Über verschiedene Konstruktionen zur Übertragung von Figuren von einer gegebenen Oberfläche auf eine andere. I.

von

Oberlehrer **Bock**.

Wissenschaftliche Abhandlung

für das

Oster-Programm

des

Königlichen Gymnasiums zu Lyck.

1884.

Lyck 1884.
Druck von Rudolph Siebert.

1884. Progr. Nr. 13.

Über verschiedene Konstruktionen zur Übertragung von Figuren von einer gegebenen Oberfläche auf eine andere.

Die Aufgabe, Figuren von der Erdoberfläche auf eine Ebene zu übertragen, also das Problem der Kartenzeichnung, soll in folgendem auf die Weise gelöst werden, dass man von dem einfachsten Falle, nämlich der Uebertragung von Ebene auf Ebene, ausgehend, einfache Formeln für die drei gebräuchlichsten Arten der Kartenzeichnung gewinnt, aus denen dann unmittelbar die Formeln für die Uebertragung von Kugeloberfläche und Rotationselipsoïd folgen. Aus der Diskussion dieser Formeln sollen möglichst einfache Konstructionen hergeleitet werden.

Die Übertragung von Punkten und Linien der gegebenen Oberfläche auf die Kartenebene wird derart ausgeführt, dass man über diese Oberfläche zwei Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Kurven legt und dieses Netz auf die Kartenebene überträgt, so dass jeder dieser Kurven eine Kurve auf der Karte entspricht und jeder Punkt der gegebenen Oberfläche auf der Ebene als der Durchschnittspunkt der Kurven dargestellt wird, welche den beiden Kurven, die auf der gegebenen Oberfläche durch den Punkt gehen, entsprechen. Die verschiedenen Arten der Kartenzeichnung ergeben sich daraus, dass entweder die Erdoberfläche auf die Ebene der Karte projiciert wird und man dann auf dieser zwei Systeme von Kreisen, oder ein System von Kreisen und ein System von graden Linien (Polarprojection) erhält, oder dass die Kurven der Erdoberfläche durch zwei Systeme grader Linien dargestellt werden.

Da nun die Figuren der Erde möglichst getreu abgebildet werden sollen, genau ähnliche Darstellung aber nur immer für einen bestimmten Ort der Erdoberfläche möglich ist, so wird die Ähnlichkeit, wenn sie auch immer in den kleinsten Teilen vorhanden sein wird, im grossen um so geringer sein, je weiter die betreffenden Orte vom Kartenmittelpunkte entfernt sind. Bezeichnet man die Koordinaten der gegebenen Oberfläche mit x y z, die der zweiten Oberfläche mit X Y Z, so wird, damit die Bogenelemente auf beiden Oberflächen einander ähnlich sind, die Gleichung stattfinden müssen:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = p^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad . \, (1)$$

oder

$$dS^2 = p^2 ds^2$$

worin der Factor p, welchen man den Kartenmodul nennt, im allgemeinen keine konstante Grösse ist, sondern eine Funktion von x y z, so dass das Verhältnis der Bogenelemente sich mit denselben Veränderlichen ändert. Am besten wird die Karte den Teil der Oberfläche darstellen, für welchen der Kartenmodul konstant ist, für welchen also die Veränderung von p gleich Null wird.

Wenn nun statt dieser Raumkoordinaten auf jeder Oberfläche zwei sich rechtwinklig schneidende Kurven als Koordinaten eingeführt werden, so dass die Lage jedes Punktes durch seine Abstände von denselben bestimmt wird, und wenn für diese Kurven die Koordinaten eines Punktes auf der gegebenen Oberfläche mit t und u und auf der Bildoberfläche mit T und U bezeichnet werden, so sind dieselben Funktionen von x y z resp. X Y Z und umgekehrt sind x y und z Funktionen von t u, wie auch X Y und Z Funktionen von T U und man setzt:

$$x = f_1(t\,u) \qquad y = f_2(t\,u) \qquad z = f_3(t\,u)$$
$$X = F_1(T\,U) \qquad Y = F_2(T\,U) \qquad Z = F_3(T\,U)$$

und es ist:

$$dx = \frac{d f_1(t\,u)}{dt}\,dt + \frac{d f_1(t\,u)}{du}\,du$$
$$dy = \frac{d f_2(t\,u)}{dt}\,dt + \frac{d f_2(t\,u)}{du}\,du$$
$$dz = \frac{d f_3(t\,u)}{dt}\,dt + \frac{d f_3(t\,u)}{du}\,du$$
$$dZ = \frac{dF_1(TU)}{dF}\,dT + \frac{dF_1(TU)}{dU}\,dU$$
$$dX = \frac{dF_2(TU)}{dT}\,dT + \frac{dF_2(TU)}{dU}\,dU$$
$$dZ = \frac{dF_3(TU)}{dT}\,dT + \frac{dF_3(TU)}{dU}\,dU$$

führt man der Kürze halber ein:

$$\frac{d f_1(t\,u)}{dt} = f'_1(t) \qquad \frac{d f_1(t\,u)}{du} = f'_1(u)$$

und dieselben Zeichen für die anderen Differentialquotienten, so wird aus der Differentialgleichung (1):

$$\left[F'_1(T)\,dT + F'_1(U)\,dU\right]^2 + \left[F'_2(T)\,dT + F'_2(U)\,dU\right]^2 + \left[F'_3(T)\,dT + F'_3(U)\,dU\right]^2 =$$
$$p^2 \left\{\left[f'_1(t)\,dt + f'_1(u)\,du\right]^2 + \left[f'_2(t)\,dt + f'_2(u)\,du\right]^2 + \left[f'_3(t)\,dt + f'_3(u)\,du\right]^2\right\}$$

aufgelöst und nach Potenzen von dT, dU, dt und du geordnet:

$$\left[F'_1(T)^2 + F'_2(T)^2 + F'_3(T)^2\right] dT^2 + 2\left[F'_1(T).\,F'_1(U) + F'_2(T).\,F'_2(U)\right.$$
$$\left. + F'_3(T).\,F'_3(U)\right] dT.\,dU + \left[F'_1(U)^2 + F'_2(U)^2 + F'_3(U)^2\right] dU^2 =$$
$$p^2 \left\{\left[f'_1(t)^2 + f'_2(t)^2 + f'_3(t)^2\right] dt^2 + 2\left[f'_1(t).\,f'_1(u) + f'_2(t)\,f'_2(u)\right.\right.$$
$$\left.\left. + f'_3(t).\,f'_3(u)\right] dt.\,du + \left[f'_1(u)^2 + f'_2(u)^2 + f'_3(u)^2\right] du^2\right\}$$

da nun T und U von t und u abhängig, also jede eine Funktion von t u sein muss, so ist:

$$dT = \frac{dT}{dt}\,dt + \frac{dU}{du}\,du \quad \text{und} \quad dU = \frac{dU}{dt}\,dt + \frac{dU}{du}\,du$$

setzt man: $F'_1(T)^2 + F'_2(T)^2 + F'_3(T)^2 = A$

$F'_1(T).\ F'_1(U) + F'_2(T).\ F'_2(U) + F'_3(T).\ F'_3(U) = B$

$F'_1(U)^2 + F'_2(U)^2 + F'_3(U)^2 = C$

und die entsprechenden Ausdrücke für t und u = a b c. so ist:

$$A\left[\left(\frac{dT}{dt}dt\right)^2 + 2\left(\frac{dT}{dt}dt.\frac{dT}{du}du\right) + \left(\frac{dT}{du}du\right)^2\right]$$

$$+ 2B\left[\frac{dT}{dt}dt.\frac{dU}{dt}dt + \frac{dT}{dt}dt.\frac{dU}{du}du + \frac{dT}{du}du.\frac{dU}{dt}dt + \frac{dT}{du}du.\frac{dU}{du}du\right]$$

$$+ C\left[\left(\frac{dU}{dt}dt\right)^2 + 2\left(\frac{dU}{dt}dt.\frac{dU}{du}du\right) + \left(\frac{dU}{du}du\right)^2\right]$$

$$= p^2\left[a\,dt^2 + 2b\,dt.\,du + du^2\right]$$

da diese Gleichung für alle Werte von dt und du also auch für $dt = o$ und $du = o$ gelten muss, so ergiebt sich, dass die Koefficienten der gleichen Potenzen der Differentiale dt und du einander gleich sein müssen, also:

$$\left.\begin{aligned} &A\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + 2B\left(\frac{dT}{dt}\right)\left(\frac{dU}{dt}\right) + C\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 = p^2a \\ &A\left(\frac{dT}{dt}\right)\left(\frac{dT}{du}\right) + B\left[\left(\frac{dT}{dt}\right)\left(\frac{dU}{du}\right) + \left(\frac{dT}{du}\right)\left(\frac{dU}{dt}\right)\right] + C\left(\frac{dU}{dt}\right)\left(\frac{dU}{du}\right) = p^2b \\ &A\left(\frac{dT}{du}\right)^2 + 2B\left(\frac{dT}{du}\right)\left(\frac{dU}{du}\right) + C\left(\frac{dU}{du}\right)^2 = p^2c \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Es sind also drei Gleichungen mit den drei unbekannten Funktionen p, T und U vorhanden, aus deren Lösung man die nötigen Relationen erhalten kann, um eine Figur von irgend einer Oberfläche auf eine beliebige andere zu übertragen.

