Die

sectio rationis, sectio spatii und sectio determinata des Apollonius

nebst

einigen verwandten geometrischen Aufgaben.

Von dem

Subrektor Friedrich v. Lühmann.

Beigabe zum Oster-Programm des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums zu Königsberg Nm.

Königsberg i. d. N. 1882.

Druck von J. G. Striese.

1882. Progr. Nr. 73.

§ 1.

Die Konstruktion geometrischer Aufgaben wird durch Anwendung gewisser geometrischer Operationen bewerkstelligt. Diese Operationen bilden für das Lösen von Aufgaben die Grundlage und werden darum passend fundamentale Operationen genannt. Hierzu gehört vor allem das Halbieren von Winkeln und von Strecken, das Fällen und das Errichten von Senkrechten, das Zeichnen eines Winkels, der einem gegebenen gleich ist, und das Ziehen von Parallelen. Wie diese Operationen auszuführen sind, wird einfürallemal gezeigt; dann aber unterbleibt die jedesmalige specielle Angabe der Ausführung, und man begnügt sich damit zu sagen, dass diese Operation gemacht werden soll. Wollte man in übertriebener Peinlichkeit, so oft Strecken oder Winkel zu halbieren, Senkrechte zu konstruieren sind u. s. w., sämtliche dazu erforderlichen Kreisbogen und Verbindungslinien zeichnen, so würde schon bei einfachen Aufgaben eine Überladung der Figur entstehen, welche die Geometrie selbst ihren wärmsten Anhängern verleiden müsste. Welche Aufgaben nun als fundamentale Operationen anzusehen sind, lässt sich natürlich nicht ohne weiteres allgemein feststellen, die Ansichten der Mathematiker dürften in diesem Punkte wohl erheblich differieren. Die Konstruktion der Tangente an einen Kreis, sowie die Konstruktion der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise möchte ich um so lieber unter die fundamentalen Operationen aufgenommen sehen, als die wirkliche Zeichnung hier von der geometrischen Konstruktion verschieden ist und einfach durch Anlegen des Lineals bewerkstelligt werden kann.

Nun giebt es aber noch ziemlich viele Aufgaben, die häufig bei der Lösung von anderen geometrischen Aufgaben zu Hülfe genommen werden, wie die Konstruktion der vierten Proportionale zu drei Strecken, der mittleren Proportionale zu zwei Strecken, die Teilung einer Geraden nach einem gegebenen Verhältnis, die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes u. a. Sind nun alle diese geometrischen Operationen, sobald sie bei einer Aufgabe in Anwendung kommen, als fundamentale zu behandeln? Je nachdem. Wird z. B. bei der Lösung einer Aufgabe die Konstruktion der vierten Proportionale benutzt und wird diese letztere Konstruktion an die Hauptfigur nur äusserlich als eine Art Seitenflügel angebaut, bestehend aus einem Winkel, dessen Schenkel von zwei Parallelen geschnitten werden, so wird dadurch die Figur verunstaltet und die Lösung erscheint ungeschickt. Da ist es schon besser diese Operation als eine fundamentale zu betrachten und von ihrer speciellen Ausführung abzustehen. Es lassen sich aber jene Aufgaben, namentlich die der vierten Proportionale, auf eine höchst mannigfaltige Weise lösen. Hierbei ist es nicht gleichgültig, welche von jenen vielen möglichen Konstruktionen man bei der einen oder der anderen Aufgabe verwendet. Man wird vielmehr diejenige Konstruktion auswählen, die sich am meisten an die Hauptfigur anlehnt, so dass sie auch sonst noch für die weitere Konstruktion der in Rede stehenden Aufgabe verwendet wird. Kann man es so einrichten, so hat man zunächst den Vorteil mit möglichst einfachen geometrischen Operationen ausgekommen zu sein, und ausserdem erscheint dann meistenteils die Konstruktion recht gefällig. Ich werde im Verlaufe der Abhandlung Gelegenheit nehmen zu zeigen, wie die Hilfskonstruktion sich so in ungezwungener Weise mit der Hauptkonstruktion verschmelzen lässt.

Mag man nun die Anzahl der fundamentalen Operationen unbeschränkt ausdehnen oder nach Möglichkeit beschränken wollen, immerhin wird man, je weiter sich das Gebiet der Geometrie ausdehnt, um so häufiger auf Aufgaben stossen, auf welche eine grössere Gruppe anderer Aufgaben sich zurückführen lässt. Gerade diese Aufgaben machen eine besonders eingehende Behandlung erforderlich, und in diesem Sinne hat Apollonius seine Schriften περὶ λόγου ἀποτομῆς (sectio rationis), περὶ χωρίου ἀποτομῆς (sectio spatii) und περὶ διωρισμένης τομῆς (sectio determinata) verfasst, von denen jede eine Aufgabe ausführlich behandelt hat. Alle drei Schriften sind verloren gegangen, doch findet sich eine Inhaltsangabe derselben im siebenten Buche der Kollektaneen des Pappus. Erst in späterer Zeit fand Bernard, Professor der Astronomie und der orientalischen Sprachen in Oxford, eine arabische Übersetzung der sectio rationis auf. Er begann dieselbe ins Lateinische zu übersetzen, doch kam er hierbei nicht viel über die ersten Seiten hinaus. Fortgesetzt und vollendet wurde die Übersetzung von Halley, der sie 1706 im Druck erscheinen liess. Die beiden andern genannten Schriften sind nicht wieder aufgefunden worden. Die sectio spatii, welche mit der sectio rationis wenigstens äusserlich verwandt ist, ist von Halley wiederhergestellt, d. h. Halley hat dieselbe nach der Inhaltsangabe des Pappus in derselben Weise behandelt und gelöst, wie Apollonius die sectio rationis. In gleicher Weise ist die sectio determinata von Simson wiederhergestellt worden.

In der vorliegenden Programmabhandlung sollen die hervorragendsten Lösungen jener Aufgaben, so weit sie mir bekannt geworden sind, zusammengestellt werden. An dieselben schliesse ich jedesmal meine eigene Lösung der Aufgabe an und lasse dann noch einige Aufgaben folgen, welche mit diesen Aufgaben des Apollonius in gewisser Weise verwandt sind.

§ 2.

Sectio rationis.

Gegeben sind zwei gerade Linien L und L′ und auf ihnen bezüglich die Punkte A und B, ausserdem beliebig ein Punkt P. Man soll durch P eine Gerade ziehen, welche L und L′ bezüglich in X und Y so schneidet, dass AX und BY sich wie zwei gegebene Strecken m und n verhalten (also $AX : BY = m : n$).

1) **Lösung von Apollonius.** (Fig. 1 und 2). PA schneide L′ in H, eine Parallele, durch H zu L gezogen, treffe PX in W und eine Parallele, durch P zu L gezogen, treffe L′ in F. Man kennt nun das Verhältnis $HW : AX$ (nämlich $= PH : PA$) und das Verhältnis $AX : BY$. Dadurch wird auch das Verhältnis $HW : BY$ bekannt, mithin auch, da PF bekannt ist, die vierte Proportionale zu HW, BY und PF. Sie werde vorläufig mit a bezeichnet, sodass also $HW : BY = PF : a$ oder $HW : PF = BY : a$. Nun verhält sich aber auch $HW : PF = HY : FY$, folglich verhält sich auch $HY : FY = BY : a$. Da nun für Fig. 1 $HY - FY$ und für Fig. 2 $HY + FY$ bekannt ist, so liegt jetzt der Gedanke nahe es so einzurichten, dass im ersteren Falle $BY - a$, im letzteren $BY + a$ in der Figur vorhanden ist. Man wird also a von B aus auf L′ abtragen, und zwar in Fig. 1 in der Richtung BY,

in Fig. 2 in der zu BY entgegengesetzten Richtung. In beiden Fällen heisse der Endpunkt C, so dass also $BC = a$. Aus der letzten Proportion, die wir nun in der Form $HY : FY = BY : BC$ schreiben können, folgt nun für Fig. 1 $HY - FY : FY = BY - BC : BC$, also $HF : FY = CY : BC$, und für Fig. 2 folgt aus derselben Proportion $HY + FY : FY = BY + BC : BC$, also ebenfalls $HF : FY = CY : BC$. Man hat daher in beiden Fällen $FY . CY = HF . BC$, so dass das Produkt der Strecken FY und CY bekannt ist. Nun ist ferner in Fig. 1 $FY - CY = FC$ und in Fig. 2 ist $FY + CY = FC$, daher sind in beiden Fällen FY und CY auf bekannte Weise zu konstruieren.

