19.

Programm

des

Gymnasiums der Stadt Pyritz,

womit

zu der öffentlichen Prüfung am 9. April

ergebenst einladet

Dr. Adolf Zinzow,
Director.

Inhalt:

Pyritz 1878.
Druck von C. Giese.

1878. Progr. Nr. 107.

Die nachstehende elementare Behandlung der Harmonikalien und einiger Aehnlichkeitsbeziehungen gegebener Kreise schließt sich eng an die vorzüglichen Vorlesungen Dr. Otto Hesse's aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene an. Dieselbe ist hervorgegangen aus dem Beweggrunde den fähigeren Schülern der Prima als Uebung in der Anwendung der Trigonometrie und Arithmetik auf die Planimetrie zu dienen. Eine Figurentafel hat leider nicht beigegeben werden können und es wird deshalb der Leser gebeten die Feder zur Hand zu nehmen um die etwa nöthigen Figuren selbst zu entwerfen.

I.

Von den harmonischen Geraden.

Von einem Punkte O mögen zwei unbewegliche Gerade OA und OB ausgehen, die sich unter einem Winkel $\varkappa$ schneiden, und zwei bewegliche Gerade OA_0 und OB_0, welche mit OA die veränderlichen Winkel φ_0 und χ_0 bilden. Alsdann nennt man $\frac{\sin\varphi_0}{\sin(\varphi_0-\varkappa)} : \frac{\sin\chi_0}{\sin(\chi_0-\varkappa)}$ das anharmonische Verhältniß der vier von O ausgehenden Geraden. Dies Verhältniß kann unendlich viele verschiedene Werthe haben und wird, wenn es gleich -1 ist, das harmonische Verhältniß der Geraden genannt, während diese selbst alsdann harmonische Strahlen heißen. Die Gleichung

$$\frac{\sin\varphi_0}{\sin(\varphi_0-\varkappa)} : \frac{\sin\chi_0}{\sin(\chi_0-\varkappa)} = -1 \quad \text{oder} \quad (1.)\ \frac{\sin\varphi_0}{\sin(\varphi_0-\varkappa)} + \frac{\sin\chi_0}{\sin(\chi_0-\varkappa)} = 0$$

kann nur dann zu Recht bestehen, wenn einer der beiden Winkel $\varphi_0-\varkappa$ oder $\chi_0-\varkappa$ negativ ist, was immer der Fall sein wird, wenn die eine der beiden beweglichen Geraden den Winkel $\varkappa$ selbst, die andere den einen der beiden dazu gehörigen Nebenwinkel theilt. Es läßt sich deshalb die Bedingung dafür, daß die von O ausgehenden Geraden harmonische Strahlen sind, auch ausdrücken durch die Gleichung

$$\frac{\sin A_0 A}{\sin A_0 B} - \frac{\sin B_0 A}{\sin B_0 B} = 0,$$

wo der Kürze wegen der allen Winkeln gemeinschaftliche Scheitelbuchstabe O fortgelassen worden ist.

Setzt man $\varphi_0 = \frac{\varkappa}{2}$, so wird $\frac{\sin\chi_0}{\sin(\chi_0-\varkappa)} = 1$ und daraus folgt $\sin\chi_0 = \sin\chi_0\cos\varkappa - \cos\chi_0\sin\varkappa$ oder $2\sin^2\frac{\varkappa}{2}\sin\chi_0 = -2\,.\cos\chi_0\sin\frac{\varkappa}{2}\cos\frac{\varkappa}{2}$ d. h. $\operatorname{tg}.\chi_0 = -\cot\frac{\varkappa}{2}$. Man hat demnach entweder $\operatorname{tg}\chi_0 = \cot\left(-\frac{\varkappa}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(90^\circ + \frac{\varkappa}{2}\right)$ d. h. $\chi_0 = 90^\circ + \frac{\varkappa}{2}$ oder $\operatorname{tg}\chi_0 = -\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\varkappa}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\varkappa}{2} - 90^\circ\right)$ d. h. $\chi_0 = \frac{\varkappa}{2} - 90^\circ$. Halbirt also die eine bewegliche Gerade den Winkel $\varkappa$, so halbirt die andere den einen oder den anderen der beiden zugehörigen Nebenwinkel.

Geht man von der Lage $\varphi_0 = \frac{\varkappa}{2}$ und $\chi_0 = 90 + \frac{\varkappa}{2}$ aus, läßt mithin OB_0 positive Winkel mit OA bilden, so erhält für ein immer kleiner werdendes φ_0 der Bruch $\sin\varphi_0 : \sin(\varphi_0-\varkappa) = -1 : \sin\varkappa\cot\varphi_0 - \cos\varkappa$

einen immer kleineren negativen Werth, weil $\cot\varphi_0$ mit abnehmenden φ_0 immer größer wird. Es muß deshalb der zweite Bruch $\sin\chi_0 : \sin(\chi_0 - \varkappa) = 1 : \cos\varkappa - \cot\chi_0 \sin\varkappa$ einen immer kleineren positiven Werth erhalten, was nur möglich ist, wenn $\cot\chi_0$ immer kleiner, χ_0 also immer größer wird. Man erkennt daraus, daß OB_0 sich immer mehr von OA entfernt je näher OA_0 an dieselbe Gerade heranrückt. Für $\varphi_0 = 0$ wird $\sin\varphi_0 : \sin(\varphi_0 - \varkappa) = 0$, also muß auch $\sin\chi_0 : \sin(\chi_0 - \varkappa) = 0$ sein, d. i. $\chi_0 = 180^0$. Fällt demnach OA_0 mit OA zusammen, so thut dies OB_0 mit der rückwärtigen Verlängerung von OA. Läßt man dagegen φ_0 von $\frac{\varkappa}{2}$ an wachsen, so erhält $\sin\varphi_0 : \sin(\varphi_0 - \varkappa)$ einen immer größeren negativen und $\sin\chi_0 : \sin(\chi_0 - \varkappa)$ in Folge dessen einen immer größeren positiven Werth und man schließt daraus, daß je mehr die eine bewegliche Gerade sich OB nähert, dies ebenso auch die andere thun muß. Für $\varphi_0 = \varkappa$ wird $\sin\varphi_0 : \sin(\varphi_0 - \varkappa) = -\infty$ und deshalb $\sin\chi_0 : \sin(\chi_0 - \varkappa) = +\infty$, was nur für $\chi_0 = \varkappa$ möglich ist; es fallen also hier beide bewegliche Gerade mit OB zusammen. Geht man endlich von $\varphi_0 = \frac{\varkappa}{2}$ und dem negativen Winkel $\chi_0 = \frac{\varkappa}{2} - 90^0$ aus, läßt man also jetzt OB_0 negative Winkel mit OA bilden oder sich im entgegengesetzten Sinne drehen wie vorher, so findet man durch analoge Betrachtungen, daß je mehr OA_0 sich OA nähert oder davon entfernt, dies auch OB_0 thut. Für die Grenzlage $\varphi_0 = 0$ wird nun auch $\chi_0 = 0$, dagegen für $\varphi_0 = \varkappa$ ergiebt sich $\chi_0 = \varkappa - 180^0$.

Aus der Gleichung (1) findet sich leicht $2\sin\varphi_0 \sin\chi_0 \cos\varkappa - \sin\varphi_0 \cos\chi_0 \sin\varkappa - \sin\chi_0 \cos\varphi_0 \sin\varkappa = 0$, wofür man auch noch, wenn keiner von den Winkeln gleich Null ist, schreiben kann (2) $2\cot\varkappa - \cot\varphi_0 - \cot\chi_0 = 0$.

Hat $\varkappa$ den besonderen Werth 90^0, so wird $\cot\varphi_0 = -\cot\chi_0$ d. h. $\varphi_0 = -\chi_0$ oder $\varphi_0 = 180^0 - \chi_0$ und bezeichnet man OA und OB, OA_0 und OB_0 als zugeordnete harmonische Strahlen, so hat man den Satz: „Stehen von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete aufeinander senkrecht, so bildet jeder derselben mit den beiden anderen gleiche Winkel.“ Setzt man umgekehrt $\varphi_0 = -\chi_0$ oder $\varphi_0 = 180^0 - \chi_0$ in die Gleichung (2) ein, so folgt $\varkappa = 90^0$, d. h.: „Bilden von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete mit den beiden anderen gleiche Winkel, so stehen diese letzteren auf einander senkrecht.“

Sind zwei Linienpaare OA_0 und OB_0, OA_1 und OB_1 oder kürzer A_0B_0 und A_1B_1 gegeben, so kann man fragen, ob es ein drittes Paar AB giebt, welches zu jedem von beiden harmonisch ist. Es müssen offenbar die Gleichungen gelten: $2\cot\varkappa - \cot\varphi_0 - \cot\chi_0 = 0$, $2\cot\varkappa - \cot\varphi_1 - \cot\chi_1 = 0$, wo φ_1 und χ_1 für A_1B_1 dieselben Winkel bedeuten, wie φ_0 und χ_0 für A_0B_0. Durch Subtraction beider Gleichungen findet sich $\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_1} + \frac{\sin(\chi_1 - \chi_0)}{\sin\chi_0 \,.\, \sin\chi_1} = 0$. Da die Lage der Paare A_0B_0 und A_1B_1 gegeben ist, so müssen die von ihnen gebildeten Winkel sämmtlich als bekannt angesehen werden. Setzt man nun $A_0B_0 = \alpha_0$, $B_1A_0 = \beta_1$, $A_1A_0 = \alpha_1$ und bestimmt, daß diese Winkel in Bezug auf OA_0 gerade so als positiv oder negativ zu rechnen sind, wie die Winkel χ in Bezug auf OA, so gilt ganz allgemein

$$\chi_0 - \varphi_0 = \alpha_0 \quad \chi_1 - \varphi_0 = \beta_1 \quad \varphi_1 - \varphi_0 = \alpha_1 .$$

Durch Substitution dieser Werthe in die obige Bedingungsgleichung ergiebt sich dann

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\varphi_0 \sin(\varphi_0 + \alpha_1)} + \frac{\sin(\beta_1 - \alpha_0)}{\sin(\varphi_0 + \alpha_0) \sin(\varphi_0 + \beta_1)} = 0$$

$$\cos^2\varphi_0 \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \sin\beta_1 + \sin^2\varphi_0 [\cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \sin\beta_1 - \cos\beta_1 \sin(\alpha_0 - \alpha_1)] + 2\sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \cos\alpha_0 \sin\alpha_1 \sin\beta_1 = 0$$

$$\cot^2\varphi_0 + 2\cot\varphi_0 \cot\alpha_0 + \cot^2\alpha_0 = \frac{\sin\alpha_0 \cos\beta_1 \sin(\alpha_0 - \alpha_1) - \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 \sin\beta_1 + \cos^2\alpha_0 \sin\alpha_1 \sin\beta_1}{\sin^2\alpha_0 \sin\alpha_1 \sin\beta_1}$$

$$(3) \quad \cot\varphi_0 = -\cot\alpha_0 \pm \frac{1}{\sin\alpha_0} \sqrt{\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_1) \sin(\alpha_0 - \beta_1)}{\sin\alpha_1 \,.\, \sin\beta_1}} .$$

Da φ_0 unter allen Umständen ein positiver Winkel sein muß, so darf nur das positive Vorzeichen

vor der Wurzel genommen werden. Aus $\chi_0 = \varphi_0 + \alpha_0$ folgt ferner $\cot \chi_0 = \frac{\cot \varphi_0 \cot \alpha_0 - 1}{\cot \varphi_0 + \cot \alpha_0}$ und durch Einsetzung des für $\cot \varphi_0$ gefundenen Werthes $\cot \chi_0 = \cot \alpha_0 - \frac{1}{\sin \alpha_0} \sqrt{\frac{\sin \alpha_1 \, . \, \sin \beta_1}{\sin (\alpha_0 - \alpha_1) \, . \, \sin (\alpha_0 - \beta_1)}}$.
Demnach wird $2 \cot \varkappa = \frac{1}{\sin \alpha_0} \left[\sqrt{\frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_1) \sin (\alpha_0 - \beta_1)}{\sin \alpha_1 \, . \, \sin \beta_1}} - \sqrt{\frac{\sin \alpha_1 \, . \, \sin \beta_1}{\sin (\alpha_0 - \alpha_1) \, . \, \sin (\alpha_0 - \beta_1)}} \right]$
oder vereinfacht (4) $2 \cot \varkappa = \frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_1 - \beta_1)}{\sqrt{\sin (\alpha_0 - \alpha_1) \sin (\alpha_0 - \beta_1) \sin \alpha_1 \, . \, \sin \beta_1}}$. Hierdurch ist die Lage des gesuchten zu den beiden gegebenen Paaren gleichzeitig harmonischen Paares vollständig bestimmt und zwar giebt es nur ein einziges derartiges Paar. Dasselbe wird ein reelles sein, so lange das unter dem Wurzelzeichen stehende Product positiv ist, imaginär dagegen, wenn jenes Product negativ wird. Für $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_0$ wird $\cot \varkappa = 0$ d. h. die Geraden AB bilden in diesem Falle einen rechten Winkel mit einander; für $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_0$ wird $\varkappa$ ein spitzer und für $\alpha_1 + \beta_1 > \alpha_0$ ein stumpfer Winkel.

Man sagt nun: „Drei Paar Linien, welche von demselben Punkte ausgehen, bilden eine Involution, wenn ein viertes Paar gefunden werden kann, welches harmonisch ist zu jedem der drei anderen." Da nun aber, wie eben gezeigt worden ist, stets ein Linienpaar bestimmt werden kann, welches zu zwei gegebenen Paaren gleichzeitig harmonisch ist, so wird ein zu jenem harmonisches neues Paar mit den beiden gegebenen eine Involution bilden. Bezeichnet man dieses neue Linienpaar mit $A_2 B_2$, so müssen die Gleichungen gelten

$$\cot \varphi_0 = - \cot \alpha_0 + \frac{1}{\sin \alpha_0} \sqrt{\frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_1) \sin (\alpha_0 - \beta_1)}{\sin \alpha_1 \, . \, \sin \beta_1}}$$

$$\cot \varphi_0 = - \cot \alpha_0 + \frac{1}{\sin \alpha_0} \sqrt{\frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_2) \sin (\alpha_0 - \beta_2)}{\sin \alpha_2 \, . \, \sin \beta_2}},$$

wo α_2 und β_2 für $A_2 B_2$ dieselben Winkel bedeuten, wie α_1 und β_1 für $A_1 B_1$. Durch Gleichsetzung der beiden Werthe von $\cot \varphi_0$ findet sich die Bedingung der Involution ausgesprochen in der Gleichung

$$\frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_1) \sin (\alpha_0 - \beta_1)}{\sin \alpha_1 \, . \, \sin \beta_1} - \frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_2) \sin (\alpha_0 - \beta_2)}{\sin \alpha_2 \, \sin \beta_2} = 0 \text{ oder}$$

$$(5) \quad \frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_1) \sin (\alpha_0 - \beta_1) \sin \alpha_2 \sin \beta_2}{\sin (\alpha_0 - \alpha_2) \sin (\alpha_0 - \beta_2) \sin \alpha_1 \sin \beta_1} = 1,$$

wofür man auch der Uebersichtlichkeit wegen schreiben kann

$$(6) \quad \frac{\sin B_0 A_1 \, . \, \sin B_0 B_1 \, . \, \sin A_0 A_2 \, . \, \sin A_0 B_2}{\sin B_0 A_2 \, . \, \sin B_0 B_2 \, . \, \sin A_0 A_1 \, . \, \sin A_0 B_1} = 1.$$

Zu dieser Bedingungsgleichung hätte man auch durch Benutzung der Gleichung (4) gelangen können. Es gelten nämlich für den vorliegenden Fall:

$$2 \cot \varkappa = \frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_1 - \beta_1)}{\sqrt{\sin (\alpha_0 - \alpha_1) \, . \, \sin (\alpha_0 - \beta_1) \, . \, \sin \alpha_1 \, . \, \sin \beta_1}}$$

$$2 \cot \varkappa = \frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_2 - \beta_2)}{\sqrt{\sin (\alpha_0 - \alpha_2) \, . \, \sin (\alpha_0 - \beta_2) \, . \, \sin \alpha_2 \, . \, \sin \beta_2}}$$

und daraus findet sich leicht

$$\frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_1) \, . \, \sin (\alpha_0 - \beta_1) \, . \, \sin \alpha_1 \, . \, \sin \beta_1}{\sin (\alpha_0 - \alpha_2) \, . \, \sin (\alpha_0 - \beta_2) \, . \, \sin \alpha_2 \, . \, \sin \beta_2} = \frac{\sin^2 (\alpha_0 - \alpha_1 - \beta_1)}{\sin^2 (\alpha_0 - \alpha_2 - \beta_2)}$$

als eine neue Bedingungsgleichung der Involution, welche sich aber ohne Schwierigkeit in (5) überführen läßt, denn (5) selbst kann umgeformt werden in

$$\frac{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \left[\sin \alpha_0 \sin (\alpha_0 - \alpha_1 - \beta_1) + \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \right]}{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \left[\sin \alpha_0 \sin (\alpha_0 - \alpha_2 - \beta_2) + \sin \alpha_2 \sin \beta_2 \right]} = 1 \text{ oder } \frac{\sin (\alpha_0 - \alpha_1 - \beta_1)}{\sin (\alpha_0 - \alpha_2 - \beta_2)} = \frac{\sin \alpha_1 \, . \, \sin \beta_1}{\sin \alpha_2 \, . \, \sin \beta_2}.$$

Durch Substitution dieses Werthes geht die in Frage stehende Gleichung in (5) über.