Wenn beide Oberflächen Ebenen sind, so ist:

$$X = T,\ Y = U,\ Z = O$$

$$x = t,\ y = u,\ z = o \quad \text{und}$$

$$F'_1(T) = \frac{dF_1}{dT} = 1,\ F'_1(U) = \frac{dF_1}{dU} = 0$$

$$F'_2(T) = \frac{dF_2}{dT} = o \quad F'_2(U) = \frac{dF_2}{dU} = 1$$

$$F'_3(T) = F'_3(U) = o$$

$$f'_1(t) = \frac{df_1}{dt} = 1 \quad f'_1(u) = \frac{df_1}{du} = 0$$

$$f'_2(t) = \frac{df_2}{dt} = o \quad f'_2(u) = \frac{df_2}{du} = 1$$

$$f'_3(t) = f'_3(u) = o$$

$$\text{also } dX = dT \quad dY = dU \quad dZ = 0$$

$$dx = dt \quad dy = du \quad dz = 0$$

und Gleichung (1) geht über die Gleichung

$$dT^2 + dU^2 = p^2(dt^2 + du^2) \quad (3)$$

und da, wie ersichtlich ist,

$$A = 1 \quad B = 0 \quad C = 1$$
$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 1$$

so gehen die drei Differentialgleichungen (2) über in die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 = p^2 && (\alpha)\\
&\left(\frac{dT}{dt}\right)\left(\frac{dT}{du}\right) + \left(\frac{dU}{dt}\right)\left(\frac{dU}{du}\right) = 0 && (\beta)\\
&\left(\frac{dT}{du}\right)^2 + \left(\frac{dU}{du}\right)^2 = p^2 && (\gamma)
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wird die Gleichung (α) mit $\frac{dU}{du}$ und (β) mit $\frac{dU}{dt}$ multipliciert, so ist

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 \frac{dU}{du} + \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 \frac{dU}{du} = p^2 \frac{dU}{du}$$
$$\frac{dT}{dt}\,\frac{dT}{du}\,\frac{dU}{dt} + \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 \frac{dU}{du} = 0$$

und die Differenz

$$\frac{dT}{dt}\left[\frac{dT}{dt}\,\frac{dU}{du} - \frac{dT}{du}\,\frac{dU}{dt}\right] = p^2 \frac{dU}{du}$$

und bezeichnen wir die Determinante, welche in der Klammer steht, mit Δ, so ist:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{p^2}{\Delta}\,\frac{dU}{du} \qquad (5)$$

Gleichung (γ) mit $\frac{dT}{dt}$ und (β) mit $\frac{dT}{du}$ multipliciert und abgezogen, giebt:

$$\left(\frac{dT}{du}\right)^2 \frac{dT}{dt} + \left(\frac{dU}{du}\right)^2 \frac{dT}{dt} = p^2 \frac{dT}{dt}$$
$$\left(\frac{dT}{du}\right)^2 \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt}\,\frac{dU}{du}\,\frac{dT}{du} = 0$$

$$\frac{dU}{du}\left[\frac{dU}{du}\,\frac{dT}{dt} - \frac{dU}{dt}\,\frac{dT}{du}\right] = p^2 \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dU}{du} = \frac{p^2}{\Delta}\,\frac{dT}{dt} \qquad (6)$$

Gleichung (α) mit $\frac{dT}{du}$, (β) mit $\frac{dT}{dt}$ multipliciert und abgezogen, giebt

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 \frac{dT}{du} + \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 \frac{dT}{du} = p^2 \frac{dT}{du}$$
$$\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 \frac{dT}{du} + \frac{dU}{dt}\,\frac{dU}{du}\,\frac{dT}{dt} = 0$$

$$\frac{dU}{dt}\left[\frac{dU}{dt}\,\frac{dT}{du} - \frac{dU}{du}\,\frac{dT}{dt}\right] = p^2 \frac{dT}{du}$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{p^2}{\Delta}\,\frac{dT}{du} \qquad (7)$$

Gleichung (γ) mit $\frac{dU}{dt}$ und (β) mit $\frac{dU}{du}$ multipliciert und abgezogen, giebt

$$\left(\frac{dT}{du}\right)^2 \frac{dU}{dt} + \left(\frac{dU}{du}\right)^2 \frac{dU}{dt} = p^2 \cdot \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} \cdot \frac{dT}{du} \cdot \frac{dU}{du} + \left(\frac{dU}{du}\right)^2 \frac{dU}{dt} = 0$$

$$\frac{dT}{du}\left[\frac{dT}{du} \cdot \frac{dU}{dt} - \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dU}{du}\right] = p^2 \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{dT}{du} = -\frac{p^2}{\Delta} \frac{dU}{dt} \qquad (8)$$

Das Produkt sowohl aus (5) und (6), wie aus (7) und (8) ergiebt

$$\frac{p^4}{\Delta^2} = 1, \quad \text{also } \frac{p^2}{\Delta} = \pm 1 \quad \text{und wählt man das Zeichen } +, \text{ so ist}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{du} = \Theta, \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{dT}{du} = \Omega \qquad (9)$$

Da nun $dT = \frac{dT}{dt} dt + \frac{dT}{du} du$

und $dU = \frac{dU}{dt} dt + \frac{dU}{du} du$

so ist, wenn die Werte aus Gleichungen (9) eingesetzt werden:

$$dT = \Theta\, dt - \Omega\, du$$
$$dU = \Omega\, dt + \Theta\, du$$

wird die zweite Gleichung mit λ multipliciert und zur ersten addiert, so ist:

$$dT + \lambda dU = \Theta\, dt - \Omega\, du + \lambda\Omega\, dt + \lambda\Theta\, du$$
$$dT + \lambda dU = (\Theta + \lambda\Omega)\, dt + (\lambda\Theta - \Omega)\, du$$

Die rechte Seite soll in Faktoren zerlegt werden und sei

$$= (\Theta + L\Omega)\,(dt + l\, du)$$

so lassen sich λ, L und l dadurch bestimmen, dass die beiden Formen der rechten Seite identisch werden müssen, es ist also

$$\Theta\, dt - \Omega\, du + \lambda\Omega\, dt + \lambda\Theta\, du = \Theta\, dt + Ll\,\Omega\, du + L\Omega\, dt + l\Theta\, du$$

es muss also sein:

$$Ll = -1 \quad , \quad L = \lambda \quad , \quad l = \lambda$$

also $\lambda^2 = -1 \quad , \quad \lambda = \pm i \quad = L = l$

und es ist

$$\left.\begin{aligned} dT + idU &= (\Theta + i\Omega)\,(dt + idu) \\ dT - idU &= (\Theta - i\Omega)\,(dt - idu) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Da die linken Seiten der Gleichungen Differentiale von $T + iU$ resp. von $T - iU$ sind, so muss sein

$$\Theta + i\Omega = f'\,(t + iu)$$
$$\Theta - i\Omega = \varphi'\,(t - iu)$$

dann ist

$$T + iU = f(t + iu)$$
$$T - iU = \varphi(t - iu)$$

wo f und φ beliebige Funktionen sind; Es ist daher

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{f(t+iu) + \varphi(t-iu)}{2} \\ U &= \frac{f(t+iu) - \varphi(t-iu)}{2i} \\ p &= \sqrt{f'(t+iu)\,.\,\varphi'(t-iu)} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

da das Produkt der beiden Gleichungen (10) ergiebt

$$dT^2 + dU^2 = (\Theta + i\Omega)(\Theta - i\Omega)(dt^2 + du^2)$$

also $p^2 = (\Theta + i\Omega)(\Theta - i\Omega) = f'(t+iu)\,\varphi'(t-iu)$.

Es liegt nun sehr nahe, das Netz auf der gegebenen Oberfläche aus graden Linien zu zeichnen, welche den Koordinatenaxen parallel sind, von denen die der t Axe parallelen durch die Gleichung u = Konst. und die der u Axe parallelen durch t = Konst. bestimmt sind. Diesen parallelen Linien sollen in der Bildebene Kurven entsprechen.

Die Koordinaten der Bildebene waren T und U, also lautet die Gleichung für den Krümmungshalbmesser irgend einer Kurve

$$R = \pm \frac{(dT^2 + dU^2)^{3/2}}{dT.d^2U - dU.d^2T}$$

Es ist: $dT^2 + dU^2 = (dT + idU)(dT - idU) = d(T + iU).\,d(T - iU)$

$$T = \frac{(T+iU) + (T-iU)}{2}, \qquad U = \frac{(T+iU) - (T-iU)}{2i}$$

$$dT = \frac{d(T+iU) + d(T-iU)}{2}, \qquad dU = \frac{d(T+iU) - d(T-iU)}{2i}$$

$$d^2T = \frac{d^2(T+iU) + d^2(T-iU)}{2}, \qquad d^2U = \frac{d^2(T+iU) - d^2(T-iU)}{2i}$$

also:

$$dT.\,d^2U = \frac{d^2(T+iU).\,d(T+iU) - d^2(T-iU)\,d(T-iU)}{4i}$$
$$- \frac{d^2(T-iU)).\,d(T+iU) - d^2(T+iU)\,d(T-iU)}{4i}$$

$$-dU.\,d^2T = -\frac{d^2(T+iU).\,d(T+iU) - d^2(T-iU)\,d(T-iU)}{4i}$$
$$- \frac{d^2(T-iU)\,d(T+iU) - d^2(T+iU)\,d(T-iU)}{4i}$$

also:

$$dT.\,d^2U - dU.\,d^2T = -\frac{d^2(T-iU).\,d(T+iU) - d^2(T+iU).\,d(T-iU)}{2i}$$

und

$$R = \mp \frac{2i\,\left[d(T+iU).\,d(T-iU)\right]^{3/2}}{d^2(T-iU).\,d(T+iU) - d^2(T+iU).\,d(T-iU)}$$

aus den Gleichungen (11) folgt

$$\begin{aligned}
d\,(T + iU) &= f'(t + iu)\,(dt + idu)\\
d\,(T - iU) &= \varphi'(t - iu)\,(dt - idu)\\
d^2(T + iU) &= f''(t + iu)\,(dt + idu)^2\\
d^2(T - iU) &= \varphi''(t - iu)\,(dt - idu)^2
\end{aligned}$$

also:

$$R = \pm \frac{2\,i\left[f'(t + iu)\ \varphi'(t - idu).\ d\,(t + iu).\ d\,(t - iu)\right]^{3/2}}{\varphi''(t - iu)\,f'(t + iu)\,(dt - idu)^2\,(dt + idu) - f''(t + iu)\,\varphi'(t - iu)\,(dt + idu)^2\,dt - idu)}$$

