Die

analytische Geometrie

in der

Prima des Gymnasiums.

(Dritter Teil.)

Von

Dr. G. Bockwoldt,

Gymnasial-Oberlehrer.

Beilage zum Programm des Königlichen Gymnasiums zu Neustadt in Westpreussen.

Ostern 1896.

Druck von H. Brandenburg in Neustadt Westpr.
1896.

Progr. No. 37.

V. Die Ellipse.

§ 33. Definition und Gleichung der Ellipse.

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten F und F_1 konstant ist.

Bewegt sich also ein Punkt so, dass in jedem Augenblick seiner Bewegung die Summe seiner Entfernungen von zwei festen Punkten F und F_1 dieselbe ist, so beschreibt er eine Ellipse.

Die beiden festen Punkte F und F_1 heissen die Brennpunkte (foci) der Ellipse, die von irgend einem Punkte P der letzteren nach ihnen gezogenen Geraden Brennstrahlen (Radien-vectoren.)

Um für die Ellipse eine Gleichung abzuleiten, wählen wir die Mitte O von FF_1 als Coordinatenanfang, die durch FF_1 bestimmte Gerade als X-Achse, die Senkrechte darauf in O als Y-Achse und bezeichnen die constante Summe $PF + PF_1$, $(r + r_1)$, zweier Brennstrahlen durch $2a$, die Entfernung FF_1 der Brennpunkte durch $2e$. (Dann ist $r + r_1 > 2e$, also $a > e$).

Ist nun P (Fig. XXXI) ein beliebiger Punkt der Ellipse, so ist, wenn von P auf die X-Achse das Lot PQ gefällt wird, $OQ = x$, $PQ = y$, $QF = e - x$, $QF_1 = e + x$, also $PF^2 = r^2 = y^2 + (e - x)^2$, $PF_1{}^2 = r_1{}^2 = y^2 + (e + x)^2$, demnach

$$2a = r + r_1 = \sqrt{y^2 + (e - x)^2} + \sqrt{y^2 + (e + x)^2}.$$

Daraus ergiebt sich: $2a - \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$, $4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (e - x)^2} + y^2 + e^2 - 2ex + x^2 = y^2 + e^2 + 2ex + x^2$, $4a^2 - 4ex = 4a\sqrt{y^2 + (e - x)^2}$, $a^4 - 2a^2ex + e^2x^2 = a^2y^2 + a^2e^2 - 2a^2ex + a^2x^2$, $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$.

Setzen wir nun noch $a^2 - e^2 = b^2$ und dividieren die Gleichung durch a^2b^2, so erhalten wir endlich $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Unter Zugrundelegung unseres Coordinatensystems gilt diese Gleichung für jeden Punkt der Ellipse und, wie sich leicht nachweisen lässt, für keinen andern, es ist also:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse und zwar die sogenannte Mittelpunktsgleichung.

Aus dieser Gleichung ergeben sich leicht die beiden neuen:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

d. h., es giebt nur so lange zusammengehörige reelle Werte von x und y, als y zwischen $+ b$ und $- b$, x zwischen $+ a$ und $- a$ liegt. Die grössten (absoluten) Werte, welche x und y annehmen können, sind bezw. $\pm a$, $\pm b$, d. h., die Ellipse liegt ganz innerhalb des Rechtecks, das durch die Parallelen $x = \pm a$, $y = \pm b$ zu den Achsen begrenzt wird. Da ferner zu jedem Werte von x zwei gleiche, aber entgegengesetzte von y gehören und umgekehrt, so ist die Ellipse in Bezug auf jede der beiden Achsen symmetrisch. Da endlich mit stetig sich änderndem Werte der einen Unbekannten auch die andere Unbekannte sich stetig ändert, so ist die Ellipse eine geschlossene Curve.

$AA_1 = 2a$ nennt man die grosse, $BB_1 = 2b$ die kleine Achse, $OF = OF_1 = e$ die lineare Excentricität, A, A_1, B, B_1, die Scheitel, O den Mittelpunkt, jede durch ihn hindurchgehende Sehne einen Durchmesser der Ellipse. (O halbiert nämlich nicht nur die beiden Achsen der Ellipse, sondern jede durch ihn hindurchgehende Sehne; denn aus der Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und der Gleichung der Geraden $y = mx$ ergeben sich als Coordinaten der Schnittpunkte leicht $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}$, $y = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}$, wobei die oberen, bezw. untern Vorzeichen einander entsprechen; die Schnittpunkte liegen also symmetrisch zum Coordinatenanfang).

Die Scheitel B und B_1 sind wegen $a^2 = b^2 + e^2$ von jedem der beiden Brennpunkte um die halbe grosse Achse entfernt, während $AF = A_1F_1 = a - e$, $AF_1 = A_1F = a + e$ ist.

Je kleiner e wird, umsomehr nähert sich die Ellipse dem Kreise, den wir also als einen Specialfall der Ellipse ansehen können.

Für $x = \pm e$ erhalten wir die zu den Brennpunkten gehörigen Ordinaten $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Man bezeichnet die doppelte Brennpunktsordinate $2 \frac{b^2}{a}$ durch $2p$ und nennt sie den Parameter der Ellipse (Für den Kreis ist wegen $e = o$, $b = a$, also $2p = 2a = 2r$).

§ 34. Konstruktionen der Ellipse.

Aus der Gleichung der Ellipse, bezw. aus der grossen (kleinen) Achse und der Excentrität der Ellipse ergiebt sich eine Anzahl von Konstruktionen, von denen hier die folgenden aufgeführt werden mögen.

1; Bringen wir die Gleichung der Ellipse auf die Form $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x}$ und setzen kurz $\sqrt{a^2 - x^2} = \eta$, so ist η die zur Abscisse x des Kreises a gehörige Ordinate und $a : b = \eta : y$, also y vierte Proportionale zu a, b, η. Daraus ergiebt sich folgende Konstruktion: Man beschreibt über $2a$ als X-Achse den Kreis und verkürzt jede Ordinate desselben im Verhältnis $b : a$, dann bestimmen die gefundenen Punkte die Ellipse. Analog: Kreis über $2b$ als Y-Achse und Verlängerung jeder Abcisse im Verhältnis $a : b$.

Durch Verbindung beider Konstruktionen ergiebt sich endlich folgende (Fig. XXXII). Man zeichnet die concentrischen Kreise, welche die Achsen zu Durchmessern haben, zieht in ihnen irgend einen Durchmesser und durch die Endpunkte je eine Parallele zu der Achse der Ellipse, welche Durchmesser des andern Kreises ist. Die Schnittpunkte P und P' sind dann Punkte der Ellipse. Bew. einfach.

2; Da $PF + PF_1 = 2a$, so erhält man beliebig viele Punkte der Ellipse, wenn man $2a$ in 2 Teile teilt, von denen der kleinere mindestens $= a - e$ sein muss, und mit diesen Teilen Kreise um die Brennpunkte schlägt. (Jede Teilung giebt 4 Ellipsenpunkte).