Die Gleichung (5) läßt sich noch in eine vortheilhaftere Form bringen; es ist nämlich

$$\sin\alpha_2 \sin(\alpha_0 - \beta_1) = \sin\alpha_0 \cos\beta_1 \sin\alpha_2 - \cos\alpha_0 \sin\beta_1 \sin\alpha_2 + \sin\alpha_0 \sin\beta_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_0 \sin\beta_1 \cos\alpha_2$$
$$\sin\alpha_1 \sin(\alpha_0 - \beta_2) = \sin\alpha_0 \cos\beta_2 \sin\alpha_1 - \cos\alpha_0 \sin\beta_2 \sin\alpha_1 + \sin\alpha_0 \sin\beta_2 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_0 \sin\beta_2 \cos\alpha_1$$

und deshalb kann man schreiben $\sin\alpha_2 \sin(\alpha_0 - \beta_1) = \sin\beta_1 \sin(\alpha_0 - \alpha_2) - \sin\alpha_0 \sin(\beta_1 - \alpha_2)$

$$\sin\alpha_1 \sin(\alpha_0 - \beta_2) = \sin\beta_3 \sin(\alpha_0 - \alpha_1) - \sin\alpha_0 \sin(\beta_2 - \alpha_1),$$

wodurch die betreffende Gleichung sich umwandelt in

$$\frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_1)\,[\sin\beta_1 \sin(\alpha_0 - \alpha_2) - \sin\alpha_0 \sin(\beta_1 - \alpha_2)]}{\sin(\alpha_0 - \alpha_2)\,[\sin\beta_2 \sin(\alpha_0 - \alpha_1) - \sin\alpha_0 \sin(\beta_2 - \alpha_1)]}\,\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} = 1 \text{ d. h.}$$

$$(7)\quad \frac{\sin\beta_2 \,.\, \sin(\alpha_0 - \alpha_1) \,.\, \sin(\beta_1 - \alpha_2)}{\sin\beta_1 \,.\, \sin(\alpha_0 - \alpha_2) \,.\, \sin(\beta_2 - \alpha_1)} = 1 \qquad \frac{\sin A_0B_2 \,.\, \sin B_0A_1 \,.\, \sin A_2B_1}{\sin A_0B_1 \,.\, \sin B_0A_2 \,.\, \sin A_1B_2} = 1.$$

Die Richtungen der Seiten eines Dreiecks mögen durch $A_0 A_1 A_2$ und die Abstände eines beliebigen Punktes P innerhalb oder außerhalb des Dreiecks durch bezüglich $a_0\, a_1\, a_2$ bezeichnet werden. Verbindet man dann den Punkt P mit den Ecken $A_0 A_1 = E_2$, $A_0 A_2 = E_1$ und $A_1 A_2 = E_0$ durch Gerade, deren Richtungen durch bezüglich $B_2 B_1 B_0$ benannt werden sollen, so ist

$$\frac{\sin A_0B_2}{\sin A_1B_2} = \frac{a_0}{a_1} \qquad \frac{\sin A_1B_0}{\sin A_2B_0} = \frac{a_1}{a_2} \qquad \frac{\sin A_2B_1}{\sin A_0B_1} = \frac{a_2}{a_0}$$

und man erhält durch Multiplication dieser Brüche $\frac{\sin A_0B_2 \,.\, \sin B_0A_1 \,.\, \sin A_2B_1}{\sin A_0B_1 \,.\, \sin B_0A_2 \,.\, \sin A_1B_2} = 1$, woraus man durch Vergleichung mit der zweiten der Gleichungen (7) sofort erkennt, daß die Geraden $A_0 A_1 A_2 B_0 B_1 B_2$ solche Winkel mit einander bilden, wie sie die Linien der Involution mit einander bilden müssen. Zieht man also durch irgend einen Punkt O mit jenen sechs Geraden parallele Linien, so bilden dieselben eine Involution.

Construirt man zu den Geraden $A_2 B_0 A_1$ des obigen Dreiecks den vierten B_0 zugeordneten harmonischen Strahl Y und zu $A_0 B_2 A_1$ den zu B_2 zugeordneten X, welche sich beide in Q schneiden mögen, und nennt die von Q auf $A_0 A_1 A_2$ gefällten Lothe bezüglich $b_0\, b_1 b_2$, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{\sin B_0A_2}{\sin B_0A_1} - \frac{\sin YA_2}{\sin YA_1} = 0 \qquad \frac{\sin B_2A_0}{\sin B_2A_1} - \frac{\sin XA_0}{\sin XA_1} = 0$$

Da nun aber

$$\frac{\sin B_0A_2}{\sin B_0A_1} = \frac{a_2}{a_1} \qquad \frac{\sin YA_2}{\sin YA_1} = \frac{b_2}{b_1} \qquad \frac{\sin B_2A_0}{\sin B_2A_1} = \frac{a_0}{a_1} \qquad \frac{\sin XA_0}{\sin XA_1} = \frac{b_0}{b_1}$$

ist, so gehen jene Gleichungen über in $\frac{a_2}{a_1} - \frac{b_2}{b_1} = 0$ $\quad \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = 0$ und daraus findet man $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ $\quad \frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1}$ oder durch Division $a_2 : a_0 = b_2 : b_0$ d. h. Q liegt auf der Verlängerung von B_1.

Die vorher construirte Gerade Y möge die Richtung A_0 in dem Punkte Q_0 schneiden, die Perpendikel von E_1 und E_2 auf Y seien y_1 und y_2, die auf B_0 n_1 und n_2; dann gilt wieder

$\frac{\sin B_0A_2}{\sin YA_2} - \frac{\sin B_0A_1}{\sin YA_1} = 0$ und da $\frac{\sin B_0A_2}{\sin YA_2} = \frac{n_1}{y_1}$ und $\frac{\sin B_0A_1}{\sin YA_1} = \frac{n_2}{y_2}$ ist, so folgt $n_1 : y_1 = n_2 : y_2$. Bezeichnet man ferner die Punkte $B_1 A_1$ und $B_2 A_2$ mit P_1 und P_2, die Perpendikel von ihnen auf A_0 mit p_1 und p_2 und die auf Y mit q_1 und q_2, sowie die zu A_0 gehörige Dreieckshöhe durch h_0 dann gelten die Proportionen

$$p_1 : h_0 = E_2 P_1 : E_2 E_0 \qquad q_1 : y_2 = E_0 P_1 : E_2 E_0$$
$$p_2 : h_0 = E_1 P_2 : E_1 E_0 \qquad q_2 : y_1 = E_0 P_2 : E_1 E_0$$

und daraus ergiebt sich

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{h_0 . E_2 P_1}{y_2 . E_0 P_1} \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{h_0 . E_1 P_2}{y_1 . E_0 P_2} \qquad \frac{p_1 q_2}{q_1 p_2} = \frac{y_1 \,.\, E_2 P_1 \,.\, E_0 P_2}{y_2 \,.\, E_0 P_1 \,.\, E_1 P_2}.$$

Nun ist aber bekanntlich nach dem Satze des Ceva $\frac{E_2 P_1 \,.\, E_0 P_2 \,.\, E_1 P_0}{E_0 P_1 \,.\, E_1 P_2 \,.\, E_2 P_0} = 1$, wo P_0 entsprechend den Schnittpunkt $A_0 B_0$ bedeutet, und deshalb kann man setzen

$$\frac{E_2 P_1 \,.\, E_0 P_2}{E_0 P_1 \,.\, E_1 P_2} = \frac{E_2 P_0}{E_1 P_0} \text{ und } \frac{p_1 q_2}{q_1 p_2} = \frac{y_1 E_2 P_0}{y_2 E_1 P_0}.$$

Da endlich $E_2 P_0 : E_1 P_0 = n_2 : n_1$ ist, so wird $\frac{p_1 q_2}{q_1 p_2} = \frac{y_1 n_2}{y_2 n_1} = 1$ oder $p_1 : q_1 = p_2 : q_2$ d. h. die drei Punkte $Q_0 P_1 P_2$ liegen auf einer Geraden.

Man benutzt diesen Satz zur linearen Construction des vierten harmonischen Strahls zu drei gegebenen. Sind nämlich $A_2 B_0 A_1$ drei von E_0 ausgehende Gerade, so lasse man dieselben durch eine beliebige Gerade A_0 bezüglich in den Punkten $E_1 P_0 E_2$ schneiden, nehme auf B_0 zwischen E_0 und P_0 einen beliebigen Punkt P an, verbinde denselben mit E_1 und E_2 und verlängere diese Verbindungslinien bis zum Schnitt mit A_2 in P_2 und mit A_1 in P_1. Die Verbindungslinie von P_2 und P_1 schneidet A_0 in dem Punkte Q_0, welchen man mit E_0 zu verbinden hat um den vierten harmonischen Strahl zu erhalten.

Bekanntlich versteht man unter einem vollständigen Viereck die Figur, welche entsteht, wenn man die Gegenseiten eines gegebenen Vierecks bis zum Schnitt verlängert. Die beiden Schnittpunkte heißen die außerordentlichen Ecken des vollständigen Vierecks. Ein solches Viereck ist nun das durch die Geraden $A_0 B_2 B_1$ und durch die Verbindungsgerade $Q_0 P_1 P_2$ gebildete, welches am besten durch $Q_0 P_1 P E_2 (P_2 E_1)$ bezeichnet wird, wo die in Parenthese gesetzten Buchstaben den außerordentlichen Ecken zugehören. Faßt man die Verbindungslinie der beiden außerordentlichen Ecken ebenfalls als Diagonale auf, so hat man den Satz: „Verbindet man den Schnittpunkt zweier Diagonalen eines vollständigen Vierecks mit den Endpunkten der dritten Diagonale, so bilden diese Verbindungslinien mit den beiden ersten Diagonalen ein harmonisches Strahlenbündel."

Es seien jetzt $B_0 B_1 B_2$ die Ecken eines Dreiecks, welche den Seiten 0 1 2 gegenüberliegen, $A_0 A_1 A_2$ die Schnittpunkte einer Geraden 3, welche 1 und 0 selbst, 2 aber in der Verlängerung schneidet. Die vier Geraden bilden alsdann ein vollständiges Viereck $B_1 B_0 A_1 A_0 (A_2 B_2)$, dessen Ecken man mit einem beliebigen, vielleicht außerhalb gelegenen Punkte O verbinden mag. Es ist dann:

$$\frac{B_0 A_2}{O A_2} = \frac{\sin B_0 O A_2}{\sin O B_0 A_2} \qquad \frac{B_1 A_2}{O A_2} = \frac{\sin B_1 O A_2}{\sin O B_1 A_2} \qquad \frac{A_1 B_2}{O B_2} = \frac{\sin A_1 O B_2}{\sin O A_1 B_2} \qquad \frac{A_1 B_0}{O B_0} = \frac{\sin A_1 O B_0}{\sin O A_1 B_0}$$

$$\frac{A_0 B_1}{O B_1} = \frac{\sin A_0 O B_1}{\sin O A_0 B_1} \qquad \frac{A_0 B_2}{O B_2} = \frac{\sin A_0 O B_2}{\sin O A_0 B_2},$$

woraus sich durch Division findet

$$\frac{B_1 A_2}{B_0 A_2} = \frac{\sin B_1 O A_2 \,.\, \sin O B_0 A_2}{\sin O B_1 A_2 \,.\, \sin B_0 O A_2} \qquad \frac{A_1 B_0 \,.\, O B_2}{O B_0 \,.\, A_1 B_2} = \frac{\sin A_1 O B_0}{\sin A_1 O B_2} \qquad \frac{A_0 B_2 \,.\, O B_1}{O B_2 \,.\, A_0 B_1} = \frac{\sin A_0 O B_2}{\sin A_0 O B_1}$$

und durch Multiplikation der drei letzten Gleichungen

$$\frac{A_2 B_1 \,.\, A_1 B_0 \,.\, A_0 B_2 \,.\, O B_1}{B_0 A_2 \,.\, A_1 B_2 \,.\, A_0 B_1 \,.\, O B_0} = \frac{\sin B_1 O A_2 \,.\, \sin O B_0 A_2 \,.\, \sin A_1 O B_0 \,.\, \sin A_0 O B_2}{\sin B_0 O A_2 \,.\, \sin O B_1 A_2 \,.\, \sin A_1 O B_2 \,.\, \sin A_0 O B_1}.$$

Da aber $O B_1 : O B_0 = \sin O B_0 A_2 : \sin O B_1 A_2$ und nach dem Satze des Menelaus

$$\frac{A_2 B_1 \,.\, A_1 B_0 \,.\, A_0 B_2}{B_0 A_2 \,.\, A_1 B_2 \,.\, A_0 B_1} = 1$$

ist, so ergiebt sich endlich

$$\frac{\sin B_1 O A_2 \,.\, \sin A_1 O B_0 \,.\, \sin A_0 O B_2}{\sin B_0 O A_2 \,.\, \sin A_1 O B_2 \,.\, \sin A_0 O B_1} = 1$$

d. h. die von O aus gezogenen Geraden bilden eine Involution.

Leicht läßt sich auch zeigen, daß wenn man durch die eine Ecke eines Vierecks mit den gegenüberliegenden Seiten und der zweiten Diagonale Parallelen zieht, diese sechs in jener Ecke zusammenstoßenden Geraden eine Involution bilden. Das Viereck möge heißen $O B_0 B_1 A_2$ und es sei $O A_1 \parallel B_0 A_2$, $O A_0 \parallel B_1 A_2$, $O B_2 \parallel B_0 B_1$, dann lassen sich die Gleichungen

$$\frac{\sin O B_0 A_2}{\sin B_0 O A_2} = \frac{O A_2}{B_0 A_2} \qquad \frac{\sin B_0 B_1 A_2}{\sin B_1 B_0 A_2} = \frac{B_0 A_2}{B_1 A_2} \qquad \frac{\sin B_1 O A_2}{\sin O B_1 A_2} = \frac{B_1 A_2}{O A_2}$$

aufstellen, und wenn man dieselben mit einander multiplizirt, erhält man

$$\frac{\sin O B_0 A_2 \,.\, \sin B_0 B_1 A_2 \,.\, \sin B_1 O A_2}{\sin B_0 O A_2 \,.\, \sin B_1 B_0 A_2 \,.\, \sin O B_1 A_2} = 1.$$

Nun ist aber $\sin O B_0 A_2 = \sin A_1 O B_0$, $\sin B_0 B_1 A_2 = \sin A_0 O B_2$, $\sin B_1 B_0 A_2 = \sin A_1 O B_2$ und $\sin O B_1 A_2 = \sin A_0 O B_1$, wodurch die obige Gleichung in

$$\frac{\sin A_1 O B_0 \,.\, \sin A_0 O B_2 \,.\, \sin B_1 O A_2}{\sin B_0 O A_2 \,.\, \sin A_1 O B_2 \,.\, \sin A_0 O B_1} = 1$$

übergeht und die Richtigkeit der Behauptung erwiesen ist. Mit Hülfe der beiden letzten Sätze kann man leicht zu fünf gegebenen Geraden die sechste Gerade der Involution linear construiren.

II.

Von den harmonischen Punkten.

