Stereometrische Aufgaben

über

Maxima und Minima

für elementare Lösung

in

Oberprima

von

M. Switalski,
Gymnasiallehrer.

Wissenschaftliche Beilage
zum Programm des Gymnasiums in Rastenburg.
Ostern 1889.

Rastenburg,
Druck von W. Kowalski.

I. Lösungsmethoden.

Aufgabe: Für welche Winkel x erreichen die Ausdrücke

$$\text{I. } \sin x \pm \cos x$$

$$\text{II. } \sin x \,.\, \cos(\alpha - x)$$

$$\text{III. } a_1 \sin x - a_2 \cos(\alpha + x)$$

$$\text{IV. } \cos^2 x + \sin 2x$$

ihre gröfsten Werte?

Auflösung: Es ist:

$$\text{I. } \sin x \pm \cos x \equiv \sqrt{[\sin x \pm \cos x]^2}$$

$$\equiv \sqrt{1 \pm \sin 2x.}$$

Das Maximum dieses Ausdrucks: $\sqrt{2}$ erhält man also im ersten Fall, wenn $x = 45^0$, und im zweiten Fall, wenn $x = 135^0$ genommen wird.

$$\text{II. } \sin x \,.\, \cos(\alpha - x) \equiv \tfrac{1}{2}\,[\sin\alpha + \sin(2x - \alpha)]$$

Es mufs also: $x = \left\{45^0 + \frac{\alpha}{2}\right\}$ gesetzt werden,

und das Maximum lautet:

$$\cos^2\left\{45^0 - \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

$$\text{III. } a_1 \sin x - a_2 \cos(\alpha + x) \equiv a_1 \sin x - a_2 \cos\alpha \cos x + a_2 \sin\alpha \sin x.$$

$$\equiv [a_1 + a_2 \sin\alpha] \sin x - a_2 \cos\alpha \cos x.$$

$$\equiv a_2 \cos\alpha \,.\left\{\frac{a_1 + a_2 \sin\alpha}{a_2 \cos\alpha} \,.\, \sin x - \cos x\right\}.$$

Setzt man nun:

$$\operatorname{cotg}\lambda = \frac{a_1 + a_2 \sin\alpha}{a_2 \cos\alpha},$$

so ist:

$$a_1 \sin x - a_2 \cos(\alpha + x) \equiv a_2 \cos\alpha \,.\, \frac{\sin[x - \lambda]}{\sin\lambda}.$$

Hieraus folgt, dafs der gegebene Ausdruck am gröfsten, nämlich:

$$= \frac{a_2 \cos\alpha}{\sin\lambda}$$

wird, wenn

$$x = 90^0 + \lambda,$$

also:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{a_1 + a_2 \sin \alpha}{a_2 \cos \alpha}$$

genommen wird.

IV. $\cos^2 x + \sin 2x \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \sin 2x$, daher zurückführbar auf III.

Aufgabe: Für welches x wird: V. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$ möglichst klein?

Auflösung: Bezeichnet man den gegebenen Ausdruck mit M, so ist:

$$M^2 = \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 2x}; \text{ daher:}$$

$$\sin 2x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 M^2}}{2 M^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{M^2} + \sqrt{\frac{4}{M^2} + \frac{1}{M^4}} \right\}.$$

Danach wächst $\sin 2x$, wenn M abnimmt. Wird demnach $\sin 2x = 1$, also $x = 45^0$, so ergiebt sich als Minimum des gegebenen Ausdrucks : $\sqrt{2}$.

Aufgabe: Die Ausdrücke:

VI. $a_1 x - a_2 x^2 + a_3$.

VII. $a_1 x^2 - a_2 x + a_3$.

VIII. $\frac{(x + a)^2}{x}$.

IX$_1$. $x \sqrt{a^2 - x^2} - x^2$

IX$_2$. $2 a x + a \sqrt{x (2a - x)}$

in Bezug auf Maximum oder Minimum zu untersuchen, wenn a, a_1, a_2, a_3 positive Zahlen sind.

Auflösung: Es ist:

$$\text{VI. } a_1 x - a_2 x^2 + a_3 \equiv a_3 - a_2 \left\{ x^2 - \frac{a_1}{a_2} x \right\}$$

$$\equiv a_3 + \frac{a_1^2}{4 a_2} - a_2 \left\{ x - \frac{a_1}{2 a_2} \right\}^2.$$

Am gröfsten und zwar:

$$\frac{4 a_2 a_3 + a_1^2}{4 a_2}$$

wird also dieser Ausdruck, wenn:

$$x = \frac{a_1}{2\ a_2}.$$

VII. Wie bei VI ergiebt sich:

$$a_1\ x^2 - a_2\ x + a_3 \equiv a_1 \left\{x - \frac{a_2}{2\ a_1}\right\}^2 + \frac{4\ a_1\ a_3 - a_2^2}{4\ a_1}.$$

Das Minimum:

$$\frac{4\ a_1\ a_3 - a_2^2}{4\ a_1}$$

tritt demnach bei diesem Ausdruck ein, wenn

$$x = \frac{a_2}{2\ a_1}$$

wird.

VIII. Sei der gegebene Ausdruck mit M bezeichnet, so ist:

$$M = \frac{(x + a)^2}{x}$$

$$x^2 - (M - 2\ a)\ x = -\ a^2.$$

$$x = \frac{1}{2} \left\{(M - 2\ a) + \sqrt{M\ [M - 4\ a]}\right\}.$$

Soll nun x reell bleiben, so geht aus dieser Gleichung hervor, dafs der kleinste Wert, den M noch annehmen kann, $= 4\ a$ ist. Dann ist $x = a$.

IX_1. Wie in VIII findet man aus:

$$M = x \sqrt{a^2 - x^2} - x^2$$

die Gleichung:

$$x^2 = \frac{1}{4} \left\{(a^2 - 2\ M) + \sqrt{2\ a^4 - (2\ M + a^2)^2}\right\}.$$

Offenbar ist der gröfste Wert, den M annehmen kann, derjenige, für welchen:

$$2\ a^4 = [2\ M + a^2]^2,$$

also:

$$M = \frac{a^2}{2} \left\{\sqrt{2} - 1\right\}.$$

Dann ist:

$$x^2 = \frac{a^2 \sqrt{2}}{4} \left\{\sqrt{2} - 1\right\}.$$

Eine einfachere Lösung dieses Falles ergiebt die Substitution

$$x = a \cos \varphi,$$

wodurch die Aufgabe auf I zurückgeführt wird.

IX_2 kann ähnlich wie IX_1 gelöst werden; einfacher ist die Lösung, wenn $x = 2\ a \cos^2 \varphi$ substituiert wird, wodurch dieser Fall auf III zurückgeführt wird.

Aufgabe: Hinsichtlich des Maximums oder des Minimums sind die Ausdrücke:

X. $$\frac{a\ x^3}{x - a}$$

XI. $$3\ a\ x^2 - x^3\sqrt{2}$$

zu untersuchen.

Auflösung: Sei jeder dieser Ausdrücke mit M bezeichnet, so ist:

X. $$M = \frac{a\ x^3}{x - a},\ \text{daher:}$$

$$x^3 - \frac{M}{a}\ x + M = 0.$$

Nach den Lehren der Trigonometrie ist aber:

$$[\lambda \cos \varphi]^3 - \frac{3}{4}\ \lambda^2\ (\lambda \cos \varphi) - \frac{1}{4}\ \lambda^3 \cos^3 \varphi = 0.$$

Es ist somit: $x = \lambda \cos \varphi,$

sobald: 1. $$\frac{3}{4}\ \lambda^2 = \frac{M}{a},$$

also: $$\lambda = \sqrt{\frac{4\ M}{3\ a}}$$

und 2. $$\frac{1}{4}\ \lambda^3 \cos 3\ \varphi = -M,$$

also:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{4\ M}{3\ a} \cdot \sqrt{\frac{4\ M}{3\ a}} \cdot \cos\ [180 - 3\ \varphi] = M$$

$$\sqrt{\frac{4\ M}{3\ a}} = \frac{3\ a}{\cos\ (180 - 3\ \varphi)}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt aber, daſs M am kleinsten, nämlich $= \frac{27}{4}\ a^3$, wird, wenn man $\varphi = 60^0$ nimmt. Dann ist: $\lambda = 3\ a$ und $x = \frac{3\ a}{2}$.

XI. $$M = 3\ a\ x^2 - x^3\ \sqrt{2};$$

$$x^3 - \frac{3\ a}{\sqrt{2}}\ x^2 + \frac{M}{\sqrt{2}} = 0.$$

Reduziert man diese Gleichung durch die Substitution

$$x = y + \frac{a}{\sqrt{2}},$$

so ergiebt sich:

$$y^3 - \frac{3\,a^2}{2}\,y - \frac{a^3 - M}{\sqrt{2}} = 0.$$

Dadurch ist dieser Fall auf X zurückgeführt. Man findet durch dieselbe Rechnung, wie in X

$$M = a^3\,(1 - \cos 3\,\varphi).$$

Am gröſsten, nämlich $= 2\,a^3$, wird somit M, wenn

$$\varphi = 60^0.$$

Dann ist:

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

und

$$x = a\sqrt{2}.$$

II. Aufgaben.*)

1.—4. Aufgabe: Eine Strecke a ist in zwei Teile so zu zerlegen, daſs, wenn man über dem einen Teile ein gleichseitiges Dreieck errichtet, während man den anderen Teil

a) zur Hypotenuse eines rechtwinkelig-gleichschenkligen Dreiecks,

b) zum Durchmesser eines Kreises

nimmt, beide Figuren bei der Rotation um a Körper von der kleinsten Summe der

1. Oberflächen,
2. Volumina

beschreiben. VII. XI.

Auflösung: Sei x die Seite des gleichseitigen Dreiecks, so ist

a) 1. die Gesamtoberfläche $= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left\{2\,x^2 + (a - x)^2\right\}$.

---

*) Den Aufgaben: 25, 35, 36, 51, 52, 69—71, 100, 102, 103, 111, 113—116, 128, 140, 141, 1 2. dieser Sammlung begegnet man zwar bereits teils in „Martus, mathematische Aufgaben", teils in „Lieber, stereometrische Aufgaben", teils in der mathematisch naturwissenschaftlichen Zeitschrift von Hoffmann; dieselben wurden trotzdem hier aufgenommen, weil sie fast durchweg einer Erweiterung fähig waren.

Die übrigen Aufgaben dürften neu sein und führen in der Regel zu ganz einfachen Resultaten.

Bei den Rotationsaufgaben ist die Guldinsche Regel mit Absicht nicht vorausgesetzt.

Das Minimum: $$\frac{a^2 \pi \sqrt{2}}{3}$$

erhält man, wenn: $x = \frac{a}{3}$ gesetzt wird.

2. Die Summe der Vol. $= \frac{\pi}{12} \left\{2 x^3 + (a - x)^3\right\}$.

Hieraus ergiebt sich als Minimum: $\frac{\pi a^3}{6} \left\{\sqrt{2} - 1\right\}^2$. Es tritt ein, wenn: $x = a (\sqrt{2} - 1)$ wird.

b) 1. die Gesamtoberfläche $= \pi [x^2 \sqrt{3} + (a - x)^2]$.

Diese wird am kleinsten, nämlich: $\frac{a^2 \pi \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$, wenn: $x = \frac{a}{1 + \sqrt{3}}$ wird.

2 Das Gesamtvolumen $= \frac{\pi}{12} \left\{3 x^3 + 2 (a - x)^3\right\}$.

Es erreicht den kleinsten Wert: $\frac{a^3 \pi}{2} \left\{\sqrt{3} - \sqrt{2}\right\}^2$, wenn $x = a \sqrt{2} [\sqrt{3} - \sqrt{2}]$ genommen wird.

5—8. Aufgabe: In einem gegebenen Dreieck zu der Seite c eine Parallele so zu ziehen, dafs

a) dieselbe bei der Rotation des Dreiecks um c einen Cylinder

1. von dem gröfsten Mantel,
2. von der gröfsten Oberfläche,
3. von dem gröfsten körperlichen Inhalte,

b) die durch die Parallele nach der Dreiecksecke zu abgeschnittene dreieckige Fläche bei der Rotation um c einen Körper

4. von der gröfsten Oberfläche

bescreibt. VI. XI.

Auflösung: Mögen: a, b, c die Seiten und F die Fläche des gegebenen Dreiecks bedeuten; sei ferner h_c die Dreieckshöhe nach c und ρ der Abstand der gesuchten Parallelen von c, so ist:

1. der Cylindermantel $= \frac{2 \pi c}{h_c} \rho (h_c - \rho)$.

Es mufs also: $\rho = \frac{1}{2} h_c$. Dann ist der gröfste Wert des Mantels

$$= F . \pi.$$

2. Die Oberfläche des Cylinders $= \frac{2\pi\rho}{h_c}\left\{2F - \rho(c - h_c)\right\}$.

Der gröſste Wert dieses Ausdrucks: $\frac{2\pi F^2}{h_c(c - h_c)}$ ergiebt sich, wenn: $\rho = \frac{F}{c - h_c}$. Es muſs somit, soll die Lösung möglich sein, $c > h_c$.

3. das Volumen $= \frac{\pi c \rho^2}{h_c}\left\{h_c - \rho\right\}$.

Das Maximum des Volumens: $\frac{8}{27}\pi F h_c$ erhält man, wenn man: $\rho = \frac{2}{3} h_c$ nimmt.

