Die

analytische Geometrie

in der

Prima des Gymnasiums.

(Zweiter Teil.)

Von

Dr. G. Bockwoldt,

Gymnasial-Oberlehrer.

Beilage zum Programm des Königlichen Gymnasiums zu Neustadt in Westpreussen.

Ostern 1895.

Druck von H. Brandenburg in Neustadt Westpr.
1895.

Progr. No. 38.

III. Der Kreis.

§ 17. Definition und Gleichung des Kreises.

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte (einer Ebene), welche von einem gegebenen Punkt (in ihr), dem Mittelpunkt, gleiche Entfernung haben.

1. Die Gleichung eines Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt.

Ist der Radius des Kreises $= r$, so ergiebt sich (Fig. XXI) für die Coordinaten des Punktes P des Umfanges sofort die Gleichung:

$$1, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Da diese Gleichung auch für jeden beliebigen anderen Punkt des Umfanges gilt, (für Q ist z. B. $x^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2 = r^2$), so ist sie die Gleichung des Kreises. Mittelpunktsgleichung des Kreises.

Aus der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ergeben sich leicht die beiden neuen:

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}, \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

d. h., es giebt nur so lange zusammengehörige reelle Werte von x und y, als diese Grössen zwischen $+ r$ und $- r$ liegen. Die grössten (absoluten) Werte, welche x und y annehmen können, sind bezw. $\pm r$, d. h., der Kreis liegt ganz innerhalb des Quadrates, das durch die Parallelen im Abstande $\pm r$ zu den Achsen begrenzt wird. Da ferner zu jedem Werte von x zwei gleiche, aber entgegengesetzte von y gehören und umgekehrt, so ist der Kreis in Bezug auf jeden der beiden Durchmesser symmetrisch, da wir jedes zu einander senkrechte Durchmesserpaar als Achsenkreuz wählen können. Da endlich mit stetig sich änderndem Werte der einen Unbekannten auch die andere Unbekannte sich stetig ändert, so ist der Kreis eine geschlossene Curve.

Aus $x^2 + y^2 = r^2$ lassen sich noch leicht die Proportionen $r + x : y = y : r - x$ und $r + y : x = x : r - y$ herleiten, die einen bekannten Satz der Planimetrie darstellen.

2. Die Gleichung eines Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt die Coordinaten a und b hat.

Ist (Fig. XXII) $OS = a$, $MS = b$, so ergiebt sich für die Coordinaten des Punktes P des Kreises offenbar die Gleichung:

$$2, \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Da auch für den beliebigen Punkt Q des Kreises $(a - x)^2 + (b - y)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ist, so ist diese Gleichung in diesem Falle die Gleichung des Kreises. Allgemeine Gleichung des Kreises.

Eine entsprechende Untersuchung dieser Kreisgleichung wie unter 1, ergiebt ein entsprechendes Ergebnis.

Die Gleichungen 1, und 2, werden allemal dann und nur dann erfüllt, wenn der Punkt (x, y) auf dem Kreise liegt. Für jeden Punkt innerhalb des Kreises ist $x^2 + y^2$, bezw. $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$, für jeden Punkt ausserhalb $> r^2$.

Schreiben wir die Gleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ in der Form $x^2 - 2ax + y^2 - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, so ergiebt sich, da $\sqrt{a^2 + b^2}$ die Entfernung e des Mittelpunktes des Kreises vom Coordinatenanfang bedeutet, dass letzterer ausserhalb des Kreises, auf dem Kreise, innerhalb des Kreises liegt, jenachdem $a^2 + b^2 \lesseqgtr r^2$ ist.

Aus der allgemeinen Kreisgleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ergiebt sich nun noch eine Reihe besonderer Formen je nach der Lage des Kreismittelpunktes. Liegt dieser auf der X-Achse, so erhält man wegen $b = 0$ die Gleichung: $(x - a)^2 + y^2 = r^2$; berührt der Kreis ausserdem die Y-Achse, ist also $a = r$, so folgt $x^2 + y^2 - 2rx = 0$. Entsprechende Bedeutungen von $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ und $x^2 + y^2 - 2ry = 0$! Berührt der Kreis beide Achsen, so ist $x^2 + y^2 - 2rx - 2ry + r^2 = 0$; ist $a^2 + b^2 = r^2$, d. h. geht der Kreis mit dem Mittelpunkt (a, b) durch den Coordinatenanfang, so ist $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$; ist endlich $a = b = 0$, so ergiebt sich wieder die Mittelpunktsgleichung.

Setzen wir zur Abkürzung $-2a = c$, $-2b = d$, $a^2 + b^2 - r^2 = e$, so nimmt die allgemeine Gleichung die Form an $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$; auf diese Form kann aber auch jede Gleichung mit gleichen (von Null verschiedenen) Coeffizienten von x^2 und y^2 und ohne Glied mit xy gebracht werden, und wir gewinnen hieraus den

Lehrsatz: Die allgemeine Gleichung eines Kreises ist eine in Bezug auf x und y quadratische Gleichung, in welcher x^2 und y^2 denselben Coeffizienten haben und das Glied mit xy fehlt, sie lautet somit:

$$mx^2 + my^2 + nx + py + q = 0.$$

Umkehrung: Jede Gleichung von dieser Form kann als die Gleichung eines Kreises angesehen werden; denn dividieren wir die vorige Gleichung durch m, so erhalten wir:

$$x^2 + y^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}x + \frac{q}{m} = 0 \text{ oder auch}$$

$$\left(x + \frac{n}{2m}\right)^2 + \left(y + \frac{p}{2m}\right)^2 = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p^2}{4m^2} - \frac{q}{m}.$$

Setzen wir endlich $\frac{n}{2m} = -a$, $\frac{p}{2m} = -b$, $\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p^2}{4m^2} - \frac{q}{m} = r^2$, so erhalten wir wieder:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

also die Gleichung eines Kreises. Es ist demnach $mx^2 + my^2 + nx + py + q = 0$ die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $\left(-\frac{n}{2m}, -\frac{p}{2m}\right)$ und dem Radius $\frac{\sqrt{n^2 + p^2 - 4mq}}{2m}$. Der Kreis ist reell, reduziert sich auf einen Punkt, ist imaginär, je nachdem $n^2 + p^2 \gtreqless 4\,mq$ ist.

Aufgaben: 1; Wie heisst die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt (3, 4) und dem Radius 5? Wo liegt der Coordinatenanfang in Bezug auf diesen Kreis?

2; Ein Kreis geht durch den Coordinatenanfang und hat den Mittelpunkt (8, — 15), wie heisst seine Gleichung?