Soweit die Analysis des Apollonius. Dieselbe scheint für eine Konstruktion nicht günstig zu sein, und es ist auch die Konstruktion des Apollonius in dem Sinne der heutigen konstruierenden Geometrie nicht elegant. Indessen selbst aus dieser unvorteilhaften Analysis lässt sich eine gute Konstruktion ableiten, wenn man nur für die erforderlichen Hülfskonstruktionen, nämlich die Konstruktion der vierten Proportionale und die Konstruktion zweier Strecken aus ihrem Produkt und ihrer Differenz oder aus ihrem Produkt und ihrer Summe die hier gerade geeigneten Lösungen anwendet. Zunächst kommt es darauf an, das bekannt gewordene Verhältnis $HW : BY$ durch das Verhältnis zweier bekannter Strecken auszudrücken. Trägt man $AA' = m$ auf L ab, und wird HW von PA′ in I getroffen, so hat man $HW : AX = HI : m$ und $AX : BY = m : n$. Durch Multiplikation beider Proportionen entsteht $HW : BY = HI : n$. Es ist nun a oder BC aus der Proportion $HI : n = PF : BC$ oder $HI : FP = n : BC$ zu konstruieren. Wollte man hier die vierte Proportionale auf die gewohnte Weise konstruieren, indem man die Schenkel eines Winkels von zwei Parallelen geschnitten werden lässt, so würde ein solches Anhängsel der Hauptfigur schlecht kleiden. Zieht man aber noch $IK \parallel PB$, $IM \parallel PC$ bis zum Durchschnitt mit L′, so ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke KHI und BFP, sowie HMI und FCP, endlich KMI und BCP die Proportion $HI : FP = KM : BC$. Ein Vergleich dieser Proportion mit der vorigen ergiebt $KM = n$. Die Punkte K und M sind nun leicht konstruiert, ebenso C durch blosses Ziehen einer Parallele. Schliesslich ist es auch keineswegs gleichgültig, welche von den vielen möglichen Konstruktionen angewendet wird, um die Strecken FY und CY, d. h. den Punkt Y zu gewinnen. Es besteht hierfür die Gleichung $FY . CY = HF . BC$ oder die Proportion $HF : FY = CY : BC$. Errichtet man $FH' \perp L'$ und $CB' \perp L'$ so dass $FH' = FH$ und $CB' = CB$, so ist $\triangle H'FY \sim YCB'$, daher $\angle H'YB'$ ein rechter. Y liegt also auf einem Kreise über dem Durchmesser H′B′.

Konstruktion. PA treffe L′ in H. Man trage $AA' = m$ auf L ab, PA′ treffe die durch H zu L gezogene Parallele in I. Dann ziehe man $PF \parallel L$ und $IK \parallel PB$, beide bis zum Durchschnitt mit L′, trage $KM = n$ auf L′ ab, und ziehe $PC \parallel IM$ bis zum Durchschnitt mit L′. Ferner errichte man auf L′ die Senkrechten $FH' = FH$ und $CB' = CB$ und beschreibe über H′B′ als Durchmesser einen Kreis, der L′ in Y und Y′ treffe. YP und Y′P treffen L bezüglich in X und X′. Nun genügen XY und X′Y′ beide der Aufgabe.

2) **Lösung von Halley.** (Fig. 3 und 4). Man ziehe $PE \parallel L'$, $PF \parallel L$ bis zum Durchschnitt mit L und L′. L′ werde von PA in H getroffen. Auf L′ sei der Punkt D so angenommen, dass das System $AEX \sim BDY$ also $AE : EX = BD : DY$ ist. Dann verhält sich $AE : BD = AX : BY$, also auch $AE : BD = m : n$, wodurch D auf L′ bestimmt ist.

Es verhält sich dann $AE : EX = BD : DY$. Schneidet ferner die durch A zu L′ parallel gezogene Gerade PF in K und XY in M, so hat man $AE : EX = MP : PX = MK : KA = YF : FH$. Aus dieser Proportion und der vorigen ergiebt sich $BD : DY = YF : FH$. Daher $DY . YF = FH . BD$ und ausserdem entweder (Fig. 3) $FY - DY$ oder (Fig 4) $FY + DY$ bekannt.

Zur Konstruktion von D würde ich folgenden Weg vorschlagen. Trägt man $AA' = m$ auf L und $BB' = n$ auf L′ ab, so verhält sich $AE : AA' = BD : BB'$. Wird ferner AM von A′P in N getroffen, so hat man $AE : AA' = NP : NA' = NK : NA$. Daher verhält sich $BD : BB' = NK : NA$, und hieraus folgt, dass AB′, NB, KD sich in einem Punkte O schneiden. O wird als Durchschnitt von AB′ und NB, D als Durchschnitt von L′ mit KO bestimmt. Y wird wie in der vorigen Lösung konstruiert. Wie leicht zu zeigen, ist D identisch mit dem C in Fig. 1 und 2; beide Lösungen sind also sehr nahe verwandt.

3) **Die projektivische Lösung.** Mit Hülfe der projektivischen Geometrie wird, wie Hankel in seinem bekannten Werke gezeigt hat, sehr leicht eine Konstruktion der sectio rationis gefunden. Es sei (Fig. 3 und 4) $PF \parallel L$, $PE \parallel L'$. Eine Gerade, welche sich um den Punkt P dreht, beschreibt auf L und L′ projektivische Punktreiheu, und zwar entsprechen den auf L liegenden Punkten A, E, X, ∞ auf L′ bezüglich H, ∞, Y, F. Ist ferner X′ ein beweglicher Punkt auf L und bestimmt man auf L′ stets einen Punkt Y′ entsprechend so, dass $AX' : BY' = m : n$, so beschreiben X′ und Y′ bezüglich auf L und L′ ähnliche, also auch projektivische Punktreihen, und zwar entsprechen, wenn man D durch die Proportion $AE : BD = m : n$ bestimmt, den auf L liegenden Punkten A, E, X, ∞ auf L′ bezüglich B, D, Y, ∞. Daher müssen auch die beiden auf L′ liegenden Punktreihen projektivisch sein, und es müssen den Punkten H, ∞, Y, F bezüglich B, D, Y, ∞ entsprechen. Y ist also als Doppelpunkt jener beiden Punktreihen bestimmt. Da ferner F und D die Gegenpunkte der beiden Punktreihen sind, so ist $DY . FY = DB . FH$, ausserdem $FY - DY$ oder $FY + DY$ bekannt. Die Konstruktion wird mit der vorigen identisch.

Es ist diese Lösung, wenn einmal die Eigenschaften projektivischer Strahlenbüschel und Punktreihen bekannt sind, diejenige, welche am nächsten liegt. Sie ist die durchsichtigste von allen Lösungen. Indessen an Einfachheit der daraus resultierenden Konstruktion übertrifft sie die antiken Lösungen nicht, und steht hinter den beiden des folgenden Paragraphen zurück.

§ 3.

Neuere Lösungen der sectio rationis.

