Über

eine besondere Gattung hydrodynamischer Probleme.

II. Teil.

Von

Oberlehrer **Hermann Klang.**

Wissenschaftliche Beilage

zum

Jahresbericht des städtischen Progymnasiums zu Lötzen.

Ostern 1895.

Königsberg in Pr.

Druck von A. Hausbrand's Nachfolger.

1895. Progr. — No. 11. **1895.**

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit erschien bereits als Beilage zum Osterprogramm unserer Anstalt für 1890. Äussere Umstände veranlassten ebensowohl früher die Zerstückelung der damals bereits vollendeten Arbeit, als die lange Verzögerung der Veröffentlichung des zweiten Teiles. Die ohnedies vielleicht nur kleine Zahl derjenigen, die sich für das Thema interessieren, wird sich infolge dieser Umstände nun wohl noch mehr vermindern, doch will ich deshalb den zweiten Theil nicht ganz zurückhalten, da ich am Schlusse des ersten sein Erscheinen in Aussicht stellte.

Auf einen Versuch, die Resultate des ersten Teiles hier zu rekapitulieren, verzichte ich, da es doch kaum gelingen würde, das Folgende ohne Kenntnis des ersten Teiles zu verstehen. Ich erwähne nur kurz, dass die Arbeit sich mit der Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit beschäftigt, die von einer festen Hülle eingeschlossen ist, und zwar unter Vernachlässigung der Reibung und der Masse der Hülle. Im ersten Teile war nach allgemeiner Betrachtung dieses Problems der Fall der Kugel und des rechtwinkligen Parallelepipeds behandelt, letzterer jedoch nur bezüglich der äusseren Bewegung. Ich wende mich daher nun zur Betrachtung der inneren, relativen Bewegung.

Die allgemeinen Differentialgleichungen 10) des § 1 nehmen im Falle des Parallelepipeds wegen

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0$$

die Form an:

$$17)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= q\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - z\right) + r\left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x} + y\right) \\ \frac{dy}{dt} &= r\left(\frac{\partial \psi_3}{\partial y} - x\right) + p\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + z\right) \\ \frac{dz}{dt} &= p\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - y\right) + q\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + x\right) \end{aligned}$$

Dies System ist leicht integrierbar, wenn zwei von den Grössen p, q, r, z. B. p und q, verschwinden, d. h., wenn die Drehungsachse der äusseren Bewegung parallel der z-Achse ist. In diesem Falle werden die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r\left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x} + y\right) \\ \frac{dy}{dt} &= r\left(\frac{\partial \psi_3}{\partial y} - x\right) \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ergiebt das selbstverständliche Resultat $z = \text{Const}$, d. h. die Stromkurven verlaufen in Ebenen, die zur xy Ebene parallel liegen. Die beiden ersten Gleichungen geben durch Division eine Differentialgleichung, welche nur noch x und y enthält, also die Differentialgleichung der ebenen Stromkurven. Diese lautet:

18) $$\left(x - \frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right) dx + \left(y + \frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right) dy = 0$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right) = - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2}.$$

Demnach ist die linke Seite von 18) wegen $\triangle \psi_3 = 0$ ein vollständiges Differential und die Gleichung lässt sich also integrieren und giebt:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - \int \frac{\partial \psi_3}{\partial y} dx + \int \frac{\partial \psi_3}{\partial x} dy + \int dy \int \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} dx = \text{Const}$$

Setzt man wieder abkürzend

$$\psi_3 = \sum \left\{ Mi \sin i\alpha y \sin \alpha x + Ni \sin i\beta x \sin \beta y \right\}$$

so wird:

$$- \int \frac{\partial \psi_3}{\partial y} dx = - \sum M \cos i\alpha y \cos \alpha x + \sum N \cos i\beta x \cos \beta y$$

$$+ \int \frac{\partial \psi_3}{\partial x} dy = - \sum \quad \text{„} \quad + \sum \quad \text{„}$$

$$+ \int dy \int \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} dx = + \sum \quad \text{„} \quad - \sum \quad \text{„}$$

Demnach lautet die Gleichung der Stromkurven

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - \sum M \cos i\alpha y \cos \alpha x + \sum N \cos i\beta x \cos \beta y = \text{Const},$$

oder, bei Einsetzung der Werte für M, N, α, β, (nach 13) dieses §) und nach Multiplikation mit $\frac{\pi^3}{16}$, vollständig ausgeschrieben:

19) $$\frac{\pi^3}{32}(x^2 + y^2) + \sum_{1,\infty}^{h} \frac{(-1)^{h+1}}{(2h-1)^3} \cdot$$

$$\left\{ a^2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{2h-1}{2a}\pi x\right) \cos\left(i\, \frac{2h-1}{2a}\pi y\right)}{\cos\left(i\, \frac{2h-1}{2a}\pi b\right)} + b^2 \cdot \frac{\cos\left(i\, \frac{2h-1}{2b}\pi x\right) \cos\left(\frac{2h-1}{2b}\pi y\right)}{\cos\left(i\, \frac{2h-1}{2b}\pi a\right)} \right\} = \lambda$$

worin λ der constante Parameter ist, durch den sich die einzelnen Stromkurven unterscheiden. Die Gleichung 19) ist im allgemeinen sehr schlecht diskutierbar. Um eine Anschauung über den Verlauf der Stromlinien zu bekommen, will ich den Fall des quadratischen Querschnitts behandeln. Nimmt man die Seite desselben als Einheit, also $a = b = 1$, so wird die Gleichung der Stromkurven:

$$\frac{\pi^3}{32}(x^2+y^2) + \sum \frac{(-1)^{h+1}}{(2h-1)^3} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2h-1}{2}\pi x\right)\cos\left(\frac{2h-1}{2}i\pi y\right) + \cos\left(\frac{2h-1}{2}i\pi x\right)\cos\left(\frac{2h-1}{2}\pi y\right)}{\cos\left(\frac{2h-1}{2}i\pi\right)} = \lambda \tag{20}$$

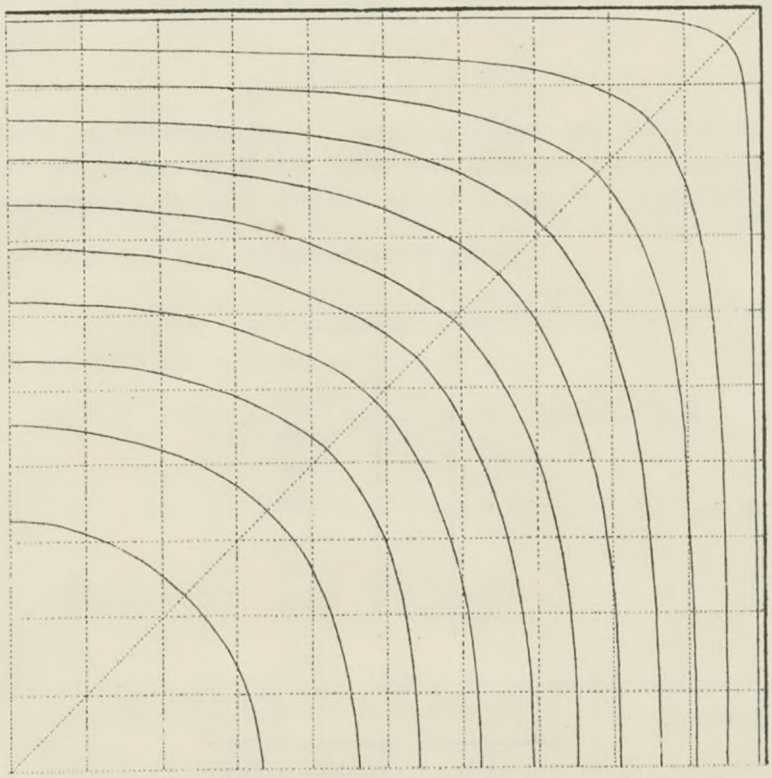
Aus dieser Formel für angenommenes λ zusammengehörige Werte von x und y zu berechnen, würde schwer durchführbar sein; ich habe umgekehrt für einige Punkte den Wert von λ bestimmt. Folgende Werte ergeben sich als zusammengehörig:

x	y	λ
0	0	0,796
$^1/_4$	0	0,857
$^1/_2$	0	1,049
$^3/_4$	0	1,396
1	0	1,938
$^1/_4$	$^1/_4$	0,914
$^1/_2$	$^1/_2$	1,236
$^3/_4$	$^3/_4$	1,656

Durch graphische Interpolation erhält man hieraus folgende zusammengehörige Werte der Coordinaten:

λ	$x = y$	x bei $y = 0$
0,8	0	0
0,9	0,23	0,33
1,0	0,34	0,46
1,1	0,42	0,54
1,2	0,48	0,62
1,3	0,54	0,69
1,4	0,59	0,75
1,5	0,65	0,81
1,6	0,71	0,86
1,7	0,78	0,91
1,8	0,85	0,95
1,9	0,96	0,99

Der aus diesen Zahlen folgende Verlauf der Strömungskurven ist durch die beigegebene Figur für einen Quadranten des Querschnitts dargestellt. Die Kurven sind in der Nähe des Mittelpunkts ziemlich genaue Kreise und gehen dann allmählich in abgerundete Vierecke über, deren Ecken immer spitzer werden, bis die quadratische Form beim Zusammenfallen mit der Grenze den Abschluss bildet.



Dass die Begrenzung selbst auch eine Stromkurve bildet, ist wohl selbstverständlich, folgt aber auch leicht aus der Differentialgleichung

$$\left(x - \frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right) dx + \left(y + \frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right) dy = 0,$$

denn nach den Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right)_{x = \pm a} = -y \qquad \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right)_{y = \pm b} = x$$

folgt, dass die Linien $x = \pm a$ $y = \pm b$ die Differentialgleichung befriedigen.

