versuchen das scheinbar Imaginäre wegzuschaffen.

Aus $b = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$ ist $\sqrt{\dfrac{h}{\varkappa^2}} = \sin\operatorname{am} b = \sin\operatorname{am}(K-id)$;

aus $d = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa^2}{h}}{\varkappa'^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa'^2 z^2)}}$ ist $\sqrt{\dfrac{1-\frac{\varkappa^2}{h}}{\varkappa'^2}} = \sin\operatorname{am} d$; oder $\sqrt{\dfrac{\varkappa^2}{h}} = \Delta\operatorname{am}(d, \varkappa')$,

also $\sin\operatorname{am}(K-id) = \dfrac{1}{\Delta\operatorname{am}(d,\varkappa')}$; $\cos\operatorname{am}(K-id) = \dfrac{i\varkappa'\sin\operatorname{am}(d,\varkappa')}{\Delta\operatorname{am}(d,\varkappa')}$; $\Delta\operatorname{am}(K-id)$ $= \sqrt{\dfrac{1-\varkappa'^2\sin^2\operatorname{am}(d,\varkappa')-1+\varkappa'^2}{\Delta\operatorname{am}(d,\varkappa')}} = \dfrac{\varkappa'\cos\operatorname{am}(d,\varkappa')}{\Delta\operatorname{am}(d,\varkappa')}$, also $\dfrac{\operatorname{tg}\operatorname{am}(K-id)}{\Delta\operatorname{am}(K-id)} =$ $-\dfrac{i\,\Delta\operatorname{am}(d,\varkappa')}{\varkappa'^2\sin\operatorname{am}(d,\varkappa')\cos\operatorname{am}(d,\varkappa')}$; da

$\operatorname{am}(K-id) = \operatorname{am}[2K-(K+id)] = \pi - \operatorname{am}(K+id)$ so ist $\Pi(u, K-id) = -\Pi(u, K+id)$; also wird

$$\Pi_0(-\lambda, \varphi) = u + \frac{\Delta\operatorname{am}(d,\varkappa')}{\varkappa'^2\sin\operatorname{am}(d,\varkappa')\cos\operatorname{am}(d,\varkappa')}\, i\,\Pi(u, K+id)$$

$i\,\Pi(u, K+id)$ ist aber (Legendre. Traité des Fonctions elliptiques III p. 138) gleich $i\,\Pi(u, id) + u\varkappa^2\dfrac{\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(d,\varkappa')}{\Delta\operatorname{am}(d,\varkappa')} - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\varkappa^2\operatorname{tg}\operatorname{am}(d,\varkappa')}{\Delta\operatorname{am}(d,\varkappa')}\,\dfrac{\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}\right)$.

Es bleibt noch übrig $i\,\Pi(u, id)$ auf rein reelle Form zu bringen. Bekanntlich ist für jedes complexe a

$\Pi(u, a) = u\,Z(a) + \dfrac{1}{2}\,l\,\dfrac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$, wo $Z(a)$ definiert ist, durch (Jacobi fundamenta 47. 1 für $x = \dfrac{a\pi}{2\varkappa}$)

$$\frac{4\pi}{2K}\cdot\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{a\pi}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2a\pi}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3a\pi}{K}\ldots\right\};\ q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

und K′ ensteht aus K, indem man $\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}$ an die Stelle von $\varkappa$ rücken lässt;

ferner ist definiert (Jac. fundamenta 52) $\Theta(u) = \Theta(o)\, e^{\int\limits_o^u Z(u)\, du}$

Also ist $i\Pi(u, id) = + iu\, Z(id) + \frac{i}{2}\, l\, \frac{\Theta(u - id)}{\Theta(u + id)}$.

Es ist aber (Fund. § 56. 4)

$$iZ(id) = - \operatorname{tg} \operatorname{am}(d, \varkappa')\, \Delta \operatorname{am}(d, \varkappa') + \frac{\pi d}{2KK'} + Z(d, \varkappa')$$

$l\, \frac{\Theta(u - id)}{\Theta(u + id)} = \int\limits_o^{u - id} Z(u)\, du - \int\limits_o^{u + id} Z(u)\, du$; setzt man im Minuendus $u = v - di$, so wird die untere Grenze di, die obere u, und im Subtrahendus $u = v + di$, so wird die untere Grenze — di, die obere u und es ist

$$l\, \frac{\Theta(u - id)}{\Theta(u + id)} = \int\limits_{\beta i}^{u} Z(v - di)\, dv - \int\limits_{-\beta i}^{u} Z(v + di)\, dv$$

$$= \int\limits_o^u Z(v - di)\, dv - \int\limits_o^u Z(v + di)\, dv + \int\limits_{di}^{o} Z(v - di)\, dv - \int\limits_{-di}^{o} Z(v + di)\, dv$$

setzt man im letzten Integral $v = - v'$, so wird

$-\int\limits_{-di}^{o} Z(v + di)\, dv = \int\limits_{di}^{o} Z(- v' + di)\, dv' = - \int\limits_{di}^{o} Z(v' - di)\, dv'$; denn

$Z(a) = - Z(- a)$; also $\int\limits_{di}^{o} Z(v - di)\, dv = \int\limits_{-di}^{o} Z(v + di)\, dv$; also

$$l\, \frac{\Theta(u - id)}{\Theta(u + id)} = \int\limits_o^u [Z(u - di) - Z(u + di)]\, du.$$

Das n^{te} Glied von $Z(u - di) - Z(u + di)$ ist

$$\frac{4\pi}{2K}\, \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \left[\sin \frac{n\pi(u - di)}{K} - \sin \frac{n\pi(u + di)}{K}\right] =$$

$- \frac{4\pi}{K}\, \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n\pi di}{K} \cos \frac{n\pi u}{K}$, zwischen den Grenzen o und u integriert, gibt

$$-\frac{4}{n}\,\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin\frac{n\pi\,di}{K}\sin\frac{n\pi u}{K} = -i\,\frac{2}{n}\,\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(e^{\frac{n\pi d}{K}} - e^{-\frac{n\pi d}{K}}\right)\sin\frac{n\pi u}{K},\text{ also}$$

$$\frac{i}{2}\,\frac{\Theta(u-id)}{\Theta(u+id)} = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\,\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(e^{\frac{n\pi d}{K}} - e^{-\frac{n\pi d}{K}}\right)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

Also ist

$$\Pi_0(-h,\varphi) = u + \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(d,\varkappa')}{\varkappa'^2\sin\mathrm{am}\,(d,\varkappa')\cos\mathrm{am}\,(d,\varkappa')} +$$

$$\Bigg\{-u\,\mathrm{tg\,am}\,(d,\varkappa')\,\Delta\,\mathrm{am}\,(d,\varkappa') + \frac{\pi d\,u}{2KK'} + u\,Z\,(d,\varkappa') + \sum_1^\infty \frac{1}{n}\,\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(e^{\frac{n\pi d}{K}} - e^{-\frac{n\pi d}{K}}\right)\sin\frac{n\pi u}{K}$$

$$u\,\varkappa^2\frac{\mathrm{tg}^2\,\mathrm{am}\,(d,\varkappa')}{\Delta\,\mathrm{am}\,(d,\varkappa')} - \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\varkappa^2\,\mathrm{tg\,am}\,(d,\varkappa')}{\Delta\,\mathrm{am}\,(d,\varkappa')}\,\frac{\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}\right)\Bigg\}.$$

Die Functionen von am u drücken wir entweder nach Jacobi durch die Transcendente Θ oder nach Weierstrass durch die Abel'schen Functionen Al (ω) etc. aus. (Crelle. Bd. 52, S. 357.). Bei Berechnung des vollständigen Integrals $\Pi_0\left(-h,\frac{\pi}{2}\right)$ fallen in Folge von $\sin n\pi = 0$, $\cos\mathrm{am}\,K = 0$, $\mathrm{artg}\;0 = 0$ die unter dem Summenzeichen stehende unendliche Reihe und der arc tg fort.

Es ist somit die Länge des Bogens s auch in diesem 2. Fall in gebrauchsfertiger Gestalt gegeben.

III. Fall. $8c^2 > a^2$.

Wir fanden

$$s = \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}}\sqrt{\left(t^2 - \frac{2c^2-a^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{8a^2c^2-a^4}{4c^4}}\;\frac{dt}{(1+t^2)^2};$$

setzt man $\frac{2c^2-a^2}{2c^2} + i\,\frac{a\sqrt{8c^2-a^2}}{2c^2} = r^2(\sin\alpha + i\cos\alpha)$, so muss

$$r^4 = \left(\frac{2c^2-a^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{a^2(8c^2-a^2)}{4c^4} = \frac{4c^4-4a^2c^2+a^4+8a^2c^2-a^4}{4c^4} = \frac{a^2+c^2}{c^2};\text{ also}$$

$$r^2 = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c},\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2c^2-a^2}{a\sqrt{8c^2-a^2}}.\text{ Es ist demnach}$$

$$s = \frac{c^2}{a} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{[t^2 - r^2 (\sin \alpha + i \cos \alpha)]\,[t^2 - r^2 (\sin \alpha - i \cos \alpha)]}\;\frac{dt}{(1 + t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{\left[t+r\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[t-r\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[t+r\left(\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[t-r\left(\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]}\;\frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}} \sqrt{\left[\left(t + r \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + r^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}\right]\left[\left(t - r \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + r^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}\right]}\;\frac{dt}{(1 + t^2)^2}.$$

Setzt man jetzt $t = r\,\frac{1-y}{1+y}$ (wo y eine andere Variabel ist, als die im ersten Teil vorkommende Ordinate y), $dt = r\,\frac{-(1+y)-(1-y)}{(1+y)^2}\,dy = -\frac{2r}{(1+y)^2}\,dy$

$$\left(t + r \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + r^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} = r^2\,\frac{\left[(1-y) + (1+y)\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2 + \cos^2\frac{\alpha}{2}\,(1+y)^2}{(1+y)^2}$$

$$= r^2\,\frac{(1-y)^2 + (1+y)^2 + 2\,(1-y^2)\sin\frac{\alpha}{2}}{(1+y)^2}$$

$$= 2r^2\,\frac{1 + y^2 + (1-y^2)\sin\frac{\alpha}{2}}{(1+y)^2}$$

$$= 2r^2\,\frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2} + \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)y^2}{(1+y)^2} \text{ und analog}$$

$$\left(t - r \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + r^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} = 2r^2\,\frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2} + \left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)y^2}{(1+y)^2}$$

$$1 + t^2 = \frac{(1+y)^2 + r^2\,(1-y)^2}{(1+y)^2} = \frac{1 + r^2 + y^2(1+r^2) + 2y(1-r^2)}{(1+y)^2}.$$

Zur Bestimmung der neuen Grenzen haben wir $t = r\,\frac{1-y}{1+y}$, oder $y = \frac{r-t}{r+t}$; für $t = o$ wird $y = 1$; für $t = \frac{x}{\sqrt{c^2 - x}}$ wird $y = \frac{r\sqrt{c^2 - x^2} - x}{r\sqrt{c^2 - x^2} + x}$. Also ist

$$s = 4\frac{c^2}{a} r^3 \int\limits_y^1 \frac{\sqrt{\left[1 - \sin\frac{\alpha}{2} + \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) y^2\right]\left[1 + \sin\frac{\alpha}{2} + \left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) y^2\right]}\, dy}{[1 + r^2 + (1 + r^2)\, y^2 + 2y\,(1 - r^2)]^2}.$$

Es ist $1 + \sin\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{4} + 2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} + \cos^2\frac{\alpha}{4} = \left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right)^2$

und analog $1 - \sin\frac{\alpha}{2} = \left(\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4}\right)^2$, ferner

$$\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4} = \sin\frac{\alpha}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi - \alpha}{4}$$

$$\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4} = \sin\frac{\alpha}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi - \alpha}{4};\ \text{also}$$

$$s = 4\frac{c^2}{a} r^3 \cos\frac{\alpha}{2} \int\limits_y^1 \frac{\sqrt{\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi - \alpha}{4} + y^2\right)\left(\operatorname{cotg}^2\frac{\pi - \alpha}{4} + y^2\right)}\, dy}{[1 + r^2 + 2y\,(1 - r^2) + (1 + r^2)\, y^2]^2}.$$

Man setze $4\frac{c^2}{a} r^3 \cos\frac{\alpha}{2} = B$, $\operatorname{tg}^2\frac{\pi - \alpha}{4} + \operatorname{cotg}^2\frac{\pi - \alpha}{4} = b$,

$y^4 + by^2 + 1 = Y$, $1 + r^2 = p$, $1 - r^2 = q$, so ist

$$s = B\int\limits_y^1 \frac{\sqrt{Y}\, dy}{[py^2 + 2qy + p]^2} = B\int\limits_y^1 \frac{\sqrt{Y}\, dy}{p^2y^4 + 4q^2y^2 + p^2 + 4pqy^3 + 2p^2y^2 + 4pqy}$$

$$= B\int\limits_y^1 \frac{\sqrt{Y}\, dy}{[p^2y^4 + 2\,(2q^2 + p^2)\, y^2 + p^2] + 4pqy\,(1 + y^2)};$$ man setze $2q^2 + p^2 = s^2$, so ist

$$s = B\int\limits_y^1 \frac{(y^4 + by^2 + 1)\,[p^2y^4 + 2s^2y^2 + p^2 - 4pqy\,(1 + y^2)]}{\sqrt{Y}\,[(p^2y^4 + 2s^2y^2 + p^2)^2 - 16p^2q^2y^2\,(1 + y^2)^2]}$$

$$= B\int\limits_y^1 \frac{[p^2y^8 - 4pqy^7 + (2s^2 + p^2b)\,y^6 - 4pq\,(1 + b)\,y^5 + 2(s^2b + p^2)\,y^4 - 4pq\,(1 + b)\,y^3 + (2s^2 + p^2b)\,y^2 - 4pqy + p^2]\, dy}{\sqrt{Y}\,[p^4y^8 + (4s^2p^2 - 16p^2q^2)\,y^6 + (4s^4 + 2p^4 - 32p^2q^2)\,y^4 + (4s^2p^2 - 16p^2q^2)\,y^2 + p^4]}$$

$$= \frac{B}{p^2}\int\limits_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} +$$

$$B\int\limits_y^1 \frac{[-4pqy^7 + (-2s^2 + p^2b - 16q^2)\,y^6 - 4pq\,(1 + b)\,y^5 + 2\left(s^2b - p^2 - \frac{2s^4}{p^2} + 16q^2\right)y^4 - 4pq\,(1 + b)\,y^3 + (-2s^2 + p^2b - 16q^2)\,y^2 - 4pqy]\, dy}{\sqrt{Y}\,[(p^2y^4 + 2s^2y^2 + p^2)^2 - 16p^2q^2y^2\,(1 + y^2)^2]}$$

oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung

$$s = \frac{B}{p^2}\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{B}{p^2}\int_y^1 \frac{a_0 y^7 + a_1 y^6 + a_2 y^5 + a_3 y^4 + a_2 y^3 + a_1 y^2 + a_0 y}{\sqrt{Y}\,[(p^2y^4 + 2s^2y^2 + p^2)^2 - 16p^2q^2y^2(1+y^2)^2]}\,dy.$$

Um $\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{\left(y^2 + tg^2\frac{\pi-\alpha}{4}\right)\left(y^2 + cotg^2\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}}$ zu berechnen, setze man

$\frac{cotg\frac{\pi-\alpha}{4}}{\sqrt{y^2 + cotg^2\frac{\pi-\alpha}{4}}} = \eta$; η hat ein Maximum für $y = o$. Ist nun die untere Grenze des Integrals $y = \frac{r\sqrt{c^2 - x^2} - x}{r\sqrt{c^2 - x^2} + x} \gtreqless o$, so nehmen wir $y = cotg\frac{\pi-\alpha}{4}\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}$,

$$dy = -\,cotg\frac{\pi-\alpha}{4}\,\frac{d\eta}{\eta^2\sqrt{1-\eta^2}},$$

$$y^2 + tg^2\frac{\pi-\alpha}{4} = \frac{cotg^2\frac{\pi-\alpha}{4}(1-\eta^2) + \eta^2 tg^2\frac{\pi-\alpha}{4}}{\eta^2} = cotg^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,\frac{1-\eta^2\left(1 - tg^4\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}{\eta^2}.$$

Da α aus $tg\,\alpha = \frac{2c^2 - a^2}{a\sqrt{8c^2 - a^2}}$ als spitzer Winkel gefunden ist, so können wir $1 - tg^4\frac{\pi-\alpha}{4} = \lambda^2 < 1$ setzen. Die untere Grenze wird $\eta_0 = \frac{cotg\frac{\pi-\alpha}{4}}{\sqrt{y^2 + cotg^2\frac{\pi-\alpha}{4}}}$, die obere $\eta_1 = \cos\frac{\pi-\alpha}{4}$. Wir kürzen $(1-\eta^2)(1-\lambda^2\eta^2)$ durch H ab. Es ist also

$$\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{cotg\frac{\pi-\alpha}{4}}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\frac{d\eta}{\sqrt{H}} = tg\frac{\pi-\alpha}{4}\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{H}}.$$

Ist die untere Grenze $y < o$, wie es z. B. geschieht, wenn wir die Länge der ganzen im ersten Quadranten liegenden Curve finden wollen ($y = -1$), so teilen wir $\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ in $\int_y^0 \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}}$; da im ersten Summanden $y < o$, so setzen wir in ihm $y = -\,cotg\frac{\pi-\alpha}{4}\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta^2}$, $dy = +\,cotg\frac{\pi-\alpha}{4}\,\frac{d\eta}{\eta^2\sqrt{1-\eta^2}}$, im zweiten wie oben

$y = + \operatorname{cotg} \frac{\pi - \alpha}{4} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta^2}$. Wir erhalten dann

$$\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi-\alpha}{4}} \int_{\eta_0}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}} - \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi-\alpha}{4}} \int_1^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{H}} = \operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\left[\int_{\eta_0}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}} + \int_{\eta_1}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}}\right].$$

Wenn wir die ganze Länge der im ersten Quadranten liegenden Curve berechnen, so wird $\eta_0 = \eta_1 = \cos\frac{\pi - \alpha}{4}$ und die Summanden werden einander gleich.

