Zu der

öffentlichen Prüfung

der

Schüler des Gymnasiums zu Elbing,

welche

beim Schlusse der Lectionen

Mittwoch und Donnerstag den 25. und 26. September
in den Vormittagsstunden von 9 Uhr ab

in dem Saale des Gymnasiums

gehalten werden wird,

ladet ergebenst ein

J. G. MUND.

Elbing 1833
gedruckt bei A. Albrecht.

Schulnachrichten.

Lehrverfassung.

Erste Classe.

Classenlehrer: Professor Kelch.

1) Deutsche Sprache. 3 Stunden wöchentlich. Schriftliche Aufsätze. Mündliche Vorträge, besonders auch der zuvor eingereichten und besprochenen Dispositionen. Lectüre. Declamationsübungen. Dir. Mund. — 2) Lateinische Sprache. 7 St. Davon 2 St. Horatii odar. L. II. Sermon. L. II, 1—3. Epist. L. I, 13—fin. Epod. Dir. Mund. 3 St. Cicero de orat. L. I. Taciti Annal. L. III. 2 St. Stylübungen. Beurtheilung der zuvor corrigirten eigenen Aufsätze und Extemporalien der Schüler. Disputirübungen. Wiederholung einzelner Abschnitte der Syntax, nach Zumpt. Prof. Kelch. Privatim sind von den Schülern gelesen worden Cicero de offic. L. III., de amicitia, de senectute, einige oratt. selectae, Justini historiae. — 3) Griechische Sprache. 6 St. Davon 2 St. Sophoclis Antigone. Homeri Iliad. L. XVI. Dir. Mund. 3 St. Xenophontis hist. gr. L. VII. I. Herodoti Mus. L. II. 1 St. Stylübungen und ausführlichere Erläuterung einzelner Abschnitte der Grammatik. Prof. Merz. Privatim sind von den Schülern Sophoclis Philoctetes und einzelne Stücke der Iliade gelesen und bearbeitet worden. — 4) Hebräische Sprache. 1 St. Gesenius hebr. Lesebuch, S. 87 — 108. Übersetzungen aus dem Deutschen ins Hebräische. Prof. Merz. — 5) Französische Sprache. 2 St. Ideler's Handbuch 2r Bd. S. 583—604. 41—115. 119—175. Erläuterungen einzelner Abschnitte der Gram-

matik. Übersetzungen ins Französische, wozu Laharpe's Lycée benutzt wurde. Sprechübungen. Smith. — 6) Englische Sprache. 2 St. Vicar of Wakefield, Cap. I—VIII. Sprech- und Stylübungen. Smith. — 7) Religion. 2 St. mit der zweiten Classe combinirt. Christliche Sittenlehre: die Pflichten gegen Gott und die Pflichten gegen die Menschen; nach Niemeyer's Lehrbuche, S. 234—254. Die Einleitung in die biblischen Bücher, nach demselben Lehrbuche, S. 6—62. Die Beweisstellen aus dem N. T. wurden in der Grundsprache gelesen und grammatisch und historisch erläutert. Prof. Kelch. — 8) Geschichte. 2 St. Allgemeine Geschichte von dem spanischen Successionskriege bis zum J. 1815. Dann von Carl dem Gr. bis zur zweiten Hälfte des 15ten Jahrhunderts. Die preussische Geschichte wurde ausführlicher erzählt. Wiederholung einzelner Abschnitte aus der alten Geschichte. Nach Remer's Lehrbuche. Prof. Kelch. — 9) Geographie. 1 St. mit der zweiten Classe combinirt. Die österreichischen Staaten, Preussen, die Schweiz, Italien und Frankreich. Nach Gaspari's Lehrbuche 2r Cursus. Prof. Kelch. — 10) Geschichte der deutschen Sprache und Literatur. Im Winterhalbjahre 1 St. Vom J. 1740 ab bis in die neueste Zeit. Nach Pischon's Leitfaden, S. 50 fgg. Dir. Mund. — 11) Mathematik. 4 St. Die Kettenbrüche und ihre Anwendung. Die unbestimmten Gleichungen. Diophantische Aufgaben. Die Functionen. Methode der unbestimmten Coefficienten und ihre mannigfachen Anwendungen. Analytische Geometrie. Methode der Coordinaten. — Daneben wöchentlich Wiederholungen früherer Lehren, und Uebungen in der Auflösung geometrischer, trigonometrischer und algebraischer Aufgaben. Prof. Buchner. — 12) Naturwissenschaft. 2 St. Die Lehre von dem Lichte, der Electricität und dem Magnetismus. Prof. Buchner. — 13) Philosophische Propädeutik. Im Sommerhalbjahre 1 St. Logik, nach Matthiä's Lehrbuche S. 71 fgg. Dir. Mund.

Zweite Classe.

Classenlehrer: Professor Buchner.

1) Deutsche Sprache. 3 St. Schriftliche Aufsätze nach mündlichen freien Vorträgen. Die rhetorische Partition und Disposition. Uebungen in der Declamation. Erklärung deutscher Classiker. Prof. Buchner. — 2) Lateinische Sprache. 8 St. Davon 4 St. Virgilii Aeneid. L. IX. X. XI. Ciceronis

oratt. pro Ligario und pro rege Dejotaro. Dir. Mund. 2 St. Sallustii Catilina. Livii histor. L. XXV. 2 St. Stylübungen. Beurtheilung der zuvor corrigirten Aufsätze und Exercitien. Extemporalien. Die Lehre von dem Gebrauch der Modi und Tempora, nach Zumpt. Uebungen im lateinischen Sprechen. Prof. Kelch. — 3) Griechische Sprache. 6 St. Davon 2 St. Homeri Iliad. L. XIV. XV. XVI. Dir. Mund. 2 St. Xenophontis Cyropaed. L. III. IV. V, 1—4. 2 St. Stylübungen. Wiederholung der Grammatik nach Buttmann und ausführlichere Behandlung einzelner Capitel aus der Syntax. Prof. Merz. Privatim ist von den Schülern gelesen worden Homeri Iliad. L. IV. V. Die Nichtgriechen haben inzwischen in 2 St. Unterricht in der französischen, in 2 St. in der englischen Sprache erhalten. In jenen haben sie mehrere Stücke aus verschiedenen Schriftstellern, in diesen Johnson's Rasselas, Cap. 1—9 gelesen; daneben sind sie in beiden mit Sprech- und Stylübungen beschäftigt worden. Smith. — 4) Hebräische Sprache. 1 St. Anfangsgründe bis zur Lehre von der Declination. In Verbindung mit der ersten Classe: Uebungen im Lesen und Uebersetzen, desgleichen Versuche im schriftlichen Uebersetzen aus dem Deutschen ins Hebräische. Prof. Merz. — 5) Französische Sprache. 2 St. Ideler's Handbuch 1r Th. S. 66—84. 52—64. 132—147. 286—296. 327—358. 476—487. 559—565. Stylübungen. Mehrere Abschnitte aus der Syntax wurden nach Girauld Duvivier ausführlicher erläutert. Smith. — 6) Religion. 2 St. mit der ersten Classe combinirt. — 7) Geschichte. 2 St. Die Geschichte des Mittelalters von Carl dem Gr. bis zum Anfange des sechszehnten Jahrhunderts. Geschichte der Reformation bis 1648, nach eigenen Heften. Prof. Merz. — 8) Geographie. 1 St. mit der ersten Classe combinirt. — 9) Mathematik. 4 St. Die Kegelschnitte nach der geometrischen Methode. Die Logarithmen und ihr Gebrauch. Die ebene Trigonometrie. Elemente der Lehre von den Reihen. Die Regula falsi. Daneben Wiederholung der frühern Lehren und Uebung in der Auflösung geometrischer, trigonometrischer, algebraischer und arithmetischer Aufgaben. Prof. Buchner. — 10) Naturwissenschaft. 3 St. Die Lehre von der Wärme. Hygrometrie. Die Electricität. Der Magnetismus. — Sodann Einleitung in die Physik. Allgemeine und besondere Eigenschaften der Körper. Aggregatzustände. Cohäsion, Adhäsion. Prof. Buchner. — 11) Philosophische Propädeutik. 1 St. Die Lehre von dem menschlichen Erkenntnissvermögen. Prof. Buchner.

Dritte Classe.

Classenlehrer: Professor Merz.

1) Deutsche Sprache. 4 St. Schriftliche Aufsätze nach zuvor mit den Schülern besprochenen Dispositionen. Mündliche Vorträge. Declamations- und Leseübungen. Der Periodenbau der deutschen Sprache, nach Herling. Anfangsgründe der deutschen Verskunst. Richter. — 2) Lateinische Sprache. 6 St. Davon 2 St. Ovidii Metamorphos. L. VIII. mit Auswahl. Prosodie. Theorie des Hexameters. Uebungen in dieser Versart. Prof. Kelch. 2 St. Jul. Caesaris de bello Gall. L. IV. V. 2 St. Stylübungen. Grammatik. Prof. Merz. — 3) Griechische Sprache. 4 St. Davon 2 St. Formenlehre nach Buttmann und schriftliche Arbeiten zur Einübung derselben. 2 St. Xenophontis Anabas. L. III. c. 3. 4. und Homeri Odyss. L. IV, 394—620. Scheibert. — 4) Französische Sprache. 2 St. Ideler's Handbuch 1r Th. S. 32—46. 147—159. 327—358. 469—476. 520—535. Aus der Grammatik wurden besonders die unregelmässigen Zeit- und die Fürwörter eingeübt. Smith. — 5) Religion. 2 St. Lectüre und Erklärung der parabolischen Erzählungen des N. T. Apostelgesch. Cap. 1—13. Prof. Merz. — 6) Geschichte. 2 St. Synchronistischer Vortrag der Geschichte von den ältesten Zeiten bis auf Carl den Gr., nach Bredow's Tabellen. Richter. — 7) Geographie. 2 St. Allgemeine Erdbeschreibung. Die aussereuropäischen Länder und Staaten. Nach Gaspari's Lehrb. 2r Cursus, mit Benutzung von Hörschelmann und Volger. Pohl. — 8) Mathematik. 6 Stunden. Davon 3 Stunden Planimetrie, verbunden mit Uebungen in der Auflösung geometrischer Aufgaben. 2 St. Arithmetik, Buchstabenrechnung, Rechnung mit Potenzen und Wurzeln, algebraische Gleichungen des ersten und zweiten Grades, nebst Anwendung der Algebra auf die Geometrie. 1 St. Praktisches Rechnen. Richter. — 9) Naturwissenschaft. 2 St. Im Winterhalbjahre, mit Benutzung der Mineraliensammlung, das Mineralreich. Kennzeichen und Systemkunde. Die Gebirgsarten und die Versteinerungen. Kohlige, harzige Fossilien. Salze. Verschiedene kieselige, thonige und kalkige Steinarten. Mehrere Metalle. — Im Sommerhalbjahre, das Pflanzenreich. Uebung der botanischen Kunstsprache an lebenden Gewächsen. Die vornehmsten Pflanzenfamilien, grösstentheils nach K. Sprengel's Anleitung zur Kenntniss der Gewächse. Linné's Sexualsystem. Pohl. — 10) Zeichnen. 2 St. Hoorn. — 11) Kalligraphie. 2 St. Döring.

Vierte Classe.

Classenlehrer: Pohl.