Auch das Resultat, dass die Stromkurven nach dem Mittelpunkt zu immer mehr die Kreisform annehmen, folgt ohne numerische Berechnung aus der Gleichung 20), denn, entwickelt man den dort unter der Summe vorkommenden Ausdruck

$$\cos\left(\frac{2h-1}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{2h-1}{2}\pi i y\right) + \cos\left(\frac{2h-1}{2}\pi i x\right) \cos\left(\frac{2h-1}{2}\pi y\right)$$

nach Potenzen von x und y unter Vernachlässigung der Glieder vierter und höherer

Ordnung, so wird dieser Ausdruck, und damit die ganze Summe, eine Constante, so dass die Stromkurvengleichung für kleine x und y die Form annimmt:

$$x^2+y^2=\lambda_1.$$

Vernachlässigt man erst Glieder 8ter Ordnung gegen 1, so ergiebt sich die Form:

$$x^2+y^2+C\,(x^4+y^4-6x^2y^2)=\lambda$$

worin C eine Constante mit dem Näherungswert $\frac{2}{13}$ ist.

Dass der allgemeine Fall (b nicht = a) sich von dem vorigen nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle der Kreise Ellipsen treten, ist vorauszusehen, folgt aber auch leicht in analoger Weise wie oben. Die allgemeine Gleichung der Stromkurven, 19) nimmt, wenn man unter Vernachlässigung von Gliedern 4ter Ordnung entwickelt und noch abkürzend $\frac{2h-1}{2}\pi=\nu$ setzt, die Form an:

$$\frac{\pi^3}{32}(x^2+y^2)+\sum\frac{(-1)^{h+1}}{(2h-1)^3}$$

$$\left(\frac{a^2}{\cos\left(i\nu\frac{b}{a}\right)}+\frac{b^2}{\cos\left(i\nu\frac{a}{b}\right)}\right)+\frac{\pi^2}{8}\sum\frac{(-1)^{h+1}}{(2h-1)}\cdot\frac{\cos\left(i\nu\frac{b}{a}\right)-\cos\left(i\nu\frac{a}{b}\right)}{\cos\left(i\nu\frac{b}{a}\right)\cdot\cos\left(i\nu\frac{a}{b}\right)}(x^2-y^2)=\lambda$$

Die erste Summe kann man zur Constante λ ziehen, durch $\frac{\pi^2}{8}$ dividieren, und den dann bei x^2+y^2 noch bleibenden Faktor $\frac{\pi}{4}$ durch die Leibnitzsche Reihe $\sum\frac{(-1)^{h+1}}{2h-1}$ ersetzen. Dann erhält man:

$$x^2\cdot\sum\frac{(-1)^{h+1}}{2h-1}\cdot$$

$$\left(1+\frac{\cos i\nu\frac{b}{a}-\cos i\nu\frac{a}{b}}{\cos i\nu\frac{b}{a}\cdot\cos i\nu\frac{a}{b}}\right)+y^2\cdot\sum\frac{(-1)^{h+1}}{2h-1}\left(1-\frac{\cos i\nu\frac{b}{a}-\cos i\nu\frac{a}{b}}{\cos i\nu\frac{b}{a}\cdot\cos i\nu\frac{a}{b}}\right)=\text{Const}$$

Die Coefficienten von x^2 und y^2 haben dasselbe Zeichen, folglich haben wir nach dem Mittelpunkt zu Ellipsen, die nur dann zu Kreisen werden können, wenn $\cos\left(i\nu\frac{b}{a}\right)=\cos\left(i\nu\frac{a}{b}\right)$ ist, d. h. nur in dem oben behandelten Falle des quadratischen Querschnitts.

Wenn man sich die Flüssigkeit im Parallelepiped durch irgend welche festen Cylinderflächen von zu vernachlässigender Masse, deren Leitkurven mit den Stromkurven zusammenfallen, in mehrere ringförmige Stücke geteilt denkt, so würde offenbar nichts geändert. Dann würde aber beispielsweise bei quadratischem Querschnitt ein Stück in der Mitte einen Kreiscylinder vorstellen, dessen Trägheitsmoment, wie das jedes flüssigen Rotationskörpers, = 0 ist. Es wird also offenbar ein um so grösserer Teil der Flüssigkeitsmasse an der Bildung des Trägheitsmoments keinen, oder doch einen geringeren

Anteil haben, je mehr sich der Querschnitt dem quadratischen nähert. Hieraus erklärt sich wohl das am Schlusse des ersten Teiles dieser Abhandlung bemerkte, auffallende Verhalten von $\frac{C}{8a^4c}$ bei veränderlichem Werte von $t = \frac{b}{a}$.

