Systematische

Entwickelung der gesamten Algebra.

III. Teil:
Die Gleichungen I. und II. Grades, mit Ausschluss der Anleitung zum Lösen von Wortgleichungen.

Von

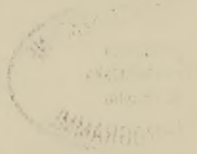
Dr. E. Suchsland.

2. Wissenschaftliche Beilage für das Programm des Gymnasiums zu Stolp.

STOLP, 1882.

F. W. Feige's Buchdruckerei in Stolp (Exped. der „Stolper Post").

1882. Progr. No. 122.



Vorwort.

Zunächst benutze ich diese Gelegenheit, um sowohl den Collegen, welche mir ihr geschätztes Urteil über die im vorigen Jahre erschienene Arbeit brieflich haben zugehen lassen, als auch dem geehrten Recensenten im Archiv für Mathemat. u. Phys. für seine eingehende Besprechung den gebührenden Dank zu sagen. Es ist mir lieb gewesen zu hören, dass das von mir angestrebte Ziel Anerkennung gefunden hat, und dass auch der betretene Weg als richtig bezeichnet wird.

Freilich hat es auch nicht an Stimmen gefehlt, welche das Vorhaben der systematischen Bearbeitung für die Theorie wohl billigen, aber nicht glauben, dass ein derartiger Leitfaden beim Unterricht mit Erfolg benutzt werden kann. Ich gebe gern zu, dass dieser Eindruck beim ersten Lesen leicht hervorgerufen wird, aber bei näherer Prüfung erkennt man, dass derselbe daher rührt, dass wir alle einen anderen und scheinbar bequemeren Lehrgang gewöhnt sind. Als scheinbar bequemer muss der übliche Lehrgang bezeichnet werden, weil man es sich in ihm allerdings mit den unvollständig geführten Beweisen in jedem einzelnen Fall leicht macht, aber dafür erlangt der Lernende auch nie ein volles Verständnis und es ist eine häufigere Besprechung der Fundamentalprincipien nötig, als sie bei der systematischen Entwickelung vorgenommen zu werden braucht.

Im übrigen bin ich gar nicht der Meinung, dass die Schüler alle Beweise für den ganzen Aufenthalt in der betreffenden Klasse merken sollen. Es genügen, um den jugendlichen Geist mit dem aus dem mathematischen Unterricht sich ergebenden eigentümlichen Gepräge zu versehen, im allgemeinen die geometrischen Beweise, aber ganz der Algebra zu entraten, ist wegen ihrer heutigen grossen Anwendbarkeit unmöglich und da meine ich, darf man nicht durch lückenhafte Beweisführung das zum Teil verderben, was durch die strenge Euklidische Methode auf geometrischem Wege gewonnen worden ist.

In der Geometrie mutet man dem Quartaner zu, ganz andere Schwierigkeiten zu überwinden als sie dem Untertertianer die Anfangsgründe der Algebra bieten, und es kommt mir immer so vor, als wollte man in derselben Absicht dem Schüler die Algebra in Beispielen beibringen, wie man übelschmeckende Arzeneien dem Patienten in Kapseln verabreicht. So sicher aber wie die Kapseln nichts helfen, wenn sie hohl sind, so sicher geht der Geist des Schülers beim Rechnen von Beispielen leer aus, wenn mit den formellen Handierungen kein Inhalt verknüpft ist.

Wenn der Schüler von dem ersten Teil das genau kennt, was auf den 15 ersten Seiten steht und das Übrige so verstanden hat, dass er es einmal selbst klar wiederzugeben im stande gewesen ist, so schlägt bei ihm die Überzeugung Wurzel, dass er es auch in der Algebra mit einem sicher gefugten Bau zu thun hat.

Ich selbst habe es versucht, nach Teil I im Sommer 1881 in Untertertia, einer Klasse mit 51 Schülern, zu unterrichten und glaube bemerkt zu haben, dass das Interesse für den Unterrichtszweig lebhafter war, als bei der früheren Methode, wo ich nur die Aufgabensammlung von Bardey dem Cursus zu grunde gelegt habe. Der Erfolg in den Leistungen entsprach meinen Erwartungen und auch der College, welcher mich im zweiten Quartal während einer militairischen Dienstleistung 6 Wochen vertrat, hat seine vollständige Zufriedenheit ausgesprochen. Vielleicht hat auch ein anderer College einmal Lust einen praktischen Versuch mit dem ersten Teil zu machen. Für ihn bemerke ich, dass der Teil für 50 Pfg. aus der Buchhandlung von C. Schrader in Stolp zu beziehen ist. Desgleichen wird eine geringe Anzahl von Exemplaren dieses Teiles auf buchhändlerischem Wege aus derselben Handlung zu haben sein.

Auffällig muss es erscheinen, dass dem vorjährigen ersten Teil sogleich der dritte folgt. Das geschieht, weil ich durch diese Publikationen den Fachgenossen Gelegenheit geben will, den von mir gewünschten Lehrgang der Algebra, der später in ein Lehrbuch zusammengefasst werden soll, zu prüfen und mir gütigst Urteile über Mängel zukommen zu lassen. Am liebsten würde es mir natürlich sein, wenn ich das ganze Gebiet auf diese Weise zur Prüfung vorzulegen vermöchte. Da dies aber zu lange Zeit dauern würde, so muss ich mich auf einzelne Partieen beschränken, wähle nun aber diejenigen aus, welche am besten einen Einblick in das Ganze gewähren. So beabsichtige ich, im nächsten Jahre eine nach festen Gesichtspunkten geordnete Anleitung zum Lösen von Wortgleichungen zu geben und verbinde hiermit die Mitteilung, dass die Arbeit für den Fall ihres Erscheinens eine Beilage des Dessauer Gymnasial-Programms sein wird.