1) Deutsche Sprache. 4 St. Schriftliche Aufsätze. Uebungen im mündlichen Vortrage, im orthophonischen Lesen und Declamiren. Grammatik, insbesondere Satzlehre. Orthographische Uebungen. Synonymen. Fremdwörter. Pohl. — 2) Lateinische Sprache. 6 St. Jacobs latein. Lesebuch S. 47 — 80 und S. 158 — 166. Mehrere Stücke, besonders von Cicero, wurden memorirt. Stylübungen. Grammatik. Pohl. — 3) Griechische Sprache. 4 St. Formenlehre nach Buttmann bis an die Verba in $\mu\iota$. Jacob's griech. Lesebuch 1r und 2r Cursus, parallel den Fortschritten in der Grammatik. Schriftliche Uebersetzungen aus dem Deutschen, verbunden mit Einübung der Accente. Richter. Die Nichtgriechen der dritten und vierten Classe wurden mit französischen Stylübungen nach Heckers Chrestomathie beschäftigt und dabei besonders der Gebrauch der Fürwörter eingeübt. Sprechübungen. Smith. — 5) Religion. 2 St. Allgemeine Einleitung. Kurze Einleitung in die biblischen Bücher. Die Glaubenslehre, und zwar die Lehre vom Glauben an Gott und vom Glauben an Jesum, den Erlöser der Menschen. Nach Ziegenbein's Katechismus, S. 1—60. Prof. Kelch. — 6) Geschichte. 2 St. Allgemeine Geschichte, nach Bredow's erster Tabelle. Sahme. — 7) Geographie. 2 St. Allgemeine Geographie. Europa. Nach Gaspari's Lehrb. 2r Cursus. Sahme. — 8) Mathematik. 6 St. Davon 2 St. Planimetrie, bis zur Aehnlichkeit der Figuren. 2 St. Arithmetik: Decimalbrüche, Buchstabenrechnung, einiges aus der Lehre von den Potenzen, Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel, die Lehre von den Proportionen. 2 St. Praktisches Rechnen: einfache und zusammengesetzte Regeldetri, nach Ohm. Uebungen im Kopfrechnen. Scheibert. — 9) Naturwissenschaft. 2 St. Das Thierreich. Allgemeine Naturgeschichte desselben: Terminologie, Classification, Nomenclatur, grösstentheils nach Cuvier, Voigt und Blumenbach. Besondere Naturgeschichte: einzelne Naturgegenstände aus verschiedenen Classen und Ordnungen. Pohl. — 10) Zeichnen. 2 St. Hoorn. — 11) Kalligraphie. 2 St. Döring.

Fünfte Classe.

Classenlehrer: Sahme.

1) Deutsche Sprache. 5 St. Grammatik. Orthographische, Styl- und Leseübungen. Schriftliche Aufsätze. Mündliche Vorträge. Declamationsübungen. Sahme. — 2) Lateinische Sprache. 5 St. Davon 3 St. Formenlehre, nach Bröder's kleiner Grammatik, und mündliche und schriftliche Einübung derselben. 2 St. Lectüre. 96 Paragraphen aus den Bröderschen Lectionen. Memoriren leichter Erzählungen und Gespräche. Sahme. — 3) Französische Sprache. 2 St. In Hecker's Lesebuch wurde der erste Abschnitt übersetzt. Die Declination der Haupt- und Fürwörter und die regelmässigen Conjugationen wurden gelernt und eingeübt. Smith. — 4) Religion. 2 St. Biblische Geschichte des A. und N. Testaments. Scheibert. — 5) Geschichte. 2 St. Die Geschichte Preussens bis auf dessen Vereinigung mit der Mark Brandenburg ausführlicher; die folgenden Begebenheiten im Abrisse. Pohl. — 6) Geographie. 2 St. Die Erde im Allgemeinen. Die fünf Erdtheile. Nach Gaspari's Lehrbuche 1r Cursus. Sahme. — 7) Arithmetik. 4 St. Rechnung mit gemeinen Brüchen. Uebungen im Kopfrechnen. Anleitung zur Auflösung von Aufgaben aus der Regeldetri. Von Pfingsten ab wurden wöchentlich 2 St. zu Uebungen im Zeichnen geometrischer Figuren benutzt. Scheibert. — 8) Naturwissenschaft. 2 St. Kurze Uebersicht der Naturkörper und der verschiedenen Arten von Naturerscheinungen. Das Wichtigste aus der Lehre von dem Wärmestoffe, dem Wasser, den Gasen und der gemeinen Luft, dem Schalle, dem Lichte, der Electricität und den Lufterscheinungen. Pohl. — 9) Zeichnen. 4 St. Hoorn. — 10) Kalligraphie. 4 St. Schnellenbach.

Sechste Classe.

Classenlehrer: Richter.

1) Deutsche Sprache. 6 St. Davon 2 St. Grammatik: die Formenlehre und die wichtigsten Regeln der Syntax. 2 St. Orthographische und stylistische Uebungen. 2 St. Lese- und Declamationsübungen. Richter. —

2) Lateinische Sprache. 6 St. Formenlehre bis zu den irregulären Zeitwörtern, nach Bröder's kleiner Grammatik. Die memorirten Vocabeln wurden zu kleinen Formeln und leichte Beispiele unter den syntactischen Regeln der Grammatik zu Uebungen im Uebersetzen benutzt. Scheibert. — 3) Religion. 2 St. An memorirte Bibelverse wurde die Entwickelung religiöser und moralischer Begriffe geknüpft. Scheibert. — 4) Geschichte. Im Winterhalbjahre 2 St. Einige Vorbegriffe. Das Haus Hohenzollern. Preussens Könige. Napoleon's Geschichte. Pohl. — 5) Geographie. 2 St. Allgemeine geographische Begriffe. Die Staaten von Europa. Deutschland und besonders Preussen specieller. Sahme. — 6) Arithmetik. 4 St. Schreiben und Aussprechen der Zahlen. Behandlung verschiedener regelmässiger Zahlensysteme. Die vier Species in unbenannten, benannten, auch leichten gebrochenen Zahlen. Verhältnissrechnung. Kopfrechnen. Sahme. — 7) Naturbeschreibung. Im Sommerhalbjahre 2 St. Das Pflanzenreich. Botanische Kunstsprache. Mehrere der ausgezeichnetsten Pflanzenfamilien. Pohl. — 8) Zeichnen. 4 St. Hoorn. — 9) Kalligraphie. 4 St. Hier, wie in allen Classen, nach Heinrigsschen Vorschriften. 2 St. Döring. 2 St. Schnellenbach.

Ausserordentliche Lectionen.

1) Englische Sprache. Für Schüler der zweiten und dritten Classe. Die erste Abtheilung hat in 2 wöchentlichen Stunden, neben Styl- und Sprechübungen, Vicar of Wakefield, Cap. I—VIII. gelesen. Die zweite Abtheilung hat in 1 St. die regelmässigen Formen gelernt und eingeübt und in Gedike's Lesebuch S. 1—30 gelesen. — 2) Gesang. Dritte Abtheilung. 2 St. Notenkenntniss, verbunden mit den ersten Uebungen in der Rhythmik und Melodik. — Zweite Abtheilung. 2 St. Aufstellung der Tonsysteme, der Tonarten und ihrer Verwandtschaft. Ausserdem wurden einige Stücke aus der von dem Lehrer herausgegebenen Sammlung von Schulgesängen geübt. — Erste Abtheilung. 2 St. Das Wichtigste über die Musik der alten Hebräer, Griechen und Römer, so wie über die Musik des Mittelalters. Ausführlicher wurde über die Kirchenmusik seit der Reformation gehandelt. Die Gesangübungen erstreckten sich auf einige grössere Chöre und Cantaten.

— Gesangchor. 2 St. Es wurden einige vierstimmige Gesänge der oben genannten Sammlung und die in der ersten Abtheilung gesungenen grössern Chöre und Cantaten eingeübt.

Verfügungen.

1. Nach dem Inhalte der Verfügung des K. Provinzial-Schul-Collegiums vom 3. November v. J. hat das K. Ministerium verordnet, dass ins Künftige keine Schulprogramme von Gymnasien oder von Privat-Lehranstalten an dasselbe unmittelbar eingesandt werden sollen.

2. Die Verfügung derselben Behörde vom 12. November v. J. bringt die schon früher ergangene Anordnung in Erinnerung, dass die Lectionspläne wenigstens sechs Wochen vor dem Eintritte der neuen Lehrcurse eingereicht und dass, wenn im Laufe des Unterrichts bleibende Abänderungen in denselben nothwendig werden sollten, diese jedesmal angezeigt werden sollen.

3. In der Verfügung derselben Behörde vom 14. Januar d. J. wird auf Veranlassung eines Ministerial-Rescripts vom 17. December v. J. die Beaufsichtigung derjenigen Gymnasialschüler, deren Eltern nicht am Orte wohnen, wiederholentlich dringend anempfohlen.

4. Die Verfügung derselben Behörde vom 13. April d. J. verordnet in Folge der Aufforderung des K. Ministeriums, dass in den Gymnasien und Schulen die Buttmannsche Schul- und mittlere griechische Grammatik bei dem griechischen Sprachunterrichte in allen Classen zu Grunde gelegt und keine andere griechische Grammatik ohne vorherige höhere Genehmigung eingeführt werden soll.

5. Unter dem 23. März d. J. fordert dieselbe Behörde auf Veranlassung einer Verfügung des K. Ministeriums einen Bericht über den Zustand des Gesangunterrichts in dem hiesigen Gymnasium.

6. In den Verfügungen derselben Behörde vom 27. October und 18. November v. J. und vom 21. März und 18. August d. J. werden auf Anordnung des K. Ministeriums v. Roon's „Grundzüge der Erd-, Völker- und Staatenkunde", Witting's „populäre Darstellung der Naturkunde", Schmid's „das Naturzeichnen für den Schul- und Selbstunterricht" und v. Holleben's und

Gervien's „Aufgaben-Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie“ zur Benutzung empfohlen.

Chronik.

Der Unterricht wurde in dem ablaufenden Schuljahre am 15. October v. J. von dem Director in der herkömmlichen Weise eröffnet.

In dem Lehrerpersonale sind keine Veränderungen vorgegangen.

Der regelmässige Gang des Unterrichts erlitt nur durch kleine Unpässlichkeiten einzelner Lehrer und durch eine vierteljährige Reise, welche einer derselben im Laufe dieses Sommers der Wiederherstellung seiner Gesundheit wegen in ein Bad zu machen genöthigt wurde, insofern eine Abänderung, als ihre Geschäfte in dieser Zeit durch die übrigen Lehrer vertreten wurden.

Die im vorigen Jahre wieder angefangenen gymnastischen Übungen wurden auch in diesem Sommer unter der Leitung des Lehrers Herrn Smith einige Monate hindurch fortgesetzt.

Die Gesangschüler aller Abtheilungen fanden eine nahmhafte Aufmunterung in einem von dem Lehrer zu diesem Zwecke veranstalteten Concerte, welches unter freundlicher Mitwirkung hiesiger ausgezeichneter Dilettanten am 1. Mai d. J. im Saale des Gymnasiums statt fand.

Statistik.

Die Gesammtzahl der Schüler betrug bei dem Schlusse des vorigen Schuljahres 262. In dem jetzt ablaufenden sind 42 in die Schule aufgenommen worden und 60 aus derselben geschieden. Ihre Anzahl beträgt daher jetzt (15. Septbr) 244, wovon 13 in der ersten, 33 in der zweiten, 38 in der dritten, 45 in der vierten, 62 in der fünften und 53 in der sechsten Unterrichtsabtheilung sitzen. Es befinden sich darunter 74 Söhne auswärtiger Eltern. Die Döringsche Privat-Vorbereitungsschule zählt 55 Knaben, von denen bei dem Wiederanfange des Unterrichts mehrere in das Gymnasium werden übergehen können.