1. Um die beiden folgenden Lösungen allgemeingültig ausführen zu können, schicke ich eine einfache geometrische Betrachtung voraus, die man wohl das Princip der gleichen Winkel nennen könnte. Die moderne synthetische Geometrie fasst an einem Winkel nicht nur den Richtungsunterschied der beiden Schenkel ins Auge, sondern auch den Sinn der Drehung, welche der eine Schenkel machen muss, wenn er den Winkel durchlaufend mit dem anderen Schenkel zusammenfallen soll. Zwei Winkel BAC und B′A′C′ sind also nur dann einander gleich, wenn der Schenkel A′B′, um in die Lage A′C′ zu kommen, eine Drehung von derselben Grösse und von demselben Sinne machen muss, wie AB um in die Lage AC zu

kommen. Jetzt lässt das Princip der gleichen Winkel sich folgendermassen aussprechen:

Die beiden Scheitelpunkte zweier gleicher Winkel und die beiden Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Schenkel liegen auf einem Kreise.

Ist z. B. $\angle BAC = B'A'C'$, und schneiden sich AB und A'B' (nötigenfalls verlängert) in D, AC und A'C' in E, so liegen die vier Punkte A, A', D, E stets auf einem Kreise, welche Lage auch die beiden Winkel zu einander haben mögen. Die Richtigkeit erhellt für alle möglichen Fälle aus bekannten Kreissätzen.

2. **Der Situationspunkt.** Sind (Fig. 5) AA' und BB' zwei der Grösse und der Lage nach gegebene Strecken, so giebt es stets einen Punkt S derart, dass die Dreiecke SAA' und SBB' einander ähnlich und gleichwendig sind, d. h., dass das eine durch eine blosse Verschiebung in der Ebene mit dem anderen in Ähnlichkeitslage gebracht werden kann. Man nennt diesen Punkt S den Situationspunkt der beiden Strecken AA' und BB'. Derselbe ist leicht zu konstruieren. Aus der Ähnlichkeit und der Gleichwendigkeit der Dreiecke SAA' und SBB' folgt nämlich, dass $\angle SAA' = SBB'$ ist, und hieraus wiederum folgt nach dem Princip der gleichen Winkel, dass A, B, S und O (Schnittpunkt von A'A und BB') auf einem Kreise liegen. Genau ebenso beweis't man, dass auch A', B', S, O auf einem Kreise liegen. S ist also der andere Schnittpunkt der beiden durch A, B, O und A', B', O gelegten Kreise.

3. **Lösung der sectio rationis von Petersen.** (Dr. Jul, Petersen, Methoden und Theorieen zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben übersetzt von Dr. R. von Fischer-Benzon, Kopenhagen 1879). (Fig. 5). Durch die Lage von AX und BY und das Verhältnis dieser Strecken ist ihr Situationspunkt S bestimmt. Da $\angle (SA, SX) = \angle (SB, SY)$, so ist auch $\angle (SA, SB) = \angle (SX, SY)$,*) also $\angle ASB = XSY$. Ferner verhält sich, da $\triangle SAX \backsim SBY$ ist, $SA : SB = SX : SY$. Daraus aber folgt, dass $\triangle SAB \backsim SXY$, mithin $\angle SYP = SBA$ ist, und somit ergiebt sich ein leicht zu konstruierender Kreisbogen als zweiter Ort für den Punkt Y.

Für den Situationspunkt S hat man als ersten geometrischen Ort den um $\triangle AOB$ geschriebenen Kreis. Einen zweiten könnte man dadurch gewinnen, dass das Verhältnis $AS : BS$ bekannt, nämlich gleich $m : n$ ist. Eleganter wird folgendes Verfahren. Trägt man $AA' = m$ auf L und $BB' = n$ auf L' ab, so ist $\triangle SAA' \backsim SBB'$, also S auch der Situationspunkt von AA' und BB', daher S nach 2) zu finden. Anstatt zur Konstruktion von Y den Abschnittswinkel anzuwenden, kann man noch einen dritten Punkt des Kreises zu ermitteln suchen. Zieht man durch P zu AB eine Parallele, welche SB in N schneidet, so ist (bei der in der Figur angenommenen Lage der Stücke) $\angle SNP = SBA$, also auch $\angle SYP = SNP$; daher liegen Y, N, S, P auf einem Kreise. (Dass dies auch dann stattfindet, wenn P ausserhalb $\angle (L, L')$ liegt, ist leicht ersichtlich und auf dieselbe Weise zu beweisen). Zieht man eine Parallele durch P zu L, bis sie OS in M trifft, so ist $\angle SMP = 2R - AOS = SBA = SYP$, also zum Überfluss auch noch M ein Punkt jenes Kreises.

Konstruktion. L und L' schneiden sich in O. Man trage $AA' = m$ und $BB' = n$ bezüglich auf L und L' ab, beschreibe um $\triangle ABO$ und $\triangle A'B'O$ Kreise, die sich ausser in O noch in S treffen. Dann ziehe man durch P zu AB eine Parallele, welche SB in N treffe und lege durch S, P und N einen Kreis. Derselbe trifft L' in Y.

*) Unter Winkel (AB, CD) ist die Drehungsgrösse zu verstehen, um welche die in der Richtung AB genommene Gerade AB gedreht werden muss, um mit CD gleiche Richtung zu erhalten.

4) Schon längere Zeit vor dem Erscheinen von Petersens Methoden und Theorieen hatte ich mich mit jenen drei Aufgaben des Apollonius beschäftigt und dieselben gelös't. Es sei mir nun verstattet meine Lösung der sectio rationis, die mit der von Petersen ähnlich ist, mitzuteilen.

Analysis. (Fig. 6). Die Strecken AX und BY, deren Verhältnis bekannt ist, kann man zu homologen Seiten ähnlicher Dreiecke machen, indem man $\triangle$ BYQ ähnlich und gleichwendig mit AXP zeichnet. Nun ist zunächst die Lage von BQ bekannt, da $\angle$ YBQ = XAP ist. Da ferner AP : BQ sich wie AX : BY, mithin auch wie m : n verhält, so ist BQ die vierte Proportionale zu m, n, AP. Der Punkt Q ist nun dadurch völlig bestimmt. Da die Dreiecke AXP und BYQ ähnlich und gleichwendig sind, so schneiden sich ihre homologen Seiten unter gleichen Winkeln. Es ist also $\angle$ (QY, PX) = $\angle$ (BQ, AP). Schneiden sich nun PA und QB in R, so müssen nach dem Princip der gleichen Winkel die vier Punkte Y, R, P, Q auf einem Kreise liegen, der sich, da P, Q, R bekannt sind, konstruieren lässt. [Wollte man auf Kosten der Allgemeinheit ganz elementar verfahren, so ist $\angle$ QYP = QYB + BYP = PXA + BYP = 2R — AOB, wenn O der Schnittpunkt von L und L′ ist; dadurch gewinnt man einen Kreisbogen als Ort für Y].

Die Konstruktion von BQ als vierter Proportionale zu m, n, AP muss möglichst natürlich an die Hauptfigur angelehnt werden. Trägt man zu dem Ende AA′ = m auf L und BB′ = n auf L′ ab, so ist auch $\triangle$ AA′P $\backsim$ BB′Q, so dass Q einfach durch Anlegen zweier Winkel gefunden wird.

Konstruktion. Man trage AA′ = m und BB′ = n bezüglich auf L und L′ ab, zeichne dann durch Anlegen der Winkel $\triangle$ BB′Q $\backsim$ AA′P und gleichwendig mit demselben. AP und BQ schneiden sich in R. Durch P, Q und R lege man einen Kreis. Derselbe schneidet L′ in Y.