Auf einer geraden Linie seien zwei feste Punkte A und B durch $AB = a$ und zwei andere bewegliche A_0 und B_0 durch $AA_0 = a_0$ und $AB_0 = b_0$ gegeben; dann heißt $\frac{a_0}{a_0 - a} : \frac{b_0}{b_0 - a}$ das anharmonische Verhältniß der beiden Punktpaare. Dasselbe geht über in das harmonische, wenn es den Werth -1 annimmt, d. h. wenn gilt: (8) $\frac{a_0}{a_0 - a} + \frac{b_0}{b_0 - a} = 0$. Man erkennt sofort, daß diese Gleichung nur zu Recht bestehen kann, wenn die beiden Brüche entgegengesetzte Vorzeichen haben, was immer der Fall sein wird, wenn die beiden Nenner entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, oder wenn der eine bewegliche Punkt zwischen A und B, der andere aber außerhalb liegt. Man sagt dann, die Strecke AB wird durch die Punkte A_0 und B_0 innerlich und äußerlich in gleichem Verhältniß oder harmonisch getheilt. A und B einerseits, A_0 und B_0 anderseits heißen zugeordnete harmonische Punkte. Aus der Gleichung (8) findet sich $b_0 - a : a - a_0 = b_0 : a_0$, oder wie man auch schreiben kann: $B_0B : A_0B = B_0A : A_0A$. Ferner folgt $a = \frac{2 a_0 b_0}{a_0 + b_0}$. Die Strecke a wird das harmonische Mittel zwischen den Strecken a_0 und b_0 genannt und da die letzte Gleichung sich umformen läßt in (9) $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0}\right)$, so erkennt man, daß a das harmonische Mittel zu a_0 und b_0 sein wird, wenn der reciproke Werth von a das arithmetische Mittel zu den reciproken Werthen von a_0 und b_0 ist. Die Gleichung (9) hat man zu benutzen um sich von der Lage der Punkte A_0 und B_0 zu A und B eine bessere Vorstellung zu verschaffen. Läßt man zunächst den einen beweglichen Punkt, vielleicht A_0, in der Mitte von AB liegen, d. h. setzt man $a_0 = \frac{a}{2}$, so wird aus (9) $b_0 = \infty$ gefunden. Der Punkt B_0 liegt also in diesem Falle in unendlicher Entfernung von A. Wächst a_0 von $\frac{1}{2}$a bis a, d. h.

rückt A_0 aus der vorher betrachteten Lage immer näher an B, so wird $\frac{1}{a_0}$ immer kleiner und die Differenz $\frac{2}{a} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{b_0}$ immer größer, b_0 selbst also immer kleiner und deshalb rückt B_0 gleichfalls immer näher an B. Für $a_0 = a$ wird auch $b_0 = a$, d. h. A_0 und B_0 fallen hier mit B zusammen. Nimmt a_0 umgekehrt von dem Mittelwerthe $\frac{a}{2}$ an immer mehr ab, so wird $\frac{1}{a_0}$ immer größer als $\frac{2}{a}$ sein und die Differenz $\frac{2}{a} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{b_0}$ hat einen negativen Werth, b_0 ist also eine negative Strecke d. h. B_0 liegt jetzt auf der anderen Seite von A als vorher. Mit immer mehr sich verkleinerndem a_0 erhält die obige Differenz einen mehr und mehr sich vergrößernden negativen Werth, ebenso $\frac{1}{b_0}$, was nur möglich ist, wenn b_0 selbst einen immer kleineren negativen Werth erlangt. Beide Punkte A_0 und B_0 nähern sich also auf verschiedenen Seiten von A immer mehr und mehr diesem Punkte und für den Grenzfall $a_0 = 0$ ist auch $b_0 = 0$.

Sind auf einer Geraden zwei Punktpaare $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ gegeben, so kann man fragen, ob es vielleicht ein drittes Paar AB giebt, welches gleichzeitig zu den beiden gegebenen harmonisch ist. Es müssen darüber die Gleichungen $\frac{2}{a} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0}$ und $\frac{2}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$ Auskunft geben, wenn $AA_1 = a_1$ und $AB_1 = b_1$ gesetzt worden ist. Soll nun aber die Lage der Punkte $A_0\, B_0\, A_1\, B_1$ als gegeben betrachtet werden, so sind die gegenseitigen Entfernungen der vier Punkte von einander als bekannt vorauszusetzen und zwar sei: $b_0 - a_0 = \alpha_0$, $b_1 - a_0 = \beta_1$, $a_1 - a_0 = \alpha_1$ oder $b_0 = \alpha_0 + a_0$, $b_1 = \beta_1 + a_0$, $a_1 = \alpha_1 + a_0$, $b_1 - b_0 = \beta_1 - \alpha_0$, wobei die mit den griechischen Buchstaben bezeichneten Strecken in Bezug auf A_0 gerade so als positiv oder negativ zu rechnen sind, wie die mit den lateinischen Buchstaben bezeichneten in Bezug auf A. Alsdann geht die Gleichung $\frac{a_1 - a_0}{a_0 a_1} + \frac{b_1 - b_0}{b_0 b_1} = 0$, welche man durch Subtraction der obigen beiden Bedingungsgleichungen erhält, über in $\frac{\alpha_1}{a_0 (a_0 + \alpha_1)} + \frac{\beta_1 - \alpha_0}{(a_0 + \alpha_0)\,(a_0 + \beta_1)} = 0$, $a_0^2(\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_0) + 2 a_0 \alpha_1 \beta_1 + \alpha_0 \alpha_1 \beta_1 = 0$ und $\frac{1}{a_0^2} + 2\, \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{\alpha_0} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 - \beta_1}{\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1}$, woraus sich leicht ergiebt $\frac{1}{a_0} = -\frac{1}{\alpha_0} \pm \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_1) \cdot (\alpha_0 - \beta_1)}{\alpha_1 \cdot \beta_1}}$. Da a_0 aber unter allen Umständen positiv sein muß, so ist das negative Vorzeichen vor der Wurzel zu verwerfen. Substituirt man den eben gefundenen Werth in die Gleichung $\frac{1}{b_0} = \frac{1}{a_0 + \alpha_0}$, so findet man $\frac{1}{b_0} = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{\alpha_1 \beta_1}{(\alpha_0 - \alpha_1)\,(\alpha_0 - \beta_1)}}$ und demnach wird

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_1)\,(\alpha_0 - \beta_1)}{\alpha_1 \cdot \beta_1}} - \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{\alpha_1 \beta_1}{(\alpha_0 - \alpha_1) \cdot (\alpha_0 - \beta_1)}},$$

welche Gleichung noch umgeformt werden kann in $\frac{2}{a} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 - \beta_1}{\sqrt{\alpha_1 \beta_1 (\alpha_0 - \alpha_1)\,(\alpha_0 - \beta_1)}}$. Hierdurch ist das gesuchte zu $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ gleichzeitig harmonische Paar AB vollständig bestimmt. Dasselbe wird reell oder imaginär sein, je nachdem das unter dem Wurzelzeichen stehende Product positiv oder negativ ist.

Sind drei Punktpaare $A_0 B_0$, $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ gegeben, welche mit einander eine Involution bilden sollen, so müssen die Gleichungen

$$\frac{1}{a_0} = -\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_1)\,(\alpha_0 - \beta_1)}{\alpha_1\, \beta_1}} \qquad \frac{1}{a_0} = -\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{(\alpha_0 - \alpha_2)\,(\alpha_0 - \beta_2)}{\alpha_2 \cdot \beta_2}}$$

gelten und man findet daraus leicht

$$\frac{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\beta_1)}{\alpha_1\beta_1}=\frac{(\alpha_0-\alpha_2)(\alpha_0-\beta_2)}{\alpha_2\beta_2}$$

$$\frac{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\beta_1)\alpha_2\beta_2}{(\alpha_0-\alpha_2)(\alpha_0-\beta_2)\alpha_1\beta_1}=1 \qquad \frac{B_0A_1 \,.\, B_0B_1 \,.\, A_0A_2 \,.\, A_0B_2}{B_0A_2 \,.\, B_0B_2 \,.\, A_0A_1 \,.\, A_0B_1}=1.$$

Diese beiden letzten Gleichungen lassen sich noch auf eine einfachere Form bringen; setzt man nämlich

$$\alpha_2(\alpha_0-\beta_1)=\alpha_0\alpha_2-\alpha_2\beta_1+\beta_1\alpha_0-\beta_1\alpha_0=\beta_1(\alpha_0-\alpha_2)-\alpha_0(\beta_1-\alpha_2)$$
$$\alpha_1(\alpha_0-\beta_2)=\alpha_0\alpha_1-\alpha_1\beta_2+\beta_2\alpha_0-\beta_2\alpha_0=\beta_2(\alpha_0-\alpha_1)-\alpha_0(\beta_2-\alpha_1),$$

so erhält man $\frac{(\alpha_0-\alpha_1)\beta_2[\beta_1(\alpha_0-\alpha_2)-\alpha_0(\beta_1-\alpha_2)]}{(\alpha_0-\alpha_2)\beta_1[\beta_2(\alpha_0-\alpha_1)-\alpha_0(\beta_2-\alpha_1)]}=1$ oder

$$(10)\quad \frac{\beta_2(\alpha_0-\alpha_1)(\beta_1-\alpha_2)}{\beta_1(\alpha_0-\alpha_2)(\beta_2-\alpha_1)}=1 \qquad \frac{A_0B_2 \,.\, B_0A_1 \,.\, A_2B_1}{A_0B_1 \,.\, B_0A_2 \,.\, A_1B_2}=1.$$

Sind $A_0A_1A_2$ die Ecken eines Dreiecks und schneidet eine Gerade die Seiten desselben oder deren Verlängerungen in den Punkten $B_0B_1B_2$, wo B_0 auf A_1A_2 u. s. w. liegt, so müssen, wenn Q_1Q_2 die vierten zu $A_0A_2B_1$ und $A_0B_2A_1$ und zwar zu B_1 und B_2 zugeordneten harmonischen Punkte sind, die Proportionen gelten: $A_0Q_1:Q_1A_2=A_0B_1:A_2B_1$, $A_0B_2:B_2A_1=A_0Q_2:A_1Q_2$ und daraus ergiebt sich $A_0B_1=\frac{A_0Q_1 \,.\, A_2B_1}{Q_1A_2}$ $\quad A_0B_2=\frac{A_0Q_2 \,.\, B_2A_1}{A_1Q_2}$ $\quad \frac{A_0B_2}{A_0B_1}=\frac{A_0Q_2 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_2Q_1}{A_1Q_2 \,.\, A_0Q_1 \,.\, A_2B_1}$.
Anderseits ist nach dem Satze des Menelaus $\frac{A_0B_2 \,.\, A_1B_0 \,.\, A_2B_1}{A_1B_2 \,.\, A_2B_0 \,.\, A_0B_1}=1$ d. h. $\frac{A_0B_2}{A_0B_1}=\frac{A_1B_2 \,.\, A_2B_0}{A_1B_0 \,.\, A_2B_1}$.
Dividirt man die beiden gleichen Werthe, so wird $\frac{A_0Q_2 \,.\, A_2Q_1 \,.\, A_1B_0}{A_1Q_2 \,.\, A_0Q_1 \,.\, A_2B_0}=1$, woraus man erkennt, daß die Punkte $Q_1B_0Q_2$ nach der Umkehrung des eben citirten Satzes auf einer Geraden liegen.

Behält man dieselbe Bezeichnung bei, construirt aber noch zu $A_2A_1B_0$ den vierten zu B_0 zugeordneten harmonischen Punkt Q_0 und nennt den Schnittpunkt der Geraden A_2B_2 mit A_1B_1 P_0, so gilt für das Dreieck $A_0A_1A_2$ $\frac{A_0B_2 \,.\, A_1B_0 \,.\, A_2B_1}{A_0B_1 \,.\, A_1B_2 \,.\, A_2B_0}=1$ und für das Dreieck $A_0A_1B_1$, welches durch die Transversale A_2B_2 geschnitten wird, $\frac{A_0B_2 \,.\, A_1P_0 \,.\, A_2B_1}{A_0A_2 \,.\, A_1B_2 \,.\, B_1P_0}=1$, woraus durch Division hervorgeht: $\frac{A_1B_0 \,.\, A_0A_2 \,.\, B_1P_0}{A_0B_1 \,.\, A_2B_0 \,.\, A_1P_0}=1$.
Da nun aber $A_1B_0:A_2B_0=A_1Q_0:A_2Q_0$ ist, weil $B_0A_1Q_0A_2$ vier harmonische Punkte sind, so resultirt $\frac{A_1Q_0 \,.\, A_0A_2 \,.\, B_1P_0}{A_0B_1 \,.\, A_2Q_0 \,.\, A_1P_0}=1$, d. h. die Punkte $A_0Q_0P_0$ auf den Seiten des Dreiecks $A_2A_1B_1$ respective deren Verlängerungen liegen in einer Geraden. Hierauf beruht die leicht zu erkennende lineare Construction des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen. Faßt man $A_0A_2P_0A_1B_1B_2$ als ein vollständiges Viereck auf, so kann man die eben festgestellte Thatsache als den Satz aussprechen: „Jede Diagonale eines vollständigen Vierecks wird durch die beiden anderen harmonisch getheilt."

Ferner läßt sich zeigen, daß überhaupt jede Gerade von vier harmonischen Strahlen in vier harmonischen Punkten geschnitten wird. Gehen nämlich die harmonischen Strahlen von dem Punkte O aus und heißen die Schnittpunkte derselben mit der sie durchschneidenden Geraden der Reihe nach $A_0A_1B_0B_1$, so ist: $A_0A_1:A_0O=\sin A_0OA_1:\sin A_0A_1O$, $B_0A_1:B_0O=\sin B_0OA_1:\sin B_0A_1O$, woraus $\frac{A_0A_1 \,.\, OB_0}{B_0A_1 \,.\, OA_0}=\frac{\sin A_0OA_1}{\sin B_0OA_1}$ folgt. Außerdem ist $A_0B_1:A_0O=\sin A_0OB_1:\sin OB_1A_0$, $B_0B_1:B_0O=\sin B_0OB_1:\sin OB_1B_0$ und in Folge dessen $\frac{A_0B_1 \,.\, B_0O}{B_0B_1 \,.\, A_0O}=\frac{\sin A_0OB_1}{\sin B_0OB_1}$. Bedenkt man nun endlich, daß $\frac{\sin A_0OA_1}{\sin B_0OA_1}-\frac{\sin A_0OB_1}{\sin B_0OB_1}=0$ sein muß, weil die von O ausgehenden Geraden harmonische Strahlen sind, so folgt durch Subtraction $\frac{A_0 A_1}{B_0 A_1} - \frac{A_0 B_1}{B_0 B_1} = 0$ oder $A_0 A_1 : B_0 A_1 = A_0 B_1 : B_0 B_1$ d. h. $A_0 A_1 B_0 B_1$ sind vier harmonische Punkte.

Es sei jetzt ein Viereck mit den Ecken 0 1 2 3 gegeben, dessen Seiten und Diagonalen resp. deren Verlängerungen von einer Geraden geschnitten werden mögen und zwar 1 3 in A_1, 2 1 in B_0, 3 0 in A_0, 1 0 in B_2, 2 0 in B_1 und 2 3 in A_2. Dann gilt:

$$\frac{A_1 B_0}{A_1 1} = \frac{\sin A_1 1 B_0}{\sin A_1 B_0 1} \qquad \frac{A_2 B_0}{A_2 2} = \frac{\sin A_2 2 B_0}{\sin A_2 B_0 2} \text{ oder } \frac{A_1 B_0 . A_2 2}{A_2 B_0 . A_1 1} = \frac{\sin A_1 1 B_0}{\sin A_2 2 B_0}$$

$$\frac{A_0 B_2}{A_0 0} = \frac{\sin A_0 0 B_2}{\sin A_0 B_2 0} \qquad \frac{A_1 B_2}{A_1 1} = \frac{\sin A_1 1 B_2}{\sin A_1 B_2 1} \text{ oder } \frac{A_0 B_2 . A_1 1}{A_1 B_2 . A_0 0} = \frac{\sin A_0 0 B_2}{\sin A_1 1 B_2}$$

$$\frac{A_2 B_1}{A_2 2} = \frac{\sin A_2 2 B_1}{\sin A_2 B_1 2} \qquad \frac{A_0 B_1}{A_0 0} = \frac{\sin A_0 0 B_1}{\sin A_0 B_1 0} \text{ oder } \frac{A_2 B_1 . A_0 0}{A_0 B_1 . A_2 2} = \frac{\sin A_2 2 B_1}{\sin A_0 0 B_1}$$

und durch Multiplikation ergiebt sich $\frac{A_1 B_0 . A_0 B_2 . A_2 B_1}{A_2 B_0 . A_1 B_2 . A_0 B_1} = \frac{\sin A_1 1 B_0 . \sin A_0 0 B_2 . \sin A_2 2 B_1}{\sin A_2 2 B_0 . \sin A_1 1 B_2 . \sin A_0 0 B_1}$. Zieht man nun $a_1 2 \parallel A_1 1 3$, $a_0 2 \parallel A_0 0 3$ und $b_2 2 \parallel B_2 0 1$, so bilden, wie früher gezeigt worden ist, die sechs von 2 ausgehenden Geraden eine Involution und deshalb ist $\frac{\sin a_1 2 B_0 . \sin a_0 2 b_2 . \sin A_2 2 B_1}{\sin A_2 2 B_0 . \sin a_1 2 b_2 . \sin a_0 2 B_1} = 1$. Weil nun aber $\sin a_1 2 B_0 = \sin A_1 1 B_0$, $\sin a_0 2 b_2 = \sin A_0 0 B_2$, $\sin a_1 2 b_2 = \sin A_1 1 B_2$ und $\sin a_0 2 B_1 = \sin A_0 0 B_1$ ist, so folgt endlich $\frac{A_1 B_0 . A_0 B_2 . A_2 B_1}{A_2 B_0 . A_1 B_2 . A_0 B_1} = 1$, woraus man erkennt, daß die Punkte $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ Punktpaare der Involution sind und man hat demnach den Satz: „Jede gerade Linie schneidet die drei Linienpaare, welche irgend vier Punkte paarweis verbinden, in Punktpaaren der Involution." Auf diesem Satze beruht die Lösung der Aufgabe: „Zu fünf auf einer Geraden gegebenen Punkten den sechsten Punkt der Involution zu finden." Sind nämlich $A_0 B_0$ $A_1 B_1$ A_2 gegeben, so ziehe man durch A_1 B_0 A_2 drei Gerade, welche sich in den Punkten 1 2 3 schneiden, verbinde ferner 3 mit A_0 und 2 mit B_1, welche Verbindungslinien sich in 0 schneiden, dann ist der Schnittpunkt der Richtung 1 0 mit der Geraden, auf welcher die fünf gegebenen Punkte liegen, der gesuchte Punkt B_2.