Setzen wir in der allgemeinen Auflösung $\eta = \sin\chi$ und nennen arc sin $\eta_0 = \chi_0$, arc sin $\eta_1 = \chi_1$, so ist im ersten Falle

$$\frac{B}{p^2}\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{B}{p^2} \operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\left[F(\lambda, \chi_0) - F(\lambda, \chi_1)\right],$$ im zweiten Falle

$$\frac{B}{p^2}\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{B}{p^2} \operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\left[2F\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) - F(\lambda, \chi_0) - F(\lambda, \chi_1)\right].$$

Wir kommen jetzt zur Behandlung des Integrals des zweiten Summanden von S.

$$\int^1 \frac{a_0 y^7 + a_1 y^6 + a_2 y^5 + a_3 y^4 + a_2 y^3 + a_1 y^2 + a_0 y}{\sqrt{Y}\left[(p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2)^2 - 16 p^2 q^2 y^2 (1 + y^2)^2\right]} dy =$$

$$\int_y^1 \frac{(a_0 y^6 + a_2 y^4 + a_2 y^2 + a_0) y \, dy}{\sqrt{Y}\left[(p^2y^4 + 2s^2y^2 + p^2) - 16p^2q^2y^2(1+y^2)^2\right]} + \int_y^1 \frac{(a_1 y^6 + a_3 y^4 + a_1 y^2)\, dy}{\sqrt{Y}\left[(p^2y^4 + 2s^2y^2 + p^2) - 16p^2q^2y^2(1+y^2)^2\right]}.$$

Den ersten Summanden wollen wir S_1 nennen; wir setzen in ihm $y^2 = u$, $2y\,dy = du$; die obere Grenze bleibt 1, die untere wird $u = y^2$; da aber $u = y^2$ für $y = o$ ein Minimum hat, so müssen wir $\int_y^1$ wider wie früher trennen in $\int_y^0 + \int_0^1$ und im ersten Integrale $y = -\sqrt{u}$, im zweiten $y = +\sqrt{u}$ setzen; da aber $y\,dy$ in beiden Integralen gleich wird, und die Function sonst nur von y^2 abhängt, so vereinigen sich die Integrale sofort wider, und es wird

$$S_1 = \int_n^1 \frac{(a_0 u^3 + a_2 u^2 + a_2 u + a_0)\, du}{\sqrt{u^2 + bu + 1}\left[(p^2 u^2 + 2s^2 u + p^2) - 16p^2 q^2 u (1 + u)^2\right]};$$ da y für $x = e$ gleich -1 wurde, wird $u = +1$. Wenn wir also die ganze Länge der im ersten Quadranten liegenden Curve finden wollen, wird $S_1 = o$.

Die Irrationalität schaffen wir fort durch die Substitution

$$\xi = \frac{2\sqrt{u^2 + bu + 1} - (2u + b)}{\sqrt{4 - b^2}};$$ $\sqrt{4 - b^2}$ bezeichnen wir mit b'; es ist dann

$b'\xi + 2u + b = 2\sqrt{u^2 + bu + 1}$ und

$b'^2\xi^2 + 4u^2 + b^2 + 4b'u\xi + 2bb'\xi + 4ub = 4u^2 + 4bu + 4$, also

$$u = \frac{-b'\xi + 4 - b^2 - 2bb'\xi}{4b'\xi} = \frac{-2b\xi + b'(1 - \xi^2)}{4\xi},$$ also

$$du = \frac{-8b'\xi^2 - 4b'(1 - \xi^2)}{16\xi^2} = -\frac{b'}{4}\,\frac{1 + \xi^2}{\xi^2}\,d\xi;$$ ferner ist

$$\xi b' + \sqrt{4u^2 + 4b + b^2 + 4 - 4} = 2\sqrt{u^2 + bu + 1}$$

$$\xi b' + \sqrt{4(u^2 - bu + 1) - b'^2} = 2\sqrt{u^2 + bu + 1}$$

$4(u^2 + bu + 1) - b'^2 = 4(u^2 + bu + 1) - 4\sqrt{u^2 + bu + 1}\;\xi b' + \xi^2 b'^2$ also

$$\sqrt{u^2 + bu + 1} = \frac{b'}{4}\,\frac{1 + \xi^2}{\xi},$$ demnach

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + bu + 1}} = -\frac{d\xi}{\xi}.$$

Die obere Grenze wird jetzt $\xi_1 = \dfrac{2\sqrt{2 + b} - (2 + b)}{\sqrt{(2 + b)(2 - b)}} = \dfrac{2 - \sqrt{2 + b}}{\sqrt{2 - b}}$, die untere $\xi_0 = \dfrac{2\sqrt{y^4 + by^2 + 1} - (2y^2 + b)}{b'}$.

Es ist nun $a_0 u^3 + a_2 u^2 + a_2 u + a_0$ durch ξ auszudrücken.

$$u = \frac{b'(1 - \xi^2) - 2b\xi}{4\xi}$$

$$u^2 = \frac{b'(1 - 2\xi^2 + \xi^4) - 4bb'\xi(1 - \xi^2) + 4b^2\xi^2}{16\xi^2}$$

$$u^3 = \frac{b'^3(1 - 3\xi^3 + 3\xi^4 - \xi^6) - 6bb'^2\xi(1 - 2\xi^2 + \xi^4) + 12b^2b'\xi^2(1 - \xi^2) - 8b^3\xi^3}{64\xi^3},$$ demnach

$$a_0 = a_0\frac{64\xi^3}{64\xi^3}$$

$$a_2 u = a_2\frac{16b'\xi^2 - 32b\xi^3 - 16b'\xi^4}{64\xi^3}$$

$$a_2 u^2 = a_2\frac{4b'\xi - 16bb'\xi^2 + (-8b'^2 + 16b^2)\xi^3 - 16bb'\xi^4 + 4b'\xi^5}{64\xi^3}$$

$$a_0 u^3 = a_0\frac{b'^3 - 6bb'^2\xi + (-3b'^3 + 12b^2b')\xi^2 + (12bb'^2 - 8b^3)\xi^3 + (3b'^3 - 12b^2b')\xi^4 - 6bb'^2\xi^5 - b'^3\xi^6}{64\xi^3}.$$

Also ist $a_0 + a_2 u + a_2 u^2 + a_0 u^3 =$

$$
\begin{array}{l}
a_0 b'^3 + 4a_2 b' \xi + 16a_2 b' \xi^2 + 64a_0 \xi^3 - 16a_2 b' \xi^4 + 4a_2 b' \xi^5 - a_0 b'^3 \xi^6 \\
\quad - 6a_0 bb'^2 \xi - 16a_2 bb' \xi^2 - 32a_2 b \xi^3 - 16a_2 bb' \xi^4 - 6a_0 bb'^2 \xi^5 \\
\qquad\qquad - 3a_0 b'^3 \xi^2 - 8a_2 b'^2 \xi^3 + 3a_0 b'^3 \xi^2 \\
\qquad\qquad + 12a_0 b^2 b' \xi^2 + 16a_2 b^2 \xi^3 - 12a_0 b^2 b' \xi^2 \\
\qquad\qquad\qquad + 12a_0 bb'^2 \xi^3 \\
\qquad\qquad\qquad - 8a_0 b^3 \xi^3 \\
\hline
(b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 - b_2 \xi^4 + b_1 \xi^5 - b_0 \xi^6) : 64 \xi^3
\end{array}
$$

wo die b die darüberstehenden Summen bezeichnen.

Der Nenner war

$[p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2 + 4pqy (1 + y^2)] [p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2 - 4pqy (1 + y^2)]$.

Wir setzen ihn gleich Null und bestimmen seine Wurzeln. Der erste Factor gleich Null gesetzt und durch y^2 dividiert gibt

$$p^2 \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 4pq \left(y + \frac{1}{y}\right) + 2s^2 = o; \quad y + \frac{1}{y} = y'; \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = y'^2 - 2$$

$$p^2 y'^2 + 4pqy' + 2(s^2 - p^2) = o, \quad s^2 - p^2 = 2q^2$$

$(py' + 2q)^2 = o$; $y' = -\frac{2q}{p}$. Es hat also die letzte Gleichung zwei gleiche Wurzeln, also auch die Gleichung in y. Es ist

$$y + \frac{1}{y} + 2\frac{q}{p} = o, \text{ also } y^2 + 2\frac{q}{p} y + 1 = o, \; y = -\frac{q}{p} \pm \sqrt{\frac{q^2 - p^2}{p^2}},$$

$q^2 - p^2 = (1 - r^2)^2 - (1 + r^2) = -4r^2$; $y = -\frac{q}{p} \pm 2\frac{r}{p} i$; also sind die 4 Wurzeln des ersten Factors $y_{1,2} = -\frac{q}{p} + 2\frac{r}{p} i$, $y_{3,4} = -\frac{q}{p} - 2\frac{r}{p} i$.

Aus dem ersten Factor geht der zweite hervor, wenn man für q $-$q setzt; also sind die 4 Wurzeln des gleich Null gesetzten zweiten Factors $y_{5,6} = \frac{q}{p} + 2\frac{r}{p} i$, $y_{7,8} = \frac{q}{p} - \frac{2r}{p} i$; also ist

$$[p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2]^2 - 16p^2 q^2 y^2 (1 + y^2) =$$

$$p^4 \left[\left(y + \frac{q}{p} + 2\frac{r}{p} i\right)\left(y + \frac{q}{p} - 2\frac{r}{p} i\right)\left(y - \frac{q}{p} + \frac{2r}{p} i\right)\left(y - \frac{q}{p} - \frac{2r}{p} i\right)\right]^2 =$$

$$[(py + q + 2ri)(py + q - 2ri)(py - q + 2ri)(py - q - 2ri)]^2 : p^4 =$$

$[p^2 y^2 - (q + 2ri)^2]^2 [p^2 y^2 - (q - 2ri)^2]^2 : p^4$; man setze

$(q + 2ri)^2 = q_0$, $(q - 2ri)^2 = q_1$, so ist der letzte Ausdruck

$\frac{(p^2 y^2 - q_0)^2 (p^2 y^2 - q_1)^2}{p^4}$; es wurde $y^2 = u = \frac{b' (1 - \xi^2) - 2b\xi}{4\xi}$ gesetzt. Es ist

$p^2 y^2 - q_0 = \frac{p^2 [b' (1 - \xi^2) - 2b\xi] - 4 q_0 \xi}{4\xi}$ kurz $\frac{\xi'}{4\xi}$. Wir setzen $\xi' = 0$ und bestimmen die Wurzeln dieser Gleichung.

$p^2 b' \xi^2 + 2\xi (bp^2 + 2q_0) - b' p^2 = 0$. Es ist

$-\frac{bp^2 + 2q_0}{p^2 b'} = \frac{-bp^2 - 2q^2 + 8r^2}{p^2 b'} - \frac{4qr}{p^2 b'} i$ und bei leicht ersichtlicher Abkürzung gleich $\rho_{,} (\cos \beta_{,} + i \sin \beta_{,})$

$\xi = \rho_{,} (\cos \beta_{,} + i \sin \beta_{,}) \pm \sqrt{\rho_{,}^2 (\cos 2\beta + i \sin 2\beta) + 1}$;

$1 + \rho_{,}^2 \cos 2\beta + i \rho_{,}^2 \sin 2\beta = \rho_{,,}^2 (\cos 2\beta_{,,} + i \sin 2\beta_{,,})$

$\xi = \rho_{,} (\cos \beta_{,} + i \sin \beta_{,}) \pm \rho_{,,} (\cos \beta_{,,} + i \sin \beta_{,,})$

$= \rho_{,} \cos \beta_{,} \pm \rho_{,,} \cos \beta_{,,} + i (\rho_{,} \sin \beta_{,} \pm \rho_{,,} \sin \beta_{,,})$; also bei weiteren Abkürzung

$\xi_1 = m + ni$, $\xi_2 = m' + n'i$,

also ist $\frac{\xi'}{4\xi} = \frac{p^2 b' [\xi - (m + ni)] [\xi - (m' + n'i)]}{4\xi}$.

Wir müssen in ähnlicher Weise $p^2 y^2 - q_1$ auszudrücken suchen. q_1 geht aus q_0 hervor, wenn wir für i $-i$ setzen; also ist auch

$p^2 y^2 - q_{,} = \frac{p^2 b' [\xi - (m - ni)] [\xi - (m' - n'i)]}{4\xi}$; also

$\frac{(p^2 y^2 - q_0)^2 (p^2 y^2 - q_1)^2}{p^4} = \frac{p^4 b'^4 [(\xi - m)^2 + n^2]^2 [(\xi - m')^2 + n'^2]^2}{4^4 \xi^4}$; also ist

$$s_1 = -\frac{4^{4-3}}{p^4 b'^4} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{(b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 - b_2 \xi^4 + b_1 \xi^5 - b_0 \xi^6)\, d\xi}{[(\xi - m)^2 + n^2]^2 [(\xi - m')^2 + n'^2]^2 \; \xi . \xi^3 . \xi^{-4}}$$

$$= \frac{4}{p^4 b'^4} \int_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{(b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 - b_2 \xi^4 + b_1 \xi^5 - b_0 \xi^6)\, d\xi}{[(\xi - m)^2 + n^2]^2 [(\xi - m')^2 + n'^2]^2}.$$

Setzen wir unter dem Integralzeichen den Zähler des Bruches gleich $f(\xi)$, den Nenner gleich $F(\xi)$ und $\frac{F(\xi)}{(\xi - m - ni)^2} = \Phi(\xi)$. Es sei

$\frac{f(\xi)}{F(\xi)} = \frac{A_1}{(\xi - m - ni)^2} + \frac{A_2}{(\xi - m - ni)} + \frac{\varphi(\xi)}{\Phi(\xi)}$, wo $\varphi(\xi)$ eine bestimmte Function von ξ ist, deren Wert aber noch nicht bekannt ist; dann ist

$f(\xi) = A_1 \Phi(\xi) + A_2 (\xi - m - ni) \Phi(\xi) + (\xi - m - ni)^2 \varphi(\xi)$

$f'(\xi) = A_1 \Phi'(\xi) + A_2 \Phi'(\xi) (\xi - m - ni) + A_2 \Phi(\xi) + 2\varphi(\xi) (\xi - m - ni) + (\xi - m - ni)^2 \varphi'(\xi)$

für $\xi = m + ni$ wird

$f(m + ni) = A_1 \Phi(m + ni)$.

$f'(m + ni) = A_1 \Phi'(m + ni) + A_2 \Phi(m + ni)$.