§ 4. Der Cylinder.

Nach den allgemeinen Sätzen 7) und 9) des § 1 folgt für den Fall eines Kreiscylinders:

$$\underline{\varphi_1 = x} \qquad \underline{\varphi_2 = y} \qquad \underline{\varphi_3 = z} \text{ und } \underline{\psi_3 = 0}$$

Um noch ψ_1 und ψ_2 zu bestimmen, führe ich Cylindercoordinaten ein:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

Dann ergiebt sich nach einiger Rechnung:

$$\underline{\triangle \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0}, \tag{1}$$

welcher Hauptgleichung sowohl ψ_1 als ψ_2 zu genügen haben. Dabei bestehen die Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{für } \varrho = R \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial \varrho} = - z \sin \varphi \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial \varrho} = z \cos \varphi \\ &\text{für } z = \pm c \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \varrho \sin \varphi \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = - \varrho \cos \varphi \end{aligned} \tag{2}$$

Der Gleichung 1) kann durch ein Produkt dreier Funktionen ($\psi = \Phi ZP$) genügt werden, deren jede nur von einer der 3 Variablen abhängt. Nach Division durch ΦZP wird 1):

$$\frac{1}{P}\left(\frac{d^2P}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dP}{d\varrho}\right) + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = aZ$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = b\Phi$$

$$\text{und } \frac{d^2P}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dP}{d\varrho} + \left(a + \frac{b}{\varrho^2}\right) P = 0$$

Das allgemeine Integral der zweiten Gleichung ist:

$$\Phi = A \cos \sqrt{-b}\, \varphi + B \sin \sqrt{-b}\, \varphi$$

wovon $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ spezielle Fälle sind. Die Bedingungsgleichungen 2) werden aber durch diese speziellen Fälle befriedigt, wenn man nämlich setzt:

$$\psi_1 = \sin \varphi \,.\, \Psi \qquad \psi_2 = - \cos \varphi \,.\, \Psi$$

worin Ψ in beiden Fällen dasselbe ist.

Es erübrigt also nur noch eine Funktion $\Psi = \sum^{h} P_h Z_h$ zu bestimmen, für deren partikuläre Lösungen die Bedingungen gelten:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = aZ$$

$$\frac{d^2P}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dP}{d\varrho} + \left(a - \frac{1}{\varrho^2}\right) P = 0$$

Die allgemeine Lösung der ersten ist wieder von der Form

$$A \cos\left(\sqrt{-a}\; z\right) + B \sin\left(\sqrt{-a}\; z\right)$$

Nach einer der Bedingungsgleichungen 2) muss aber sein:

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_{z = \pm c} = \sum P \cdot \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z = \pm c} = \varrho$$

Daraus folgt, dass $A = 0$ sein muss, während a noch unbestimmt bleibt. Man wird also sowohl $\sin \alpha z$ als $\sin i\beta z$ als Lösungen von Z ansetzen können, also ist:

$$\Psi = A P_1 \sin(\alpha z) + B P_2 \sin(i\beta z)$$

Man teilt nun die Aufgabe (wie beim Parallelepiped) indem man setzt:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

und beide Teile einzeln die Hauptgleichung befriedigen lässt, jede aber nur einen Teil der Nebenbedingungen, nämlich:

3a) u. 3b) $\quad \sum A \sin(\alpha z) \left(\frac{dP_1}{d\varrho}\right)_{\varrho = R} = -z \qquad \sum B \sin(i\beta z)\left(\frac{dP_2}{d\varrho}\right)_{\varrho = R} = 0$

4a) u. 4b) $\quad \sum A P_1 . \alpha \cos(\alpha c) = 0 \qquad \sum B\, i\beta \cos(i\beta c) . P_2 = \varrho$

Die Funktionen P_1 u. P_2 genügen dabei den Gleichungen:

$$\frac{d^2P_1}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dP_1}{d\varrho} - P_1\left(\alpha^2 + \frac{1}{\varrho^2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2P_2}{d\varrho_2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dP_2}{d\varrho} + P_2\left(\beta^2 - \frac{1}{\varrho^2}\right) = 0$$

Durch die Substitutionen $\varrho = \frac{r}{i\alpha}$ resp. $\varrho = \frac{r}{\beta}$ kommen beide auf die Form:

$$\frac{d^2P}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dP}{dr} + P\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = 0\,,$$

deren Lösung die Bessel'sche Funktion $J_{1(r)}$ ist. Es ist also:

$$\underline{P_1 = J_{1(i\alpha\varrho)}} \qquad \underline{P_2 = J_{1(\beta\varrho)}}$$

und die Grössen α, β bestimmen sich wie A u. B. aus den Bedingungsgleichungen. Zunächst folgt nach 4a)