3; Schlägt man um einen der Brennpunkte einen Kreis mit der grossen Achse, zieht in ihm irgend einen Radius, verbindet den Endpunkt desselben mit dem andern Brennpunkt, so ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten dieser Verbindungslinie und des Radius ein Punkt der Ellipse. (Bew. sehr leicht.) „Die Ellipse ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis innerlich berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen.“

4; Schlingt man um die beiden Brennpunkte einen in sich zurücklaufenden Faden von der Länge $2a + 2e$, spannt denselben durch einen Schreibstift und führt diesen dann in einer durch die Brennpunkte gehenden Ebene herum, so beschreibt er die Ellipse. (Vgl. § 23 No. 5.).

§ 35. Aufgaben zu § 33 und § 34.

1; Für die Punkte der Ellipse, deren Achse mit den Coordinatenachsen zusammenfallen ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, für welche Punke ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \gtrless 1$?

2; Wie heisst die Gleichung der Ellipse, deren Hauptachse 34, deren lineare Excentricität 15 ist und deren Achsen die Coordinatenachsen sind?

3; Die Gleichung einer Ellipse unter der vorigen Bedingung aus Hauptachse $2a$ und Parameter $2p$ zu bestimmen. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2p^2} = 1\right)$.

4; Die Coordinaten des Mittelpunktes einer Ellipse mit den Halbachsen a und b sind c und d; wie lautet ihre Gleichung? $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$.

5; Wie heissen die Gleichungen der zum Punkt (x_1, y_1) der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gehörigen Brennstrahlen? Setzen wir in die allgemeine Gleichung der durch zwei Punkte bestimmten Geraden (§ 12) für x_2, y_2 die Brennpunktscoordinaten e, o, bezw. $-e, o$ ein, so erhalten wir leicht $y = y_1 \frac{x-e}{x_1-e}$, bezw. $y = y_1 \frac{x+e}{x_1+e}$.
Beispiel: $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, $x_1 = 5$, $y_1 = 4\frac{8}{13}$, giebt $y = -\frac{60}{91}(x-12)$ und $y = \frac{60}{221}(x+12)$.

Wie lang sind diese Brennstrahlen? Aus $r^2 = (c - x_1)^2 + y_1^2$, $r_1^2 = (c + x_1)^2 + y_1^2$ folgt $r_1^2 - r^2 = 4cx_1$, ferner ist $r_1 + r = 2a$, also $r_1 - r = \frac{2cx_1}{a}$, demnach $r = a - \frac{c}{a} x_1$, $r_1 = a + \frac{c}{a} x_1$. — Für obiges Zahlenbeispiel: $r = 8\frac{5}{13}$, $r_1 = 17\frac{8}{13}$.

Welchen Winkel schliessen diese beiden Brennstrahlen ein? Setzen wir in die allgemeine Gleichung für $tg\varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ für m_1 und m_2 ihre Werte $-\frac{60}{91}$ und $\frac{60}{221}$ ein, so erhalten wir $\varphi = 142^0\ 23'\ 21''$.

6; Die Ellipsen $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$, $\frac{x^2}{0{,}8^2} + \frac{y^2}{0{,}6^2} = 1$ zu construieren.

§ 36. Ellipse und Gerade.

Gegeben ist eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und eine Gerade $y = mx + n$, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen Ellipse und Gerade Punkte gemeinsam haben.

Die Coordinaten der Schnittpunkte sind offenbar wieder die gemeinsamen Wurzeln beider Gleichungen. Wir finden für sie die Werte:

$$x = \frac{-a^2mn \pm ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2},\quad y = \frac{b^2n \pm mab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}.$$

Die beiden Linien haben also zwei, einen, keinen Punkt gemeinsam, jenachdem $a^2m^2 + b^2 \gtreqless n^2$ ist.

Setzen wir nun noch für b^2 seinen Wert $a^2 - e^2$, so geht die vorige Bedingung über in $a^2(1 + m^2) \gtreqless e^2 + n^2$ oder $a^2(1 + tg^2\alpha) \gtreqless e^2 + n^2$ oder $a^2 \gtreqless (e^2 + n^2)\cos^2\alpha$.

Fällen wir nun (Fig. XXXIII) von O und F die Lote OL und FN auf die Gerade, OE auf FN und ziehen ON, so ist $EN = OL = n\cos\alpha$ $OE = e\cos\alpha$, also $ON^2 = (e^2 + n^2)\cos^2\alpha$. Hieraus gewinnen wir den Satz:

Eine Gerade schneidet eine Ellipse in zwei Punkten, berührt sie, trifft sie nicht, jenachdem der Radius a des Umkreises (die grosse Halbachse) grösser, gleich oder kleiner ist, als die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Ellipse mit dem Fusspunkt des von einem Brennpunkt auf die Gerade gefällten Lotes oder jenachdem der Fusspunkt des von einem Brennpunkt auf die Gerade gefällten Lotes innerhalb des Umkreises, auf diesem oder ausserhalb liegt. „Die Fusspunkte der von den Brennpunkten auf eine Tangente der Ellipse gefällten Lote liegen auf dem Umkreise.“

Die Coordinaten des Mittelpunktes der durch die Ellipse aus der Geraden $y = mx + n$ herausgeschnittenen Sehne sind bezw. $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}$. Daraus folgt: $y = -\frac{b^2}{a^2m}x = m_1x$.

Da diese Gleichung von n unabhängig ist und selbst einen Durchmesser darstellt, so erhalten wir den Satz:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Ellipse liegen auf einem Durchmesser.

Aus $m_1 = -\frac{b^2}{a^2 m}$ folgt: $mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}$. Diese Gleichung ist symmetrisch in Bezug auf m und m_1, d. h., sie bleibt ungeändert, wenn man m durch m_1 und umgekehrt ersetzt. Daraus folgt: die Mittelpunkte der zum Durchmesser $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$ parallelen Sehnen liegen auf dem Durchmesser $y = mx$.

Zwei Durchmesser, von denen jeder die zum andern parallelen Sehnen halbiert, heissen *konjugierte* Durchmesser.

Trifft ein Durchmesser $y = mx$ die Ellipse in einem Punkte (x_1, y_1), so trifft der konjugierte Durchmesser sie in den Punkten $x_2 = \pm\frac{a}{b}y_1$, $y_2 = \mp\frac{b}{a}x_1$; denn wegen $m = \frac{y_1}{x_1}$ lautet die Gleichung des zweiten Durchmessers $y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}x$ und aus ihr und der Ellipsengleichung ergeben sich als gemeinsame Wurzeln obige Werte. $\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2}x^2 = 1$; beide Seiten mit $\frac{a^2y_1^2}{b^2}$ multipliciert: $x^2\left(\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}\right) = \frac{a^2y_1^2}{b^2}$, $x^2 = \frac{a^2y_1^2}{b^2}$ u. s. w.$\Big)$.

Nennen wir diese beiden Durchmesser bezw. $2a_1$ und $2b_1$ so ist $a_1^2 + b_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + \frac{a^2}{b^2}y_1^2 + \frac{b^2}{a^2}x_1^2 = x_1^2\frac{a^2+b^2}{a^2} + y_1^2\frac{a^2+b^2}{b^2} = (a^2+b^2)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = (a^2+b^2)$.

Die Summe der Quadrate irgend zweier konjugierter Durchmesser einer Ellipse ist gleich der Summe der Quadrate der Achsen.

§ 37. Tangente und Normale der Ellipse.