3; Mittelpunktscoordinaten und Radien der Kreise $9x + 9y^2 - 18x - 54\,y + 9 = 0$ und $7x^2 + 7y^2 + 49x + 84y - 5\frac{1}{4} = 0$ zu bestimmen.

4; Die Schnittpunkte des Kreises $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 40$ mit den Achsen zu bestimmen. Welche Beziehung besteht zwischen dem Produkte der X-Abschnitte und dem der Y-Abschnitte?

§ 18. Der Kreis und die Gerade.

Die Gleichung eines Kreises sei $x^2 + y^2 = r^2$, die einer Geraden $y = mx + n$; es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen der Kreis von der Geraden geschnitten wird. Sollen beide Örter gemeinsame Punkte haben, so müssen deren Coordinaten beiden Gleichungen genügen, wir finden sie also, wenn wir das System der beiden Gleichungen nach den Unbekannten auflösen. Setzen wir die aus beiden Gleichungen für y^2 sich ergebenden Werte einander gleich, so erhalten wir $r^2 - x^2 = (mx + n)^2$, woraus sich ergiebt:

$$x = \frac{-mn \pm \sqrt{r^2(1 + m^2) - n^2}}{1 + m^2}.$$

Setzen wir diesen für x gefundenen Wert in die zwischen x und y bestehende Gleichung ersten Grades ein, so folgt:

$$y = \frac{n \pm \sqrt{r^2(1 + m^2) - n^2}}{1 + m^2}.$$

Die beiden Wertepaare (x_1, y_1), (x_2, y_2) sind nur so lange reell, als $r^2(1 + m^2) - n^2 \geqq 0$ ist, d. h. nur in diesem Falle haben Kreis und Gerade wirklich gemeinsame Punkte. Jenachdem also $r^2(1 + m^2) \gtreqless n^2$ ist, haben Kreis und Gerade zwei, einen, keinen Punkt gemeinsam.

Setzen wir nun noch für m seinen Wert $tg\alpha$, so geht die vorige Bedingung über in $r^2(1 + tg^2\alpha) \gtreqless n^2$, woraus $r^2 \frac{1}{cos^2\alpha} \gtreqless n^2$, $r \gtreqless n cos\alpha$ folgt.

Aus Fig. XXIII ergiebt sich nun, dass das vom Coordinatenanfang auf die Gerade $y = mx + n$ gefällte Lot $OP = n cos\alpha$ ist. Es haben also Kreis und Gerade zwei, einen, keinen Punkt gemeinsam, jenachdem der Radius grösser, ebenso gross oder kleiner ist als das vom Coordinatenanfang, d. h. in unserm Falle vom Mittelpunkt, auf die Gerade gefällte Lot.

Hat die Gerade zwei reelle Schnittpunkte mit dem Kreise gemeinsam, so sind die Coordinaten x, y des Mittelpunktes der zugehörigen Sehne bestimmt durch:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{mn}{1+m^2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{n}{1+m^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt $y = -\frac{1}{m}x$; diese Gleichung ist von n ganz unabhängig, gilt also für die Mittelpunkte sämtlicher paralleler Sehnen, deren Richtungsbestimmende $= m$ ist, d. h. diese liegen sämtlich auf der durch $y = -\frac{1}{m}x$ bestimmten Geraden. Nun ist aber das Produkt der beiden Richtungsbestimmenden m und $-\frac{1}{m} = -1$, es steht also diese Gerade $y = -\frac{1}{m}x$ auf den Sehnen senkrecht. Da sie aber auch durch den Coordinatenanfang hindurchgeht, so gewinnen wir den Satz: Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf dem vom Kreismittelpunkte auf sie gefällten Lote.

Aufgaben: Wie heissen die Schnittpunkte: 1; des Kreises $x^2 + y^2 = 10$ und der Geraden $y = -x + 12{,}4$? (Antwort: $x_1 = 9{,}6$ $y_1 = 2{,}8$, $x_2 = 2{,}8$, $y_2 = 9{,}6$).

2; des Kreises $x^2 + y^2 = 13^2$ und der Geraden $y = 3x - 3$? ($x_1 = 5$, $y_1 = 12$, $x_2 = -3{,}2$, $y_2 = -12{,}6$).

3; des Kreises $x^2 + y^2 = 5^2$ und der Geraden $y = \sqrt{3}x + 10$? ($x_1 = x_2 = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$, $y_1 = y_2 = \frac{5}{2}$).

4; des Kreises $x^2 + y^2 = 50$, und der Geraden $y = 7x - 50$? ($x_1 = x_2 = 7$, $y_1 = y_2 = -1$).

§ 19. Die Tangente in einem Punkte des Kreises.

1. Im vorigen § ergab sich, dass die Gerade $y = mx + n$ Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ist für $n\cos a = r$ oder $n = \frac{r}{\cos a}$; soll sie den Kreis in einem bestimmten Punkte (x_1, y_1) berühren, so muss also auch $y_1 = mx_1 + \frac{r}{\cos a}$ sein. Nun ist (Fig. XXIV) $\cos a = \frac{y_1}{r}$, also $\frac{r}{\cos a} = \frac{r^2}{y_1}$, demnach $y_1 = mx_1 + \frac{r^2}{y_1}$ oder $y_1{}^2 = mx_1y_1 + r^2$; da nun $x_1{}^2 + y_1{}^2 = r^2$ ist, so ist $mx_1y_1 = -x_1{}^2$ und somit endlich $m = -\frac{x_1}{y_1}$. Setzen wir diese für m und n gefundenen Werte in die Gleichung $y = mx + n$ ein, so erhalten wir als Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) des Kreises: $y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r^2}{y_1}$ oder

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

Wir erhalten aus der Gleichung des Kreises $xx + yy = r^2$ die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1), wenn wir in der Kreisgleichung je eine der veränderlichen (laufenden) Coordinaten x, y durch die des Berührungspunktes ersetzen.