Aus $f(\xi) = b_0 + b_1\,\xi + b_2\,\xi^2 + b_3\,\xi^3 - b_2\,\xi^4 + b_1\,\xi^5 - b_0\,\xi^6$ ist $f(m + ni)$ zu bestimmen. Es ist

$$\begin{array}{rl}
b_0 & = b_0 \\
b_1(m+ni) & = b_1 m + b_1\; ni \\
b_2(m+ni)^2 & = b_2 m^2 + 2 b_2 m\, ni - b_2\; n^2 \\
b_3(m+ni)^3 & = b_3 m^3 + 3 b_3 m^2 ni - 3\, b_3 m\, n^2 - b_3\; n^3 i \\
-b_2(m+ni)^4 & = -b_2 m^4 - 4 b_2 m^3 ni + 4_2 b_2 m^2 n^2 + 4\, b_2 m\, n^3 i - b_4\; n^4 \\
b_1(m+ni)^5 & = b_1 m^5 + 5 b_1 m^4 ni - 5_2 b_1 m^3 n^2 - 5_2 b_1 m^2 n^3 i + 5\, b_1 m\, n^4 + b_1\; n^5 i \\
-b_0(m+ni)^6 & = -b_0 m^6 - 6 b_0 m^5 ni + 6_2 b_0 m^4 n^2 + 6_3 b_0 m^3 n^3 i - 6_2 b_0 m^2 n^4 - 6 b_0 m n^5 i + b_0 n^6 \\
\hline
f(m + ni) & = c_0 + c_1 i
\end{array}$$

wo c_0 die Summe der 1., 3., 5., 7. Reihe, $c_1 i$ die Summe der 2., 4., 6. Reihe bezeichnen soll.

$$\Phi(\xi) = (\xi - m + ni)^2\,(\xi - m' - n'i)^2\,(\xi - m' + n'i)^2$$

$$\begin{aligned}
\Phi(m + ni) &= -\,4n^2\,[(m - m') + i\,(n - n')]^2\,[(m - m') + i\,(n + n')]^2 \\
&= -\,4n^2\,[(m - m')^2 - (n^2 - n'^2) + 2in\,(m - m')]^2 \\
&= -\,4n^2\,\{[(m - n')^2 - (n^2 - n'^2)]^2 - 4n^2 (m - m')^2\} - 16 n^3 i (m - m')\,[(m - m')^2 - (n^2 - n'^2)]
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir den reellen Teil mit d_0, den imaginären mit $d_1 i$, so ist

$$\Phi(m + ni) = d_0 + d_1 i, \text{ also ist } A_1 = \frac{c_0 + c_1 i}{d_0 + d_1 i}.$$

Zur Berechnung von A_2 muss man $f'(\xi)$ und $\Phi'(\xi)$ bilden. Es ist $f'(\xi) = b_1 + 2b_2\,\xi + 3b_3\,\xi^2 - 4b_2\,\xi^3 + 5b_0\,\xi^4 - 6b_0\,\xi^5$. Hieraus findet man nach kurzer Rechnung analog dem früheren $f(m + ni)$

$$f'(m + ni) = c_3 + c_4 i.$$

$$\Phi'(\xi) = 2\{(\xi - m + ni)[(\xi - m')^2 + n'^2]\}\,\{[(\xi - m')^2 + n^2] + 2\,(\xi - m + ni)\,(\xi - m')\},$$

oder Reelles vom Imaginären gesondert und für $\xi = m + ni$ gesetzt, gibt kurz $\Phi'(m + ni) = d_3 + d_4 i$; also ist

$$c_3 + c_4 i = \frac{c_0 + c_1 i}{d_0 + d_1 i}\,(d_3 + d_4 i) + A_2\,(d_0 + d_1 i); \text{ also}$$

$$A_2 = \frac{(c_3 + c_4 i)\,(d_0 + d_1 i) - (c_0 + c_1 i)\,(d_3 + d_4 i)}{(d_0 + d_1 i)^2} = \frac{e_0 + e_1 i}{(d_0 + d_1 i)^2}, \text{ also ist}$$

$$\frac{f(\xi)}{F(\xi)} = \frac{c_0 + c_1 i}{(d_0 + d_1 i)\,(\xi - m - ni)^2} + \frac{e_0 + e_1 i}{(d_0 + d_1 i)^2\,(\xi - m - ni)^2} + \frac{\varphi(\xi)}{\Phi(\xi)}.$$

$\dfrac{\varphi(\xi)}{\Phi(\xi)}$ zerlegen wir weiter in

$$\frac{A_3}{(\xi - m + ni)^2} + \frac{A_4}{(\xi - m + ni)} + \frac{B_1}{(\xi - m' - n'i)^2} + \frac{B_2}{(\xi - m' - n'i)} + \frac{B_3}{(\xi - m' + n'i)^2} + \frac{B_4}{(\xi - m' + n'i)}.$$

A_3, A_4 finden wir aus A_1 und A_2 wenn wir für i $-i$ setzen; die B erhalten wir aus den entsprechenden A, wenn wir alle m und n mit Strichen versehen. Kurz es ist

$$\frac{f(\xi)}{F(\xi)} = \frac{c_0 + c_1 i}{(d_0 + d_1 i)\,(\xi - m - ni)^2} + \frac{e_0 + e_1 i}{(d_0 + d_1 i)^2\,(\xi - m - ni)}$$
$$+ \frac{c_0 - c_1 i}{(d_0 - d_1 i)\,(\xi - m + ni)^2} + \frac{e_0 - e_1 i}{(d_0 - d_1 i)^2\,(\xi - m + ni)}$$
$$+ \frac{c_0' + c_1' i}{(d_0' + d_1' i)\,(\xi - m' - n' i)^2} + \frac{e_0' + e_1' i}{(d_0' + d_1' i)^2\,(\xi - m' - n' i)}$$
$$+ \frac{c_0' - c_1' i}{(d_0' + d_1' i)\,(\xi - m' + n' i)^2} + \frac{e_0' - e_1' i}{(d_0' - d_1' i)\,(\xi - m' + n' i)}.$$

Da $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \text{Const.}$, so ist das unbestimmte Integral als dem 1. und 3. Summanden

$$-\frac{c_0 + c_1 i}{(d_0 + d_1 i)(\xi - m - ni)} - \frac{c_0 - c_1 i}{(d_0 - d_1 i)(\xi - m + ni)} = -\frac{(c_0 + c_1 i)(d_0 - d_1 i)(\xi - m + ni) + (c_0 - c_1 i)(d_0 + d_1 i)(\xi - m - ni)}{(d_0^2 + d_1^2)\,[(\xi - m)^2 + n^2]}$$

$$= -\frac{2(c_0 d_0 + c_1 d_1)\,(\xi - m)}{(d_0^2 + d_1^2)\,[(\xi - m)^2 + n^2]} - \frac{2n\,(c_0 d_1 - c_1 d_0)}{(d_0^2 + d_1^2)\,[(\xi - m)^2 + n^2]}$$

oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung

$C_1 \frac{\xi - m}{(\xi - m)^2 + n^2} + \frac{C_2}{(\xi - m)^2 + n^2} + \text{Const.}$. Multipliciert man den 2. und 4. Summanden mit $d\xi$ und integriert unbestimmt, so erhält man

$$\frac{e_0 + e_1 i}{(d_0 + d_1 i)^2}\, l\,(\xi - m - ni) + \frac{e_0 - e_1 i}{(d_0 - d_1 i)^2}\, l\,(\xi - m + ni) + \text{Const.}$$

$$= \frac{e_0 + e_1 i}{2(d_0 + d_1 i)^2} \left\{ l\,[(\xi - m)^2 + n^2] - i \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m} \right\}$$

$$+ \frac{e_0 - e_1 i}{2(d_0 - d_1 i)^2} \left\{ l\,[(\xi - m)^2 + n^2] + i \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m} \right\} + \text{Const.}$$

$$= \tfrac{1}{2} l\,[(\xi - m)^2 + n^2]\, \frac{(e_0 + e_1 i)\,(d_0^2 - d_1^2 - 2 d_0 d_1 i) + (e_0 - e_1 i)\,(d_0^2 - d_1^2 + 2 d_0 d_1 i)}{(d_0^2 + d_1^2)^2}$$

$$- i \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m}\, \frac{(e_0 + e_1 i)\,(d_0^2 - d_1^2 - 2 d_0 d_1 i) - (e_0 - e_1 i)\,(d_0^2 - d_1^2 + 2 d_0 d_1 i)}{(d_0^2 + d_1^2)^2}$$

$$= \frac{e_0(d_0^2 - d_1^2) + 2 e_1 d_0 d_1}{(d_0^2 + d_1^2)^2}\, l[(\xi - m)^2 + n^2] + \frac{[4 e_0 d_0 d_1 - 2 e_1 (d_0^2 - d_1^2)]}{(d_0^2 + d_1^2)^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m} + \text{Const.}$$

oder wenn wir die Constanten mit C_3 und C_4 bezeichnen

$$C_3\, l\,[(\xi - m)^2 + n^2] + C_4 \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m} + \text{Const.}$$

Das unbestimmte Integral der 4 übrigen Summanden erhält man, indem man für die Constanten die bestrichenen Buchstaben setzt; die vorkommenden Functionen derselben wollen wir analog dem Früheren mit bestrichenen Buchstaben bezeichnen. Es ist also

$$\int \frac{f(\xi)}{F(\xi)} d\xi = C_1 \frac{\xi - m}{(\xi - m)^2 + n^2} + C_2 \frac{1}{(\xi - m)^2 + n^2} + C_3\, l\,[(\xi - m)^2 + n^2] + C_4 \operatorname{arctg} \frac{n}{\xi - m}$$

$$+ C_1' \frac{\xi - m'}{(\xi - m')^2 + n^2} + C_2' \frac{1}{(\xi - m')^2 + n'^2} + C_3'\, l\,[(\xi - m')^2 + n'^2] + C_4' \operatorname{arctg} \frac{n'}{\xi - m'}$$

also ist

$$s_1 = \frac{4}{p^4 b'^4} \Big\{ C_1 \Big[\frac{\xi_0 - m}{(\xi_0 - m)^2 + n^2} - \frac{\xi_1 - m}{(\xi_1 - m)^2 + n^2} \Big] + C_1' \Big[\frac{\xi_0 - m'}{(\xi_0 - m')^2 + n^2} - \frac{\xi_1 - m'}{(\xi_1 - m')^2 + n'^2} \Big]$$

$$+ C_2 \Big[\frac{1}{(\xi_0 - m)^2 + n^2} - \frac{1}{(\xi_1 - m)^2 + n^2} \Big] + C_2' \Big[\frac{1}{(\xi_0 - m')^2 + n'^2} - \frac{1}{(\xi_1 - m')^2 + n'^2} \Big]$$

$$+ C_3\, l \frac{(c_0 - m)^2 + n^2}{(c_1 - m)^2 + n^2} + C_3'\, l \frac{(\xi_0 - m')^2 + n'^2}{(\xi_1 - m')^2 + n'^2}$$

$$+ C_4 \Big[\operatorname{arctg} \frac{n}{\xi_0 - m} - \operatorname{arctg} \frac{n}{\xi_1 - m} \Big] + C_4' \Big[\operatorname{arctg} \frac{n'}{\xi_0 - m'} - \operatorname{arctg} \frac{n'}{\xi_1 - m'} \Big].$$

Es bleibt noch $\int_y^1 \frac{(a_1 y^6 + a_3 y^4 + a_1 y^2)\, dy}{\sqrt{Y}\, [(p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2)^2 - 16 p^2 q^2 y^2 (1 + y^2)^2]}$, kurz s_2 genannt, auszurechnen übrig; oder

$$s_2 = \int_y^1 \frac{(a_1 y^6 + a_3 y^4 + a_1 y^2)\, dy}{\sqrt{Y}\, (p^2 y^2 - q_0)^2 (p^2 y^2 - q_1)^2} \quad \text{wo } q_0 = (q + 2ir)^2,\ q_1 = (q - 2ir)^2$$

$Y = \left(y^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}\right) \left(y^2 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}\right)$. Wir setzen wie bei Berechnung von $\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}}$

$\frac{\operatorname{cotg} \frac{\pi - \alpha}{4}}{\sqrt{y^2 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}}} = \eta$. Es war für $y \geqq 0$ $y = \operatorname{cotg} \frac{\pi - \alpha}{4} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta}$,

$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = - \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \lambda^2 \eta^2)}}$, die untere Grenze η_0, die obere η_1.

Es ist $a_1 y^6 + a_3 y^4 + q_1 y^2 = \frac{a_1 (1 - \eta^2)^3 + a_3 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4} \eta^2 (1 - \eta^2)^2 + a_1 \operatorname{tg}^4 \frac{\pi - \alpha}{4} \eta^4 (1 - \eta^2)}{\operatorname{tg}^6 \frac{\pi - \alpha}{4} \eta^6}$

$= \frac{a_1 (1 - 3\eta^2 + 3\eta^4 - \eta^6) + a_3 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4} (\eta^2 - 2\eta^4 + \eta^6) + a_1 \operatorname{tg}^4 \frac{\pi - \alpha}{4} (\eta^4 - \eta^6)}{\operatorname{tg}^6 \frac{\pi - \alpha}{4} \eta^6}$ oder

$$=\frac{\eta^6\left(-a_1+a_3\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}-a_1\operatorname{tg}^4\frac{\pi-\alpha}{4}\right)+\eta^4\left(3a_1-2a_3\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}+a_1\operatorname{tg}^4\frac{\pi-\alpha}{4}\right)+\eta^2\left(-3a_1+a_3\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\right)+a_1}{\operatorname{tg}^6\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^6}$$

oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung

$$=\frac{\alpha_0\,\eta^6+\alpha_1\,\eta^4+\alpha_2\,\eta^2+\alpha_3}{\operatorname{tg}^6\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^6}.$$ Für $y^2=\frac{1-\eta^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,y^2}$ wird

$$p^2y^2-q_0=\frac{p^2(1-\eta^2)-q_0\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\eta^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^2}=\frac{p^2-\eta^2\left(p^2+q_0\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^2}=\frac{1-\eta^2\left(1+\frac{q_0}{p^2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^2}p^2,$$

wir setzen den Factor von η^2 kurz g_0 so ist also $p^2\,y^2-q_0=\frac{p^2\,(1-g_0\,\eta^2)}{\eta^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$;

und wenn wir g_1 so aus q_1 entstehen lassen, wie g_0 aus q_0 entstand, so ist $p^2\,y^2-q_1=\frac{p^2\,(1-g_1\,\xi^2)}{\eta^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$; also ist bei Vertauschung der Grenzen

$$s_2=+\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{(\alpha_0\,\eta^6+\alpha_1\,\eta^4+\alpha_2\,\eta^2+\alpha_3)\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\,d\eta}{\dfrac{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\lambda^2\eta^2)}\;\operatorname{tg}^6\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^6\,p^8\,(1-g_0\,\eta^2)^2\,(1-g_1\,\eta^2)^2}{\eta^8\operatorname{tg}^8\frac{\pi-\alpha}{4}}}$$ oder wenn

wir $(1-\eta^2)(1-\lambda^2\eta^2)=H$ setzen, so ist

$$s_2=+\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{\alpha_0\,\eta^8+\alpha_1\,\eta^6+\alpha_2\,\eta^4+\alpha_3\,\eta^2}{\sqrt{H}\,(1-g_0\,\eta^2)^2\,(1-g_1\,\eta^2)^2}\,d\eta.$$

Es ist $(1-g_0\,\eta^2)(1-g_1\,\eta^2)=g_0\,g_1\,\eta^4-(g_0+g_1)\,\eta^2+1$; hier müssen die Coefficienten von η reell sein. Es war

$g_0=1+\frac{q_0}{p^2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}$; $q_0=(q+2ir)^2$, $g_1=1+\frac{q_1}{p^2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}$; $q_1=(q-2ir)^2$

$g_0\cdot g_1=1+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^2}(q_0+q_1)+\frac{\operatorname{tg}^4\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^4}q_0\,q_1$; $q_0+q_1=2\,(q^2-4r^2)$

$q_0\cdot q_1=(q^2+4r^2)^2=[(1-r)^2+4r]^2=p^4.$

$g_0 + g_1 = 2 + 2\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^2}(q^2 - 4r^2)$; also ist $g_0 \cdot g_1$ und $g_0 + g_1$ tatsächlich reell.

Es ist $[(1-g_0\eta^2)(1-g_1\eta^2)]^2 = (g_0g_1)^2\eta^8 - 2g_0g_1(g_0+g_1)\eta^6 + [(g_0+g_1)^2+2g_0g_1]\eta^4 + 2(g_0+g_1)\eta^2 + 1$ oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung gleich $\beta_0\eta^8 + \beta_1\eta^6 + \beta_2\eta^4 + \beta_3\eta^2 + 1$.