1; Im vorigen § ergab sich als Bedingung dafür, dass die Gerade $y = mx + n$ Tangente der Ellipse sei, die Gleichung $a^2m^2 + b^2 = n^2$; es ist also $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ eine Tangente. Soll diese die Ellipse in einem bestimmten Punkte (x_1, y_1) berühren, so muss auch $y_1 = mx_1 \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ sein.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich der für die *bestimmte* Tangente geltende *bisher noch unbestimmte* Wert von m. Es ist $y_1^2 - 2mx_1y_1 + m^2x_1^2 = a^2m^2 + b^2$ oder $m^2(a^2 - x_1^2) + 2mx_1y_1 + (b^2 - y_1^2) = 0$; nun ist aber auch $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, also $a^2 - x_1^2 = \frac{a^2y_1^2}{b^2}$, $b^2 - y_1^2 = \frac{b^2x_1^2}{a^2}$, demnach $m^2\frac{a^2y_1^2}{b^2} + 2mx_1y_1 + \frac{b^2x_1^2}{a^2}$ oder $\left(m\frac{ay_1}{b} + \frac{bx_1}{a}\right)^2 = 0$. Hieraus ergiebt sich $m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ und $n = \sqrt{a^2m^2 + b^2} = \sqrt{\frac{b^4x_1^2}{a^2y_1^2} + b^2} = \frac{b}{ay_1}\sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2} = \frac{b}{ay_1}\sqrt{a^2b^2} = \frac{b^2}{y_1}$.

Die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) der Ellipse lautet somit: $y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$ oder $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

Es ist demnach:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) der Ellipse $\frac{xx}{a^2} + \frac{yy}{b^2} = 1$.

Wir erhalten aus der Gleichuug der Ellipse $\frac{xx}{a^2} + \frac{yy}{b^2} = 1$ die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1), wenn wir in der Ellipsengleichung je eine der laufenden Coordinaten x, y durch die des Berührungspunktes ersetzen. (Vgl. § 19, § 26).

Die Normale der Ellipse im Punkte (x_1, y_1) hat demnach die Gleichung: $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ oder $\frac{y - y_1}{a^2 y_1} = \frac{x - x_1}{b^2 x_1}$.

2; Die Gleichung der durch 2 Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) der Ellipse gehenden Sekante lautet: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$; lassen wir nun die beiden Punkte einander unendlich nahe rücken, die Sekante zur Tangente werden, so ergiebt sich als Gleichung der letzteren $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{0}{0}$. Diesen Wert $\frac{0}{0}$ bestimmen wir analog wie früher. Da beide Punkte der Ellipse angehören, gelten die beiden Gleichungen $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, $b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2$. Aus ihnen ergiebt sich durch Subtraction $b^2(x_1^2 - x_2^2) = -a^2(y_1^2 - y_2^2)$ und hieraus: $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}$, woraus beim Zusammenfallen der beiden Punkte $\frac{0}{0} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ folgt. Die Gleichung der Tangente lautet also: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ oder auch: $a^2 y y_1 + b^2 x x_1 = a^2 b^2$ oder endlich: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

§ 38.

Die Coordinaten (x_1, y_1) des Berührungspunktes der durch den Punkt (ξ, η) an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gelegten Tangente zu bestimmen.

Analog wie beim Kreise (§ 20) erhalten wir hier die beiden Gleichungen: $\frac{\xi x_1}{a^2} + \frac{\eta y_1}{b^2} = 1$ und $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, aus welchen sich für die Unbekannten x_1 und y_1 die Werte ergeben:

$$x_1 = \frac{\xi \pm \frac{a\eta}{b}\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1}}{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}}, \quad y_1 = \frac{\eta \mp \frac{b\xi}{a}\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1}}{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}},$$

wobei einander die oberen, bezw. unteren Wurzelzeichen entsprechen.

Daraus geht hervor, dass man von einem Punkt an die Ellipse zwei, eine, keine Tangenten legen kann, jenachdem $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \gtreqless 1$ ist, d. h., jenachdem der Punkt ausserhalb, auf, innerhalb der Ellipse liegt.

§ 39. Aufgaben zu § 37 und § 38.

1; Welche Coordinaten haben die Schnittpunkte der Ellipse, $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ und der Geraden $y = x + \frac{1}{5}$, der Ellipse $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ und der Geraden $y = x - \frac{3}{5}$, der Ellipse $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ und der Geraden $y = -0{,}3x + 2{,}5$? Antwort: bezw. $x_1 = 3$, $y_1 = 3{,}2$, $x_2 = -\frac{133}{41}$, $y_2 = -\frac{1954}{205}$; $x_1 = 3$, $y_1 = 2{,}4$, $x_2 = -\frac{36}{17}$, $y_1 = -\frac{231}{85}$; $x_1 = x_2 = 3$, $y_1 = y_2 = 1{,}6$.

2; Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche an die Ellipsen $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ bezw. in den Punkten $x_1 = 2{,}4$, $y_1 = 2{,}4$, $x_1 = 9{,}6$, $y_1 = 3$ gelegt werden können? Antwort: $y = -\frac{9}{16}x + 3\frac{3}{4}$, $y = -\frac{5}{9}x + 8\frac{1}{3}$.

Wie lauten die Gleichungen der zugehörigen Normalen?

3; In welchen Punkten berühren die durch die Punkte $\xi = -4$, $\eta = 6$, bezw. $\xi = 6$, $\eta = 5$ gehenden Tangenten die Ellipse $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, bezw. $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$?

4; Im Punkte $P(x_1, y_1)$ (Fig. XXXIV) ist an eine Ellipse eine Tangente gelegt; die Längen der Subtangente, der Subnormalen, der Tangente, der Normalen und des zwischen den Achsen gelegenen Tangentenstückes TS zu berechnen.

Für den Punkt T ist in der Gleichung der Tangente $y = 0$, wir erhalten also zur Bestimmung der Abscisse dieses Punktes $\frac{xx_1}{a^2} = 1$, somit $x = OT = \frac{a^2}{x_1}$. Die Subtangente TR hat also die Länge $\frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1} = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}$.

Für N ist in der Gleichung der Normalen $y = 0$, also $-y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$, woraus $x = x_1 - \frac{b^2 x_1}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 = \frac{e^2}{a^2} x_1$ folgt. Die Länge der Subnormalen ist also $x_1 - \frac{e^2}{a^2} x_1 = \frac{a^2 - e^2}{a^2} x_1 = \frac{b^2}{a^2} x_1$.

Ferner ist $TP^2 = \frac{a^4 y_1^4}{b^4 x_1^2} + y_1^2 = y_1^2 \frac{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}{b^4 x_1^2} = \frac{y_1^2}{b^4 x_1^2}(a^4 b^2 - a^2 b^2 x_1^2 + b^4 x_1^2) = \frac{y_1^2}{b^2 x_1^2}(a^4 - (a^2 - b^2) x_1^2) = \frac{y_1^2}{b^2 x_1^2}(a^4 - e^2 x_1^2) = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1^2}(a^2 - \frac{e^2}{a^2} x_1)^2 = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1^2} r r_1$, also Tangente $TP = \frac{y_1}{b x_1}\sqrt{a^4 - e^2 x_1^2} = \frac{a y_1}{b x_1}\sqrt{r r_1}$.