Den Krümmungshalbmesser r der Kurven, welche den Parallelen zur u Axe entsprechen, erhalten wir, wenn wir t gleich der Konstante t_1 setzen, und den Krümmungshalbmesser ϱ der Kurven, welche den Parallelen zur t Axe entsprechen, wenn wir u gleich der Konstante u_1 setzen, woselbst t_1 und u_1 alle Werte der Reihe nach annehmen können, nur sind dt_1 und $du_1 = o$ und es ist

$$r = \mp 2\,i \frac{\left[f'(t_1 + iu)\ \ \varphi'(t_1 - iu)\ \ (du)^2\right]^{3/2}}{\left[\varphi''(t_1 - iu)\,f'(t_1 + in) + f''(t_1 + iu)\,(\varphi'(t_1 - iu)\right]\ (idu)^3}$$

$$r = \mp 2\,i \frac{\left[f'(t_1 + iu)\ \ \varphi'(t_1 - iu)\right]^{3/2}\ (du)^3}{\left[\varphi''(t_1 - iu)\,f'(t_1 + iu) + f''(t_1 + iu)\,\varphi'(t_1 - iu)\right]\left(-\ i\,(du)^3\right)}$$

$$r = \pm 2\ \frac{\left[f'(t_1 + iu).\ \varphi'(t_1 - iu)\right]^{3/2}}{\varphi''(t_1 - iu).\ f'(t_1 + iu)\ + f''(t_1 + iu).\ \varphi'\,t_1 - iu)} \tag{13}$$

$$\varrho = \mp 2\,i \frac{\left[f'(t + iu_1).\ \varphi'(t - iu_1)\right]^{3/2}\ (dt)^3}{\left[\varphi''(t - iu_1)\,f'(t + iu_1) - f''(t + iu_1)\ \varphi'(t - iu_1)\right]\ (dt)^3}$$

$$\varrho = \mp 2\,i \frac{\left[f'(t + iu_1).\ \varphi'(t - iu_1)\right]^{3/2}}{\varphi''(t - iu_1)\ f'(t + iu_1) - f''(t + iu_1)\ \varphi'(t - iu_1)} \tag{14}$$

Setzt man $\qquad \Psi\,(tu) = \dfrac{1}{\sqrt{f'(t + iu)\,\varphi'(t - iu)}} \qquad (15)$

differentiert diese Gleichung nach t und setzt nach der Differentiation $t = t_1$, so ist:

$$\frac{d\,\Psi\,(tu)}{dt\,(t = t_1)} = -\frac{f'(t_1 + iu).\ \varphi''(t_1 - iu) + \varphi'(t_1 - iu)\,f''(t_1 + iu)}{2\ \left[f'(t' + iu).\ \varphi'(t_1 - iu)\right]^{3/2}} \tag{16}$$

und differentiert man die Gleichung (15) nach u und setzt nach der Differentiation $u = u_1$, so ist:

$$\frac{d\,\Psi\,(tu)}{du\,(u = u_1)} = -i\,\frac{-f'(t + iu_1)\,\varphi''(t - iu_1) + \varphi'(t - iu_1)\,f'(t + iu_1)}{2\ \left[f'(t + iu_1).\ \varphi'(t - iu_1)\right]^{3/2}}$$

$$\frac{d\,\Psi\,(tu)}{du\,(u = u_1)} = -\frac{f'(t + iu_1)\,\varphi''(t - iu_1) - \varphi'(t - iu_1)\,f''(t + iu_r)}{2\,i\ \left[f'(t + iu_1).\ \varphi'(t - iu_1)\right]^{3/2}} \tag{17}$$

Aus den Gleichungen (13) und (17) ergiebt sich

$$\frac{1}{r} = \mp \frac{d\,\Psi\,(tu)}{dt\,(t = t_1)}\,. \tag{18}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d\,\Psi\,(tu)}{du\,(u = u_{,})} \qquad (19)$$

Sollen die Kurven in der Bildebene gerade Linien werden, so muss

$\frac{1}{r} = o$ und $\frac{1}{\varrho} = o$ sein, also $\frac{d\,\Psi\,(tu)}{dt\,\,(t = t_{,})} = o,\ \frac{d\,\Psi\,(tu)}{du\,(u = u_{,})} = o;$

es müssen daher die Zähler dieser Differentialquotienten $= o$ werden:

$$f'\,(t_{,} + iu)\,\varphi''\,(t_{,} - iu) + \varphi'\,(t_{,} - iu)\ \ f''\,(t_{,} + iu) = o$$
$$f'\,(t + iu_{,})\,\varphi''\,(t - iu_{,}) - \varphi'\,(t - iu_{,})\,f''\,(t + iu_{,}) = o$$

und
$$\frac{f''\,(t_{,} + iu)}{f'\,(t_{,} + iu)} = - \frac{\varphi''\,(t_{,} - iu)}{\varphi'\,(t_{,} - iu)}$$
$$\frac{f''\,(t + iu_{,})}{f_{,}\,(t + iu_{,})} = \frac{\varphi''\,(t - iu_{,})}{\varphi'\,(t - iu_{,})}$$

da $t_{,}$ und $u_{,}$ der Reihe nach alle Werte annehmen können, also auch die Werte t und u, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$\frac{f''\,\,(t + iu)}{f'\,\,(t + iu)} = o \quad \text{und} \quad \frac{\varphi''\,(t - iu)}{\varphi'\,\,(t - iu)} = o$$

und hieraus: $\qquad f''\,(t + iu) = o$ und $\varphi''\,(t - iu) = o;$

daher $\qquad f'\,(t + iu) = C$ und $\varphi'\,(t - iu) = C_{,}\,,$

$$f\,\,(t + iu) = C\,\,(t + iu) + C' \;=\; T + iU$$
$$\varphi\,(t - iu) = C_{,}\,(t - iu) + C'_{,} \;=\; T - iU$$

und es ist daher:

$$T = \frac{C + C_{,}}{2}\,t \quad + \frac{C - C_{,}}{2}\,iu \quad + \frac{C' + C'_{,}}{2}$$

$$iU = \frac{C - C_{,}}{2}\,t \quad + \frac{C + C_{,}}{2}\,iu \quad + \frac{C' - C'_{,}}{2}$$

Um die Konstanten zu bestimmen, kann man die Forderung aufstellen, dass der t Axe die T Axe und der u Axe die U Axe entspreche und für $t = o$ auch $T = o$, für $u = o$ auch $U = o$ werde, woraus sich dann ergiebt $C - C_{,} = o$, also $C = C_{,}$, ferner $C' + C'_{,} = o$ und $C' - C'_{,} = o$ d. h. $C' = o$ und $C'_{,} = o$ und es ist dann

$$T = Ct$$
$$U = Cu$$
$$p = C$$

woselbst C eine beliebige Konstante ist, oder man führt andere Konstante ein, indem man der Forderung genügt, dass T und U reelle Funktionen sein sollen und deshalb $\frac{C + C_{,}}{2}$ und $\frac{C' - C'_{,}}{2}$ rein immaginär sein müssen. Man erreicht dieses dadurch, dass man $C = e^{\varkappa + i\lambda}$, $C_{,} = e^{\varkappa - i\lambda}$, $\frac{C' + C'_{,}}{2} = M$, $\frac{C' - C'_{,}}{2} = iN$ setzt, wodurch $\frac{C + C'}{2} = e^{\varkappa} \cos \lambda \quad \frac{C = C'}{2} = e^{\varkappa}\, i \sin \lambda$ wird, wodurch die Gleichungen sich ergeben

$$T - M = e^{\varkappa}\,(t \cos \lambda - u \sin \lambda)$$
$$U - N = e^{\varkappa}\,(t \sin \lambda + u \cos \lambda)$$

da $t \cos\lambda - u \sin\lambda$ und $t \sin\lambda + u \cos\lambda$, die Koordinaten eines Punktes sind, bezogen auf ein Koordinatensystem, welches aus dem ursprünglich angenommenen durch Drehung um den Winkel λ entstanden ist und die Konstanten M und N die Bedeutung haben, dass ein neues Koordinatensystem den Anfangspunkt mit den Koordinaten M und M hat, da es ferner ganz gleichgültig ist, in welcher Lage und an welche Stelle man das Koordinatensystem legt, so kann man auch $\lambda = o$ und $M = o$, $N = o$ setzen, und erhält, indem man für $e^{\varkappa}$ die beliebige Konstante K setzt

$$\left.\begin{aligned} T &= Kt \\ U &= Ku \\ p &= K \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Es ist hier K konstant, also auch p konstant und die Karte überall gleich treu, die Figuren der gegebenen Oberfläche sind überall vollständig ähnlich übertragen und das Netz in der Bildebene besteht aus Linien, welche der T- und U Axe parallel sind und die Abstände der parallelen Linien in der TU Ebene verhalten sich zu denen der entsprechenden Parallelen in der tu Ebene, wie K : 1.