Drei Linienpaare, welche eine Involution bilden, werden von einer beliebigen Geraden stets in Punkten der Involution geschnitten, denn cooctruirt man zu den gegebenen Geraden das zu ihnen allen gleichzeitig harmonische Linienpaar, so schneidet dieses die beliebige Gerade in zwei Punkten, welche harmonisch sind zu jedem der drei Schnittpunktenpaare und deshalb bilden eben diese Punkte eine Involution. Ebenso gilt natürlich auch umgekehrt der Satz: „Hat man drei Punktpaare auf einer Geraden, welche eine Involution bilden und zieht von irgend einem Punkte durch jene Punkte drei Linienpaare, so bilden diese eine Involution."

III.

Von den harmonischen Verhältnissen am Kreise.

Durch einen Punkt Q innerhalb eines Kreises sei der Durchmesser $AB = 2r$ gezogen, der Abstand des Punktes vom Centrum M werde mit a und der Abstand des zu AQB zugehörigen, Q zugeordneten vierten harmonischen Punktes P von M mit b bezeichnet, dann ist $\frac{1}{2r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r+a} + \frac{1}{r+b}\right)$ und daraus findet sich $r^2 = a\,b$. Errichtet man also in Q auf AB ein Loth, welches die Peripherie in C und D schneidet, verbindet P mit C und D und zieht die Radien MC und MD, so folgt aus $r^2 = a\,b$, daß MCP und MDP rechtwinklige Dreiecke sind, d. h. CP und DP Tangenten. Man erhält daher den vierten harmonischen Punkt P dadurch, daß man in Q auf AB ein Loth errichtet und in den Schnittpunkten desselben mit der Peripherie Tangenten anlegt, welche sich in dem vierten harmonischen Punkte auf der Verlängerung des Durchmessers schneiden. Das Loth CD heißt die Polare des Punktes P und dieser ihr Pol. Fällt Q mit dem Centrum zusammen, so folgt aus $r^2 = a\,b$ wegen $a = 0$, $b = \infty$ d. h. der Pol liegt alsdann in unendlicher Entfernung. Liegt Q auf der Peripherie, so folgt aus $r^2 = a\,b$ wegen $a = r$ auch $b = r$ d. h. der Pol liegt in diesem Falle auf der Polare selbst.

Zieht man von P aus eine beliebige Secante, welche die Peripherie in den Punkten A_0 und B_0 schneidet, und fällt $M M_0 = m$ senkrecht auf die Secante, so gilt, wenn Q_0 der vierte harmonische Punkt zu $P B_0 A_0$ und zwar der zu P zugeordnete ist, $r_0^2 = a_0 b_0$, wo $M_0 Q_0 = a_0$, $M_0 P = b_0$ und $r_0^2 = r^2 - m^2$ ist; man hat daher $r^2 - m^2 = a_0 b_0$ als Bedingungsgleichung dafür, daß $P\,B_0\,Q_0\,A_0$ vier harmonische Punkte sind. Setzt man für r^2 den Werth $a\,b$, so wird $m^2 = a\,b - a_0 b_0$ und da außerdem auch $m^2 = b^2 - b_0^2$ ist, so hat man $b^2 - b_0^2 = a\,b - a_0 b_0$ oder $b : b_0 = b_0 - a_0 : b - a$ und daraus folgt, daß Dreieck $P\,M\,M_0 \backsim P\,Q\,Q_0$ ist. Da aber das erste Dreieck ein rechtwinkliges ist, so muß es auch das zweite sein und mithin liegt Q_0 auf der Polare des Punktes P. Weil nun PA_0 eine ganz beliebige Secante ist, so hat man den Satz: „Jede von einem und demselben Punkte aus gezogene Secante wird vor der zu diesem Punkte gehörigen Polare harmonisch getheilt." Nennt man ferner je zwei Punkte, deren Verbindungslinie den Kreis in zwei zu ihnen harmonischen Punkten schneidet, harmonische Pole, so kann man den obigen Satz auch so ausdrücken: „Der geometrische Ort der zu einem gegebenen Punkte zugehörigen harmonischen Pole ist seine Polare."

Zieht man anderseits durch Q eine beliebige Sehne $A_0 B_0$ und bestimmt auf ihrer Verlängerung den zu Q zugehörigen harmonischen Pol P_0, so gilt, wenn wieder das Loth vom Centrum auf $A_0 B_0$ mit $M\,M_0 = m$, $M_0 Q = a_0$ und $M_0 P_0 = b_0$ bezeichnet wird $r^2 - m^2 = a_0 b_0$ und $r^2 = a\,b$, woraus sich wie vorher ableiten läßt $a : a_0 = b_0 - a_0 : b - a$, d. h. Dreieck $M\,Q\,M_0$ ist ähnlich $Q\,P_0\,P$ und da das erste ein rechtwinkliges ist, so ist es auch das zweite. Es liegt also der zu Q zugehörige harmonische Pol P_0 auf dem Lothe, welches in dem Punkte P auf A B errichtet worden ist, und da $A_0 B_0$ eine beliebige Sehne vorstellt, so liegen alle harmonischen Pole zu Q auf jenem Lothe, welches deshalb auch die Polare des in dem Kreise liegenden Punktes Q genannt wird. Man hat nun ohne Weiteres die Sätze: „Harmonische Pole eines Kreises haben die Eigenschaft, daß die Polare des einen durch den anderen geht." „Wenn eine Gerade sich um einen Punkt dreht, so durchläuft ihr Pol die zu jenem Punkte gehörige Polare." „Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich die zu ihm gehörige Polare um den Pol jener Geraden." „Die Verbindungslinie irgend zweier Punkte ist die Polare des Schnittpunktes der zu denselben gehörigen Polaren." „Der Durchschnittspunkt irgend zweier Geraden ist der Pol der Verbindungslinie der zu denselben gehörenden Pole."

Zwei Gerade, welche harmonisch sind zu den von ihrem Schnittpunkt an einen Kreis gelegten Tangenten heißen harmonische Polaren des Kreises. Ist Q der Pol irgend einer Geraden L N in Bezug auf den Kreis M und $L_1 N_1$ eine beliebige durch Q gehende Gerade, welche L N in P schneidet, so sind L N und $L_1 N_1$ harmonische Polaren, denn zieht man von P aus die Tangenten P A und P B, so muß auch die Linie A B als Polare zu P durch Q gehen, da ja die Polaren sämmtlicher Punkte auf L N durch Q gehen. Schneidet nun die Verlängerung von AB die Gerade L N im Punkte X, so muß auch die Polare von X durch Q gehen, und da die Polare jede von dem Pol aus gezogene Gerade, die den Kreis schneidet, harmonisch theilt, so sind X A Q B vier harmonische Punkte und deshalb die vier von P ausgehenden Geraden harmonische Strahlen. Da ferner $L_1 N_1$ eine ganz beliebige durch Q gehende Gerade ist, so hat man den Satz: „Alle zu einer gegebenen Geraden harmonische Polaren schneiden sich in dem Pol der Geraden." Beachtet man außerdem, daß nicht sowohl Q der Pol zu L N als auch P der Pol zu X A B ist, und bedenkt, daß der Schnittpunkt zweier Geraden der Pol der Verbindungslinie der zu denselben gehörenden Pole ist, so erkennt man X als den Pol zu $L_1 N_1$ und kann sagen: „Harmonische Polaren haben die Eigenschaft, daß der Pol der einen auf der anderen liegt."

Zieht man von dem Punkte P aus zwei beliebige Secanten in den Kreis, welche die Peripherie in $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ schneiden, verbindet A_0 mit B_1, A_1 mit B_0, A_0 mit A_1 und B_0 mit B_1, von welchen Verbindungslinien sich die beiden ersten in O, die anderen bei hinreichender Verlängerung in N schneiden, so entsteht ein vollständiges Sehnenviereck $N A_1 O B_1$ ($A_0 B_0$) oder $N A_0 O B_0$ ($A_1 B_1$), je nachdem sich die Verlängerungen von $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ auf der einen oder der anderen Seite schneiden. Da nun die Diagonale N O die anderen beiden Diagonalen in Punkten Q_1 und Q_0 so schneidet, daß dieselben harmonische Pole zu P sind, so ist N O die Polare zu P. Mit Hülfe dessen kann man leicht die Tangenten von einem Punkte an einen Kreis in linearer Weise construiren.

Zwei Kreise M_0 und M_1 mit den Radien r_0 und r_1 mögen durch dieselben beiden Punkte P_0 und P_1 gehen. Die gemeinschaftliche Secante $P_0 P_1$ schneide die Centrale in Q und es sei $M_0 Q = c_0$, $M_1 Q = c_1$; dann läßt sich leicht zeigen, daß die Tangenten $t_0 = P B_0$ und $t_1 = P B_1$ von irgend einem Punkte P der gemeinschaftlichen Secante an beide Kreise gleich lang sind. Bezeichnet man nämlich noch die Abstände des Punktes P von den Centren mit b_0 und b_1, so ist $t_0^2 = b_0^2 - r_0^2$, $t_1^2 = b_1^2 - r_1^2$, $b_0^2 - c_0^2 = b_1^2 - c_1^2$, $r_0^2 - c_0^2 = r_1^2 - c_1^2$ und da durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen $b_0^2 - r_0^2 = b_1^2 - r_1^2$ ist, so folgt $t_0^2 = t_1^2$ oder $t_0 = t_1$. Man definirt nun die gemeinschaftliche Secante zweier oder mehrerer sich in denselben beiden Punkten schneidenden Kreise als diejenige Gerade, von deren Punkten aus die Tangenten an alle Kreise gleich lang sind. Eine solche gemeinschaftliche Secante wird alsdann auch noch vorhanden sein, wenn die Kreise sich in Wirklichkeit gar nicht, sondern nur in zwei imaginären Punkten schneiden. Fallen zunächst P_0 und P_1 zusammen, d. h. berühren sich die Kreise, so ist sofort ersichtlich, daß die Tangente im Berührungspunkte die gemeinschaftliche Secante ist. Rücken die Kreise noch weiter aus einander, so kann man doch immer einen Punkt gleicher Tangenten für beide leicht finden, indem man eine der gemeinschaftlichen Tangenten im Punkte P_0 halbirt. Fällt man von diesem Punkte auf die Centrale ein Loth $P_0 Q$, welches dieselbe in die Abschnitte c_0 und c_1 theilt, so gilt von jedem Punkte P dieses Lothes $b_0^2 - c_0^2 = b_1^2 - c_1^2$ und da wegen Gleichheit der von P_0 ausgehenden Tangenten $P_0 M_0^2 - r_0^2 = P_0 M_1^2 - r_1^2$ und außerdem $P_0 M_0^2 - c_0^2 = P_0 M_1^2 - c_1^2$ oder $r_0^2 - c_0^2 = r_1^2 - c_1^2$ ist, so folgt durch Subtraction $b_0^2 - r_0^2 = b_1^2 - r_1^2$ oder was dasselbe ist $t_0^2 = t_1^2$ und $t_0 = t_1$. Das Loth $P_0 Q$ ist also die gemeinschaftliche Secante der beiden sich in zwei imaginären Punkten schneidenden Kreise und man kann sagen: Ein auf der Centrale errichtetes Loth ist die gemeinschaftliche Secante, wenn es die Centrale in zwei solche Abschnitte c_0 und c_1 theilt, daß $r_0^2 - c_0^2 = r_1^2 - c_1^2$ oder $r_0^2 - r_1^2 = c_0^2 - c_1^2$ ist, und ein Punkt P liegt auf der gemeinschaftlichen Secante, wenn seine Entfernungen b_0 und b_1 von den Centren so beschaffen sind, daß ist $b_0^2 - r_0^2 = b_1^2 - r_1^2$ oder $b_0^2 - b_1^2 = r_0^2 - r_1^2$. Es giebt nun aber eine ganze Schaar von Kreisen, welche sich in denselben beiden reellen oder imaginären Punkten wie M_0 und M_1 schneiden, d. h. solche für welche die Tangenten von dem beliebigen Punkte P der gemeinschaftlichen Secante gleich lang sind. Ein beliebiger von diesen Kreisen, dessen Centrum M_2 natürlich auf der Centrale $M_0 M_1$ liegen muß, habe den Radius r, dann gilt wegen $t_2 = t_0 = t_1$ auch $r_2^2 - c_2^2 = r_0^2 - c_0^2 = r_1^2 - c_1^2$ und bestehen umgekehrt für einen Kreis M diese letzten Gleichungen, so gehört er der betreffenden Schaar an und es ist $t_2 = t_0 = t_1$.

Besondere Aufmerksamkeit verdient der zugehörige Kreis M, für welchen $r_2 = 0$ d. h. $c_2 = \pm \sqrt{c_0^2 - r_0^2}$ ist. Die beiden Punkte, welche gefunden werden, wenn man diese Strecke c_2 auf beiden Seiten von Q auf der Centrale abschneidet, heißen die Grenzpunkte der Kreise, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden.

Da nun $c_0{}^2 - r_0{}^2$ stets positiv ist für $c_0 > r_0$ und negativ für $c_0 < r_0$, so folgt: „Eine Schaar oder ein System von Kreisen, welche durch dieselben beiden Punkte gehen, hat zwei reelle Grenzpunkte, wenn die Schnittpunkte imaginär sind, und zwei imaginäre Grenzpunkte, wenn die Schnittpunkte reell sind.“ Man findet die Grenzpunkte am einfachsten dadurch, daß man vom Fußpunkte Q der gemeinschaftlichen Secante an einen der Kreise M_0 oder M_1 eine Tangente legt und mit derselben um Q einen Kreis schlägt, welcher die Centrale in den Grenzpunkten schneidet. Dieser Kreis schneidet die Kreise M_0 und M_1 rechtwinklig, zugleich aber auch alle übrigen Kreise, die zu dem System gehören, da die Tangenten von Q aus an alle diese Kreise gleich lang sind. Nun sind aber die Tangenten von jedem Punkte P der gemeinschaftlichen Secante an alle Kreise des Systems gleich lang, folglich wird auch der mit dieser Tangente um P geschlagene Kreis jeden Kreis rechtwinklig schneiden und durch die Grenzpunkte als Kreise mit dem Radius Null hindurchgehen. Es giebt also ein zweites System von Kreisen, welche jeden Kreis des gegebenen Systems rechtwinklig und sich selbst in denselben beiden Punkten, den Grenzpunkten des gegebenen Systems, schneiden. Von beiden Systemen kann man sagen: „Die Grenzpunkte des einen Systems sind die Schnittpunkte des anderen, und sind die Grenzpunkte des einen Systems reell, so sind die des anderen imaginär. Die Centrale des einen Systems ist die gemeinschaftliche Secante des andern.“

Construirt man zu dem beliebigen Punkte P der gemeinschaftlichen Secante der Kreise M_0 und M_1 die Polaren, welche Sehnen $2\,s_0$ und $2\,s_1$ mit den Kreisen bilden, so schneiden sich diese Polaren in einem Punkte auf der gemeinschaftlichen Secante, denn es ist: $c_0{}^2 - r_0{}^2 = c_1{}^2 - r_1{}^2$, $a_1{}^2 = r_1{}^2 - s_1{}^2$, $r_0{}^2 - s_0{}^2 = a_0{}^2$, $(b_0 - a_0)^2 = t_0{}^2 - s_0{}^2$, $t_1{}^2 - s_1{}^2 = (b_1 - a_1)^2$.

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man: $c_0{}^2 + a_1{}^2 + (b_0 - a_0)^2 = c_1{}^2 + a_0{}^2 + (b_1 - a_1)^2$ d. h. die drei Senkrechten auf den Seiten des Dreiecks $M_0\,P\,M_1$, nämlich die Polaren und die gemeinschaftliche Secante schneiden sich in einem Punkte. Setzt man einen beliebigen Kreis M_2 aus der Schaar der in denselben beiden Punkten sich schneidenden Kreise an die Stelle von M_1, was dadurch geschieht, daß man den Index 1 mit 2 vertauscht, so ist auch $c_0{}^2 + a_2{}^2 + (b_0 - a_0)^2 = c_2{}^2 + a_0{}^2 + (b_2 - a_2)^2$ und daraus folgt, daß die Polaren von M_0 und M_2 sich ebenfalls mit der gemeinschaftlichen Secante in einem Punkte schneiden, d. h. die drei Polaren der Kreise $M_0\,M_1\,M_2$ schneiden sich in einem und demselben Punkte auf der gemeinschaftlichen Secante, und somit gehen, da M_2 ein ganz beliebiger Kreis des Systems ist, auch die Polaren aller übrigen Kreise durch denselben Punkt.