Analog ist $NP^2 = \frac{b^4}{a^4} x_1{}^2 + y_1{}^2 = \frac{b^4 x_1{}^2 + a^4 y_1{}^2}{a^4} = \frac{b^2 (a^4 - e^2 x_1{}^2)}{a^4}$, demnach Normale $NP = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - e^2 x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{rr_1}$.

Entsprechend $OT = \frac{a^2}{x_1}$ ist $OS = \frac{b^2}{y_1}$, demnach $TS^2 = \frac{a^4}{x_1{}^2} + \frac{b^4}{y_1{}^2}$ $= \frac{a^4 y_1{}^2 + b^4 x_1{}^2}{x_1{}^2 y_1{}^2} = \frac{a^2 b^2}{x_1{}^2 y_1{}^2} (a^2 - \frac{e^2}{a^2} x_1{}^2) = \frac{a^2 b^2}{x_1{}^2 y_1{}^2} rr_1$, also $TS = \frac{ab}{x_1 y_1} \sqrt{rr_1}$.

Zahlenbeispiel hierzu: $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, $x_1 = 10$, $y_1 = \frac{5}{13} \sqrt{69}$; dann ist: $TR \doteq 6.9$ $NR = \frac{250}{169}$, $NP = \frac{595}{169}$, $TP = \frac{119 \sqrt{69}}{10 \,.\, 13}$, $TS = \frac{13 \,.\, 119}{10 \sqrt{69}}$.

§ 40.

Aus der Gleichung $OT = \frac{a^2}{x_1}$, welche die Unabhängigkeit der Lage des Punktes T von b ergiebt, folgt noch der interessante Satz: *Alle Tangenten, welche die über einer und derselben (grossen) Achse konstruierten Ellipsen in Punkten von gleicher Abscisse berühren, schneiden einander in demselben Punkt dieser Achse.*

Es ist ferner (Fig. (XXXIV) $F_1 T = \frac{a^2}{x_1} - e = \frac{a^2 - e x_1}{x_1}$, $FT = \frac{a^2 + e x_1}{x_1}$, $F_1 N = e - \frac{e^2}{a^2} x_1 = e \frac{a^2 - e x_1}{a^2}$, $FN = e \frac{a^2 + e x}{a^2}$, daraus folgt: $FN : F_1 N = FT : F_1 T$, d. h., die 4 Punkte F, F_1, N, T sind 4 harmonische Punkte. Im harmonischen Strahlenbüschel $P(F, F_1, N, T,)$ stehen aber die beiden Strahlen PN und PT auf einander senkrecht, also: *Normale uud Tangente halbieren die von den beiden zum Berührungspunkte gehörigen Brennstrahlen gebildeten Winkel. „Wellen in einem Brennpunkt einer Ellipse erzeugt, kreuzen sich sämtlich in zweiten.“*

§ 41. Tangentenkonstruktionen.

Unter Benutzung der gefundenen Eigenschaften der Ellipse lassen sich nun leicht folgende Aufgaben lösen:

a; In einem Punkte P an eine Ellipse eine Tangente zu ziehen.

1; Halbiere den Nebenwinkel von FPF_1.

2; Konstruiere den Umkreis der Ellipse, lege an ihn in seinem Schnittpunkt Q mit der Ordinate von P die Tangente, welche die grosse Ache in T schneidet, ziehe TP.

3; (Fig. XXXIV.) Verlängere FP um $F_1 P$ bis G, dann ist die Mittelsenkrechte PH auf $F_1 G$ Tangente der Ellipse, denn zieht man OH, so ist $FO : F_1 O = GH : F_1 H = 1 : 1$, also $OH \parallel FG$ und $= \frac{1}{2} FG = a$, H liegt auf dem Umkreis (Vgl. § 36), oder auch (weil $PN \parallel GF_1$) $HP \perp PN$.

b; Von einem Punkte Q an eine Ellipse eine Tangente zu legen. (Fig. XXXIV).

1; Örter für H: Umkreis der Ellipse, Halbkreis über OQ.
2; Örter für G: Kreis mit $2a$ um F, Kreis mit QF_1 um Q, H Mitte von F_1G.

§ 42. Flächeninhalt der Ellipse.

Denken wir uns die Flächen der Ellipse und ihres Umkreises durch Parallelen zur Y-Achse in sehr schmale Streifen zerschnitten, so müssen je zwei einander entsprechende Streifen der Ellipse und des Kreises sich zu einander wie $b:a$ verhalten, da sich jede Ordinate der Ellipse zur entsprechenden des Kreises wie $b:a$ verhält (§ 34,1), somit muss sich auch die ganze Ellipsenfläche zur ganzen Kreisfläche wie $b:a$ verhalten, also $= a^2\pi\cdot\frac{b}{a} = ab\pi$ sein. Die Fläche einer Ellipse ist das geometrische Mittel zwischen den Flächen des Um- und des Inkreises.

VI. Die Hyperbel.

§ 43. Definition und Gleichung der Hyperbel.

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die (absolute) Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten F und F_1 unveränderlich ist.

Bewegt sich also ein Punkt so, dass der Unterschied seiner Entfernungen von 2 festen Punkten unverändert bleibt, so beschreibt er eine Hyperbel.

Die beiden festen Punkte F und F_1 heissen die Brennpunkte der Hyperbel, die von einem Punkte P der letzteren nach ihnen gezogenen Geraden Brennstrahlen.

Wir wählen nun als X-Achse die Verbindungsgerade der beiden Brennpunkte F und F_1, als Y-Achse die Mittelsenkrechte auf FF_1 und bezeichnen die konstante Differenz $PF_1 - PF$, $(r_1 - r)$, durch $2a$, die Entfernung der beiden Brennpunkte durch $2e$. (Aus der Figur ergiebt sich dann sofort $2a < 2e$.)

Ist nun P (Fig. XXXV) ein beliebiger Punkt der Hyperbel, so ist, wenn $PR \perp XX'$, $OR = x$, $PR = y$, $FR = x - e$, $F_1R = x + e$, also $PF_1^2 = r_1^2 = (x+e)^2 + y^2$, $PF^2 = r^2 = (x-e)^2 + y^2$, demnach $2a = r_1 - r = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, $4a^2 + 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = x^2 + 2ex + e^2 + y^2$, $4a^2 - 4ex = -4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, $a^4 - 2a^2ex + e^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2$, $(e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$.

Setzen wir nun noch $e^2 - a^2 = b^2$ und dividieren die Gleichung durch a^2b^2, so erhalten wir endlich $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Unter Zugrundelegung unseres Coordinatensystems gilt diese Gleichung für jeden Punkt der Hyperbel und, wie sich leicht nachweisen lässt, für keinen andern, es ist also:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Hyperbel und zwar die sogenannte Mittelpunktsgleichung.

Aus dieser Gleichung ergeben sich leicht die beiden neuen:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}, \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Für $y = 0$ ist $x = \pm a$, die Hyperbel schneidet die X-Achse in den Entfernungen $\pm a$ vom Coordinatenanfang; für jeden andern Wert von y ist (absolut) $x > \pm a$, d. h., in dem Streifen, welcher durch die beiden Geraden $x = + a$ und $x = - a$ begrenzt wird, liegt kein Punkt der Hyperbel; zu jedem Wert y gehören zwei gleiche aber entgegengesetzte Werte von x, die Hyperbel ist also symmetrisch zur Y-Achse und besteht aus 2 vollständig getrennten Teilen (Ästen); zu jedem Wert von x gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von y, die X-Achse ist ebenfalls eine Symmetrieachse; mit wachsendem Werte der einen Unbekannten nimmt auch der der andern zu, die Hyperbel erstreckt sich (nach beiden Seiten) bis ins Unendliche und ist eine offene Curve.