Es ist jetzt $\dfrac{\alpha_0\eta^8 + \alpha_1\eta^6 + \alpha_2\eta^4 + \alpha_3\eta^2}{\beta_0\eta^8 + \beta_1\eta^6 + \beta_2\eta^4 + \beta_3\eta^2 + 1} =$

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} + \frac{\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_0\beta_1}{\beta_0}\right)\eta^6 + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_0}{\beta_0}\beta_2\right)\eta^4 + \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_0}{\beta_0}\beta_3\right)\eta^2 + \frac{\alpha_0}{\beta_0}}{(1-g_0\eta^2)^2(1-g_1\eta^2)^2}$$ oder abgekürzt

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_3\eta^6 + \gamma_2\eta^4 + \gamma_1\eta^2 + \gamma_0}{(1-g_0\eta^2)^2(1-g_1\eta^2)^2};$$ also ist

$$s_2 = + \frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}\gamma_0\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{H}} + \frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{(\gamma_3\eta^6 + \gamma_2\eta^4 + \gamma_1\eta^2 + \gamma_0)\,d\eta}{\sqrt{H}\,[(1-g_0\eta^2)^2(1-g_1\eta^2)^2]}.$$

Das Integral des ersten Summanden haben wir Seite 20 berechnet. Den zweiten Summanden setzen wir gleich $-\dfrac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}s_3$. Wir bezeichnen für den Augenblick

$\dfrac{\gamma_3\eta^6 + \gamma_2\eta^4 + \gamma_1\eta^2 + \gamma_0}{(1-\gamma_0\eta^2)^2(1-\gamma_1\eta^2)^2}$ mit $\dfrac{F(\eta^2)}{f(\eta^2)}$ und erhalten für $\eta^2 = \zeta$

$$\frac{f(\zeta)}{F(\zeta)} = \frac{\gamma_3\zeta^3 + \gamma_2\zeta^2 + \gamma_1\zeta + \gamma_0}{(1-g_0\zeta)^2(1-g_1\zeta)^2}$$

$$= \frac{\delta_1}{(1-g_0\zeta)^2} + \frac{\delta_2}{(1-g_0\zeta)} + \frac{\delta_3}{(1-g_1\zeta)^2} + \frac{\delta_4}{(1-g_1\zeta)};$$ so ist

$f(\zeta) = \delta_1(1-g_1\zeta)^2 + \delta_2(1-g_0\zeta)(1-g_1\zeta)^2 + [\delta_3 + \delta_4(1-g_1\zeta)](1-g_0\zeta)^2$, also

$$f\left(\frac{1}{g_0}\right) = \delta_1\left(1 - \frac{g_1}{g_0}\right)^2$$ und

$$f'\left(\frac{1}{g_0}\right) = -2\delta_1 g_1\left(1 - \frac{g_1}{g_0}\right) - \delta_2 g_0\left(1 - \frac{g_1}{g_0}\right)^2;$$ also

$$\delta_1 = \frac{g_0^2 f\left(\frac{1}{g_0}\right)}{(g_0 - g_1)^2};\quad \delta_2 = \frac{-2\delta_1(g_0 - g_1)g_1 - f'\left(\frac{1}{g_0}\right)g_0}{(g_0 - g_1)^2}.$$ Es war

$$g_0 = 1 + \frac{(q+2ir)^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^2} = 1 + \frac{q^2 - 4r^2}{p^2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4} + i\,\frac{2qr}{p^2}$$ kurz gleich $m + ni$, ebenso

$$g_1 = 1 + \frac{(q-2ir)^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^2} = m - ni.$$ Es ist

$$f\left(\frac{1}{g_0}\right) = \frac{\gamma_3 + \gamma_2 (m + ni) + \gamma_1 (m + ni)^2 + \gamma_0 (m + ni)^3}{(m + ni)^3}$$
$$= \frac{\gamma_3 + \gamma_2 m + \gamma_1 (m^2 - n^2) + \gamma_0 (m^3 - 3mn^2) + i(\gamma_2 n + 2\gamma_1 mn + 3\gamma_0 m^2 n - \gamma_0 n^3)}{(m + ni)^3}$$

kurz gleich $\frac{m_{,} + n_{,}i}{(m + ni)^3}$; also $\delta_1 = -\frac{m_{,} + n_{,}i}{(m + ni)\, 4n^2}$ oder kürzer $\frac{\mu + \nu i}{m + ni}$. Ferner

$$\delta_2 = \frac{+ i4 (\mu + \nu i)(m - ni)\, n + f'\left(\frac{1}{g_0}\right)(m + ni)^2}{4 (m + ni)\, n^2}; \text{ es war}$$

$f(\zeta) = \gamma_3 \zeta^3 + \gamma_2 \zeta^2 + \gamma_1 \zeta + \gamma_0$ also

$$(m + ni)^2 f'\left(\frac{1}{m + ni}\right) = 3\gamma_0 + 2\gamma_2 (m + ni) + \gamma_1 (m + ni)^2$$
$$= 3\gamma_3 + 2\gamma_2 m + \gamma_1 (m^2 - n^2) + 2i (\gamma_2 n + \gamma_1 mn)$$

kurz gleich $m_2 + i n_2$ also

$$\delta_2 = \frac{+ i4 (\mu + \nu i)(m - ni)\, n + (m_2 + i n_2)}{4 (m + ni)\, n^2}$$

oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung

$$\delta_2 = \frac{\mu_0 + \nu_0 i}{m + ni}.$$

Aus δ_1 geht δ_3, aus δ_2 geht δ_4 hervor, indem man für g_0 g_1, d. h. für i $-i$ setzt. Man erhält

$\delta_3 = \frac{\mu - \nu i}{m - ni}$ und $\delta_4 = \frac{\mu_0 - \nu_0 i}{m - ni}$. Demnach sind in

$\frac{f(\zeta)}{F(\zeta)} = \frac{\delta_1}{(1 - g_0 \zeta)^2} + \frac{\delta_2}{1 - g_0 \zeta} + \frac{\delta_3}{(1 - g_1 \zeta)^2} + \frac{\delta_4}{1 - g_1 \zeta}$ die Constanten δ als reelle Grössen bestimmt. Wir erhalten jetzt

$$S_2 = \int_{\eta_1}^{\eta_0} \left\{ \frac{\delta_1}{(1 - g_0 \eta^2)^2} + \frac{\delta_2}{1 - g_0 \eta^2} + \frac{\delta_3}{(1 - g_1 \eta^2)^2} + \frac{\delta_4}{1 - g_1 \eta^2} \right\} \frac{d\eta}{\sqrt{H}}$$

und betrachten zuerst $\int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{\delta_1}{(1 - g_0 \eta^2)} \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \lambda^2 \eta^2)}}$, worin η_1 und η_0 zwischen o und 1 incl. der Grenzen lagen, und $g_0 = m + ni\, \lambda^2 < 1$.

Wir setzen $t = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{[1 - (m + ni\, \eta^2)] \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \lambda^2 \eta^2)}}$; es sei $\eta = \sin \chi$

so ist $t = \int\limits_0^\chi \frac{d\chi}{[1-(m+ni)\sin^2\chi]\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\chi}}$; wir bezeichnen $\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\chi} = \Delta(\chi)$;

es ist $\frac{1}{1-(m+ni)\sin^2\chi} = \frac{1-(m+ni)\sin^2\chi+(m+ni)\sin^2\chi}{1-(m+ni)\sin^2\chi}$, also

$$t = \int\limits_0^\chi \frac{d\chi}{\Delta(\chi)} + \int\limits_0^\chi \frac{(m+ni)\sin^2\chi\, d\chi}{[1-(m+ni)\sin^2\chi]\,\Delta(\chi)}.$$

Wir setzen $(m+ni) = \lambda^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(\alpha+\beta i)$, mod. λ; wir lassen den Modulus wider unbezeichnet, also $\sin \mathrm{am}\,(\alpha+\beta i) = \frac{\sqrt{m+ni}}{\lambda}$.

Die rechte Seite ist eine complexe Grösse, also sind α und β zu bestimmen möglich; denn wie Richelot zuerst gezeigt hat, lässt sich jede complexe Grösse auf die Form $\sin \mathrm{am}\,(\alpha+\beta i)$ bringen. Es ist (Jac. fund. 18)

$$\sin \mathrm{am}\,(a \pm b) = \frac{\sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, b\, \Delta \mathrm{am}\, b \pm \sin \mathrm{am}\, b \cos \mathrm{am}\, a\, \Delta \mathrm{am}\, a}{1-\lambda^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, b},$$

setzt man $a = \alpha + \beta i$, $b = \alpha - \beta i$, so gibt das obere Zeichen $\sin \mathrm{am}\, 2\alpha$, das untere $\sin \mathrm{am}\, 2\beta i$ ausgedrückt durch $\sin \mathrm{am}\,(\alpha \pm \beta i)$, $\cos \mathrm{am}\,(\alpha \pm \beta i)$, $\Delta \mathrm{am}\,(\alpha \pm \beta i)$.

Es war gegeben $\sin \mathrm{am}\,(\alpha+\beta i) = \frac{\sqrt{m+ni}}{\lambda}$, demnach

$$\sin \mathrm{am}\,(\alpha-\beta i) = \frac{\sqrt{m-ni}}{\lambda}, \text{ also}$$

$$\cos \mathrm{am}\,(\alpha \pm \beta i) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - m \mp ni}}{\lambda},$$

$\Delta\ \mathrm{am}\,(\alpha \pm \beta i) = \sqrt{1-m \mp ni}$. Wir setzen für den Augenblick $m \pm ni = \rho_{,}^2 (\cos 2\vartheta_{,} \pm i \sin 2\vartheta_{,})$, wo

$\rho_{,}^4 = m^2 + n^2$, $\mathrm{tg}\, 2\vartheta_{,} = \frac{n}{m}$ ist; also ist

$\sqrt{m \pm ni} = \rho_1 (\cos\vartheta_1 \pm i \sin\vartheta_1) = \lambda \sin \mathrm{am}\,(\alpha \pm \beta i) = \rho_1 e^{\pm \vartheta_1 i}$.

Auf eben so einfache Weise findet man ρ_2, ρ_3, ϑ_2, ϑ_3 in

$\sqrt{\lambda^2 - m \mp ni} = \rho_2 (\cos\vartheta_2 \pm i \sin\vartheta_2) = \lambda \cos \mathrm{am}\,(\alpha \pm \beta i) = \rho_2 e^{\pm \vartheta_2 i}$

$\sqrt{1 - m \mp ni} = \rho_3 (\cos\vartheta_3 \pm i \sin\vartheta_3) = \Delta\ \mathrm{am}\,(\alpha \pm \beta i) = \rho_3 e^{\pm \vartheta_3 i}$. Demnach ist

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2\alpha \\ \sin 2\beta i\end{array}\right\} = \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdot e^{(\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3) i} \mp \rho_1 \rho_2 \rho_3\, e^{(-\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) i}}{\lambda^2 \left[1 - \frac{\rho_{,}^2 \rho_{,}^2}{\lambda^2} e^{2(\vartheta_{,} - \vartheta_{,}) i}\right]}, \text{ also}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3)}{\lambda^2 - \rho_{,}^4}; \quad \sin \mathrm{am}\, 2\beta i = i\, \frac{2\rho_1 \rho_2 \rho_3 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3)}{\lambda^2 - \rho_{,}^4}.$$

Da $\sin\operatorname{am} 2\beta i = i \operatorname{tg}\operatorname{am}(2\beta, \lambda')$ wo $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$ so ist

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(2\beta, \lambda') = \frac{2\rho_1\,\rho_2\,\rho_3 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3)}{\lambda^2 - \rho_1^4}.$$

Es lassen sich bekanntlich die Bestimmungsformeln für α und β noch etwas vereinfachen, aber für unseren Zweck genügen die gegebenen Formeln. Also

$$t = \int_0^\chi \frac{d\chi}{\Delta(\chi)} + \int_0^\chi \frac{\lambda^2 \sin^2\operatorname{am}(\alpha + \beta i) \sin^2\chi\, d\chi}{[1 - \lambda^2 \sin^2\operatorname{am}(\alpha + \beta i) \sin^2\chi]\,\Delta(\chi)}.$$

Den ersten Summanden setzen wir gleich v, demnach $\chi = \operatorname{am} v$; $d\chi = \Delta\operatorname{am} v\, dv$; also

$$t = v + \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am}(\alpha + \beta i)}{\Delta\operatorname{am}(\alpha + \beta i)} \int_0^v \frac{\lambda^2 \sin\operatorname{am}(\alpha + \beta i)\cos\operatorname{am}(\alpha + \beta i)\,\Delta\operatorname{am}(\alpha + \beta i)\sin\operatorname{am} v\, dv}{1 - \lambda^2 \sin^2\operatorname{am}(\alpha + \beta i)\sin^2\operatorname{am} v}$$

$$= v + \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}(\alpha + \beta i)}{\Delta\operatorname{am}(\alpha + \beta i)}\, \Pi(\operatorname{am} v, \operatorname{am}(\alpha + \beta i), \lambda) \text{ kürzer}$$

$$= v + \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}(\alpha + \beta i)}{\Delta\operatorname{am}(\alpha + \beta i)}\, \Pi(v, \alpha + \beta i).$$

Wir versuchen in t das Reelle vom Imaginären zu sondern. Bekanntlich ist für jedes u und v (Fund. 18), wenn wir der Kürze wegen $\operatorname{am} u = a$, $\operatorname{am} v = b$ setzen,

$$\sin(u + v) = \frac{\sin a \cos b\,\Delta(b) + \sin b \cos a\,\Delta(a)}{1 - \lambda^2 \sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\cos(u + v) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b\,\Delta(a)\,\Delta(b)}{1 - \lambda^2 \sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\Delta(u + v) = \frac{\Delta(a)\,\Delta(b) - \lambda^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1 - \lambda^2 \sin^2 a \sin^2 b};$$ setzt man

$u = \alpha$, $v = \beta i$ und berücksichtigt man, dass (Fund. 19)

$$\sin\operatorname{am}(\beta i) = \frac{i \sin\operatorname{am}(\beta, \lambda')}{\cos\operatorname{am}(\beta, \lambda')}$$

$$\cos\operatorname{am}(\beta i) = \frac{1}{\cos\operatorname{am}(\beta, \lambda')}$$

$$\Delta\operatorname{am}(\beta i) = \frac{\Delta\operatorname{am}(\beta, \lambda')}{\cos\operatorname{am}(\beta, \lambda')}$$ so ist

$$\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}(\alpha + \beta i)}{\Delta\operatorname{am}(\alpha + \beta i)} = \frac{\sin\operatorname{am}(\alpha + \beta i)}{\cos\operatorname{am}(\alpha + \beta i)\,\Delta\operatorname{am}(\alpha + \beta i)} =$$

$$\frac{\sin\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}(\beta, \lambda') + i \sin\operatorname{am}(\beta, \lambda')\cos\operatorname{am}(\beta, \lambda')\cos\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}\alpha}{\cos\operatorname{am}\alpha\cos\operatorname{am}(\beta, \lambda') - i \sin\alpha \sin\operatorname{am}(\beta, \lambda')\,\Delta\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}(\beta, \lambda')} \times$$

$$\frac{\cos^2\operatorname{am}(\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2\operatorname{am}\alpha \sin^2\operatorname{am}(\beta, \lambda')}{\Delta\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}(\beta, \lambda')\cos\operatorname{am}(\beta, \lambda') - i\lambda^2 \sin\operatorname{am}\alpha \sin\operatorname{am}(\beta, \lambda')\cos\operatorname{am}\alpha}.$$

In diesem Ausdruck lässt sich leicht das Reelle vom Imaginären trennen, wir nennen das Reelle A_0, das Imaginäre $A_1 i$; also ist

$\frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} (\alpha + \beta i)}{\Delta \operatorname{am} (\alpha + \beta i)} = A_0 + A_1 i$. Demnach

$t = v + (A_0 + A_1 i)\, \Pi(v, \alpha + \beta i)$; setzt man in diesem Ausdruck für i $-i$, so erhält man

$$\int_0^\eta \frac{d\eta}{[1 - (m - ni)\eta^2] \sqrt{(1-\eta^2)(1-\lambda^2\eta^2)}} = v + (A_0 - A_1 i)\, \Pi(v, \alpha - \beta i).$$

Es seien die zu η_1 und η_0 gehörigen Werte von v v_1 und v_0; alsdann ist

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \left(\frac{\delta_2}{1 - g_0\eta^2} + \frac{\delta_1}{(1 - g_1\eta^2)} \right) \frac{d\eta}{\sqrt{H}} =$$

$$\frac{\mu_0 + \nu_0 i}{m + ni} \{v_0 - v_1 + (A_0 + A_1 i) [\Pi(v_0, \alpha + \beta i) - \Pi(v_1, \alpha + \beta i)]\} +$$

$\frac{\mu_0 - \nu_0 i}{m - ni} \{v_0 - v_1 + (A_0 - A_1 i) [\Pi(v_0, \alpha - \beta i) - \Pi(v_1, \alpha - \beta i)]\}$. Es ist $\frac{\mu_0 + \nu_0 i}{m + ni} + \frac{\mu_0 - \nu_0 i}{m - ni} =$

$\frac{(\mu_0 + \nu_0 i)(m - ni) + (\mu_0 - \nu_0 i)(m + ni)}{m^2 + n^2} = 2 \frac{\mu_0 m + \nu_0 n}{m^2 + n^2}$. In $\frac{\mu_0 + \nu_0 i}{m + ni} (A_0 + A_1 i)$

nennen wir das Reelle A_2, das Imaginäre $A_3 i$. Alsdann ist obiges Integral gleich

$$2 \frac{\mu_0 m + \nu_0 n}{m^2 + n^2} (v_0 - v_1) + A_2 [\Pi(v_0, \alpha + \beta i) + \Pi(v_0, \alpha - \beta i) - \Pi(v_1, \alpha + \beta i) - \Pi(v_1, \alpha - \beta i)]$$
$$+ i A_3 [\Pi(v_0, \alpha + \beta i) - \Pi(v_0, \alpha - \beta i) - \Pi(v_0, \alpha + \beta i) + \Pi(v_0, \alpha - \beta i)].$$

Es wird mit Berücksichtigung von Jac. fund. § 55, 7; § 55, 1; § 18, 4 der Factor von A_2 gleich

$$2\Pi(v_0 - v_1, \alpha) + (v_0 - v_1)\, 2 \frac{\lambda^2 \sin \operatorname{am} \alpha \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \cos \operatorname{am} \alpha\, \Delta \operatorname{am} \alpha}{1 + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda')}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, l \frac{1 + \lambda^2 \sin \operatorname{am} \alpha \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am} (v_0 - v_1 - \alpha)}{1 - \lambda^2 \sin \operatorname{am} \alpha \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am} (v_0 - v_1 + \alpha)} \times$$
$$\frac{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \sin^2 \operatorname{am} (v_0 - \alpha)}{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \sin^2 \operatorname{am} (v_0 + \alpha)} \times \frac{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \sin^2 \operatorname{am} (v_1 + \alpha)}{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \sin^2 \operatorname{am} (v_1 - \alpha)}, \text{ also}$$

eine vollkommene reelle, ohne Schwierigkeit zu berechnende Grösse.