Es seien wiederum M_0 und M_1 zwei in zwei Punkten sich schneidende Kreise und M_2 ein beliebiger durch dieselben beiden Punkte gehender dritter Kreis, dessen Centrum auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Secante liegen möge wie M_1, während das Centrum von M_0 auf der anderen Seite befindlich sein soll. Man construire alsdann zu einem ganz beliebigen Punkte Π in den Kreisen M_1 und M_2 die Polaren, welche hinreichend verlängert sich in X schneiden sollen; fälle $\Pi G \perp M_0 M_1$, $XF \perp M_0 M_1$, $XE_0 \perp M_0 \Pi$, nenne $M_0 \Pi = b_0$, $M_0 E_0 = a_0$ und behalte im übrigen die eingeführte Bezeichnung bei, so gilt für das Dreieck $M_0\,\Pi\,M_1$ $\quad a_0{}^2 + (b_1 - a_1)^2 + FM_1 = (b_0 - a_0)^2 + a_1{}^2 + FM_0{}^2$. Bedenkt man nun, daß $FM_1 = \pm FM_0 + M_0 M_1$ ist, so wird $b_1{}^2 = 2\,b_1 a_1 \pm 2\,FM_0 \,.\, M_0 M_1 + M_1 M_0{}^2 = b_0{}^2 - 2\,b_0 a_0$ und da außerdem $b_1 a_1 = r_1{}^2$ und $b_0{}^2 = b_1{}^2 + M_0 M_1{}^2 \pm 2\,M_0 M_1 \,.\, M_1 G$ gesetzt werden kann, so findet sich: $\pm FM_0 \,.\, M_0 M_1 - r_1{}^2 = \pm M_0 M_1 \,.\, M_1 G - b_0 a_0$, $\qquad b_0 a_0 = \pm M_0 M_1 (M_1 G - FM_0) + r_1{}^2$, $b_0 a_0 = \pm M_0 M_1 [\pm(QG - c_1) \mp (FQ - c_0)] + r_1{}^2$, $b_0 a_0 = \pm M_0 M_1 (QG - FQ) - (c_1 + c_0)(c_1 - c) + r_1{}^2$, oder da $c_1{}^2 - c_0{}^2 = r_1{}^2 - r_0{}^2$ ist, $b_0 a_0 = \pm M_0 M_1 (QG - FQ) + r_0{}^2$.

Legt man ferner von M_1 und M_2 Tangenten T_1 und T_2 an den Halbkreis, welchen man über $X\Pi$ schlagen kann, so ist $T_1{}^2 = a_1 b_1$ und $T_2{}^2 = a_2 b_2$. Da aber auch $r_1{}^2 = a_1 b_1$ und $r_2{}^2 = a_2 b_2$ ist, so folgt $T_1 = r_1$ und $T_2 = r_2$. Errichtet man auf diesen Tangenten in ihren Berührungspunkten Lothe, welche also gleichzeitig Tangenten an die Kreise M_0 und M_2 werden müssen, so gehen dieselben durch den Mittelpunkt des Halbkreises, und da sie als Radien dieses Halbkreises gleich lang sind, so muß unbedingt das Centrum P des Halbkreises auf der gemeinschaftlichen Secante liegen. Es ist deshalb $XP = P\Pi$ und $FQ = QG$ woraus sich endlich findet $b_0 a_0 = r_0^2$ d. h. das Loth XE_0 ist die Polare des Punktes Π für den Kreis M_0, und da M_2 ein beliebiger Kreis aus dem System der in denselben beiden Punkten sich schneidenden Kreise ist, so hat man den Satz: „Die Polaren eines Punktes in einem System von in zwei Punkten sich schneidenden Kreisen gehen sämmtlich durch einen Punkt, welcher von der gemeinschaftlichen Secante ebensoweit entfernt ist, als jener Punkt selbst.“ Liegt also Π auf der gemeinschaftlichen Secante, so muß auch der Schnittpunkt X auf derselben liegen, wie schon vorher erkannt wurde. Da ferner X auf jeder der zu Π gehörigen Polaren aller Kreise des Systems liegt und die Polare der geometrische Ort aller der zu einem gegebenen Punkte harmonischen Pole ist, so folgt, daß X harmonischer Pol zu Π in jedem Kreise des Systems sein muß. Liegen also X und Π so, daß $X\Pi$ sämmtliche Kreise des Systems schneidet, so geschieht dies in Punkten, welche zu X und Π harmonisch sind. Greift man drei Kreise des Systems heraus, so werden dieselben von $X\Pi$ in Punkten der Involution geschnitten, und da Π ein ganz beliebiger Punkt ist und deshalb $X\Pi$ alle möglichen Lagen haben kann, so hat man den Satz: „Drei Kreise, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden, werden von jeder beliebigen Geraden in Punktpaaren der Involution geschnitten.“

IV.

Von den Aehnlichkeitspunkten und Aehnlichkeitsstrahlen.

Zieht man in zwei gegebenen Kreisen M_0 und M_1 irgend zwei Parallele und gleichgerichtete Radien, so schneidet die Verbindungslinie der Endpunkte derselben die Verlängerung der Centrale stets in einem und demselben Punkte A, denn es ist für z. B. $r_0 > r_1$ $M_0A : M_1A = r_0 : r_1$, $M_0A + M_1A : M_0A - M_1A = r_0 + r_1 : r_0 - r_1$, $M_0M_1 + 2M_1A = \frac{(r_0 + r_1)M_0M_1}{r_0 - r_1}$, $M_1A = \frac{r_1 M_0 M_1}{r_0 - r_1}$, woraus da M_1A stets denselben Werth beibehält, wie man auch die parallelen Radien ziehen mag, die Richtigkeit der Behauptung folgt. Durch den Punkt A gehen auch die beiden äußeren Tangenten, da die nach den Berührungspunkten gezogenen Radien gleich gerichtet und parallel sind; er wird der äußere Aehnlichkeitspunkt beider Kreise genannt. Zieht man aber zwei parallele und entgegengesetzte Radien, so schneidet die Verbindungslinie der Endpunkte derselben die Centrale stets in einem und demselben Punkte I zwischen beiden Kreisen, denn es ist: $M_0I : M_1I = r_0 : r_1$, $M_0I + M_1I : M_0I - M_1I = r_0 + r_1 : r_0 - r_1$, $M_0I - (M_0M_1 - M_0I) = \frac{(r_0 - r_1)M_0M_1}{r_0 + r_1}$ und $M_0I = \frac{r_0 M_0 M_1}{r_0 + r_1}$, woraus die Richtigkeit der Behauptung ersichtlich ist. Der Punkt I, welcher gleichzeitig der Schnittpunkt der inneren Tangenten ist, heißt der innere Aehnlichkeitspunkt.

Aus $M_0A : M_1A = r_0 : r_1$ und $M_0I : M_1I = r_0 : r_1$ folgt $M_0A : M_1A = M_0I : M_1I$ und deshalb hat man den Satz: „Die Centra und die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise sind vier harmonische Punkte.“

Schlägt man über AI als Durchmesser einen Kreis, so bilden die von jedem Punkte dieser Kreisperipherie an jeden der beiden gegebenen Kreise gelegten Tangentenpaare gleiche Winkel. Sind nämlich XB_0 XC_0 und XB_1 XC_1 die Tangenten von dem beliebigen Punkte X jener Kreisperipherie, so sind XA XM_1 XI XM_0 vier harmonische Strahlen und wegen $AXI = 90^\circ$ folgt Winkel $M_1XI = M_0XI$; nach dem bekannten Satze von der Winkelhalbirungslinie eines Dreiecks ist demnach $XM_0 : XM_1 = M_0I : M_1I = r_0 : r_1 = M_0B_0 : M_1B_1$ und deshalb ist Dreieck $M_0XB_0 \backsim M_1XB_1$ d. h. Winkel

$M_0 X B_0 = M_1 X B_1$ und $C_0 X B_0 = C_1 X B_1$. Man hat also den Satz: „Der geometrische Ort aller der Punkte, von welchen aus zwei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden, ist ein Kreis, der den Abstand beider Aehnlichkeitspunkte zum Durchmesser hat.“

Zieht man durch einen der Aehnlichkeitspunkte eine beliebige Gerade, Aehnlichkeitsstrahl genannt, und von den Centren zwei beliebige parallele Gerade bis zum Schnitt mit ihr, so verhalten sich diese Parallelen immer wie $M_0 A : M_1 A$ oder $M_0 I : M_1 I$ d. h. wie $r_0 : r_1$ und sind umgekehrt von den Centren zweier Kreise zwei parallele gleich oder entgegengesetzte Gerade gezogen, welche sich wie die Radien verhalten, so geht die Verbindungslinie der Endpunkte der Parallelen im ersten Falle durch den äußeren, im zweiten durch den inneren Aehnlichkeitspunkt.

Sind drei Kreise $M_0 M_1 M_2$ gegeben und man construirt zu M_0 und M_1, M_0 und M_2 die gemeinschaftlichen Secanten, welche sich in O schneiden, so wird, wenn die Tangenten von O an die drei Kreise mit $t_0 t_1 t_2$ bezeichnet werden, $t_0 = t_1$ und $t_0 = t_2$ d. h. auch $t_1 = t_2$ sein, woraus man erkennt, daß O auch ein Punkt der gemeinschaftlichen Secante von M_1 und M_2 ist, und man hat daher den Satz: „Die gemeinschaftlichen Secanten dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.“ Man hätte diesen Satz auch in folgender Weise begründen können. Die durch die gemeinschaftlichen Secanten erzeugten Centralabschnitte seien auf $M_0 M_1$ c_0 und c_1, auf $M_0 M_2$ b_0 und b_2, auf $M_1 M_2$ a_1 und a_2; dann gelten die Gleichungen $c_1{}^2 - c_0{}^2 = r_1{}^2 - r_0{}^2$, $a_2{}^2 - a_1{}^2 = r_2{}^2 - r_1{}^2$, $b_0{}^2 - b_2{}^2 = r_0{}^2 - r_2{}^2$, woraus durch Addition folgt $c_1{}^2 - c_0{}^2 + a_2{}^2 - a_1{}^2 + b_0{}^2 - b_2{}^2 = 0$ oder $c_1{}^2 + a_2{}^2 + b_0{}^2 = c_0{}^2 + a_1{}^2 + b_2{}^2$, welche Gleichung die Richtigkeit des Satzes ausspricht. Schlägt man um den Schnittpunkt der drei gemeinschaftlichen Secanten mit der für alle drei Kreise gleich langen Tangente einen Kreis, so wird durch denselben jeder Kreis rechtwinklig geschnitten; man nennt ihn deshalb den Orthogonalkreis und seinen Mittelpunkt den Orthogonalpunkt. Die drei gegebenen Kreise sind aber nicht die einzigen, welche von dem Orthogonalkreise rechtwinklig geschnitten werden, denn es sind die Tangenten von O aus auch gleich an alle Kreise der Systeme von Kreisen, welche sich in denselben beiden reellen oder imaginären Punkten wie M_0 und M_1, M_0 und M_2, M_1 und M_2 schneiden. Der Orthogonalkreis geht natürlich auch durch die sechs Grenzpunkte der drei Kreissysteme. Liegen die Centra der gegebenen Kreise in einer Geraden, so werden die gemeinschaftlichen Secanten parallel, der Orthogonalpunkt liegt somit in unendlicher Entfernung und die Peripherie des Orthogonalkreises fällt mit der Richtung der Centrale zusammen.

Construirt man ferner zu den drei Kreisen die äußeren Aehnlichkeitspunkte A_0 zu M_1 und M_2, A_1 zu M_0 und M_2, A_2 zu M_0 und M_1, zieht durch A_0 und A_1 eine Gerade und legt von den Centren bis zum Schnitt mit derselben die drei Parallelen $M_0 B_0$, $M_1 B_1$, $M_2 B_2$, so ist $M_1 B_1 : M_2 B_2 = r_1 : r_2$, $M_0 B_0 : M_2 B_2 = r_0 : r_2$ und deshalb auch $M_0 B_0 : M_1 B_1 = r_0 : r_1$ d. h. $A_0 A_1$ geht durch A_2. Man hat also den Satz: „Die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte liegen auf einer Geraden.“

Construirt man ferner die inneren Aehnlichkeitspunkte I_0 zu M_1 und M_2, I_1 zu M_0 und M_2, I_2 zu M_0 und M_1 und zieht durch irgend einen äußeren Aehnlichkeitspunkt, vielleicht durch A_0, und einen der beiden nicht zugehörigen innern I_1 eine Gerade, so gilt, wenn man von den Centren bis zu derselben die Parallelen $M_0 C_0$, $M_1 C_1$, $M_2 C_2$ zieht, von denen die erste entgegengesetzt den beiden anderen ist: $M_1 C_1 : M_2 C_2 = r_1 : r_2$, $M_0 C_0 : M_2 C_2 = r_0 : r_2$ und deshalb muß auch $M_0 C_0 : M_1 C_1 = r_0 : r_1$ sein, woraus man schließt, daß die Gerade $A_0 I_1$ durch I_2 gehen muß. Ebenso liegen $I_0 A_1 I_2$ und $I_0 I_1 A_2$ auf einer Geraden. Man nennt diese drei Geraden, sowie auch $A_0 A_1 A_2$ die Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise und zwar die letzte die äußere Aehnlichkeitsaxe.

Es soll jetzt der Abstand des Orthogonalpunktes von der äußeren Aehnlichkeitsaxe ermittelt werden. Man fälle zu diesem Zwecke auf dieselbe von den Punkten $M_0 M_1 M_2 O$ die Lothe $m_0 m_1 m_2 \mu$, welche vom Punkt A_2 aus gerechnet auf derselben die Abschnitte $n_0 n_1 n_2 \nu$ bilden mögen. Dann gelten die Gleichungen $M_0 O^2 = \rho^2 + r_0{}^2 = (\mu - m_0)^2 + (\nu - n_0)^2$, $M_1 O^2 = \rho^2 + r_1{}^2 = (\mu - m_1)^2 + (\nu - n_1)^2$,

$M_2 O^2 = \rho^2 + r_2^2 = (\mu - m_2)^2 + (\nu - n_2)^2$, wenn ρ den Radius des Orthogonalkreises bedeutet. Durch Subtraction findet sich: $r_0^2 - r_1^2 = -2\mu(m_0 - m_1) + m_0^2 - m_1^2 - 2\nu(n_0 - n_1) + n_0^2 - n_1^2$, $r_0^2 - r_2^2 = -2\mu(m_0 - m_2) + m_0^2 - m_2^2 - 2\nu(n_0 - n_2) + n_0^2 - n_2^2$ oder wenn man der Kürze wegen setzt $m_0^2 - m_1^2 + n_0^2 - n_1^2 - r_0^2 + r_1^2 = 2a^2$ und $m_0^2 - m_2^2 + n_0^2 - n_2^2 - r_0^2 + r_2^2 = 2b^2$, $a^2 = \mu(m_0 - m_1) + \nu(n_0 - n_1)$ und $b^2 = \mu(m_0 - m_2) + \nu(n_0 - n_2)$. Aus der ersten dieser beiden letzten Gleichungen findet sich $\mu = \frac{a^2 - \nu(n_0 - n_1)}{m_0 - m_1}$ und durch Substitution dieses Werthes in die zweite $b^2 = \frac{m_0 - m_2}{m_0 - m_1}[a^2 - \nu(n_0 - n_1)] + \nu(n_0 - n_2)$.