4. die Oberfläche des ringförmigen Körpers

$$= \frac{\pi}{h_c}\left\{(a + b) h_c^2 + 4 F \rho - \rho^2 (a + b + 2c)\right\}.$$

Am gröſsten, nämlich: $\pi h_c \left\{\frac{(a + b)^2 + c(2a + 2b + c)}{a + b + 2c}\right\}$, wird diese Oberfläche, wenn $\rho = \frac{2F}{a + b + 2c}$.

9. Aufgabe: In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c ist nach der Seite c eine Ecktransversale so zu ziehen, daſs die Summe der beiden Doppelkegel, welche durch Rotation der Teildreiecke um die Seiten a und b erzeugt werden, möglichst klein wird. VII.

Auflösung: Möge F die Fläche und h_a, h_b die nach den Seiten a und b gehenden Höhen des gegebenen Dreiecks sein, so ist, wenn x **den** Abschnitt der Dreiecksseite c bedeutet, welcher an a liegt:

die Summe der körperlichen Inhalte der beiden Doppelkegel

$$= \frac{2\pi F}{3c^2}\left\{h_a \cdot x^2 + h_b (c - x)^2\right\}.$$

Den kleinsten Wert: $\frac{2\pi F \cdot h_a \cdot h_b}{3(h_a + h_b)}$ erreicht dieser Ausdruck, wenn: $x = \frac{c \cdot h_b}{h_a + h_b}$ wird.

10—12. Aufgabe: Durch den Scheitel

1. des rechten Winkels eines rechtwinkeligen — durch die Kathete a und deren Gegenwinkel α,

2. des einen Basiswinkels eines gleichschenkligen — durch die Basis a und deren Gegenwinkel α,
3. des Winkels γ eines durch zwei Seiten a und b und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel γ

bestimmten Dreiecks ist in der erweiterten Ebene desselben eine gerade Linie so zu ziehen, dafs durch die Rotation des Dreiecks um diese Gerade ein Körper vom gröfsten Volumen entsteht. III.

Auflösung: Möge die gesuchte Gerade mit der rotierenden Dreiecksseite a den Winkel φ einschliefsen, so ist der Inhalt des Rotationskörpers, welcher erzeugt wird

1. durch das rechtwinklige Dreieck,

$$= \frac{\pi}{3} \cdot a^3 \cdot \operatorname{cotg} \alpha \, [\cos \varphi \cdot \operatorname{cotg} \alpha + \sin \varphi].$$

Es mufs demnach: $\varphi = \alpha$ werden, soll das Volumen am gröfsten werden, und es ist das Maximum des Inhalts $= \frac{a^3 \cdot \pi \cdot \operatorname{cotg} \alpha}{3 \sin \alpha}$.

2. durch das gleichschenklige Dreieck,

$$= \frac{\pi \cdot a^3 \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{12 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} \left\{ 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi + \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right) \right\}.$$

Wird also: $\operatorname{tg} \varphi = 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, so erhält das Volumen seinen gröfsten Wert: $\frac{\pi \cdot a^3 \cdot \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \sin \lambda}$, wobei $\operatorname{cotg} \lambda = 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

3. durch das ungleichseitige Dreieck:

$$= \frac{\pi}{3} a \, b \sin \gamma \, [a \sin \varphi + b \cdot \sin (\varphi + \gamma)].$$

Es mufs mithin: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a + b \cdot \cos \gamma}{b \cdot \sin \gamma}$ werden; dann wird das

Volumen am gröfsten und zwar: $\frac{a \, b^2 \, \pi \sin^2 \gamma}{3 \sin \lambda}$, wobei

$$\operatorname{cotg} \lambda = \operatorname{tg} \varphi.$$

In allen drei Fällen steht somit die Achse des Rotationskörpers senkrecht auf der durch dieselbe Ecke gehenden Schwerlinie des Dreiecks.

13. Aufgabe: Welches von den um ein Quadrat derart beschriebenen gleichschenkligen Dreiecken, dafs die eine Quadratseite auf die Basis des Dreiecks und die Endpunkte der

Gegenseite auf die Schenkel fallen, erzeugt bei der Rotation um die Basis einen Doppelkegel vom kleinsten körperlichen Inhalte? X.

Auflösung: Die Quadratseite sei a und die Höhe des gesuchten Dreiecks h, so ist das Volumen des Doppelkegels

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\,h^3}{h - a}.$$

Dieser Ausdruck hat zum kleinsten Wert: $\frac{9}{4}\,\pi\,a^3$ und erreicht denselben, wenn: $h = \frac{3}{2}\,a$ wird.

14. Aufgabe: Die Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks gehen durch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit den Seiten a so, dafs dessen Basis der einen Seite a paralle läuft. Welches ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks, wenn durch die Rotation der Fläche desselben um die Basis ein Körper vom kleinsten Volumen entstehen soll? X.

Auflösung: Ist h die gesuchte Höhe, so ist das Volumen des Rotationskörpers

$$= \frac{2\,a\,\pi}{3} \cdot \frac{h^3}{2\,h - a\sqrt{3}}.$$

Am kleinsten, nämlich: $\frac{27\,a^3\,\pi}{16}$, wird dieser Ausdruck, wenn: $h = \frac{3}{4}\,a\sqrt{3}$ wird.

15—16. Aufgabe: Aus ρ, dem Radius des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises, und dem Dreieckswinkel α dasjenige Dreieck zu bestimmen, welches bei der Rotation um die dem Winkel α gegenüberliegende Seite einen Doppelkegel

1. vom kleinsten Volumen,
2. von der kleinsten Oberfläche

beschreibt. VIII.

Auflösung: Bezeichnet x einen zweiten Dreieckswinkel und h_a die zur Gegenseite a des Winkels α gehörige Dreieckshöhe, so ist zunächst:

$$a = \frac{2\,\rho\,\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}$$

und:
$$h_a = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \left\{\sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Daher: 1. das Volumen des Ratationskörpers
$$= \frac{2\,\pi}{3}\,\rho^3 \cdot \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\left\{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\right\}^2}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Hieraus ergiebt sich der kleinste Wert: $\frac{16\,\pi}{3}\,\rho^3 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$

für:
$$\sin\left\{\frac{\alpha}{2} + x\right\} = 3\sin\frac{\alpha}{2}.$$

2. die Oberfläche des Doppelkegels
$$= \frac{2\,\pi\,\rho^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Der kleinste Wert dieses Ausdrucks
$$2\,\pi\,\rho^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \left\{1 + \sqrt{2}\right\}^2$$
ergiebt sich, wenn: $\sin\left\{x + \frac{\alpha}{2}\right\} = \left\{1 + \sqrt{2}\right\}\sin\frac{\alpha}{2}$.

17. Aufgabe. Welches von den gleichschenkligen Dreiecken, die einen konstanten Umfang haben, beschreibt bei der Rotation um die Basis einen Doppelkegel vom gröſsten Volumen? VI.

Auflösung: Sei 2 a der gegebene Umfang und x der Schenkel des Dreiecks, so ist:
$$\text{das Vol.} = \frac{2}{3}\,a\,\pi \cdot (2\,x - a)\,(a - x).$$

Am gröſsten und zwar $= \frac{a^3\,\pi}{12}$ wird demnach das Volumen, wenn: $x = \frac{3}{4}\,a$.

18—19. Aufgabe: Welches von den Rechtecken mit konstantem Umfange beschreibt bei der Rotation um eine seiner Seiten einen Cylinder

1. vom gröſsten Volumen?

2. bei welchem der Mantel die Summe der Grundflächen an Gröſse am meisten übertrifft?

XI. VI.

Auflösung: Ist a der halbe Umfang des Rechtecks und rotiert dasselbe um die Seite (a — x), so ist:

1. das Volumen $= x^2 \pi (a - x)$.

Es wird demnach das Volumen am gröſsten und zwar $= \frac{4 a^3 \pi}{27}$, wenn: $x = \frac{2}{3} a$.

2. Übertrifft der Mantel die Summe der Grundflächen um D, so ist: $D = 2 x \pi (a - 2 x)$; es erreicht D den gröſsten Wert, wenn: $x = \frac{a}{4}$.

20. Aufgabe: Welches von den Parallelogrammen, die in einem Winkel und in dem Umfange übereinstimmen, beschreibt bei der Rotation um eine seiner Seiten einen Körper vom gröſsten Volumen? XI.

Auflösung: Sei α der Winkel und a der halbe Umfang des Parallelogramms und rotiere dasselbe um die Seite (a — x), so ist: das Volumen $= \pi \,.\, \sin^2 \alpha \,.\, x^2 (a - x)$.

Hieraus folgt, daſs das Volumen am gröſsten und zwar $= \frac{4}{27} a^2 \pi \sin^2 \alpha$ wird, wenn: $x = \frac{2}{3} a$.

Die Oberfläche des Rotationskörpers ist $= \frac{4}{3} a^2 \pi \,.\, \sin \alpha$.

21—22. Aufgabe: Durch die eine Ecke eines Rechtecks ist in der erweiterten Ebene dieser Fläche eine gerade Linie so zu ziehen, daſs durch die Rotation des Rechtecks um diese Linie ein Körper

1. vom gröſsten Volumen,
2. von der gröſsten Oberfläche

erzeugt wird. III.

Auflösung: Sind a und b die Seiten des Rechtecks und schlieſst a mit der Rotationsachse den Winkel φ ein, so ist:

1. das Volumen des Rotationskörpers $= a b \pi \,.\, (a \sin \varphi + b \cos \varphi)$,
2. die Oberfläche desselben $= 2 \pi (a + b) \,.\, (a \sin \varphi + b \cos \varphi)$.

Am gröſsten wird jeder dieser Ausdrücke und zwar

das Volumen $= a b \pi \sqrt{a^2 + b^2}$,

die Oberfl. $= 2 \pi (a + b) \sqrt{a^2 + b^2}$, wenn: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$, also wenn die Rotationsachse senkrecht zur Diagonale des Rechtecks steht.

23—24. Aufgabe: Durch den Scheitel des Winkels α eines Parallelogramms mit den Seiten a und b ist in der erweiterten Ebene des Parallelogramms eine gerade Linie so zu ziehen, dafs durch die Rotation der Fläche des Parallelogramms um diese Linie ein Körper

1. vom gröfsten Volumen,
2. von der gröfsten Oberfläche

entsteht. III.

Auflösung: Möge d die Diagonale des Rechtecks bedeuten und bilde die Rotationsachse mit a den Winkel φ, so findet man:

1. das Vol. des Rotationskörp. $= a\, b\, \pi \sin \alpha\, [a \sin \varphi + b \sin (\alpha + \varphi)]$,
2. die Oberfläche desselben $= 2\pi (a + b)\, [a \sin \varphi + b \,.\, \sin (\alpha + \varphi)]$.

Durch die Substitution:

$$\operatorname{cotg} \lambda = \frac{a + b \cos \alpha}{b \sin \alpha}$$

findet man, dafs der gröfste Wert

1. des Volumens $= a\, b\, d\, \pi \sin \alpha$,
2. der Oberfläche $= 2\, \pi\, d\, [a + b]$

ist, sobald $\varphi = \lambda$ wird.

Aus der Gleichung: $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a + b \cos \alpha}{b \sin \alpha}$ ergiebt sich ferner, dafs die Rotationsachse auf d senkrecht steht.

25—26. Aufgabe: (Vergl. 162, 163.) Welche Kreissehne beschreibt bei der Rotation um den ihr parallelen Durchmesser die Mantelfläche eines Cylinders

1. vom gröfsten Volumen?
2. von der gröfsten Oberfläche?

X. III.

Auflösung: Es bedeute r den Radius des gegebenen Kreises und $2\,\chi$ den Centriwinkel, unter welchem vom Kugelmittelpunkte aus der Durchmesser der Endfläche des erzeugten Cylinders erscheint, so ist:

1. das Volumen des Cylinders $= 2\, r^3\, \pi \,.\, \sin^2 \chi \cos \chi$,

und der gröfste Wert: $\frac{4\, \pi\, r^3}{3 \sqrt{3}}$ ergiebt sich, wenn: $\cos \chi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. die Oberfläche des Cylinders $= 2 r^2 \pi [\sin^2 \chi + \sin 2 \chi]$. Am gröfsten, nämlich: $r^2 \pi [1 + \sqrt{5}]$, findet man die Oberfläche, wenn: $\operatorname{tg} 2 \chi = - 2$ gesetzt wird.

27—28. Aufgabe: Aus der Fläche eines Quadrats von der Seite a sind an zwei Nachbarecken A und B zwei einander tangierende Quadranten so auszuschneiden, dafs die Restfläche bei der Rotation um AB einen Körper

1. vom gröfsten Volumen,
2. von der kleinsten Oberfläche

beschreibt. VI. VII.

Auflösung: Ist x der Radius des einen Quadranten, so ist, wenn mit V das Volumen und mit G die Oberfläche des Körpers bezeichnet wird,

$$1.\ V = \frac{a^3 \cdot \pi}{3} - 2 a \pi (x^2 - a x),$$

$$2.\ G = 5 a^2 \pi + 2 \pi (x^2 - a x).$$

Es wird also V Maximum und G Minimum, nämlich:

$$V = \frac{5 a^3 \pi}{6}.$$

$$G = \frac{9 a^2 \pi}{2}.$$

wenn: $x = \frac{a}{2}$.

29—30. Aufgabe: An zwei Ecken A und B eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite a sind aus der Dreiecksfläche zwei einander berührende Kreissextanten so auszuschneiden, dafs die Restfläche bei der Rotation um AB einen Körper

1. vom gröfsten Inhalt,
2. von der kleinsten Oberfläche

beschreibt. VI. VII.