Die Kurven in der Bildebene sollen 2 Systeme von Kreisen werden, so müssen die Krümmungshalbmesser konstant sein.

Da für r nach Gleichung (13) die Variable u und für ϱ nach Gleichung (14) die Variable t war, so wird sein müssen:

$$\frac{dr}{du} = o \quad \text{und} \quad \frac{d\varrho}{dt} = o$$

Nun war nach Gleichungen (18) und (19), indem nur das obere Zeichen genommen wird

$$\frac{d\,\Psi\,(tu)}{dt\ (t = t_1)} = -\frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \frac{d\,\Psi\,(tu)}{du\ (u = u_1)} = \frac{1}{\varrho}$$

oder, da t_1 und u_1 alle Werte, also auch t und u, annehmen können:

$$\frac{d\,\Psi\,(tu)}{dt} = -\frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \frac{d\,\Psi\,(tu)}{du} = \frac{1}{\varrho}$$

und es geben beide Gleichungen die Bedingung

$$\frac{d^2\,\Psi\,(tu)}{dt\,.\,du} = o,$$

wobei es gleich ist, ob zuerst nach t oder nach u differentiiert wird.

Es sei $\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{f'(t + iu)}} \qquad z = \dfrac{1}{\sqrt{\varphi'(t - iu)}}$

so ist $\quad \Psi\,(tu) = y\,.\,z$

und $\quad \dfrac{d\,\Psi\,(tu)}{dt} = y'z + z'y \qquad \dfrac{d\,\Psi\,(tu)}{du} = i\,(y'z - z'y)$

und die eine sowohl, wie die andere Gleichung, ergiebt:

$$\frac{d^2\,\Psi\,(tu)}{dt\ du} = i\,(y''z - y'z' - z''y + z'y')$$

$$\frac{d^2\,\Psi\,(tu)}{dt\ du} = i\,(y''z - z''y)$$

und da dieser Differentialquotient Null werden soll, wird sein

$$y''z = z''y \text{ und } \frac{y''}{y} = \frac{z''}{z}$$

Da $\frac{y''}{y}$ nur von $t + iu$ eine Funktion ist, wie $\frac{z''}{z}$ eine von $t - iu$, so kann die Gleichung nur dann identisch erfüllt werden, wenn jeder dieser beiden Quotienten gleich derselben Konstanten wird; dieselbe sei c^2, so ist:

$$y'' = \frac{d^2y}{(d\,(t+iu))^2} = c^2y \quad \text{und } z'' = \frac{d^2z}{(d\,(t-iu))^2} = c^2z$$

Die Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = c^2y$ lässt sich integrieren und giebt

$$y = Ce^{cx} + C_1e^{-cx}$$

Es wird also sein:

$$y = \frac{1}{\sqrt{f'(t+iu)}} = Ce^{c(t+iu)} + C_1e^{-c(t+iu)} \tag{20}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(t-iu)}} = C'e^{c(t-iu)} + C'_1e^{-c(t-iu)} \tag{21}$$

aus Gleichung (20) folgt:

$$f'(t+iu) = \frac{1}{\left[Ce^{c(t+iu)} + C_1e^{-c(t+iu)}\right]^2}$$

$$f(t+iu) = \int \frac{d\,(t+iu)}{\left(Ce^{c(t+iu)} + C_1e^{-c(t+iu)}\right)^2}$$

Erweitert man diesen Bruch mit $e^{-2c(t+iu)}$, so ist

$$f(t+iu) = \int \frac{e^{-2c(t+iu)}}{\left(C+C_1e^{-2c(t+iu)}\right)^2}$$

setzt man $e^{-2c(t+iu)} = v$, so ist $dv = -2ce^{-2c(t+iu)} \cdot d\,(t+iu)$ und

$$f(t+iu) = -\frac{1}{2c}\int \frac{dv}{(C+C_1v)^2} = \frac{1}{2cC_1} \cdot \frac{1}{C+C_1v} + C_2 \tag{22}$$

und wenn man mit Gleichung (21) ebenso verfährt und $e^{-2c(t-iu)} = v'$ setzt, so erhält man: $\varphi(t-iu) = \frac{1}{2cC'_1} \cdot \frac{1}{C'+C'_1v'} + C'_2$ (23)

Erweitert man jedoch die betreffenden Brüche mit $e^{2c(t+iu)}$ und $e^{2c(t-iu)}$ und setzt $e^{2c(t+iu)} = w$, $e^{2c(t-iu)} = w^1$, so wird, da $dw = 2ce^{2c(t+iu)}\,d\,(t+iu)$

$$f(t+iu) = \frac{1}{2c}\int \frac{dw}{(Cw+C_1)^2} = -\frac{1}{2cC} \cdot \frac{1}{Cw+C_1} + C_3 \tag{24}$$

$$\varphi\,(t - iu) = \frac{1}{2c}\int\frac{dw'}{C'w' + C'_1)^2} = -\frac{1}{2c\,C'}\cdot\frac{1}{C'w' + C'_1} + C'_3 \tag{25}$$

Führt man nun wieder für v und w die ursprünglichen Werte ein und für $f\,(t + iu) = T + iU$ und $\varphi\,(t - iu) = T - iU$, so wird, wenn man die 2ten Brüche mit $e^{c\,(t \pm iu)}$ resp. $e^{-c\,(t \pm iu)}$ erweitert:

aus Gleichung (22)

$$T + iU = \frac{1}{2c\,C_1}\cdot\frac{e^{c\,(t + iu)}}{Ce^{c\,(t + iu)} + C_1e^{-c\,(t + iu)}} + C_2 \tag{α}$$

aus (24)

$$T + iU = -\frac{1}{2c\,C}\cdot\frac{e^{-c\,(t + iu)}}{Ce^{c\,(t + iu)} + C_1e^{-c\,(t + iu)}} + C_3 \tag{β}$$

aus (23)

$$T - iU = \frac{1}{2c\,C'_1}\cdot\frac{e^{c\,(t - iu)}}{C'e^{c\,(t - iu)} + C'_1e^{-c\,(t - iu)}} + C'_2 \tag{γ}$$

aus (25)

$$T - iU = -\frac{1}{2c\,C'}\cdot\frac{e^{-c\,(t - iu)}}{C'e^{c\,(t - iu)} + C'_1e^{-c\,(t - iu)}} + C'_3 \tag{δ}$$

Diese Gleichungen lassen sich nun auf verschiedene Weise kombinieren, um T und U zu erhalten; der Nenner hat jedesmal denselben Wert

$$N = \left(Ce^{c\,(t + iu)} + C_1e^{-c\,(t + iu)}\right)\left(C'e^{c\,(t - iu)} + C'_1e^{-c\,(t - iu)}\right)$$

schreibt man nun noch jedesmal die Faktoren C_1 C C'_1 C' der ersten Nenner, als $\frac{1}{C_1}$ $\frac{1}{C}$ $\frac{1}{C'_1}$ $\frac{1}{C'}$ in die Zähler, so geben (α) und (γ)

$$\left.\begin{aligned} 2\,T &= \frac{1}{2c}\;\frac{\frac{C'}{C_1}e^{2ct} + \frac{C'_1}{C_1}e^{2ciu} + \frac{C}{C'_1}e^{2ct} + \frac{C_1}{C'_1}e^{-2ciu}}{N} \\ 2\,iU &= \frac{1}{2c}\;\frac{\frac{C'}{C_1}e^{2ct} + \frac{C'_1}{C_1}e^{2ciu} - \frac{C}{C'_1}e^{2ct} - \frac{C_1}{C'_1}e^{-2ciu}}{N} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

(α) und (δ) geben:

$$\left.\begin{aligned} 2\,T &= \frac{1}{2c}\;\frac{\frac{C'}{C_1}e^{2ct} + \frac{C'_1}{C_1}e^{2ciu} - \frac{C}{C'}e^{2ciu} - \frac{C_1}{C'}e^{-2ct}}{N} \\ 2\,iU &= \frac{1}{2c}\cdot\frac{\frac{C'}{C_1}e^{2ct} + \frac{C'_1}{C_1}e^{2ciu} + \frac{C}{C'}e^{2ciu} + \frac{C_1}{C'}e^{-2ct}}{N} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

(β) und (γ) geben:

$$\left.\begin{aligned}
2\,T &= \frac{1}{2c}\cdot\frac{-\frac{C'}{C}\,e^{-2ciu} - \frac{C'_1}{C}\,e^{-2ct} + \frac{C}{C'_1}\,e^{2ct} + \frac{C_1}{C'_1}\,e^{-2ciu}}{N} \\
2\,iU &= \frac{1}{2c}\cdot\frac{-\frac{C'}{C}\,e^{-2ciu} - \frac{C'_1}{C}\,e^{-2ct} - \frac{C}{C'_1}\,e^{2ct} - \frac{C_1}{C'_1}\,e^{-2ciu}}{N}
\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