§. 1.

Wie wir aus früheren[1]) Betrachtungen wissen, können wir alle Vorgänge in der Erscheinungswelt mit Hülfe von Zahlen und Rechenzeichen symbolisch wiedergeben. Die Gesamtheit des mathematischen Bildes wurde Aggregat genannt und das Resultat des Aggregates entspricht dem Endzustand, zu welchem der fixierte Vorgang die in betracht kommenden Verhältnisse geführt hat. Demnach ist das Ergebnis eines durch mathematische Symbole dargestellten Vorganges oder einer dargestellten Handlung für uns so lange nicht zweifelhaft, als das Resultat des Aggregates ein deutig ist. Das aber ist der Fall, wenn in dem Aggregat keine Rechenzeichen vorkommen, welche einer mehrfachen Deutung unterworfen sind. Als solche mehrdeutige Zeichen sind uns nur die Wurzeln bekannt, und so schliessen wir, dass alle Vorgänge, in deren analytischen Bildern kein Wurzelzeichen auftritt, nur zu einem Ziele führen.

Wenn das Resultat den Endzustand repräsentiert, zu dem der in dem Aggregat dargestellte Vorgang gewisse Verhältnisse geführt hat, so haben wir uns noch Rechenschaft zu geben, wo wir die doch jedenfalls bestehenden Zwischenstationen in dem Verlauf der Handlung suchen müssen. Dabei stossen wir auf einen Unterschied in der Bedeutung der Rechenzeichen der höheren Ordnung und der Klammern einerseits und der Rechenzeichen der niederen Ordnung andrerseits. Da wir nämlich die höheren Rechenzeichen vor den ihnen zunächst vorhergehenden niederen ausführen, so tritt bei dem Zusammenstehen höherer und niederer Rechenzeichen gleichsam ein Stillstand in der Rechnung des Aggregates ein, und eine Änderung des vorigen Teilresultates geschieht erst wieder durch Ausführung des momentan überschlagenen Rechenzeichens. Darum müssen wir als Partialhandlungen die einzelnen Glieder des Aggregates und als Zwischenstationen jedes Stück des Aggregates bis vor ein Rechenzeichen der niederen Ordnung ansehen.

---

[1]) Syst. Entw. der gesamten Algebra, Teil I.

§. 2.

Weil jeder, der die vereinbarten Regeln des Rechnens inne hält, bei ein und demselben Aggregat stets zu einem und demselben Resultat gelangt, nennen wir das Resultat dem Aggregat gleich und verbinden es mit ihm durch ein Gleichheitszeichen. Das thun wir selbst dann, wenn in dem Aggregat mehrdeutige Rechenzeichen sind. Nur muss in einem solchen Falle durch eine vorangeschickte Bemerkung zu erkennen gegeben sein, wie das an sich mehrdeutige Rechenzeichen in dem betreffenden Aggregat zu verstehen ist.

Wir nennen das neue durch Verbindung mit einem Gleichheitszeichen aus einem Aggregat und seinem Resultat hervorgegangene Gebilde eine Gleichung. Das Aggregat heisst linke, das Resultat rechte Seite der Gleichung. Im übrigen behalten wir die frühere Bezeichnung der das Aggregat constituierenden Elemente bei. (Glied, Faktoren, Quotienten, Potenzen etc).

Beispiel: In einem Bienenstock waren am 29. April 15000 Arbeitsbienen, 2639 Drohnen und 1 Königin mit einem Honigvorrat von 16000 gr. Günstiges Wetter gestattete jeder Biene täglich $^1/_4$ gr. 3 Tage lang einzutragen und sich ausserdem zu sättigen. Darauf trat Regenwetter ein, und alle Bienen mussten vom Vorrat leben. Nach 2 Tagen hörte der Regen auf, und bei hellem Sonnenschein arbeiteten die Bienen wieder. Diesmal aber konnten sie 4 Tage lang nur $^1/_3$ der vorigen Honigmenge täglich sammeln, weil sie zum Teil auf Wachs zum Bau der Waben, zum Teil auf Blütenstaub zur Ernährung der Jungen bedacht sein mussten. Welches ist die mathematische Ausdrucksweise für den Vorgang und die durch ihn gewonnene Honigmenge, wenn jede Biene zu ihrer Ernährung täglich $^1/_{60}$ gr. gebraucht?

$$\begin{aligned}&16000\\+&\left\{(15000 \cdot \tfrac{1}{4}) - (2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right\} \cdot 3 - \left\{(15000 + 2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right\} \cdot 2\\&+ \left\{(15000 \cdot \tfrac{1}{4}) : 3\right\} \cdot 4 - \left\{(2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right\} \cdot 4 = 31354.\end{aligned}$$

§. 3.