Auflösung: Ist x der Radius des einen Sextanten, so ist

$$1.\ \text{das Volumen} = \frac{5}{12} a^3 \pi - a \pi (x^2 - a x).$$

$$2.\ \text{die Oberfläche} = \frac{\pi}{2} a^2 . (2 + \sqrt{3}) + \pi . (2 - \sqrt{3}) (x^2 - a x).$$

Für: $x = \frac{a}{2}$ wird somit das Volumen Maximum und die Oberfläche Minimum und zwar:

$$\text{Vol.} = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{a^2 \pi}{4} \left(2 + 3 \sqrt{3}\right).$$

31—32. Aufgabe: Aus der Fläche eines Rhombus mit der Seite a und dem spitzen Winkel $a = 60^0$ sind an zwei Nachbarecken zwei einander berührende Kreissectoren so auszuschneiden, daſs die Restfläche des Rhombus bei der Rotation um die Centrale der beiden Kreise einen Körper

1. von dem gröſsten Volumen,
2. von der kleinsten Oberfläche

erzeugt. XI. VI.

Auflösung: Sei x der Radius des einen und $(a - x)$ derjenige des andern Kreises, so ist:

1. das Volumen des Rotationskörpers

$$= \frac{\pi}{12} \left\{9 a^3 - 4 . (3 x^3 + [a - x]^3)\right\}.$$

Das Maximum dieses Raumes: $\frac{a^3 \pi}{4} \left\{2 \sqrt{3} - 1\right\}$ erhält man, wenn: $x = \frac{a}{1 + \sqrt{3}}$ wird.

2. die Oberfläche desselben

$$= \frac{\pi}{2} \left\{a^2 (2 + 3 \sqrt{3}) - 2 a x (2 - \sqrt{3}) + 2 x^2 . (4 - \sqrt{3})\right\}.$$

Den gröſsten Wert: $\frac{3 . a^3 \pi \sqrt{3} [8 - \sqrt{3}]}{4 [4 - \sqrt{3}]}$ erreicht dieser Ausdruck, wenn: $x = \frac{a (2 - \sqrt{3})}{2 (4 - \sqrt{3})}$ genommen wird.

33—36. Aufgabe: Welches von den in einem Halbkreis über dem Durchmesser stehenden rechtwinkligen Dreiecken beschreibt bei der Rotation um die Hypotenuse einen Doppelkegel

1. von der gröſsten Oberfläche?
2. von dem gröſsten Inhalte?
3. von der gröſsten Differenz der Mantelflächen?
4. von der gröſsten Differenz der Volumteile?

X.

Auflösung: Sei χ der eine spitze Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks mit der Hypotenuse 2 r, so wird:

1. die Oberfläche $= 2\, r^2 \pi \sin 2\chi \sqrt{1 + \sin 2\chi}$,

sowie: 2. das Volumen $= \frac{2}{3} r^3 \pi \sin^2 2\chi$

offenbar am gröfsten, wenn das rotierende Dreieck gleichschenkl. ist.

3. Die Differenz der Oberflächenteile

$$= 2\, r \pi \sin 2\chi \,.\, \sqrt{1 - \sin 2\chi}$$

wird Maximum, wenn: $\sin 2\chi = \frac{2}{3}$, also die Höhe des rotierenden Dreiecks $= \frac{2}{3}$ r genommen wird.

4. Die Differenz der Volumteile

$$= \frac{2\pi}{3} \,.\, r^3 \,.\, \sin^2 2\chi \,.\, \cos 2\chi$$

wird am gröfsten, wenn: $\cos 2\chi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also die Höhe nach der Hypotenuse des rotierenden Dreiecks $= \frac{r}{3} \sqrt{6}$.

37—39. Aufgabe: Welche von den in eine Kugel gestellten geraden Pyramiden mit regulärer Basis von:

1. drei —, 2. vier —, 3. n —

Seiten hat den gröfsten körperlichen Inhalt? XI.

Auflösung: Sei r der Kugelradius und x der Abstand der Grundfläche der geraden Pyramide vom Mittelpunkte der Kugel, sei ferner der Winkel $\frac{360^0}{n}$ mit γ bezeichnet, so ist das Volumen:

1. der dreiseit. Pyr. $= \frac{\sqrt{3}}{4} \,.\, (r + x)(r^2 - x^2)$,

2. der vierseit. Pyr. $= \frac{2}{3} (r + x) \,.\, (r^2 - x^2)$.

3. der nseit. Pyr. $= \frac{n}{6} \,.\, \sin \gamma \,.\, (r + x)(r^2 - x^2)$.

Es mufs demnach für den Fall des Maximums dieser Körper: $x = \frac{r}{3}$ werden, und es ist das gröfste Volumen 1. der dreiseiseitigen Pyr. $= \frac{8\, r^3 \,.\, \sqrt{3}}{27}$; 2. der vierseitigen Pyr. $= \frac{64\, r^3}{81}$; 3. der nseitigen Pyr. $= \frac{16\, n}{81} \,.\, r^3 \,.\, \sin \gamma$.

40. Aufgabe: Ein n-seitiges reguläres Polygon soll an den Ecken durch Wegnahme vierseitiger kongruenter Flächen so abgestumpft werden, dafs durch Umbiegung der rechteckigen Seitenteile aus der Restfläche des Polygons ein n-seitiges gerades Hohlprisma mit regulärer Basis und dem gröfsten körperlichen Inhalte entsteht. XI.

Auflösung: Sei a die Seite des regulären Polygons und x die Grundkante des zu bestimmenden Prismas, sei ferner $\frac{180^0}{n} = \gamma$ gesetzt, so ist

$$\text{der Inhalt des Prismas} = \frac{n}{8} \cdot \operatorname{ctg}^2 \gamma \cdot x^2 \cdot (a - x).$$

Es mufs somit im Fall des Maximums: $x = \frac{2}{3}$ a sein und der gröfste Wert für den körperlichen Inhalt lautet:
$\frac{n}{54} \cdot a^3 \cdot \operatorname{ctg}^2 \gamma$.

41—44. Aufgabe: Welches von den senkrecht zur Grundfläche in eine gerade nseitige Pyramide mit regulärer Basis derart hineingestellten geraden nseitigen Prismen, dafs die Ecken der oberen Endfläche auf die:

a) Seitenkanten,

b) nach den Grundkanten gehenden Seitenhöhen

der Pyramide fallen, hat

1. das gröfste Volumen?
2. bei welchem übertrifft die Summe der Seitenflächen diejenige der Endflächen an Gröfse am meisten? XI. VI.

Auflösung: Ist h die Pyramidenhöhe, ist ferner r der Radius des um die Pyramidenbasis — und ρ derjenige des um die Basis des Prismas beschriebenen Kreises und setzt man $2\gamma = \frac{360^0}{n}$, so ist:

$$\text{a) 1. das Volumen} = \frac{n \cdot h}{2 r} \sin 2\gamma \cdot \rho^2 \cdot (r - \rho).$$

Der gröfste Wert: $\frac{2 n h r^2}{27} \cdot \sin 2\gamma$ ergiebt sich, wenn man: $\rho = \frac{2}{3}$ r setzt.

2. Die Summe der Seitenfl. übertrifft die Summe der Endfl. um:

$$\frac{2\,n}{r} \cdot \sin\gamma \cdot \rho\,[h\,r - \rho\,(h + r\cos\gamma)].$$

Das Maximum dieses Ausdrucks: $\frac{h^2\,r\,\pi\,\sin\gamma}{2\,(h + r\cos\gamma)}$ erhält man, wenn $\rho = \frac{h\,.\,r}{2\,(h + r\cos\gamma)}$ gesetzt wird.

b) 1. 2. Im zweiten Fall hat man nur $r\cos\gamma$ statt r zu setzen.

45—47. Aufgabe: Ein dreiseitiges gerades Prisma mit kongruenten gleichseitigen Endflächen ruht mit den Ecken der einen Basis auf drei in einer Würfelecke zusammentreffenden Würfelkanten und mit den Ecken der anderen Grundfläche auf den drei in der Gegenecke des Würfels zusammenstofsenden Seitendiagonalen. Wie grofs ist die Basis des Prismas zu nehmen, wenn

1. der körperliche Inhalt,
2. die Summe der Seitenflächen,
3. die Oberfläche

des Prismas möglichst grofs werden soll? XI. VI.

Auflösung: Bedeute a die Würfelkante und x die Grundkante des Prismas, so ist:

1. das Volumen $= \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot x^2 \cdot [a\sqrt{2} - x]$;

dasselbe erreicht seinen gröfsten Wert: $\frac{2}{9}\,a^3$, wenn: $x = \frac{2}{3}\,a\sqrt{2}$ wird.

2. die Summe der Seitenflächen $= \frac{3\sqrt{6}}{2}\,x\,(a\sqrt{2} - x)$;

der gröfst. Wert dies. Ausdr.: $\frac{3\,a^2}{4} \cdot \sqrt{6}$ hat statt, wenn: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

3. die Oberfläche $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\,[6\,a - x\,(3\sqrt{2} - 1)]$;

dieselbe erreicht ihren gröfsten Wert: $\frac{9\,a^2 \cdot \sqrt{3}}{2\,(3\sqrt{2} - 1)}$, wenn:

$$x = \frac{3\,a}{3\sqrt{2} - 1}.$$

48—52. Aufgabe: Bei welchem Hohlmafs von der Form e. geraden

1. vierseitigen
2. dreiseitigen } Pyramide mit regulärer Basis,
3. nseitigen
4. Cylinders,
5. Kegels,

das einen gegebenen Rauminhalt faſst, geht von der zu messenden Flüssigkeit durch die Adhäsion an den Wänden möglichst wenig verloren? X.

Auflösung: Sei x die Seite der Pyramidenbasis, ϱ der Radius des Cylinders und des Kegels, $\frac{360^0}{n} = 2\,\gamma$, und bedeute h die Körperhöhe der Hohlmaſse, deren Rauminhalt V sein möge, so ist die Summe der Gefäſswände

1. bei der viers. Pyr. $= \frac{1}{x} \cdot \sqrt{36\ V^2 + x^6}$.

Das Minimum dieses Ausdrucks: $3 \sqrt[3]{2\ \sqrt{3}\ V^2}$ ergiebt sich,

wenn: $x = \sqrt[3]{3\ V\ \sqrt{2}}$ und $h = \sqrt[3]{\frac{3\ V}{2}}$.

2. bei der dreiseit. Pyramide $= \frac{1}{x} \sqrt{108\ V^2 + \frac{3}{16}\ x^6}$.

Am kleinsten, nämlich: $3 \sqrt[3]{\frac{9\ V^2}{2}}$, wird diese Summe, wenn:

$x = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3\ V}{\sqrt{2}}}$ und $h = \frac{\sqrt[3]{6\ V}}{\sqrt{3}}$.

3. bei der nseitigen Pyr. $= \frac{1}{x} \sqrt{36\ V^2\ tg^2\,\gamma + \frac{n^2}{16}\ cotg^2\,\gamma \cdot x^6}$;

am kleinsten, nämlich: $3 \sqrt[3]{\frac{n}{2}\ \sqrt{3}\ .\ tg\,\gamma\ .\ V^2}$, wird hier dieser Ausdruck, wenn $x = 2 \sqrt[3]{\frac{3\ V\ tg^2\,\gamma}{n\ \sqrt{2}}}$ und $h = \sqrt[3]{\frac{6\ V}{n\ tg\,\gamma}}$.

4. bei dem cylinderförmigen Gefäſs $= \frac{1}{\varrho} \left\{\varrho^3\,\pi + 2\ V\right\}$.

Die kleinste Wand: $3\sqrt[3]{\pi V^2}$ ergiebt sich hieraus, wenn:

$\rho = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

5. bei dem kegelförmigen Maſs $= \frac{1}{\rho} \sqrt{\rho^6 \pi^2 + 9 V^2}$.

Den kleinsten Wert dieses Ausdrucks: $\frac{3}{2} \sqrt[3]{4 \pi \sqrt{3} \,.\, V^2}$

findet man somit, wenn man: $\rho = \sqrt[3]{\frac{3 V}{\pi \sqrt{2}}}$ und $h = \sqrt[3]{\frac{6 V}{\pi}}$

nimmt.

53—54. Aufgabe: Jede der Endflächen eines geraden Cylinders ist die Grundfläche eines geraden Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkte der anderen Endfläche liegt. Bei der Durchdringung der Kegel entsteht ein stundenglasartiger Körper und ein Doppelkegel. Welches müssen bei gegebener Oberfläche die Dimensionen des Cylinders sein, wenn bei beiden inneren Körpern

1. die Inhalte am gröſsten,
2. die Mantelflächen am kleinsten

werden sollen? XI. VII.

Auflösung: Ist F die gegebene Oberfläche und r der Radius der Endfläche des Cylinders, so ist:

1. Inhalt des Stundenglases $= \frac{7}{24}\, r\, [F - 2\, r^2\, \pi]$;

Inhalt des Doppelkegels $= \frac{1}{24}\, r\, [F - 2\, r^2\, \pi]$.

Das Maximum tritt ein, wenn: $r = \sqrt{\frac{F}{6\pi}}$.

2. Mantel des Stundengl. $= \frac{3}{4} \,.\, \sqrt{F^2 + 8\, r^4\, \pi^2 - 4\, r^2\, \pi\, F}$;

Mantel des Doppelkeg. $= \frac{1}{4} \,.\, \sqrt{F^2 + 8\, r^4\, \pi^2 - 4\, r^2\, \pi\, F}$.