2. Die Gleichung des Radius, der durch den Punkt (x_1, y_1) des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ geht, hat die Form $\frac{y - y_1}{y_1} = \frac{x - x_1}{x_1}$ (wegen $x_2 = y_2 = 0$);

daraus ergiebt sich leicht $\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}$ oder $y = \frac{y_1}{x_1}x$. Demnach lautet die Gleichung der Tangente in diesem Punkt, da sie auf dem Radius (der Normalen) senkrecht steht: $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ oder $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$ oder $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

3. Die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ lässt sich aber auch auf folgende Weise bestimmen. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2) die Coordinaten zweier Punkte des Kreises, so lautet die Gleichung der durch sie bestimmten Sekante $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$; lassen wir nun die beiden Punkte (etwa durch Drehung der Sekante um P_1 (Fig. XXIV)) einander bis zum Zusammenfallen nähern, so geht die Sekante über in die Tangente, es lautet also deren Gleichung, da $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ geworden ist: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{0}{0}$. Die rechte Seite $\frac{0}{0}$ dieser Gleichung ist scheinbar unbestimmt, es muss daher versucht werden, ihren wahren Wert zu finden. Das gelingt auf folgende Weise. Da (x_1, y_1), (x_2, y_2) Punkte des Kreises sind, so gelten die beiden Gleichungen $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = r^2$; hieraus ergeben sich der Reihe nach die Beziehungen $x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2$, $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = -(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$, $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$. Die letzte Gleichung gilt für jede Lage von (x_1, y_1), (x_2, y_2), also auch dann noch, wenn diese beiden Punkte zusammenfallen, also $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ist; sie geht dann über in $\frac{0}{0} = -\frac{2x_1}{2y_1} = -\frac{x_1}{y_1}$ und dieser letzte Wert ist demnach der wahre Wert des scheinbar unbestimmten Bruches $\frac{0}{0}$. Setzen wir ihn in die oben gefundene Gleichung der Tangente ein, so nimmt sie die Form an: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1}{y_1}$, woraus wieder $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 = r^2$ folgt.

Die Richtungsbestimmende der Tangente im Punkte (x_1, y_1) ist also $-\frac{x_1}{y_1}$, die Gleichung der in diesem Punkte zur Tangente Senkrechten (der Normalen) lautet demnach: $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$, woraus sich leicht $y = \frac{y_1}{x_1}x$ ergiebt. Die Normale geht also durch den Coordinatenanfang. (Vgl. No. 2.).

§ 20.

Die Coordinaten des Berührungspunktes der durch den Punkt (ξ, η) an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gelegten Tangente zu bestimmen.

Bezeichnen wir den Berührungspunkt mit (x_1, y_1) so ist die allgemeine Form der Gleichung der durch ihn gehenden Tangente $xx_1 + yy_1 = r^2$, es muss also, da (ξ, η) ein Punkt dieser Tangente ist, auch $\xi x_1 + \eta y_1 = r^2$ sein, während gleichzeitig $x_1^2 + y_1^2 = r$ ist. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich die Werte von x_1 und

y_1 berechnen. Die Durchführung der Rechnung ergiebt:

$$x_1 = \frac{r^2\xi \pm r\eta\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - r^2}}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y_1 = \frac{r^2\eta \mp r\xi\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - r^2}}{\xi^2 + \eta^2},$$

wobei die oberen, bezw. unteren Vorzeichen einander entsprechen.

Da sich für x_1 und y_1 je 2 Werte ergeben, so ersehen wir hieraus wieder die bekannte Thatsache, dass sich von jedem Punkt an einen Kreis 2 Tangenten legen lassen. Ferner lehren uns die Formeln, dass die beiden Tangenten reell sind, zusammenfallen, imaginär sind, jenachdem $\xi^2 + \eta^2 \gtreqless r^2$ ist, d. h. jenachdem (ξ, η) ausserhalb des Kreises auf ihm, in ihm liegt.

§ 21.

Aufgaben: 1; Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche bezw. in den Punkten $x_1 = 4$, $y_1 = 15$, $x_1 = 9$, $y_1 > 0$, $x_1 = -7$, $y_1 < 0$ die Kreise $x^2 + y^2 = 241$, $x^2 + y^2 = 130$, $x^2 + y^2 = 625$ berühren?

2; Wie heissen die Berührungspunkte der durch die Punkte (7,6), (9,8), (9,7) bezw. an die Kreise $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ gelegten Tangenten?

3; (Fig. XXIV). Die Längen der Tangente AP, der Subtangente AC, der Normalen P_1O, der Subnormalen CO und des zwischen den Achsen gelegenen Tangentenstückes AB zu bestimmen.

Aus der Fig. folgt unmittelbar $P_1O = r$, $CO = x_1$; bezeichnen wir ferner die Abscisse des Punktes A mit x_0, so ergiebt sich aus der Gleichung der Tangente: $x_0 x_1 = r^2$, also $x_0 = \frac{r^2}{x_1}$; es ist demnach die Subtangente $AC = \frac{r^2}{x_1} - x_1 = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1}$; ferner ist $AP_1^2 = x_0\frac{y_1^2}{x_1} = \frac{r^2 y_1^2}{x_1^2}$, also $AP_1 = \frac{y_1}{x_1}r$; analog ist $BP_1 = \frac{x_1}{y_1}r$, demnach $AB = r\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{r^3}{x_1 y_1}$.

Zahlenbeispiel hierzu: Die Gleichung eines Kreises sei $x^2 + y^2 = 100^2$, der Berührungspunkt P_1 einer Tangente habe die Coordinaten (96, 28), dann ist: $P_1O = 100$ $CO = 96$, $AC = 8\frac{1}{6}$, $AP_1 = 29\frac{1}{6}$, $BP_1 = 342\frac{6}{7}$, $AB = 372\frac{1}{42}$.

IV. Die Parabel.

§ 22. Definition und Gleichung der Parabel.

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem festen Punkt F und einer festen Geraden L gleiche Entfernung haben oder der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch den gegebenen Punkt F gehen und die gegebene Gerade L berühren.

Bewegt sich also ein Punkt so, dass er in jedem Augenblick seiner Bewegung von einem festen Punkt F und einer festen Geraden L gleiche Entfernung hat, so beschreibt er eine Parabel.

Der feste Punkt F heisst der Brennpunkt (focus), die feste Gerade L die Leitlinie oder Direktrix, die vom Brennpunkt nach einem Parabelpunkt gezogene Gerade Brennstrahl oder Radiusvector der Parabel. Ist (Fig. XXV) F der gegebene Punkt, L die gegebene Gerade, FA das von F auf L gefällte Lot, so ist offenbar der Mittelpunkt O von FA ein Punkt der Parabel.

Um für die Parabel eine Gleichung abzuleiten, wählen wir OF als X-Achse, die Senkrechte darauf in O als Y-Achse und bezeichnen ferner den Abstand AF durch p.

Ist nun P ein beliebiger Punkt der Parabel, so ist, wenn $PB \perp L$, $FP = BP$, ferner $FP^2 = FR^2 + RP^2 = (OR - OF)^2 + RP^2 = (x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2$, $BP^2 = (BC + CP)^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2$.

Wir erhalten somit für den Punkt P der Parabel die Coordinatenbeziehung: $(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2$, woraus sich leicht $y^2 = 2px$ ergiebt. Unter Zugrundelegung unseres Coordinatensystemes gilt also diese Gleichung für jeden Parabelpunkt, es ist somit:

$$y^2 = 2px$$

die Gleichung der Parabel und zwar die sogenannte Scheitelgleichung.