Nach dem Schlusse des Examens werden folgende Schüler der ersten Classe mit dem Zeugnisse No. II. zur Universität entlassen werden:

1) *Alexander Eugen Julius Ulrich Oloff*, 22 Jahre alt, gebürtig aus Bahrenhoff;

2) *Ludwig Ferdinand Thiel*, 20 Jahre alt, aus Elbing;

3) *Carl Gustav Markull*, 19 Jahre alt, aus Elbing;

4) *Ernst Alexander Dagobert Senger*, 20 Jahre alt, und

5) *Ernst Emil Feodor Senger*, 18 Jahre alt, aus Elbing.

Die drei zuerst genannten wollen die Universität Königsberg beziehen und sich dem Studium der Theologie widmen. Die beiden letztern gehen nach Berlin, wo der ältere Bruder Medicin, der jüngere die Rechtswissenschaft zu studiren gedenkt.

Von den 17 aus der ersten und zweiten Unterrichtsabtheilung abgegangenen Schülern haben 6 zu Michaelis v. J. die Universität bezogen, 2 sind in ein anderes Gymnasium übergegangen, 2 haben sich dem Postfache, 1 dem Kaufmannsstande und 4 der Landwirthschaft gewidmet. Von zweien ist uns ihre künftige Bestimmung nicht bekannt geworden.

Die Bibliothek des Gymnasiums hat auch in diesem Schuljahre durch Anschaffung mehrerer Werke sowohl aus dem Gymnasialfonds als für Rechnung der Kämmerei-Casse einen nicht unbedeutenden Zuwachs erhalten. Zudem verdankt sie der Freigebigkeit eines Hohen Ministeriums Mirchondi historia Gasnevidarum, persice. Ed. Fr. Wilken. Berol. 1832. 4. welches Werk ihr durch das K. Provinzial-Schul-Collegium zugekommen ist, und von Crelle's Journal für Mathematik das 2te, 3te und 4te Heft des 9ten, das 1te bis 4te Heft des 10ten und das 1te und 2te Heft des 11ten Bandes. Herr Dr. Mützell in Berlin, ein ehemaliger Schüler des Gymnasiums, hat ihr seine Schrift: de emendatione Theogoniae Hesiodeae. Lips. 1833. verehrt. Einiges ist ihr von Gebern zugekommen, die hier nicht genannt zu werden gewünscht haben, so wie denn auch die in zwei Lesezirkeln in diesem Jahre gelesenen Schriften und gelehrten Blätter ihr wieder zu Theil geworden sind.

Auch zur Anschaffung physikalischer Instrumente und zum Behufe des physikalischen Unterrichts sind in diesem Jahre abermals aus der Kämmerei-Casse hundert Thaler gezahlt worden.

Die Schule fühlt sich für diese fortgesetzten Beweise des Wohlwollens zu dem aufrichtigsten Danke verpflichtet.

Die diesjährige Prüfung

der Schüler, zu welcher ich Einen Wohllöblichen Magistrat, die Herren Stadtverordneten, die geehrten Mitglieder sämmtlicher Königlichen und städtischen Behörden hieselbst, die achtbaren Bürger unserer Stadt und insonderheit die Eltern der Schüler, überhaupt aber alle Freunde des Schulunterrichts hiemit ergebenst einlade, wird Mittwoch und Donnerstag den 25. und 26. September in den Vormittagsstunden von 9 Uhr ab in dem Saale des Gymnasiums nach folgender Anordnung gehalten werden.

M i t t w o c h.

Choralgesang.

Sechste Classe. Religion. SCHEIBERT.

C. G. Albrecht declamirt: das Riesenspielzeug, von A. v. Chamisso, und

F. W. Wiebe: die seltsamen Menschen, von Lichtwer.

Fünfte Classe. Französisch. SMITH. Deutsch. SAHME.

A. H. E. Lehmann declamirt: der gelähmte Kranich, von Kleist, und

H. W. R. Klebs: Kaiser Joseph und Reiter Stauf.

Dritte Classe. Griechisch. SCHEIBERT. Naturbeschreibung. POHL. Mathematik. RICHTER.

G. R. Redlich declamirt: der Kosak, von Fr. Kind.

R. Nesselmann vergleicht in einer französisch ausgearbeiteten Rede die Schule mit einem Garten.

Pause.

J. H. Schultz declamirt: der Bauer und sein Sohn, von Gellert, und

J. T. F. Bach: Fürstlicher Sinn, von M. Döring.

Erste Classe. Latein. Prof. KELCH. Naturlehre (mit Zuziehung der *zweiten* Classe.) Prof. BUCHNER.

E. K. D. Königk declamirt: das Kind und der Spiegel, von Pfeffel.

H. Hahn stellt in einer Rede die Jugendjahre Friedrichs des Grossen dar.

Gesang. *Erste* Abtheilung. DÖRING. Hieran knüpft sich der Vortrag einer altgriechischen Composition der sapphischen Strophe.

Chorgesang.

Donnerstag.

Morgengesang.

O. L. A. Ohlert behandelt in einer Rede einige Lebensregeln.

Vierte Classe. Religion. Prof. KELCH. Latein. POHL.

E. W. J. Kurtius declamirt: die Eichen, von Körner.

E. F. G. Gottbrecht, C. J. Schwarz und R. H. L. Pantell tragen eine Scene aus Lessing's Minna von Barnhelm vor.

Zweite Classe. Englisch. SMITH. Mathematik. Prof. BUCHNER.

B. A. A. Ohlert declamirt: der treue Reiter, von Fr. Kind, und

V. C. Urban: Le Financier et le Savetier, von Lafontaine.

Sechste Classe. Deutsch. RICHTER. Geographie. SAHME.

G. F. A. Gottschewski spricht in einer Rede über den hohen Werth der Geschmacksbildung.

Choralgesang.

Die schriftlichen Prüfungsarbeiten der Schüler werden am ersten Tage in dem Versammlungssaale zu Jedermanns Ansicht vorliegen, die Probezeichnungen aber an beiden Tagen zur Ersparung des Raums nicht in dem Saale, sondern in dem Zeichenzimmer aufgestellt werden.

Nach Beendigung der Prüfung werden die zur Universität abgehenden Schüler von dem Director entlassen werden. Dann wird L. F. Thiel in einer Rede auseinander zu setzen suchen, *welcher Sinn den studirenden Jüngling leiten und beleben müsse*, und in seinem und der übrigen Abgehenden Namen von der Schule Abschied nehmen, worauf noch J. F. F. Annuske die Frage, *wie man seine Dankbarkeit gegen die Anstalt zeigen könne, der man den grössten Theil seiner Bildung verdankt*, beantworten und sich und seine Mitschüler dem Andenken der scheidenden Freunde empfehlen wird. Den Schluss wird nach einem Abschiedsgesange ein Chor von Rink machen.

Das Schuljahr wird den 27. September, wie gewöhnlich, mit der Censur und Translocation der Schüler beschlossen werden.

Montag den 14. October nimmt der Unterricht wieder seinen Anfang. Für die Prüfung der alsdann neu aufzunehmenden Schüler sind in der Woche zuvor der Dienstag, Mittwoch und Donnerstag, der 8. 9. und 10. October, bestimmt, und zwar der Dienstag und Mittwoch für hier einheimische, der Donnerstag für auswärtige, soweit die letztern aufzunehmen der Raum in den Classenzimmern verstatten wird. Die geehrten Eltern werden ersucht nur an den bestimmten Tagen in den Vormittagsstunden von 9 Uhr ab ihre Söhne dem Director vorstellen zu wollen. Für die Aufnahme in die unterste Classe sind fertiges Lesen, namentlich auch der lateinischen Schrift, einige Geläufigkeit im Schreiben und in der richtigen Anwendung der wesentlichsten Regeln der deutschen Orthographie, Bekanntschaft mit den Classen der Wörter und ihrer Beugung, und einige Uebung in der Dekadik ganz unerlassliche Bedingungen.

Der Text zu den Gesängen, welche in den beiden Prüfungstagen vorkommen werden, wird am Eingange in den Saal gegen eine beliebige Gabe zu haben sein.

ÜBERSICHT
der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums im Schuljahre 1832/3.

1. LEHRER.

MUND, Director.
KELCH, K. Professor.
BUCHNER, K. Professor.
MERZ, K. Professor.
POHL, ord. Lehrer.
SAHME, ord. Lehrer.
RICHTER, ord. Lehrer.
SCHEIBERT, ord. Lehrer
SMITH, ord. Lehrer.
HOORN, Zeichenlehrer.
DÖRING, Gesang- und Schreibelehrer.
SCHNELLENBACH, Schreibelehrer.

2. ALLGEMEINER LEHRPLAN.

Unterrichtsgegenstände.	Die einzelnen Schüler haben Unterrichtsstunden gehabt in							Die Lehrer haben unterrichtet in Stunden
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summe	
1) *in den ordentlichen Lehrstunden.*								
Deutsch.	3	3	4	4	5	6	25	25
Lateinisch . . .	7	8	6	6	5	6	38	38
Griechisch . . .	6	6	4	4	—	—	20	20
(Nichtgriechen. Neuere Sprachen.)	—	4	2	2	—	—		6
Französisch. . .	2	2	2	2	2	—	10	10
Englisch.	2	—	—	—	—	—	2	2
Religion.	2	2	2	2	2	2	12	10
Mathematik. . .	4	4	6	6	4	4	28	28
Naturwissenschaft.	2	3	2	2	2	2	13	13
Allg. Geschichte.	2	2	2	2	2		10	10
Gesch. d. deutschen Sprache und philosoph. Propädeutik. .	1	1	—	—	—	—	2	2
Geographie. . .	1	1	2	2	2	2	10	9
Kalligraphie. . .	—	—	2	2	4	4	12	12
Zeichnen. . . .	—	—	2	2	4	4	12	12
Summe	32	32	34	34	32	30	194	197
2) *in ausserordentlichen Lehrstunden, an denen nicht alle Schüler Theil nehmen.*								
Hebräisch. . . .	1	1	—	—	—	—	2	2
Englisch.	—	2	1	1	—	—	3	3
Gesang.	2	2	2	2	2	2	8	8
							Summa	13

3. VERHÄLTNISSE.

	der Schüler überhaupt								der zur Universität Abgegangenen.							
		wurden aufgenommen			wurden entlassen											
In	waren	durch Aufnahme in die Schule	durch Versetzung	Summe.	durch Abgang von der Schule	durch Versetzung	Summe.	sind jetzt	Nummer des Zeugnisses.	Zahl.	Zeit des Abgangs von der Schule.	Zahl.	Universitätsort.	Zahl.	Gegenstand des Studiums.	Zahl.
I.	11	—	10	10	8	—	8	11								
II.	29	2	21	23	9	10	19	33	Nr. II.	6	zu Michaelis v. J.	6	Königsberg	4	Theologie	3
III.	46	—	24	24	11	21	32	38							Philologie	1
IV.	45	6	31	37	13	24	37	45					Berlin	2	Rechtswissenschaft	2
V.	61	5	35	40	8	31	39	62								
VI.	70	29	—	29	11	35	46	53								
Summe	262	42	123	163	60	123	181	244	Summe	6		6		6		6

Trigonometrische Auflösung

einiger Aufgaben

über das

geradlinige Dreieck

von

A. Richter.

Elbing 1833.
gedruckt bei A. Albrecht.

Wenn ihr im Suchen euch trennt, wird erst die
Wahrheit erkannt.

SCHILLER.