Am kleinsten werden diese Flächen, wenn: $r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{\pi}}$.

55—56. Aufgabe: Zwei kongruente Quadrate, deren Ecken auf je vier in einer von zwei Gegenecken eines regulären Oktaeders zusammenlaufenden

a) Kanten,

b) Seitenhöhen

liegen, stehen senkrecht zu der die erwähnten Gegenecken des Oktaeders verbindenden Körperdiagonale und bilden die Endflächen zweier Pyramiden, von denen jede ihre Spitze im Mittelpunkte der Basis der anderen hat. Wie grofs müssen diese Quadrate sein, wenn bei der Durchdringung der Pyramiden ein Doppelpyramidenstumpf vom gröfsten Volumen entstehen soll? XI.

Auflösung: Bezeichnet a die Oktaederkante und x die Seite des Quadrats, so ist das Volumen des Doppelpyramidenstumpfs

$$a) = \frac{7}{6\sqrt{2}} \cdot x^2 \cdot (a - x).$$

Das Maximum tritt bei $x = \frac{2}{3}$ a ein.

$$b) = \frac{7}{12} \cdot x^2 \, [a\sqrt{2} - 2\,x].$$

Dies Volumen wird am gröfsten, wenn: $x = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{2}$.

57. Aufgabe: Zwei kongruente Kreise, welche senkrecht zu derselben Diagonale eines regulären Oktaeders gestellt sind und mit den Peripherieen je vier in einer Oktaederecke zusammentreffende Seiten des Oktaeders berühren, bilden die Endflächen zweier Kegel, von denen jeder seine Spitze im Mittelpunkte der Basis des anderen hat. Wie grofs müssen die Kreise sein, wenn bei der Durchdringung der Kegel ein Stundenglas vom gröfsten Volumen entstehen soll? XI.

Auflösung: Bedeutet a die Oktaederkante und ρ den Radius der Endfläche des stundenglasförmigen Körpers, so ist das Volumen des Körpers

$$V = \frac{7\,\pi\sqrt{2}}{12} \cdot \rho^2 \cdot (a - 2\,\rho),$$

und es mufs im Fall des Maximums $\rho = \frac{a}{3}$ werden, d. h. die Endflächen des Stundenglases müssen die Oktaederseiten in den Schwerpunkten berühren.

58—59. Aufgabe: Ein aus zwei kongruenten Kegeln bestehender Doppelkegel ist durch zwei senkrecht zur Achse gerichtete Ebene in kongruenten Kreisen so zu schneiden, daſs, wenn man jeden dieser Kreise zur Grundfläche eines Kegels nimmt, dessen Spitze im Mittelpunkte des anderen Kreises liegt, der bei der Durchdringung der Kegel entstehende

1. stundenglasförmige Körper,
2. Doppelkegel

das gröſste Volumen hat. XI.

Auflösung: Sei bei dem gegebenen Doppelkegel r der Radius und 2 h der Abstand der Spitzen, sei ferner ρ der Radius des Stundenglases, so ist:

1. das Vol. des Stundengl. $= \frac{14}{3} \pi \cdot \frac{h}{r} \cdot \rho^2 (r - \rho)$.

2. das des Doppelkegels $= \frac{\pi h}{2 r} \cdot \rho^2 (r - \rho)$.

Die Volumina werden also am gröſsten, wenn: $\rho = \frac{2}{3} r$.

60—63. Aufgabe: Auf einer Kugel vom Radius r zwei kongruente Parallelkreise so zu wählen, daſs, wenn man jeden derselben zur Grundfläche eines geraden Kegels nimmt, dessen Spitze im Mittelpunkte des anderen Kreises liegt, bei der Durchdringung der Kegel:

a) ein stundenglasartiger Körper
   1. vom gröſsten Volumen,
   2. von der gröſsten krummen Oberfläche,
b) ein Dopelkegel
   1. vom gröſsten Volumen,
   2. vom gröſsten Mantel

entsteht. XI. VI.

Auflösung: Sei ρ der Radius der parallelen kongruenten Kugelkreise, so ist:

a) 1. das Vol. des Stundenglases $= \frac{7 \pi}{6} \cdot h (r^2 - h^2)$,

2. die Mantelfl. desselben $= \frac{3}{2} \pi \cdot \sqrt{r^4 + 2 r^2 . h^2 - 3 h^4}$,

b) 1. das Volumen des Doppelkegels $= \frac{\pi}{6} \cdot h (r^2 - h^2)$,

2. die Oberfl. desselben $= \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{r^4 + 2 r^2 . h^2 - 3 h^4}$.

Alle diese Gröfsen werden am gröfsten, wenn $h = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

64—65. Aufgabe: Welcher von den geraden Kegeln, die ihre Spitze in der einen Würfelecke haben und mit der Peripherie der Basis die in der Gegenecke des Würfels zusammenlaufenden

a) Würfelkanten,

b) Flächendiagonalen

berühren, hat den gröfsten körperlichen Inhalt? XI.

Auflösung: Ist a die Kante des Würfels und ρ der Radius der Kegelbasis, so ist:

a) der Inhalt des Kegels $= \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \cdot \rho^2 \cdot [a\sqrt{6} - \rho]$;

am gröfsten wird dieser Ausdruck, wenn: $\rho = \frac{2a}{3}\sqrt{6}$; d. h.?

b) das Volumen des die Würfelseiten berührenden Kegels

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \rho^2 \cdot [a\sqrt{3} - \rho\sqrt{2}];$$

es wird am gröfsten, wenn: $\rho = \frac{a}{3}\sqrt{6}$.

66. Aufgabe: Zwei kongruente Kreise, welche senkrecht zur Würfeldiagonale gestellt sind und mit den Peripherieen je drei in einer Würfelecke zusammenlaufende Flächendiagonalen des Würfels berühren, bilden die Endflächen zweier Kegel, von denen jeder seine Spitze im Mittelpunkte der Basis des anderen hat. Wie grofs müssen die Radien ρ der Kreise sein, wenn bei der Durchdringung der Kegel ein Stundenglas vom gröfsten Volumen entstehen soll? XI.

Auflösung: Bedeutet a die Würfelkante, so ist das fragliche Volumen:

$$V = \frac{7\pi}{4} \cdot \rho^2 \cdot [a\sqrt{3} - 2\rho\sqrt{2}]$$

und wird am gröfsten, wenn $\rho = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Die Kreise berühren demnach die Würfelseiten in den Schwerpunkten.

67—68. Aufgabe: Welche von den geraden dreiseitigen Pyramiden mit gleichseitiger Basis, die ihre Spitze in einer Würfelecke haben, während die Ecken der Basis auf den drei in der Gegenecke des Würfels zusammenlaufenden

a) Würfelkanten,
b) Flächendiagonalen

liegen, hat das gröfste Volumen? XI.

Auflösung: Bezeichnet a die Würfelkante und x die Grundkante der Pyramide, so ist:

$$\text{a) Volumen} = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot x^2 \cdot [3\,a\,\sqrt{2} - x]$$

und wird am gröfsten, wenn: $x = 2\,a\,\sqrt{2}$.

$$\text{b) Volumen} = \frac{1}{12} \cdot x^2 \cdot (3\,a - x\,\sqrt{2}).$$

Hier tritt das Maximum ein, wenn: $x = a\,\sqrt{2}$.

69—71. Aufgabe: In einen geraden Kegel ist senkrecht zur Basis ein gerader mit der Peripherie der oberen Basis den Kegelmantel berührender Cylinder

1. von der gröfsten Mantelfläche,
2. von der gröfsten Oberfläche,
3. von dem gröfsten Volumen

zu stellen. VI. XI.

Auflösung: Sei r der Radius und h die Höhe des gegebenen Kegels, sei ferner ρ der Radius des hineinzustellenden Cylinders, so wird:

$$\text{1. der Mantel} = 2\,\pi \cdot \frac{h}{r} \cdot (r\,\rho - \rho^2)$$

Maximum, nämlich $= \frac{r\,\pi\,h}{2}$, wenn: $\rho = \frac{r}{2}$.

$$\text{2. die Oberfläche} = \frac{2\,\pi}{r}\,[r\,h\,\rho - \rho^2\,(h - r)]$$

am gröfsten, und zwar: $= \frac{h^2 \cdot r\,\pi}{2\,(h - r)}$, wenn: $\rho = \frac{h \cdot r}{2\,(h - r)}$.

$$\text{3. das Volumen} = \frac{h\,\pi}{r} \cdot (r\,\rho^2 - \rho^3)$$

am gröfsten, und zwar: $= \frac{4}{27} \cdot r^2 \cdot \pi\,h$, sobald: $\rho = \frac{2}{3}\,r$ wird.

72—74. Aufgabe: Senkrecht zur Basis ist in ein reguläres Tetraeder ein gerader, mit der Peripherie der oberen Grundfläche drei Seitenkanten des Tetraeders berührender Cylinder

1. vom gröfsten Volumen,
2. vom gröfsten Mantel,

3. bei welchem die Mantelfläche die Summe der beiden Grundflächen an Gröfse am meisten übertrifft,

zu stellen. XI. VI.

Auflösung: Sei ρ der Radius des Cylinders, so ist:

1. das Volumen $= \pi \cdot \left(\frac{a}{3} \cdot \rho^2 \cdot \sqrt{6} - \rho^3 \cdot \sqrt{2}\right)$.

Den gröfsten Wert: $\frac{4}{243}\, a^3 \pi \sqrt{6}$ erreicht also das Volumen, wenn: $\rho = \frac{2\,a}{9} \sqrt{3}$.

2. der Mantel $= 2\pi \sqrt{2} \left(\frac{a}{3}\, \rho \sqrt{3} - \rho^2\right);$

hieraus ergiebt sich: $\rho = \frac{a}{6} \sqrt{3}$ und als gröfster Wert des Mantels: $\frac{a^2 \pi}{6} \cdot \sqrt{2}$.

3. Ist D die Differenz, um welche der Mantel gröfser ist als die Summe der beiden Grundflächen, so ist:

$$D = 2\pi \cdot \left(\frac{a}{3}\, \rho \sqrt{6} - \rho^2 \cdot (\sqrt{2} + 1)\right).$$

Hieraus folgt, dafs D am gröfsten und zwar $= \frac{a^2 \pi}{3\,(\sqrt{2} + 1)}$ wird, wenn: $\rho = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{6\,(\sqrt{2} + 1)}$.

75—77. Aufgabe. Senkrecht zur Basis ist in ein reguläres Tetraeder ein gerader, mit der Peripherie der oberen Grundfläche drei Seitenflächen des Tetraeders berührender Cylinder

1. vom gröfsten Volumen,
2. vom gröfsten Mantel,
3. von der gröfsten Oberfläche

hineinzustellen. XI. VI.

Auflösung: Ist ρ der Radius des Cylinders, so ist:

1. das Volumen $= \pi \cdot \left(\frac{a}{3}\, \rho^2 \cdot \sqrt{6} - 2\,\rho^3 \cdot \sqrt{2}\right)$.

Es wird am gröfsten, nämlich $= \frac{a^3 \pi}{243} \sqrt{6}$, wenn: $\rho = \frac{a}{9} \sqrt{3}$.

2. der Mantel $= 2\pi \cdot \left(\frac{a}{3}\, \rho \sqrt{6} - 2\,\rho^2 \cdot \sqrt{2}\right)$.

Für $\rho = \frac{a}{12} \sqrt{3}$ ergiebt sich demnach als gröſster Wert für den Mantel $\frac{a^2 \pi \sqrt{2}}{12}$.

3. die Oberfläche $= 2 \pi \left\{ \frac{a}{3} \rho \sqrt{6} - \rho^2 . (2 \sqrt{2} - 1) \right\}$.
Hieraus folgt, daſs die Oberfläche am gröſsten und zwar: $\frac{a^2 \pi}{3 . (2 \sqrt{2} - 1)}$ wird, wenn: $\rho = \frac{a}{\sqrt{6} . (2 \sqrt{2} - 1)}$.

78—79. Aufgabe: Welcher von den senkrecht zur Basis in ein reguläres Tetraeder gestellten und mit der Peripherie der oberen Grundfläche, drei Seitenflächen des Tetraeders berührenden Cylindern übertrifft am meisten

1. an Volumen,
2. an Oberfläche,

die über denselben in das Tetraeder beschriebene Berührungskugel? XI. VI.

Auflösung: Ist ρ der Radius des Cylinders, so ist die Cylinderhöhe $h = \frac{a}{3} \sqrt{6} - 2 \rho \sqrt{2}$ und der Kugelradius $\rho_1 = \frac{\rho}{2} \sqrt{2}$. Daher wird

1. Diff. der Volumina $= \frac{\pi}{3} . (a \rho^2 . \sqrt{6} - 7 \rho^3 \sqrt{2})$

Maximum für $\rho = \frac{2 a \sqrt{3}}{21}$,

und 2. Diff. der Oberflächen $= 2 \pi \rho \sqrt{2} \left(\frac{a}{3} \sqrt{3} - 2 \rho \right)$

am gröſsten, wenn: $\rho = \frac{a}{12} \sqrt{3}$.

80—83. Aufgabe: Welcher von den geraden Cylindern, die einer geraden vierseitigen Pyramide mit lauter gleichen Kanten einbeschrieben sind und mit der Peripherie der oberen Basis die vier Seitenflächen der Pyramide tangieren, hat

1. den gröſsten Mantel?
2. das gröſste Volumen?

bei welchem übertrifft der Mantel die Summe der beiden Endflächen

3. an Gröſse am meisten?

bei welchem giebt der Mantel mit der Oberfläche der über dem Cylinder in die Pyramide einbeschriebenen Berührungskugel

4. die gröſste Flächensumme? VI. XI.