Da auch die Dreiecke A′XP und B′YQ ähnlich und gleichwendig sind, so ist $\angle$ (QY, PX) = $\angle$ (B′Q, A′P) und es liegen somit nach dem Princip der gleichen Winkel Y, R′, P, Q auf einem Kreise. Es liegen also P, Q, R, R′, Y auf einem Kreise. Ferner ist $\angle$ A′AP = B′BQ, daher A, B, R, O (Schnittpunkt von L und L′) auf einem Kreise, und aus gleichem Grunde liegen auch A′, B′, R′, O auf einem Kreise. R und R′ lassen sich daher auch ohne Benutzung des Punktes Q als Schnittpunkte jener beiden Kreise mit AP und A′P konstruieren.

Konstruktion. Man schneide auf L und L′ bezüglich AA′ = m und BB′ = n ab, lege dann durch A, B, O und durch A′, B′, O Kreise, welche AP und A′P bezüglich in R und R′ treffen. Ferner lege man durch P, R, R′ einen Kreis. Derselbe trifft L′ in Y.

Diese Konstruktion lässt sich auch ebenso leicht aus der Analysis von Petersen herleiten. Hierdurch giebt sich die nahe Verwandtschaft der beiden Lösungen zu erkennen.

5) **Rückblick auf die aufgeführten Lösungen.** Es möchte fast Wunder nehmen, dass Apollonius über die sectio rationis ein ganzes Buch geschrieben hat. Er nimmt zunächst Rücksicht auf alle möglichen verschiedenen Lagen der gegebenen Stücke und erschöpft dieselben in 21 Fällen. Jeder dieser Fälle zerfällt aber wiederum je nach der Lage der gesuchten Punkte X und Y zu den gegebenen Stücken in mehrere Unterabteilungen, so dass im ganzen 87 Fälle unterschieden werden. Dieselben sind nicht nur sämtlich gelöst, sondern auch

mit einer eingehenden Determination in Bezug auf die Möglichkeit der Konstruktion versehen worden. In dieser trotz der geringen wissenschaftlichen Hülfsmittel mit grösster Gründlichkeit durchgeführten Determination dürfte das nicht zu verkennende Bedeutende der Apollonischen Schrift mehr als in der Lösung selbst zu suchen sein. Von den 87 Fällen des Apollonius werden meistenteils je zwei durch dieselbe Konstruktion gelös't, da ja Y als Schnittpunkt von L′ mit einem Kreise gefunden wird, so dass sich im allgemeinen zwei Punkte für Y, also auch zwei Gerade für die gesuchte XY ergeben. Apollonius hat dieselben stets als verschiedene Fälle aufgeführt. Noch weiter wird die Anzahl der möglichen Fälle eingeschränkt, wenn man an den gegebenen Geraden L und L′ die Richtung ins Auge fasst und die Strecken AX und BY als algebraische Grössen d. h. als positiv oder negativ ansieht, jenachdem sie von A, respektive B aus in der Richtung der betreffenden Geraden oder in der entgegengesetzten Richtung abgetragen sind. Haben nun m und n, die ebenfalls als algebraische Grössen aufsufassen sind, gleiche Vorzeichen, so haben AX und BY entweder beide bezüglich mit L und L′ gleiche Richtung, oder sie haben beide die entgegengesetzte Richtung dieser Geraden. Haben hingegen m und n verschiedene Vorzeichen, so hat von den beiden Strecken AX und BY die eine dieselbe, die andere die entgegengesetzte Richtung wie die Gerade, auf der sie liegt. Schliesslich zerfallen die vielen Fälle des Apollonius, abgesehen von den ganz einfachen, in zwei Hauptgruppen, deren Lösung sich etwas verschieden gestaltet. Denken wir uns die Punkte X und Y bezüglich auf L und L′ beweglich, jedoch so, dass XY immer durch P geht, und nehmen wir ferner an, X durchlaufe L in der Richtung dieser Geraden, so können folgende zwei Möglichkeiten stattfinden: Entweder der Punkt Y durchläuft hierbei die Gerade L′ in ihrer Richtung oder er durchläuft sie in der ihr entgegengesetzten Richtung. Im letzteren Falle sind schliesslich zwei Strecken (FY und CY) aus ihrem Produkt und ihrer Differenz (Fig. 1 und 3), im ersteren Falle aus ihrem Produkt und ihrer Summe zu konstruieren. Halleys Lösung ist der des Apollonius sehr ähnlich, aber etwas einfacher. Um ihre allgemeine Gültigkeit darzuthun, müsste man indessen mehrere Fälle gesondert behandeln. Dies fällt nun bei der projektivischen Lösung weg. Die Analysis umfasst dort sofort alle möglichen Fälle und nur zum Schlusse sind für die Konstruktion des Punktes Y jene eben angegebenen beiden Hauptfälle zu unterscheiden. Bei der Lösung von Petersen und bei der meinigen fällt auch noch diese Unterscheidung weg. Nicht nur umfasst die Analysis alle möglichen Fälle, sondern es werden auch diese sämtlichen Fälle durch eine und dieselbe Konstruktion gelöst.

§ 4.
Sectio spatii.

Gegeben sind zwei gerade Linien L und L′ und auf ihnen bezüglich die Punkte A und B, ausserdem ein Punkt P. Man soll durch P eine Gerade ziehen, welche L und L′ bezüglich in X und Y so schneidet, dass das Produkt der abgeschnittenen Strecken AX und BY dem zweier gegebenen Strecken gleich ist (also AX . BY = mn).

1. **Vermeintliche Lösung des Apollonius.** (S. § 1). (Fig 7 und 8). PA schneide L′ in H. Eine Gerade, durch H parallel zu L gezogen, treffe XY in W. Das Verhältnis AX : HW ist bekannt, nämlich gleich PA : PH. Da überdies AX . BY bekannt ist, so folgt daraus, dass auch HW . BY bekannt ist. Wird ferner eine Strecke a so angenommen, dass HW . BY = PF . a ist, so

wird, da HW . BY und PF bekannt sind, auch a der Grösse nach bekannt werden. Man hat dann die Proportion FP : HW = BY : a, aber auch FP : HW = FY : HY, folglich auch FY : HY = BY : a. Für Fig 7 ist nun HY — FY = HF, und daher folgt für diesen Fall aus der letzten Proportion HY — FY : HY = a — BY : a, oder wenn man BC = a in der Richtung BY auf L′ abträgt, HF : HY = CY : BC oder HY . CY = HF . BC. Für Fig 8 ist HY + FY = HF und es folgt aus der Proportion FY : HY = BY : a hier HY + FY : HY = a + BY : a. Trägt man in diesem Falle BC = a auf L′ nach der zu BY entgegengesetzten Richtung ab, so ergiebt sich auch hier HF : HY = CY : CB oder HY . CY = HF . CB. Man kennt also von den Strecken HY und CY ihr Produkt und ausserdem entweder ihre Summe (Fig 7) oder ihre Differenz (Fig 6). In beiden Fällen sind dieselben auf bekannte Weise zu konstruieren.

Um das Produkt HW . BY durch das zweier bekannter Strecken auszudrücken, trage man AA′ = m auf L ab. PA′ treffe HW in I. Dann ist m : AX = HI : HW, und nach der Bedingung der Aufgabe m : AX = BY : n, daher HI : HW = BY : n oder HW . BY = HI . n. Somit hat man zur Konstruktion von C die Gleichung PF . BC = HI . n oder die Proportion PF : HI = n : BC. Die Konstruktion von Y geschieht ähnlich wie in § 2, 1).

2) **Lösung von Halley.** (Fig 9 und 10). Man ziehe PF ∥ L und PE ∥ L′ bis zu ihrem Durchschnitt mit L′ und L. Nun sei der Punkt D auf L′ so gewählt, dass das System AEX ∽ BYD ist. Es verhält sich AE : AX = BY : BD; daher ist AE . BD = AX . BY, also auch AE . BD = mn, mithin ist BD und der Punkt D auf L′ bekannt. Da AEX ∽ BYD ist, verhält sich AE : EX = BY : YD. Zieht man ferner durch A die Parallele zu L′, welche PF in K und XY in M treffe, so verhält sich AE : EX = MP : PX = MK : KA = YF : FH. Aus dieser und der letzen Proportion ergiebt sich BY : YD = YF : FH, und hieraus BY + YD : YD = YF + FH : FH oder BD : YD = YH : FH oder endlich YD . YH = BD . FH. Da ausserdem entweder YH + YD (Fig 9) oder YH — YD bekannt ist, sind YH und YD zu konstruieren.