Nachdem wir ein Aggregat und sein Resultat durch ein Gleichheitszeichen verbunden haben, müssen wir alle Folgerungen ziehen, welche sich aus diesem Schritt und etwa bestehenden Gesetzen ergeben. Ein solches Gesetz ist z. B. der Grundsatz: Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, so etc. Derselbe drängt uns zu einer weiteren Anwendung des Gleichheitszeichens, wenn wir bemerken, dass zwei Aggregate dasselbe Resultat haben, etwa

$$(7 + 2) . 3 - 5 + 6 : 2 = 25$$

und

$$48 - 6 . 7 + (4 - 1) . 2 + 13 = 25.$$

Nach ihm müssen wir setzen

$$(7 + 2) . 3 - 5 + 6 : 2 = 48 - 6 . 7 + (4 - 1) . 2 + 13$$

und es erscheint dadurch eine Gleichung, deren beide Seiten Aggregate sind. Äusserlich können wir es den Aggregaten nicht ansehen, dass sie einander gleich sind. Dieser Umstand beruht eben nur darauf, dass beide Aggregate, wenn die angedeuteten Rechenoperationen ausgeführt werden, dasselbe Resultat ergeben.

§. 4.

Wie die oberen beiden Aggregate, so giebt es noch viele andere, welche einander gleich sind und deren Äusseres die Gleichheit nicht erkennen lässt. Aber andrerseits existieren auch viele Aggregate, an deren Form und Zahlen wir es sofort merken, dass sie einander gleich sind. Gleichungen, die aus dergleichen Aggregaten zusammengesetzt sind, haben wir in den Betrachtungen über die Rechenoperationen ausführlich aus dem Wesen der Rechenregeln begründet; sie werden analytische Gleichungen genannt und gelten für jeden Wert der in ihnen vorkommenden Zahlen, da die Gleichheit aus dem Wesen der Rechenoperationen entspringt, also eine Folge der über die Neubildung von Zahlen aufgestellten Regeln ist. Man nennt die analytischen Gleichungen wegen ihrer allgemeinen Bedeutung auch arithmetische Lehrsätze.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a^m)^n = a^{m.n},\ \overset{c}{\breve{\lg}}(a.b) = \overset{c}{\breve{\lg}}a + \overset{c}{\breve{\lg}}b.$$

Unter die Kategorie der analytischen Gleichungen fallen noch alle die Gleichungen, in welche wir allgemeine aus der Anschauung abgeleitete Wahrheiten symbolisch einkleideten, wie $a . m = m . a$, und diejenigen, welche Definitionen oder Erweiterungen derselben in einer für Rechnungen brauchbaren Form wiedergeben sollten z. B. $m . \frac{a}{b} = \frac{m}{b} . a$.

§. 5.

Zuletzt in dieser Aufzählung der verschiedenen Arten von Gleichungen wollen wir die erwähnen, welche häufig zuerst bei der Besprechung der Gleichungen steht. Wir meinen die Gleichungen von der Form $a = a$.

a = a wird eine identische Gleichung genannt und gewöhnlich interpretiert: Jede Grösse ist sich selbst gleich. Wir möchten indes eine andere Deutung vorschlagen, welche ein leichteres Verständnis ermöglicht. Zu ihr gelangen wir durch folgende Anschauung, die wir der Einfachheit wegen auf ebene Figuren beschränken: Es giebt zu jeder ebenen Figur viele andere gleichartige, welche so beschaffen sind, dass sie auf die erste gelegt mit ihr in eine zusammenfallen. Daher kann man jede ebene Figur in mindestens zwei andere gespalten oder, anders ausgedrückt, doppelt denken. Man könnte in diesem Sinn a = a wohl so in Worte kleiden, dass man sagt: Jede Grösse kann doppelt gedacht und so sich selbst gleich gesetzt werden.

§. 6.

Von den vier Arten Gleichungen, die sich uns dargeboten haben, ist eingehend das Bestehen vieler analytischer Gleichungen nachgewiesen. In ihnen haben wir die Mittel, für etwaige algebraische Ausdrücke andere gleichwertige zu substituieren und dann eine passende Deutung des im Aussehen veränderten Aggregates vorzunehmen. Vorläufig vermögen wir nicht den analytischen Gleichungen eine neue Bedeutung abzugewinnen. Dasselbe müssen wir von den identischen Gleichungen sagen.

Ganz anders verhält es sich mit den beiden zuerst angegebenen Gattungen von Gleichungen. An sie können wir mit einer umkehrenden Frage herantreten und sagen zunächst bei einer Gleichung, deren rechte Seite ein Resultat ist: Die Gleichung stellt von links nach rechts gelesen einen Vorgang dar, der zu dem durch das Resultat angegebenen Endzustand geführt hat, können wir auch umgekehrt vom Endzustand eines Vorganges aus zu seinem Anfangszustand gelangen? Hierauf ist zu antworten: Ja, wenn wir vom Resultat anfangend, die Partialhandlungen in umgekehrter Reihenfolge wie sie zuerst aufgetreten sind, ungeschehen machen. Äusserlich thun wir das, indem wir die Glieder des Aggregates mit entgegengesetzten Zeichen auf die Seite des Resultates bringen.

Beispiele:

$3 . 7 - (5 . 2 + 4) : 2 + 12 = 26.$ | $26 - 12 + (5 . 2 + 4) : 2 = 3 . 7.$

Ist der Anfangszustand in einem umfangreicheren Gliede, etwa in einer Klammer enthalten, so werden die vorhandenen höheren Rechenoperationen in umgekehrter Reihenfolge durch die entsprechend entgegengesetzten aufgehoben.

$(11 . 5 + 3) : 2 - 4 = 25$ | $(25 + 4) . 2 - 3 = 11 . 5.$

§. 7.