Auflösung: Sei a die Kante der Pyramide, ρ der Radius und h die Höhe des Cylinders, so ist:

1. der Mantel $= 2\pi\rho\left\{\frac{a}{2}\sqrt{2} - \rho\sqrt{3}\right\}$.

Wird demnach $\rho = \frac{a}{12}\sqrt{6}$, so erreicht der Mantel seinen gröfsten Wert: $\frac{a^2\pi}{4\sqrt{3}}$.

2. Das Cylindervolumen $= \pi\rho^2 \cdot \left\{\frac{a}{2}\sqrt{2} - \rho\sqrt{3}\right\}$.

Sein Maximum: $\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{81}$ erhält man, wenn man $\rho = \frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ setzt.

3. Die Diff. der Oberflächenteile $= 2\pi\rho\left\{\frac{a}{2}\sqrt{2} - \rho(1+\sqrt{3})\right\}$.

Dieselbe wird am gröfsten, nämlich: $\frac{a^2\pi}{4(1+\sqrt{3})}$, wenn

$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{3})}$ wird.

4. Die Flächensumme

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)^2 \cdot [2a^2\sqrt{3} - 8h^2 + ah\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2].$$

Das Maximum dieses Ausdrucks: $\frac{a^2}{16}[1+\sqrt{3}]^2$ hat statt, wenn

$h = \frac{a}{8\sqrt{2}} \cdot [\sqrt{3}-1]^2$.

84—85. Aufgabe: In einen geraden Kegel senkrecht zur Basis einen geraden Cylinder hineinzustellen, welcher hinsichtlich 1. der Mantelfläche,
2. des Volumens
denjenigen Kegel an Gröfse am meisten übertrifft, welcher durch die obere Basis des Cylinders von dem gegebenen Kegel abgeschnitten wird. VI. XI.

Auflösung: Ist ρ der Radius des Cylinders, so ist, wenn r der Radius, h die Höhe und s die Seite des gegebenen Kegels bedeuten,

1. die Diff. der Mantelflächen $= \frac{\pi}{r} \cdot [2hr\rho - \rho^2(2h+s)]$.

Den gröfsten Wert: $\frac{r \pi h^2}{2 h + s}$ erreicht diese Gröfse, wenn: $\rho = \frac{r \cdot h}{2 h + s}$ wird.

2. Die Diff. der Volumina $= \frac{h \pi}{3 r} \cdot \rho^2 \cdot (3 r - 4 \rho)$.

Den gröfsten Wert: $\frac{r^2 \pi h}{12}$ erreicht also die Diff. für: $\rho = \frac{r}{2}$.

86—88. Aufgabe: Senkrecht zur Basis ist in einen geraden gleichseitigen Kegel derjenige gerade Berührungscylinder hineinzustellen, welcher die über ihm konstruierbare, den Kegelmantel und die obere Endfläche des Cylinders berührende Kugel
1. an Mantelfläche,
2. an Oberfläche,
3. an Volumen

am meisten übertrifft? VI. XI.

Auflösung: Sei ρ der Radius des Cylinders und ρ_1 derjenige der Kugel, so ist $\rho_1 = \frac{\rho}{\sqrt{3}}$.

Bedeutet nun r den Radius des Kegels, so übertrifft der Cylinder die Kugel

1. an krummer Oberfl. um: $\frac{2 \pi}{3} \rho \, [3 r \sqrt{3} - \rho \, (2 + 3 \sqrt{3})]$.

Soll diese Diff. Maxim. werden, so mufs $\rho = \frac{3 r \sqrt{3}}{2 [2 + 3 \sqrt{3}]}$.

2. An Gesamtoberfl. um: $\frac{2 \pi}{3} \rho \, [3 r \sqrt{3} - \rho \, (3 \sqrt{3} - 1)]$.

Das Maximum dies. Ausdrucks tritt ein, wenn: $\rho = \frac{3 r \sqrt{3}}{2 (3 \sqrt{3} - 1)}$.

3. an Volumen um: $\frac{\pi \sqrt{3}}{27} \rho^2 \, [27 r - 31 \rho]$.

Hier mufs: $\rho = \frac{18 r}{31}$, wenn dieser Ausdr. am gröfsten werden soll.

89—91. Aufgabe. Welcher von den geraden Cylindern, deren kongruente kreisförmige Endflächen an zwei Gegenecken eines Würfels je drei in einer dieser Ecken zusammenlaufende Würfelkanten berühren, hat

1. den gröſsten körperlichen Inhalt?
2. den gröſsten Mantel?
3. bei welchem übertrifft der Mantel die Summe der Endflächen an Gröſse am meisten? XI. VI.

Auflösung: Wenn a die Würfelkante und ϱ der Radius der Endfläche des Cylinders ist, so ist:

1. das Volumen $= \varrho^2 \pi [a \sqrt{3} - \varrho \sqrt{2}]$;

es wird am gröſsten, nämlich: $\frac{2\pi}{9} a^3 \sqrt{3}$, wenn $\varrho = \frac{a}{3} \sqrt{6}$ wird.

2. der Mantel $= 2 \varrho \pi [a \sqrt{3} - \varrho \sqrt{2}]$;

derselbe erreicht sein Maximum: $\frac{3}{4} a^2 \pi \sqrt{2}$, wenn $\varrho = \frac{a}{4} \sqrt{6}$.

3. der Unterschied der krummen und ebenen Oberflächenteile $= 2 \pi \varrho [a \sqrt{3} - \varrho (\sqrt{2} + 1)]$;

am gröſst., näml.: $\frac{3}{2} a^2 \pi (\sqrt{2} - 1)$, wird dies. Ausdruck, wenn:

$$\varrho = \frac{a \sqrt{3}}{2 (\sqrt{2} + 1)}.$$

92—95. Aufgabe: In einen Würfel einen geraden Cylinder
1. vom gröſsten Volumen,
2. vom gröſsten Mantel,
3. von der gröſsten Oberfläche,
4. von der gröſsten Differenz zwischen Mantel und der Summe der Endflächen

so hineinzustellen, daſs seine Achse mit der einen Körperdiagonale zusammenfällt und jede seiner Endflächen mit ihrer Peripherie drei in einer Würfelecke zusammenlaufende Würfelseiten berührt. XI. VI.

Auflösung: Bedeutet ϱ der Radius des Cylinders und a die Würfelkante, so ist:

1. das Volumen $= \pi \varrho^2 [a \sqrt{3} - 2 \varrho \sqrt{2}]$;

es wird den gröſsten Wert: $\frac{\pi a^3}{18} \sqrt{3}$ erreichen, wenn $\varrho = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

2. der Mantel $= 2 \pi \varrho (a \sqrt{3} - 2 \varrho \sqrt{2})$.

Sein Maximum: $\frac{3 \pi}{8} a^2 \sqrt{2}$ tritt bei $\varrho = \frac{a \sqrt{6}}{8}$ ein.

3. Die Oberfläche $= 2 \pi \varrho [a \sqrt{3} - \varrho (2 \sqrt{2} - 1)]$

u. wird am gröſst., näml.: $\frac{3\, a^2 \pi}{2\,(2\sqrt{2} - 1)}$ wenn $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{2\,(2\sqrt{2} - 1)}$.

4. Die Diff. der Oberflächenteile $= 2\pi\rho\,[a\sqrt{3} - \rho\,(2\sqrt{2} + 1)]$.

Das Maximum dieses Ausdrucks: $\frac{3\, a^2 \pi}{2\,(2\sqrt{2} + 1)}$ wird erreicht, wenn $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{2\,(2\sqrt{2} + 1)}$ wird.

96—98. Aufgabe: Ein gerader Kreiscylinder berührt mit der Peripherie der einen Endfläche drei in einer Ecke zusammenkommende Würfelkanten und mit der Peripherie der anderen Endfläche die in der Gegenecke des Würfels zusammenstoſsenden Flächendiagonalen. Wie groſs muſs jede Endfläche des Cylinders sein, wenn der Cylinder

1. den gröſsten körperlichen Inhalt,
2. den gröſsten Mantel,
3. die gröſste Oberfläche

haben soll? XI. VI.

Auflösung: Bezeichne ρ den Radius des Cylinders und a die Würfelkante, so ist:

1. das Volumen $= \frac{\pi}{2}\sqrt{3}\,\rho^2\,(2\,a - \rho\sqrt{6})$;

es wird den gröſst. Wert: $\frac{8}{81}\,\pi a^3 \sqrt{3}$, annehm., wenn $\rho = \frac{2}{9}\,a\sqrt{6}$ wird.

2. der Mantel $= \pi\sqrt{3}\,\rho\,[2\,a - \rho\sqrt{6}]$;

den gröſst. Wert desselb.: $\frac{a^2 \pi \sqrt{2}}{2}$ erhält man, wenn $\rho = \frac{a}{\sqrt{6}}$ wird.

3. die Oberfläche $= \pi\sqrt{2}\,[a\,\rho\sqrt{6} - \rho^2\,(3 - \sqrt{2})]$;

dieselbe erreicht ihr Max. $\frac{3\, a^2 \pi \sqrt{2}}{2\,(3 - \sqrt{2})}$, wenn $\rho = \frac{a\sqrt{6}}{2\,(3 - \sqrt{2})}$.

99. Aufgabe: Um einen geraden Cylinder einen geraden Kegel vom kleinsten Volumen zu beschreiben. VIII.

Auflösung: Sind r und h die Dimensionen des gegebenen Cylinders und x der Radius der Kegelbasis, so ist:

$$\text{das Volumen} = \frac{\pi\, x^3\, h}{3\,[x - r]}.$$

Dasselbe erreicht den gröſsten Wert: $\frac{9}{4}\, r^2 \pi h$, wenn: $x = \frac{3}{2}\, r$ genommen wird, und es ist dann die Kegeloberfläche

$$= \frac{9}{4}\, r\, \pi\, (r + \sqrt{r^2 + 4\, h^2}).$$

100—101. Aufgabe: Welcher Sektor eines Kreises vom Radius r umschließt — als Kegelmantel zusammengerollt — einen Kegel

1. vom größten Inhalte?
2. bei dem die Mantelfläche die Endfläche an Größe am meisten übertrifft? XI. VI.

Auflösung: Sei x der Centriwinkel des gesuchten Sektors und ρ der Radius der Kegelbasis, so ist:

1. das Volumen des Kegels $= \frac{\pi}{3} \rho^2 \sqrt{r^2 - \rho^2}$;

es wird am größten, nämlich: $= \frac{2\pi}{27} r^3 \sqrt{3}$, wenn: $\rho = \frac{r}{3} \sqrt{6}$, also: $x = 120^0 \sqrt{6}$ wird.

2. der Unterschied der Oberflächenteile $= \rho \pi r - \rho^2 \pi$; derselbe erreicht also seinen größten Wert: $\frac{r^2 \pi}{4}$, wenn: $\rho = \frac{r}{2}$, also $x = 180^0$ wird.

102—107. Aufgabe. a) Welcher von den in eine Kugel gestellten geraden Kegeln hat

1. das größte Volumen?
2. den größten Mantel?

b) welcher übertrifft das auf der entgegengesetzten Seite der Kegelbasis liegende Kugelsegment

1. an Inhalt,
2 an krummer Oberfläche

am meisten?

c) welcher bildet mit dem über derselben Basis liegenden Kugelsegment die größte Summe

1. der Volumina?
2. der krummen Oberflächen? XI. VI.

Auflösung: Sei r der Kugelradius und h die Höhe des Kegels, so ist:

a) 1. das Kegelvolumen $= \frac{\pi}{3} h^2 (2r - h)$

und erreicht den größten Wert: $\frac{32}{81} r^3 \pi$, wenn: $h = \frac{4}{3} r$.

2. der Kegelmantel $= \pi h \sqrt{4r^2 - 2rh}$.

Sein Maximum: $\frac{8 r^2 \pi}{3\sqrt{3}}$ tritt also auch bei: $h = \frac{4}{3} r$ ein.

b) 1. die Diff. der Vol. $= \frac{\pi}{3} [5 r h^2 - 2 h^3 - 4 r^3]$ und wird am gröſsten, wenn $h = \frac{5}{3} r$.

2. Die Diff. der Oberflächen $= \pi [h \sqrt{2 r (2 r - h)} - 2 r (2 r - h)]$ und erreicht ihr Maximum, wenn $h = \frac{16}{9} r$.

c) 1. die Summe der Volumina $= \frac{\pi}{3} (5 r h^2 - 2 h^3)$. Der gröſste Wert dieses Ausdrucks ergiebt sich für: $h = \frac{5}{3} r$.

2. die Summe der krummen Oberfl. $= \pi h [2 r + \sqrt{2 r (2 r - h)}]$. Daher muſs im Fall des Maximums $h = \frac{16}{9} r$.

108. Aufgabe: Eine Halbkugel ist durch einen geraden Kegel, dessen Spitze in den Mittelpunkt der Basis der Halbkugel fällt, so auszuhöhlen, daſs der Restkörper die gröſste Gesamtoberfläche hat. III.

Auflösung: Ist 2φ der Winkel an der Spitze im Achsenschnitt des Kegels und r der Radius der Kugel, so ist die Gesamtoberfläche des Restkörpers $= r^2 \pi [1 + \sin \varphi + 2 \cos \varphi]$ und dieselbe wird am gröſsten, nämlich: $r^2 \pi (\sqrt{5} + 1)$, wenn: $\operatorname{cotg} \varphi = 2$.