Den Factor von A_3 nennen wir iB_3. Nach fund. 55, 8 ist dann

$$iB_3 = 2i [\Pi(v_0, \beta i) - \Pi(v_1, \beta i)] + (v_0 - v_1)\, \lambda^2 \sin \operatorname{am} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am} (\beta, \lambda')$$
$$\{\sin \operatorname{am} (\alpha + \beta i) + \sin \operatorname{am} (\alpha - \beta i)\} + \frac{i}{2}\, l \frac{1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} (v_0 - \beta i)}{1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} (v_0 + \beta i)}$$
$$+ \frac{1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} (v_1 + \beta i)}{1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} (v_1 - \beta i)}.$$

Der erste Summand ist unter Berücksichtigung der eben dagewesenen Formeln

$$2\mathrm{i}\,\Pi\,(v_0 - v_1, \beta\mathrm{i}) + \mathrm{i}\,l\,\frac{1 + \mathrm{i}\,\lambda^2 \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda') \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am}(v_0 - v_1 - \beta\mathrm{i})}{1 - \mathrm{i}\,\lambda^2 \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda') \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am}(v_0 - v_1 + \beta\mathrm{i})}.$$

Es ist $\sin(u \mp \beta\mathrm{i}) = \dfrac{\sin \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda') \mp \mathrm{i} \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{\cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')}$.

Der Logarithmus hat also die Form $\mathrm{i}\,l\,\dfrac{x + y\mathrm{i}}{x - y\mathrm{i}}$. Es ist

$$l\,\frac{x + y\mathrm{i}}{x - y\mathrm{i}} = [l\,(x + y\mathrm{i}) - l\,(x - y\mathrm{i})] = \frac{1}{2}\,[l\,(x^2 + y^2) - l\,(x^2 + y^2)] +$$

$$\mathrm{i}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{y}{x}\right)\right]\Big\} = + 2\mathrm{i} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x};$$ also

$\mathrm{i}\,l\,\dfrac{x + y\mathrm{i}}{x - y\mathrm{i}} = -2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$; also ist der Logarithmus gleich

$$-2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda') \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am}(v_0 - v_1)\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{\cos^2 \operatorname{am}(\beta,\lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am}(v_0 - v_1) \sin^2 \operatorname{am}(\beta,\lambda') + \lambda^2 \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta,\lambda') \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \cos \operatorname{am}(v_0 - v_1)}$$

$\times\, \Delta \operatorname{am}(v_0 - v_1) \sin \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos \operatorname{am}(\beta, \lambda')$; also eine reelle Grösse.

Das Integral dritter Gattung haben wir schon Ende des 2. Falles dieses Abschnittes behandelt. Wir erhalten, wenn wir jetzt für den Modulus $\varkappa$ λ, für $\varkappa'$ also λ' für K und K′ also Λ und Λ' setzen

$$2\mathrm{i}\Pi\,(v_0 - v_1, \beta\mathrm{i}) = 2\,(v_0 - v_1)\left\{- \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda')\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \frac{\pi\beta}{2\Lambda\Lambda'} + \right.$$

$$\left. Z\,(\beta, \lambda') + 2\sum_1^\infty \frac{1}{n}\,\frac{q^n}{1 - q^{2n}}\left(e^{\frac{n\pi\beta}{\Lambda}} - e^{-\frac{n\pi\beta}{\Lambda}}\right) \sin \frac{n\pi\,(v_0 - v_1)}{\Lambda}\right.$$

Der erste Summand von $\mathrm{i}B_3$ ist also eine reelle ohne Schwierigkeit zu berechnende Grösse.

Der zweite Summand ist sofort mit Hülfe von Jac. fund. § 18, 1 auf eine reelle übersichtliche Form zu bringen; er ist

$$\frac{2\,(v_0 - v_1)\,\lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda')\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{\cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')}.$$

Den noch vorkommenden Logarithmus können wir in der eben gezeigten Weise auf einen reellen arc tg bringen. Es ist

$$\sin^2 \operatorname{am}(u \mp \beta\mathrm{i}) = \frac{\sin^2 \operatorname{am} u\,[\Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')]^2 - \cos^2 \operatorname{am} u\,[\Delta \operatorname{am} u]^2 \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') \mp 2\mathrm{i} \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos \operatorname{am}(\beta, \lambda')\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{[\cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')]^2},$$

also ist der letzte Summand

$$-\operatorname{arctg} \frac{2\lambda \sin \operatorname{am} \alpha \sin \operatorname{am} v_0 \cos \operatorname{am} v_0\, \Delta \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos \operatorname{am}(\beta, \lambda')\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{[\cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} v_0 \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')]^2 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \left\{\sin^2 \operatorname{am} v_0 [1 - \lambda'^2 \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')] - \cos^2 \operatorname{am} v_0 [1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} v_0] \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')\right\}}$$

plus arc tg eines Ausdrucks, in dem nur für v_0 v_1 steht.

Es ist also auch $\mathrm{i}B_3$ eine reelle ohne Schwierigkeit zu berechnende Grösse.

Wir haben auf diese Weise

$$\int\limits_{\eta_1}^{\eta_0}\left(\frac{\delta_2}{1-g_0\,\eta^2}+\frac{\delta_4}{1-g_1\,\eta^2}\right)\frac{d\eta}{\sqrt{H}}$$ in gebrauchsfertiger Form gegeben.

Es erübrigt noch $\int\limits_{\eta_1}^{\eta_0}\left\{\frac{\delta_1}{[1-g_0\,\eta^2]^2}+\frac{\delta_3}{[1-g_1\,\eta^2]^2}\right\}\frac{d\eta}{\sqrt{H}}$ kurz s_4 zu behandeln.

Auf Seite 10 haben wir gefunden, wenn wir die Bezeichnungsweise zugleich für den augenblicklichen Zweck umformen

$$\frac{\eta\sqrt{H}}{1-g_0\,\eta^2}=b_0\int\frac{d\eta}{(1-g_0\,\eta^2)^2\sqrt{H}}+b_1\int\frac{d\eta}{(1-g_0\,\eta^2)\sqrt{H}}+b_3\int\frac{1-g_0\,\eta^2}{\sqrt{H}}\,d\eta$$

wo jetzt $b_0=2\left(1-\frac{1-\lambda^2}{g_0}+\frac{\lambda^2}{g_0{}^2}\right)$, $b_1=-\left[1-\frac{2(1-\lambda^2)}{g_0}-\frac{3\lambda^2}{g_0{}^2}\right]$, $b_3=\frac{\lambda^2}{g_0{}^2}$ complexe Grosse sind. Wir setzen

$b_0=\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2 i}$, $\frac{b_1}{b_0}=\varepsilon_3+\varepsilon_4 i$, $\frac{b_3}{b_0}=\varepsilon_5+\varepsilon_6 i$, so erhalten wir

$$s_4=(\varepsilon_1+\varepsilon_2 i)\left[\frac{\eta\sqrt{H}}{1-g_0\,\eta^2}\right]_{\eta_1}^{\eta_0}-(\varepsilon_3+\varepsilon_4 i)\int\limits_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{(1-g_0\eta^2)\sqrt{H}}-(\varepsilon_5+\varepsilon_6 i)\int\limits_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{1-g_0\,\eta^2}{\sqrt{H}}\,d\eta$$

plus den conjugiert complexen Gliedern. Alle hier vorkommende Integrale haben wir schon behandelt und gefunden, dass je 2 entsprechende derselben zusammen einen reellen durch elliptische Functionen ausdrückbaren Wert geben. Die Aufstellung des etwas langen Resultates wollen wir des Raumes wegen unterlassen.

Für den Fall, dass die Länge eines Bogens bis zum Punkte x, y gefunden werden soll, für dessen x, $r\sqrt{c^2-x^2}\geqq x$, ist im 3. Falle die allgemeine Auflösung, wenn wir der Kürze wegen die Abkürzungen beibehalten und die Seitenzahl, auf der sich die Ausrechnung befindet, in Klammern dahintersetzen,

$$s=\frac{B}{p^2}\left\{tg\frac{\pi-\alpha}{4}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{H}}\,(19)+s_1\,(26)+\frac{tg^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{H}}+\frac{tg^2\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}\,s_3\ (29\text{ u. f.})\right\}$$

Für den Fall, dass $-1\leqq\frac{r\sqrt{c^2-x^2}-x}{r\sqrt{c^2-x^2}-x}<o$ haben wir nur noch s_2 weiter zu berechnen. Formen wir

$$s_2=\int\limits_y^1\frac{a_1\,y^6+a_3\,y^4+a_1\,y^2}{\sqrt{Y}\,(p^2\,y^2-q_0)^2\,(p^2\,y^2-q_1)^2}\,dy$$ wie $\int\limits_y^1\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ (Seite 19) um, so ist

$$s_2 = \int_y^0 \frac{a_0 y^6 + a_2 y^4 + a_1 y^2}{\sqrt{Y}\,(p^2 y^2 - q_0)^2 (p^2 y^2 - q_1)^2}\, dy + \int_0^1 \frac{a_0 y^6 + a_2 y^4 + a_1 y^2}{\sqrt{Y}\,(p^2 y^2 - q_0)^2 (p^2 y^2 - q_1)^2}\, dy =$$

$$\frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4}}{p^8} \left[\int_{\eta_0}^1 \frac{\alpha_0 \eta^8 + \alpha_1 \eta^6 + \alpha_2 \eta^4 + \alpha_3 \eta^2}{\sqrt{H}\,(1 - g_0 \eta^2)^2 (1 - g_1 \eta^2)^2}\, d\eta - \int_1^{\eta_1} \frac{\alpha_0 \eta^8 + \alpha_1 \eta^6 + \alpha_2 \eta^4 + \alpha_3 \eta^2}{\sqrt{H}\,(1 - g_0 \eta^2)^2 (1 - g_1 \eta^2)^2}\, d\eta \right.$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4}}{p^8} \left[\int_{\eta_0}^0 + \int_0^1 - \int_1^0 - \int_0^{\eta_1} \right] = \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4}}{p^8} \left[2\int_0^1 - \int_0^{\eta_0} - \int_0^{\eta_1} \right]$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4}}{p^8} \left[2\gamma_0 \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}} - \gamma_0 \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{H}} - \gamma_0 \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{H}} + 2\int_0^1 \frac{\varphi(\eta^2)}{\sqrt{H}\,\chi(\eta^2)}\, d\eta - \int_0^{\eta_0} \frac{\varphi(\eta^2)}{\sqrt{H}\,\chi(\eta^2)}\, d\eta - \int_0^{\eta_1} \frac{\varphi(\eta^2)}{\sqrt{H}\,\chi(\eta^2)}\, d\eta \right].$$

Die ersten 3 Integrale sind Seite 19, die Form der letzten 3 auf Seite 28 u. f. behandelt.

Somit ist in diesem Falle

$$s = \frac{B}{p^2} \left\{ \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \left[\int_{\eta_0}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}} + \int_{\eta_1}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}} \right] + s_1\,(26) + s_2\,(34). \right\}$$

Wir haben somit die Länge des Bogens für alle Fälle angegeben.

II.

Schulnachrichten.

I. Lehrplan.

Da der Lehrplan im grossen und ganzen derselbe geblieben ist, die Verteilung der Unterrichtsfächer aber teils wegen Abgang teils wegen Beurlaubung einzelner Lehrer, im Laufe des Schuljares mehrfach gewechselt hat, so beschränke ich mich diesmal darauf, nur die in den verschiedenen Klassen gelesenen Autoren nambaft zu machen.

A. Lateinisch.

Prima: Im Sommer Virgil. Aen. lib. VII; im Winter Livius lib. III cap. 1—30.

Ober-Secunda: Sallust. bell. Ingurth. cap. 25—83; Ovid. Metam. lib. XIII nach Merkel's Auswal.

Unter-Secunda: Caesar de bell. civil. I cap. 1—40; Ovid. Metam. III 1—137, II 1—240.

Ober-Tertia: Caesar d. bell. Gall. lib. I c. 18—54 (Schluss); lib. III c. 1—6.

Unter-Tertia: Caesar bell. Gallic. lib. I cap. 1; lib. VI cap. 1—29.

B. Französisch.

Prima: im Sommer l'Avare par Molière, le Joueur par Regnard und einige Satiren von Boileau; im Winter Phèdre par Racine; ausserdem privatim les grands faits de l'histoire de France par Schütz Tome II, 1, 2, 4, 6, 7, 9 und 10.

Ober-Secunda: im Sommer Attalie par Racine; im Winter Un Verre d'eau und Avant, Pendant, Après par Scribe; ausserdem privatim Lectures choisies von Plötz S. S. 72—90 und 101—120.

Unter-Secunda: im Sommer Herrig la France littéraire S. S. 396—400 und 561—570; im Winter S. S. 570—582.

Ober-Tertia: im Sommer Lectures choisies von Plötz S. S. 101—128; im Winter S. S. 30—55.

Unter-Tertia: Lectures choisies von Plötz S. S. 1—20, 30—37 und 85—90.

C. Englisch.

Prima: im Sommer The Rivals by Sheridan und Herrig british classical authors S. S. 118—124, 465—473 und 485—488; im Winter King Lear by Shakspeare.

Ober-Secunda: im Sommer Herrig british classical authors S. S. 296—303, 325—335 und 625—638; im Winter Washington Irving Sketch-book S. S. 1—44; ausserdem privatim Goldsmith Vicar of Wakefield.

Unter-Secunda: Herrig british classical authors S. S. 156—194.

Themata

zu den wärend des Schuljares in Prima und Secunda gefertigten Aufsätzen.

Prima.

Im Deutschen:

1. Die Marienburg.
2. Die Schlacht auf dem Lechfelde 955.
3. Der Ackerbau, der Anfang der Kultur. (Klausurarbeit.)
4. Vorteilhafte Folgen der Entdeckung Amerika's.
5. Der Schild des Achill und das Lied von der Glocke.
6. Der gelämte Kranich. Von Ewald v. Kleist.
7. Sich im Spiegel zu beschauen
   Kann den Affen nur erbauen;
   Wirke! nur in seinen Werken
   Kann der Mensch sich selbst bemerken. (Rückert.)
8. Zwischen Lipp' und Kelches Rand
   Schwebt der dunkeln Mächte Hand. (Kind.)

9. Wenn ohne Neid und Hass die Menschen wären,
Nie uns und Andre träf' ein Misgeschick,
Wie manche Tugend möchten wir entberen! (Nach Molière.)
10. Unterhaltungsbücher sind unsre Freunde und auch unsre Feinde. (Klausurarbeit.)

Im Französischen:

1. Shakspeare.
2. Guerre de Louis quatorze contre la Hollande.
3. Guerre pour la succession d'Espagne.
4. Jacques II. roi d'Angleterre.
5. Le duc de Marlborough.
6. L'avare par Molière.
7. a. La guerre du Nord.
   b. Le grand électeur.
   c. Première guerre de Silésie.
   d. Guerre de sept ans.
   e. Guerre pour l'indépendance des Etats Unis de l'Amérique du Nord.
   f. Séjour de Charles XII en Turquie.
   g. Marie Stuart.
   h. Guerre pour la succession d'Autriche.
   i. Pierre le grand.
   k. Invasion des Arabes en France.
   l. Guerre civile des deux roses.
   m. Napoléon premier.
   n. Soulèvement de la Grèce.
   o. La première Croisade.
   p. Bataille d'Augsbourg.
8. Guerre pour la succession de Pologne.
9. Jeunesse de Frédéric le grand.
10. Wallenstein.
11. Jeunesse de Cyrus.
12. Fondation de la ville de Rome.

Im Englischen:

1. Foundation of Rome.
2. Consperacy of Catilina.
3. Cause of the war of Troy.
4. Expedition of the Argonauts.
5. a. Return of Olysses from Troy.
   b. Easterholidays.
   c. Cyrus' birth and youth.
6. a. Memento mori and memento vivere are in equal manner pernicious if they be followed each for itself.
   b. Synonymous words To fool, to deceive, to defraud, to make a mistake, to lie.

c. Non scholae sed vitae discimus.
d. Laudamus veteres sed nostris utimur annis.
e. De cupiditate gloriae.
f. Sea and desert.
g. Character of queen Elisabeth.
h. War a friend and enemy to art.
i. Youth is the time for learning.
k. Which are the sources of human errors.
l. Youth of Frederic the Great.

7. Philip the second king of Macedonia.
8. Life of Wieland.
9. The Danish war of 1864.

Ober-Secunda.

Im Deutschen:

1. Maximilian I., der letzte Ritter.
2. König Frühling.
3. Die Bedeutung der Ströme für die Kultur. (Klausurarbeit.)
4. Hat der Deutsche Grund auf seinen Namen stolz zu sein?
5. Wallensteins Heer nach „Wallensteins Lager."
6. Geringes ist die Wiege des Grossen.
7. „Der Kampf mit dem Drachen" nach den drei Anschauungsweisen des Volkes, welches ihn preist, des Ritters, welcher ihn rechtfertigt, und des Meisters, welcher ihn verdammt.
8. Gedankengang in Klopstock's Ode „Die Sprache."
9. Tapferkeit und ihre Synonyma.
10. Ueber den Wert des Lobes. (Examenarbeit.)

Unter-Secunda.