Jeder Unterrichtszweig erfordert, wenn auch nicht in gleichem Umfange, gewisse Hilfsmittel zur Einübung, Anwendung, Erweiterung der vorgetragenen Lehren; Sammlungen von Aufgaben und Beispielen, an welchen der Schüler seine Kenntnisse, Fertigkeiten, seine Erfindungsgabe und überhaupt seine Ausbildung prüfen und erweitern soll. Zwar wird von jedem Lehrer mit Recht vorausgesetzt, dass er im Stande sey für seinen Unterricht zweckmässige Uebungsbeispiele selbst zu erfinden, und es ist diess sogar bei vorhandenen Hilfsmitteln eine durchaus unerlässliche Forderung: allein es ist eben so gewiss, dass durch Sammlungen dieser Art der Lehrer bedeutend an Zeit gewinnt, welche er zweckmässiger anwenden kann; dass er durch sie auf manchen Gedanken geleitet wird, der ihm sonst vielleicht entgangen seyn würde; und dass auch der Schüler dadurch kräftig in seinem Privatfleisse unterstützt werden kann. Man hat es daher auch immer als ein verdienstliches oder doch dankenswerthes Unternehmen betrachtet, wenn Männer, die mit dem Bedürfnisse der Schule vertraut waren, ihre Musse an die Abfassung von zweckmässigen Uebungsbüchern wandten. Wenn nun in irgend einer Wissenschaft, so findet diese Bemerkung bei der Mathematik ihre volle Anwendung, indem dieser Unterrichtszweig mit eigenthümlichen Schwierigkeiten zu kämpfen hat; und es spricht dafür schon der Umstand, dass die mathematische Literatur so ausserordentlich reich ist an Aufgabensammlungen, dass alljährlich deren neue erscheinen und dass jede Gabe, wenn sie nicht ganz unbrauchbar ist, eines freundlichen Empfanges gewiss seyn darf. Es ist jedoch nicht zu übersehen, dass nicht alle Theile der Mathematik in dieser Hinsicht einer gleichmässigen Berücksichtigung gewürdigt worden sind. Die gemeine Arithmetik, die Algebra und seit einigen Jahren auch die Geometrie haben treffliche Hilfsmittel aufzuweisen; nicht so ist es mit der Trigonometrie. Und doch, wenn der trigonometrische Calcul die Grundlage der ganzen höhern Analysis, der analytischen Geometrie und eines grossen Theils der angewandten Mathematik bildet; wenn der Schüler beim Eintritt in dieses neue Feld der mathematischen Disciplinen besondere Schwierigkeiten zu finden pflegt; wenn er, um einige Sicherheit in der Rechnung zu erlangen, in den trigonometrischen Formeln und Reductionen vielfach geübt werden muss: scheint gewiss auch in diesem Fache eine zweckmässige Sammlung von Uebungsbeispielen ein dringendes Bedürfniss zu seyn. Es ist mir wohl bekannt, dass die Trigonometrie einige brauchbare Sammlungen aufzuweisen hat und dass die Menge der trigonometrischen Lehrbücher, deren jedes auch wohl einzelne Aufgaben enthält, sehr gross ist; allein es kann doch nicht geleugnet werden, dass alle diese Werke eine zu geringe Zahl von Uebungen enthalten, als dass sie dem vorhandenen Bedürfnisse auf längere Zeit genügen könnten. Durch diese Bemerkung bin ich zu dem Versuche veranlasst worden, dem erwähnten Mangel durch eine Sammlung von trigonometrischen Aufgaben abzuhelfen, und ich halte es für nützlich, in diesen Blättern einige Aufgaben vorläufig als Probe öffentlich bekannt zu machen. Man wird leicht wahrnehmen, dass der Zweck, auf einen kleinen Raum möglichst viele Aufgaben zusammenzudrängen, bei dieser Arbeit vorgewaltet hat und dass desshalb eine zusammenhängende Entwickelung der Gleichungen beobachtet worden ist, ein Verfahren, welches zugleich die Selbstthätigkeit des Schülers eher fördern als hemmen dürfte. Der fähigere oder mehr vorgeschrittene Schüler wird bald, die Fessel des Leitfadens verschmähend, seinen eigenen Weg zu gehen versuchen, wenn der weniger geübte die einzelnen Zielpuncte, welche ihm dargeboten werden, gern benutzt, um sich bei seiner Arbeit zurecht zu finden. Bei schriftlichen Ausarbeitungen und mündlichen Vorträgen wird jedoch der Schüler stets darauf hingewiesen werden müssen, jede einzelne Aufgabe, die ihm etwa zur Lösung gegeben wird, nur aus den Fundamentalgleichungen selbstständig zu entwickeln.

Während meiner Arbeit wurde ich nothwendig auf die Untersuchung der immer noch nicht genügend beantworteten Frage geführt, ob die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung in allen Fällen brauchbar seyen. Es giebt hierüber bekanntlich zwei entgegengesetzte Ansichten, welche beide berühmte Namen unter ihren Verfechtern zählen. Indess die eine Ansicht diese Frage verneinend sich dahin ausspricht, dass nicht immer beide Wurzeln berücksichtigt werden können, dass die eine derselben oft ein unbrauchbares Resultat gebe und somit als eine „falsche“ oder „fremde“ auszuschliessen sey: hält die zweite Ansicht, welche erst vor Kurzem wieder einen beredten Vertheidiger gefunden hat, diese Behauptung für eine Beleidigung der Algebra und bemüht sich nachzuweisen, dass allemal beide Wurzeln der Aufgabe genügen. Es würde zu weit von meinem Zwecke abführen, wenn ich hier diese beiden Ansichten und die Beispiele, welche man zu ihrer Unterstützung gewählt hat, einer gründlichen Prüfung unterziehen wollte, ich muss mich vielmehr für jetzt damit begnügen einige Puncte hervorzuheben, welche man zu wenig beachtet zu haben scheint. Es wird zunächst nicht geleugnet werden, dass die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung allemal der Gleichung selbst Genüge leisten, d. h. dass beide gefundene Werthe, für x substituirt, die geordnete Gleichung auf o bringen. Man wird auch, weil die Algebra es nur mit Zahlen zu thun hat, zugeben müssen, dass in den Gleichungen $x^2 = a^2$ und $(x+m)^2 = a^2$ die Zahl a^2 sowohl aus $+a$ als auch aus $-a$ entstanden seyn könne und dass also die Algebra verbunden sey beide Werthe in ihren Auflösungen $x = \pm a$, $x + m = \pm a$ zusammenzustellen, indem es ja offenbar ihre Pflicht ist, alle diejenigen Werthe vollständig nachzuweisen, welche einer unbekannten Grösse in ihrer Verbindung mit gegebenen zukommen können. Dagegen wird man nicht nöthig haben einzuräumen, dass auch in jedem angewandten Falle a^2 aus beiden Wurzeln zugleich entstanden seyn müsse; und es wird demnach nicht behauptet werden können, dass, wenn eine Gleichung einen bestimmten vorgelegten Fall auflösen soll, nothwendig beide Werthe eine brauchbare Antwort geben müssen. Denn es kann einer dieser Werthe entweder gewissen Umständen widersprechen, welche die Aufgabe begleiten, indem sie z. B. den Begriff des Gegensatzes nicht gestatten; oder er kann mit der Relation, welche die Data (z. B. zu einer Figur) mit einander verknüpft, unvereinbar seyn. Zur Erläuterung werden folgende Beispiele dienen.

Aufgabe: „Von einem Dreieck ist gegeben 1) die Basis $= b$, 2) das Rechteck der beiden andern Seiten $= d$, 3) die Differenz der Winkel an der Basis $= 2\varphi$“. Setzt man $\cos 2\varphi = m$ und den Cosinus des Winkels in der Spitze $= x$ so findet man (siehe unten §. 5. Gleichung C)

$$\frac{d}{b^2}=\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}m}{1-x^2}, \text{ also } \ldots x=-\frac{b^2}{4d}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4d}\right)^2+1-\frac{b^2 m}{2d}}$$

In dieser Gleichung genügen beide Werthe für x, so lange x als eine Zahl schlechthin betrachtet wird. Sobald aber der Annahme gemäss x einen Cosinus ausdrücken soll, ist die negative Wurzel unbrauchbar und kein menschlicher Scharfsinn vermag sie zu retten; denn man nehme für b, d, m was immer für Zahlen (versteht sich $m<1$), so wird der Werth der Gleichung durch die negative Wurzel, absolut genommen, >1. Sucht man den Sinus des halben Winkels in der Spitze, so findet man die Gleichung 54, in welcher die positive Wurzel unbrauchbar ist, weil durch sie der Werth der Gleichung >1 wird.

Es sey ferner zur Auflösung gegeben die Gleichung

$$33\,x-x^2=140, \text{ so ist } 1)\ x=28,\ 2)\ x=5$$

Diese Gleichung löst unter andern folgende

Aufgabe. „Die Summe gleichvieler Glieder zweier arithmetischen Reihen ist $=70$. In der Reihe A ist das erste Glied $=4$ und die beständige Differenz $=0$. Die Reihe B fängt an mit 12 und nimmt um 1 ab. Wie gross ist die Anzahl der Glieder?“ Setzt man die Anzahl der Glieder $=x$, so findet man die obige Gleichung und also 1) $x=28$, 2) $x=5$. Beide Werthe genügen der Aufgabe, wenn sie allgemein von reinen Zahlen gefasst wird; anders aber wird die Antwort in folgendem praktischen Falle lauten müssen.

Aufgabe. „Zwei Fuhrleute A und B übernehmen gemeinschaftlich 70 Achtel Holz zu fahren und zwar verpflichtet sich A täglich 4 Achtel, B dagegen den ersten Tag 12, jeden folgenden Tag aber immer ein Achtel weniger als den vorhergehenden zu fahren. Wie viel Tage werden sie zu ihrer Arbeit gebrauchen?“ Hier kann offenbar nur die Antwort „5 Tage“ zugelassen und somit muss die positive Wurzel ausgeschlossen werden, weil die andere Antwort „28 Tage“ auf nicht zu beseitigende Ungereimtheiten führen würde. Es ist aber durchaus nicht nöthig, hierüber in Verlegenheit zu gerathen und aus Besorgniss, man möchte in dem überflüssigen Resultate eine Unvollkommenheit der Algebra erkennen wollen, ängstlich eine Erklärung der unbrauchbaren Wurzel zu versuchen; man betrachte nur die Sache aus dem rechten Gesichtspuncte. Die Algebra hat es durchaus nicht mit den einzelnen Vorstellungen und Umständen zu thun, welche das Exempel zu einer Aufgabe des praktischen Lebens machen; sie nimmt vielmehr die ihr vorgelegte Frage in ihrer Allgemeinheit als eine Aufgabe über arithmetische Reihen, fasst die vorhandenen Data als reine Zahlen auf, verknüpft sie den gegebenen Bedingungen gemäss zu einer Gleichung, giebt alle die Werthe getreulich an, welche in dieser Verbindung für die unbekannte Grösse möglich sind, und überlässt es dem Verstande, denjenigen Werth herauszuwählen, welcher in dem vorliegenden Falle eine brauchbare Antwort giebt.