Aus $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$, folgt (absolut) $y < \pm \frac{b}{a}x$. Es ist also die Ordinate eines Hyperbelpunktes mit der Abscisse x absolut stets kleiner als die entsprechende der Geraden $y' = \pm \frac{b}{a}x$, die Hyperbel liegt also ganz innerhalb der durch die beiden Geraden $y' = \pm \frac{b}{a} x$ aus der Ebene herausgeschnittenen Flächenstücke, welche durch die X-Achse halbiert werden. Schreiben wir ferner die Gleichung der Hyperbel in der Form $y = \pm \frac{b}{a} x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$, so ersehen wir, dass die Differenz $y' - y = \pm \frac{b}{a}x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right)$ der beiden Ordinaten y' und y, die zu demselben x gehören, mit wachsendem x kleiner und kleiner wird, ohne jedoch für endliche Werte von x zu verschwinden. Die Hyperbel nähert sich also mit wachsendem x diesen Geraden mehr und mehr, bis letztere im Unendlichen ihre Tangenten werden. Man nennt diese beiden Geraden Asymptoten (*συμπίπτω, ἀσύμπτωτος*).

Wir nennen $AA_1 = 2a$ die Hauptachse, $BB_1 = 2b$ die Nebenachse, (die Konstruktion ergiebt sich aus der Figur), e die lineare Excentricität, A und A_1 die Scheitel, die Tangenten in ihnen Scheiteltangenten, jede durch O gehende Gerade (bis zu den Ästen der Hyperbel) einen Durchmesser (Vgl. § 33). ($A_1F = AF_1 = e + a$, $AF = A_1F_1 = e - a$).

Ist $e = a\sqrt{2}$, also $b = a$, so stehen die beiden Asymptoten auf einander senkrecht und die Hyperbel heisst in diesem Falle gleichseitig.

Für $x = \pm e$ erhalten wir die zu den Brennpunkten gehörigen Ordinaten $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Man bezeichnet auch hier die doppelte Brennpunktsordinate $\frac{2b^2}{a}$ durch $2p$ und nennt sie den Parameter der Hyperbel.

§ 44. Konstruktionen der Hyperbel.

Aus der Gleichung der Hyperbel, bezw. aus der Hauptachse

(Nebenachse) und der Excentricität ergeben sich leicht folgende Konstruktionen.

1; Aus $b:a = \sqrt{y^2 + b^2} : x$ sind Punkte der Hyperbel auf folgende Art zu finden: (Fig. XXXVI) $OC = OB = b$, $OA = a$, $OD = y$, $AE \parallel OD$, $OB:OA = DB:DE$ oder $b:a = \sqrt{y^2 + b^2} : DE$, also $DE = x$. Der Kreis mit DE um D trifft die durch D zur X-Achse gezogene Parallele in einem Punkt P der Hyperbel.

2; Wird um F_1 mit $2a$ ein Kreis beschrieben, so ist, wenn der Schnittpunkt von F_1P mit diesem Kreise durch S bezeichnet wird, $PF = PS$, P liegt also auf der Mittelsenkrechten von FS. Durch Vertauschung von F_1 und F erhält man den andern Hyperbelast.

3; Schlägt man um den einen Brennpunkt mit $2a + z$, um den andern mit z Kreise, so geben deren Schnittpunkte zwei Punkte der Hyperbel. Durch Vertauschung der Kreise erhält man den andern Ast. z muss mindestens $= e - a$ sein, weil sonst die Summe der Radien kleiner als $2e$ ist, die Kreise einander also nicht schneiden.

§ 45. Aufgaben zu § 43 und § 44.

1; Für die Punkte der Hyperbel, welche die Coordinatenachsen zu Achsen hat, ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, für welche Punkte ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \gtrless 1$?

2; Wie heisst die Gleichung der Hyperbel, deren Hauptachse 8, deren lineare Excentricität 10 ist und deren Achsen die Coordinatenachsen sind?

3; Die Gleichung einer Hyperbel aus ihrer Nebenachse $2b$ und ihrem Parameter $2p$ unter der vorigen Bedingung zu bestimmen. $\left(\frac{p^2x^2}{b^4} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$.

4; Analogon zu § 35, 4.

5; Wie heissen die Gleichungen der zum Punkte (x_1, y_1) der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gehörigen Brennstrahlen? $y = y_1 \frac{x - e}{x_1 - e}$ bezw. $y = y_1 \frac{x + e}{x_1 + e}$ (§ 35). Beispiel: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, $x_1 = 8\frac{1}{2}$, $y_1 = 5\frac{5}{8}$; $y = \frac{45}{28}(x - 5)$, $y = \frac{5}{12}(x - 5)$. Wie lang sind die Brennstrahlen? $r = \frac{ex_1}{a} - a$, $r_1 = \frac{ex_1}{a} + a$; fürs Zahlenbeispiel: $r = 6\frac{5}{8}$, $r_1 = 14\frac{5}{8}$. Ihr Winkel φ ist bestimmt durch $tg\varphi = \frac{75}{187}$, also $\varphi = 21^\circ 51' 15''$.

6; Die Hyperbeln $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$, $\frac{x^2}{15^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$ zu zeichnen.

§ 46. Hyperbel und Gerade.

Aus den Gleichungen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ einer Hyperbel und $y = mx + n$ einer Geraden ergeben sich als Coordinaten der Schnittpunkte $x = \frac{a^2mn \pm ab\sqrt{b^2 + n^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2}$, $y = \frac{b^2n \pm ab\sqrt{b^2 + n^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2}$.

Hyperbel und Gerade haben also zwei, einen, keinen Schnittpunkt, jenachdem $b^2 + n^2 - a^2m^2 \gtreqless 0$ ist. Setzen wir wieder $b^2 = e^2 - a^2$ und $m = tg\alpha$, so geht diese Gleichung über in $e^2 + n^2 \gtreqless a^2(tg^2\alpha + 1)$ oder $a^2 \lesseqgtr (e^2 + n^2)cos^2\alpha$. Fällen wir nun (Fig. XXXVII) von O und F auf die Gerade $y = mx + n$ die Lote OL und FN, ziehen $OE \,//\, LN$, und verbinden O mit N, so ist $ON^2 = OE^2 + EN^2 = OE^2 + OL^2 = (e^2 + n^2)cos^2\alpha$. Nennen wir noch den Kreis über der Hauptachse AA_1 der Hyperbel ihren Hauptkreis, so lautet das Ergebnis unserer Untersuchung: Jenachdem die Entfernung des Fusspunktes des von einem Brennpunkte der Hyperbel auf eine Gerade gefällten Lotes vom Mittelpunkt des Hauptkreises grösser, gleich, kleiner ist, als dessen Radius, oder jenachdem der Fusspunkt dieses Lotes ausserhalb des Hauptkreises, auf diesem, innerhalb desselben liegt, hat die Gerade mit der Hyperbel zwei, einen, keinen Punkt gemeinsam. Der Fusspunkt des von einem Brennpunkt der Hyperbel auf eine Tangente gefällten Lotes liegt auf dem Hauptkreis.