Im Deutschen:

1. „Die Schlacht" nach Schiller.
2. Schiller's Rätsel über den Pflug.
3. Die Elemente hassen das Gebild der Menschenhand.
4. Das Drama von Corfinium nach Caesar.
5. Welche Gehülfen den Menschen bei seinen Arbeiten durch ihre Kraft unterstützen?
6. Ist Armut immer ein Unglück zu nennen?
7. Warum ist es nicht gut, sein Lebensschicksal vorher zu wissen?
8. a. Bis dat, qui cito dat.
   b. Anrede Gustav Adolfs an seine Soldaten vor der Schlacht bei Lützen.
9. a. Durch welche Tugenden ist die Herrschaft der Römer gegründet worden?
   b. Der Ausspruch Horazens: „Quidquid delirant reges, plectuntur Achivi" mit Beispielen aus der Geschichte belegt.
10. a. Für wen neme ich Partei in den punischen Kriegen?
    b. Der wandernde Taler.

Themata

zu den Abiturienten-Arbeiten.

Ostern 1874.

a. Deutscher Aufsatz.

Wenn ohne Neid und Hass die Menschen wären,
Nie uns und Andre träf ein Missgeschick,
Wie manche Tugend möchten wir entberen!

b. Französischer Aufsatz.

Wallenstein.

c. Ein englisches Exercitium.

d. Physikalische Aufgaben.

1. Ein Meteorstein, der beim Zerspringen keine nach oben oder unten gehende Bewegung hatte, fällt $t = 8$ Secunden, nachdem man ihn in der Luft zerplatzen hörte, zur Erde. In welcher Höhe zersprang er? Die Geschwindigkeit des Schalles ist $C = 333^{\text{m}}$.
2. Einem Hohlspiegel von 3^{dm} Brennweite steht in einer Entfernung von 4^{dm} ein kleiner Planspiegel so gegenüber, dass die Achse des Hohlspiegels durch seine Mitte geht und mit seiner Ebene einen Neigungswinkel von 45^0 bildet. Wo liegt das von beiden reflectirte Bild eines leuchtenden Punktes, der 8^{dm} weit vom Hohlspiegel in der Achse desselben sich befindet?

e. Mathematische Aufgaben.

1. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist der Umfang $2s$ und das Höhenperpendikel h auf die Hypotenuse gegeben, man sucht 1) die Seiten und die Winkel durch Rechnung, und 2) soll das Dreieck gezeichnet werden.
2. Innerhalb eines Winkels α ist ein veränderlicher Punkt P gegeben. Auf welchem geometrischen Orte liegt derselbe, wenn die Summe der von P auf die Schenkel gefällten Lote gleich einer constanten Grösse s ist?
3. Von einem Dreiecke ist die Grundlinie $a = 10^{\text{m}}$, die Höhe $h = 8^{\text{m}}$ und der Winkel an der Spitze $\alpha = 32^0$ gegeben. Wie gross sind die Schenkel eines über derselben Grundlinie beschriebenen gleichschenkligen Dreiecks, das mit dem gegebenen gleichen Umfang hat?
4. Bei einem Kessel, der aus einem abgestumpften Kegel und einem Kugelabschnitt bestehend gedacht werden soll, beträgt der obere Durchmesser des Kegels $2a = 6^{\text{dm}}$, der untere $2b = 4{,}6^{\text{dm}}$ und die Höhe des ganzen Kessels incl. Höhe des Kugelabschnitts von 4^{cm}, 4^{dm}, wie gross ist der Inhalt und die Fläche des Kessels?

f. Chemische Aufgabe.

1,5 Gramm einer Eisensorte wurde in verdünnter Schwefelsäure gelöst, das sich entwickelnde Gas über glühendes CuO geleitet und in Natronlauge aufgefangen, welche dadurch um 0,074 gr. an Gewicht zunahm. Der Rückstand wog 0,05 gr.; derselbe wurde im Verbrennungsrohre mit glühenden CoO im Sauerstoffstrom verbrannt und die Gewichtszunahme der vorgelegten Natronlauge betrug 2,079 gr. Wieviel % C enthält das Eisen?

Wieviel davon als Graphit, wieviel als chemisch gebundener Kohlenstoff? Welch eine Eisensorte ist es und wie wird dieselbe hüttenmännisch gewonnen?

Um den S-Gehalt zu bestimmen, wurden 2 gr. in einer neutralen Eisenchloridlösung gelöst, der Rückstand mit KNO_3 und HKO geglüht, die Schmelze mit Wasser ausgezogen und mit Chlorbarium gefällt, der Niederschlag wog 1,16 gr.; wieviel % S enthält das Eisen?

Uebersicht

des Lehrplans nach Lehrgegenständen und wöchentlichen Stunden.

Wöchentliche Stundenzahl.

	Realschule.												Vorschule.			
Lehrgegenstände.	I	OII	UII	OIII	UIII	IVA	IVB	VA	VB	VIA	VIB	Sum.	1	2	3	Sum.
Religion	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	26	2	3	3	8
Deutsch	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	37	10	8	9	27
Latein	3	4	4	5	5	6	6	6	6	8	8	61	—	—	—	—
Französisch	4	4	4	4	4	5	5	5	5	—	—	40	—	—	—	—
Englisch	3	3	3	4	4	—	—	—	—	—	—	17	—	—	—	—
Gesch. u. Geographie	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	37	—	—	—	—
Naturwissenschaft	6	6	6	2	2	2	2	2	2	2	2	34	—	—	—	—
Mathematik u. Rechn.	5	5	5	6	6	6	6	4	4	5	5	57	6	6	6	18
Zeichnen	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	22	—	—	—	—
Schreiben	—	—	—	—	—	2	2	2	2	3	3	14	6	7	—	13
Singen			2			2		2		2		8	2		—	2
Turnen						4						4	—		—	—
	37	38	38	38	38	38	38	37	37	36	36	357	26	26	18	68

II. Verordnungen der Behörden, soweit dieselben ein unmittelbares Interesse für die Eltern unserer Schüler haben.

Vom 25. Februar. M. macht Anzeige von der Wal des Dr. Nagel zum zweiten Oberlehrer.

Vom 4. März. M. macht Anzeige von der Wal des Dr. Dorr zum dritten Oberlehrer.

Vom 24. März. P. S. C. genemigt die Wal des Lehrers Arnsberg zum dritten Elementarlehrer.

Vom 14. April. M. überträgt S. A. C. Heinemann die zweite wissenschaftliche Hilfslehrerstelle.

Vom 4. Juni. M. macht Mitteilung von der Erhöhung des Schulgeldes.

Vom 9. Juli. M. erteilt dem ersten wissenschaftlichen Hilfslehrer Mertins die nachgesuchte Entlassung.

Vom 16. Juli. P. S. C. ordnet für die Zukunft die Einsendung von 345 Programmen an.

Vom 22. Juli. M. erteilt dem sechsten ordentlichen Lehrer Radicke die nachgesuchte Entlassung.

Vom 30. August. M. betraut S. A. C. Thiesen mit der interimistischen Verwaltung der sechsten ordentlichen Lehrerstelle.

Vom 19. September. M. macht Anzeige von der Ernennung des S. A. C. Fabian zum ersten wissenschaftlichen Hilfslehrer.

Vom 9. December. P. S. C. teilt ein Ministerialrescript mit, durch welches die Wal des Dr. Gützlaff zum vierten Oberlehrer genemigt wird.

Vom 10. December. M. betraut S. A. C. Dittmar mit der interimistischen Verwaltung einer Lehrerstelle.

Vom 12. Januar. P. S. C. teilt ein Ministerialrescript mit, durch welches die Einfürung des ersten und zweiten Cursus der französischen Sprache von Toussaint-Langenscheidt genemigt wird.

Vom 9. Januar. M. erteilt dem vierten ordentlichen Lehrer Dr. Vogt die nachgesuchte Entlassung.

Vom 28. Januar. M. macht Mitteilung von der Wal des fünften ordentl. Lehrer Wittko zum vierten und der S. A. C. Fabian und Dittmar zum fünften und sechsten ord. Lehrer.

Vom 11. Februar. P. S. C. genemigt die Beförderung des Herrn Wittko zum vierten ord. Lehrer.

III. Lehrapparat.

1. Die Lehrer-Bibliothek, die vom Lehrer Genrich verwaltet wird, erhielt an Geschenken:

1. von Einem Hochlöbl. Königl. Prov.-Schulcollegium: R. G. Stillfried, Zum urkundl. Beweise über die Abstammung des Preuss. Königshauses von dem Grafen v. Hohenzollern.

2. von Herrn Prof. Buchenau in Bremen: An das Elternhaus. Mitteilungen aus der Realschule zu Bremen. Jhrgg. XII.
3. Jahres-Bericht der K. K. Ober-Realschule am Schottenfelde in Wien für das Studienjahr 1872—73.
4. Achter Jahres-Bericht der nied.-österr. Landes-Oberrealschule und der damit verbundenen gewerbl. Fortbildungsschule in Wiener-Neustadt. 1873.
5. Lycée impérial de Metz. Programme publ. à la clôture de l'année scolaire 1872—73.
6. von der hiesigen Loge Constantia: Elf Halbjargänge der Zeitschrift: „Literatur des Auslandes."
7. von dem Vorstande des Vereins von Lehrern höher. Unterrichtsanstalten der Prov. Preussen: Bericht über die erste Generalversammlung des Vereins, geh. zu Elbing am 2. und 3. Juni 1873.
8. von der Verlagshandlung C. Glaser in Schleusingen: Arithmetisches Exempel-Buch für Volksschulen. Hrsggb. von J. G. Marbach. 21. Aufl. Heft 1 u. 2.
9. von Herrn Oberlehrer Dr. Dorr: Dessen, Ueber das Gestaltungsgesetz der Festlandsumrisse und die symmetrische Lage der grossen Landmassen.

Angeschafft wurden:

„Im neuen Reich." Wochenschrift; hrsggb. v. A. Dove u. G. Freytag. Jhgg. 1873. 2 Bde. — „Alex. v. Humboldt." Wissenschaftliche Biographie. 3 Bde. — „Ueber nationale Erziehung." Vom Verf. der Briefe über Berlin. Erzieh. — Gossrau, Lateinische Sprachlehre. — Bergk, Griechische Litteraturgeschichte. Bd. 1. — Bernäys, Zur Entstehungsgeschichte des Schlegelschen Shakespeare. — „Annalen der Physik und Chemie"; hrsggb. v. Poggendorf. Jhrgg. 1873. 3 Bde. — „Central-Organ f. d. Interessen d. Realschulwesens"; hrsggb. v. Strack. Jhrgg. 1873. — „Zeitschrift für mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht"; hrsggb. von Hoffmann. Jhrgg. 1873. — Gödeke, Geschichte d. deutschen Dichtung, Bd. III, 4. — „Geographische Mitteilungen"; hrsggb. v. Petermann. Jhrgg. 1873. — (Berliner) „Zeitschrift f. d. Gymnasialwesen." Jhrgg. 1873. — v. Klöden, Handbuch d. Erdkunde. Lfr. 10—16. — Wander, Deutsch Sprichwörter-Lexicon. Lfr. 42—47. — Schmelzer, Fromme Wünsche. — „Die Bildungsfrage"; Heft 2. — „Deutsche Zeit- u. Streit-Fragen"; Flugschriften z. Kenntn. d. Ggw.; hrsggb. v. v. Holtzendorff u. Oncken. Heft 15—30. — „Deutsche Warte"; Zeitschrift. 1873. 2 Bde. — Weber, Allgem. Weltgeschichte, Bd. X. — Sachs, Encyclop. Wörterbuch der französ. und deutschen Sprache. Bd. I, Lfr. 18—21 (Schluss). — Heussi, Materialien zur Uebung und Wiederholung des physik. Unterrichts. — Leunis, Synopsis der drei Naturreiche. Th. II, 2, Heft 6. — „Ergänzungshefte" zu Petermanns geogr. Mitteilungen. Nr. 34. — Nic. Copernici de revolut. orb. caelest. libr. VI. — „Wissenschaftliche Monatsblätter"; hrsggb. von Hopf und Schade. Jhrgg. 1873. — Gebr. Grimm, Deutsches Wörterbuch. Bd. V. Lfr. 12 (Schluss); Bd. IV, 2. Lfr. 6. — „Zeitschrift f. analyt. Chemie"; hrsggb. v. Fresenius. Jhrgg. 1873. — Hübner, Statist. Tafel. 1873. — „Historische Zeitschrift"; hrsggb. von v. Sybel. Jhrgg. 1873. 2 Bde. — Wiese, Haben und Sein. — Grübnau, Inhalt des Religionsunterrichts. — „Archiv f. d. Stud. d. neuer. Sprachen u. Litteraturen"; hrsggb. v. Herrig. Bd. LI. — Kern, Grundriss der Pädagogik. — „Ergänzungsband" zu den Annalen d. Physik. Bd. VI, 1. 2. — „Diesterwegs Wegweiser." 5. Aufl. Bd. I. — Schödler, Lateinzwang in der Realschule. — Droysen, Geschichte der preuss. Politik. T. V: Friedrich d. Grosse. Bd. I. — „Allgemeine Schulzeitung"; hrsggb. von Stoy. Jhrgg. 1873. — „Die Realschule"; hrsggb. von E. Döll. Jhrgg. 1873. — „Deutsche Schulgesetz-Sammlung." Jhrgg. 1873. — „Neue deutsche Schulzeitung." Jhrgg. 1873. — „Zeitung für d. höh. Unterrichtswesen Deutschlands." Jhrgg. 1873. — „Centralblatt f. d. gesammte Unterrichtsverwaltung in Preussen." Jhrgg. 1873.

2. Für die Schülerbibliothek, deren Leitung gleichfalls dem Lehrer Genrich übertragen ist, wurde angeschafft:

Ule u. Hummel, Physikal. und chem. Unterhaltungen. — Faraday, Die verschiedenen Kräfte der Materie. — „Der deutsch-französische Krieg. 1870—71." Red. v. d. Kriegsgeschichtl. Abt. d. Gross. Generalstabes. T. I, 2—4. — „Deutsche Dichter des 16. Jahrhunderts." Bd. VII: Das Narrenschiff von D. Brant. — Varnhagen v. Ense, Ausgewälte Schriften. Abt. II, Bd. 4—6. — Stohmann und Engler, Handbuch der techn. Chemie. Bd. I. — Kluge, Turngeräte und Turneinrichtungen. — „Sammlung wissenschaftl. Vorträge"; hrsggb. von Virchow und v. Holtzendorff; Heft 166—190. — Thomé, Zoologie. — Dessen, Botanik. — „Die gesammten Naturwissenschaften"; hrsggb. von Masius. Lfr. 1—13. — „Erläuterungen zu den deutschen Klassikern, Heft 37—54. — „Oeffentliche Vorträge, geh. in der Schweiz." Bd. II. — Forster, The life of Charles Dickens. V. III—IV. — Fontane, Wanderungen d. d. Mark Brandenburg, T. III. — Schupp, Pfarrer Plebanus; Gneisenau; Feurige Kolen; Im finstern Tale; E. M. Arndt; Der Fuhrmannsjunge im Kriege; Postraub in Würges; Friedr. Wilh. I. — „Neue deutsche Jugendbibliothek." Bd. VI. IX, X—XVII. — Justi, Winckelmann. Bd. II, Abt. 2 (Schluss). — D. Müller, Geschichte des deutsch. Volkes. — Kohlrausch, Leitfaden der pract. Physik. — Gerber, Die Sprache als Kunst, Bd. II, 1. — Schaeling, Sagen und Märchen aus preuss. Landen. — „Deutsche Jugend- u. Volksbibliothek", Bd. 33—35, 41—45. — „Deutscher Novellenschatz"; hrsggb. von Heyse und Kurz. Bd. XIII—XVIII. — Halévy, L'invasion. — „Deutsche Dichter des

17. Jarhunderts", Bd. V: Weckherlin. — „Internationale wissenschaftliche Bibliothek." Bd. I: Tyndall, Das Wasser; Bd. II: O. Schmidt, Descendenzlehre und Darwinismus. — v. Ranke, Aus d. Briefwechsel Friedr. Wilh. IV. m. Bunsen. — Dessen, Genesis des preussischen Staates. — Potvin, De la corruption littéraire en France. — Monod, Allemands et Français. — Arnd, Geschichte der Jare 1867—71. Bd. II. — W. Wackernagel, Kleinere Schriften. Bd. I—II. — Dessen, Poetik, Rhetorik, Stilistik. — Gretschel, Lehrbuch der Karten-Projection. — „Deutsche Nationalbibliothek." Zweite Reihe. Bd. I: Pierson, Der grosse Kurfürst; Bd. II: Sugenheim, Deutschland im span. Erbfolge- und gross. nord. Kriege. — „Jarbuch über die Fortschritte der Mathematik", Bd. II, III. — Willkomm, Atlas der Botanik. — (v. Moltke), Briefe über Zustände und Begebenheiten in der Türkei. — „Die Naturkräfte"; Bd. X: Lommel, Wind und Wetter. — „Das neue Buch d. Erfindungen, Gewerbe u. Industrien"; Bd. V—VI (Schluss). — Wallon, La terreur. 2 vls. — Werner, Die preuss. Expedition nach China, Japan und Siam. — v. Pettenkofer, Werth d. Gesundheit; Fleischextract u. Narungsmittel. — Vischer, Kritische Gänge. N. F. Heft 6. — Grillparzer, Sämmtl. Werke. 10 Bde. — Friedrich's d. Grossen ausgewälte Werke, Bd. I (Schluss). — Kühne, Graphisch-statist. Atlas. Lfr. 1—10. — W. Müller (v. Königswinter), Lorelei. — Hillebrand, Frankreich und die Franzosen. — Götzinger, Hebels alemann. Gedichte erläutert. — d'Héricault, Thermidor. Vol. II. — Hiecke, Deutsches Lesebuch für die oberen Classen. — Freemann, Select histor. essays. — v. d. Decken, Reise in Ost-Afrika. 2 Bde. — v. Heuglin, Reise in dem Gebiet des Weiss. Nil. — Hirzel u. Gretschel, Jarbuch der Erfindungen, Bd. IX. — Jul. Schmidt, Neue Bilder aus dem geist. Leben unserer Zeit. — Osterwald, Aischyloserzählungen, Bd. II. — „Erzählungen aus dem deutsch. Mittelalter"; Bd. VI: Mücke, Konrad II. und Heinrich III. — Nieritz, Ausgewälte Erzählungen, Bd. I—V. — Diez, Erzählungen für die Jugend u. das Volk, Bd. I—VIII. — Lubbock, Die vorgeschichtl. Zeit; Bd. I. — Pfeil, Gute Kinder — brave Menschen. — Andrée, Wendische Wanderstudien. — Freytag, Die Ahnen, Bd. II: Das Nest der Zaunkönige. — „Welt der Jugend." N. F. VII—X. — Hahnke, Die Operationen der III. Armee; Bd. I. — v. d. Goltz, Die Operationen der II. Armee. — Bernstein, Naturwissenschaftl. Volksbücher. Neue Ausg. Bd. I. — „Staatengeschichte der neuest. Zeit"; Bd. XVIII: Reuchlin, Geschichte Italiens, Bd. IV. — Braun, Aus der Mappe eines deutschen Reichsbürgers. 3 Bde. — „Aus allen Weltteilen"; hrsggb. von Delitsch. Bd. IV, 4—12; Bd. V, 1—3. — Ratzel, Wandertage eines Naturforschers; Bd. I. — Hoffmann, Einleitung in die moderne Chemie. — Pfaff, Allgemeine Geologie. — Spamer, Illustr. Jugendalmanach 1873. — „Deutschland in Wort und Bild."