109. Aufgabe: Welches Kugelsegment übertrifft:

1. an krummer Oberfläche,
2. an Gesamtoberfläche,
3. an Inhalt

die gröſste in dasselbe einbeschriebene Kugel am meisten?

Auflösung: 1. und 2. die Halbkugel.

3. Ist h die Höhe des Segments und r der Kugelradius, so ist der Unterschied der Körper $= \frac{\pi}{3} h^2 (2 r - h)$, u. wird am gröſsten, nämlich: $\frac{32}{81} \pi r^3$, wenn: $h = \frac{4}{3} r$.

110. Aufgabe: Welcher von den in eine Halbkugel senkrecht über der Kreisfläche gestellten Kegelstumpfen hat die gröſste Mantelfläche? X.

Auflösung: Erscheint der Durchmesser 2ρ der kleineren Endfläche des Stumpfes vom Mittelpunkte der Basis der

Halbkugel aus unter dem Winkel 2φ und ist r der Radius der der Halbkugel, so ist:

$$\text{die Mantelfläche} = 4\pi r^2 \sin\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)\cos^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Der Mantel erreicht also seinen gröfsten Wert: $\frac{8}{9} r^2 \pi \sqrt{3}$,

wenn: $\sin\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also: $\rho = \frac{r}{3}$ wird.

111—113. Aufgabe: Um eine Kugel vom Radius r einen geraden Kegel

1. vom kleinsten Mantel,
2. von der kleinsten Oberfläche,
3. vom kleinsten Volumen

zu beschreiben. VIII.

Auflösung: Ist x der Radius der Kegelbasis, so ist:

1. die Mantelfläche des Kegels $= \pi \frac{x^4 + r^2 x^2}{x^2 - r^2}$;

der kleinste Wert dieses Ausdrucks ist: $r^2 \pi [1 + \sqrt{2}]^2$; so grofs wird derselbe, wenn: $x = r\sqrt{1 + \sqrt{2}}$;

2. die Oberfläche des Kegels $= 2\pi \frac{x^4}{x^2 - r^2}$;

3. das Volumen desselben $= \frac{2\pi r x^4}{3[x^2 - r^2]}$;

es ist somit der gröfste Wert der Oberfläche $= 8\pi r^2$, und des Volumens $= \frac{8}{3} r^3 \pi$. Für jeden dieser Fälle mufs: $x = r\sqrt{2}$.

114—116. Aufgabe: Um eine Halbkugel ist senkrecht über der die Halbkugel begrenzenden Ebene ein gerader Berührungskegel

1. von dem kleinsten Volumen,
2. von der kleinsten Mantelfläche,
3. von der kleinsten Oberfläche

zu stellen. X. VIII.

Auflösung: Bedeute r den Kugelradius und x den Radius der Kegelbasis, so ist:

1. das Volumen $= \frac{\pi r x^3}{3\sqrt{x^2 - r^2}}$,

2. der Mantel $= \pi \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - r^2}}$.

Sobald: $x = \frac{r}{2}\sqrt{6}$ wird, erreichen beide Ausdrücke ihre gröfsten Werte, und es ist das Maximum des Volumens $= \frac{\pi}{2} r^3 \sqrt{3}$; und des Mantels $= \frac{3}{2} \pi r^2 \sqrt{3}$.

3. Die Oberfläche des Kegels $= \pi \left\{x^2 + \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - r^2}}\right\}$.

Ihr gröfster Wert lautet: $4 r^2 \pi$ und tritt ein, wenn $x = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$.

117—119. Aufgabe: Welcher von den geraden Kegelstumpfen, die mit den Endflächen und dem Mantel eine Kugel berühren, hat

1. das kleinste Volumen?
2. den kleinsten Mantel?
3. die kleinste Oberfläche? VIII.

Auflösung: Ist x der Radius der einen Grundfläche des Stumpfes und r der Radius der Kugel, so ist:

1. das Volumen $= \frac{2 \pi r}{3} \left\{x^2 + \frac{r^4}{x^2} + r^2\right\}$.

2. der Mantel $= \pi \left\{x + \frac{r^2}{x}\right\}^2$.

3. die Oberfläche $= 2 \pi \left\{x^2 + \frac{r^4}{x^2} + r^2\right\}$.

Am gröfsten werden diese Ausdrücke, wenn $x = r$, wenn also der Kegelstumpf in einen Cylinder übergeht.

120—122. Aufgabe: Senkrecht zur Basis ist um eine Halbkugel ein gerader Kegelstumpf

1. vom kleinsten körperlichen Inhalte,
2. vom kleinsten Mantel,
3. von der kleinsten Oberfläche

zu stellen. IX.

Auflösung: Sei r der Kugelradius und ρ der Radius der auf der erweiterten Basis der Halbkugel liegenden Endfläche des Stumpfes, so ist:

1. das Vol. des Stumpfes $= \frac{r \pi}{3} \left\{4 \rho^2 - 3 \rho \sqrt{\rho^2 - r^2} - r^2\right\}$.

Das Max. hängt also von dem Ausdr.: $4 \rho^2 - 3 \rho \sqrt{\rho^2 - r^2}$

ab; dieser erreicht seinen kleinsten Wert: $\frac{r^2}{4}\left\{1+\sqrt{7}\right\}^2$, wenn:

$$\rho = \frac{r\,(1+\sqrt{7})}{2\sqrt[4]{7}}.$$

Das kleinste Volumen des Stumpfes ist also: $\frac{r^3\pi}{6}\left\{2+\sqrt{7}\right\}$.

2. der Mantel $= \pi\left[2\rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 - r^2}\right]$;

seinen kleinsten Wert: $\frac{\pi r^2}{2}\left\{2+\sqrt{3}\right\}$ erreicht er, wenn:

$$\rho = \frac{r}{2\sqrt[4]{3}}\left\{1+\sqrt{3}\right\}.$$

3. die Oberfläche $= \pi\left[8\rho^2 - 5\rho\sqrt{\rho^2 - r^2} - 2r^2\right]$;

ihr kleinster Wert ist. $\frac{r^2\pi}{2}\left[4+\sqrt{39}\right]$ und tritt ein, wenn:

$$\rho^2 = \frac{r^2\left[8+\sqrt{39}\right]}{2\sqrt{39}}.$$

123—125. Aufgabe:

a) Welcher Kugelsektor hat die gröfste Oberfläche?
b) bei welchem übertrifft der Kegelmantel die Kugelkalotte —
c) bei welchem das Kegelvolumen den Inhalt des Kugelsegments — an Gröfse am meisten? III. X.

Auflösung: Vom Mittelpunkte der Kugel aus erscheine der Durchmesser 2 ρ des den Kegelmantel von der Kalotte trennenden Kreises unter dem Winkel 2 φ, so ist, wenn r der Radius der Kugel ist,

1. die Oberfl des Sektors $= 2r^2\pi + r^2\pi(\sin\varphi - 2\cos\varphi)$ und sein gröfster Wert: $r^2\pi(2+\sqrt{5})$ tritt ein bei: $\operatorname{ctg}\varphi = -2$.

2. der Unterschied des Kegelmantels und der Kalotte

$$= r^2\pi(\sin\varphi + 2\cos\varphi).$$

Der gröfste Wert dieses Ausdrucks ist $= r^2\pi(\sqrt{5} - 2)$: dabei mufs: $\operatorname{ctg}\varphi = 2$.

3. der Unterschied der Volumteile $= \frac{2}{3}\pi r^3(2\cos\varphi - \cos^3\varphi - 1)$

und erreicht sein Maximum: $\frac{2\pi}{27}r^3(4\sqrt{6} - 9)$,

wenn: $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

126—128. Aufgabe: Bei welcher von den die Mantelfläche eines geraden Kegels berührenden Kugeln hat der innerhalb des Kegels fallende Kugelteil

1. die gröfste Kalotte?
2. die gröfste Oberfläche?
3. den gröfsten Inhalt? VI. XI.

Auflösung: Ist r der Radius, h die Höhe und s die Seite des Kegels, ist ferner y die Höhe des innerhalb des Kegels fallenden Kugelteils, so ist:

1. die Kalotte $= \frac{2\, r\, \pi}{(s - r)}\, y\, (h - y)$

und erreicht den gröfsten Wert: $\frac{r\, \pi\, h^2}{2\, (s - r)}$, wenn: $y = \frac{h}{2}$.

2. die Oberfläche $= \frac{\pi\, y}{s - r}\, [4\, r\, h - y\, (s + 3\, r)]$;

ihren gröfsten Wert: $\frac{4\, \pi\, r^2\, h^2}{(s - r)\, (s + 3\, r)}$ erreicht sie, wenn:

$$y = \frac{2\, r\, h}{s + 3\, r}.$$

3. Das Volumen $= \frac{\pi\, y^2}{3\, (s - r)}\, [3\, r\, h - y\, (s + 2\, r)]$.

Das Maximum: $\frac{4\, \pi\, r^3\, h^3}{3\, (s - r)\, (s + 2\, r)^2}$ tritt bei $y = \frac{2\, r\, h}{s + 2\, r}$ ein.

129— 133. Aufgabe: Bei welcher von den Kugeln, welche drei Seitenflächen eines regulären Tetraeders berühren, hat der innerhalb des Tetraeders liegende Kugelteil

1. die gröfste Kalotte?
2. die gröfste Oberfläche?
3. das gröfste Volumen?

bei welcher übertrifft dieser Kugelteil die über ihn in das Tetraeder gestellte und dieselben Tetraederseiten berührende Kugel

4. an krummer Oberfläche am meisten?

bei welcher bildet die Kalotte des Kugelteils mit der Oberfläche der erwähnten Berührungskugel

5. die gröfste Flächensumme? VI. XI.

Auflösung: Bedeute: a die Tetraederkante, x den Radius der gesuchten Kugel und h die Höhe des Kugelsegments, so ist:

1. die Kalotte $= \pi\, h \left\{\frac{a}{3} \sqrt{6} - h\right\}$.

Ihr Maximum: $\frac{a^2 \pi}{6}$ tritt bei $h = \frac{a}{\sqrt{6}}$ ein. d. h.?

2. Die Oberfl. des Segments $= \pi h \left\{\frac{2}{3} a \sqrt{6} - 3h\right\}$.

Ihr gröſster Wert: $\frac{2 a^2 \pi}{9}$ wird gewonnen, wenn man: $h = \frac{a}{9} \sqrt{6}$ nimmt.

3. das Volumen $= \frac{\pi}{6} h^2 [a \sqrt{6} - 5 h]$;

bei: $h = \frac{2 a \sqrt{6}}{15}$ tritt das gröſste Volumen: $\frac{4 a^3 \pi \sqrt{6}}{675}$ ein.

4. Die Diff. der krummen Oberfl. $= \pi x \left\{\frac{2}{3} a \sqrt{6} - 5 x\right\}$.

Durch den Wert: $x = \frac{a}{15} \sqrt{6}$ erhält man d. gröſst. Diff. $\frac{2 \pi a^2}{15}$.

5. die Summe der Oberflächen $= \pi x \left\{\frac{2}{3} a \sqrt{6} - 3 x\right\}$.

Den gröſsten Wert $\frac{2 a^2 \pi}{9}$ erhält man, wenn $x = \frac{a}{9} \sqrt{6}$ wird.

134—137. Aufgabe: Bei welcher von den Kugeln, die die vier Seitenflächen einer geraden vierseitigen Pyramide mit lauter gleichen Kanten berühren, hat der innerhalb der Pyramide fallende Kugelteil

1. die gröſste Kalotte?
2. die gröſste Oberfläche?
3. das gröſste Volumen?

bei welcher bildet die Kalotte jenes Kugelsegments mit der Oberfläche einer zweiten über den Kugelteil in die Pyramide gestellten Berührungskugel

4. die gröſste Summe? VI. XI.

Auflösung: Sei a die Pyramidenkante und h die Höhe des Kugelsegments, so ist:

1. die Kalotte $= \pi h (\sqrt{3} + 1) \left(\frac{a}{2} \sqrt{2} - h\right)$;

das Maximum dieses Ausdrucks: $\frac{a^2 \pi}{4 (\sqrt{3} - 1)}$ tritt bei: $h = \frac{a}{4} \sqrt{2}$ ein.

2. die Oberfl. $= \frac{\pi}{2}\, h\,[\sqrt{3}+1][2\,a\sqrt{2} - h\sqrt{3}(1+\sqrt{3})]$.

Sie wird am gröfst., näml.: $\frac{a^2\pi}{\sqrt{3}}$ wenn $h = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}}$ wird. Also?

3. das Volumen $= \frac{\pi\, h^2}{6\,(\sqrt{3}-1)} \left\{3\,a\sqrt{2} - 2\,h\,(2+\sqrt{3})\right\}$.

Den gröfsten Wert: $\frac{a^3\,\pi\,(\sqrt{3}-1)^3}{3\sqrt{2}}$ erreicht der Inhalt, wenn:

$$h = \frac{2\,a\sqrt{2}}{[1+\sqrt{3}]^2}.$$

4. die Summe der Oberflächen

$$= \pi\,[\sqrt{3}-1]\left(\frac{a}{2}\sqrt{2} - h\right)\left\{\frac{a}{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1) + 3\,h\right\}.$$

Der gröfste Wert ist: $\frac{\pi}{48}\,a^2\,[1+\sqrt{3}]^3$; dann mufs:

$$h = \frac{a}{12}\sqrt{2}\,[4-\sqrt{3}].$$

138—139. Aufgabe: Ueber demselben Kreise als Basis steht eine Halbkugel und ein gerader Cylinder. Von welcher Stelle des im Mittelpunkte der Kreisfläche errichteten Lotes hat man an die Halbkugel den Tangentialkegel zu legen, wenn durch die Mantelfläche desselben von dem Cylinder ein Teil 1. vom kleinsten Volumen,

2. von der kleinsten krummen Oberfläche

herausgeschnitten werden soll? IX.