Um nun noch das Verfahren der Algebra mit dem der Geometrie zu vergleichen, wähle ich folgende

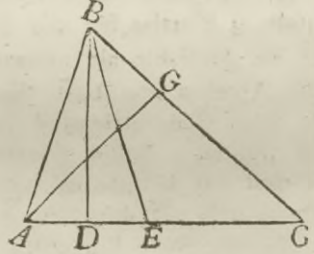
Aufgabe. „Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= 70\square'$, die Summe der Basis (Hypotenuse) und zugehörigen Höhe $= 33'$; wie gross ist die Basis?" Setzt man die Basis $= x$, so findet man die obige Gleichung

$$33x - x^2 = 140; \text{ also } 1)\ x = 28,\ 2)\ x = 5$$

Weil aber die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks kleiner als die Basis ist, so kann hier nur die Auflösung $x = 28$ gelten und die negative Wurzel muss als unbrauchbar ausgeschlossen werden. Löst man diese Aufgabe geometrisch, so wird die gegebene Linie $a = 33'$ in einem Puncte so getheilt, dass das Rechteck der beiden Abschnitte gleich ist dem doppelten Inhalt des Dreiecks. Diese Theilung geschieht aber vermittelst eines Kreises in 2 Puncten und die Geometrie giebt demnach ebenfalls 2 Werthe für die Basis, von denen sie aber denjenigen, welcher kleiner als $\frac{1}{2}a$ ist, als unbrauchbar ausschliesst. Man darf es also keinesweges der Algebra zur Last legen, dass sie zuweilen ein überflüssiges Resultat giebt; denn Geometrie und Algebra würde dann gemeinschaftlich derselbe Vorwurf treffen. Beide Wissenschaften stimmen allemal in ihren Resultaten überein und wie könnte es auch anders seyn? Wenn nun aber gewiss ist, dass die Geometrie oft doppelte Resultate giebt, von denen nur das eine in einem bestimmten Falle brauchbar ist: so muss nothwendiger Weise die Algebra in gleichem Falle in gleicher Lage seyn.

Es wird hieraus folgen, dass bei jeder quadratischen Gleichung, namentlich auch in der algebraischen Geometrie, die Frage nicht zurückgewiesen werden dürfe, ob beide Wurzeln brauchbar seyen oder ob eine derselben für die gegebenen Bedingungen ausgeschlossen werden müsse. Über diese Frage würde man sich gewiss schon längst geeinigt haben, wenn man sich hätte die Mühe nehmen wollen aus den Gleichungen die Determinationen zu entwickeln.

So wie es aber auf der einen Seite bedauert werden muss, dass in geometrischen Schriften, welche nach der Methode der Griechen behandelt seyn sollen, seitenlange trigonometrische Determinationen für Geometrie ausgegeben werden: so ist es in der That eine nicht minder befremdende Erscheinung, dass in allen algebraischen und trigonometrischen Werken dieser Gegenstand bisher ganz und gar vernachlässigt worden ist; und doch lässt sich leicht einsehen, dass diese Untersuchungen nicht bloss an sich betrachtet zu den interessanteren gehören und in wissenschaftlicher Hinsicht ihren Werth haben, sondern dass sie sogar für denjenigen in praktischer Hinsicht unerlässlich sind, welcher nicht etwa bei der Berechnung eines unbrauchbaren Werthes der Gleichung Zeit und Mühe verschwenden will. Ich hoffe, dass diese wenigen Bemerkungen hinreichen werden für eine wichtige und dabei anziehende Untersuchung, die bis jetzt gänzlich übergangen worden ist, einiges Interesse zu erwecken und wünsche, dass die im zweiten Theile der vorliegenden Arbeit gelieferten Determinationen einer nähern Prüfung gewüidigt werden mögen.



Erster Theil. Die Gleichungen.

Erste Abtheilung.

Gleichungen, welche zwei Winkel des Dreiecks enthalten.

§. 1.

In einem △ ABC sey BD senkrecht auf AC, und BE halbire den W. ABC. Man bezeichne

die Winkel A, B, C mit	A, B, C
die Gegenseiten BC, AC, AB mit	a, b, c
die Höhe BD mit	h
die Höhenabschnitte CD, AD mit	m, n
die Halbirungslinie BE mit	s
die Abschnitte CE, AE mit	μ, ν
den Umfang des Dreiecks mit	p
den Inhalt . . . . . . mit	F

Es ist bekanntlich W. $DBE = \frac{1}{2}(A-C)$
W. $BEC = A+\frac{1}{2}B$
W. $BEA = C+\frac{1}{2}B$

Es ist aber $\cos DBE = \sin BEA = \sin BEC$; folglich

$$\cos\frac{A-C}{2} = \sin(C+\tfrac{1}{2}B) = \sin(A+\tfrac{1}{2}B).$$

Wird $A > C$ genommen, so ist auch $A+\frac{1}{2}B > C+\frac{1}{2}B$.

Nun ist aber $(A+\frac{1}{2}B)+(C+\frac{1}{2}B)=180°$; folglich ist

$A+\frac{1}{2}B > 90$ | $\cos(A+\frac{1}{2}B)$ negativ
$C+\frac{1}{2}B < 90$ | $\cos(C+\frac{1}{2}B)$ positiv, und

$$\sin\frac{A-C}{2} = \cos(C+\tfrac{1}{2}B) = -\cos(A+\tfrac{1}{2}B).$$

§. 2.

Aus den △△ ABC, CBD, ABD, DBE ergeben sich vermittelst bekannter Elementarsätze folgende Gleichungen

1, $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$

2, $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$

3, $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$

4, $\frac{h}{s}=\cos\frac{A-C}{2}$

$=\sin(A+\frac{1}{2}B)$

$=\sin(C+\frac{1}{2}B)$

5, $\frac{h}{a}=\sin C$

6, $\frac{h}{c}=\sin A$

7, $\frac{h}{m}=\mathrm{tang}\, C$ *)

8, $\frac{h}{n}=\mathrm{tang}\, A$ **)

9, $\frac{m}{a}=\cos C$ *)

10, $\frac{n}{c}=\cos A$ **)

11, $\frac{a}{s}=\frac{\sin(A+\frac{1}{2}B)}{\sin C}$

$=\frac{\sin(C+\frac{1}{2}B)}{\sin C}$

12, $\frac{c}{s}=\frac{\sin(A+\frac{1}{2}B)}{\sin A}$

13, $\frac{\mu}{a}=\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin(C+\frac{1}{2}B)}$

14, $\frac{\nu}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin(A+\frac{1}{2}B)}$

15, $\frac{\mu}{s}=\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin C}$

16, $\frac{\nu}{s}=\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin A}$

§. 3.

Aus (1) und (2) folgt durch Addition

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}$$

$$=\frac{\sin A+\sin(A+B)}{\sin B}=\frac{\sin(A+\frac{1}{2}B)}{\sin\frac{1}{2}B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

---

*) Wenn C > 90°, so ist m negativ zu nehmen.

**) Wenn A > 90°, so ist n negativ zu nehmen.

Daher ist . . . . $b=\frac{(a+c)\sin\frac{1}{2}B}{\sin(A+\frac{1}{2}B)}$ . . . . 17.

$$\sin(A+\tfrac{1}{2}B)=\frac{a+c}{b}\sin\tfrac{1}{2}B \quad \ldots\ldots\ 18.$$

Aus (α) folgt $\frac{a+c}{b}=\frac{\sin A\cos\frac{1}{2}B+\cos A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B}$

$$=\sin A\cot\tfrac{1}{2}B+\cos A$$

$$\cot\tfrac{1}{2}B=\frac{(a+c)-b\cos A}{b\sin A} \quad \ldots\ldots\ 19.$$

Ferner ist die Gleichung (α) einerlei mit folgender

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}=\frac{1+\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}C}{1-\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}C}$$

woraus folgt . . . $\frac{(a+c)-b}{(a+c)+b}=\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}C$ . . . . (β)

$$\tang\tfrac{1}{2}C=\frac{(a+c)-b}{(a+c)+b}\cot\tfrac{1}{2}A \quad \ldots\ldots\ 20.$$

$$a+c-b=(a+c+b)\tang\tfrac{1}{2}A\tang\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ 21.$$

$$a+c+b=(a+c-b)\cot\tfrac{1}{2}A\cot\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots\ 22.$$

Aus (α) folgt ferner

$$\frac{a+c+b}{b}=\frac{p}{b}=\frac{\sin(A+\frac{1}{2}B)+\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B} \quad \ldots\ldots\ (\gamma)$$

$$b=\frac{p\sin\frac{1}{2}B}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C} \quad \ldots\ldots\ 23.$$

Eben so, oder durch Analogie, erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{a}&=\frac{2\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A}\\ \frac{p}{c}&=\frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (\delta)$$

Aus (α) folgt ferner $\frac{a+c-b}{b}=\frac{\sin(A+\frac{1}{2}B)-\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B}$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

$$b=\frac{(a+c-b)\sin\frac{1}{2}B}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 24.$$

Multiplicirt man (γ) mit (ε), so ist

$$\frac{(a+c)^2-b^2}{b^2}=\frac{\sin A\sin C}{\sin^2\frac{1}{2}B}$$

$$b=\sin\tfrac{1}{2}B\sqrt{\frac{(a+c)^2-b^2}{\sin A\sin C}} \quad \ldots\ldots\ldots 25$$

Multiplicirt man die Gleichungen (δ) in einander, so ist

$$\frac{p^2}{ac}=\frac{4\cos\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C}{\tang\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{1}{2}B\tang\frac{1}{2}(A+B)}{\tang\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{1}{2}B(\tang\frac{1}{2}A+\tang\frac{1}{2}B)}{\tang\frac{1}{2}A(1-\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}B)}$$

Hieraus folgt nach $\tang\frac{1}{2}A$ geordnet

$$\tang^2\tfrac{1}{2}A-\frac{p^2-4ac.\cos^2\frac{1}{2}B}{p^2\tang\frac{1}{2}B}\cdot\tang\tfrac{1}{2}A+\frac{4ac.\cos^2\frac{1}{2}B}{p^2}=0 \quad \ldots\ldots (\zeta)$$

also . . . $\tang\frac{1}{2}A=$

$$\frac{p^2-4ac.\cos^2\frac{1}{2}B}{2p^2\tang\frac{1}{2}B}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2-4ac.\cos^2\frac{1}{2}B}{2p^2\tang\frac{1}{2}B}\right)^2-\frac{4ac.\cos^2\frac{1}{2}B}{p^2}} \quad \ldots\ldots 26.$$

Setzt man hier $\dfrac{\sin\frac{1}{2}B\sqrt{ac}}{\frac{1}{4}p-\frac{ac.\cos^2\frac{1}{2}B}{p}}=\sin M$, so erhält man

$$\tang\tfrac{1}{2}A=\frac{2\cos\frac{1}{2}B\sqrt{ac}}{p}\cot\tfrac{1}{2}M \text{ durch die } + \text{ Wurzel}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}C=\frac{2\cos\frac{1}{2}B\sqrt{ac}}{p}\tang\tfrac{1}{2}M \ldots\ldots - \ldots$$

Um in der Aufgabe A, p, ac den Winkel B zu berechnen, setze man in (ζ) $\cos^2 \frac{1}{2}B = \frac{1}{1+\tang^2 \frac{1}{2}B}$, so findet man

$$\tang^3 \tfrac{1}{2}B - \cot\tfrac{1}{2}A \,.\, \tang^2 \tfrac{1}{2}B + \left(1 + \frac{4ac}{p^2} \cot^2 \tfrac{1}{2}A\right). \tang\tfrac{1}{2}B$$
$$- \frac{p^2 - 4ac}{p^2} \cot\tfrac{1}{2}A = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 27.$$

Zweite Abtheilung.

Gleichungen, welche einen Winkel des Dreiecks und die Differenz der beiden übrigen enthalten.

§. 4.

Mit Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen in §. 1. setzen wir $B = 2\alpha$, also $A + C = 180 - 2\alpha$; und $A - C = 2\varphi$, so ist

$$\frac{A+C}{2} = 90 - \alpha \qquad\qquad A = 90 - (\alpha - \varphi)$$
$$\frac{A-C}{2} = \varphi \quad ; \text{ also } \quad C = 90 - (\alpha + \varphi)$$

Daher ist $\sin A = \cos(\alpha - \varphi)$ $\quad \sin C = \cos(\alpha + \varphi)$
$\cos A = \sin(\alpha - \varphi)$ $\quad \cos C = \sin(\alpha + \varphi)$ u. s. w.