5) $\quad \cos(\alpha c) = 0$, also $\underline{\alpha_h = \frac{2h-1}{2c}\pi}$

wobei h alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis ∞ durchlaufen kann. Ferner ist nach 3a):

$$\sum A_h \sin\left(\frac{2h-1}{2c}\pi z\right)\left(\frac{dJ_1\left(i\frac{2h-1}{2c}\pi\varrho\right)}{d\varrho}\right)_{\varrho = R} = -z$$

Multiplizieren wir mit $\frac{2k-1}{2c}\pi z\,dz$ und integrieren von $-c$ bis $+c$, so fallen links alle Glieder bis auf das k^{te} fort. Ferner ist:

$$\int_{-c}^{+c}\sin^2\left(\frac{2k-1}{2c}\pi z\right)dz = c$$

$$-\int_{-c}^{+c} z\,.\sin\left(\frac{2k-1}{2c}\pi z\right)dz = (-1)^k\cdot\frac{8c^2}{(k-1)^2\pi^2}.$$

Berücksichtigen wir noch die allgemeine Formel:

$$\frac{d\,J_n(z)}{dz} = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right),$$

nach welcher

$$\left(\frac{dJ_1(i\alpha\varrho)}{d\varrho}\right)_{[\varrho = R]} = \frac{i\alpha}{2}\left(J_0(i\alpha R) - J_2(i\alpha R)\right)$$

wird, so haben wir:

6) $$A_k = (-1)^k\cdot\frac{4i}{c\alpha_k^3}\cdot\frac{1}{J_2(i\alpha_k R) - J_0(i\alpha_k R)}$$

Nach 3b ist:

$$\sum B\,.\sin(i\beta z)\left(\frac{dJ_1(\beta\varrho)}{d\varrho}\right)_{\varrho = R} = 0$$

Sind also $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots.$ die Wurzeln der Gleichung $J^1_1(z) = 0$, so muss sein:

7) $$\underline{\beta_h = \frac{\delta_h}{R}}$$

Nach 4b muss sein:

8) $$\underline{\sum M_h\,J_1\left(\varrho\frac{\delta_h}{R}\right) = \varrho}$$

wobei

$$B_h\,i\,\frac{\delta_h}{R}\cdot\cos\left(\frac{i\delta_h c}{R}\right) = M_h$$

gesetzt ist.

Mit Hilfe der Differentialgleichung für J^1 lässt sich nachweisen, dass:

$$\int_0^R J_1\left(\varrho\frac{\delta_h}{R}\right).J_1\left(\varrho\frac{\delta_k}{R}\right).\varrho\,d\varrho = 0 \text{ für } k \gtrless h$$

und

$$\int_0^R J_1^2\left(\varrho\frac{\delta_k}{R}\right)\varrho\,d\varrho = \frac{R^2}{2}\left(1-\frac{1}{\delta_k^2}\right).J_1^2(\delta_k)$$

ist. Durch Multiplikation von 8) mit $J_1\left(\varrho\frac{\delta_k}{R}\right)\varrho\, d\varrho$ und Integration zwischen 0 u. R erhält man also:

$$M_k\int_0^R J_1^2\left(\varrho\frac{\delta_k}{R}\right)\varrho\, d\varrho = M_k\frac{R^2}{2}\left(1-\frac{1}{\delta_k^2}\right)\cdot J_1^2(\delta_k) = \int_0^R J_1\left(\varrho\frac{\delta_k}{R}\right)\varrho^2\, d\varrho$$

Allgemein ist, wie sich leicht durch die Reihe für J darthun lässt:

$$z^n . J_{n-1}(z)\, dz = d\left(z^n\, J_n(z)\right),$$

demnach

$$\int_0^R J_1\left(\varrho\frac{\delta_k}{R}\right)\varrho^2 d\varrho = \frac{R^3}{\delta_k^3}\left[\varrho^2\frac{\delta_k^2}{R^2}\cdot J_2\left(\varrho\frac{\delta_k}{R}\right)\right]_0^R = \frac{R^3}{\delta_k^3}\left[\delta_k^2 . J_2(\delta_k)\right] = \frac{R^3}{\delta_k}\cdot J_2\ (\delta_k)$$

Berücksichtigt man noch die Formel

$$\frac{d\ J_1(z)}{dz} = \frac{1}{z}J_1 - J_2\ ,$$

wonach sein muss:

$$J_2(\delta) = \frac{1}{\delta}\ J_1(\delta)$$

und setzt für M_h seinen Wert ein, so folgt:

$$B_h = -\frac{2iR^2}{\delta_h\ (\delta_h^2-1)\ \cos\left(\frac{i\delta_h c}{R}\right) J_1(\delta_h)} \tag{9}$$

Durch die Relationen 5), 6), 7) und 9) sind nun A, B, α und β bestimmt, also auch:

$$\Psi = \sum_{1,\infty}^{h} A_h \sin(\alpha_h z)\ J_1(i\alpha_h\varrho) + \sum_{1,\infty}^{h} B_h \sin(i\beta_h z)\ J_1(\beta_h\varrho)$$

und demnach sind nun auch $\psi_1 = \sin\varphi . \Psi$ und $\psi_2 = \cos\varphi . \Psi$ bekannt.