Wenn wir die zur Bildung des Resultates gethanen Rechenoperationen in der angegebenen Weise ungeschehen machen, so kann gar kein Zweifel sein, dass wir zum Anfangszustand zurückgelangen. Wir bekommen zum Zeichen, dass wir am Ziele sind, durch Ausführung der Rechenoperationen in dem neuen Aggregat eine analytische oder identische Gleichung. Sollte sich etwa keine analytische oder identische Gleichung ergeben, so würde das ein Beweis dafür sein, dass entweder eine Anzahl Glieder oder Zahlen aus dem Aggregat verloren gegangen sind. Ist die Stelle, wo die unbekannte Grösse gestanden hat und die Rechenoperation, durch die sie dem Aggregat einverleibt gewesen ist, noch angegeben, so können wir auf Grund der Eindeutigkeit der obigen Betrachtungen hoffen, dass wir die abhanden gekommene Grösse wiederfinden. Um uns von der Berechtigung unserer Hoffnung zu überzeugen, nehmen wir an, dass das Glied, welches den Anfangszustand wiedergab, unbekannt ist Es fehlt also die eine Seite einer analytischen oder identischen Gleichung. Daraus schliessen wir, dass, wenn uns das Anfangsglied einer Gleichung verloren gegangen ist, wir dasselbe wiederzufinden im stande sind, abgesehen von seiner Form. Denn wenn wir z. B. 30 als linke Seite der analytischen Gleichung finden, so wissen wir nicht, ob das Anfangsglied 30 war, oder 2 . 15, oder 5 . 6 oder 2 . 3 . 5 etc.

Ist nicht das Anfangsglied, sondern ein anderes unbekannt, so gelangen wir durch dieselben Betrachtungen zu demselben Schluss wie soeben, wenn wir uns erinnern, dass wir in einem Aggregat jedes Glied zum Anfangsglied machen können, ohne den Wert des Aggregates zu ändern.

Auch wenn nicht ein ganzes Glied, sondern nur eine Zahl eines Gliedes unbekannt ist, wird das Bestimmen derselben möglich, indem wir erst das Glied, in dem die Unbekannte steht, selbst als unbekannt ansehen. Sobald der Wert des ganzen Gliedes gefunden ist, gehen wir auf die Bestimmung der unbekannten Zahl los. Dabei kommen die für das Auffinden ganzer Glieder gültigen Vorschriften in Anwendung.

§. 8.

Damit wir die Art und Weise der Auffindung unbekannter Glieder und Zahlen in Aggregaten näher kennen lernen, sollen einige Beispiele durchgeführt werden. Wir legen das im §. 2 gegebene Beispiel zu grunde und nehmen an, dass der Anfangsbestand des Honigs unbekannt geworden wäre. Dann wahren wir zunächst den Platz des Anfangsgliedes durch ein Symbol aus den letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabetes und erhalten die Gleichung:

$$x + \left((15000 \cdot \tfrac{1}{4}) - (2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right) \cdot 3 - \left\{(15000 + 2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right\} \cdot 2$$
$$+ \left\{(15000 \cdot \tfrac{1}{4}) : 3\right\} \cdot 4 - \left((2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right) \cdot 4 = 31354.$$

Aus ihr bilden wir die neue Gleichung

$$31354 + \left((2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right) \cdot 4 - \left\{(15000 \cdot \tfrac{1}{4}) : 3\right\} \cdot 4$$
$$+ \left\{(15000 + 2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right\} \cdot 2 - \left((15000 \cdot \tfrac{1}{4}) - (2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right) \cdot 3 = x.$$

Der Wert der linken Seite ist 16000 und wir folgern daraus, dass das Anfangsglied 16000 war.

Wäre in der Gleichung des §. 3 das dritte Glied verloren gegangen, so würden wir seine Stelle mit dem Symbol x besetzen und aus

$$16000 + \left((15000 \cdot \tfrac{1}{4}) - (2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right) \cdot 3 - x + \left\{(15000 \cdot \tfrac{1}{4}) : 3\right\} \cdot 4$$
$$- \left((2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right) \cdot 4 = 31354$$

die Umkehrungsgleichung ableiten

$$31354 + \left((2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right) \cdot 4 - \left\{(15000 \cdot \tfrac{1}{4}) : 3\right\} \cdot 4$$
$$- \left((15000 \cdot \tfrac{1}{4}) - (2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right) \cdot 3 - 16000 = - x.$$

Die linke Seite liefert das Resultat — 588 und es ergiebt sich die Gleichung:

$$-588 = -x$$

d. h. das dritte Glied des Aggregates hat den Wert 588 gehabt. So lange wir keine näheren Angaben über die Form des Gliedes besitzen, können wir weiter nichts sagen.

Genauere Ergebnisse erhalten wir, wenn nur eine Zahl eines Gliedes wiederhergestellt werden soll z. B. die Zahl 60 des fünften Gliedes. Nach Einnahme des Platzes der 60 durch x folgt aus

$$16000 + \left((15000 \cdot \tfrac{1}{4}) - (2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right) \cdot 3$$
$$- \left\{(15000 + 2639 + 1) \cdot \tfrac{1}{60}\right\} \cdot 2 + \left\{(15000 \cdot \tfrac{1}{4}) : 3\right\} \cdot 4$$
$$- \left((2639 + 1) \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot 4 = 31354$$

die Umkehrungsgleichung:

$$31354 - \left\{(15000 \,.\, \tfrac{1}{4}) : 3\right\} . 4 + \left\{(15000 + 2639 + 1) \,.\, \tfrac{1}{60}\right\} . 2$$
$$- \left((15000 \,.\, \tfrac{1}{4}) - (2639 + 1) \,.\, \tfrac{1}{60}\right) . 3 - 16000$$
$$= - \left((2639 + 1) \,.\, \frac{1}{x}\right) . 4$$

und hieraus

$$- 176 = - \left((2639 + 1) \,.\, \frac{1}{x}\right) . 4.$$

Folglich ist der Wert des Gliedes 176 und wir haben nunmehr in der Gleichung

$$\left((2639 + 1) \,.\, \frac{1}{x}\right) . 4 = 176$$

die Rechenoperationen der linken Seite durch die entgegengesetzten aufzuheben:

$$\frac{1}{x} = (176 : 4) : (2639 + 1)$$
$$= \frac{1}{60}$$
$$\overline{x = 60.}$$

§. 9.