(β) und (δ) geben:

$$\left.\begin{aligned}
2\,T &= \frac{1}{2c}\cdot\frac{-\frac{C'}{C}\,e^{-2ciu} - \frac{C'_1}{C}\,e^{-2ct} - \frac{C}{C'}\,e^{2ciu} - \frac{C_1}{C'}\,e^{-2ct}}{N} \\
2\,iU &= \frac{1}{2c}\cdot\frac{-\frac{C'}{C}\,e^{-2ciu} - \frac{C'_1}{C}\,e^{-2ct} + \frac{C}{C'}\,e^{2ciu} + \frac{C_1}{C'}\,e^{-2ct}}{N}
\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

Da $\Psi\,(tu) = \dfrac{1}{\sqrt{f'\,(t+iu)\,.\,\varphi'\,(t-iu)}}$ war, so ergeben die Gleichungen (20) und (21)

$$\Psi\,(tu) = CC'e^{2ct} + C_{,}C'e^{-2ciu} + CC'_{,}e^{2ciu} + C_{,}C'_{,}e^{-2ct} \text{ und}$$

$$\frac{d\Psi\,(tu)}{dt\,(t=t_{,})} = 2c\left[CC'e^{2ct_{,}} - C_{,}C'_{,}e^{-2ct_{,}}\right] = -\frac{1}{r} \qquad (30)$$

$$\frac{d\Psi\,(tu)}{du\,(u=u_{,})} = 2ci\left[CC'_{,}e^{2ciu_{,}} - C_{,}C'e^{-2ciu}\right] = \frac{1}{\varrho} \qquad (31)$$

Da die Kreise reell sein sollen, so müssen die Radien und ihre Differentialquotienten jeden Grades reell sein; wird Gleichung (30) mehrmals differentiiert, so ist

$$\frac{d^2\,\Psi\,(tu)}{dt^2\,(t=t_{,})} = 4c^2\left[CC'e^{2ct_{,}} + C_{,}C'_{,}e^{-2ct_{,}}\right]$$

$$\frac{d^3\,\Psi\,(tu)}{dt^3\,(t=t_{,})} = 8c^3\left[CC'e^{2ct_{,}} - C_{,}C'_{,}e^{-2ct_{,}}\right] = 4c^2\,\frac{d\Psi\,(tu)}{dt\,(t=t_{,})}$$

Da $\dfrac{d\Psi\,(tu)}{dt\,(t=t_{,})}$ reell ist, muss auch c^2 reell, also c entweder reell, oder rein imaginär sein. Da die Werte für T reell, die für iU rein imaginär sein müssen und alle denselben Nenner haben, so wird man bestimmen können, dass der Nenner reell ist, woraus dann folgt, dass der Zähler für T reell und der für U rein imaginär wird. Der Nenner jedes Bruches ist $2c\,.\,N$, wo N denselben Wert hat wie $\Psi\,(tu)$; dieser sowohl, wie c sollen reell sein.

Die Gleichung (26) für T fordert, damit sich das imaginäre fortheben kann, für $\dfrac{C'_{,}}{C_{,}} = \alpha\,e^{i\varphi}\;\dfrac{C_{,}}{C'_{,}} = \alpha\,e^{-i\varphi}$, woraus folgt $\alpha = 1$

und Gleichung (29) für T fordert: $\dfrac{C}{C'} = e^{i\varphi_{,}}$

ferner Gleichung (27) für T: $\dfrac{C'_{,}}{C_{,}} = \dfrac{C}{C'}$

und Gleichung (28) für T: $\frac{C_{\prime}}{C'_{\prime}} = \frac{C_1}{C}$

also muss: $e^{i\varphi} = e^{i\varphi_1}$ d. h. $\varphi = \varphi_1$ sein.

Da Gleichung (26) für U fordert: $\frac{C'}{C_1} - \frac{C}{C'_1}$ rein imaginär oder Null und ebenfalls Gleichung (29) für U fordert: $\frac{C_{\prime}}{C'} - \frac{C'_{\prime}}{C}$ rein imaginär oder Null, so können diese Bedingungen nur erfüllt werden, wenn beide Differenzen $= o$ also $\frac{C_1}{C'} = \frac{C'_1}{C}$, wofür dann Gleichungen (26) und (29) für T fordern: $\frac{C_1}{C'}$ und $\frac{C'_1}{C}$ reell.

Allen diesen Bedingungen wird genügt, wenn

$$C = e^{\varkappa + i\lambda} \quad C'_1 = e^{-\varkappa + i\lambda} \quad C' = e^{\varkappa - i\lambda} \quad C_1 = e^{-\varkappa - i\lambda}$$

Es wird dann auch für Gleichung (30) $CC' = e^{2\varkappa}$, $C_1C'_1 = e^{-2\varkappa}$ reell und für Gleichung (31) $CC'_1 = e^{2i\lambda}$, $C_1C' = e^{-2i\lambda}$ imaginär.

Aus der Summe der Gleichungen (26) und (29) für T heben sich die Glieder mit u, und in der Summe der Gleichungen (27) und (28) für U die Glieder mit t fort und man erhält:

$$2\,T = \frac{1}{2c}\ \frac{e^{2(\varkappa + ct)} - e^{-2(\varkappa + ct)}}{e^{2(\varkappa + ct)} + e^{-2(\varkappa + ct)} + e^{2i(\lambda + cu)} + e^{-2i(\lambda - cu)}} + M$$

$$2\,iU = \frac{1}{2c} \cdot \frac{e^{2i(\lambda + cu)} - e^{-2i(\lambda + cu)}}{e^{2(\varkappa + ct)} + e^{-2(\varkappa + ct)} + e^{2i(\lambda + cu)} + e^{-2i(\lambda + cu)}} + iN$$

woselbst $\frac{C_2 + C'_2 + C_3 + C'_3}{2} = M$, $\frac{C_2 - C'_3 + C_3 - C'_2}{2} = iN$ gesetzt ist.

Da M und N nur eine Verschiebung des Koordinatensystemes in der TU Ebene bedeuten, kann man beide $= o$ setzen; Ferner ist

$$e^{2i(\lambda + cu)} + e^{-2i(\lambda + cu)} = 2\cos 2(\lambda + cu)$$

$$e^{2i(\lambda + cu)} - e^{-2i(\lambda + cu)} = 2i \sin 2(\lambda + cu)$$

$\varkappa$ und λ bedeuten nur eine Verschiebung des Koordinatensystemes in der tu Ebene und c eine Veränderung des Abstandes der parallelen Linien von einander und da dies beliebig angenommen werden kann, kann man t für $2(\varkappa + ct)$ und u für $2(\lambda + cu)$ setzen, so dass, wenn ferner $\frac{1}{4c} = K$ gesetzt wird:

$$T = K \frac{\frac{e^t - e^{-t}}{2}}{\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \cos u} \qquad (32)$$

$$U = K \frac{\sin u}{\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} + \cos u} \qquad (33)$$

und da $p = \frac{1}{\Psi(tu)}$ war:

$$p = \frac{1}{e^{t} + e^{-t} + 2\cos u} \qquad (34)$$

Die Gleichungen (30) und (31) für die Radien ergeben

$$\frac{1}{r} = -\frac{\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}}{K}, \quad \text{also} \quad r = -\frac{K}{\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}} \qquad (35)$$

$$\frac{1}{\varrho} = i\,\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2K} = -\frac{\sin u}{K}, \quad \text{also} \quad \varrho = -\frac{K}{\sin u} \qquad (36)$$

Die Gleichungen (32) und (33) mit sin u resp. $\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$ multipliciert und abgezogen ergeben

$$T \sin u = U\,\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \qquad (37)$$

aus (32) folgt
$$T\,\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} + T\cos u = K\,\frac{e^{t} - e^{-t}}{2} \qquad (38)$$

und daraus
$$T\cos u = K\,\frac{e^{t} - e^{-t}}{2} - T\,\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \qquad (39)$$

aus (33) folgt
$$U\,\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} = K\sin u - U\cos u \qquad (40)$$

Gleichungen (39) und (37) quadriert und addiert geben

$$T^2 = K^2 \left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)^2 - 2KT\,\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{4} + T^2 \left(\frac{e^{t} + e^{-t}}{2}\right)^2 + U^2 \left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)^2$$

und da $\left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{t} + e^{-t}}{2}\right)^2 - 1$ ist:

$$T^2 = K^2 \left(\frac{e^{t} + e^{-t}}{2}\right)^2 - K^2 - 2KT\,\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{4} + T^2 \left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)^2$$
$$+ T^2 + U^2 \left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)^4$$

Auf der rechten Seite bilden das 1te, 3te und 4te Glied das Quadrat von

$$T\,\frac{e^{t} - e^{-t}}{2} - K\,\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}; \text{ es ist also}$$

$$K^2 = \left[T \frac{e^t - e^{-t}}{2} - K \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right]^2 + U^2 \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2$$

welche Gleichung durch $\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2$ dividiert giebt

$$\frac{K^2}{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} = \left[T - K \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}\right]^2 + U^2 \qquad (41)$$