Vermittelst dieser Formeln verwandeln sich die Gleichungen des §. 2. in folgende:

28. $\frac{a}{b} = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin 2\alpha}$

29. $\frac{c}{b} = \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\sin 2\alpha}$

30. $\frac{a}{c} = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)}$

31. $\frac{h}{s} = \cos\varphi$

32. $\frac{h}{a} = \cos(\alpha + \varphi)$

33. $\frac{h}{c} = \cos(\alpha - \varphi)$

34. $\frac{m}{h} = \tang(\alpha + \varphi)$

35. $\frac{n}{h} = \tang(\alpha - \varphi)$

36. $\frac{m}{a} = \sin(\alpha + \varphi)$

37. $\frac{n}{c} = \sin(\alpha - \varphi)$

38. $\frac{a}{s} = \frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha + \varphi)}$

39. $\frac{c}{s} = \frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$

$$40.\quad \frac{\mu}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \qquad\qquad 42.\quad \frac{\mu}{s} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\varphi)}$$

$$41.\quad \frac{\nu}{c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \qquad\qquad 43.\quad \frac{\nu}{s} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha-\varphi)}$$

§. 5.

Soll aus (28) der Winkel α berechnet werden, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$(2a\sin\alpha - b\cos\varphi)\cos\alpha = b\sin\alpha\sin\varphi$$

Erhebt man diese Gleichung aufs Quadrat, setzt $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ und ordnet nach $\sin\alpha$, so findet man

$$\sin^4\alpha - \frac{b\cos\varphi}{a}\cdot\sin^3\alpha - \frac{4\alpha^2 - b^2}{4a^2}\cdot\sin^2\alpha + \frac{b\cos\varphi}{a}\cdot\sin\alpha$$

$$- \frac{b^2\cos^2\varphi}{4a^2} = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; 44$$

Durch Addition erhält man aus (28) und (29)

$$\frac{a+c}{b} = \frac{2\cos\alpha\cos\varphi}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} \; \ldots\ldots\ldots \; (A)$$

also $\cos\varphi = \frac{a+c}{b}\sin\alpha$. 45. $\qquad \sin\alpha = \frac{b}{a+c}\cos\varphi$ . . . 46.

Eben so findet man durch Subtraction

$$\frac{a-c}{b} = \frac{2\sin\alpha\sin\varphi}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} \; \ldots\ldots\ldots \; (B)$$

$\sin\varphi = \frac{a-c}{b}\cos\alpha$. 47. $\qquad \cos\alpha = \frac{b}{a-c}\sin\varphi$ . . . 48.

Aus (A) und (B) folgt durch Multiplication

$$\frac{a^2-c^2}{b^2} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\alpha}$$

$\sin 2\varphi = \frac{a^2-c^2}{b^2}\sin 2\alpha$ . . 49. $\qquad \sin 2\alpha = \frac{b^2}{a^2-c^2}\sin 2\varphi$ . . 50

Ferner $\frac{(A)}{(B)}$ giebt . . $\frac{a+c}{a-c} = \frac{\cot\alpha}{\tang\varphi} = \frac{\tang\frac{1}{2}(A+C)}{\tang\frac{1}{2}(A-C)}$ . . 51.

Durch Multiplication folgt aus (28) und (29)

$$\frac{ac}{b^2} = \frac{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\alpha+\varphi)}{\sin^2 2\alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\varphi}{\sin^2 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

$$\cos 2\varphi = \frac{2ac.\sin^2 2\alpha}{b^2} - \cos 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 52.$$

$$= \cos 2\alpha\left(\frac{2ac.\sin 2\alpha \tang 2\alpha}{b^2} - 1\right)$$

$$= \frac{\sin(2\alpha - M)}{\sin M} = -\frac{\sin(M-2\alpha)}{\sin M}$$

wenn man $\frac{2ac.\sin 2\alpha}{b^2} = \cot M$ setzt.

Aus (C) folgt, wenn $\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha$ gesetzt wird, nach den nöthigen Reductionen

$$\cos^2 2\alpha + \frac{b^2}{2ac}.\cos 2\alpha + \frac{b^2\cos 2\varphi}{2ac} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{b^2}{4ac} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4ac}\right)^2 + 1 - \frac{b^2\cos 2\varphi}{2ac}} \quad \ldots\ldots \quad 53.$$

Setzt man in (D) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, so findet man geordnet

$$\sin^4\alpha - \frac{4ac+b^2}{4ac}.\sin^2\alpha + \frac{b^2\cos^2\varphi}{4ac} = 0$$

$$\sin^2\alpha = \frac{4ac+b^2}{8ac} - \sqrt{\left(\frac{4ac+b^2}{8ac}\right)^2 - \frac{b^2\cos^2\varphi}{4ac}} \quad \ldots\ldots \quad 54.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{b\cos\varphi}{2\sqrt{ac}}\tang\tfrac{1}{2}M}\text{, für } \frac{4b\cos\varphi\sqrt{ac}}{4ac+b^2} = \sin M$$

Multiplicirt man die Gleichung (A) mit (28), so erhält man

$$\frac{(a+c)a}{b^2} = \frac{\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha\sin 2\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos(2\varphi-\alpha)}{\sin\alpha\sin 2\alpha}$$

also, wenn $(a+c)a = E$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{array}{r}\cos(2\varphi-\alpha)\\ \cos(\alpha-2\varphi)\end{array}\right\} = \frac{2\,E\sin\alpha\sin 2\alpha}{b^2} - \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 55.$$

$$= \cos\alpha\left(\frac{4\,E\sin^2\alpha}{b^2} - 1\right)$$

$$= \frac{\sin(\alpha-M)}{\sin M} = -\frac{\sin(M-\alpha)}{\sin M},$$

wenn man $\frac{2\,E\sin 2\alpha}{b^2} = \cot M$ setzt.

§. 6.

Addirt man (39) und (40), so erhält man

$$\frac{m+n}{h} = \tang(\alpha+\varphi) + \tang(\alpha-\varphi)$$

$$\frac{b}{h} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\varphi = \frac{2\,h}{b}\sin 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

$$\cos 2\varphi = \frac{2\,h}{b}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 56.$$

$$= \cos 2\alpha\left(\frac{2\,h}{b}\tang 2\alpha - 1\right)$$

$$= \frac{\sin(2\alpha-P)}{\sin P} = -\frac{\sin(P-2\alpha)}{\sin P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 57.$$

wenn man setzt $\frac{2\,h}{b} = \cot P$.

$$\left.\begin{array}{r}\sin(2\alpha-P)\\ -\sin(P-2\alpha)\end{array}\right\} = \sin P\cos 2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 58.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich 2α berechnen. Will man α getrennt, so folgt aus (C) . . . . $\cos 2\alpha = \frac{2h}{b}\sin 2\alpha - \cos 2\varphi$

Erhebt man diese Gleichung aufs Quadrat und setzt $\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$, so findet man geordnet

$$\sin^2 2\alpha - \frac{4bh\cos 2\varphi}{b^2+4h^2}.\sin 2\alpha - \frac{b^2\sin^2 2\varphi}{b^2+4h^2} = 0$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2bh\cos 2\varphi}{b^2+4h^2} + \sqrt{\left(\frac{2bh\cos 2\varphi}{b^2+4h^2}\right)^2 + \frac{b^2\sin^2 2\varphi}{b^2+4h^2}} \quad . \; . \; . \quad 59.$$

$$= \frac{b\sin 2\varphi}{\sqrt{b^2+4h^2}}\cot\tfrac{1}{2}M,\ \text{für}\ \operatorname{tang} 2\varphi\,\frac{\sqrt{b^2+4h^2}}{2h} = \operatorname{tang} M$$

Addirt man die umgekehrte Gleichung (A) zur Gleichung (A) in §. 5., so ist

$$\frac{a+c+h}{b} = \frac{2\cos\alpha\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\cos^2\varphi + 2\cos\alpha.\cos\varphi = \frac{a+c+h}{b}\sin 2\alpha + \sin^2\alpha$$

$$\cos\varphi = -\cos\alpha + \sqrt{1 + \frac{a+c+h}{b}\sin 2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 60.$$

Eben so findet man durch Subtraction der genannten Gleichungen

$$\frac{a+c-h}{b} = \frac{2\cos\alpha\cos\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\cos^2\varphi - 2\cos\alpha.\cos\varphi = \sin^2\alpha - \frac{a+c-h}{b}\sin 2\alpha$$

$$\cos\varphi = \cos\alpha \pm \sqrt{1 - \frac{a+c-h}{b}\sin 2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 61.$$

Setzt man $\sqrt{\frac{a+c-h}{b}\sin 2\alpha} = \sin M$, so findet man

$$\cos\varphi = 2\cos\frac{M+\alpha}{2}\cos\frac{M-\alpha}{2}\ \text{durch die + Wurzel}$$

$$\cos\varphi = 2\sin\frac{M+\alpha}{2}\sin\frac{M-\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; - \; . \; . \; .$$

Dritte Abtheilung.

Gleichungen, welche nur einen Winkel des Dreiecks enthalten.

§. 7.

Mit Beibehaltung der frühern Bezeichnungen werde AG senkrecht auf BC gefällt, so ist, wenn F den Inhalt des Dreiecks bezeichnet,

$$F = \frac{BC.AG}{2} = \frac{a.AG}{2}$$

Es ist aber $AG = AB. \sin B = c. \sin 2\alpha$; folglich ist

$$F = \tfrac{1}{2}\, ac. \sin 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 62.$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2F}{ac} \quad \ldots\ldots \quad 63. \qquad c = \frac{2F}{a \sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 64.$$

Aus (62) folgt, weil $F = \frac{1}{2} bh$ ist, $bh = ac. \sin 2\alpha$, also

$$h = \frac{ac}{b} \sin 2\alpha \quad \ldots \quad 65. \qquad b = \frac{ac}{h} \sin 2\alpha \quad \ldots\ldots \quad 66.$$

$$\sin 2\alpha = \frac{bh}{ac} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 67.$$

Aus (65) folgt . . . . . $b + h = b + \frac{ac}{b} \sin 2\alpha$

$$(b+h)\, b = b^2 + ac. \sin 2\alpha$$

$$b = \frac{b+h}{2} \pm \sqrt{\frac{(b+h)^2}{4} - ac. \sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 68.$$

Setzt man hier $\frac{2\sqrt{ac. \sin 2\alpha}}{b+h} = \sin M$, so ist

$b = \cot \frac{1}{2} M \sqrt{ac. \sin 2\alpha}$ durch die + Wurzel

$b = \operatorname{tang} \frac{1}{2} M \sqrt{ac. \sin 2\alpha}$ . . . . . — . . .

Aus (65) folgt ferner . . $b - h = b - \frac{ac}{b} \sin 2\alpha$

$$(b-h)\, b = b^2 - ac. \sin 2\alpha$$

$$b = \frac{b-h}{2} + \sqrt{\frac{(b-h)^2}{4} + ac. \sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 69.$$

$= \cot \frac{1}{2} M \sqrt{ac. \sin 2\alpha}$, für $\frac{2\sqrt{ac. \sin 2\alpha}}{b-h} = \operatorname{tang} M$

Wird h—b gegeben, so verwandelt sich die Gleichung 69 in folgende

$$b = -\frac{h-b}{2} + \sqrt{\frac{(h-b)^2}{4} + ac \,.\, \sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 70.$$

$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} M \sqrt{ac \,.\, \sin 2\alpha}, \quad \text{für} \quad \frac{2\sqrt{ac \,.\, \sin 2\alpha}}{n-b} = \operatorname{tang} M$$

§. 8.