Hieraus berechnet sich $\nu = \frac{b^2(m_0 - m_1) - a^2(m_0 - m_2)}{(n_0 - n_2)(m_0 - m_1) - (n_0 - n_1)(m_0 - m_2)}$ und durch Vertauschung von jedem m und n in das mit dem gleichen Index behaftete n und m, wobei a^2 und b^2 sich nicht ändern, $\mu = \frac{b^2(n_0 - n_1) - a^2(n_0 - n_2)}{(m_0 - m_2)(n_0 - n_1) - (m_0 - m_1)(n_0 - n_2)}$. Sei ferner M der Mittelpunkt des Kreises, welcher die drei gegebenen von außen berührt, m das Loth von M auf die äußere Aehnlichkeitsaxe und n der Abstand des Fußpunktes dieses Lothes von A_2, so müssen die Gleichungen bestehen: $(r + r_0)^2 = (m - m_0)^2 + (n - n_0)^2$, $(r + r_1)^2 = (m - m_1)^2 + (n - n_1)^2$, $(r + r_2)^2 = (m - m_2)^2 + (n - n_2)^2$, in denen r m n als unbekannte Größen anzusehen sind. Durch Subtraction und mit Anwendung der oben gebrauchten Abkürzung findet sich $a^2 - r(r_0 - r_1) = m(m_0 - m_1) + n(n_0 - n_1)$, $b^2 - r(r_0 - r_2) = m(m_0 - m_2) + n(n_0 - n_2)$. Aus der ersten dieser Gleichungen berechnet sich $m = \frac{a^2 - r(r_0 - r_1) - n(n_0 - n_1)}{m_0 - m_1}$ und durch Substitution dieses Werthes geht die zweite über in:

$$b^2 - r(r_0 - r_2) = \frac{m_0 - m_2}{m_0 - m_1}[a^2 - r(r_0 - r_1) - n(n_0 - n_1)] + n(n_0 - n_2).$$

Hieraus erhält man $n = \frac{b^2(m_0 - m_1) - r(r_0 - r_2)(m_0 - m_1) - a^2(m_0 - m_2) + r(r_0 - r_1)(m_0 - m_2)}{(n_0 - n_2)(m_0 - m_1) - (n_0 - n_1)(m_0 - m_2)}$ und durch Vertauschung von jedem mit einem Index behafteten n und m

$$m = \frac{b^2(n_0 - n_1) - r(r_0 - r_2)(n_0 - n_1) - a^2(n_0 - n_2) + r(r_0 - r_1)(n_0 - n_2)}{(m_0 - m_2)(n_0 - n_1) - (m_0 - m_1)(n_0 - n_2)}.$$

Bedenkt man nun, daß die Lothe auf die äußere Aehnlichkeitsaxe parallel sind, so verhält sich: $m_0 : m_1 = r_0 : r_1$, $m_0 : m_2 = r_0 : r_2$, $m_0 - m_1 : r_0 - r_1 = m_0 : r_0$, $m_0 - m_2 : r_0 - r_2 = m_0 : r_0$ und deshalb ist $m_0 - m_1 = \frac{m_0}{r_0}(r_0 - r_1)$ und $m_0 - m_2 = \frac{m_0}{r_0}(r_0 - r_2)$, wodurch sich der für n gefundene Werth reducirt auf $n = \frac{b^2(m_0 - m_1) - a^2(m_0 - m_2)}{(n_0 - n_2)(m_0 - m_1) - (n_0 - n_1)(m_0 - m_2)}$. Man erkennt hieraus, daß der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf dem Lothe liegen muß, welches vom Orthogonalpunkt auf die äußere Aehnlichkeitsaxe gefällt ist.

Hätte man sich die Aufgabe gestellt, den gesuchten Kreis durch die drei gegebenen von Innen berühren zu lassen, so würde man von den Gleichungen
$(r - r_0)^2 = (m - m_0)^2 + (n - n_0)^2$, $(r - r_1)^2 = (m - m_1)^2 + (n - n_1)^2$, $(r - r_2)^2 = (m - m_2)^2 + (n - n_2)^2$ ausgehen müssen. Diese unterscheiden sich aber von den vorigen nur durch die entgegengesetzten Vorzeichen von r_0 r_1 r_2 und es wird deshalb das diesem neuen Kreise zugehörige n sich aus dem obigen ohne Rechnung durch Vertauschung der positiven Vorzeichen von r_0 r_1 r_2 mit den negativen ergeben. Da n nun aber kein r in der ersten, sondern nur in der zweiten Potenz enthält, so ändert es sich gar nicht, und man erkennt daraus, daß der Mittelpunkt dieses Kreises ebenfalls auf dem vom Orthogonalpunkt auf die äußere Aehnlich-

keitsaxe gefällten Lothe liegen muß. Außer diesen beiden Berührungen sind noch andere möglich; es können nämlich je zwei von den drei Kreisen von dem gesuchten eingeschlossen, der dritte ausgeschlossen, oder je zwei ausgeschlossen und der dritte umschlossen werden, was sechs neue Fälle giebt. Durch eine ganz analoge Rechnung findet man aber leicht, wenn man die drei anderen Aehnlichkeitsaxen an die Stelle der äußeren treten läßt, daß die Centren je zweier der in Frage stehenden Kreise auf einer und derselben Geraden liegen, welche senkrecht vom Orthogonalpunkt auf die betreffende Aehnlichkeitsaxe gefällt ist. — Um den Mittelpunkt M und den Radius r zu bestimmen könnte man den gefundenen Werth für n in zwei der Gleichungen, von denen man ausging, einsetzen und m und r berechnen. Man wählt aber besser einen anderen von Steiner angegebenen Weg. Denkt man sich nämlich von O durch den noch unbekannten Berührungspunkt B der Kreise M_0 und M bis zum Schnittpunkt S mit m_0 eine Gerade gezogen, so ist das Dreieck OMB $\sim M_0 B S$ und deshalb gilt, wenn $M_0 S = z$ gesetzt wird, die Proportion $\mu - m : r = z : r_0$, woraus sich $r = \frac{(\mu - m)\, r_0}{z}$ findet. Anderseits hat man aus $a^2 - r(r_0 - r_1) = m(m_0 - m_1) + n(n_0 - n_1)$

$$r = \frac{a^2 - m(m_0 - m_1) - n(n_0 - n_1)}{r_0 - r_1}$$ und durch Gleichsetzung beider Werthe von r

$$(\mu - m)\, r_0\, (r_0 - r_1) = z\,[a^2 - n(n_0 - n_1)] - z\, m\, (m_0 - m_1).$$

Substituirt man in diese Gleichung den für n gefundenen Werth und bringt a^2 gleichzeitig auf denselben Nenner, so ergiebt sich

$$(\mu - m)\, r_0\, (r_0 - r_1) = z\left[\frac{a^2(n_0 - n_2)(m_0 - m_1) - b^2(m_0 - m_1)(n_0 - n_1)}{(n_0 - n_2)(m_0 - m_1) - (n_0 - n_1)(m_0 - m_2)}\right] - z\, m\, (m_0 - m_1)$$

$$(\mu - m)\, r_0\, (r_0 - r_1) = (m_0 - m_1)\, z\left[\frac{b^2(n_0 - n_1) - a^2(n_0 - n_2)}{(n_0 - n_1)(m_0 - m_2) - (n_0 - n_2)(m_0 - m_1)}\right] - z\, m\, (m_0 - m_1).$$

Bedenkt man nun, daß der in der eckigen Klammer stehende Werth gleich μ und daß $r_0 - r_1 = \frac{r_0}{m_0}(m_0 - m_1)$ ist, so hat man $(\mu - m)\, r_0^2 = m_0\, \mu\, z - m_0\, m\, z$ und $(\mu - m)(r_0^2 - m_0 z) = 0$, woraus man, da $\mu - m$ im Allgemeinen nicht gleich Null sein wird, schließen muß $r_0^2 = m_0 z$, d. h. S ist der Pol der äußeren Aehnlichkeitsaxe in dem Kreise M_0. Man hat also um die vorliegende Aufgabe zu lösen vom Orthogonalpunkt auf die äußere Aehnlichkeitsaxe ein Loth zu fällen und den Orthogonalpunkt mit dem zu jener Axe in einem der Kreise, hier in M_0, gehörigen Pol zu verbinden. Diese Verbindungslinie schneidet die Peripherie des Kreises M_0 im Berührungspunkte B des gesuchten Kreises. Zieht man M_0 B und verlängert es bis zum Schnittpunkt M mit dem auf die Axe gefällten Lothe, so ist M das Centrum und M B der Radius des gesuchten Kreises.

Leicht läßt sich nun schließlich auch noch zeigen, daß auf jenem vom Orthogonalpunkt auf die äußere Aehnlichkeitsaxe gefällten Lothe überhaupt die Mittelpunkte aller der Kreise liegen, welche die drei gegebenen unter gleichen Winkeln schneiden. Ist nämlich M jetzt das Centrum des Kreises, welcher die gegebenen unter dem beliebigen Winkel α schneidet, so gelten die Gleichungen $r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos\alpha = (m - m_0)^2 + (n - n_0)^2$, $r^2 + r_1^2 + 2 r r_1 \cos\alpha = (m - m_1)^2 + (n - n_1)^2$, $r^2 + r_2^2 + 2 r r_2 \cos\alpha = (m - m_2)^2 + (n - n_2)^2$, aus welchen sich ganz ebenso wie vorher findet

$$n = \frac{b^2(m_0 - m_1) - r\cos\alpha\,(r_0 - r_2)(m_0 - m_1) - a^2(m_0 - m_2) + r\cos\alpha\,(r_0 - r_1)(m_0 - m_2)}{(n_0 - n_2)(m_0 - m_1) - (n_0 - n_1)(m_0 - m_2)}$$

und da auch hier aus demselben Grunde wie oben die mit r behafteten Glieder fortfallen

$$n = \frac{b^2(m_0 - m_1) - a^2(m_0 - m_2)}{(n_0 - n_2)(m_0 - m_1) - (n_0 - n_1)(m_0 - m_2)},$$

wodurch die Richtigkeit der Behauptung documentirt ist. Ferner würde man finden

$$m = \frac{b^2 (n_0 - n_1) - r \cos\alpha\, (r_0 - r_2)(n_0 - n_1) - a^2 (n_0 - n_2) + r \cos\alpha\, (r_0 - r_1)(n_0 - n_2)}{(m_0 - m_2)(n_0 - n_1) - (m_0 - m_1)(n_0 - n_2)},$$

was sich umformen läßt in $m = \mu - r\cos\alpha \dfrac{(r_0 - r_2)(n_0 - n_1) - (r_0 - r_1)(n_0 - n_2)}{(m_0 - m_2)(n_0 - n_1) - (m_0 - m_1)(n_0 - n_2)}$, oder da $r_0 - r_2 = \dfrac{r_0}{m_0}(m_0 - m_2)$ und $r_0 - r_1 = \dfrac{r_0}{m_0}(m_0 - m_1)$ ist, $m = \mu - \dfrac{1}{m_0} r\, r_0 \cos\alpha$. Somit geht die zur Bestimmung von r dienende Gleichung über in $r_0^2 + r^2 + 2 r r_0 \cos\alpha = (\mu - \dfrac{1}{m_0} r r_0 \cos\alpha - m_0)^2 + (n - n_0)^2$ und daraus ergiebt sich $r^2 \left(1 - \dfrac{1}{m_0^2} r_0^2 \cos\alpha^2\right) + 2r \dfrac{\mu r_0 \cos\alpha}{m_0} = (\mu - m_0)^2 + (n - n_0)^2 - r_0^2$

$$r = -\frac{m_0 r_0 \mu \cos\alpha}{m_0^2 - r_0^2 \cos\alpha^2} \pm \frac{m_0}{m_0^2 - r_0^2 \cos\alpha^2} \sqrt{[(\mu - m_0)^2 + (n - n_0)^2 - r_0^2](m_0^2 - r_0^2 \cos\alpha^2) + \mu^2 r_0^2 \cos\alpha^2}.$$

m_0 ist stets größer als r_0, weil die äußere Aehnlichkeitsaxe keinen der drei Kreise schneidet, $m_0^2 - r_0^2 \cos\alpha^2$ hat also einen positiven Werth, und da r für jeden Winkel α eine positive Größe sein muß, so hat man nur das positive Vorzeichen vor der Wurzel zu berücksichtigen. Nimmt man $\alpha = 0^\circ$, so wird

$$r = -\frac{m_0 r_0 \mu}{m_0^2 - r_0^2} + \frac{m_0}{m_0^2 - r_0^2} \sqrt{[(\mu - m_0)^2 + (n - n_0)^2 - r_0^2](m_0^2 - r_0^2) + \mu^2 r_0^2}$$

der Radius des die drei gegebenen Kreise von außen berührenden Kreises. Nimmt man aber $\alpha = 180^\circ$, so wird $r = \dfrac{m_0 r_0 \mu}{m_0^2 - r_0^2} + \dfrac{m_0}{m_0^2 - r_0^2} \sqrt{[(\mu - m_0)^2 + (n - n_0)^2 - r_0^2](m_0^2 - r_0^2) + \mu^2 r_0^2}$ der Radius des die drei gegebenen Kreise von innen berührenden Kreises. Setzt man $\alpha = 90^\circ$, so erhält man den Radius des Orthogonalkreises $\rho = \sqrt{(\mu - m_0)^2 + (n - n_0)^2 - r_0^2}$, den man in dieser Form auch direct aus der ersten der drei zur Bestimmung von μ dienenden Gleichungen entnehmen kann. Durch Substitution dieses Werthes ρ vereinfacht sich der eben gefundene Werth von r noch in

$$r = \frac{m_0}{m_0^2 - r_0^2 \cos\alpha^2} \left[\sqrt{\rho^2 (m_0^2 - r_0^2 \cos\alpha^2) + \mu^2 r_0^2 \cos\alpha^2} - r_0 \mu \cos\alpha\right]$$

und die Radien der beiden Berührungskreise gehen über in

$$r = \frac{m_0}{m_0^2 - r_0^2} \left[\sqrt{\rho^2 (m_0^2 - r_0^2) + \mu^2 r_0^2} \mp r_0 \mu\right].$$

Schulnachrichten
von Ostern 1877 bis Ostern 1878.

1. Chronik der Anstalt.

Der Unterricht wurde im verflossenen Schuljahr nach dem früher hier mitgetheilten Lehrplan ohne besondere Unterbrechung zu Ende geführt. Nur der technische Lehrer Schulz, welcher im Sommer durch eine Badereise nach Ems im Anfang seine erschütterte Gesundheit gekräftigt zu haben schien, wurde den größten Theil des Winterhalbjahrs durch andauernde Krankheit an der Ertheilung seiner Lehrstunden verhindert. Unter den Schülern erkrankten viele, namentlich in den beiden Vorschulklassen, in Folge der hier aufgetretenen Masernepidemie, die meisten während der Weihnachtsferien, an den Masern, deren Verlauf jedoch meist gutartig und nicht von langer Dauer war. Dagegen haben wir an der Halsbräune, ebenso in den Weihnachtsferien, einen lieben, fleißigen Schüler der ersten Vorschul-Klasse, Paul Schroeder, verloren, der durch sein stilles, frommes Wesen uns bisher nur Freude gemacht hatte. Er ist im Glauben an seinen Erlöser sanft und seelig entschlafen. Im Uebrigen war der Gesundheitszustand meist befriedigend. — Das Lehrercollegium bestand wie im letzten Schuljahr aus: 1. Director Dr. Zinzow, 2. Prorector Dr. Kalmus, 3. Oberlehrer Dr. Blasendorff, 4. Oberlehrer Dr. Vetter, ferner aus den ordentlichen Lehrern 5. Dr. Janke, 6. Kobert, 7. Balcke, 8. Dr. Buchholz, 9. Dr. Schmidt, 10. Dr. Graßmann, 11. dem technischen Lehrer Schulz, 12. u. 13. den Lehrern der Vorschule Meyer und Schwantz. Letzterer hat nunmehr, nachdem er auf der Centralturnanstalt zu Berlin ausgebildet, die Berechtigung zur Ertheilung des Turnunterrichts an den höheren Anstalten erhalten, die selbständige Leitung des Turnunterrichts der ganzen Anstalt im Sommer und der beiden oberen Klassen auch im Winter mit Eifer und Geschick übernommen.

Unter Beobachtung der gesetzlichen Ferien fand die Eröffnung des Sommer- und Winterhalbjahrs in gewohnter Weise statt und war beidemal am nächstfolgenden Sonntag mit der gemeinschaftlichen Abendmahlsfeier der Lehrer mit ihren Familien und der confirmirten Schüler verbunden.

Das Ottofest wurde am 15. Juni, wie früher durch einen Redeactus und am Nachmittag des folgenden Tages durch eine gemeinschaftliche Waldfahrt gefeiert; die Schulfeier des Sedanfestes wurde in diesem Jahr auf Sonnabend den 1. September verlegt.

Die mündliche Abiturientenprüfung fand diesmal nur im Sommerhalbjahr und zwar unter dem Vorsitz des Königlichen Commissarius, Herrn Geh. Regierungsraths Dr. Wehrmann, am 26. September 1877 statt. Alle 6 Abiturienten erhielten das Zeugniß der Reife.