Dass der Coordinatenanfang ein Punkt der Parabel ist, haben wir schon oben erwähnt; ferner muss der Gleichung der Parabel zufolge x stets positiv sein (da sich nur dann reelle Werte für y ergeben), d. h., die Parabel liegt ganz auf der rechten Seite der Y-Achse und tritt nur im Punkt O an sie heran. Weiter ergiebt sich aus $y = \pm \sqrt{2px}$, dass zu jedem Werte von x zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von y gehören, die X-Achse ist also eine Symmetrieachse der Parabel. Sie wird kurz die Achse, ihr Anfangspunkt O der Scheitel der Parabel genannt, während die beiden Teile, in welche die Parabel durch sie geteilt wird, Äste der Parabel heissen. Mit wachsendem x wächst auch y, aber nur wie die Quadratwurzel aus x ($\sqrt{2p}$ konstant); wächst x über alle Grenzen, so wird auch y unendlich gross, die Parabel erstreckt sich also bis ins Unendliche und ist eine offene Curve.

Die Gerade, welche einen Punkt (x_1, y_1) der Parabel mit dem Coordinatenanfang verbindet, hat die Gleichung: $y = \frac{y_1}{x_1} x$, oder $y = x tg a$, wenn a den Winkel zwischen der Geraden und der Achse der Parabel bedeutet. Nun ist aber wegen $y_1{}^2 = 2px$, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{2p}{y_1}$, es nimmt also $tg a = \frac{2p}{y_1}$, also auch a selbst mit wachsendem Werte von y_1 stetig ab, um mit unendlich gross werdendem y_1 unendlich klein zu werden.

Daraus geht hervor, dass der Parabelast immermehr der Achse parallel wird.

Für $x = \frac{p}{2}$ erhalten wir aus der Parabelgleichung die beiden zum Brennpunkt gehörenden Ordinaten $y = \pm p$. Man bezeichnet die doppelte Brennpunktsordinate $2p$ als den Parameter der Parabel.

Dieser, welcher gleichzeitig die doppelte Entfernung Brennpunkt-Leitlinie angiebt, bestimmt vollständig die Gestalt der Parabel.

Wählen wir als Anfangspunkt des Coordinatensystems nicht den Scheitel, sondern den Brennpunkt der Parabel, so erhalten wir aus Fig. XXV leicht: $FP^2 = FR^2 + RP^2 = x^2 + y^2$, $BP^2 = (x + p)^2$, woraus sich

$$y^2 = 2px + p^2$$

als Gleichung der Parabel ergiebt. Brennpunktsgleichung.

§ 23. Konstruktionen der Parabel.

Aus der Gleichung der Parabel, bezw. aus der Lage des Brennpunktes und der Leitlinie ergiebt sich eine Anzahl von Konstruktionen, von denen hier einige Platz finden mögen.

1; Aus $y^2 = 2px$, folgt $2x : y = y : p$, es ist also y mittlere Proportionale zwischen $2x$ und p. Darauf gründet sich folgende Konstruktion (Fig. XXVI): $OS = OR = x$, $RT = p$, Kreis über ST, $PRP' \perp OR$, dann sind P und P' Punkte der Parabel. Da S die Abscisse $-x$, T die Abscisse $x + p$ hat, so ist die Abscisse des Kreismittelpunktes $= \frac{(x+p)-x}{2} = \frac{p}{2}$, d. h., der Mittelpunkt fällt mit dem Brennpunkt zusammen, was die Konstruktion wesentlich vereinfacht.

2; Da (Fig. XXV) $FP = AR = x + \frac{1}{2} p$, so erhält man 2 Punkte der Parabel, wenn man in einem Punkt R auf der X-Achse das Lot errichtet und mit dem Abstande RA des Fusspunktes von der Leitlinie um F den Kreis beschreibt, dessen Schnittpunkte mit dem Lote eben 2 Parabelpunkte sind.

3; Da (Fig. XXV) Dreieck FPB gleichschenklig ist, so ergeben sich als Örter für einen Punkt der Parabel 1, das Lot in B auf L, 2, die Mittelsenkrechte auf BF.

4; Ist (Fig. XXVII) L die Leitlinie, F der Brennpunkt, O der Scheitel der Parabel und macht man $OG = 2p$, errichtet darauf in G die Senkrechte, nimmt auf ihr einen Punkt H beliebig an, zieht OH und errichtet auf GH in H, auf HO in O Lote, so ist der Schnittpunkt P derselben ein Punkt der Parabel.

Beweis: Es ist einerseits $OP^2 = x^2 + y^2$, andrerseits $= PH^2 - OH^2 = (x + 2p)^2 - y^2 - 4p^2 = x^2 + 4px - y^2$; daraus folgt $y^2 = 2px$, d. h. der Punkt P liegt so, dass er der Gleichung der Parabel genügt, ist also ein Punkt der letzteren.

5; Alle diese Konstruktionen lassen die Parabel punktweise entstehen; als zusammenhängenden Linienzug erhält man sie unter Benutzung des sogenannten Parabolographen, dessen Einrichtung leicht verständlich ist und dessen Beschreibung hier daher übergangen werden möge.

§ 24. Aufgaben zu § 22 und § 23.

1; Für die Punkte einer Parabel ist $y^2 = 2px$, für welche Punkte ist $y^2 \gtrless 2px$?

2; Wie weit sind Scheitel und Leitlinie, bezw. Scheitel und Brennpunkt der Parabel $y^2 = 9x$ von einander entfernt?

3; Die Coordinaten des Scheitels einer Parabel vom Parameter $2p$ sind a und b, wie lautet die Gleichung der Parabel? $(y - a)^2 = 2p\,(x - b)$. Beispiel: $a = 7$, $b = 4$, $p = 5$.

4; Die Parabeln $y^2 = \frac{1}{9}x$, $y^2 = \frac{1}{4}x$, $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $y^2 = 9x$ zu zeichnen!

5; Von einer Parabel kennt man die Achse, den Scheitel und einen Punkt (x_1, y_1). Wie heisst ihre Gleichung? $y^2 = \frac{y_1^2}{x_1}x$.
Beispiel: $x_1 = 6\frac{1}{4}$, $y_1 = 5$.

6; Wie lautet die Gleichung des Brennstrahls der Parabel $y^2 = 2px$, der durch den Punkt (x_1, y_1) hindurchgeht? $y = \frac{y_1}{x_1 - \frac{1}{2}p}(x - \frac{1}{2}p)$.
Beispiel: $p = 2$, $x_1 = 9$, $y_1 = 6$.