Um die Konstruktion von D einigermassen geschickt an die Hauptkonstruktion anzulehnen, trage man AA′ = m auf L in der Richtung AX und BB′ = n auf L′ in der Richtung BY ab. PA′ treffe AM in N. Da AE . BD = mn = AA′ . BB′ ist, verhält sich AE : AA′ = BB′ : BD, daher AE : EA′ = BB′ : B′D. Ferner verhält sich auch AE : EA′ = NP : PA′ = NK : KA, folglich auch BB′ : B′D = NK : KA. Somit sind die beiden Systeme BB′D und NKA einander ähnlich, und es schneiden sich deshalb BN, B′K und DA in einem Punkte O. Derselbe bestimmt sich als Schnittpunkt von BN und B′K, und D als Schnittpunkt von L′ und AO.

Die Konstruktion von Y geschieht wie im § 2, 1). Die Konstruktion wird eleganter als die vorige.

3) **Die proktivische Lösung.** Die projektivische Geometrie führt auch hier, wie Hankel in seinem bekannten Werke zeigt, sehr bald zum Ziele. (Fig 9 und 10). Eine sich um P drehende Gerade bestimmt auf L eine Punktreihe X und auf L′ die dazu perspektivische Punktreihe Y′, und es entsprechen den Punkten A, E, X, ∞ bezüglich, H, ∞, Y, F. Bestimmt man ferner zu jedem Punkt X auf L einen Punkt Y″ auf L′ so, dass AX . BY″ = mn ist, und ist D der Punkt von L′, der auf diese Weise E entspricht, so sind auch die Punktreihen X und Y″ projektivisch, und es entsprechen den Punkten A, E, X, ∞ bezüglich ∞, D, Y, B. Daher sind auch die beiden auf L′ liegenden Punktreihen Y′ und Y″ projekti-

visch, und es entsprechen den Punkten H, ∞, Y, F der einen bezüglich ∞, D, Y, B auf der anderen. Somit erweist sich Y als ein Doppelpunkt beider Punktreihen und H und D als ihre Gegenpunkte. Daher ist $HY \cdot YD = BD \cdot FH$, und ausserdem $HY + YD$ oder $HY - YD$ bekannt. Die Konstruktion wird mit der von Halley identisch.

4) Fallen A und B in den Durchschnittspunkt von L und L′, so schneidet XY von dem $\angle (LL')$ ein Dreieck mit bekanntem Flächeninhalt ab, woraus sich der Name der ganzen Aufgabe erklärt. Dieser spezielle Fall ist von Petersen in seinen Methoden und Theorieen, Aufg. 366, behandelt. Auf den allgemeinen Fall scheint sich die dortige Lösung nicht ausdehnen zu lassen. Von einer Mitteilung dieser Lösung kann hier um so eher abgesehen werden als dieser specielle Fall schon mehrfach behandelt ist. (Gandtner und Junghans, II, 568. Hoffmann, Sammlung planimetrischer Aufgaben, 812. Lieber und v. Lühmann, geometrische Konstruktionsaufgaben, § 73, 10; § 130, 5, 6). Ich beschränke mich darauf noch eine Lösung des allgemeinen Falles mitzuteilen, welche die älteren Lösungen und selbst die meisten Lösungen des speciellen Falles an Einfachheit übertrifft.

5) (Fig 11). Die beiden Strecken AX und BY, deren Produkt bekannt ist, mache ich zu nicht entsprechenden Seiten ähnlicher Dreiecke, indem ich $\triangle BYQ$ ähnlich und gleichwendig mit APX zeichne. Dann hat man $AX : AP = BQ : BY$, also $AX \cdot BY = AP \cdot BQ$, mithin auch $AP \cdot BQ = mn$, und da AP bekannt ist, wird hierdurch BQ der Grösse nach als vierte Proportionale zu AP, m, n bekannt. Ausserdem ist auch BQ der Lage nach bekannt, da $\angle QBY = XAP$ ist. Der Punkt Q ist also völlig bestimmt. Nun müssen sich die homologen Seiten der beiden ähnlichen und gleichwendigen Dreiecke APX und BYQ unter gleichen Winkeln schneiden, daher $\angle (PX, YQ) = \angle (AP, BY)$. Schneiden sich nun L′ und PA in H, so ist also $\angle PYQ = \angle PHB$, daher Y auf einem leicht zu konstruierenden Kreisbogen über PQ als Sehne.

Auch hier wird es wieder darauf ankommen, die einzelnen Teile der Konstruktion gut aneinander zu fügen. Zunächst ist BQ aus der Proportion $AP : m = n : BQ$ zu konstruieren. Trägt man $AA' = m$ auf L und $BB' = n$ auf L′ ab, so ist $AP : AA' = BB' : BQ$, und da überdies $\angle A'AP = QBB'$ ist, so ist $\triangle A'AP \backsim QBB'$, daher Q einfach durch Anlegen von Winkeln zu finden. Anstatt zur Konstruktion von Y sich des Abschnittswinkels zu bedienen, kann man auch noch einen dritten bekannten Punkt des Kreises suchen. Da die Dreiecke A′AP und QBB′ ähnlich und gleichwendig sind, so ist $\angle (PA', B'Q) = \angle (AP, BB')$. Es ist aber auch $\angle (AP, BB') = \angle (PX, YQ)$, weil die Dreiecke APX und BYQ ähnlich und gleichwendig sind, daher $\angle (PA', B'Q) = \angle (PX, YQ)$, folglich liegen nach dem Princip der gleichen Winkel, wenn wir den Schnittpunkt von PA′ und B′Q mit R bezeichnen, Y, R, P, Q auf einem Kreise.

Konstruktion. Man trage $AA' = m$ auf L und $BB' = n$ auf L′ ab, und zeichne $\triangle BB'Q$ durch Anlegen der Winkel ähnlich und gleichwendig mit APA′. Es mögen PA′ und B′Q sich in R treffen. Sodann lege man durch P, Q, R einen Kreis. Derselbe trifft L′ in Y.

§ 5.

Sectio determinata.

Es sind vier in einer Geraden liegende Punkte A, B, A′, B′ gegeben. Es soll auf dieser Geraden ein Punkt X so bestimmt werden, dass die Produkte $AX \cdot BX$ und $A'X \cdot B'X$ in einem gegebenen Verhältnisse $(m : n)$ stehen.

Zur genaueren Bestimmung dieser Aufgabe ist es nötig, die Strecken XA, XB, XA′, XB′ algebraisch aufzufassen, sie also als positiv oder negativ anzusehen, jenachdem sie nach der einen oder nach der anderen Seite von X liegen. Hiernach ist das Produkt XA . XB positiv oder negativ, jenachdem X auf einer der Verlängerungen von AB oder zwischen A und B liegt. Haben nun m und n gleiche Vorzeichen, so haben auch XA . XB und XA′ . XB′ gleiche Vorzeichen, und der Punkt X liegt dann entweder ausserhalb beider Strecken AB und A′B′, oder (wenn es möglich ist), innerhalb dieser beiden Strecken. Haben dagegen m und n verschiedene Vorzeichen, so haben auch XA . XB und XA′ . XB′ verschiedene Vorzeichen, und X liegt innerhalb der einen und ausserhalb der anderen der Strecken AB und A′B′.