3. Für die chemische Sammlung, welche Oberlehrer Dr. Nagel verwaltet, wurden ausser den zu den laufenden Vortrags-Experimenten nötigen Chemikalien nur 5 Pfund Quecksilber und eine Tauchbatterie, bestehend aus 2 grossen Kohlenzinkelementen angeschafft, da die im vorigen Jare erfolgte Anschaffung der Hofmann'schen Apparate einen grossen Teil des diesjärigen Etats in Anspruch genommen hatte.

4. Die naturhistorische Sammlung, welche gleichfalls vom Oberlehrer Dr. Nagel verwaltet wird, wurde nicht durch Ankäufe vermehrt, da aus unter Nr. 3 angeführtem Grunde keine Mittel disponibel waren.

Geschenkt wurde von Herrn Kaufmann Sausse ein Papagei, Brotogerys tirica, welcher ausgestopft worden ist.

5. Die geographische Sammlung, deren Verwaltung dem Oberlehrer Dr. Dorr übertragen ist, erhielt einen Zuwachs durch folgende Karten: H. Müller, Eisenbahnkarte von Mittel-Europa. Glogau (Flemming). Handtke, Wandkarten von Nord-Amerika, Asien, Europa, Afrika. Glogau (Flemming).

6. Für den Zeichenapparat, verwaltet von dem Zeichenlehrer Faber, wurden verschiedene Gypsmodelle, sowie Brude stereoskopische Bilder, Graef Ornamentik der Industrie und Zeichenvorlagen von Hermes und Reclam im ganzen 22 Hefte angeschafft.

7. Für die Musicaliensammlung, welche Lehrer Kutsch verwaltet, wurden Brandstätter Turnlieder 80 Exemplare und Erck Sängerhain 12 Exemplare angeschafft.

IV. Zur Geschichte und Statistik der Anstalt.

1. Die Schule.

Mit Genemigung des Hochlöbl. Königl. Prov.-Schul-Collegiums ist die Tertia in zwei subordinirte Klassen mit einjärigem Cursus geteilt worden, so dass jetzt die Realschule folgende eilf Klassen umfässt: Prima, Ober-Secunda, Unter-Secunda, Ober-Tertia, Unter-Tertia, Quarta A und B, Quinta A und B, Sexta A und B.

Die Vorschule zält drei Klassen, die seit dem ersten October in dem Hause Kalkscheunstrasse 14 untergebracht sind. Die Räumlichkeiten daselbst sind aber in jeder Beziehung so ungeeignet, dass man, da es auch in dem Realschulgebäude vielfach an dem nötigen Raum gebricht, nunmehr wird ernstlich darauf Bedacht nemen müssen, wie diesen Uebelständen abgeholfen werden könnte, die sich allmälig zur Unerträglichkeit gesteigert haben. Sind wir doch zur Zeit gezwungen, die sehr wertvollen naturhistorischen Sammlungen auf den Hausfluren herumstehen zu lassen, wo sie aller Unbill der Witterung ausgesetzt, dem sichern Verderben entgegengehen.

2. Das Lehrercollegium.

Die durch den Abgang des Herrn Butz erledigte zweite Oberlehrerstelle wurde durch Ascension des Herrn Dr. Nagel, bisher dritter Oberlehrer, besetzt, in dessen Stelle Herr Dr. Dorr, bisher vierter Oberlehrer, einrückte; zum vierten Oberlehrer erwälte Ein hochlöbl. Magistrat Herrn Dr. Gützlaff, ordentlichen Lehrer am Gymnasium in Danzig, der auch inzwischen durch den Herrn Minister bestätigt worden ist. Da der dortige Magistrat aber Herrn Gützlaff aus freundnachbarlichen Rücksichten nicht zum Beginn des Wintersemesters entlassen wollte, so wird derselbe erst mit dem neuen Schuljare eintreten. Dadurch wurde die Beschäftigung von zwei Hilfslehrern nötig, die sich in den Herren S. A. C. Heinemann und von Schäwen fanden, die gleichzeitig ihr Probejar antraten.

Mit dem Schluss des Sommersemesters verliessen die Anstalt die Herren Radicke, Mertins und v. Schäwen, um Stellen an den Realschulen in Bromberg, Breslau und Danzig anzunemen und wurden durch die Herren S. A. C. Fabian, Thiesen und Dickert ersetzt, von denen jedoch Herr Dickert aus Gesundheitsrücksichten am 1. December wieder ausschied und durch Herrn S. A. C. Dittmar ersetzt wurde. Die Herren Thiesen und Dittmar sind gleichzeitig mit der Ableistung ihres Probejares beschäftigt.

Zu Ostern werden uns der vierte ordentliche Lehrer Herr Dr. Vogt, sowie die S. A. C. Heinemann und Thiesen verlassen, Ersterer, um die Stelle eines Königl. Kreisschulinspectors in Kosten zu übernemen. In seine Stelle rückt Herr Wittko, bisher fünfter ordentlicher Lehrer, ein, zum fünften und sechsten ordentlichen Lehrer sind die Herren S. A. C. Fabian und Dittmar von Einem hochlöbl. Magistrat ernannt worden. Den obengenannten Herren verfele ich nicht für die der Anstalt geleisteten Dienste zu danken.

Eine weitere Störung des Unterrichts wurde durch die Beurlaubung des siebenten ordentlichen Lehrers Herrn Dillau herbeigefürt, der an einem hartnäckigen Halsübel leidend, seinen Unterricht auch bis zum Schluss des Schuljares nicht hat wieder aufnemen können. Seine Unterrichtsstunden übernam der dritte Elementarlehrer Herr Arnsberg, der seinerseits wieder durch den emeritirten Lehrer Herrn Kosanke vertreten wurde. Zum Glück war der Gesundheitszustand der übrigen Lehrer so, dass längere Vertretungen nicht nötig geworden sind.

Vom 23. Juni bis zum 4. Juli war Herr Dr. Nagel beurlaubt, um sich im Auftrage des hiesigen Gewerbevereins zur Weltausstellung nach Wien zu begeben, seine Vertretung wurde bereitwilligst von den übrigen Lehrern übernommen.

Durch den Tod verlor die Anstalt den katholischen Religionslehrer, Herrn Kaplan Laws, welcher am 3. März nach achtzentägigem Krankenlager in Folge eines Gehirnleidens sanft entschlief. Er bekleidete das Amt eines katholischen Religionslehrers seit Mai 1872.

Ueber den neu ins Collegium eingetretenen Dr. Gützlaff lassen wir die übliche Personalnotiz folgen:

Victor Gützlaff, geb. am 2. Nov. 1839 in Danzig, Sohn eines Kaufmanns, evangelischer Confession, erhielt die wissenschaftliche Vorbildung auf dem altstädtischen Gymnasium in Königsberg und auf dem Blochmannschen Institut in Dresden. Nach bestandener Maturitätsprüfung im Jare 1858 genügte er zuerst seiner Militärpflicht und widmete sich dann dem Studium der Philologie in Königsberg und Bonn. Im Jare 1865 zum Doctor der Philosophie promovirt und pro facultate docendi geprüft, leistete er von Ostern 1866 bis Ostern 1867 sein Probejar am Gymnasium zum grauen Kloster in Berlin ab, wärend er zugleicher Zeit Mitglied des pädagogischen Seminars war, bereiste sodann ein Jar lang Frankreich und Italien, wurde Ostern 1868 als wissenschaftlicher Hilfslehrer an der Louisenstädtischen Realschule in Berlin und Michaelis desselben Jares als ordentlicher Lehrer am Gymnasium in Danzig angestellt, welche Tätigkeit jedoch durch den französischen Krieg im Jare 1870 unterbrochen wurde, den er als Vice-Feldwebel mitmachte.

3. Die Schüler.

Die Zal der Schüler betrug bei Abfassung des vorigen Jaresberichtes 534, die höchste Schülerzal im Sommersemester 1873 war 563, im Wintersemester 1873—74 betrug sie 535; davon befanden sich in der Realschule im Sommer 450, im Winter 437, in der Vorschule im Sommer 113, im Winter 98.

Auf die einzelnen Klassen verteilen sich die Schüler:

	Sommersemester 1873.	Wintersemester 1873—74.
I	24	23
OII	29	23
UII	33	30
OIII	35	45

Sommersemester 1873.	Wintersemester 1873—74.
UIII 59	48
IVA 52	41
IVB 30	40
VA 39	45
VB 36	38
VIA 61	57
VIB 52	46
1. El. 50	36
2. El. 24	20
3. El. 39	40.

Seit Ostern (1. März) 1873 haben 127 Schüler die Anstalt verlassen, dagegen sind im Laufe des Schuljares 134 aufgenommen worden.

Mit dem Zeugnis der Reife wurden entlassen:

Ostern 1874.

157. Gustav Masuch aus Schöneck, Sohn eines Postbeamten, evangelischer Confession, 17³/₄ Jare alt, 4 Jare auf der Anstalt und 2 Jare in Prima. Er will Mathematik und Naturwissenschaften studiren.

158. Johannes Maaz aus Berlin, Sohn eines verstorbenen Kaufmanns, evangelischer Confession, 20¹/₂ Jare alt, 5¹/₂ Jare auf der Anstalt und 2 Jare in Prima. Er beabsichtigt Kaufmann zu werden.

159. August Thimm aus Hoppenau, Sohn eines verstorbenen Gutsbesitzers, evangelischer Confession, 19 Jare alt, 6¹/₂ Jare auf der Anstalt und 2 Jare in Prima. Er wird Mathematik und Naturwissenschaften studiren.

160. Hermann Kosney aus Beisleiden, Sohn eines Rentiers, evangelischer Confession, 19¹/₂ Jare alt, 10¹/₂ Jare auf der Anstalt und 2 Jare in Prima. Er beabsichtigt in die Marine einzutreten.

161. Paul Hintz aus Elbing, Sohn eines Schlossermeisters, evangelischer Confession, 17 Jare alt, 9 Jare auf der Anstalt und 2 Jare in Prima. Er will sich dem Baufach widmen.

162. Arthur Hecht aus Ludwigsberg, Sohn eines Rentiers, evangelischer Confession, 18¹/₄ Jare alt, 6 Jare auf der Anstalt und 2 Jare in Prima. Er beabsichtigt in die Armee einzutreten.

163. Emil Heinrich aus Hirschfeld, Sohn eines verstorbenen Gutsbesitzers, 19³/₄ Jare alt, 4 Jare auf der Anstalt und 2 Jare in Prima. Er will Medizin studiren.

In der am 10. März 1874 unter dem Vorsitz des Königl. Prov.-Schulrats Herrn Dr. Schrader abgehaltenen Prüfung erhielt Masuch das Prädicat „gut", die übrigen das Prädicat „genügend" und zwar Masuch, Maaz und Kosney unter Erlass der mündlichen Prüfung.

Ausserdem haben im verflossenen Schuljare (von Ostern 1873 inclusive bis Ostern 1874 exclusive) folgende Schüler die Anstalt verlassen:

a. Am Schlusse des Wintersemesters 1873.

Cl.	Name.	Beruf.	Cl.	Name.	Beruf.
I *	Holzke, Ludwig	Militär	UII	Martens, Walter	Militär
*	Krüger, Fritz	Philologie	IIIA	Schaack, Rud.	andere Schule
*	v. Lieben, Alfred	Militär		Abramowski, Joh.	Lehrer
*	Samulon, Erdmund	Mechaniker		Kuhrts, Gust.	Beamter
*	Sallewski, Eugen	Postfach		Dörk, Richard	Kaufmann
*	Scheibach, Paul	Militär		Prowe, Georg	Brauer
*	Söckneck, Karl	Postfach	IIIB	Spicker, Alex.	andere Schule
	Mehlin, Kunibert	unbestimmt		Grohn, Georg	„
OII	Worms, Paul	„	IVA	Seeliger, Hermann	„
	Arke, Johann	Kaufmann		Wunderlich, Victor	„
	Maass, Rudolf	„		Bartenwerfer, Rich.	Kaufmann
	Levy, Leopold	„	IVB	Christoph, Alb.	„
UII	Görges, Julius	„	VA	Grunau, Reinh.	andere Schule
	Augustin, Richard	„		Martens, Alfr.	„
	Berner, Reinhold	Seemann		Hrabowski, Kurt	„
	Döhring, Walter	Landwirt	VIA	Jebens, Bruno	„
	Bergmann, Georg	Kaufmann		Behrendt, Paul	„
	Romahn, Herm.	„		Hambruch, Hans	†
	Tiessen, Herm.	„		Hancke, Reinhold	andere Schule
	Wobbe, Aug.	„	VIB	Tlusty, Max	„
	Schnabel, Max	„	1. V.	Elsner, Gottlieb	„
	Siemund, Joh.	Landwirt		Ruhnke, Ernst	„
	Rekittke, Georg	„		Strauss, Eugen	„
	Hübner, Emil	Apotheker	3. V.	Meyer, Oscar	„

b. Wärend des Sommersemesters 1873.

Cl.	Name.	Beruf.	Cl.	Name.	Beruf.
I	Jebens, Erich	Apotheker	UII	Rose, Paul	Landwirt
OII	Rübsamen, Rich.	unbestimmt		Heyn, Bruno	Mechaniker
	Becker, Franz	Landwirt		Böttcher, Alfred	Apotheker
	Siebert, Rudolf	Kaufmann	IIIA	Giede, Georg	Mechaniker
	Jeglinski, Joh.	„		Bruhn, Julius	unbestimmt
	Blum, Siegfried	„		Preuss, Rich.	Privatunterricht
	Flindt, Robert	andere Schule		Kullack, Rich.	andere Schule
	Hahn, Erich	Kaufmann	IIIB	Korn, Emil	Privatunterricht
	Kuhl, Carl	Mechaniker		Kern, Waldemar	„
UII	Gottschewski, Otto	unbestimmt		Schaack, Rud.	Kaufmann
	Janzen, Joh.	Kaufmann		Vogel, Simon	andere Schule
	Cohn, Max	„		Claassen, Heinr.	unbestimmt

Die mit * bezeichneten mit dem Zeugnis der Reife, siehe vorjäriges Programm.

Cl.	Name.	Beruf.	Cl.	Name.	Beruf.
IIIB	Göttlich, Theod.	andere Schule	VB	Zech, Franz	andere Schule
	Sontowski, Ephraim	„	VIA	Dräther, Wilh.	„
	Dix, Stephan	„		Möller, Heinr.	„
IVA	Ax, Hermann	„		Koschanowski, Alb.	„
	Schirrmacher, Max	„		Sommerfeld, Max	„
	Döhring, Fritz	„		Kessler, Eduard	„
IVB	Grunau, Oscar	Seemann	VIB	Baumgart, Carl	„
	Lau, Franz	andere Schule		Matthiae, Wilh.	„
	Augstin, Gustav	Kaufmann		Matthiae, Kurt	„
	Gründel, Wilh.	andere Schule	1. V.	Levin, Siegfried	„
	Rosenthal, Georg	Kaufmann		Gillmeister, Joseph	„
	Leue, Paul	„		Mathe, Arthur	„
	Holzke, Gustav	„		Rohde, Paul	„
VA	Kuhrts, Arnold	unbestimmt	2. V.	Bieber, Nathan	„
	Krüger, Julius	andere Schule		Gillmeister, Adolf	„
	Sommerfeld, Arthur	„		Wagner, Hugo	„
	Plastwich, Waldem.	„		Zutermann, Max	„
VB	Pottlitzer, Wilh.	„	3. V.	Karczewski, Arthur	„
	Ax, Rudolf	„		Koblanck, Oscar	„
	Luschnath, Carl	„		Richter, Wilh.	„
	Liebrecht, Joh.	„			

c. Wärend des Wintersemesters 1873—1874.