Gleichungen (40) und (37) quadriert und abgezogen geben

$$U^2 = K^2 \sin^2 u - 2\ KU \sin u \cos u + U^2 \cos^2 u - T^2 \sin^2 u$$
$$U^2 = K^2 - K^2 \cos^2 u - 2\ KU \sin u \cos u + U^2 - U^2 \sin^2 u - T^2 \sin^2 u$$

$$K^2 = \left[U \sin u + K \cos u\right]^2 + T^2 \sin^2 u$$

und

$$\frac{K^2}{\sin^2 u} = \left[U + K \operatorname{cotg} u\right]^2 + T^2 \qquad (42)$$

Die linken Seiten der Gleichungen (41) und (42) sind die Quadrate der Radien, wie die Gleichungen (35) und (36) ergeben, und es ist

$$r^2 = \left[T - K \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}\right]^2 + U^2 \qquad (43)$$

$$\varrho^2 = \left[U + K \operatorname{cotg} u\right]^2 + T^2 \qquad (44)$$

die Gleichungen zweier Kreise, deren erster nur von t, der zweite nur von u abhängig ist. Jeder Parallele zur u Axe entspricht für ein bestimmtes t ein Kreis mit Radius r und den andern Parallelen je ein Kreis mit dem Radius ϱ. Die Gleichung der u Axe ist $t = o$ und für diesen Wert ist nach Gleichung (32) sowohl wie (37) $T = o$ und $r = \infty$; der u Axe entspricht daher die U Axe und ebenso der t Axe die T Axe, da für $u = o$ nach Gleichung (37) $U = o$ und $\varrho = \infty$ wird. Die Centra der Kreise (43) liegen auf der T Axe im Abstande $= K \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$ vom Anfangspunkte und die der Kreise (44) auf der U Axe im Abstande $= - K \operatorname{cotg} u$ vom Anfangspunkte.

Da der Abstand der Kreise (43) $K \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$ immer grösser als der Radius r, welcher $K \frac{2}{e^t - e^{-t}}$, ist, da $e^t + e^{-t}$ für den kleinsten Wert von $t = o$ doch $= 2$ ist, so schneiden diese Kreise die U Axe nicht, während der Abstand der Kreise (44) $K \frac{\cos u}{\sin u}$ kleiner als der Radius ϱ, der $= K \frac{1}{\sin u}$ ist; diese Kreise schneiden daher sämmtlich die T Axe in zwei Punkten. Den kleinsten Abstand haben die Centra der Kreise (43) für $t = \pm \infty$ und dieses ist, da $e^{-\infty}$ ist, $\pm$ K und für denselben ist, da $e^{\infty} = \infty$ ist, $r = o$; es werden also aus den Kreisen (43) 2 Punkte, welche den Namen Grenzpunkte führen; Setzt man in Gleichung (44) $U = o$, so erhält man die Durchschnittspunkte dieser Kreise mit der T Axe durch die Gleichung

$$\varrho^2 \text{ oder } \frac{K^2}{\sin^2 u} = K^2 \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} + T^2$$

$$T^2 = K^2 \text{ und } T = \pm K$$

unabhängig von u; alle Kreise des Systems (44) gehen durch die beiden Grenzpunkte. Es ist der Abstand der Centra des Systems (43) von einem Grenzpunkte

$$= K \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} - K = K \frac{2e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \text{ immer kleiner als der Radius } \left(K \frac{e}{e^t - e^{-t}}\right)$$

nämlich $= re^{-t}$, also schneiden diese Kreise sämmtlich die T Axe zwischen den Grenzpunkten und dem Anfangspunkte, schneiden auch alle Kreise des andern Systems, da diese durch die Grenzpunkte gehen; sie schneiden dieselben aber auch rechtwinklig; denn wenn die Centrale von zwei Kreisen dieser beiden Systeme $= a$ ist, so ist, da sie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen Katheten die beiden Abstände $K \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$ und K cotg u sind:

$$a^2 = K^2 \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{e^{2t} - 2 - e^{-2t}} + K^2 \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}$$

addiert man $+ K^2 - K^2$, so wird

$$a^2 = K^2 \left(\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{e^{2t} - 2 + e^{-2t}} - 1\right) + K^2 \left(\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} + 1\right)$$

$$a^2 = K^2 \left(\frac{2}{e^t - e^{-t}}\right)^2 + K^2 \frac{1}{\sin^2 u}$$

gleich der Summe der Quadrate der beiden Radien; diese stehen also im Schnittpunkte der beiden Kreise auf einander senkrecht, und die Kreise schneiden sich rechtwinklig.

Für die Kreise des Systems (44) erhält man den kleinsten Abstand für $u = \frac{\pi}{2s}$ wofür cotg $u = o$ und der Abstand $= o$ wird; der Kreis hat die Gleichung des Radiu $\varrho = K$ und heisse der Hauptkreis.

Die Abstände der Parallelen beider Systeme in der tu Ebene müssen durch dieselbe Einheit gemessen werden und dieselbe wird, da u als die Variable von trigonometrischen Funktionen erscheint, ein Bogen des Kreises mit dem Radius $= 1$ sein. Die Centra der Kreise des Systemes (43) liegen für positive Werte von t auf der positiven T Axe und für negative Werte auf der negativen T Axe und stellen alle Parellelen zur u Axe dar, da die Radien sowohl, wie die Abstände der Centra für alle Werte für t von o bis ∞ verschiedene Werte von ∞ bis o resp. ∞ bis K annehmen. Die absoluten Werte für t_1 und $-t_1$ sind gleich, also sind auch die beiden Kreise zu beiden Seiten der U Axe gleich und haben gleiche Abstände. Anders ist es mit den Kreisen des zweiten Systemes. Es entspreche der Kreis um C (Fig. 1) einem Werte $u = \pi - \alpha$, so sind die Koordinaten T und U aus den Gleichungen (38) und (40)

$$T \left[\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \cos(\pi - \alpha)\right] = K \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$U\left[\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \cos(\pi - \alpha)\right] = K \sin(\pi - \alpha)$$

da $\frac{e^t + e^{-t}}{2}$ für jeden Wert von t zwischen $+\infty$ und $-\infty$ positiv ist und $\cos(\pi - \alpha)$, die Werte $+1$ bis -1 annehmen kann, und der Wert -1 durch den von $\frac{e^t + e^{-t}}{2}$, dessen kleinster Werth für $t = o$ immer noch $= 1$ ist, übertroffen wird, so wird $\frac{e^t + e^{-t}}{2}$ $+ \cos(\pi - \alpha)$ immer positiv sein und U immer positiv sein müssen, so lange $\sin(\pi - \alpha)$ positiv ist, d. h. für alle Werte von u zwischen o und $+\pi$ und negativ für alle Werte von o bis $-\pi$, so entsprechen den Parallelen für positives u nur die Kreisbogen auf der positiven Seite der U Axe und umgekehrt. Für Werte von $u > \pi$, also z. B. für $u = \pi + \beta$ ist $\sin(\pi + \beta) = \sin - (\pi - \beta)$ und ebenso cos; es würden also die Kreise für $u > \pi$ mit denen für u zwischen o und $-\pi$ zusammenfallen und es kann daher nur ein Streifen der tu Ebene zwischen $u = +\pi$ und $-\pi$ dargestellt werden, was jedoch von keinem Belang ist, da man die Längeneinheit beliebig gross nehmen kann.

Was die Zeichnung des Netzes betrifft, so lassen sich am einfachsten die Kreise des 2ten Systems darstellen, da alle durch die beiden Grenzpunkte G und G_1 gehen; Der Abstand OG ist beliebig, je nachdem man die Grösse der Kante haben will. Man findet den Durchschnittspunkt eines Kreises für den Wert $u = \pi - \alpha$, wenn man in der Gleichung (44) $T = o$ setzt; es ist denn

$$\frac{K}{\sin(\pi - \alpha)} = U + K\frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)}$$

$$U = \frac{K\left(1 - \cos(\pi - \alpha)\right)}{\sin(\pi - \alpha)} = K \operatorname{tang}\frac{\pi - \alpha}{2}$$

Es ist also $\angle OGA = \frac{\pi - \alpha}{2}$ und $OCG = (\pi - \alpha)$ als Centriwinkel auf dem Bogen AG, der gleich AG_1, für welchen OGA ein Peripheriewinkel ist. Man findet daher das Centrum des Kreises, wenn man an OG in G den Complementswinkel von $u = \pi - \alpha$ anträgt. Der untere Bogen des Kreises um C entspricht dem Werte $u = -\alpha$, für welchen Wert

$$-\frac{K}{\sin\alpha} = U - K\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$U = -K\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = -K \cdot \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$$

und es ist $\angle OGB = \frac{\alpha}{2}$, wenn $OGA = \frac{\pi - \alpha}{2}$ ist, man hat also nur nötig, die Centra für positives u zu bestimmen und die vollen Kreise zu zeichnen, um auch die für negatives u zu erhalten.

Aus dem ersten Kreissysteme sei der Kreis um C derjenige, welcher einem Werte $t = \alpha$ entspricht (Fig. II.). Dieser Kreis schneidet den Hauptkreis $\left(u = \frac{\pi}{2}\right)$ in den Punkten A und B rechtwinklig, OA ist eine Tangente an diesen Kreis, Winkel $AOC = \varphi$ wird sich durch α ausdrücken lassen und man findet die Sehne AB, welche die Polare zu C ist, und F als Durchschnittspunkt der AB mit OC. Verbinde C mit H, so wird dieselbe von der Polare und dem Kreise in M und L harmonisch geschnitten und da

Winkel MFC ein rechter ist, wird $\angle$ HFM = MFL sein, HFM ist = KFB, also KFB = MFL und KFL eine gerade Linie; man findet also L als Schnittpunkt der Linie KF mit dem Kreise und C als Schnittpunkt der KL mit der T Axe.