Da diese Aufgabe mit den beiden vorhergehenden in keinem nahen Zusammenhange steht, so will ich dieselbe kürzer behandeln. Die Lösung von Simson wird durch die gesonderte Betrachtung mehrerer Fälle beschwerlich. Von der Mitteilung derselben kann um so eher abgesehen werden als es doch recht fraglich ist, ob sie wirklich mit der verloren gegangenen Lösung des Apollonius übereinstimmt. Ich beschränke mich daher darauf eine Lösung anzuführen, die nach meiner Ansicht am leichtesten zum Ziele führt und zugleich die einfachste Konstruktion liefert.

(Fig 12 und 13). Man lege, was offenbar immer möglich ist, durch A und B sowie durch A′ und B′ zwei beliebige sich schneidende Kreise mit den Mittelpunkten K und K′, E sei einer der beiden Schnittpunkte der Kreise. EX treffe den Kreis K in Y und den Kreis K′ in Y′. Dann ist $XA . XB = XY . XE$ und $XA' . XB' = XY' . XE$. Die Bedingung der Aufgabe, $XA . XB : XA' . XB' = m : n$ liefert daher die Proportion $XY . XE : XY' . XE = m : n$ oder $XY : XY' = m : n$. Zieht man nun die Durchmesser ED und ED′, so ist $DY \perp EX$ und $D'Y' \perp EX$. Errichtet man daher eine Senkrechte auf EX in X, welche DD′ in F trifft, so hat man $XY : XY' = FD : FD'$, also auch $FD : FD' = m : n$. Dadurch wird F bestimmt, und X liegt auf einem Kreise über dem Durchmesser EF.

Statt D kann man auch den Mittelpunkt M dieses Kreises unmittelbar bestimmen. Da nämlich $EK = KD$, $EK' = K'D'$ und $EM = MF$, so liegt M auf KK′ und es verhält sich $MK : MK' = FD : FD' = m : n$.

Konstruktion. Man lege durch A und B sowie durch A′ und B′ zwei beliebige sich schneidende Kreise K und K′, teile KK′ im Verhältnisse m : n (äusserlich oder innerlich, jenachdem m und n gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben). Den Teilpunkt M verbinde man mit einem der Schnittpunkte E von K und K′ und schlage mit ME um M einen Kreis, welcher AB′ in X trifft.

Zu derselben Konstruktion gelangt man unmittelbar, wenn man folgenden bekannten Satz benutzt, für den, soviel ich weiss, es noch keinen allgemeingültigen, rein synthetischen Beweis giebt: Hat ein Kreis M mit zwei anderen K und K′ eine gemeinschaftliche Potenzlinie, so stehen die in Bezug auf K und K′ genommenen Potenzen eines jeden seiner Peripheriepunkte in einem konstanten Verhältnisse, nämlich in demselben, in welchem sein Mittelpunkt M die Verbindungsstrecke KK′ der beiden anderen Mittelpunkte teilt. Diesen Weg hat Paucker in seiner geometrischen Analysis, Leipzig 1837, eingeschlagen. Nur hat er die beiden Kreise K und K′ über AB und A′B′ als Durchmessern beschrieben, so dass sie sich unter Umständen nicht schneiden, wodurch dann die Konstruktion des Kreises M nicht unerheblich erschwert wird.

§ 6.

Im Folgenden sollen noch einige Aufgaben behandelt werden, welche mit den drei Aufgaben des Apollonius in höherem oder geringerem Masse verwandt sind. Vor Allem ist noch die sectio rationis sowie die sectio spatii für den Fall zu behandeln, dass der Punkt P ins Unendliche fällt.

I. Gegeben sind die sich in O schneidenden Geraden L und L′, auf ihnen bezüglich die Punkte A und B, ausserdem die Gerade L″. Man soll eine Gerade, die L in X, L′ in Y schneidet, parallel zu L″ so ziehen, dass AX und BY in einem gegebenen Verhältnisse m : n stehen.

1 **Analysis.** Zeichnet man $\triangle BYZ \backsim AXY$ und gleichwendig, so kennt man die Richtung von XY, und da $\angle BYZ = AXY$, auch die Richtung von YZ. Da überdies $XY : YZ = AX : BY = m : n$ ist, so wird die Gerade OZ der Lage nach bekannt und liefert einen Ort für Z. Macht man ferner $\triangle O'BZ \backsim OAY$ und beide gleichwendig, so ist O′ auf L′ bestimmt, da $AO : BO' = m : n$. Ferner kennt man $\angle YO'Z = \angle (LL')$ und erhält dadurch einen zweiten Ort für Z. — 2 Anal. Trägt man $AA' = m$ auf L ab und zieht $AC \parallel L''$, $A'C' \parallel L''$ bis zum Durchschnitt mit L′, so hat man $AX : AA' = CY : CC'$, und nach der Bedingung der Aufgabe $AX : AA' = BY : n$, daher $CY : CC' = BY : n$ oder $CY : BY = CC' : n$. Es ist also CB äusserlich oder innerlich in einem bekannten Verhältnisse zu teilen. 3 Anal. Man trage $AA' = m$ und $BB' = n$ bezüglich auf L und L′ ab, und nehme auf AY einen Punkt D so an, dass $AD : DY = AA' : A'X$. Dann ist auch $AD : DY = BB' : B'Y$. Aus den beiden Proportionen folgt $A'D \parallel XY \parallel L''$ und $B'D \parallel BA$. Dadurch ist D bestimmt, dann Y als Schnittpunkt von AD und L′. 4. Anal. Durch das bekannte Verhältnis $AX : BY$ ist der Situationspunkt S von AX und BY bestimmt und wie § 3, 3) zu konstruieren. Da $\triangle XYS \backsim ABS$, so wird $\angle SYX$, und dadurch die Richtung von SY bekannt. Zur Konstruktion benutze man den Punkt E, in welchem SY den Kreis ABSO schneidet. Es ist dann $AE \parallel L''$.

II. Gegeben sind zwei Gerade L und L′, und auf ihnen bezüglich die Punkte A und B, ausserdem die Gerade L″. Man soll eine Gerade, welche L in X und L′ in Y schneidet, parallel zu L″ so ziehen, dass das Produkt $AX . AY$ eine gegebene Grösse mn habe.

Analysis. Trägt man $AA' = m$ auf L ab und zieht $AC \parallel L''$, $A'C' \parallel L''$ bis zum Durchschnitt mit L′, so ist $m : AX = CC' : CY$, und nach der Bedingung der Aufgabe $a : AX = BY : n$. Hieraus folgt $CC' : CY = BY : n$, also $CY . BY = n . CC'$. Ausserdem ist, je nach der Lage der gegebenen Stücke $CY + BY$ oder $CY - BY$ bekannt. Y wird konstruiert wie § 2, 1.

III. Gegeben sind die Geraden L und L′, auf L die Punkte A und B, auf L′ die Punkte C und D, ausserdem eine Gerade L″. Es soll parallel zu L″ eine Gerade, welche L in X und L′ in Y schneidet, so gezogen werden, dass die Produkte $XA . XB$ und $YC . YD$ in einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ stehen.

Analysis. (Fig 14). Nimmt man auf L die Punkte E und F zunächst beliebig an und zieht AA′, EE′, FF′, BB′ sämtlich parallel L″ bis zum Durchschnitt mit L′, so hat man $AX : A'Y = AE : A'E'$ und $BX : B'Y = BF : B'F'$, daher $AX.BX : A'Y.B'Y = AE.BF : A'E'.B'F'$. Nach der Bedingung der Aufgabe ist aber $CY.DY : AX.BX = n : m$. Multipliciert man beide Proportionen, so erhält man $CY.DY : A'Y.B'Y = AE.BF.n : A'E.B'F'.m$. Von den vier Strecken AE, BF, A′E′, B′F′ kann man über zwei, welche nicht auf derselben

Geraden liegen, beliebig verfügen. Die beiden anderen sind dann durch diese bestimmt. Macht man nun AE = m und B′F′ = n, so geht unsere Proportion über in CY . DY : A′Y . B′Y = BF . mn : A′E′ . mn oder CY . DY : A′Y . B′Y = BF : A′E′. Der Punkt Y wird daher auf L′ durch die sectio determinata bestimmt.