Die nächste Aufgabe fordert, da allgemein $A = B = \Gamma = m$ und ausserdem $C = o$ ist, nur noch die Bestimmung der modificierten Trägheitsmomente A und B, nach den Formeln:

$$A = -\int\psi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\, d\omega \qquad B = -\int\psi_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\, d\omega$$

Ich bestimme A, indem ich die Integration über die Oberfläche in drei Teile zerlege, entsprechend den beiden Kreisscheiben und dem Mantel. Es entspricht sich:

Fläche	$\psi 1$	$-\frac{\partial\psi_1}{\partial n}$	$d\omega$
$z = +c$	$\sin\varphi\sum\left\{A_h\sin(\alpha_h c)\ J_1(i\alpha\varrho) + B_h\sin(i\beta c)\ J_1(\beta\varrho)\right\}$	$\varrho\sin\varphi$	$\varrho\, d\varrho\, d\varphi$
$z = -c$	$-\sin\varphi\sum\left\{\quad ,, \quad\right\}$	$-\varrho\sin\varphi$	$\varrho\, d\varrho\, d\varphi$
$\varrho = R$	$\sin\varphi\sum\left\{A_h\sin\alpha z\, J_1(i\alpha R) + B_h\sin(i\beta z)\ J_1(\beta R)\right\}$	$-z\sin\varphi$	$R\, dz\, d\varphi$

Die beiden Endflächenteile summieren sich und es wird:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} 2\sum A_h \sin(\alpha_h c) \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R J_1(i\alpha_h\varrho)\,\varrho^2 d\varrho + 2\sum B_h \sin(i\beta_h c) \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R J_1(\beta\varrho)\,\varrho^2 d\varrho \\ - R\sum A_h J_1(i\alpha_h R) \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_{-c}^{+c} z \,.\, \sin\alpha_h z\, dz - R\sum B_h\, J_1(\beta_h R) \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_{-c}^{+c} z.\, \sin(i\beta z)\, dz \end{array} \right.$$

Nun ist aber:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \pi$$

$$\int\limits_{-c}^{+c} z \sin\alpha z\, dz = \frac{2}{\alpha^2}(\sin\alpha c - \alpha c\cos\alpha c) = (-1)^{h+1} \cdot \frac{2}{\alpha^2}$$

$$\int\limits_{-c}^{+c} z \sin i\beta z\, dz = -\frac{2}{\beta^2}\Big(\sin i\beta c - i\beta c\cos(i\beta c)\Big)$$

$$\int\limits_0^R J_1(i\alpha\varrho)\,\varrho^2 d\varrho = -\frac{iR^2}{\alpha} \cdot J_2(i\alpha R)$$

$$\int\limits_0^R J_1(\beta\varrho)\,\varrho^2 d\varrho = \frac{R^3}{\delta} \cdot J_2(\delta)$$

Demnach ist:

$$\text{10)} \qquad \left. \begin{array}{l} \sum(-1)^h A_h \Big\{ i\alpha R J_2(i\alpha R) + J_1(i\alpha R) \Big\} \cdot \dfrac{R}{\alpha^2} \\ + \sum B_h \dfrac{R^3}{\delta^2} \cdot \sin\dfrac{i\delta c}{R} \Big\{ \delta J_2(\delta) + J_1(\delta) \Big\} \\ - \sum B_h \cos\dfrac{i\delta c}{R} \cdot \dfrac{iR^2 c}{\delta} \cdot J_1(\delta) \end{array} \right\} = \frac{A}{2\pi}$$

Dieser Ausdruck lässt sich jedoch noch etwas umformen. Setzt man in der dritten Summe nach 9) den Wert für B_h ein, so wird:

$$\sum B_h \cos\left(\frac{i\delta c}{R}\right) \frac{iR^2 c}{\delta} \cdot J_1(\delta) = 2\, c\, R^4 \,.\, \sum^h \frac{1}{\delta_h^{\,2}(\delta_h^{\,2} - 1)}$$

und hierin sind die δ_h die Wurzeln der Gleichung:

$$J_1{}^1(z) = 0$$

Die ersten derselben sind angenähert:

$$\delta_1 = 1{,}841\,..$$
$$\delta_2 = 5{,}331\,..$$
$$\delta_3 = 8{,}53\,..$$

$$\delta_4 = 11{,}70\,..$$
$$\delta_5 = 14{,}86\,..$$
$$\delta_6 = 18{,}02\,..$$

Berechnet man mittels dieser Werte $\sum \frac{1}{\delta^2(\delta^2-1)}$, so ergiebt sich innerhalb der angestrebten Genauigkeit der Wert $\frac{1}{8}$. Dies ist aber auch der genaue Wert jener Summe, wie sich folgendermassen zeigen lässt.