1. Thomas Immanuel Heyn, geb. zu Cantrek bei Naugard den 1. Mai 1859, 18 Jahr alt, ev. Confession, Sohn des Herrn Pastors Heyn zu Brietzig, seit Ostern 1873 von O. Tertia an $4\frac{1}{2}$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima; er will Theologie und Philologie studiren;
2. Wilhelm Bernh. Immanuel Jordan, geb. zu Ueckermünde am 26. März 1860, 17 Jahr alt, ev. Confession, Sohn des Herrn Pastors Jordan zu Mellentin, seit Michaelis 1869 von Sexta an 8 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima; er will sich dem Militairdienst widmen;

3. Karl Wellmer, geb. zu Brietzig am 21. Nov. 1856, 20 Jahr alt, ev. Confession, Sohn des Lehrers Herrn Wellmer zu Brietzig, seit Ostern 1873 von O. Tertia an 4½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima; er will Theologie studiren;
4. Georg Paul Boguslav Heyn, geb. zu Cantrek den 12. Januar 1858, 19 Jahr alt, ev. Confession, Sohn des Herrn Pastors Heyn zu Brietzig, seit Ostern 1875 von O. Tertia an 4½ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima; er will Theologie studiren;
5. Robert Karl Alexander Seeliger, geb. zu Altstadt Pyritz am 21. Nov. 1859, 17 Jahr alt, ev. Confession, Sohn des Herrn Pastors Seeliger zu Stresow bei Schönfließ, seit Michaelis 1871 von U. Tertia an 6 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima; er will Theologie studiren;
6. Ernst Julius Freuer, geb. zu Rackitt am 17. Januar 1877, 20 Jahr alt, ev. Confession, Sohn des Ackerwirths Herrn Freuer zu Rackitt, seit Michaelis 1866 von Sexta an 11 Jahr auf dem Gymnasium, 2½ Jahr in Prima; er will Medicin studiren;

Dazu wurde als Extraneer geprüft Emil Hermann August Struck, geb. zu Gollnow den 23. Februar 1857, ev. Confession, Sohn des zu Gollnow verstorbenen Ackerbürgers Struck, der nach seinem Abgang von der Friedrich-Wilhelmsschule zu Stettin, 2 Jahr Geschichte auf der Universität in Berlin studirt hatte. Er erhielt ebenso das Zeugniß der Reife.

Die Prüfungsaufgaben waren 1. im Deutschen: Darf der Erfolg der Richter unserer Thaten sein? 2. Im Lateinischen: Quemadmodum Demosthenes de patria bene meritus sit. 3. In der Mathematik: Ein Viereck zu construiren aus seinen beiden Diagonalen, zwei gegenüberliegenden Winkeln und dem Verhältniß zweier Seiten, welche einen der beiden gegebenen Winkel umschließen. 2. Kehre ich die Ziffern einer gewissen zweiziffrigen Zahl um und multiplicire die neue Zahl mit der ersten, so erhalte ich 1729; dividire ich aber mit der neuen Zahl in die erste, so erhalte ich zum Quotienten 4 und zum Rest 15. Wie heißt die Zahl? 3. Die Höhe eines Thurmes beträgt 50 M. und seine Entfernung von dem Ufer eines Stromes 120 M.; wie groß ist die Breite desselben, wenn er von der Spitze des Thurmes betrachtet unter einem Winkel von 17°23′50″ erscheint? 4. Eine Kugel, deren Radius gleich 12 M. ist, wird von einer Ebene so geschnitten, daß die beiden dadurch entstehenden Kugelkappen sich wie 1 : 3 verhalten. Wie groß sind die dazu gehörigen Kugelsegmente? — Außerdem wurden von einem Abiturienten noch zwei schwierigere Extraaufgaben behandelt.

Die Literatura discipulorum gymnasii wurde in diesem Jahre vermehrt durch mehrere Zusendungen der Herrn Prof. Dr. Hirschfeld und Dr. C. Wendeler. Wir heben unter ersteren besonders einen Vortrag über die Ausgrabungen zu Olympia, unter letzteren: Studien über Hans Rosenplüt 1873; Zu Fischarts Bildergedichten; Zur Kenntniß von J. J. Rabe's 1877; Liebesabenteuer eines Zürichers vom Glückhaften Schiff auf dem Freischießen zu Straßburg im J. 1876, Novelle v. Usteri. Halle 1877; Die Flöhhaz von J. Fischart. Halle 1877 hervor.

2. Lehrmittel der Schule.

1. Die Programmensammlung unter Leitung des Prof. Dr. Kalmus wurde auch in diesem Jahre wie früher dadurch nutzbar gemacht, daß die neueingegangenen Programme nicht nur nach den Städten geordnet und nach den Abhandlungsgegenständen katalogisirt wurden, sondern auch wöchentlich bei den Lehrern der Anstalt in Lesemappen circulirten.

2. Die Lehrerbibliothek unter Aufsicht des Unterz. wurde theils durch Geschenke, theils durch neue Erwerbungen ergänzt und erweitert. Unter den Geschenken heben wir hervor den Abschluß des vorzüglichen Werks über das evang. Kirchenlied von Ph. Wackernagel und die Fortsetzung von Birlingers Alemannia vom Kgl. Ministerium; die Fortsetzung des pommerschen Landbuchs von Berghaus vom Kgl.

Marienstift in Stettin, und die Fortsetzung der Baltischen Studien vom Herrn Justizrath Scheel, früher zu Pyritz, jetzt zu Görlitz; dazu die Zeitschrift für Gymnasialwesen pr. 1877 von der Weidmann'schen Buchhandlung. Von den neu angeschafften Büchern erwähnen wir außer den Fortsetzungen von Dächsel, J. Grimm, Lübben, Ranke, Leutemann, Bursian, Stiehl: Riehm Biblisches Handwörterbuch; Kiepert Lehrbuch der alten Geographie; La Roche Homers Ilias; W. Grimm Deutsche Heldensage; J. Grimm Abhandlungen zur Mythologie und Sittenlehre; Schroeder St. Brandan; Scheffel Waltharius; v. d. Hagen Gesammtabenteuer; Holtzmann Der große Wolfdieterich; Rückert König Rother; Bartsch Herzog Ernst; Diemer Kaiserchronik; Wißmann Lamprechts Alexander; Liebrecht Gervasius v. Tilbury; Closs Jordanes de gestis Gothorum; Reinthal Kalawipoeg; v. Raumer Geschichte der Deutschen Philologie; v. Hahn Sagwissenschaftliche Studien; Nyerup og Rahbeck Udvalgte Danske Viser fra Middelalderen; Percy Reliques of ancient poetry; ten Brinck Geschichte der englischen Literatur; Prümers Urkundenbuch von Pommern; Senft Geognosie; Hohn Kulturpflanzen und Hausthiere.

3. Die Schülerbibliothek unter der Leitung des Prof. Dr. Kalmus und in den einzelnen Klassen unter Aufsicht der betr. Ordinarien wurde durch folgende Erwerbungen erweitert: Wollheim Nat. Literatur der Skandinavier; Müller u. Mothes Archäologisches Wörterbuch; Herzog Kirchengeschichte; Hammerich Thorwaldsen; Arnold Am heiligen Nil; v. Wedell Pompeji; Masius Geographisches Lesebuch; Hertzberg Geschichte der Perserkriege; Keck, Kallsen Bilder aus der Weltgeschichte; Lüttringhaus Borussia; Dielitz Helden der Neuzeit; Foß Geschichtsbücher; Erzählungen und Sagen von Bechstein, Osterwald, Günther, Keck, Frommel, Glaubrecht, v. Stöber, Sonnenberg u. a. Lausch Heitere Feiertage; Pilz Die kleinen Thierfreunde; Wagner Im Grünen; Otto Deutsche Dichter und Denker u. a.

4. Die Sammlung für den physikalischen Unterricht wurde vermehrt durch einen Nörremberg'schen Polarisationsapparat, ein Nicol'sches Prisma, ein Galiläisches und ein terrestrisches Fernrohr.

5. Die naturgeschichtliche Sammlung wurde vermehrt durch einzelne Geschenke: vom Herrn Buchbindermstr. Koht ein Schnabel von einem Albatroß; vom Herrn Uhrmacher Hartwig ein Ziegenmelker; vom U. Tertianer Schreiber eine Kreuzotter in Spiritus.

6. Das Museum des Gymnasiums erhielt vom Herrn Missionar Heese zu Riversdale in Süd-Afrika ein schönes Exemplar von einem Straußenei und die Haut von einer Klapperschlange.

Wir sagen noch einmal für alle uns freundlich zugewandten Geschenke unsern herzlichsten Dank.

3. Verordnungen der Hohen Königlichen Behörden.

Vom 7. März 1877. In Zukunft soll im amtlichen Verkehr der Doctortitel nur demjenigen beigelegt werden, welchem er von einer preußischen Universität oder von der Academie zu Münster ertheilt ist, oder wenn der von einer nicht preußischen Universität Promovirte dem Kgl. Prov. Schulcollegium nachweist, daß er auf Grund mündlichen Examens und gedruckter Dissertation die Würde erlangt habe.

Vom 15. März c. Zufolge Vereinbarung der sämmtlichen hohen Bundesregierungen ist fortan für alle Behörden des Reichs und der Bundesstaaten ein einheitliches Papierformat von 33 Centimeter Höhe und 21 Centimeter Breite in Gebrauch zu nehmen.

Vom 16. April c. Ausnahmsweise wird in diesem Jahre auch noch Mittwoch nach Pfingsten der Unterricht ausfallen.

Vom 29. Mai c. Das Reichskanzler-Amt hat allgemeine Anordnungen empfohlen, durch welche die Strenge in der Zuerkennung der Berechtigung für den einjährig freiwilligen Militairdienst möglichst gesichert werde. Bei der Beschlußfassung in der Conferenz sind darum ganz genau dieselben Grundsätze zu befolgen, wie bei der Versetzung in eine höhere Klasse oder Klassenabtheilung und hat die Berechtigung nur auf

Grund des vollständigen Inhalts der Schulzeugnisse des letzten Jahrs zu erfolgen. Es wird zu dem Zweck erfordert, daß der betr. Schüler mindestens ein Jahr der Secunda angehört, an allen Unterrichtsgegenständen theilgenommen, sich das Pensum der Unter-Secunda gut angeeignet und sich gut betragen habe.

Vom 30. Juni c. Es werden nähere Vorschriften über die zweckmäßige Ausstattung der Turnplätze resp. Turnhallen mit Turngeräthen gegeben.

Vom 4. Juli c. Es wird eine Verfügung des Herrn Finanz-Ministers über das vorgeschriebene Maß der Anforderungen an die wissenschaftliche Vorbildung der Candidaten für das Supernumerariat bei der Verwaltung der indirekten Steuern mitgetheilt.

Vom 16. Juli c. Uebersendung von je 10 lat. u. deutschen Exemplaren des Lectionskatalogs der Universität Greifswald.

Vom 21. Juli c. Ein Verzeichniß der von dem deutschen Gewerbemuseum vervielfältigten Nachbildungen antiker Säulenkapitäle nach den besten Hülfsmitteln mit Angabe des Kostenpreises.

Vom 17. Oct. c. Von jedem Programm sind (außer den in diesem Jahre an die Teubner'sche Buchhandlung in Leipzig einzusendenden 685 Exemplaren) 6 Exemplare an die Geheime Registratur des Kgl. Ministeriums der geistlichen pp. Angel. zu Berlin u. 3 an das Kgl. Prov. Schulc. zu Stettin einzureichen.

Vom 12. Nov. c. Durch Erlaß des Herrn Finanzministers ist vorgeschrieben, daß hinfort die Quartale des Rechnungsjahrs nach den Monaten zu bezeichnen sind, also $\frac{\text{April}}{\text{Juni}}$, $\frac{\text{Juli}}{\text{September}}$, $\frac{\text{October}}{\text{Dezember}}$ und $\frac{\text{Januar}}{\text{März}}$ z. B. 1877.

Vom 31. Dec. c. Es wird angeordnet, daß diesmal zu Ostern 1878 die Ferien Mittwoch den 10. April Mittags beginnen und Mittwoch den 24. April endigen.

Vom 19. Jan. 1878. Es wird zur Maßgabe für die Benutzung beim Unterricht ein Verzeichniß der festgestellten abgekürzten Bezeichnungen der Maaße und Gewichte mit näherer Angabe ihrer Verwendung mitgetheilt.

4. Frequenz der Schule während des Schuljahres 1877|8.

Im Sommerhalbjahr.						Im Winterhalbjahr.					
Klasse.	Zahl	Einheim.	Auswärt.	Evang.	Jüd.	Klasse.	Zahl	Einheim.	Auswärt.	Evang.	Jüd.
Prima	21	10	11	21	—	Prima	17	11	6	17	—
Secunda	28	14	14	26	2	Secunda	31	16	15	29	2
O. Tertia	21	10	11	20	1	O. Tertia	22	8	14	20	2
U. Tertia	35	18	17	31	4	U. Tertia	32	17	15	29	3
Quarta	42	27	15	37	5	Quarta	46	30	16	41	5
Quinta	42	29	13	38	4	Quinta	43	30	13	38	5
Sexta	49	33	16	44	5	Sexta	44	31	13	42	2
Gymnas.	238	141	97	217	21	Gymnas.	235	153	92	216	19
Septima	45	37	8	40	5	Septima	50	40	10	44	6
Octava	37	35	2	31	6	Octava	29	26	3	24	5
Vorschule	82	72	10	71	11	Vorschule	79	66	13	68	11
Summa	320	213	107	288	32	Summa	314	219	105	284	30

5. Uebersicht über die Vertheilung des Unterrichts unter die Lehrer im Schuljahr 1877|8.

Lehrer	Ordin.	I.	II.	O. III.	U. III.	IV.	V.	VI.	Vorschule	Stundenzahl
1. Dr. Zinzow, Director.	I.	2 Relig. 9 Latein 1 Ph. Prop.	2 Relig.							14
2. Dr. Kalmus, Oberl. u Pror.	II.	6 Griech.	8 Latein 6 Griech.							20
3. Dr. Blasendorff, Oberl. u. Conr.	O. III.	3 Gesch. 2 Dtsch.		2 Relig. 8 Latein 6 Griech.						21
4. Dr. Vetter, Oberl. u. Subr.	U. III.	2 Franz.	2 Franz.		2 Relig. 10 Latein	6 Griech.				22
5. Dr. Janke, ord. Lehrer.	IV.	2 Hebr.	2 Hebr.	2 Dtsch. 3 Gesch.		2 Relig. 10 Latein				21
6. Kobert, ord. Lehrer.		3 Math. 2 Phys.	4 Math. 1 Phys.	4 Math. 1 Naturg.			3 Rechn. 2 Naturg.			20
7. Balcke, ord. Lehrer.			2 Dtsch. 3 Gesch. 2 Vergil.		2 Dtsch. 2 Franz. 3 Gesch.	2 Franz. 3 Gesch.				19
8. Dr. Buchholz, ord. Lehrer.	V.				6 Griech.		3 Relig. 2 Dtsch. 10 Lat.			21
9. Dr. Schmidt, ord. Lehrer.	VI.			2 Franz. 2 Ovid.				3 Relig. 2 Dtsch. 10 Latein		22
10. Dr. Graßmann, ord. Lehrer.					4 Math. 1 Naturg.	2 Dtsch. 3 Rechn.	2 Geogr. 2 Inspect.	2 Geogr. 4 Rechn. 2 Naturg.		22
11. Schulz, techn. Lehrer.		3 Sing. 2 Zeichn.			1 Sing.	2 Zeichn. 2 Sing.	3 Schreib. 2 Zeichn.	3 Schreib. 2 Zeichn. 2 Sing.		22
12. Meyer, Lehrer d. Vorsch.	Vorsch. I.								4 Relig. 6 Dtsch. 6 Rechn. 2 Geogr. 6 Schr. 2 Sing.	26
13. Schwantz, Lehrer d. Vorsch.	Vorsch. II.	4 Turnen im S. 2 Turnen.							4 Relig. 6 Dtsch. 6 Rechn. 6 Schr. 2 Sing. 2 Arb.	26

Am 1. Januar 1878 befanden sich die Schüler in den einzelnen Klassen in folgender Ordnung:

Prima.

Nr.	Name.	Eltern.	Wohnort.	Alt. am 1. Jan. 1878.
1	E. Huffnagel	Schuhm.-Mstr.	Pyritz	20
2	K. Hörning	Lehrer	Horst	19
3	O. Baumann	Schuhm.-Mstr.	Pyritz	18
4	O. Hintze	Kreissecrt.	"	16
5	T. Strohfeldt	Tischlermstr.	Arnswalde	20
6	E. Hintze	Kreissecret.	Pyritz	17
7	O. Angermann	Schlossermstr.	"	17
8	J. Helterhoff	Gutsbesitzer	b. Pyritz	19
9	K. Unruh	Schuhm.-Mstr.	Pyritz	19
10	R. Erdmann	Lehrer	"	18
11	O. Buls	Gutsbesitzer	b. Pyritz	18
12	A. Bläsing	Kaufm.	Pyritz	19
13	G. Klamroth	Pastor	Selchow	16
14	O. Helterhoff	Ackerbürger	Adamsdorf	19
15	P. Hartwig	Rentier	Pyritz	18
16	W. Gurr	Ackerbürger	Altstadt P.	19
17	E. Eggert	Schneidermstr.	Pyritz	17

Secunda.