Die bis hierher gewonnenen Kenntnisse machen es uns möglich, zu zeigen, wie wir in einer Gleichung auch eine Zahl wiederfinden können, die an mehr als einer Stelle des Aggregates verloren gegangen ist, ausgenommen, wenn eine der Stellen ein Exponent ist. Da indes die diesbezüglichen Betrachtungen schriftlich zu schleppend werden dürften, verzichten wir auf die allgemeine Beweisführung und gehen sofort zur Klassifizierung und speziellen Behandlung solcher Gleichungen über. Wir nennen sie, da nur die einfachen 7 Rechenoperationen zur Bestimmung der Unbekannten ausreichen, algebraische Gleichungen, im gegensatz zu den oben als für uns unmöglich bezeichneten, welche transcendente Gleichungen genannt werden und in der sogenannten Analysis ihre Besprechung finden.

Zugleich werde bemerkt, dass wir auch bei den Gleichungen, deren beide Seiten Aggregate sind, zu denselben Ergebnissen geführt werden, wie bei denen, deren rechte Seite ein Resultat ist, wenn wir mit derselben Frage der Bestimmbarkeit einer unbekannten Zahl an sie herantreten. Wir brauchen uns nur zu vergegenwärtigen, dass wir ja beim Aufstellen der

Umkehrungsgleichungen als Zwischenstufen zu Gleichungen gelangten, deren beide Seiten Aggregate waren.

§. 10.

Die gemeinsame Aufgabe, welche bei allen folgenden Gleichungen gestellt wird, ist: den Wert der Unbekannten zu finden. Man nennt das Anwenden von Operationen, welche auf dies Ziel gerichtet sind, Lösen der Gleichung und sagt, dass die Gleichung gelöst ist, wenn man für x einen Wert erhalten hat, der in die Aggregate eingesetzt beiden Seiten der Gleichung dasselbe Resultat verleiht. Diesen der Gleichung genügenden Wert von x bezeichnet man mit dem Ausdruck: „Wurzel der Gleichung".

§. 11.

Bei der grossen Mannigfaltigkeit in dem Typus der Aggregate können nur sehr wenige auf alle Gleichungen anwendbaren Regeln für das Lösen gegeben werden. Die Hauptsache ist die Praxis. Doch merke man vor Eintritt in dieselbe Folgendes:

Eine Gleichung, deren Form

$$ax + b = 0$$

ist, würde zu ihrer Auflösung nur eine Transposition eines Gliedes und eine Division durch a verlangen. Man würde bekommen

$$-\frac{b}{a} = x$$

oder, wie man gewöhnlich sagt, obwohl sich die Schreibweise aus dem Obigen nicht rechtfertigen lässt,

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Die Beachtung der Gleichung $ax + b = 0$ lenkt unsere Aufmerksamkeit auf eine Form hin, welche wir für alle Gleichungen als Ziel anstreben müssen, um dann von ihr zur Feststellung der Wurzel überzugehen. Man hat daher die Gleichung $ax + b = 0$ Normalform der Gleichungen mit einer Unbekannten (und zwar, wie hier vorgreifend schon zugefügt werden soll, des ersten Grades) genannt.

Zu der Normalform gelangt man durch mehrere Zwischenformen, welche der gegebenen Gleichung und unter einander äquivalent heissen. Sie entstehen aus einander

1) durch Ausführung der angedeuteten Rechenoperationen auf den einzelnen Seiten der Gleichung.

2) durch Transposition von Gliedern, welche die Unbekannte enthalten, auf die linke und von Gliedern, welche nur aus bekannten Grössen bestehen, auf die rechte Seite der Gleichung und durch nachfolgendes Ausführen der nunmehrigen Rechenoperationen.

3) durch Auflösen von Klammern, in denen die Unbekannte steht, etwaige Transposition der neuen Glieder in dem unter 2) angegegebenen Sinne, und durch Ausführen der angezeigten Rechenoperationen.

4) durch Wegschaffen der Nenner, namentlich derer, in denen die Unbekannte vorkommt, vermittelst Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit dem Generalnenner. Öfter ist es indes besser, man beseitigt die einzelnen Nenner nach und nach, und nimmt nach jeder Multiplikation eine Transposition und Ausführung der Rechenoperationen vor.

5) durch Befreiung der Aggregate von Wurzelzeichen, in deren Radikanden sich die Unbekannte findet. Hierfür sei ausdrücklich bemerkt, dass es zur Erreichung des angegebenen Zweckes durchaus erforderlich ist, vor der jedesmaligen Potenzierung eine solche Transposition der Glieder vorzunehmen, dass die Wurzel allein auf einer Seite der Gleichung steht. Nach geschehener Potenzierung findet die übliche Transposition und Zusammenziehung der gleichartigen Glieder statt.