Die δ_h sind bestimmt durch die Gleichung:

$$2J_1{}^1(\delta) = 0 = 1 - \frac{3}{2.4}\delta^2 + \frac{5}{2.4.4.6}\delta^4 - \frac{7}{2.4.4.6.6.8}\cdot\delta^6 + - \ldots$$

demnach werden die Grössen $\frac{1}{\delta_h{}^2}$ die Wurzeln einer Gleichung sein von der Form:

$$0 = x^n - \frac{3}{2.4}x^{n-1} + \frac{5}{2.4.4.6}x^{n-2} - + \ldots = x^n + A_1\, x^{n-1} + A_2\, x^{n-2} + \ldots$$

Setze ich nun abkürzend:

$$\sum_{1,\infty}^{h} \frac{1}{\delta_h{}^{2k}} = s_k \text{ und } \sum_{1,\infty}^{k} s_k = S$$

so ist bekanntlich

$$0 = s_1 + A_1$$
$$0 = s_2 + A_1\, s_1 + A_2$$
$$0 = s_3 + A_1\, s_2 + A_2\, s_1 + 3\, A_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = s_n + A_1\, s_{n-1} + A_2\, s_{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1}\, s_1 + n\, A_n$$

Addiert man nun alle diese Gleichungen, so wird

$$0 = \sum_{1,n}^{h} s_h + A_1 \sum_{1,n-1} s_h + A_2 \sum_{1,n-2}^{h} s_h + \ldots + \sum_{1,n}^{h} h\,.\,A_h$$

Für $n = \infty$ wird hieraus:

$$0 = S + S\sum A_h + \sum h\; A_h$$

also, wenn man noch statt 1 setzt A_0:

$$S = -\frac{\sum\limits_{0,\infty} h\; A_h}{\sum\limits_{0,\infty} A_h}$$

Nun ist aber, wie eine einfache Vergleichung mit den entsprechenden Reihen zeigt

$$\sum A_h = 2\, J_1{}^1(1) \qquad \sum h\, A_h = J_1{}''(1)$$

und ausserdem folgt aus der Differentialgleichung:

$$J_1''(z) + \frac{1}{z} J_1'(z) + \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) J_1(z) = 0,$$

dass für $z = 1$ wird:

$$J_1'' + J_1'(1) = 0$$

und daher ist:

$$\underline{S = \frac{1}{2}}$$

Nun ist aber:

$$\sum \frac{1}{\delta_h^2 (\delta_h^2 - 1)} = \sum \frac{1}{\delta_h^4} \left(1 + \frac{1}{\delta_h^2} + \frac{1}{\delta_h^4} + \ldots\right) = S - s_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2.4} = \frac{1}{8},$$

womit die obige Behauptung erwiesen ist. Das dritte Glied in dem Ausdruck für $\frac{A}{2\pi}$ ist also: $-\frac{cR^4}{4}$.

Führt man den Wert von B_h in dem zweiten Gliede von 10) ein, so wird dieses:

$$4\,R^5 \sum \frac{\operatorname{tang} \frac{i\,\delta c}{R}}{\delta^3 (\delta^2 - 1)}$$

und berücksichtigt man den Wert von A_h und die Relation $J_1(z) = \frac{z}{2}\left(J_0(z) + J_2(z)\right)$, so wird die erste Summe in 10)

$$\frac{4R^2}{c} \sum \frac{1}{\alpha^4} \cdot \frac{J_0 + J_2}{J_0 - J_2} - \frac{2R^2}{c} \sum \frac{1}{\alpha^4}$$

und weiter ist:

$$-\frac{2R^2}{c} \sum \frac{1}{\alpha^4} = -\frac{32 R^2 c^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{(2h-1)^4} = -\frac{R^2 c^3}{3}$$

Führt man schliesslich noch $2R^2 \pi c = m$ ein, so ist also:

$$11)\ A = -m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{c^2}{3}\right) + m\left\{\frac{64 c^2}{\pi^4} \sum \frac{1}{(2h-1)^4} \left(\frac{J_0 + J_2}{J_0 - J_2}\right)_{i\alpha R} + \frac{4R^3}{c} \sum \frac{1}{\delta^3(\delta^2 - 1)} \cdot \frac{e^{\frac{\delta c}{R}} - e^{-\frac{\delta c}{R}}}{c^{\frac{\delta c}{R}} + c^{-\frac{\delta c}{R}}}\right\}$$

Der in endlicher Form darstellbare Teil ist wieder (wie beim Parallelepiped) nichts anderes als das negative Trägheitsmoment des entsprechenden **festen** Cylinders für dieselbe Achse, denn letzteres ist:

$$M_x = \int \varrho\, d\varphi\, d\varrho\, dz\, (\varrho^2 \sin^2\varphi + z^2)$$

$$= \int_0^R \varrho^3\, d\varrho \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_{-c}^{+c} dz + \int_0^R \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-c}^{+c} z^2\, dz$$

$$= \frac{R^4\pi c}{2} + \frac{2R^2\pi c^3}{3} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{c^2}{3}\right)$$