§ 25. Parabel und Gerade.

Gegeben ist eine Parabel $y^2 = 2px$ und eine Gerade $y = mx + n$, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen Parabel und Gerade Punkte gemeinsam haben.

Da die Coordinaten der Schnittpunkte beiden Gleichungen genügen müssen, so sind sie die gemeinsamen Wurzeln derselben. Durch Auflösung der Gleichungen erhalten wir:

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2pnm}}{m}, \quad x = \frac{p - nm \pm \sqrt{p^2 - 2pnm}}{m^2},$$

wobei die oberen, bezw. unteren Wurzelzeichen einander entsprechen.

Aus dem Wurzelausdruck ergiebt sich also, dass die Gerade mit der Parabel zwei, einen, keinen Punkt gemeinsam hat, jenachdem $\frac{p}{2} \gtreqless mn$ ist. Ist (Fig. XXVIII) G die Gerade, welche die Y-Achse in N trifft und errichten wir auf ihr in N das Lot NK bis zur X-Achse, so ist $OK = tg\alpha ON = mn$, andrerseits ist $OF = \frac{p}{2}$, und somit ergiebt sich der Satz:

Eine Gerade schneidet eine Parabel in zwei Punkten, berührt sie, trifft sie nicht, jenachdem das auf ihr im Schnittpunkt mit der Y-Achse errichtete Lot die X-Achse zwischen Scheitel und Brennpunkt, im Brennpunkt oder über den Brennpunkt hinaus trifft oder auch jenachdem das vom Brennpunkt einer Parabel auf eine Gerade gefällte Lot diese auf der Parabelseite der Y-Achse, auf dieser oder auf der der Parabel abgewendeten Seite derselben trifft, schneidet die Gerade die Parabel in 2 Punkten, berührt sie oder trifft sie nicht.

Ist in der Gleichung der Geraden $m = 0$, sie also der X-Achse parallel, so erhalten wir scheinbar nur einen einzigen Schnittpunkt mit den Coordinaten $y_1 = n$, $x_1 = \frac{n^2}{2p}$. Bringen wir aber die Gleichung $y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2pnm}}{m}$ auf die Form $y = \frac{2np}{p \mp \sqrt{p^2 - 2pnm}}$, so erkennen wir für $m = 0$ einen im Endlichen und einen im Unendlichen liegenden Schnittpunkt zwischen Parabel und Geraden.

Hat die Gerade 2 reelle Schnittpunkte mit der Parabel gemeinsam mit den Coordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), so sind die Coordinaten des Mittelpunktes der Sehne bezw. $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p - mn}{m^2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{m}$. Der Wert von y ist unabhängig von n, d. h. offenbar, alle parallelen Sehnen einer Parabel haben dieselbe Mittelpunktsordinate und wir erhalten somit den Satz:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Parabel liegen auf einer zur X-Achse parallelen Geraden.

Jede solche der X-Achse parallele Gerade heisst ein Durchmesser der Parabel.

Jede zur Y-Achse parallele Gerade $x = a$ schneidet die Parabel in den beiden symmetrisch zur X-Achse gelegenen Punkten $x = a$, $y = \pm \sqrt{2pa}$; ist $x = 0$, so fallen beide Punkte mit dem Anfangspunkt zusammen, d. h., die Y-Achse ist Tangente der Parabel im Scheitel. Scheiteltangente.

§ 26. Tangente und Normale der Parabel.

1; Aus der im vorigen § dafür, dass die Gerade $y = mx + n$ Tangente der Parabel $y^2 = 2px$ sei, hergeleiteten Bedingung $mn = \frac{p}{2}$ ergiebt sich $n = \frac{p}{2m}$, die Gerade $y = mx + \frac{p}{2m}$ ist also eine Tangente der Parabel. Soll sie nun die Parabel in dem bestimmten Punkte (x_1, y_1) berühren, so muss auch $y_1 = mx_1 + \frac{p}{2m}$ sein; ferner ist $y_1^2 = 2px_1$, und aus diesen beiden Gleichungen lässt sich der für die bestimmte Tangente geltende Wert der bisher noch unbestimmten Grösse m finden. Es ist $2my_1 = 2m^2x_1 + p$, $2mpy_1 = 2m^2px_1 + p^2 = m^2y_1^2 + p^2$, also $m^2y_1^2 - 2mpy_1 + p^2 = 0$, woraus sich $m = \frac{p}{y_1}$ ergiebt. Setzen wir diesen für m gefundenen Wert in die vorher für die Tangente aufgestellte Gleichung ein, so erhalten wir:

$$y = \frac{p}{y_1} x + \frac{p}{2\frac{p}{y_1}} = \frac{p}{y_1} x + \frac{y_1}{2} \text{ oder } yy_1 = px + \frac{y_1^2}{2} = px + px_1$$

Es ist demnach:

$$yy_1 = p\,(x + x_1)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) der Parabel $yy = p\,(x + x)$.

Wir erhalten somit aus der Gleichung der Parabel $yy = p\,(x + x)$ die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1), wenn wir in der Parabelgleichung je eine der laufenden Coordinaten x, y durch die des Berührungspunktes ersetzen. (Vgl. § 19).

Aus der Gleichung der Tangente: $y = \frac{p}{y_1} x + \frac{y_1}{2}$ ergiebt sich unmittelbar als Gleichung der Normalen: $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$ oder $p\,(y - y_1) = y_1\,(x_1 - x)$.

2; Die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) der Parabel $y^2 = 2px$ lässt sich aber auch ähnlich wie beim Kreise in folgender Weise ableiten. Die Gleichung der durch 2 Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) der Parabel gehenden Sekante lautet: $\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$; lassen wir nun die beiden Punkte einander unendlich nahe rücken, die Sekante zur Tangente werden, so folgt als Gleichung derselben $\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{0}{0}$. Den Wert $\frac{0}{0}$ bestimmen wir wieder analog, wie beim Kreise. Da die beiden Punkte der Parabel angehören, so gelten die beiden Gleichungen $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$, es ist also $y_1^2 - y_2^2 = 2p\,(x_1 - x_2)$ oder $\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{y_1 + y_2}{2p}$, woraus beim Zusammenfallen der Punkte $\frac{0}{0} = \frac{y_1}{p}$ folgt; die Gleichung der Tangente lautet also $\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{y_1}{p}$ oder $yy_1 - y_1^2 = p\,(x - x_1)$ oder endlich (wegen $y_1^2 = 2px_1$): $yy_1 = p\,(x + x_1)$.

§ 27.

Die Coordinaten (x_1, y_1) des Berührungspunktes der durch den Punkt (ξ, η) an die Parabel $y^2 = 2px$ gelegten Tangente zu bestimmen.