Fällt man AG senkrecht auf BC, so ist bekanntlich

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2\,BC \,.\, BG$$

das ist, weil $BG = AB \,.\, \cos B = c \,.\, \cos 2\alpha$ ist,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \,.\, \cos 2\alpha$$

Wenn W. ABC ein stumpfer ist, so ist

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 + 2\,BC \,.\, BG$$

In diesem Falle ist $BG = AB \,.\, \cos ABG = - AB \,.\, ABC$; folglich gilt die obige Gleichung auch für diesen Fall. Es ist also

$$\cos 2\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 71.$$

mithin . . . . . $1 \mp \cos 2\alpha = 1 \mp \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$ . . . woraus folgt

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{4\,ac}} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p-a)(\frac{1}{2}p-c)}{ac}} \quad \ldots \quad 72.$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{4\,ac}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-b)}{ac}} \quad \ldots\ldots \quad 73.$$

$\frac{(72)}{(73)}$ giebt . . $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p-a)(\frac{1}{2}p-c)}{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-b)}}$ . . . . 74.

Multiplicirt man (72) mit (73) und verdoppelt die Gleichung, so ist

$$\sin 2\alpha = \frac{2}{ac}\sqrt{\tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}p-a)(\tfrac{1}{2}p-b)(\tfrac{1}{2}p-c)} \quad \ldots \quad 75.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{2}ac$, so ist wegen (62)

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}p-a)(\tfrac{1}{2}p-b)(\tfrac{1}{2}p-c)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 76.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-b)$, so ist

$$\frac{F}{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-b)} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p-a)(\frac{1}{2}p-c)}{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-b)}}$$

$$= \text{tang}\,\alpha \text{ (siehe Gleichung 74.)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 77.$$

$$F = \tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{2}p-b)\,\text{tang}\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 78.$$

$$b = \tfrac{1}{2}p - \frac{F}{\frac{1}{2}p\,\text{tang}\,\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 79.$$

$$= \tfrac{1}{2}p - \frac{\frac{1}{2}ac.\sin 2\alpha}{\frac{1}{2}p\,\text{tang}\,\alpha} \text{ (Gleichung 62.)}$$

$$= \tfrac{1}{2}p - \frac{ac.\cos^2\alpha}{\frac{1}{2}p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 80.$$

Weil $F = \frac{1}{2}bh$, so folgt aus (77)

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-b)} = \frac{2bh}{p(p-2b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 81.$$

$$= \frac{2bh}{p^2 - 2\,bp}$$

$$p^2 - 2bp = 2\,bh\cot\alpha$$

$$b = \frac{p^2}{2(h\cot\alpha + p)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 82.$$

$$h = \frac{p(p-2b)}{2b}\,\text{tang}\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 83.$$

$$b + h = b + \frac{p(p-2b)}{2b}\,\text{tang}\,\alpha$$

$$(b+h)b = b^2 + \tfrac{1}{2}p^2\,\text{tang}\,\alpha - bp\,\text{tang}\,\alpha$$

$$b^2 - \left\{ p\,\text{tang}\,\alpha + (b+h) \right\}.b + \tfrac{1}{2}p^2\,\text{tang}\,\alpha = 0$$

$$b = \frac{p\,\text{tang}\,\alpha + (b+h)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p\,\text{tang}\,\alpha + (b+h)}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}p^2\,\text{tang}\,\alpha} \quad . \quad . \quad 84.$$

Setzt man hier $\frac{p\sqrt{2\,\text{tang}\,\alpha}}{p\,\text{tang}\,\alpha + (b+h)} = \sin M$, so findet man

$$b = \tfrac{1}{2}p\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{2\,\text{tang}\,\alpha} \text{ und } b = \tfrac{1}{2}p\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}M\sqrt{2\,\text{tang}\,\alpha}$$

Zweiter Theil. Die Determinationen.

Gleichung 1. Gegeben B, b, a; gesucht A.

Es ist . . . . $\sin A = \frac{a}{b} \sin B$.

1) Wenn $B \geqq 90^\circ$, so ist A ein spitzer Winkel. Da nun $A < 180 - B$, also $\sin A < \sin B$ ist, so muss seyn $\frac{a}{b} \sin B < \sin B$, und

$b > a$ . . . . D.

2) Wenn $B < 90^\circ$, so kann $A \lesseqgtr 90^\circ$ werden. Da also $\sin A \leqq 1$, so muss seyn $\frac{a}{b} \sin B \leqq 1$, also $b \geqq a \sin B$ . . . . D. 1.

Ist nun $b = a \sin B$, so ist $A = 90$. Ist b grösser, so findet man zwei Werthe für A, nämlich einen spitzen Winkel und sein Supplement. Der spitze W. wird der Aufgabe immer genügen. Damit aber auch der stumpfe brauchbar werde, muss seyn $A < 180 - B$, also $\sin A > \sin B$, folglich $\frac{a}{b} \sin B > \sin B$ und . . . . $b < a$ . . . . D. 2.

Gleichung 26. Gegeben B, $a + c + b = p$, ac; gesucht A.

Damit die Wurzel reell werde, muss seyn

$$\left(\frac{p^2 - 4\, ac. \cos^2 \frac{1}{2} B}{2\, p^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}\right)^2 \geqq \frac{4\, ac. \cos^2 \frac{1}{2} B}{p^2}$$

$$p^2 - 4\, ac. \cos^2 \tfrac{1}{2} B \geqq 4\, p \sin \tfrac{1}{2} B \sqrt{ac}$$

$$p^2 - 4\, p \sin \tfrac{1}{2} B \sqrt{ac} \geqq 4\, ac. \cos^2 \tfrac{1}{2} B$$

und wenn man $4 ac. \sin^2 \frac{1}{2} B$ addirt,

$$(p - 2 \sin \tfrac{1}{2} B \sqrt{ac})^2 \geqq 4\, ac$$

$$p - 2 \sin \tfrac{1}{2} B \sqrt{ac} \geqq 2 \sqrt{ac}$$

$$\left.\begin{aligned} p &\geqq 2\,(1 + \sin \tfrac{1}{2} B). \sqrt{ac} \\ &\geqq 4 \sin^2 (45 + \tfrac{1}{4} B). \sqrt{ac} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{D.}$$

Eine weitere Determination findet nicht statt, weil, wie sich leicht zeigen lässt, der Werth der Gleichung durch die + Wurzel (um so mehr also auch durch die — W.) kleiner als $\cot \frac{1}{2} B$ wird. Man findet also $\tang \frac{1}{2} A < \cot \frac{1}{2} B$, mithin $\frac{1}{2} A < 90 - \frac{1}{2} B$, und $A < 180 - B$.

Gleichung 45. Gegeben $B, b, a+c$; gesucht $A-C$.

Weil $\varphi \overline{\gtrless} 0$, so ist $\cos \varphi \overline{\overline{<}} 1$; also muss seyn

$$\frac{a+c}{b} \sin\alpha \overline{\overline{<}} 1, \text{ mithin } \ldots b \overline{\gtrless} (a+c) \sin \alpha \quad \ldots\ldots \quad D. 1.$$

Ferner aber ist $\varphi < 90 - \alpha$, also $\cos \varphi > \sin \alpha$; folglich muss auch seyn

$$\frac{a+c}{b} \sin \alpha > \sin \alpha, \text{ und } \ldots b < a+c \quad \ldots\ldots \quad D. 2.$$

Gleichung 55. Gegeben $B, b, (a+c) a = E$; gesucht $A-C$.

Es ist $\ldots\ldots$
$$\left.\begin{matrix}(A) \ldots \cos(2\varphi-\alpha)\\ (B) \ldots \cos(\alpha-2\varphi)\end{matrix}\right\} = \frac{2 E \sin\alpha \sin 2\alpha}{b^2} - \cos\alpha$$

1) Wenn $2\alpha \overline{\gtrless} 120^\circ$, so ist $A + C \overline{\overline{<}} 60$, mithin $2\varphi < \alpha$; daher findet die Auflösung nur nach der Formel (B) statt. Weil nun $2\varphi < 180 - 2\alpha$, also von α abgezogen $\alpha - 2\varphi > 3\alpha - 180$, mithin $\cos(\alpha - 2\varphi) < \cos(3\alpha - 180)$ oder $< - \cos 3\alpha$: so muss seyn

$$\frac{2 E \sin\alpha \sin 2\alpha}{b^2} - \cos\alpha < -\cos 3\alpha$$

$$2 E \sin\alpha \sin 2\alpha < b^2 (\cos\alpha - \cos 3\alpha)$$
$$< 2 b^2 \sin\alpha \sin 2\alpha$$
$$E < b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad D.$$

2) Wenn $2\alpha < 120^\circ$, so kann $2\varphi \lesseqgtr \alpha$ werden; daher geschieht die Auflösung nach beiden Gleichungen. Weil nun in diesem Falle

$$\left.\begin{matrix}\cos(\alpha - 2\varphi)\\ \cos(\varphi - 2\alpha)\end{matrix}\right\} \overline{\overline{<}} 1, \text{ so muss seyn}$$

$$\frac{2 E \sin\alpha \sin 2\alpha}{b^2} - \cos\alpha \overline{\overline{<}} 1$$

woraus folgt $\ldots\ldots$ $E \overline{\overline{<}} b^2 \dfrac{\cot \frac{1}{2}\alpha}{2 \sin 2\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots$ D. 1.

Ist E gleich diesem Werthe, so ist $2\varphi=\alpha$. Ist E kleiner, so findet man zwei Winkel für 2φ. Die Formel (B) wird immer brauchbar seyn, weil durch sie $2\varphi<\alpha$ wird. Damit aber die Formel (A) brauchbar werde, muss seyn $2\varphi<180-2\alpha$, also $2\varphi-\alpha<180-3\alpha$, mithin $\cos(2\varphi-\alpha)>\cos(180-3\alpha)$ oder $>-\cos 3\alpha$, woraus wie oben folgt . . . $E>b^2$ . . . . . D. 2.

Gleichung 60. Gegeben B, b, a + c + h; gesucht A—C.

Weil $\cos\varphi$ positiv ist, so ist nur die positive Wurzel brauchbar. Da nun $\cos\varphi \overline{\overline{<}} 1$ ist, so muss seyn

$$-\cos\alpha+\sqrt{1+\frac{a+c+h}{b}\sin 2\alpha}\overline{\overline{<}}1$$

$$1+\frac{a+c+h}{b}\sin 2\alpha\overline{\overline{<}}(1+\cos\alpha)^2$$

$$a+c+h\overline{\overline{<}}b\,\frac{1+\frac{1}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad\ldots\ldots\ldots\quad \text{D. 1.}$$

Ferner aber ist $\cos\varphi>\sin\alpha$, folglich muss auch der Werth der Gleichung $>\sin\alpha$ seyn, woraus man findet . . . $a+c+h>b$ . . . . D. 2.

Gleichung 61. Gegeben B, b, a + c — h; gesucht A — C.