Ist in der zur Bestimmung von x dienenden quadratischen Gleichung $b^2 = a^2m^2$, so geht sie über in $-2a^2mnx = a^2(b^2 + n^2)$, woraus sich $x = -\frac{b^2 + n^2}{2mn}$, $y = \frac{n^2 - b^2}{2n}$ ergiebt; die Gerade hat also in diesem Falle mit der Hyperbel im Endlichen nur einen (nicht 2 zusammenfallende) Punkte gemeinsam, ist also nicht Tangente. Da aber in diesem Falle $m = \pm \frac{b}{a}$, also die Gleichung der Geraden $y = \pm \frac{b}{a} x + n$ ist, so ist diese einer der beiden Asymptoten parallel. Jede einer Asymptote parallele Gerade schneidet die Hyperbel nur in einem Punkte im Endlichen.

Bringen wir die Gleichung für x auf die Form $x = -\frac{a^2(b^2 + n^2)}{a^2mn \mp ab\sqrt{n^2 + b^2 - a^2m^2}}$ (durch Rationalmachung des Zählers) und setzen dann $b^2 = a^2m^2$, so folgt:

$$x = -\frac{a^2(b^2 + n^2)}{a^2mn \mp abn} = -\frac{a^2(b^2 + n^2)}{abn \mp abn}, \left(m = \frac{a}{b}\right), \text{ also}$$

$$x_1 = -\frac{a(b^2 + n^2)}{2bn}, \; x_2 = \infty, \text{ demnach } y_1 = \frac{n^2 - b^2}{2n}, \; y_2 = \infty.$$

Die Gerade hat also mit der Hyperbel auch in diesem Falle zwei

Schnittpunkte gemeinsam, von denen aber einer im Unendlichen liegt. (Für die Asymptote ist $n = 0$, also auch $x_1 = y_1 = \infty$).

§ 47. Tangente und Normale der Hyperbel.

Genau auf dieselbe Weise, wie in § 37 für die Ellipse, ergiebt sich für die Tangente im Punkte (x_1, y_1) der Hyperbel die Gleichung $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$. Die beiden dort gegebenen Ableitungen lassen sich fast wörtlich wiederholen, die Gedächtnisregel bleibt wörtlich dieselbe. Aus der Gleichung der Tangente ergiebt sich als Richtungsbestimmende der Wert $\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$, demnach lautet die Gleichung der Normalen : $y - y_1 = - \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ oder $\frac{y - y_1}{a^2 y_1} = - \frac{x - x_1}{b^2 x_1}$.

§ 48.

Die Coordinaten (x_1, y_1) des Berührungspunktes der durch den Punkt (ξ, η) an die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gelegten Tangente zu finden.

Aus den beiden Gleichungen $\frac{\xi x_1}{a^2} - \frac{\eta y_1}{b^2} = 1$ und $\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - \frac{y_1^{\,2}}{b^2} = 1$ ergiebt sich:

$$x_1 = \frac{\xi + \frac{a}{b}\eta \pm \sqrt{-\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + 1}}{\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}, \quad y_1 = \frac{\eta \pm \frac{b}{a}\xi \pm \sqrt{-\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + 1}}{\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}},$$

wobei einander die oberen, bezw. unteren Wurzelvorzeichen entsprechen.

Jenachdem also $\frac{\eta^2}{b^2} + 1 \gtreqless \frac{\xi^2}{a^2}$ ist, d. h., jenachdem der Punkt ausserhalb, auf, innerhalb der Hyperbel liegt, sind von ihm an sie zwei, eine, keine Tangenten möglich.

Ist $\frac{\xi}{a} = \pm \frac{\eta}{b}$, d. h., liegt der Punkt (ξ, η) auf einer Asymptote, so wird der Nenner $= 0$ und die Werte von x_1 und y_1 sind scheinbar unbestimmt. Machen wir aber (wie oben) die Zähler rational und heben dann den gemeinsamen Faktor $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}$ aus Zähler und Nenner fort, so erhalten wir:

$$x_1 = \infty, \; x_2 = \frac{\xi^2 + a^2}{2\xi}, \; y_1 = \infty, \; y_2 = \frac{b(\xi^2 - a^2)}{2a\xi} = \frac{\eta^2 - b^2}{2\eta}.$$

Von einem Punkte der Asymptote lässt sich im Endlichen nur eine Tangente an die Hyperbel legen. (Die andere ist die Asymptote selbst.)

§ 49. Aufgaben zu § 46 — § 48.

1; Wie heissen die Coordinaten der Schnittpunkte der Hyperbel

$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$ und bezw. der Geraden $y = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$, $y = \frac{25}{12}x - \frac{20}{3}$, $y = x - 4$?

Antwort: $x_1 = 5$, $y_1 = 3\frac{3}{4}$, $x_2 = -4\frac{1}{6}$, $y_2 = 1\frac{11}{24}$;

$x_1 = x_2 = 5$, $y_1 = y_2 = 3\frac{3}{4}$;

$x_{1,2} = \frac{-64 \pm 16i\sqrt{113}}{9}$, $y_{1,2} = \frac{-100 \pm 16i\sqrt{113}}{9}$.

2; Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche an die vorige Hyperbel in den Punkten $x_1 = -5$, $y_1 = 3\frac{3}{4}$, $x_1 = +5$, $y_1 = -3\frac{3}{4}$, $x_1 = -5$, $y_1 = -3\frac{3}{4}$ gelegt werden können?

Wie lauten die Gleichungen der zugehörigen Normalen?

3; In welchen Punkten wird die Hyperbel von den durch die Punkte $\xi = 8$, $\eta = 10$, bezw. $\xi = 4$, $\eta = -35$ gehenden Tangenten berührt?

4; Im Punkte $P(x_1, y_1)$ (Fig. XXXV) ist an eine Hyperbel eine Tangente gelegt, die Längen der Subtangente, der Subnormalen, der Tangente und der Normalen zu berechnen.

Ganz analog wie in § 39 erhalten wir für T und N bezw. die Abscissen $\frac{a^2}{x_1}$, $\frac{e^2}{a^2}x_1$ und als Längen obiger Strecken bezw. $TR = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1} = \frac{a^2 y_1^2}{b^2 x_1}$, $NR = \frac{e^2 - a^2}{a^2}x_1 = \frac{b^2}{a^2}x_1$, $TP = \frac{y_1}{bx_1}\sqrt{e^2x_1^2 - a^4} = \frac{ay_1}{bx_1}\sqrt{rr_1}$, $NP = \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2x_1^2 - a^4} = \frac{b}{a}\sqrt{rr_1}$. Zahlenbeispiel: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$, $x_1 = 5$, $y_1 = 3\frac{3}{4}$; $TR = 1{,}8$, $NR = 7{,}8125$, $TP = 0{,}15\sqrt{769}$, $NP = 0{,}3125\sqrt{769}$.

§ 50.

Aus der Gleichung $OT = \frac{a^2}{x_1}$ folgt wieder der Satz: Alle Tangenten, welche die über einer und derselben Hauptachse konstruierten Hyperbeln in Punkten von gleicher Abscisse berühren, schneiden einander in demselben Punkt dieser Achse.