Wie beim Kreise (§ 20) erhalten wir hier die beiden Gleichungen $\eta y_1 = p\,(\xi + x_1)$ und $y_1^2 = 2px_1$, aus welchen sich für die Unbekannten y_1 und x_1 die Werte

$$y_1 = \eta \pm \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}, \quad x_1 = \frac{\eta^2 - p\xi \pm \eta\sqrt{\eta^2 - 2p\xi}}{p}$$

ergeben, wobei einander die oberen, bezw. unteren Wurzelvorzeichen entsprechen.

Daraus geht hervor, dass sich von jedem Punkt an die Parabel zwei, eine, keine Tangente legen lassen, jenachdem $\eta^2 \gtreqless 2p\xi$ ist, d. h., jenachdem der Punkt ausserhalb, auf, innerhalb der Parabel liegt.

§ 28. Aufgaben zu § 26 und § 27.

1; Welche Coordinaten haben die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 16x$ und der Geraden $y = 3x + 1$, $y = x + 4$, $y = 2x + 5$? Antwort: bezw. $x_1 = 1$, $y_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{9}$, $y_2 = 1\frac{1}{3}$, $x_1 = x_2 = 4$, $y_1 = y_2 = 8$, $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-6}$, $y = 4 \pm 2\sqrt{-6}$.

2; Durch den Punkt (x_1, y_1) wird eine Sehne der Parabel $y^2 = 2px$ halbiert, wie heisst deren Gleichung? Antwort: In der allgemeinen Gleichung einer durch den Punkt (x_1, y_1) hindurchgehenden Geraden $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ ist in diesem Falle $m = \frac{p}{y_1}$ (w[illegible] $y_1 = \frac{p}{m}$) und demnach lautet die Gleichung der Sehne $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$. Beispiel: $y^2 = \frac{1}{4}x$, $x_1 = 16$, $y_1 = 1$, giebt: $y - 1 = \frac{1}{8}(x - 16)$, $y = \frac{1}{8}x - 1$.

3; Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche an die Parabeln: $y^2 = 8x$, $y^2 = \frac{1}{8}x$, $y^2 = 12x$ bezw. in den Punkten $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $x_1 = 8$, $y_1 = -1$, $x_1 = 3$, $y_1 < 0$ gelegt werden können?

Wie lauten die Gleichungen der zugehörigen Normalen?

4; Die Längen der Subtangente TR, der Subnormalen NR, der Tangente TP und der Normalen NP zu berechnen.

Für den Punkt T (Fig. XXIX) ist in der Gleichung der Tangente $y = 0$, also $p(x + x_1) = 0$, demnach $x = -x_1$, die Länge der Subtangente ist also $2x_1$ und es liegt der Schnittpunkt der Tangente einer Parabel mit der Achse ebenso weit links von dem Coordinatenanfangspunkt, als der Fusspunkt der Ordinate rechts davon liegt.

Für N ist in der Gleichung der Normalen $y = 0$, also $-py_1 = y_1(x_1 - x)$ demnach $x = x_1 + p$; da nun $OR = x_1$ ist, so ist $RN = p$. Die Subnormale ist konstant und zwar gleich dem Halbparameter. Ferner ist die Tangente $TP = \sqrt{4x_1^2 + y_1^2}$, die Normale $NP = \sqrt{y_1^2 + p^2}$.

§ 29.

Da (Fig. XXIX) $TF = x_1 + \frac{1}{2}p = AR = QP = FP = QT$ ($AT = FR$) ist, so ist $TFPQ$ ein Rhombus, demnach halbiert TP den Winkel QPF, d. h., die Tangente einer Parabel halbiert den Winkel zwischen dem zum Berührungspunkt gehörigen (verlängerten) Durchmesser und dem Brennstrahl. Ferner halbieren TP und FQ einander und stehen auf einander senkrecht, d. h., das Lot vom Brennpunkt auf eine Tangente halbiert das von der Parabelachse und dem Berührungspunkt begrenzte Stück derselben. Endlich liegt der Fusspunkt G dieses Lotes auf der Scheiteltangente, weil OG Mittelparallele des durch F, A und Q bestimmten Rechtecks ist. Die Scheiteltangente einer Parabel ist der geometrische Ort der Fusspunkte der von ihrem Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lote.

Aus der Lage der Normalen gegen die Tangente ergiebt sich sofort, dass sie den Winkel zwischen Brennstrahl und Durchmesser halbiert. Parallel der Achse einer Parabel einfallende Lichtstrahlen kreuzen einander nach der Zurückwerfung im Brennpunkt (Name!) und umgekehrt alle vom Brennpunkt einer Parabel ausgehenden Strahlen werden durch Reflexion an ihr parallel der Achse. (Parabolische Hohlspiegel.)

§ 30.

Aus den Gleichungen $yy_1 = p(x + x_1)$, $yy_2 = p(x + x_2)$

zweier Tangenten einer Parabel ergiebt sich als Ordinate y_0 ihres Schnittpunktes:

$$y_0 = p \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = p \frac{y_1^2 - y_2^2}{2p(y_1 - y_2)} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Das ist aber zugleich die Ordinate des Mittelpunktes der Berührungssehne, also: Zwei Tangenten einer Parabel schneiden einander auf dem Durchmesser, der zum Mittelpunkt ihrer Berührungssehne gehört. (Fig. XXX).

Die Abscisse des Schnittpunktes ist gegeben durch $x_0 = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{y_1 - y_2}$ $= \frac{y_1^2 y_2 - y_1 y_2^2}{2p(y_1 - y_2)} = \frac{y_1 y_2}{2p}$. Der Halbierungspunkt der Verbindungslinie „Schnittpunkt zweier Tangenten — Mittelpunkt der Berührungssehne" hat demnach die Abscisse $\xi = \frac{\frac{y_1 y_2}{2p} + \frac{x_1 + x_2}{2}}{2}$ $= \frac{(y_1 + y_2)^2}{8p}$; nun ist aber die entsprechende Ordinate $\eta = \frac{y_1 + y_2}{2}$, demnach $\eta^2 = 2\xi p$, d. h., (ξ, η) ist ein Punkt der Parabel. Die Verbindungslinie „Schnittpunkt zweier Tangenten — Mittelpunkt der Berührungssehne" wird durch die Parabel halbiert.