6) durch Isolieren der Potenzen, welche zur Basis oder zum Exponenten die Unbekannte haben, und durch dann folgendes Radizieren oder Logarithmieren.

7) durch die sogenannte correspondierende Addition und Subtraktion. Dieselbe wird häufig angewendet, wenn beide Seiten der Gleichung die Form eines Bruches haben und beruht auf dem Satz, dass wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ auch $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

Beweis: Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so auch

$$\frac{\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1}{\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}}; \quad \text{ebenso} \quad \frac{\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}}{\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}}.$$

§. 12.

Beim Beginn der Transformation einer Gleichung mit einer Unbekannten behufs Lösung können wir im allgemeinen nicht sehen, ob es uns gelingt, auf die Normalform zu kommen. Und wenn auch die Gleichung die Unbekannte überall nur in der ersten Potenz enthält, so ist es doch durch etwaiges Multiplizieren oder Potenzieren leicht möglich, dass wir auf eine Gleichung stossen, in welcher x in einer höheren und in mehreren von einander verschiedenen Potenzen auftritt. Es würde daher die umfassendste Gleichungsform, welche durch Transformationen erreicht werden kann, sein:

$$mx^{\nu} + nx^{\nu-1} + px^{\nu-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + qx + r = 0,$$

wo m, n, p, q, r beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, reelle oder imaginäre bestimmte Zahlen bedeuten, inclusive die Null.

Die Normalform $qx + r = 0$ ergiebt sich, wenn alle Coefficienten, ausgenommen q, Null werden. Darüber ist nichts mehr zu sagen.

Ähnliche Formen entstehen, wenn der Reihe nach nicht Null werden die Coefficienten s, t, . . . p, n, m

$$sx^2 + r = 0,\ tx^3 + r = 0,\ \ldots\ldots\ px^{\nu-2} + r = 0,$$

$$nx^{\nu-1} + r = 0,\ mx^{\nu} + r = 0.$$

Aus ihnen finden wir zuerst den Wert der Potenz und durch Radizierung x. Hierher stammt die Bezeichnung: Wurzel der Gleichung.

Demnach sind wir gezwungen, eine Klassifikation der Gleichungen vorzunehmen. Wir thun das, indem wir die höchste Potenz der Gleichungsform als namengebend betrachten, welche sich nach Anwendung der angegebenen Transformationen als Spezialfall der allgemeinen Form ansehen lässt. Man spricht in diesem Sinn von Gleichungen 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} . . . . . ν^{ten} Grades.

Weiter nennt man die Gleichung eine reine, wenn nur eine Potenz der Unbekannten in ihr steht, gemischt, wenn noch andere ausser der namengebenden Potenz in ihr auftreten, und vollständig, wenn alle Potenzen bis abwärts zur ersten in der Gleichung enthalten sind.

Wir haben schon die Auflösung der reinen Gleichungen aller Grade mit einer Unbekannten erledigt und gehen nun über zur Behandlung der vollständigen Gleichungen des zweiten Grades (auch quadratische genannt), um an sie eine Besprechung gemischter und einiger speziellen vollständigen Gleichungen höherer Grade anzuschliessen.

§. 13.

Weil wir ein Urteil über die Art einer Gleichung erst fällen, wenn sie sich nach etwaigen Transformationen als Spezialfall der im vorigen Paragraphen aufgestellten Form betrachten lässt, brauchen wir nur die typischen Spezialfälle näher zu discutieren und haben doch für alle dahin gehörigen Gleichungen gültige Gesetze aufgestellt. So beginnen wir die Betrachtungen über die

Gleichungen zweiten Grades:

Jede Gleichung zweiten Grades lässt sich auf die Form

$$mx^2 + nx + p = 0$$

bringen und diese Form wieder kann unbeschadet der Allgemeinheit unserer Erörterungen durch Division mit m die Gestalt erhalten

$$x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m} = 0.$$

Ersetzen wir die Coefficienten $\frac{n}{m}$ und $\frac{p}{m}$ durch die Symbole α und β, so dürfen wir sagen, dass jede Gleichung zweiten Grades die Form

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

annehmen kann. α und β sind Symbole für beliebige Zahlen. Legen wir dem Coefficienten von x die Beschränkung auf, dass er nur eine absolute, keine relative Zahl sein soll, so lassen sich nicht mehr alle Gleichungen zweiten Grades auf die eine Form

$$x^2 + ax + \beta = 0$$

reduzieren, wo a nur absolute Zahlen repräsentiert, sondern es wird ein Teil der Gleichungen zweiten Grades die Form

$$x^2 - ax + \beta = 0$$

ergeben. Falls für das von x freie Symbol β dieselbe Beschränkung eingeführt, und dies äusserlich durch das Setzen des entsprechenden Buchstabens aus dem lateinischen Alphabet kenntlich gemacht wird, treten an die Stelle jeder der beiden Formen wieder zwei, nämlich es ergiebt

$$x^2 + ax + \beta = 0 \quad \begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ x^2 + ax - b = 0 \end{cases}$$

und

$$x^2 - ax + \beta = 0 \quad \begin{cases} x^2 - ax + b = 0 \\ x^2 - ax - b = 0 \end{cases}$$

und daher sagen wir jetzt, unter a und b absolute Zahlen verstanden: Jede vollständige Gleichung zweiten Grades lässt sich auf eine der vier folgenden Normalformen bringen, deren Kennzeichen es ist, dass x^2 den Coefficienten 1 hat:

$$\text{I.}\quad x^2 + ax + b = 0.$$
$$\text{II.}\quad x^2 - ax + b = 0.$$
$$\text{III.}\quad x^2 + ax - b = 0.$$
$$\text{IV.}\quad x^2 - ax - b = 0.$$

Haben wir gezeigt, wie wir aus den vier Normalformen die Unbekannte bestimmen, so haben wir die allgemeine Auflösung der Gleichungen zweiten Grades erledigt.