§ 7.

I. Gegeben sind zwei sich in O schneidende Gerade L und L′, auf ihnen bezüglich die Punkte A und B, und ein Kreis K, welcher L und L′ berührt. Man soll an den Kreis K eine Tangente, die L in X und L′ in Y schneidet, so ziehen, dass das Verhältnis AX : BY einem gegebenen m : n gleich wird.

Analysis. (Fig 15). Zeichnet man $\triangle$ BYQ $\backsim$ AXK und gleichwendig mit demselben, so ist Q bestimmt, da $\angle$ YBQ bekannt ist und AK : BQ = AX : BY = m : n. Nun ist $\angle$ (KX, QY) = $\angle$ (AX, BY) = $\angle$ (LL′) = O. Es ist aber auch $\angle$ (KX, KY) bekannt, er ist nämlich gleich R + $\frac{1}{2}$ O, daher ist $\angle$ (QY, KY) = $\angle$ (KX, KY) — $\angle$ (KX, QY) = R + $\frac{1}{2}$ O — O = R — $\frac{1}{2}$ O, sodass man einen leicht zu konstruierenden Kreisbogen als zweiten Ort für Y erhält.

Die Konstruktion von Q geschieht wie in § 3, 4, indem man AA′ = m, BB′ = n auf L und L′ abträgt und beachtet, dass $\triangle$ BB′Q $\backsim$ AA′K ist. Zur Konstruktion des Kreisbogens suche man seinen Mittelpunkt M zu gewinnen. Es ist $\angle$ QMK = 2 QYK = 2 (R — $\frac{1}{2}$ O) = 2 R — O, mithin $\angle$ KQM = MKQ = $\frac{1}{2}$ O, wodurch M leicht gefunden wird. Man kann auch noch ganz anders verfahren. Es ist $\angle$ (AK, BQ) = $\angle$ (L, L′) = O. Schneiden sich nun AK und BQ in R, so ist $\angle$ KRQ = O, mithin KRQ + QMK = 2 R, so dass K, R, Q, M auf einem Kreise liegen. Da KM = MQ, so ist M die Mitte des Bogens KQ, und M muss auf der Halbierungslinie von $\angle$ KRQ liegen. Ebenso lässt sich zeigen, dass, wenn A′K und B′Q sich in R′ schneiden, M auch auf der Halbierungslinie von $\angle$ KR′Q liegt.

Konstruktion. Man trage AA′ = m, BB′ = n bezüglich auf L und L′ ab und zeichne durch Anlegen von Winkeln $\triangle$ BB′Q $\backsim$ AA′K und gleichwendig. BQ und AK schneiden sich in R, B′Q und A′K schneiden sich in R′. Dann halbiere man $\angle$ KRQ und $\angle$ KR′Q. Die Halbierungslinien schneiden sich in M. Der um M mit MK geschlagene Kreis trifft L′ in Y.

II. Gegeben sind zwei sich in O schneidende Gerade L und L′, auf ihnen bezüglich die Punkte A und B, und ein Kreis K, welcher L und L′ berührt. Man soll an den Kreis eine Tangente, welche L in X und L′ in Y schneidet, so ziehen, dass das Produkt AX . BY einem gegebenen mn gleich wird.

Analysis. (Fig 16). Zeichnet man $\triangle$ BYQ $\backsim$ AKX und gleichwendig, so ist AK : AX = BY : BQ daher AK . BQ = AX . BY = mn. Dadurch wird BQ bekannt, und da auch $\angle$ QBY bekannt ist, so ist der Punkt Q bestimmt. Nun ist wegen der Ähnlichkeit und der Gleichwendigkeit der Dreiecke $\angle$ (KX, YQ) = $\angle$ (AK, L′) = D (D ist der Schnittpunkt von KA und L′). Ferner ist auch $\angle$ (YK, KX) bekannt, nämlich gleich 2 R — $\angle$ XKY = 2 R — [R + $\frac{1}{2}$ $\angle$ (L, L′)] = R — $\frac{1}{2}$ $\angle$ (L, L′). Dadurch wird auch $\angle$ (YK, YQ) oder $\angle$ KYQ bestimmt, da er der Summe jener beiden Winkel gleich ist. Es ist also $\angle$ KYQ = R — $\frac{1}{2}$ $\angle$ (L, L′) + D = R — [$\frac{1}{2}$ $\angle$ (L, L′) — D] = R — $\angle$ OKA. Ein kürzerer Weg, aber weniger allgemein, wäre folgender gewesen. $\angle$ KYQ = BYQ — BYK = AKX — BYK = OKX — OKA — BYK = OKX — BYK — OKA = R — OKA. Man erhält dadurch einen zweiten geometrischen Ort für Y, nämlich einen Kreisbogen über KQ mit dem Peripheriewinkel R — OKA.

Der Punkt Q wird ebenso wie § 4, 5 gefunden, indem man $AA' = m$ und $BB' = n$ bezüglich auf L und L′ abträgt und beachtet, dass $\triangle BB'Q \backsim AKA'$ ist. Zur Konstruktion des Kreisbogens suche man seinen Mittelpunkt M. Es ist $\angle KMQ = 2\,KYQ = 2\,(R - OKA)$ $= 2\,R - 2\,OKA$, daher $\angle KQM = MKQ = OKA$, wodurch M bestimmt ist. Die Konstruktion gestaltet sich hiernach sehr einfach.

III. Gegeben sind zwei sich in O schneidende Gerade L und L′, auf ihnen bezüglich die Punkte A und B, und ausserdem beliebig ein Punkt P. Man soll um P einen Kreis schlagen, so dass, wenn derselbe L in X und L′ in Y trifft, das Verhältnis $AX : BY$ einem gegebenen $m : n$ gleich wird.

Analysis. (Fig 17). Zeichnet man $\triangle BYQ$ ähnlich und gleichwendig mit AXP, so ist Q, wie schon § 3, 4 und § 7, I gezeigt ist, bestimmt, und lässt sich ebenso wie dort konstruieren. Ausserdem verhält sich $PY : QY = PX : QY = AX : BY = m : n$. Hiernach erhält man für Y einen zweiten Ort, indem man PQ nach dem Verhältnisse $m : n$ harmonisch teilt und über die Verbindungsstrecke der Teilpunkte als Durchmesser einen Kreis beschreibt.

§ 8.

Zum Schlusse möge noch die folgende schwierigere Aufgabe behandelt werden.

Gegeben sind drei Gerade L, L′, L″, und auf denselben bezüglich die Punkte A, B, C. Man soll eine Gerade, die L in X, L′ in Y und L″ in Z trifft, so ziehen, dass die abgeschnittenen Stücke AX, BY, CZ in einem gegebenen Verhältnisse $m : n : p$ stehen.

Analysis. (Fig 18). Durch das bekannte Verhältnis $AX : BY$ wird der Situationspunkt S_c dieser Strecken bestimmt, und ebenso der Situationspunkt S_a für die Strecken BY und CZ. Da $\triangle S_cXA \backsim S_cYB$, so verhält sich $S_cX : S_cY = S_cA : S_cB$, und da ausserdem $\angle XS_cY = AS_cB$ ist, so ist auch $\triangle S_cXY = S_cAB$, mithin $\angle S_cYX = S_cBA$. Ebenso beweist man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke S_aZY und S_aCB, dass $\angle ZYS_a = CBS_a$ ist. Daher ist $\angle S_aYS_c = 2\,R - S_cYX - ZYS_a = 2\,R - S_cBA - CBS_a$, also bekannt, und man erhält somit als zweiten Ort für Y einen Kreisbogen über S_aS_c mit dem Peripheriewinkel $2\,R - S_cBA - CBS_a$.