Die Tangente $yy_1 = p(x + x_1)$ schneidet die Leitlinie im Punkte S, für welchen $\xi = -\frac{p}{2}$, $\eta = \frac{p}{y_1}(-\frac{p}{2} + x_1) = \frac{y_1^2 - p^2}{2y_1}$ ist. Legen wir durch diesen Punkt (Fig. XXIX) an die Parabel die zweite Tangente, so ist deren Berührungspunkt U durch die Gleichungen in § 27 bestimmt. Setzen wir in diese die Werte für ξ und η ein, so erhalten wir: $y_2 = -\frac{p^2}{y_1}$, $x_2 = \frac{y_2^2}{2p} = \frac{p^3}{2y_1^2} = \frac{p^2}{4x_1}$. (Das andere Wurzelpaar ist (x_1, y_1)).

Die Gleichung der Tangente in diesem Punkte (x_2, y_2) lautet also: $y(-\frac{p^2}{y_1}) = p(x + \frac{p^2}{4x_1})$. Die Richtungsbestimmende ist $-\frac{y_1}{p}$, während sie für die erste Tangente $\frac{p}{y_1}$ war; es ist also das Produkt der beiden Richtungsbestimmenden $= -1$, die Tangenten stehen auf einander senkrecht.

Die Leitlinie einer Parabel ist der geometrische Ort der Schnittpunkte je zweier auf einander senkrechter Tangenten der Parabel.

§ 31. Tangentenkonstruktionen.

Unter Benutzung der gefundenen Eigenschaften der Parabel lassen sich nun leicht folgende Aufgaben lösen:

a; in einem Punkte P einer Parabel an sie eine Tangente zu ziehen.

Lösungen: (Fig. XXIX) 1; $FT = FP$, also T und damit PT bekannt;

2; PT ist Halbierungslinie des bekannten Winkels FPQ;

3; $PT \perp PN$, wo N durch $RN = p$ bestimmt ist;

4; $PT \perp FQ$.

b; von einem Punkt P' an die Parabel eine Tangente zu legen.

1; Da $\sphericalangle FGP' = R$, so ist G durch die beiden Örter „Scheiteltangente und Halbkreis über FP'" gegeben.

2; $P'Q = P'F$, also Q und dadurch P bezw. G bekannt.

Da der Halbkreis über FP' die Scheiteltangente, bezw. der Kreis mit FP' um P' die Leitlinie im allgemeinen in 2 Punkten schneidet, so lassen sich durch einen Punkt an eine Parabel im allgemeinen auch 2 Tangenten legen. Wann sich nur eine, wann keine Tangente ziehen lässt, ist leicht zu übersehen.

§ 32. Quadratur eines Parabelstückes.

Es seien P und P_1 (Fig. XXX) Die Berührungspunkte zweier Tangenten, T ihr Schnittpunkt, M der Mittelpunkt der Berührungssehne, Q der Schnittpunkt des zugehörigen Durchmessers und der Parabel. Jede zu PP_1 parallele Sehne wird durch MT halbiert, also auch diejenige, die nur noch 2 zusammenfallende Punkte mit der Parabel gemeinsam hat, das ist aber die Tangente der Parabel in Q, die also PP_1 parallel ist. Da nach dem vorigen $TQ = MQ$, so ist die Tangente $RS = \frac{1}{2} PP_1$, demnach der Inhalt des dem Parabelsegment eingeschriebenen Dreiecks PQP_1 doppelt so gross als der des angeschriebenen RTS. Wendet man dies Verfahren wiederholt auf die Segmente PQ und P_1Q an, so ist jedesmal das eingeschriebene Dreieck doppelt so gross, als das entsprechende angeschriebene. Setzt man dies Verfahren ins Unendliche fort, so bilden alle eingeschriebenen Dreiecke zusammen das Parabelsegment, alle angeschriebenen das von den beiden Tangenten PT und P_1T und dem Parabelbogen begrenzte Stück. Das Parabelsegment ist also doppelt so gross als dieses Stück, demnach $\frac{2}{3}$ vom Dreieck PTP_1.

Ein von einer Sehne abgeschnittenes Parabelsegment ist $\frac{2}{3}$ der Fläche des von der Sehne und den Tangenten der Parabel in den Endpunkten der Sehne begrenzten Dreiecks.

Ist die Sehne parallel der Scheiteltangente, so schneiden die Tangenten einander in einem Punkte der Achse, dessen Abscisse absolut genommen gleich der des Berührungspunktes ist. Sind demnach die Coordinaten der Berührungspunkte x und $\pm y$, so ist der Inhalt des Dreiecks $= 2xy$, der des Parabelsegments $= \frac{4}{3} xy$. Ein von einer zur Scheiteltangente parallelen Sehne abgeschnittenes Parabelsegment ist $\frac{2}{3}$ des Rechtecks aus dieser Sehne und dem zugehörigen Achsenstück.

Fig. XXI.

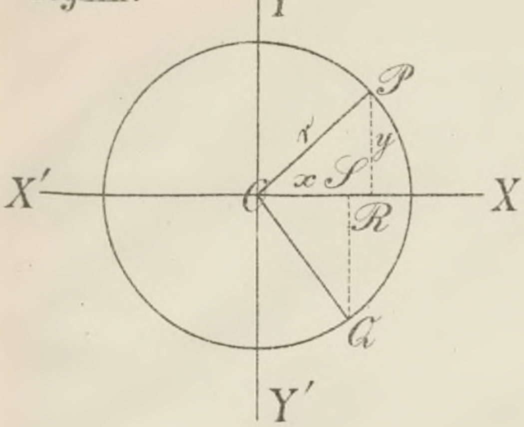

Fig. XXII.

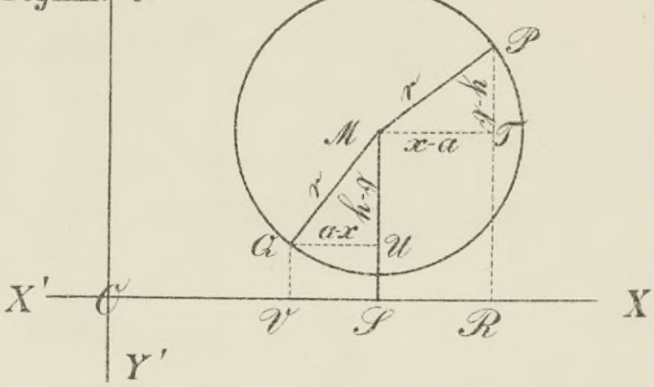

Fig. XXIII.