Der einzuschlagende Weg ist der, dass wir die Lösungen der vollständigen Gleichungen zweiten Grades zurückführen auf die Lösung einer reinen quadratischen Gleichung zweiten Grades, aber nicht in bezug auf x, sondern in bezug auf ein Binom, dessen eines Glied x ist. Der schematische Weg der Lösung von No. I ist:

$$x^2 + ax + b = 0$$
$$x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b = 0$$
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b = 0$$
$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$
$$x = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Analog sind die Lösungen der anderen Gleichungen, so dass wir die Zusammenstellung machen können

$$\text{I.}\quad x^2 + ax + b = 0. \qquad x = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$
$$\text{II.}\quad x^2 - ax + b = 0. \qquad x = \frac{a}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$
$$\text{III.}\quad x^2 + ax - b = 0. \qquad x = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$
$$\text{IV.}\quad x^2 - ax - b = 0. \qquad x = \frac{a}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

§. 14.

Wenn a und b grössere Zahlenwerte sind, so wird die numerische Berechnung der Wurzeln ziemlich weitläufig, besonders da wegen des häufigen Vorkommens von Rechenzeichen niederer Ordnung die Benutzung der Logarithmen keinen grossen Vorteil gewährt.

Bemerkenswert ist die Einführung von goniometrischen Funktionen zur Auffindung der Zahlenwerte. Über die Wahl der zur Bestimmung des Hilfswinkels dienenden Funktion geben uns die Radikanden genügenden Anhalt. Da nämlich in den beiden ersten Normalformen der Radikand eine Differenz ist, so hängt die Möglichkeit, dass die Wurzeln der Gleichungen reell sind, von der Bedingung $\left(\frac{a}{2}\right)^2 > b$ ab. Für die beiden anderen Formen existiert eine solche Beschränkung nicht. Hier kann $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \gtreqless b$ sein.

Der Gang der Transformationen in den Wurzelwerten der Normalformen I und II gestaltet sich vor und nach Einführung der goniometrischen Funktionen in nachstehender Weise:

I. $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$	II. $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$
$= -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}$	$= \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}$

Weil $\left(\frac{a}{2}\right)^2 > b$, so auch $a^2 > 4b$ und $a > 2\sqrt{b}$, folglich $\frac{4b}{a^2}$ ein ächter Bruch und ersetzbar durch $\sin^2\varphi$. Daher

$= -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\cos\varphi$		$= \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\cos\varphi$	
$x_1 = -\frac{a}{2}\left(1 - \cos\varphi\right)$	$x_2 = -\frac{a}{2}\left(1 + \cos\varphi\right)$	$x_1 = \frac{a}{2}\left(1 + \cos\varphi\right)$	$x_2 = \frac{a}{2}\left(1 - \cos\varphi\right)$
$= -a\sin^2\frac{\varphi}{2}$	$= -a\cos^2\frac{\varphi}{2}$	$= a\cos^2\frac{\varphi}{2}$	$= a\sin^2\frac{\varphi}{2}$
$= -\sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$	$= -\sqrt{b}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}$	$= \sqrt{b}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}$	$= \sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$

Die letzten symmetrischen Formen der Wurzeln ergeben sich, wenn wir die Grösse a mit Hilfe der Gleichung $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ aus den vorletzten Gleichungen eliminieren.

In III und IV definieren wir den Hilfswinkel durch die Gleichung $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, da der Ausdruck $\frac{2\sqrt{b}}{a}$ jeden beliebigen Wert annehmen kann. Die Entwickelung ist:

III.	IV.
$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$	$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$
$= -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}$	$= \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}$

Für $\frac{2\sqrt{b}}{a}$ $\operatorname{tg}\varphi$ substituiert, giebt

$= -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sec\varphi$	$= \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sec\varphi$

$x_1 = -\frac{a}{2}\left(1 - \sec\varphi\right)$	$x_2 = -\frac{a}{2}\left(1 + \sec\varphi\right)$	$x_1 = \frac{a}{2}\left(1 + \sec\varphi\right)$	$x_2 = \frac{a}{2}\left(1 - \sec\varphi\right)$
$= \frac{a \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$	$= -\frac{a \cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$	$= \frac{a \cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$	$= -\frac{a \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$
$= \sqrt{b} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$	$= -\sqrt{b} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$	$= \sqrt{b} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$	$= -\sqrt{b} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$

Übersichtlich lassen sich die Ergebnisse des Paragraphen so ordnen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2 + ax + b = 0 \\ \text{II.} & x^2 - ax + b = 0 \end{array}\right\} \frac{2\sqrt{b}}{a} = \sin\varphi \left\{\begin{array}{l} =x_1 - \sqrt{b} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{b} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \\ x_1 = \sqrt{b} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = \sqrt{b} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{III.} & x^2 + ax - b = 0 \\ \text{IV.} & x^2 - ax - b = 0 \end{array}\right\} \frac{2\sqrt{b}}{a} = \operatorname{tg}\varphi \left\{\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{b} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{b} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \\ x_1 = \sqrt{b} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{b} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \end{array}\right.$$

§. 15.