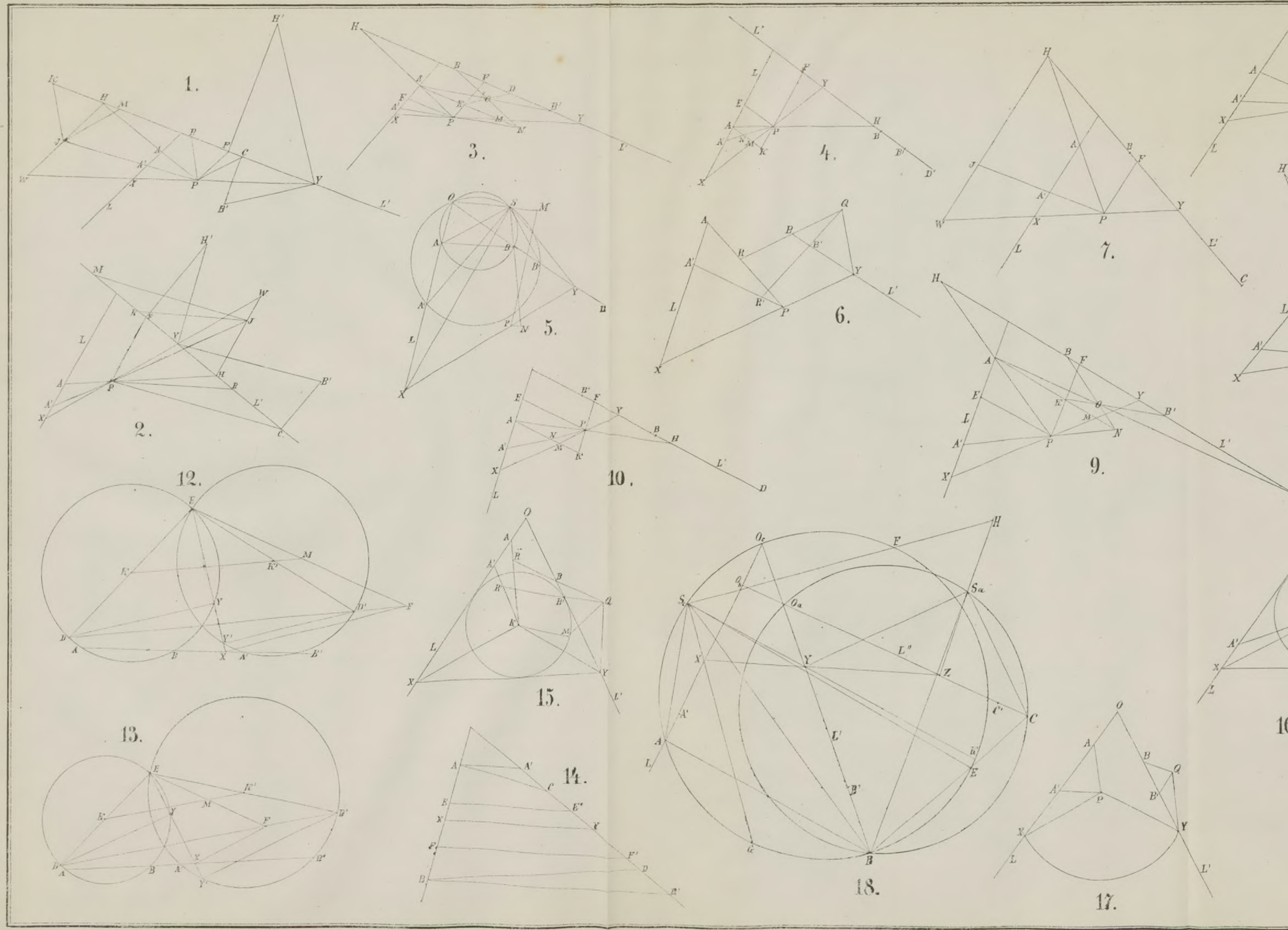
Es kommt nun noch darauf an, die Konstruktion möglichst abzurunden. L und L′ mögen sich in O_c; L′ und L″ in O_a, L″ und L in O_b schneiden. Trägt man auf L, L′, L″ bezüglich $AA' = m$, $BB' = n$, $CC' = p$ ab, so sieht man leicht, dass S_c auch der Situationspunkt für AA' und BB', und S_a der für BB' und CC' ist. S_c und S_a werden nach § 3, 2 konstruiert, und zwar ergiebt sich S_c als Schnittpunkt der Kreise um O_cAB und $O_cA'B'$, ebenso S_a als der der Kreise um O_aBC und $O_aB'C'$. Zur Konstruktion des Kreisbogens, welcher den zweiten geometrischen Ort für Y bilden soll, empfiehlt es sich den Punkt zu bestimmen, in welchem er S_aB schneidet. Dieser Punkt sei H, und HS_c treffe den Kreis O_cAB in F. Es ist nun $\angle (YZ, YS_a) = \angle (BC, BS_a)$ und, da S_c, Y, S_a, H auf einem Kreise liegen, ist $\angle (YS_a, YS_c) = \angle (BH, HS_c)$. Daraus folgt, dass auch $\angle (YS_c, YX)$ $= \angle (HS_c, CB)$ also auch $\angle (BS_c, BA) = \angle (HS_c, CB)$ ist. Schneiden HS_c und CB sich in N (in der Figur weggelassen) und zeichnet man $\triangle S_cEN$ ähnlich und gleichwendig mit S_cAB, so muss E auf CB liegen. Da ferner $\angle S_cAB = S_cEN$ ist, so liegt E auch auf dem Kreise O_cS_cAB. Daher ist E der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden BC. Die Winkel ES_aH und AS_cB sind einander gleich, und da sie Peripheriewinkel sind, stehen sie auf gleichen Bogen, daher sind die Bogen EF und AB einander gleich. Da E bekannt ist, so wird F, somit auch H, leicht gefunden.

Ist Y gefunden, so könnte man AX als vierte Proportionale zu n, m, BY finden, eleganter aber wird folgendes Verfahren sein. Es ist $\angle XS_cY = AS_cB$. Beide sind Peripheriewinkel des Kreises O_cS_cAB, daher stehen sie auf gleichen Bogen. Wird also dieser Kreis von S_cY in K und von S_cX in G geschnitten, so ist der Bogen $KG = BA$. Nun findet man K als Schnittpunkt des Kreises mit S_cY, den Punkt G auf dem Kreise aus der bekannten Länge des Bogens KG und X als Schnittpunkt von L und S_cG.

Konstruktion. Man trage $AA' = m$, $BB' = n$, $CC' = p$ bezüglich auf L, L′, L″ ab, beschreibe dann die Kreise um O_cAB, $O_cA'B'$, O_aBC, $O_aB'C'$. Die beiden ersten treffen sich ausser in O_c noch in S_c, die beiden letzten treffen sich ausser in O_a noch in S_a. Der Kreis O_cAB treffe BC in E. Nun schlage man mit dem Radius AB um E einen Kreis. Derselbe treffe den Kreis O_cAB in F, und S_cF treffe BS_a in H. Dann zeichne man um S_cS_aH einen Kreis, der L′ in Y trifft. S_cY treffe den Kreis O_cAB in K, und ein mit dem Radius BA um K geschlagener Kreis treffe den Kreis O_cAB in G, endlich treffen sich L und S_cG in X.

Als specieller Fall der vorstehenden Aufgabe zu lösen:

Gegeben sind drei Punkte A, B, C und drei bezüglich von ihnen ausgehende Gerade. Man soll auf diesen Geraden von A, B und C aus gleiche Stücke abschneiden, so dass die drei Endpunkte derselben auf einer Geraden liegen.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.