Nr.	Name.	Eltern.	Wohnort.	Alt. am 1. Jan. 1878.
1	G. Lüdecke	Pastor	Altstadt P.	19
2	L. Wöhlke	Gastwirth	Schützenaue	18
3	P. Haase	Beigeordneter	Pyritz	16
4	W. Ritz	Oberförster	Regenthin	19
5	F. Lerche	Kreisger.-Rth.	Pyritz	17
6	E. Fechtner	Schuhm.-Mstr.	"	20
7	B. Joseph	Kaufm.	"	15
8	E. Freuer	Bauer	Rakitt	19
9	G. Moritz	Bäckermstr.	Pyritz	17
10	B. Jordan	Pastor	Mellenthin	14
11	K. Priebe	Actuar	Pyritz	16
12	A. Maywald	Rittergutsbes.	Neu-Grape	18
13	G. Heyn	Pastor	Brietzig	17
14	J. Bergemann	Tischlermstr.†	Pyritz	17
15	W. Dupont	Schneidermstr.†	"	16
16	K. Rönckendorff	Rittmeister	Süßwinkel Kr. Oels	16
17	O. Heydrich	Secretair	Lippehne	17
18	A. Kurtz	Rentier	Pyritz	15
19	A. Lerche	Kreisger.-Rth.	"	15
20	P. Freuer	Bauer	Rakitt	17
21	H. Tummeley	Rittergutsbes.	Sabow	16
22	F. Gädke	Zimmermstr.	Pyritz	14
23	J. Puchstein	Sanitätsrath †	Cammin	15
24	W. Möller	Arzt u. Dr.	Pyritz	17
25	M. Sperling	Kaufm. †	"	17
26	M. Stange	Rentier	"	17
27	M. Schmidt	Superintendent	Lippehne	16
28	O. Kanzow	Kaufm.	Stettin	16
29	F. Berg	Oberprediger	Pyritz	15
30	E. Wapenhensch	Tischlermstr.	"	14
31	O. Gerlach	Pastor	Gr.-Latzkow	16

O. Tertia.

Nr.	Name.	Eltern.	Wohnort.	Alt. am 1. Jan. 1878.
1	H. Kohlschmidt	Schneidermstr.	Pyritz	15
2	G. Miethe	Bürgermeister	"	14
3	P. Schmidt	Superintendent	Lippehne	12
4	R. Teske	Schneidermstr.	Pyritz	15
5	E. Tummeley	Fabrikbesitzer	b. Pyritz	15
6	A. Klamroth	Pastor	Selchow	14
7	J. Kranz	Ackerhofbes.	Repenow	14
8	R. Esser	Rentier	Pyritz	16
9	O. Thomae	Lehrer	Schwedt	14
10	H. Priebe	Actuar	Pyritz	14
11	O. Berg	Pastor	Finkenwalde	14
12	R. Sack	Bauer	Neumark	14
13	F. Zech	Steuereinnehm.	Lippehne	16
14	H. Karow	Bauer	Horst	17
15	E. Gené	Oberförster	Mühlenbeck	14
16	K. Schewe	Bauer	Kl.-Rischow	14
17	G. Hirschfeldt	Kaufm.	Lippehne	15
18	G. Freuer	Bauer	Rakitt	16
19	B. Hirschfeldt	Kaufm.	Lippehne	14
20	H. Vetter	Oberlehrer	Pyritz	12
21	O. Mory	Obersteiger	Zielenzig	14
22	E. Gädke	Kupfersch.-Mstr	Pyritz	15

U. Tertia.

Nr.	Name.	Eltern.	Wohnort.	Alt. am 1. Jan. 1878.
1	J. Agahd	Lehrer	Wildenbruch	15
2	R. Wendlandt	Schulze	Neu-Grape	16
3	L. Hahn	Kaufm.	Pyritz	14
4	A. Schulz	Stadtsecret.	"	15
5	R. Gerlach	Pastor	Gr.-Latzkow	14
6	K. Moldt	Gürtlermstr.	Pyritz	15
7	A. Huhnholz	Schmiedemstr.	"	15
8	O. Wendlandt	Bauer	Beelitz	14
9	R. Schwarz	Bauer	Isinger	15
10	F. Gurr	Bauer	Altstadt P.	14
11	E. Bleibtreu	Pastor	Liebenow b. Bahn	15
12	E. Leopold	Telegraph.	Berlin	13
13	E. Götzke	Bauer	Altstadt P.	15
14	A. Haase	Beigeordn.	Pyritz	13
15	F. Hartkopf	Schlossermstr.	"	14
16	P. Jungklaus	Brauereibes.	"	16

Nr.	Name.	Eltern.	Wohnort.	Alt am 1. Jan. 1878.
17	M. Roloff	Rechnungsrath	Pyritz	14
18	P. Wapenhensch	Tischlermstr.	„	13
19	M. Brasch	Rentier	Bahn	14
20	M. Victor	Kaufm.	Pyritz	15
21	O. Ritz	Oberförster	Regenthin	13
22	M. Lüdecke	Pastor	Altstadt P.	12
23	R. Baumann	Schuhm.-Mstr.	Pyritz	13
24	W. Sprenger	Bauer	Rakitt	14
25	H. de la Barre	Goldschm.-Mstr	Arnswalde	14
26	M. Schreiber	Kaufm. †	Danzig	14
27	P. Moritz	Ackerbürger	Pyritz	14
28	W. Ritzerow	Gutsbes.	b. Pinnow	14
29	M. Müller	Zimmermstr.	Pyritz	14
30	K. Börner	Administrator	Brallentin	15
31	F. Blessin	Rendant	Pyritz	14
32	W. Zühl	Bäckermstr.	„	13
32	P. Dupont	Schneiderm. †	Pyritz	12
33	F. Schulz	Schneidermstr.	„	12
34	F. Sack	Bauer	Beelitz	13
35	G. Boetel	Kr.-Bauinsp.	Pyritz	12
36	L. Dahms	Gutsbes.	Bernstein	15
37	F. Reitz	Rentier	Pyritz	11
38	M. Gené	Oberförster	Mühlenbeck	12
39	R. Gädke	Kupferschm.-M.	Pyritz	14
40	W. Bethke	Rentier	„	11
41	M. Hartkopf	Schlossermstr.	„	12
42	P. Wendeler	Freischulze	Babbin	13
43	M. Leonhardt	Sem.-Lehrer	Pyritz	12
44	J. Meyer	Vorschul-Lehrer	„	12
45	O. Plantiko	Pastor	Repplin	12
46	J. Schneider	Rentier	Pyritz	16

Quarta.

Nr.	Name.	Eltern.	Wohnort.	Alt am 1. Jan. 1878.
1	W. Rosenau	Postexped.	Neumark	13
2	K. Petermann	Lehrer	Collin	14
3	W. Berkner	Bäckermstr.	Pyritz	14
4	W. Wendlandt	Ackerbürger	„	11
5	M. Pohle	Kaufm.	„	13
6	M. Victor	Kaufmann	„	14
7	P. Sturm	Webermstr.	„	13
8	J. Swarsensky	Handelsm.	Isinger	13
9	A. Krohn	Kaufm.	Pyritz	13
10	E. Hencke	Rechnungsf.	Linde	12
11	E. Moldt	Gürtlermstr.	Pyritz	13
12	M. Schreiber	Kaufm.	„	12
13	F. Fromholz	Kossäth †	Beyersdorf	13
14	G. Moßkopf	Tischlermstr.	Lippehne	15
15	A. Daute	Magist.-Beamt.	Berlin	15
16	O. v. Cosel	Postsecret.	Pyritz	13
17	R. Berg	Pastor	Finkenwalde	12
18	W. Wendlandt	Bauer	Beelitz	13
19	K. Scheel	Drechslermstr.	Pyritz	13
20	K. Hintze	Kreissecret.	„	11
21	P. Gädke	Zimmermstr.	„	12
22	E. Wagner	Photogragh	„	13
23	J. Völker	Rector †	„	12
24	K. Jungklaus	Brauereibes.	„	14
25	O. Kröning	Restaurat.	„	15
26	K. Ruffmann	Schulze	Rakitt	14
27	M. Wundermann	Actuar	Pyritz	13
28	O. Linde	Bauer	Altstadt P.	14
29	J. Karger	Kaufm.	Pyritz	13
30	E. Lerche	Kreisger.-Rth.	„	12
31	A. Angermann	Schlossermstr.	„	10

Quinta.

Nr.	Name.	Eltern.	Wohnort.	Alt am 1. Jan. 1878.
1	M. Richter	Barbier	Pyritz	11
2	A. Isaacksohn	Handelsm.	Brietzig	11
3	A. Lebbin	Kaufm.	Pyritz	13
4	K. Schröder	Sergeant †	„	12
5	W. Krösel	Schuhm.-Mstr.	„	12
6	E. Jagow	Schuhm.-Mstr.	„	12
7	F. Gurr	Bauer	Altstadt P.	13
8	A. Henckel	Bauer	Pyritz	12
9	G. Pinn	Bauer	Craatzen	13
10	E. Rose	Bäckermstr †	Pyritz	11
11	B. Milster	Inspector	Kinderfreude	13
12	E. Gehrke	Schulze	Prillwitz	13
13	E. Voß	Goldschm.-M.	Pyritz	14
14	R. Zühlsdorf	Rentier	„	13
15	R. Breuer	Fabrikbesitzer	„	13
16	O. Bauer	Uhrmacher	„	11
17	B. Tummeley	Rentier	„	11
18	M. Friedrich	Brauereibes.	„	11
19	G. Backe	Buchhändler	„	11
20	L. Schildener	Ackerbürger	„	11
21	J. Victor	Kaufm.	„	12
22	G. Möller	Arzt u. Dr.	„	11
23	P. Meyn	Getreideh.	„	12
24	K. Schröder	Kaufm.	Soldin	11
25	M. Blessin	Rendant	Pyritz	11
26	M. Leonhardt	Sem.-Lehrer	„	10
27	L. Loewe	Kaufm.	„	10
28	H. Volkmann	Zimmermstr.	„	12
29	M. v. Pirch	Rentier	„	11
30	J. Krohn	Kaufm.	„	11
31	E. Gurr	Bauer	Altstadt P.	11
32	H. Stange	Lehrer	Repenow	11

Nr.	Name.	Eltern.	Wohnort.	Alt. am 1. Jan. 1878.
33	Th. Plantiko	Pastor	Repplin	10
34	R. Meyer	Kürschnermstr.	Berlin	12
35	W. Kluge	Kaufm.	Pyritz	11
36	P. Janson	Kaufm.	"	11
37	M. Freuer	Bauer	Rakitt	12
38	R. Lehmann	Tischlermstr.	Pyritz	11
39	K. Hartwig	Uhrmacher	"	11
40	O. Freuer	Bauer	Rakitt	10
41	G. Ganzert	Kürschnermstr.	Pyritz	12
42	R. Henniges	Oekonom	Berlin	12
	Sexta.			
1	A. Höft	Bauer	Gr.-Rischow.	10
2	P. Gurr	Bauer	Altstadt P.	9
3	O. Heese	Missionar	Riversdalei S.-Afrika	11
4	F. Jungklaus	Kaufm.	Pyritz	10
5	W. Janke	Gymn.-Lehrer	"	10
6	W. Messerschmidt	Färbermstr.	Lippehne	10
7	K. Rose	Conditor	Pyritz	10
8	F. Götzke	Bauer	Altstadt P.	11
9	E. Schröder	Schornsteinfm.	Pyritz	11
10	M. Wagner	Photograph	"	10
11	W. Westphal	Bauer †	A.-Sarnow	13
12	R. Wendlandt	Bauer	Beelitz	11
13	O. Sack	Bauer	Neumark	10
14	F. Sprenger	Rentier	Pyritz	12
15	R. Siegwardt	Kaufm.	Pyritz	9
16	A. Gädke	Zimmermstr.	"	10
17	P. Bendig	Maler	Pyritz	13
18	K. Volkmann	Zimmermstr.	"	10
19	F. Langenfeldt	Bauer	Mellentin	13
20	E. Uecker	Schlächtermstr.	Pyritz	10
21	F. Andrasch	Müller	"	11
22	E. Plath	Ackerbürger	"	10
23	G. Moldt	Gürtlermstr.	"	10
24	O. Gessert	Glasermstr.	"	10
25	M. Lebbin	Kaufm.	"	10
26	M. Rothholz	Handelsm.	"	10
27	A. v Pirch	Rentier	"	12
28	K. Zorn	Schneidermstr.	"	11
29	A. Berkner	Bäckermstr.	"	10
30	R. Prehn	Gasthofbes.	"	10
31	O. Schmidt	Mag.-Beamt.	Stettin	12
32	E. Gentzke	Torfmoorbes.	Stepenitz	9
33	J. Schmidt	Sem.-Lehrer	Pyritz	9
34	R. Blenn	Bauer	Briesen	10
35	G. Tummeley	Fabrikbes.	Pyritz	9
36	K. Bleibtreu	Pastor	Liebenow b. Bahn	11
37	G. Meyer	Vorsch.-Lehrer	Pyritz	9
38	E. Abraham	Telegraph.	"	9
39	E. Bethke	Kaufm.	"	10
40	A. Kluge	Kaufm.	"	9
41	E. Schanz	Sattlermstr.	"	10
42	J. Förster	Klempnermstr.	"	11
43	G. Wundermann	Actuar	"	9
44	K. Lipke	Schuhm.-Mstr.	"	9

Feier des einundachtzigjährigen Geburtstages Sr. Majestät unseres allergnädigsten Kaisers und Königs.

Vierstimmiger Chor: Lobe den Herren. V. 1.

Gebet des Directors und Chorgesang V. 2

Prima: Gedicht: Unsre Zuflucht. Geibel.

Vortrag: Der Kaiser Wilhelm in seinem Privatleben.

Vierstimmiger Chor: Ich habe einen muthigen Reiter gekannt. v. B. Klein.

Secunda: Vortrag: Der Kaiser Wilhelm als Kriegsheld.

Gedicht: Kaiser von Deutschland. v. Elze.

Gesang: Deutschland, Deutschland über Alles. Volkslied.

Festrede des Herrn Gymn.-Lehrers Balcke.

Motette: Salvum fac regem v. Erk.

Oeffentliche Prüfung mit Redeactus.

Dienstag, den 9. April, Vorm. von 8 Uhr an.

Vierstimmiger Chorgesang: O Haupt voll Blut und Wunden. V. 1 u. 4.
Quarta: Nepos. Dr. Janke. Rechnen Dr. Graßmann.
Gedicht: Aus dem Walde v. Geibel. Erz.: Die deutsche Eiche v. Masius.
Nepos: Cimon.
Vierst. Chor: Erhebt euch von der Erde. Volkslied.
U. Tertia: Caesar. Oberl. Dr. Vetter. Geographie. Balcke.
Gedicht: Die Porta Westphalika v. Berg. Erz.: Wunderbare Rettung des Arion v Novalis.
Phaedrus: fab I, 2.
O. Tertia: Xenophon. Oberl. Dr. Blasendorff. Französisch. Dr. Schmidt.
Gedicht: Wittekind v. Platen. Erz.: Roland nach Turpin.
Franz.: Souvenirs d' enfance par Béranger.
Vierst. Chorges.: Der Mai ist gekommen. Volksweise.
Secunda: Cicero. Pror. Dr. Kalmus. Geschichte. Balcke.
Ged.: Walter v. d. Vogelweide: Ihr sult sprechen. Erz.: Walter u. Hildegunde n. Eckehard.
Hom. Od. XVI, 167–221. — Verg. Aen. 264—295.
Vierst. Chorges.: Integer vitae v. Flemming.
Prima: Horaz. Der Director. Mathem. Kobert.
Lat. Rede: Qualis pudor sit primus virtutis honos.
Deutsche Rede: Liegt dir heute klar und offen u. s. w. v. Göthe.
Sophocl. Antig. v. 332—383.
Vierst. Chorges.: Harre meine Seele.

Nachmittags von 2 Uhr an.

Zweistimm. Choral: Schönster Herr Jesu.
Quinta: Latein. Dr. Buchholz. Naturgeschichte. Kobert.
Gedicht: Die Brandenburger im Türkenkrieg. Erz.: Der russische Schiffer v. Eylert.
Zweist. Gesang: Wer recht in Freuden wandern will. Volkslied.
Sexta: Latein. Dr. Schmidt. Geographie Dr. Graßmann.
Gedicht: Das Brot des h. Jodocus v. Kosegarten. Das Hirtenbüblein v. Grimm.
Zweist. Gesang: Habt ihr ihn noch nicht vernommen?
Vorschule 1. Klasse: Deutsch, Geographie u. Rechnen. Meyer.
Gedicht: Kaiser Wilhelm. Raabe. Erz.: Walter von Thurn und der Löwe.
Zweist. Gesang: Zwischen Berg und tiefem, tiefem Thal.
2. Klasse: Religion, Deutsch u. Rechnen. Schwantz.
Gedicht: Die Jahreszeiten v. Hey. Der Mann im Monde. Bechstein.
Gebet und Gesang: Unsern Ausgang segne, Gott.

Dr. Adolf Zinzow.