Cl.	Name.	Beruf.	Cl.	Name.	Beruf.
OII	Krause, Emil	unbestimmt	IVB	Döhring, Robert	andere Schule
OIII	Conrad, Emil	Landwirt	VA	Grützmacher, Franz	„
UIII	Marowsky, Franz	andere Schule	VB	Marowsky, Carl	„
IVA	Neufeldt, Georg	Kaufmann		Paaschke, Carl	„
	Gabriel, Max	andere Schule		König, Robert	„
IVB	Thiessen, Adolf	——	VIA	Balmann, Max	„
	Hancke, Otto	Beamter	3. V.	Wolltner, Joseph	„

Darunter verloren wir durch den Tod Albert Christoph in Quarta B und Hans Hambruch in Sexta A, zwei wolgesittete, fleissige Knaben. Ein Schüler wurde der schlechten Auffürung wegen verwiesen.

Der jetzige Bestand beträgt nach dem Vorausgeschickten 541 Schüler, von denen 357 einheimisch, 184 auswärtig, 489 evangelisch, 31 katholisch und 52 jüdisch sind.

4. Geschäftsverkehr des Directors.

Derselbe belief sich im Laufe des Jares 1873 auf 381 Schreiben, die im Interesse der Schule oder einzelner Schüler von Behörden und Privaten an den Director gerichtet wurden und die derselbe in 287 Schreiben beantwortete.

Ausserdem stellte derselbe 41 Abgangs- und 58 Berechtigungszeugnisse zum einjärigen freiwilligen Militärdienst aus.

5. Schulfeierlichkeiten und Ferien.

Am 21. April. Beginn des Schuljares 1873 bis 1874.

Am 12. Juni. Gemeinsamer Spaziergang.

Am 2. Sept. Sedanfeier durch Gesang und Festrede des Oberlehrers Dr. Dorr.

Am 10. December. Visitation der Schule durch S. Exc. den Herrn Oberpräsidenten v. Horn.

Am 10. März. Abiturienten-Prüfung unter dem Vorsitze des Herrn Prov.-Schulrats Dr. Schrader, welcher Herr Oberbürgermeister Selke als Local-Commissarius beiwonte.

Die Osterferien wärten vom 5. bis zum 18. April, die Pfingstferien vom 31. Mai bis zum 4. Juni, die Sommerferien vom 5. Juli bis 4. August, die Herbstferien vom 27. September bis zum 9. October, die Weihnachtsferien vom 20. December bis zum 5. Januar.

V. Benachrichtigungen.

Der Sommercursus beginnt Montag den 13. April.

Bei der Aufname in die Realschule wird eine Einschreibegebür von einem Taler zur Schulkasse erhoben, das Schulgeld beträgt einschliesslich des Turngeldes auf der Realschule in allen Klassen für Einheimische 1 Tlr. 20 Sgr., für Auswärtige 2 Tlr. 10 Sgr. monatlich nebst 5 Sgr. vierteljärlich Bibliotheksgeld, auf der Vorschule 1 Tlr. 10 Sgr. monatlich.

Die zur Aufname in die Sexta der Realschule zu Elbing erforderlichen Kenntnisse und Fertigkeiten sind: Geläufigkeit im Lesen deutscher und lateinischer Druckschrift, eine reinliche und leserliche Handschrift, Fertigkeit Dictirtes ohne grobe orthographische Feler nachzuschreiben, Sicherheit in den vier Grundrechnungsarten mit gleichbenannten Zalen.

Für die Aufname in die übrigen Klassen der Realschule gibt das alljärliche Schulprogramm das Maass der notwendigen Kenntnisse und Fertigkeiten an, wonach ich die Herren Rectoren und Vorsteher derjenigen Schulen, deren Schüler auf die hiesige Realschule überzugehen pflegen, sich genau zu richten bitte, weil die Aufname in eine bestimmte Klasse an die Bedingung geknüpft wird, dass der Aufzunemende in allen Gegenständen sich das Pensum der nächst niederen Klasse gut angeeignet hat. Beim Eintritt ist ein Abgangszeugniss von der früher besuchten Schule beizubringen.

Auswärtige Schüler dürfen ihre Wonung nur mit Genemigung des Directors nemen oder ändern, hingegen bin ich stets im Stande gute Pensionen nachzuweisen.

VI. Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Donnerstag, den 26. März,
von 9 Uhr ab.

Choral.

Drittte Vorbereitungsklasse: Religion. Kosanke.
Karl Hartmann: Hund und Katze von Fr. Güll.
Alexander Scheibach: Hans und die Spatzen von Löwenstein.
Zweite Vorbereitungsklasse: Rechnen. Döppner.
Max Jantke: Des Storches Wiederkehr von Rud. Löwenstein.
Georg Voigt: Das Häslein von Friedrich Güll.
Erste Vorbereitungsklasse: Lesen. Herrmanowski.
Ernst Hambruch: Die Finger von Karl Enslin.
Max Krüger: Die beiden Fensterlein von Franz Castelli.
Walter Eick: Die Katzen und der Hausherr von Gottfried Lichtwer.
Sexta B.: Religion. Arnsberg.
Adolph Fabian: Aus dem schlesischen Gebirge von Freiligrath.
Sexta A.: Latein. Fabian.
August Geng: Schwäbische Kunde von Uhland.
Quinta B.: Französisch. Dittmar.
Erich Sieg: L'avare.
Georg Wielisch: Rudolf von Habsburg von Görres.
Quinta A.: Deutsch. Heinemann.
Herman Kienast: Hans Euler von Seidel.
Georg Frommer: Superstition raillée.
Quarta B.: Geometrie. Thiesen.
Isaac Itzig: Phaedr. fab. I, 13.
Eugen Preuss und Wilhelm Gehrt: Un dialogue.
Ernst Gruhn: Otto I. und Heinrich von Mühler.
Quarta A.: Naturgeschichte. Schneider.
Hermann Förster: Der Sänger von Göthe.
Georg Porsch: Phaedr. fab. I, 10.
Daniel Lilienthal, Louis Grufki und Max Grünbaum: Un dialogue.

Schlussgesang.

Freitag, den 27. März,

von 9 Uhr ab.

Choral.

Unter-Tertia: Latein. Wittko.

Ernst Mewis: Phaedr. fab. I, 9.

Eugen Hollenbach: Aus dem Walde von Geibel.

Hugo Löwenstein: Le labonreur et ses enfants per **Lafontaine.**

Willy Thomale: To a bee.

Ober-Tertia: Arithmetik. Kutsch.

Max Öhmcke: Pegasus im Joche von Schiller.

Siegfried Blum: Ovid. Metarmoph. XII, 39—63.

Joh. Wölcke: Yanke Doodle.

Georg Hinz: La mort des Templiers par Raynouard.

Unter-Secunda: Geschichte. Dorr.

Arthur Scharmer und Franz Pehl: Schiller, **Wilhelm Tell II Aufzug 1 Auftritt.**

Siegmund Baumann: Ovid. Metam. III, 1—40.

Gustav Rosenbaum: Le Combat par Al. de Vigny.

Otto Adam: The chimes of England by A. C. Coxe.

Ober-Secunda: Mineralogie. Nagel.

Carl Ziesemer: Ovid. Metam. XIII, 1—51.

Louis Magendantz, Rudolf Allert und Wilhelm v. **Bernuth: Schiller, Wilhelm Tell I Aufz., IV Auftr.**

Waldemar Sieg: Racine Phèdre acte V. scène 6.

Moritz Rostek: The Rainbow by Campbell.

Rudolf Strebel in französischer Sprache: Jeunesse de **Frédéric le Grand.**

Prima: Englisch. Schilling.

Gustav Anspach in englischer Sprache: England and **her possessions.**

Carl Classen: Horat. Od. III. 29.

Gustav Masuch in deutscher Sprache:

„Wenn ohne Hass und Neid die Menschen wären,
Nie uns und andere träf ein Misgeschick,
Wie manche Tugend müssten wir entberen.“

Entlassung der Abiturienten durch den Director.

Schlussgesang.

Nachmittags 3 Uhr,

in der Turnhalle — Turnprüfung.

1. Freiübungen der 2ten Abteilung.
2. Riegenturnen derselben.
3. Riegenturnen der 1sten Abteilung.
4. Stabübungen derselben.
5. Schulturnen in 6 Riegen und Dauerlauf.
6. Ordnungsübungen.

Zu dieser Schulfeierlichkeit habe ich die Ehre, die hoch- und wollöblichen städtischen Behörden, namentlich Einen hochlöblichen Magistrat als Patron und Herrn Oberbürgermeister Selke als Curator der Schule, die Eltern und Pfleger unserer Schüler, sowie alle Freunde des öffentlichen Unterrichts im Namen der Anstalt ganz gehorsamst einzuladen.

Zur Prüfung und Aufname neuer Schüler werde ich wärend der Ferien jeden Wochentag in den Vormittagsstunden von 10 bis 12 Uhr bereit sein.

Elbing, den 15. März 1874.

Der Director **Dr. Brunnemann.**

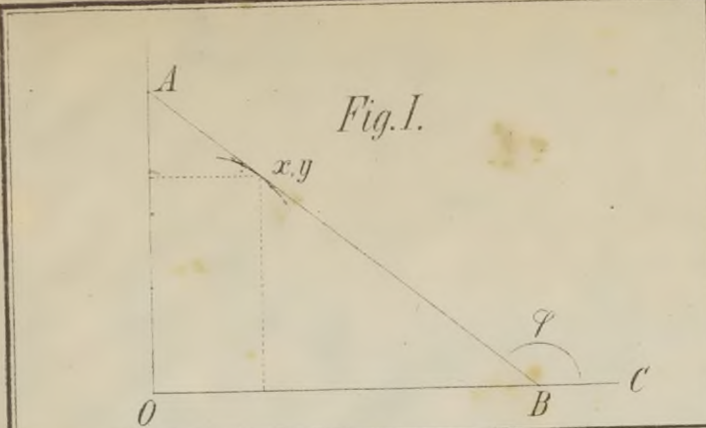

Fig. I.

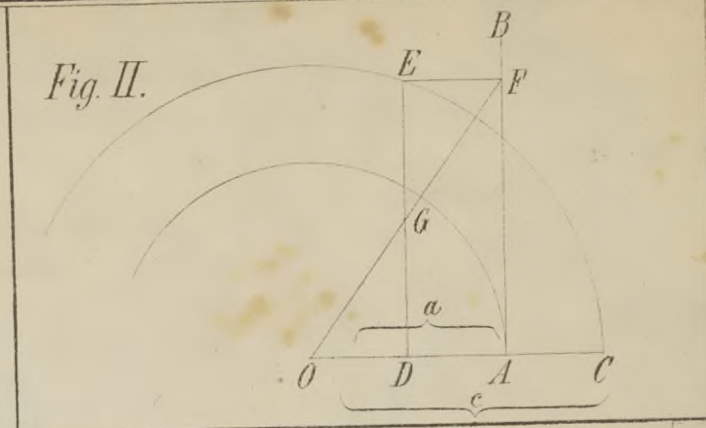

Fig. II.

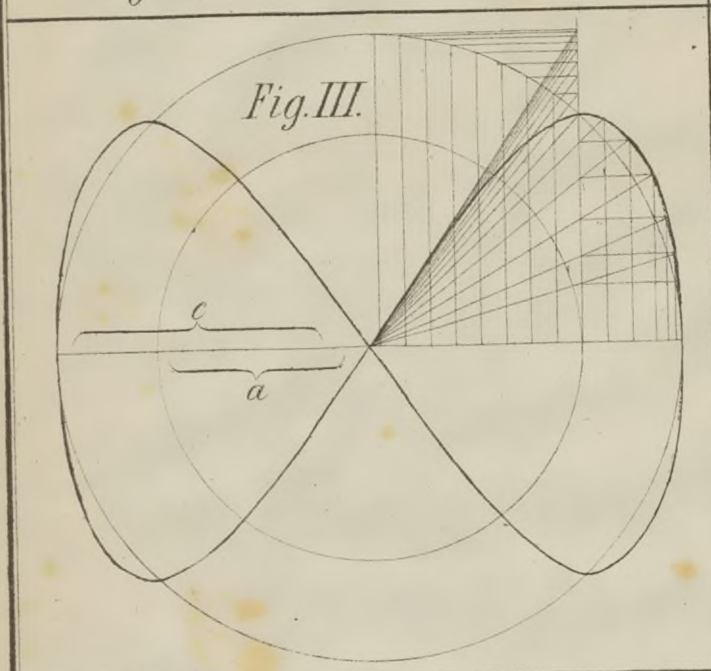

Fig. III.

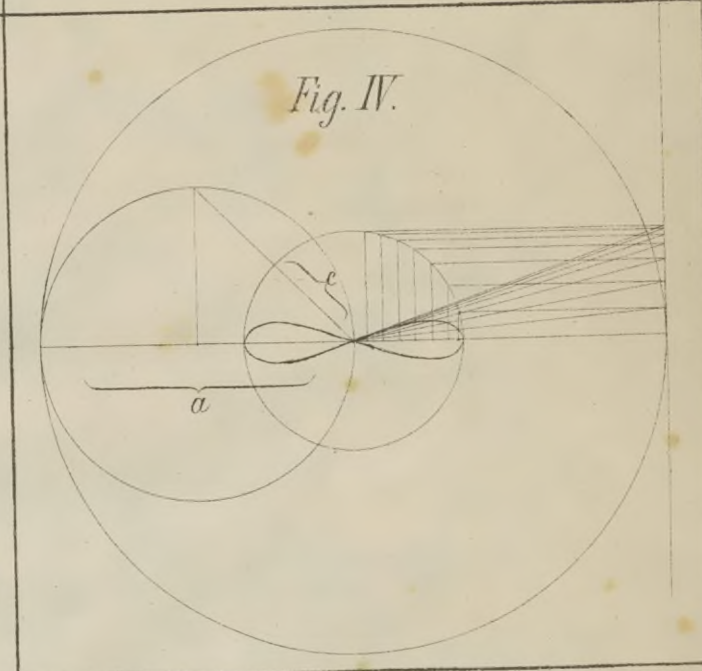

Fig. IV.

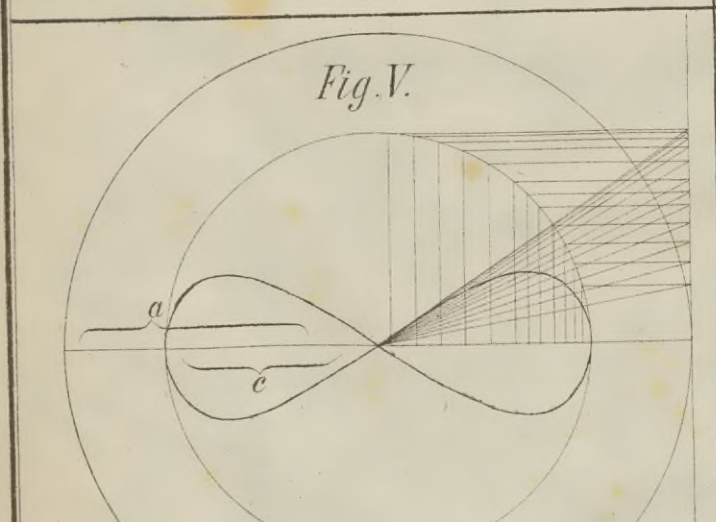

Fig. V.

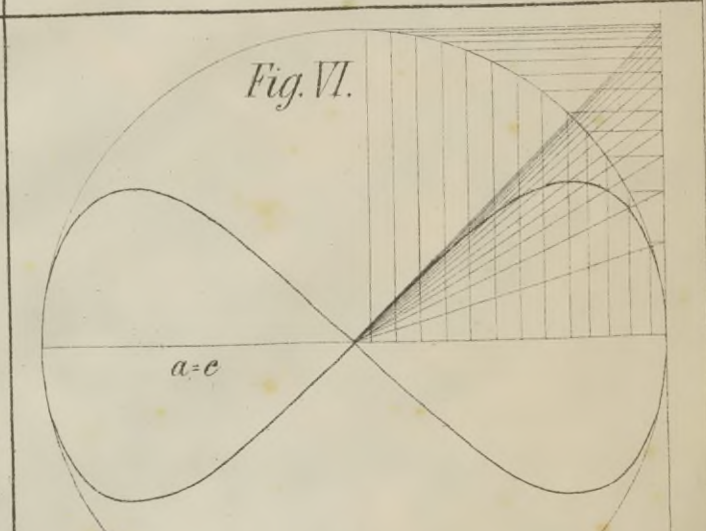

Fig. VI.