Da ferner $F_1T = e + \frac{a^2}{x_1}$, $FT = e - \frac{a^2}{x_1}$, $F_1N = \frac{e^2}{a^2}x_1 + e$, $FN = \frac{e^2}{a^2}x_1 - e$ ist, so folgt wieder $F_1T : FT = F_1N : FN$ und daraus wie bei der Ellipse: Normale und Tangente einer Hyperbel halbieren die von den Brennstrahlen gebildeten Winkel. Ein von einem Brennpunkte kommender Strahl wird von der Hyperbel so reflektiert, als ob er von andern ausginge.

§ 51.

Ziehen wir (Fig. XXXVIII) eine zur Hauptachse senkrechte

Sehne PP' der Hyperbel, welche die Asymptoten bezw. in Q und Q' schneidet, so ist, wenn wir die in § 43 eingeführte Bezeichnung beibehalten, $PQ = y' - y$, $PQ' = y' + y$, also $PQ \cdot PQ' = y'^2 - y^2 = (\frac{b}{a}x)^2 - (\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2) = b^2$. Das Rechteck aus den beiden Stücken, in welche eine von den Asymptoten begrenzte, zur Hauptachse senkrechte Strecke durch die Hyperbel geteilt wird, ist gleich dem Quadrat der halben Nebenachse.

Ziehen wir ferner $PK \parallel QO$, $PL \parallel Q'O$, so ist $\triangle KPQ' \sim OQQ' \sim OEE'$, also $OE : EE' = KP : PQ'$ oder $e : 2b = KP : y' + y$, also $KP = e\frac{y' + y}{2b}$; ebenso ist $\triangle LQP \sim OEE'$, also: $LP : PQ = e : 2b$, $LP = e\frac{y' - y}{2b}$, demnach $KP \cdot LP = e^2\frac{y'^2 - y^2}{4b^2} = \frac{1}{4}e^2$. Zieht man durch einen Hyperbelpunkt zu jeder Asymptote eine Parallele bis zur andern, so ist das Rechteck aus diesen Parallelen gleich dem vierten Teil des Quadrates der Excentricität.

Ist PP'' (Fig. XXXVIII) eine beliebige Sekante, welche die Asymptoten in S und S'' schneidet, und $P''N \parallel QO$, M der Schnittpunkt von PK und $P''N$, so ist: $PK \cdot NM = P''N \cdot KM$ oder $(PM + KM)NM = (P''M + NM)KM$, also $PM \cdot NM = P''M \cdot KM$ oder $PM : KM = P''M : NM$. Nun ist aber ferner $PM : KM = PP'' : P''S''$ und $P''M : NM = PP'' : PS$, woraus sich $PS = P''S''$, also auch $PS'' = P''S$ ergiebt. Der Abschnitt einer Sekante von dem einen Schnittpunkt mit der Hyperbel bis zu einem Schnittpunkt mit einer Asymptote ist gleich dem von den beiden andern entsprechenden Schnittpunkten begrenzten Abschnitte.

Ist der Berührungspunkt einer Tangente (x_1, y_1) und schneidet sie die Asymptoten in den Punkten (x', y'), (x'', y''), so ergiebt sich leicht aus den Gleichungen der Tangente und der Asymptoten:

$$x' = \frac{a^2b}{bx_1 - ay_1}, \quad y' = \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}, \quad x'' = \frac{a^2b}{bx_1 + ay_1}, \quad y'' = \frac{ab^2}{bx_1 + ay_1}$$

und daraus als Mittelpunkt des zwischen den Asymptoten liegenden Stückes der Tangente $x''' = \frac{x' + x''}{2} = x_1$, $y''' = \frac{y' + y''}{2} = y_1$. Das von den Asymptoten begrenzte Stück einer Hyperbeltangente wird durch den Berührungspunkt halbiert.

§ 52. Tangentenkonstruktionen.

Unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Hyperbel lassen sich analog wie bei den übrigen Curven die Aufgaben lösen:

a; In einem Punkte P an eine Hyperbel eine Tangente zu legen.

1; Halbierung des Winkels FPF_1.

2; Konstruktion der Strecke zwischen den Asymptoten, welche in diesem Punkt halbiert wird.

3; Konstruktion des Punktes T, in welchem die Hauptachse geschnitten wird, aus $OT : a = a : x_1$

4; (Fig. XXXVII) Örter für N: Hauptkreis und Halbkreis über FP.

b; Von einem Punkte Q an eine Hyperbel eine Tangente zu legen;

1; Örter für N: Hauptkreis und Halbkreis über FQ.

2; Kreis mit $2a$ um F_1, mit QF um Q; Schnittpunkt beider H. $QG \perp FH$ ist die gesuchte Tangente.

§ 53. Die Scheitelgleichungen.

Als Scheitelgleichung der Parabel haben wir bereits gefunden $y^2 = 2px$. Verlegen wir nun auch bei Ellipse und Hyperbel die Y-Achse soweit nach links bezw. rechts, dass sie Scheiteltangente dieser Curven wird, und bezeichnen die Coordinaten für das neue Achsensystem vorläufig durch ξ, η, so ist für die Ellipse $x = \xi - a$, $y = \eta$, für die Hyperbel $x = \xi + a$, $y = \eta$ und die Gleichungen gehen demnach über in

$$\frac{(\xi - a)^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(\xi + a)^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

woraus sich als Scheitelgleichungen leicht ergeben, wenn wir wieder $\frac{b^2}{a} = p$ setzen:

$$\eta^2 = 2p\xi - \frac{p}{a}\xi^2, \text{ bezw. } \eta^2 = 2p\xi + \frac{p}{a}\xi^2.$$

(Für den Kreis ist $b = a = r$, also $\frac{p}{a} = 1$.)

Setzen wir nun noch für ξ und η wieder x und y, so erhalten wir endlich als Scheitelgleichungen unserer vier Curven:

Parabel: $y^2 = 2px$ ($\pi\alpha\varrho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\varepsilon\iota\nu$ = gleich sein).

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ellipse:} & y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \\ \text{Kreis:} & y^2 = 2rx - x^2\end{array}\right\} \text{ } (\dot{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\acute{\iota}\pi\varepsilon\iota\nu = \text{kleiner sein}).$$

Hyperbel: $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ ($\dot{\upsilon}\pi\varepsilon\varrho\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\varepsilon\iota\nu$ = grösser sein).

Aus der Vergleichung der Scheitelgleichungen der Ellipse und der Hyperbel mit der jener Parabel ergiebt sich sofort, dass erstere in letztere übergehen, sobald man a bei endlichem p unendlich gross werden lässt, d. h., sobald bei endlichem Werte des Parameters der Mittelpunkt der Ellipse, bezw. Hyperbel ins Unendliche rückt.

Nennen wir schliesslich noch $\frac{e}{a} = \varepsilon$ die numerische Excentricität der Ellipse, bezw. Hyperbel, so ist diese bezw. $= \sqrt{\frac{a^2 \mp b^2}{a^2}} = \sqrt{1 \mp \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 \mp \frac{p}{a}}$. Wächst daher a bei endlichem p ins Unendliche, so wird $\varepsilon = 1$. „Je mehr sich die numerische Excentricität einer Ellipse oder Hyperbel der Einheit nähert, umsomehr nähert sich die Curve selbst einer Parabel.“

Fig. XXXI.