Auflösung: Sei r der Kugelradius und x die Entfernung des gesuchten Punktes vom Mittelpunkte des die Halbkugel begrenzenden Kreises, so ist:

1. das Vol. des Cylinderteiles $= \frac{r^2\pi}{3}\,[3\,x - 2\sqrt{x^2 - r^2}]$;

2. die krumme Oberfl. desselben $= r\,\pi\,[3\,x - 2\sqrt{x^2 - r^2}]$.

Beide Ausdrücke erreichen ihre gröfsten Werte, nämlich: das Vol.: $\frac{\pi}{3}\,r^3\sqrt{5}$ u. die Oberfl. $r^2\,\pi\sqrt{5}$, wenn: $x = \frac{3\,r}{\sqrt{5}}$ wird.

140. Aufgabe: Um einen Punkt der Oberfläche einer Kugel vom Radius r als Mittelpunkt diejenige Kugel zu beschreiben, deren innerhalb der ersten Kugel fallender Teil die gröfste Kalotte hat. XI.

Auflösung: Ist x der Radius der gesuchten Kugel, so ist

$$\text{die Kalotte} = \pi \left\{2\, x^2 - \frac{x^3}{r}\right\}.$$

Sie erreicht ihren gröſsten Wert: $\frac{32}{27}\, r^2\, \pi$, wenn: $x = \frac{4}{3}\, r$ gesetzt wird.

141. Aufgabe: Von welchem Punkte der Centrale zweier getrennt liegenden Kugeln aus hat man an die Kugeln die Berührungskegel zu konstruieren, wenn man durch die Berührungskreise der Kegel zwei Kugelsegmente von der gröſsten Summe der Kalotten begrenzen soll? VII.

Auflösung: Seien R und r die Radien der Kugeln und a die Länge ihrer Centrale; sei ferner x die Entfernung des gesuchten Punktes von dem Mittelpunkte der Kugel mit dem Radius R, so ist:

$$\text{die Summe der Kalotten} = 2\,\pi \left\{R^2 + r^2 - \left(\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{a - x}\right)\right\}.$$

Es wird somit die Summe der Kalotte Max., wenn der Ausdruck:

$$\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{a - x}$$

Minimum wird. Der kleinste Wert dieses letzteren Ausdrucks ergiebt sich aber, wenn:

$$x = \frac{a\, R\, \sqrt{R}}{R\sqrt{R} + r\sqrt{r}}$$

genommen wird.

142—145. Aufgabe: a) Welcher von den geraden Kegeln, die ihre Spitze im Mittelpunkte der Kugel haben und mit der Peripherie ihrer Basis die Kugeloberfläche berühren, bildet mit dem ihm zugehörigen, durch dieselbe Kugel begrenzten Polarkegel die gröſste Summe

1. der Volumina?
2. der Mantelflächen?
3. der Oberflächen?

b) Welcher übertrifft seinen Polarkegel an Inhalt am meisten? I. XI.

Auflösung: Sei r der Kugelradius und 2 φ der Winkel, unter welchem vom Kugelmittelpunkte aus der Durchmesser 2 ρ der Basis des einen Kegels erscheint, so ist:

a) 1. die Summe der Volumina der Polarkegel

$$= \frac{\pi}{6}\, r^3 \sin 2\,\varphi\, (\sin \varphi + \cos \varphi).$$

2. die der Mantelflächen $= \pi r^2 (\sin \varphi + \cos \varphi)$.

3. die der Oberflächen $= \pi r^2 (1 + \sin \varphi + \cos \varphi)$.

Alle drei Ausdrücke werden am gröfsten, wenn $2 \varphi = 90^0$, also der Kegel rechtwinkelig gleichschenklig ist.

b) die Differenz der Volumina der Polarkegel

$$= \frac{\pi}{6} r^3 \sin 2 \varphi \sqrt{1 - \sin 2 \varphi},$$

und es mufs, soll dieser Ausdruck Max. werden, $\sin 2 \varphi = \frac{2}{3}$,

also: $\rho = \frac{r \sqrt{3}}{6} (\sqrt{5} - 1)$ werden.

146—147. Aufgabe: Welchen Punkt der Achse eines geraden Cylinders vom Radius r hat man zur Spitze eines auf der Grundfläche des Cylinders senkrecht stehenden Kegels zu nehmen, wenn er mit dem in denselben Cylinder fallenden Teile seines Polarkegels die kleinste Summe

1. der Volumina,
2. der Mantelflächen

bilden soll? VIII. V.

Auflösung: Sei 2φ der Winkel an der Spitze in dem gleichschenkelig-dreiseitigen Achsenschnitte eines dieser Kegel, dann ist:

1. die Summe der körperl. Inhalte $= \frac{\pi r^3}{3} [\tang \varphi + \cotg \varphi]$.

Am kleinsten, nämlich: $\frac{2 \pi}{3} r^3$ wird also diese Summe, wenn man: $\varphi = 45^0$ nimmt.

2. die Summe der Mantelfl. $= r^2 \pi \left\{\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi}\right\}$.

Auch dieser Ausdruck erreicht seinen kleinsten Wert: $2 r^2 \pi \sqrt{2}$, wenn $\varphi = 45^0$ wird.

In beiden Fällen sind demnach die Polarkegel kongruent und der Achsenschnitt eines jeden von ihnen ist ein rechtwinkelig-gleichschenkliges Dreieck.

148—151. Aufgabe: Zwischen zwei parallelen Ebenen befinden sich zwei gerade

1. dreiseitige
2. vierseitige
3. nseitige

Pyramiden mit regulären Endflächen, deren jede die Polarpyramide der anderen ist,

4. Kegel, von denen jeder der Polarkegel des andern ist, und haben ihre Spitzen in einem Punkte, dessen Abstände von den beiden Ebenen a_1 und a_2 sind. Wie sind diese Polarkörper beschaffen, wenn die Summe ihrer körperlichen Inhalte möglichst klein sein soll? VIII.

Auflösung: Ist $\frac{360^0}{n} = 2\gamma$ und μ der Winkel, welchen die Körperhöhe a_1 mit der Seitenfläche des zugehörigen Körpers einschliefst, so ist die Summe der Volumina bei den

1. dreiseitig. Polarpyr. $= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{4\, a_1^3 \operatorname{tg}^2 \mu + a_2^3 \operatorname{cotg}^2 \mu\right\}$.

Wird somit $\operatorname{cotg}^2 \mu = 2\left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}^{\frac{3}{2}}$, so erreicht diese Summe ihr Maximum: $a_1\, a_2 \sqrt{3\, a_1\, a_2}$.

2. vierseit. Polarpyr. $= \frac{2}{3}\left\{2\, a_1^3 \operatorname{tg}^2 \mu + a_2^3 \operatorname{cotg}^2 \mu\right\}$.

Wird hier: $\operatorname{cotg} \mu = \sqrt[4]{2\left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}^3}$, so wird dieser Ausdruck am gröfsten, und zwar: $\frac{4}{3}\, a_1\, a_2 \sqrt{2\, a_1\, a_2}$.

3. nseitige Pyr. $= \frac{n}{6} \sin 2\gamma \left\{\frac{a_1^3 \operatorname{tg}^2 \mu}{\cos^2 \gamma} + a_2^3 \operatorname{cotg}^2 \mu\right\}$.

Das Maximum dieser Summe: $\frac{2\, n}{3} \sin \gamma\, a_1\, a_2 \sqrt{a_1\, a_2}$ tritt ein, wenn: $\operatorname{cotg}^2 \mu = \frac{1}{\cos \gamma} \sqrt{\left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}^3}$.

4. Kegeln $= \frac{\pi}{3}\left\{a_1^3 \operatorname{tg}^2 \mu + a_2^3 \operatorname{cotg}^2 \mu\right\}$.

Der gröfste Wert dieses Ausdrucks: $\frac{2\,\pi}{3}\, a_1\, a_2 \sqrt{a_1\, a_2}$ ergiebt sich, wenn: $\operatorname{cotg} \mu = \sqrt[4]{\left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}^3}$ genommen wird.

152—153. Aufgabe: In einen geraden Kegel einen die Basis und die Mantelfläche des Kegels tangierenden körperlichen Kreisring

1. von der gröfsten Oberfläche,
2. von dem gröfsten Volumen

einzubeschreiben. VI. XI.

Auflösung: Seien r der Radius, s die Seite und h die Höhe des Kegels und werde der Ring von einer durch h gelegten Ebene in Kreisen vom Radius x geschnitten, so ist:

1. die Oberfläche des Ringes $= 4\,\pi^2\,\frac{x}{h}\,[r\,h - x\,(s + r)]$.

Die Oberfläche wird also am gröſsten und zwar $= \frac{r^2\,\pi^2\,h}{(s + r)}$, wenn: $x = \frac{h\,r}{2\,(s + r)}$.

2. das Volumen des Ringes $= 2\,\pi^2\,\frac{x^2}{h}\,[h\,r - x\,(s + r)]$ und seinen gröſsten Wert: $\frac{8\,\pi^2\,h^2\,r^3}{27\,(s + r)^2}$ erreicht dasselbe, wenn:

$$x = \frac{2\,r\,h}{3\,(s + r)}.$$

154—155. Aufgabe:

a) In eine Halbkugel,

b) in ein Kugelsegment

einen die begrenzende Kreisbasis und die Kugeloberfläche berührenden körperlichen Ring von der gröſsten Oberfläche hineinzustellen. X.

Auflösung: Ist r der Kugelradius und y der Abstand der Achse des Ringes vom Mittelpunkte desjenigen Kreises, in welchem der Ring von einer durch die Ringachse gelegten Ebene geschnitten wird, so ist:

a) die Oberfl. des Ringes in der Halbkugel $= 2\,\pi^2\,\frac{r^2\,y - y^3}{r}$.

Daher muſs: $y = \frac{r}{3}\,\sqrt{3}$ u. das Max. der Oberfl. ist $= \frac{4}{9}\,r^2\,\pi^2\,\sqrt{3}$.

b) Sei: (r — h) der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene des das Kugelsegment begrenzenden Kreises,

so ist: die Oberfl. des Ringes $= \frac{2\,\pi^2}{r + h}\,[(r^2 - h^2)\,y - y^3]$;

ihr Maximum tritt bei $y = \sqrt{\frac{r^2 - h^2}{3}}$ ein, und beträgt:

$$\frac{4\,\pi^2\,(r - h)}{9}\,\sqrt{3\,(r^2 - h^2)}.$$

156. Aufgabe: Welcher von den die Basis und drei Seitenkanten des Tetraeders berührenden körperlichen Ringen hat die gröſste Oberfläche. VI.

Auflösung: Bedeutet ρ den Radius desjenigen Kreises, in welchem eine durch die Höhe des Tetraeders gelegte Ebene den Ring schneidet, und ist r der Abstand des Mittelpunktes jenes Kreises von der Tetraederhöhe, so ist:

$$r = \frac{a\sqrt{6} - 3\rho(\sqrt{3} + 1)}{3\sqrt{2}}$$

und die Oberfläche $= \frac{4\pi^2}{3\sqrt{2}}\left[a\rho\sqrt{6} - 3\rho^2(\sqrt{3} + 1)\right]$.

Am gröfsten, und zwar: $= \frac{a^2\pi^2\sqrt{2}}{3(\sqrt{3} + 1)}$ wird also die Oberfläche, wenn: $\rho = \frac{a}{\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)}$;

Das Volumen dieses Ringes ist: $= \frac{a^3\pi^2\sqrt{3}}{18(\sqrt{3} + 1)^2}$.

157. Aufgabe: In ein reguläres Tetraeder einen die Basis und die Seitenflächen berührenden körperlichen Kreisring von der gröfsten Oberfläche einzubeschreiben. VI.

Auflösung: Ist ρ der Radius des Kreises, in welchem der Ring von einer durch die Höhe des Tetraeders gelegten Ebene geschnitten wird, ist ferner r der Abstand des Mittelpunktes jenes Kreises von der Tetraederhöhe, so ist:

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{3} - \rho\sqrt{2}$$

und die Oberfläche $= 4\pi^2\left(\frac{a}{6}\rho\sqrt{3} - \rho^2\sqrt{2}\right)$.

Der gröfste Wert für die Oberfläche, nämlich: $\frac{a^2\pi^2\sqrt{2}}{24}$ ergiebt sich für $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}$.

Das Volumen dieses Ringes ist: $V = \frac{a^3\pi^2\sqrt{3}}{24^2}$.

158—161. Aufgabe: Welcher von den
a) die Schenkel eines gleichschenkligen,
b) zwei Seiten eines beliebigen

Dreiecks berührenden Kreisen beschreibt bei der Rotation der Dreiecksfläche um die dritte Dreiecksseite einen körperlichen Ring 1. von der gröfsten Oberfläche?
2. von dem gröfsten Volumen? VI. XI.

Auflösung: Seien a, b, c die Seiten, F die Fläche und h_c die auf c gefällte Höhe des Dreiecks, sei ferner x der Radius des zu findenden Kreises, so ist, wenn das Dreieck um die Seite c rotiert,

1. die Oberfläche $= \frac{4\,\pi^2}{c}\,[2\,F\,x - x^2\,(a + b)]$.