Wenn R und c gegeben sind, so kann man nach 11) mit beliebiger Genauigkeit A berechnen; freilich ist die Rechnung ziemlich umständlich. Im Falle $R = c$ ergiebt sich

$$\underline{A = 0{,}09543.\, m.\, c^2}\,.$$

Wenn man $B = -\int \Psi_2 \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial n} d\omega$ in derselben Weise wie A berechnen würde, so käme statt $\sin\varphi$ nur überall $\cos\varphi$ in den Formeln vor, und da $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi$ mit $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi$ gleichwertig ist, so folgt, dass $B = A$ sein wird, was ja auch beim Rotationskörper selbstverständlich ist.

Es ist also jetzt der Ausdruck der lebendigen Kraft:

$$2T = m\,(u^2 + v^2 + w^2) + A\,(p^2 + q^2)$$

als bekannt zu betrachten, und daher die äussere Bewegung in bekannter Weise zu bestimmen, wenn die wirkenden Kräfte und der Anfangszustand gegeben sind.

Zu erörtern bleibt noch die innere Bewegung, oder die Bestimmung der Strömungskurven, doch lässt sich hier wenig durchführen.

Im Falle eines Rotationskörpers um die z-Achse nehmen die Gleichungen 10 des § 1 die Form an:

$$\frac{dx}{dt} = p\,\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + q\,\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - zq + yr$$

$$\frac{dy}{dt} = p\,\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + q\,\frac{\partial \psi_2}{\partial y} - xr + zp$$

$$\frac{dz}{dt} = p\,\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + q\,\frac{\partial \psi_2}{\partial z} - yp + xq$$

Beim Cylinder ist zu setzen:

$$x = \varrho\cos\varphi \qquad y = \varrho\sin\varphi \qquad z = z$$

und

$$\psi_1 = \psi \cdot \sin\varphi \qquad \psi_2 = -\psi\cos\varphi$$

also:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} - \frac{\psi}{\varrho}\right)\cos\varphi\,\sin\varphi \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\cos^2\varphi - \frac{\psi}{\varrho}\sin^2\varphi$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\sin^2\varphi + \frac{\psi}{\varrho}\cos^2\varphi \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\psi}{\varrho}\right)\sin\varphi\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \sin\varphi \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}\cos\varphi$$

und

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\varphi + \frac{dy}{dt}\sin\varphi$$

$$\varrho \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{dx}{dt} \sin \varphi + \frac{dy}{dt} \cos \varphi$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

Demnach werden die Differentialgleichungen der Stromkurven im Falle des Cylinders:

$$\frac{d\varrho}{dt} = (p \sin \varphi - q \cos \varphi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + z \right)$$

$$\varrho \frac{d\varphi}{dt} = (p \cos \varphi + q \sin \varphi) \left(\frac{\psi}{\varrho} + z \right) - \varrho r$$

$$\frac{dz}{dt} = (p \sin \varphi - q \cos \varphi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \varrho \right)$$

Wenn die Drehungsachse im Körper fest ist, kann man noch $q = 0$ setzen, indem man die x-Achse in den Schnitt legt, der durch die z-Achse und eine Parallele durch den Mittelpunkt des Cylinders zur Drehungsachse geht.

Ist die Drehungsachse senkrecht zur z-Achse, so wird noch $r = 0$, also

$$\frac{d\varrho}{dt} = p \sin \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + z \right)$$

$$\frac{dz}{dt} = p \sin \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \varrho \right)$$

$$\varrho \frac{d\varphi}{dt} = p \cos \varphi \left(\frac{\psi}{\varrho} + z \right)$$

Die beiden ersten Gleichungen geben, durcheinander dividiert:

$$\left(z + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \right) dz + \left(\varrho - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \partial \varrho = 0$$

Diese Differentialgleichung sieht sehr ähnlich aus, wie die beim Parallelepiped behandelte, die linke Seite ist aber kein vollständiges Differential, auch wird nicht $\frac{dx}{dt} = 0$, wie man vielleicht vermuten könnte.

Die Flüssigkeitsteilchen beschreiben in ihrer relativen Bewegung nicht ebene Kurven, sondern Raumkurven, mit Ausnahme der Teilchen der y z-Ebene, denn für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $\varrho \frac{d}{dt} = 0$, d. h., die Teilchen bleiben in derselben Ebene.

Der einzige durchführbare Fall scheint der zu sein, wenn die Drehungsachse der z-Achse parallel ist. Dann ist:

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = - r$$

d. h. die ganze Flüssigkeit bleibt — abgesehen von paralleler Verschiebung der Hülle — in absoluter Ruhe.