1) Wenn $2\alpha<90$, so kann $\varphi \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \alpha$, also $\cos\varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \cos\alpha$ seyn, mithin können beide Wurzeln gebraucht werden. Damit nun die Wurzel reell werde, muss seyn

$$1\overline{\overline{>}}\frac{a+c-h}{b}\sin 2\alpha,\ \text{also}\ \ldots\ a+c-h\overline{\overline{<}}\frac{b}{\sin 2\alpha}\ \ldots\ \text{D. 1.}$$

Ferner ist $\cos\varphi\overline{\overline{<}}1$, daher muss der Werth der Gleichung mit positiver Wurzel $\overline{\overline{<}}1$ seyn, woraus folgt . . . $a+c-h\overline{\overline{>}}b\,\frac{1-\frac{1}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}$ . . D. 2.

Endlich ist $\cos\varphi>\sin\alpha$, desshalb muss der Werth der Gleichung mit negativer Wurzel $>\sin\alpha$ seyn, mithin . . . $a+c-h>b$ . . . . D. 3.

2) Wenn $2\alpha\overline{\overline{>}}90$, so ist $\varphi<\alpha$, also $\cos\varphi>\cos\alpha$, folglich kann in diesem Falle nur die positive Wurzel gebraucht werden. Weil nun 1) $\cos\varphi\overline{\overline{<}}1$ und 2) $\cos\varphi>\sin\alpha$ ist, so findet man wie oben

$$a+c-h\overline{\overline{>}}b\,\frac{1-\frac{1}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}\ \ldots\ \text{D. 1.}\quad a+c-h<b\ \ldots\ \text{D. 2.}$$

Gleichung 68. Gegeben $B, b + h, ac$; gesucht b.

Es ist bekanntlich $h \leqq \frac{1}{2} b \cot \alpha$; mithin $b + h \leqq b\,(1 + \frac{1}{2} \cot \alpha)$ und $b \geqq \frac{b + h}{1 + \frac{1}{2} \cot \alpha}$. Es kann aber seyn

$\frac{b + h}{1 + \frac{1}{2} \cot \alpha} \gtreqless \frac{b + h}{2}$, also $1 + \frac{1}{2} \cot \alpha \lesseqgtr 2$, oder $\cot \alpha \lesseqgtr 2$, das ist

$$2\,\alpha \gtreqless 53^\circ\, 7'\, 48'', 36$$

1) Wenn $2\,\alpha \geqq 53^\circ\, 7'\, 48'', 36$, so ist $\frac{b + h}{1 + \frac{1}{2} \cot \alpha} \geqq \frac{b + h}{2}$; folgl. kann in diesem Falle nur die positive Wurzel gebraucht werden, und es muss seyn

$$\frac{b + h}{2} + \sqrt{\frac{(b + h)^2}{4} - ac.\, \sin 2\,\alpha} \geqq \frac{b + h}{1 + \frac{1}{2} \cot \alpha}$$

$$\frac{(b + h)^2}{4} - ac.\, \sin 2\,\alpha \geqq \left(\frac{b + h}{1 + \frac{1}{2} \cot \alpha} - \frac{b + h}{2}\right)^2$$

$$- ac.\, \sin 2\,\alpha \geqq \frac{(b + h)^2}{(1 + \frac{1}{2} \cot \alpha)^2} - \frac{(b + h)^2}{1 + \frac{1}{2} \cot \alpha}$$

$$\geqq - \frac{(b + h)^2 . \frac{1}{2} \cot \alpha}{(1 + \frac{1}{2} \cot \alpha)^2}$$

$$ac \leqq \frac{(b + h)^2 . \frac{1}{2} \cot \alpha}{\sin 2\,\alpha\, (1 + \frac{1}{2} \cot \alpha)^2}$$

$$\leqq \frac{(b + h)^2}{4 \sin^2 \alpha\, (1 + \frac{1}{2} \cot \alpha)^2} \quad \ldots\ldots \quad D.$$

Eine weitere Determination findet nicht statt, weil der Werth der Gleichung $< b + h$ ist.

2) Wenn $2\,\alpha < 53^\circ\, 7'\, 48'', 36$ so ist $1 + \frac{1}{2} \cot \alpha > 2$, folglich kann $b \gtreqless \frac{b + h}{2}$ werden und es können desshalb beide Wurzeln statt finden. Weil nun der Werth der Gleichung durch die positive Wurzel $< b + h$ ist, so wird die positive Wurzel immer genügen, wenn sie reell ist, also wenn

$$ac \leqq \frac{(b + h)^2}{4 \sin 2\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad D.\ 1.$$

Damit aber die negative Wurzel brauchbar werde, muss ausserdem der Werth der Gleichung $\gtreqless \frac{b+h}{1+\frac{1}{2}\cot\alpha}$ seyn, woraus wie oben geschlossen wird,

$$ac \gtreqless \frac{(b+h)^2}{4\sin^2\alpha\,(1+\frac{1}{2}\cot\alpha)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad D.\ 2.$$

Gleichung 84. Gegeben B, $a+c+b=p$, $b+h$; gesucht b,

Setzt man $p \tang\alpha + (b+h) = 2D$, so ist

$$b = D \pm \sqrt{D^2 - \frac{1}{2}p^2 \tang\alpha}$$

1) Wenn $2\alpha \gtreqless 53^0\, 7'\, 48'', 36$ so ist $\tang\alpha \gtreqless \frac{1}{2}$ (vergleiche die vorhergehende Determination) also $2D \gtreqless \frac{1}{2}p + (b+h)$ das ist $> 2b$, also $D > b$; folglich kann in diesem Falle nur die negative Wurzel statt finden und die Wurzel darf nicht $=0$ werden. Weil nun (siehe Determination zu Gl. 45.) $b \gtreqless (a+c)\sin\alpha$, also, wenn $b\sin\alpha$ addirt wird, $b\,(1+\sin\alpha) \gtreqless p\sin\alpha$, mithin $b \gtreqless \frac{p\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ ist, so muss seyn

$$D - \sqrt{D^2 - \frac{1}{2}p^2\tang\alpha} \gtreqless \frac{p\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

$$\left(D - \frac{p\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2 \gtreqless D^2 - \frac{1}{2}p^2\tang\alpha$$

$$p^2\,\frac{\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2} - 2\,D.\,\frac{p\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \gtreqless -\frac{1}{2}p^2\tang\alpha$$

also, wenn man durch $p\sin\alpha$ dividirt und für $2D$ den Werth setzt,

$$\frac{p\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^2} - \frac{p\tang\alpha + (b+h)}{1+\sin\alpha} \gtreqless -\frac{p}{2\cos\alpha}$$

$$p\left(\frac{\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^2} - \frac{\tang\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{2\cos\alpha}\right) \gtreqless \frac{b+h}{1+\sin\alpha}$$

das ist $\; . \; . \; . \; . \; . \; p\,\frac{2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{2\cos\alpha\,(1+\sin\alpha)^2} \gtreqless \frac{b+h}{1+\sin\alpha}$

$$p \gtreqless (b+h)\frac{2\,(1+\sin\alpha)}{2\sin\alpha + \cos\alpha}$$

$$\gtreqless (b+h)\,\frac{4\sin^2(45+\frac{1}{2}\alpha)}{\cos\alpha\,(2\tang\alpha+1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad D.\ 1.$$

Ferner aber, weil $b < b + h$ ist, muss auch seyn

$$D - \sqrt{D^2 - \tfrac{1}{2} p^2 \tang \alpha} < b + h$$

$$D - (b + h) < \sqrt{D^2 - \tfrac{1}{2} p^2 \tang \alpha}$$

$$(b + h)^2 - 2 D (b + h) < - \tfrac{1}{2} p^2 \tang \alpha$$

$$(b + h)^2 - \left\{ p (b + h) \tang \alpha + (b + h)^2 \right\} < - \tfrac{1}{2} p^2 \tang \alpha$$

$$- p (b + h) \tang \alpha < - \tfrac{1}{2} p^2 \tang \alpha$$

$$p < 2 (b + h) \quad \ldots \quad D.\ 2.$$

2) Wenn $2\alpha < 53^\circ\ 7'\ 48'', 36$ so ist $\tang \alpha < \tfrac{1}{2}$, mithin $2 D < \tfrac{1}{2} p + (b + h)$ und es kann also $D \gtreqless b$ seyn. Daher finden beide Wurzeln statt. Damit nun die Wurzel reell werde, muss seyn

$$D^2 \geqq \tfrac{1}{2} p^2 \tang \alpha$$

$$2 D \geqq p \sqrt{2 \tang \alpha}$$

$$p \tang \alpha + (b + h) \geqq p \sqrt{2 \tang \alpha}$$

$$p \leqq \frac{b + h}{- \tang \alpha + \sqrt{2 \tang \alpha}} \quad \ldots \quad D.\ 1.$$

Damit ferner die negative Wurzel brauchbar werde, muss der Werth der Gleichung $\geqq \dfrac{p \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ seyn, woraus wie oben folgt

$$p \geqq (b + h) \; \frac{4 \sin^2 (45 + \tfrac{1}{2} \alpha)}{\cos \alpha (2 \tang \alpha + 1)} \quad \ldots \quad D.\ 2.$$

Und damit die positive Wurzel der Aufgabe genüge, muss der Werth der Gleichung $< b + h$ seyn, woraus man findet

$$p > 2 (b + h) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D.\ 3$$

Übersicht der Aufgaben.

No.	Aufgabe.	Gleichung.	No.	Aufgabe.	Gleichung.
1.	B, A, b	1.	34.	A, c, s	12.
2.	B, A, $a+c$	17.	35.	A, h, s	4. 31.
3.	B, A, $a+c+b$	21. 23.	36.	A — C, b, a	44.
4.	B, A, $a+c-b$	22. 24.	37.	A — C, b, $a+c$	46.
5.	B, A, $(a+c)^2-b^2$	25.	38.	A — C, b, $a-c$	48.
6.	B, A, s	11.	39.	A — C, b, a^2-c^2	50.
7.	B, b, a	1. 28.	40.	A — C, b, ac	53. 54.
8.	B, b, $a+c$	18.45.78.83	41.	A — C, b, h	58. 59.
9.	B, b, $a-c$	47.	42.	A — C, a, c	51.
10.	B, b, a^2-c^2	49.	43.	A — C, a, h	32.
11.	B, b, ac	52. 65.	44.	A — C, a, m	36.
12.	B, b, $(a+c)a$	55.	45.	A — C, a, s	38.
13.	B, b, $a+c+h$	60.	46.	A — C, a, μ	40.
14.	B, b, $a+c-h$	61.	47.	A — C, ac, F	63.
15.	B, b, h	56. 57.	48.	A — C, c, h	33.
16.	B, $a+c+b$, $b+h$	84.	49.	A — C, c, n	37.
17.	B, $a+c+b$, ac	26. 80.	50.	A — C, c, s	39.
18.	B, $a+c+b$, h	82.	51.	A — C, c, ν	41.
19.	B, $a+c+b$, F	79.	52.	A — C, h, m	34.
20.	B, $b+h$, ac	68.	53.	A — C, h, n	35.
21.	B, $b-h$, ac	69.	54.	C, a, s	11.
22.	B, $h-b$, ac	70.	55.	C, s, μ	15.
23.	B, a, c	51. 62.	56.	b, a, c	71 — 76.
24.	B, a, h	5. 32.	57.	b, a, h	5.
25.	B, a, m	9. 36.	58.	b, $a+c$, h	81.
26.	B, a, μ	13. 40.	59	b, $a+c$, F	77.
27.	B, a, F	64.	60	b, ac, h	67.
28.	B, ac, h	66.	61.	b, ac, F	63.
29.	B, h, m	7. 34.	62	a, c, h	5.
30.	B, h, s	4. 31.	63.	a, c, F	63.
31.	B, s, μ	15. 42.	64	a, m, n	9.
32.	A, b, $a+c$	19. 20.	65.	h, m, n	7.
33.	A, $a+c+b$, ac	27.			