OC der Abstand des Centrum von O war $K\dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$, OA = K, also

$$\frac{CA}{OC} = \cos\varphi = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}, \text{ woraus sich ergiebt}$$

$$\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{e^{\alpha}}{e^{-\alpha}} \text{ und } \left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)^2 = e^{2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = e^{\alpha}$$

$$\log\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = \alpha \log e$$

wo für α der Reihe nach die Werte für t einzusetzen sind. Es sei z. B. die Längeneinheit $= \frac{\pi}{36}$, so ist der erste Wert $t_1 = \frac{\pi}{36} = 0{,}0872664$

$$\log e = 0{,}4342944$$

$$\log\operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\pi}{36}\log e = 0{,}0378993$$

$$\frac{\varphi_1}{2} = 42^0\ 30^1 \qquad \varphi = 85^0$$

Die Zeichnung dieser Kreise lässt sich noch vereinfachen.

Man erhält die beiden Durchschnittspunkte des Kreises um C mit der T Axe für $U = o$, d. h. für $u = o$ und $u = \pi$, so sind die Abscissen für diese Punkte Gleichung (38)

$$T_1\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}+1\right) = K\,\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}, \quad T_2\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}+1\right) = K\,\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$$

T_1 für D T_2 für E

$$T_1\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = K\,\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\left(e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$T_1 = K\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{2}}} \qquad T_2 = K\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}}}$$

Für den Durchschnittspunkt F ist

$$OF = T_3 = \frac{K^2}{OC} = K\,\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}$$

Aus der Vergleichung von T_3 mit T_1 ersieht man, dass F der Durchschnittspunkt eines Kreises für $t = 2\alpha$ sein wird und dass dessen zweiter Durchschnittspunkt die Gleichung

$$T_4 = K \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$$

dieselbe Gleichung wie OC haben wird.

Konstruiert man also zuerst den Kreis für $t = 2\alpha$, welcher durch F und C geht, zieht die Tangente TA an denselben, so ist C das Centrum und CA der Radius des Kreises für $t = a$; zieht man an diesen die Tangente DN, so ist E das Centrum und EN der Radius des Kreises für $t = \frac{\alpha}{2}$ u. s. w.

Was nun noch den Kartenmodul $p = \frac{1}{e^t + e^{-t} + \cos u}$ anbetrifft, so ist

$$\frac{dp}{du} = \frac{\sin u}{(e^t + e^{-t} + \cos u)^2} \qquad \text{für } u = o \text{ wird } \frac{dp}{du} = o$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{e^t - e^{-t}}{(e^t + e^{-t} + \cos u)^2} \qquad \text{für } t = o \text{ wird } \frac{dp}{dt} = o$$

Die Karte wird also die beste Abbildung geben am Durchschnittspunkte der beiden Koordinatenaxen, und da das Koordinatensystem in der tu Ebene beliebig gelegt werden konnte, kann man für einen beliebigen Ort die grösste Genauigkeit erzielen.

Die Kurven der Bildebene sollen aus einem System grader Linien und einem Systeme von Kreisen bestehen.

Da die graden Linien, welche einen Kreis rechtwinklig schneiden, durch das Centrum desselben gehen, so müssen sämtliche gerade Linien sich in einem Punkte schneiden und dieser Punkt muss das Centrum aller Kreise sein; Von den beiden Kreissystemen der vorigen Aufgabe gehen aber nur die des Systemes mit dem Radius ϱ durch denselben Punkt, man kann also erraten, dass diese es sein werden, welche in die graden Linien übergehen.

Die Gleichungen (30) und (31) lauten

$$\frac{1}{r} = -2c \left[CC' e^{2ct} - C_1C'_1 e^{-2ct}\right]$$

$$\frac{1}{\varrho} = 2ci \left[CC'_1 e^{2ciu} - C_1C' e^{-2ciu}\right]$$

und es müssen die Konstanten so bestimmt werden, dass $\frac{1}{\varrho} = o$ wird, ohne dass $\frac{1}{r} = o$ wird; Dieses wird dadurch erreicht, dass entweder C und $C' = o$, oder C_1 und $C'_1 = o$ wird. Es sei $C_1 = o$ und $C'_1 = o$, so wird aus der Gleichung vor (30)

$$\Psi(tu) = CC' e^{2ct} \text{ und}$$

$$\frac{d\Psi(tu)}{dt\,(t=t_1)} = -\frac{1}{r} = 2cCC' e^{2ct_1} \qquad \frac{d\Psi(tu)}{du\,(u=u_1)} = \frac{1}{\varrho} = o$$

die Gleichungen (20) und (21) ergeben

$$f(t+iu) = \int \frac{d(t+iu)}{C^2 e^{2c(t+iu)}} = \int \frac{d(t+iu)\, e^{-2c(t+iu)}}{C^2}$$

$$= -\frac{1}{2c} \frac{e^{-2c(t+iu)}}{C^2} + C_2$$

$$\varphi(t-iu) = \int \frac{d(t-iu)}{C'^2 e^{2c(t-iu)}} = \int \frac{d(t-iu)\, e^{-2c(t-iu)}}{C'^2}$$

$$= -\frac{1}{2c} \frac{e^{-2c(t-iu)}}{C'^2} + C'_2$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen und dann die Subtraktion giebt:

$$2T = -\frac{e^{-2ct}\left[C'^2 e^{-2ciu} - C^2 e^{2ciu}\right]}{2c\, C^2 C'^2} + C_2 + C'_2$$

$$2iU = -\frac{e^{-2ct}\left[C'^2 e^{-2ciu} - C^2 e^{2ciu}\right]}{2c\, C^2 C'^2} + C_2 - C'_2$$

Damit T reell wird, muss $C' = \alpha e^{-i\varphi}$ und $C = a e^{i\varphi}$ oder analog der früheren Bestimmung: $C' = e^{\varkappa - i\lambda}$ $C = e^{\varkappa + i\lambda}$ sein und es ist dann

$$2T = -\frac{e^{2(\varkappa - ct)} \cdot 2 \cos 2(\lambda + cu)}{2c\, e^{4\varkappa}} + C_2 + C'_2$$

$$= -\frac{e^{-2(\varkappa + ct)} \cdot 2 \cos 2(\lambda + cu)}{2c} + C_2 + C'_2$$

$$2iU = +\frac{e^{-2(\varkappa + ct)} \cdot 2i \sin 2(\lambda + cu)}{2c} + C_2 - C'_2$$

Wird nun wieder, wie vorher t für $2(\varkappa + ct)$ und u für $2(\lambda + cu)$, $\frac{C_2 + C'_2}{2} = M$ und $\frac{C_2 - C_{,2}}{2} = iN$ beide $= o$ gesetzt, so ist, wenn $\frac{1}{4c} = K$:

$$\left.\begin{aligned} T &= -2Ke^{-t} \cos u \\ U &= 2Ke^{-t} \sin u \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

$$r = -2Ke^{-t} \qquad (46)$$

$$\Psi(tu) = e^{t} \text{ und } p = e^{-t} \qquad (47)$$

aus Gleichungen (45) folgt

$$T^2 + U^2 = 4K^2 e^{-2t} \qquad (48)$$

$$T \sin u + U \cos u = o \qquad (49)$$

Fig. I.

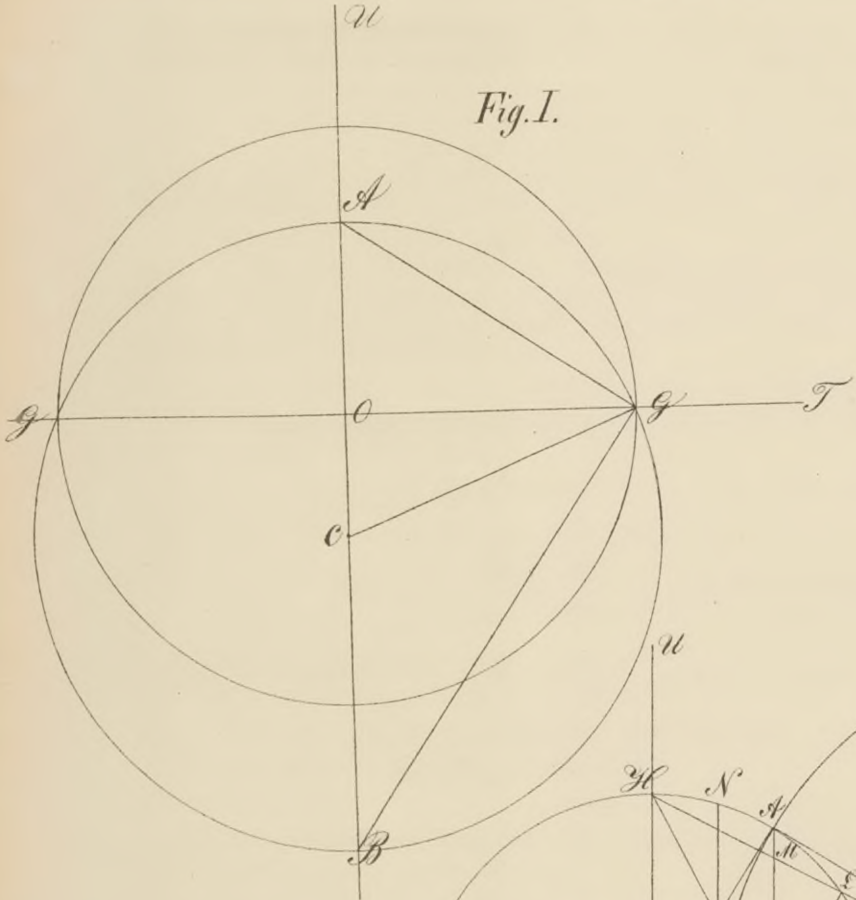


Fig. II.