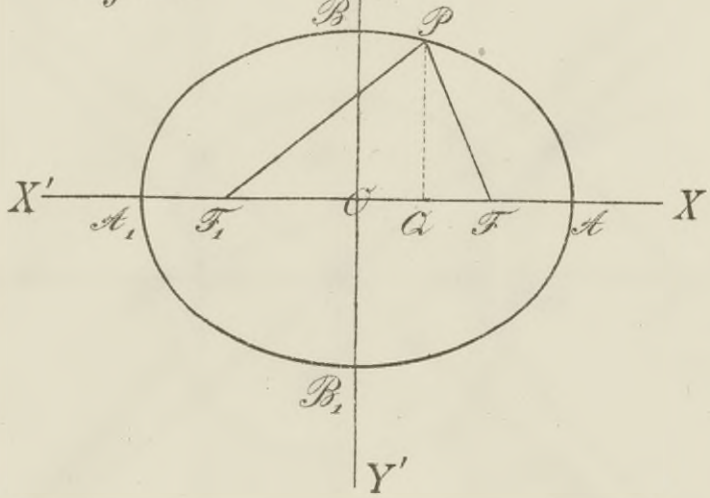

Fig. XXXII.

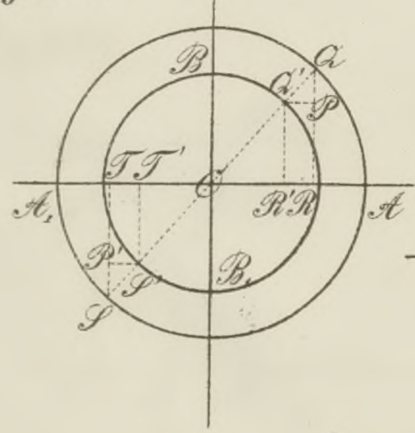

Fig. XXXIII.

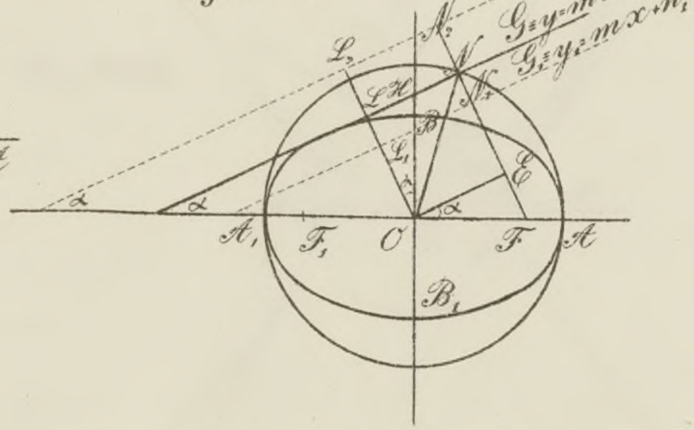

Fig. XXXIV.

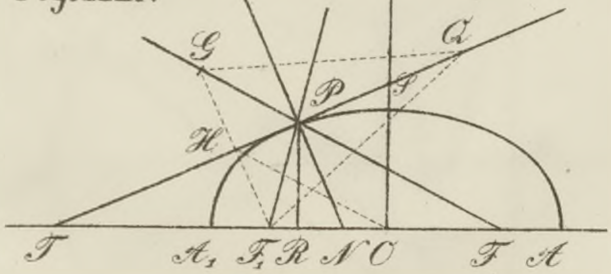

Fig. XXXV.

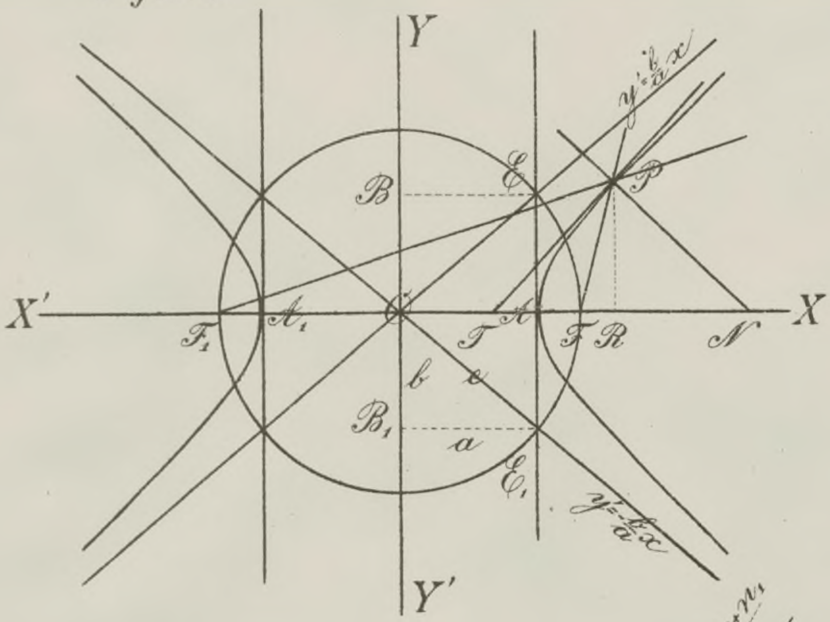

Fig. XXXVI.

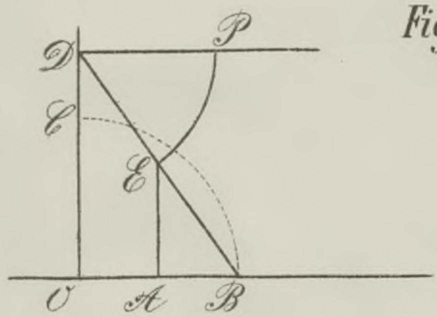

Fig. XXXVII.

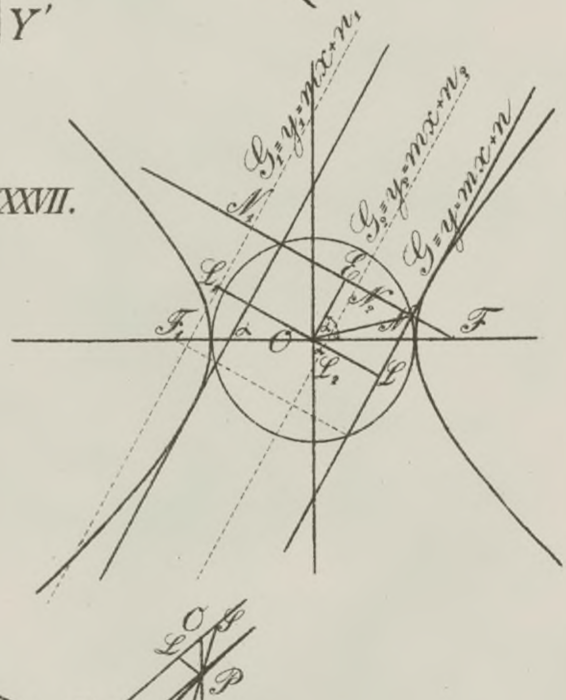

Fig. XXXVIII.