Den gröſst. Wert: $\frac{4\,\pi^2\,F^2}{(a + b)\,c}$ erreicht dies. Ausdr., wenn $x = \frac{F}{a + b}$.

Dieser Kreis ist stets möglich. Der Abstand seines Mittelpunktes von der Rotationsachse c ist $= \frac{1}{2}\,h_c$.

2. Das Volumen $= \frac{2\,\pi^2}{c}\,[2\,F\,x^2 - (a + b)\,x^3]$

Am gröſst. u. zw.: $\frac{64\,\pi^2\,F^3}{27\,c\,(a + b)^2}$ wird dies. Ausdr., wenn $x = \frac{4\,F}{3\,(a + b)}$.

Der Abstand des Mittelpunktes dieses Kreises von der Achse c ist: $\frac{h_c}{3}$. Daher ist der Ring nur möglich, wenn: $a + b \geqq 2\,c$.

Rotiert das gleichschenklige Dreieck, so ist nur $b = a$ zu setzen.

162—163. Aufgabe: (Vergl. 25. 26.). Welcher von den in eine Halbkugel senkrecht zu der die Halbkugel begrenzenden Kreisfläche gestellten Cylindern hat

1. die gröſste Oberfläche?

welcher übertrifft das durch die obere Endfläche des Cylinders begrenzte Kugelsegment

2. an Gröſse am meisten? I. XI.

Auflösung: Bedeutet r den Kugelradius und erscheint der Durchmesser $2\,\rho$ der oberen Endfläche des Cylinders vom Mittelpunkte der die Halbkugel begrenzenden Kreisfläche unter dem Winkel $2\,\mu$, so ist:

1. die Oberfl. des Cyl. $= 2\,\pi\,r^2 \sin\mu\,[\sin\mu + \cos\mu]$.

Der gröſste Wert für die Oberfläche kommt demnach heraus, wenn: $\mu = 67{,}5^0$ oder: $\rho = r\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$ genommen wird, und lautet: $r^2\,\pi\,(1 + \sqrt{2})$.

2. Der Cylinder übertrifft das Kegelsegment an Vol. um:

$$\frac{2}{3}\,\pi\,r^3\,[3\cos\mu - 2\cos^3\mu - 1].$$

Dieser Ausdruck erreicht seinen gröfsten Wert $\frac{2}{3}\pi\, r^3 \left[\sqrt{2} - 1\right]$,

wenn $\cos \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ also: $\rho = \frac{r}{\sqrt{2}}$ wird.

164—166. Aufgabe: Welcher von den in eine Halbkugel hineingestellten geraden Cylindern, die mit dem Mantel die Basis der Halbkugel längs eines Durchmessers — und mit je einem Punkte der Peripherieen der Endflächen die Kugeloberfläche berühren, hat

1. die gröfste Mantelfläche?
2. die gröfste Oberfläche?
3. den gröfsten Inhalt? VI. III. XI.

Auflösung: Ist r der Kugelradius, ρ der des Cylinders, und erscheint vom Mittelpunkte der Kugel aus der zur Basis der Halbkugel senkrecht stehende Durchmesser $2\,\rho$ unter dem Winkel μ, so ist:

1. der Mantel $= 4\,\pi\,\rho\,\sqrt{r^2 - 4\,\rho^2}$;

am gröfsten wird der Mantel, wenn: $\rho = \frac{r}{4}\sqrt{2}$.

2. die Oberfläche $= \frac{r^2\,\pi}{4}\,[1 + 4\,\sin 2\,\mu - \cos 2\,\mu]$;

im Fall des Maximums mufs: $\operatorname{tang} 2\,\mu = -4$ sein.

3. der Inhalt $= 2\,\pi\,\rho^2\,\sqrt{r^2 - 4\,\rho^2}$;

es mufs also $\rho = \frac{r}{\sqrt{6}}$ werden, soll der Inhalt Maximum werden

167. Aufgabe: In einen Kugelsektor einen geraden Cylinder von der gröfsten Mantelfläche derart einzubeschreiben, dafs er mit den Peripherieen seiner Grundflächen einerseits die Mantelfläche, andererseits die Kalotte des Sektors berührt. II.

Auflösung: Sei r der Radius der Kugel, von welcher der Sektor ein Teil ist, und ergebe ein Achsenschnitt des Sektors den Centriwinkel $2\,\alpha$, so ist, wenn mit $2\,\mu$ her Winkel bezeichnet wird, unter welchem vom Kugelmittelpunkte aus der Durchmesser der die Kalotte berührenden Cylinderbasis erscheint,

der Mantel des Cylinders $= \frac{2\,r^2\,\pi}{\sin \alpha}\,\sin \mu\,\sin(\alpha - \mu)$;

derselbe wird am gröfsten, wenn: $\mu = \frac{\alpha}{2}$ und der gröfste Wert des Mantels ist $= r^2\,\pi\,\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

168—170. Aufgabe: Welches von den einer Kugel einbeschriebenen geraden Prismatoiden, deren Seitenflächen gleichschenklige kongruente Dreiecke und deren Endflächen reguläre kongruente
1. Dreiecke,
2. Vierecke,
3. n-Ecke

sind, hat den gröſsten körperlichen Inhalt? VI.

Auflösung: Ist r der Radius der Kugel und ρ der Radius des um die Endfläche des Prismatoides beschriebenen. Kreises, ist ferner $\frac{180^0}{n} = \gamma$, so ist das Volumen

1. d. sechsseit. Prismatoides $= 2\sqrt{3}\,\rho^2\sqrt{r^2 - \rho^2}$,

2. d. achtseit. Prismatoides $= \frac{4}{3}\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2})\,\rho^2\sqrt{r^2 - \rho}$

3. d. 2n-seit. Prismatoides

$$= \frac{8\,n}{3} \sin\gamma \cos\left(30^0 + \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(30^0 - \frac{\gamma}{2}\right) \rho^2 \sqrt{r^2 - \rho^2}.$$

Das Volumen eines jeden dieser Körper wird demnach am gröſsten, wenn: $\rho = \frac{r}{3}\sqrt{6}$ wird, und es ist das gröſst. Volumen

1. des 6-seitig. Pr. $= \frac{4}{3}\,r^3$,

2. des 8-seitig. Pr. $= \frac{8}{27}\,r^3\sqrt{6}\,[1 + \sqrt{2}]$,

3. d. 2n-seit. Pr. $= \frac{16\,n}{27}\,r^3\sqrt{3}\sin\gamma\cos\left[30^0 + \frac{\gamma}{2}\right]\cos\left[30^0 - \frac{\gamma}{2}\right]$.

171—172. Aufgabe: Welches von den Prismatoiden mit kongruenten gleichschenklig-dreiseitigen Seitenflächen, — bei denen die Ecken der beiden parallelen und kongruenten dreiseitig-gleichseitigen Endflächen auf je drei in einer von zwei Gegenecken eines Würfels zusammentreffenden

a) Kanten,

b) Seitendiagonalen des Würfels

liegen, — hat das gröſste Volumen? XI.

Auflösung: Sei x die Kante der gleichseitigen Endfläche des Prismatoids und a die Würfelkante, so ist:

a) der Inhalt des Prismatoides $= \frac{1}{3}\,x^2\,[3\,a - x\sqrt{2}]$;

der gröſsse Wert: $\frac{2}{3}\,a^3$ ergiebt sich, wenn: $x = a\sqrt{2}$.

b) der Inhalt $= \frac{1}{3} x^2 [3 a - 2 x \sqrt{2}]$.

Das Max. $= \frac{a^3}{6}$ findet statt, wenn: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ genommen wird.

173—175. Aufgabe: Durch ein reguläres Tetraeder ist parallel mit einer Kante ein mit dem Mantel zwei Seitenflächen des Tetraeders berührender Kreiscylinder so hindurchzulegen, dafs der innerhalb des Tetraeders fallende Teil desselben

1. den gröfsten körperlichen Inhalt } hat,
2. die gröfste Mantelfläche } hat,
3. einen Mantel hat, der die Summe der Endflächen an Gröfse am meisten übertrifft. XI. VI.

Auflösung: Ist a die Tetraederkante und ρ der Radius des Kreiscylinders, so ist:

1. das Volumen $= \pi \rho^2 (a - \rho \sqrt{6})$.

Für $\rho = \frac{a}{9} \sqrt{6}$ erreicht demn. das Vol. seinen gröfst. Wert: $\frac{2 a^3 \pi}{81}$.

2. der Mantel $= 2 \pi \rho (a - \rho \sqrt{6})$.

Hier mufs $\rho = \frac{a}{2 \sqrt{6}}$ werd., dann ist der gröfst. Wert d. Ausdr.: $\frac{\pi a^2}{2 \sqrt{6}}$.

3. Der Mantel übertrifft die Summe der Endellipsen um: $\pi \rho [2 a - 3 \rho \sqrt{6}]$.

Das Max. dieser Differenz $\frac{a^2 \pi}{3 \sqrt{6}}$ tritt ein, wenn: $\rho = \frac{a}{3 \sqrt{6}}$.

176—178. Aufgabe: Die eine Seitenkante K einer dreiseitigen Pyramide steht senkrecht auf der Pyramidenbasis. Bei welchem von den geraden, senkrecht auf der Grundfläche der Pyramide stehenden Cylindern, welche mit ihren Mänteln die in K sich schneidenden Seitenflächen berühren, hat der innerhalb der Pyramide fallende Teil

1. das gröfste Volumen?
2. den gröfsten Mantel?
3. die gröfste Oberfläche? XI. VI.

Auflösung: Seien a, b, c die Grundkanten, F die Grundfläche und h_c die in ihr auf c gefällte Höhe, sei ferner c die Gegenkante von K und i der Neigungswinkel der beiden durch c gehenden Begrenzungsflächen der Pyramide, so ist, wenn x den Radius der Cylinderbasis bedeutet:

1. das Volumen $= \frac{\pi\, h_c \tan i}{2\, F} x^2 [2\, F - x\, (a + b)]$.

Der gröſst. Wert: $\frac{16\, \pi\, h_c\, F^2 \operatorname{tg} i}{27\, (a+b)^2}$ kommt heraus, wenn $x = \frac{4\, F}{3\, (a+b)}$ wird.

Die Aufgabe ist möglich, so lange: $a + b \geqq 2\, c$.

2. Der Mantel $= \frac{\pi\, h_c \operatorname{tg} i}{F} x\, [2\, F - x\, (a + b)]$.

Am gröſsten, nämlich: $\frac{\pi\, F\, h_c \operatorname{tg} i}{a + b}$, wird der Mantel, wenn:

$$x = \frac{F}{a + b}.$$

Diese Aufgabe ist stets möglich.

3. Die Oberfläche

$$= \frac{2\, \pi \cos \frac{i}{2}}{\cos i} \left\{ 2\, h_c \sin \frac{i}{2} x - x^2 \left(\frac{2\, (a+b)}{c} \sin \frac{i}{2} - \cos \frac{i}{2} \right) \right\}.$$

Setzt man hier: $\operatorname{ctg} \lambda = \frac{2\, (a + b)}{c}$, so ist der gröſste Wert der Oberfläche: $\frac{\pi\, h_c^2 \operatorname{tg} i \sin \frac{i}{2} \sin \lambda}{\sin \left(\frac{i}{2} - \lambda\right)}$ und es ist dann:

$$x = \frac{h_c \sin \lambda \sin \frac{i}{2}}{\sin \left(\frac{i}{2} - \lambda\right)}.$$

Hierbei muſs: $c \sin \left(\frac{i}{2} - \lambda\right) \geqq (a + b + c) \sin \frac{i}{2} \sin \lambda$.

179—182. Aufgabe: Durch einen Punkt der Peripherie des eine Halbkugel begrenzenden Kreises K_1 ist eine K_1 berührende und die Halbkugel in einem Halbkreise K_2 schneidende Ebene so hindurchzulegen, daſs bei dem auf K_2 senkrecht stehenden und durch K_1 begrenzten Cylinderhuf

1. die Mantelfläche,
2. die Differenz der Endflächen,
3. die Summe aus dem Mantel und K_2,
4. das Volumen

möglichst groſs wird. VI. IV. X.

Auflösung: Mögen K_1 und K_2 den Neigungswinkel μ bilden, so ist, wenn r der Kugelradius ist:

1. der Mantel $= r^2 \pi \sin 2\, \mu$.

Also ist im Falle des Maximums $\mu = 45^0$ und der gröſste Wert des Mantels ist: $r^2\, \pi$.

2. die Differenz der Endflächen $= r^2 \pi [\cos \mu - \cos^2 \mu]$.
Das Maximum dieses Ausdrucks, nämlich: $\frac{r^2 \pi}{4}$, erhält man, wenn: $\mu = 60^0$ wird.

3. Die Summe aus dem Mantel und $K_2 = r^2 \pi (\sin 2 \mu + \cos^2 \mu)$.
Der gröſste Wert dieser Summe: $\frac{r^2 \pi}{2} [1 + \sqrt{5}]$ ergiebt sich, wenn $\operatorname{tang} 2 \mu = 2$ genommen wird.

4. Das Volumen $= r^3 \pi \sin \mu \cos^2 \mu$.
Das gröſste Volumen des Hufes, nämlich: $\frac{2 r^3 \pi}{3 \sqrt{3}}$, ergiebt sich, wenn: $\sin \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ gesetzt wird.