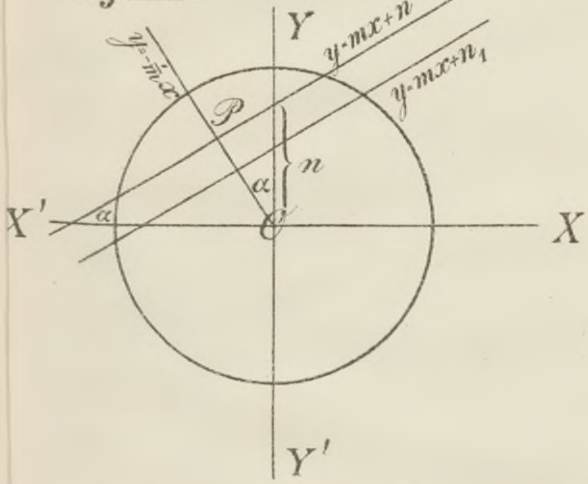

Fig. XXIV.

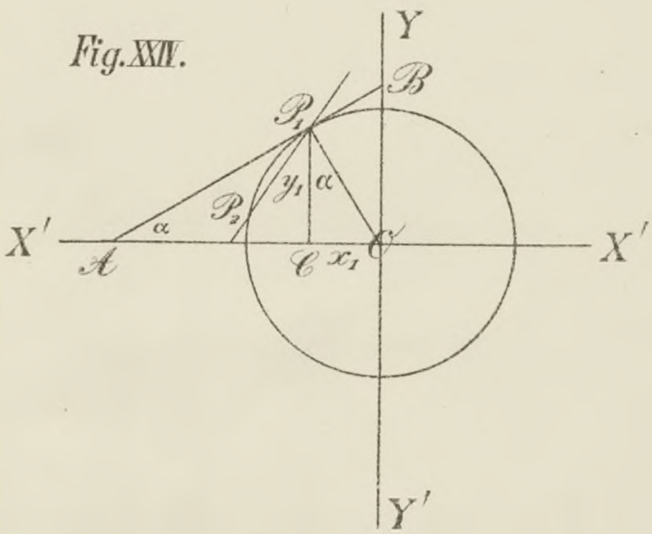

Fig. XXV.

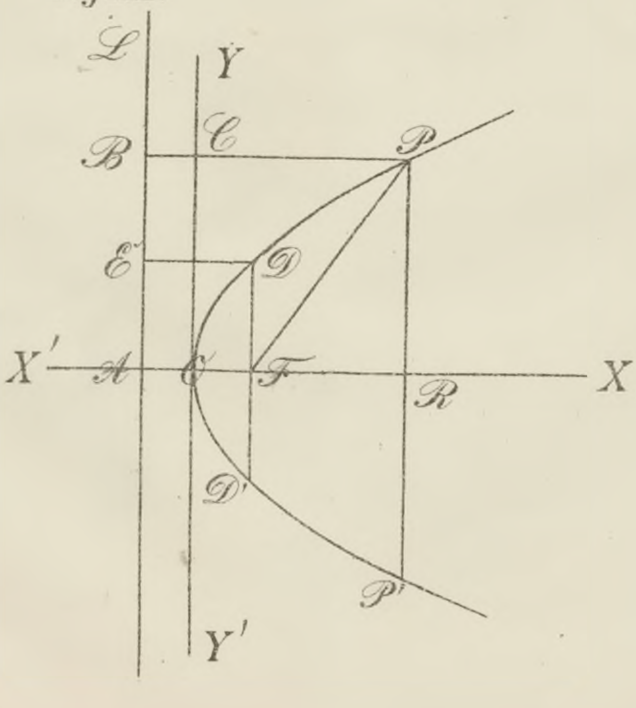

Fig. XXVI.

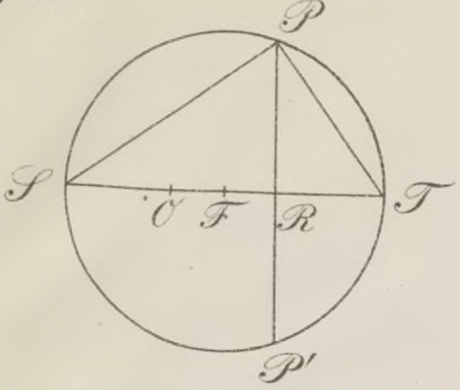

Fig. XXVII.

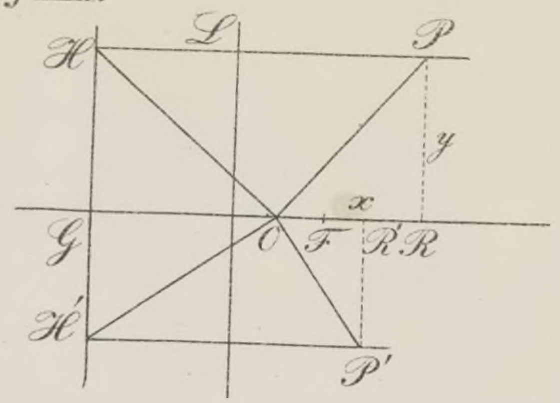

Fig. XXVIII.

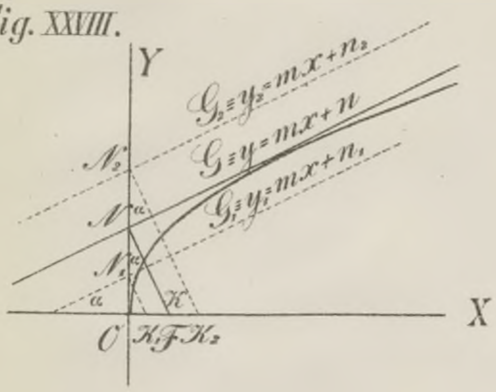

Fig. XXIX.

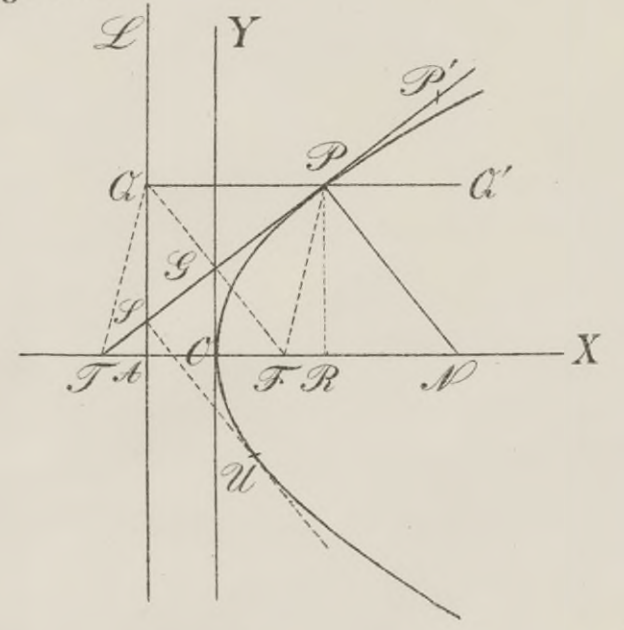

Fig. XXX.