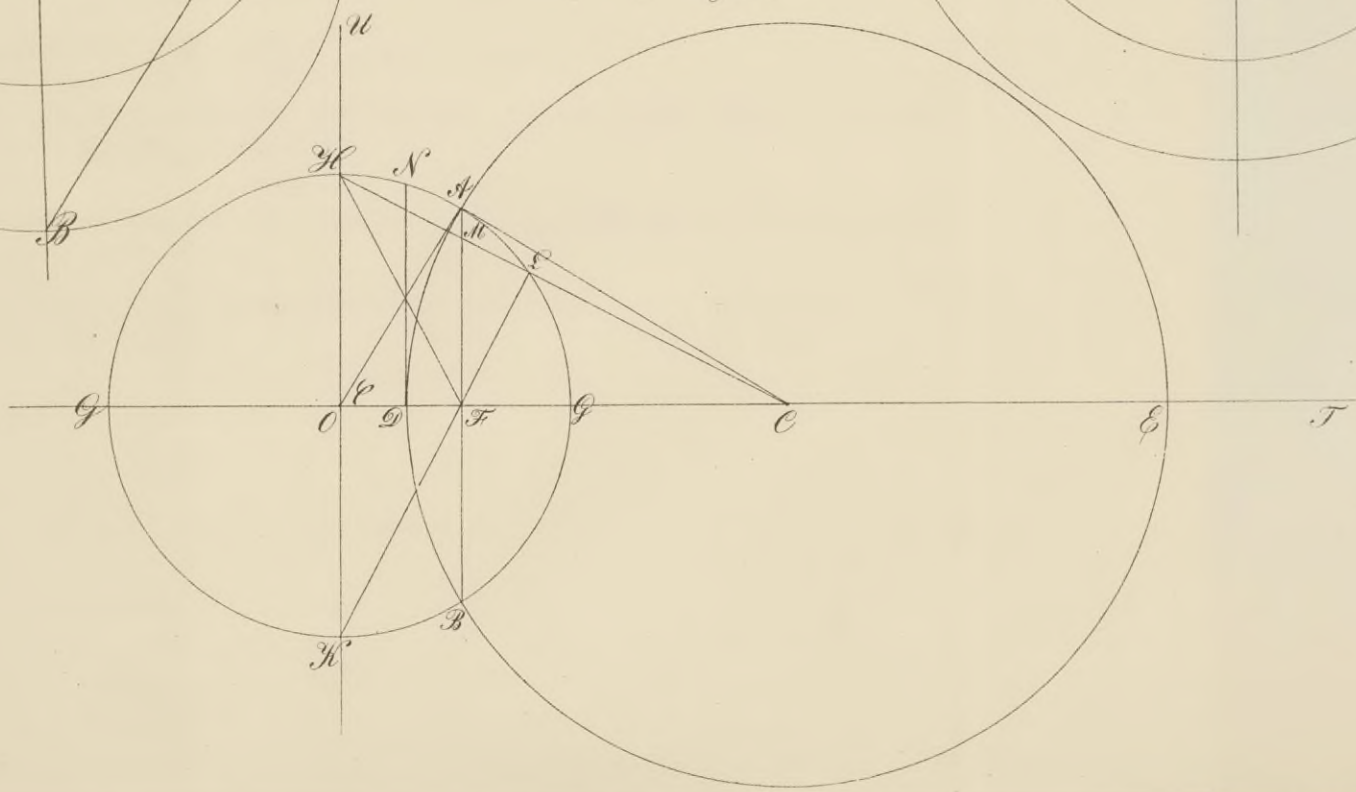
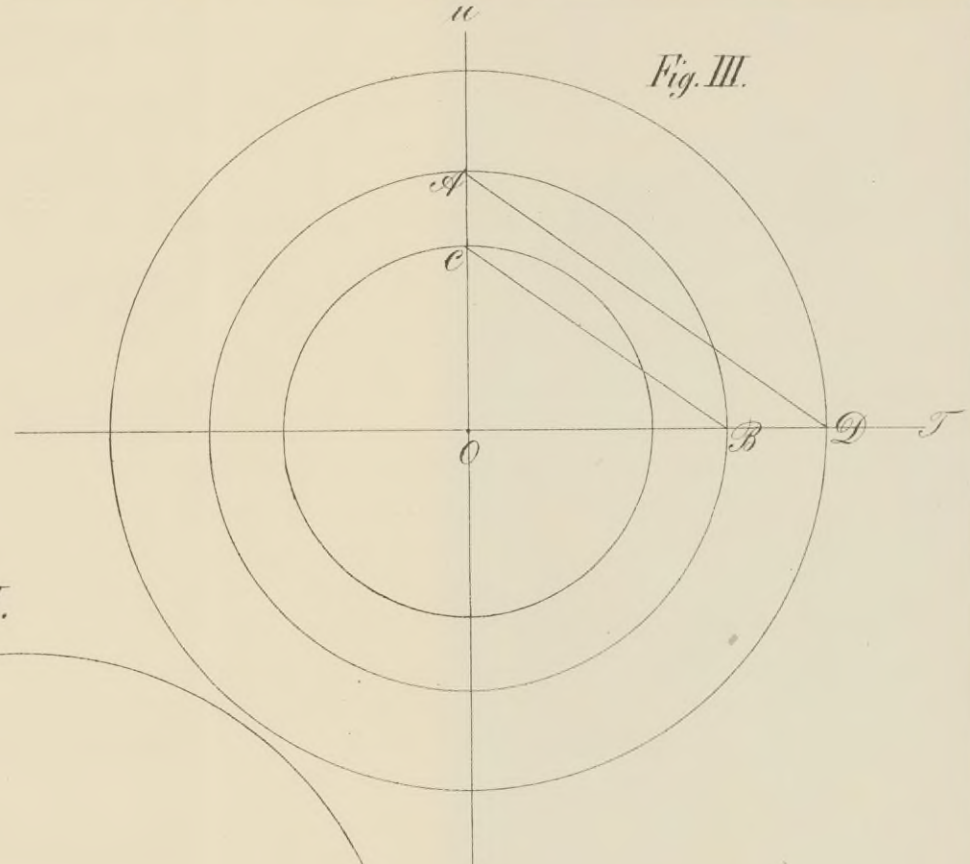


Fig. III.



Bes

und

aus G

$$T \sin u + U \cos u = o \qquad (49)$$

(48) Gleichung concentrischer Kreise um den Anfangspunkt des Koordinatensystems beschrieben; (49) Gleichung grader Linien, welche durch den Anfangspunkt gehen.

Für $t = o$ ist $T^2 + U^2 = 4K^2$ d. h. der u Axe entspricht ein Kreis mit dem Radius 2K; für $t = +\infty$ ist $T^2 + U^2 = o$, $T = o$ und $U = o$ und für $t = -\infty$ ist $T^2 + U^2 = \infty$, ein Kreis mit unendlich grossem Radius. Der Kreis mit dem Radius 2K ist der Hauptkreis, innerhalb dessen alles liegt, was dem Teile auf der positiven Seite der t Axe entspricht und ausserhalb dessen das liegt, was dem Teile der tu Ebene auf der negativen Seite der t Axe entspricht.

Für $u = o$ ist $U = o$ und T negativ; Die graden Linien fangen mit der negativen T Axe an und schliessen mit derselben die Winkel u ein und zwar, da für Werte von u zwischen o und π U positiv wird, entsprechen die Linien auf der positiven Seite der U Axe denen auf der positiven Seite der U Axe.

Es sei (Fig. III.) der Kreis mit OA der Hauptkreis für $t = o$, also $OA = OB = 2K$; OC der Radius des Kreises für $t = \alpha$, OD der Radius des Kreises für $t = -\alpha$, so ist nach Gleichung (46)

$$OC = 2K\,e^{-\alpha} \qquad OD = 2K\,e^{\alpha}$$

und es ist, wenn $\angle$ OBC $= \varphi$ und ODA $= \varphi_1$,

$$\frac{OB}{OC} = \frac{2K}{2K\,e^{-\alpha}} = e^{\alpha} = \operatorname{cotg} \varphi$$

$$\frac{OD}{OA} = \frac{2K\,e^{\alpha}}{2K} = e^{\alpha} = \operatorname{cotg} \varphi_1$$

Es ist also AD parallel CB und man hat nur für positive Werte von t den Winkel φ zu berechnen aus der Gleichung

$$\alpha \log e = \log \operatorname{cotg} \varphi,$$

wobei zu bemerken ist, dass hier der Winkel φ halb so gross ist, als der für Figur II. zu berechnende.

$$\frac{dp}{du} \text{ ist für jeden Wert von } u = o$$

$$\frac{dp}{dt} = -e^{-t} \text{ ist} = o \text{ für } t = \infty$$