Obgleich wir das gesteckte Ziel, die Wurzeln der vollständigen Gleichung zweiten Grades zu finden, erreicht haben und gezeigt ist, dass jede vollständige quadratische Gleichung zwei von einander verschiedene Wurzeln besitzt, wollen wir doch noch nicht vorwärts gehen, sondern einen Augenblick bei der Besprechung des Zusammenhanges der Wurzeln mit den bekannten Grössen der Normalform verweilen. Ohne Schwierigkeit lässt sich zeigen, dass für jede Normalform die Gleichungen bestehen

$$x_1 + x_2 = -a \quad \text{und} \quad x_1 \,.\, x_2 = b.$$

Darauf kann man sowohl eine versuchsweise Auflösung der quadratischen Gleichungen begründen, wie man auch ein Mittel in diesen Beziehungen hat, sich quadratische Gleichungen mit gewünschten Wurzeln zu bilden.

Eine zweite Methode, sich Gleichungen zweiten Grades mit vorausbestimmten Wurzeln zu bilden, beruht auf dem Beweis, dass sich jeder Ausdruck zweiten Grades in der Normalform in ein Produkt zerlegen lässt, dessen Faktoren sind

$$(x - x_1) \quad \text{und} \quad (x - x_2),$$

wenn x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung sind, welche durch Gleichsetzung des Ausdrucks mit Null entsteht. Also

$$x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2).$$

Beweis:

$$\left\{x - \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)\right\}\left\{x - \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)\right\} =$$

$$\left\{\left(x + \frac{a}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right\}\left\{\left(x + \frac{a}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right\} =$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b = x^2 + ax + b.$$

Soll ein Ausdruck zweiten Grades, welcher nicht in der Normalform gegeben ist, sondern die Form

$$mx^2 + nx + p$$

hat, in ein Produkt von zwei Faktoren verwandelt werden, so thun wir das erst mit dem durch m geteilten Aggregat

$$x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}$$

indem wir dies neue gleich Null setzen und die Faktoren in gesetzmässiger Weise bilden. Dann multiplizieren wir das erhaltene Produkt mit m und achten darauf, ob vielleicht durch eine passende Zerlegung des m in Faktoren etwa aufgetretene Nenner in den Differenzen sich beseitigen lassen.

Beispiel: $51x^2 - 19x - 10$ in ein Produkt von zwei Faktoren zu verwandeln.

$$x^2 - \frac{19}{51}x - \frac{10}{51} = 0$$

$$x = \frac{19}{102} \pm \sqrt{\left(\frac{19}{102}\right)^2 + \frac{10}{51}}$$

$$= \frac{19}{102} \pm \frac{49}{102}$$

folglich:

$$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = -\frac{5}{17}$$

$$x^2 - \frac{19}{51}x - \frac{10}{51} = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{5}{17}\right)$$

$$51x^2 - 19x - 10 = (3x - 2)(17x + 5).$$

Nicht nötig wird das Zurückführen einer Gleichung auf die Normalform, wenn die rechte Seite Null und die linke Seite ein Produkt ist, in dessen Faktoren die Unbekannte vorkommt. Da hilft uns eine Betrachtung über das Wesen der Wurzel. An eine solche wird nämlich nur die Bedingung gestellt, dass sie in die linke Seite eingesetzt, dieselbe zu Null macht. Nun wird aber ein Produkt zu Null, wenn ein Faktor Null ist, und daher dürfen wir aus dem Produkt so viel Gleichungen herausschälen, als Faktoren mit der Unbekannten in ihm enthalten sind. Die Auflösung des neuen Systems liefert auch die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung. Auf diese Weise zerfällt eine Gleichung zweiten Grades in zwei Gleichungen ersten Grades.

§. 16.

Das zuletzt erwähnte Verfahren, eine quadratische Gleichung dadurch aufzulösen, dass man den quadratischen Ausdruck in ein Produkt verwandelt, welches gleich Null ist, und dasselbe in mehrere Gleichungen niederen Grades zu zerfällen, zeigt sich als sehr nützlich bei der Auflösung von Gleichungen höherer Grade. Leider aber können wir hier nichts Besseres thun, als auf die Praxis verweisen. Allgemeinere Vorschriften für die Möglichkeit der Zerlegung des Aggregates in Faktoren würden zu viel Platz kosten.

Die Zahl der Wurzeln einer Gleichung höheren Grades stimmt stets mit den höchsten Exponenten der Unbekannten überein. Es beruht das auf der Vieldeutigkeit des Wurzelzeichens.

§. 17.

Genauere Vorschriften lassen sich über die Auflösung einer Gruppe von unvollständigen Gleichungen höheren Grades geben, welche die Form

$$x^{2n} + ax^n + b = 0$$

zeigen. Sie führen wir durch Substitution von $x^n = z$ auf eine quadratische

$$z^2 + az + b = 0$$

und nach Bestimmung des z auf zwei reine Gleichungen n^{ten} Grades zurück.

Analoges gilt von Gleichungsformen wie

$$x + a\sqrt{x} + b = 0.$$

Hier gelangt man durch die Einführung von z für $\sqrt{x}$ auf die Normalform

$$z^2 + az + b = 0$$

und findet durch Potenzieren die Wurzeln der ersten Gleichung.

§. 18.

Die speciellen Gleichungen höherer Grade, deren Behandlung am Schluss des §. 12 ins Auge gefasst wurde, sind die reciproken Gleichungen. Sie haben ihren Namen, weil sich ihre Form nicht ändert, wenn man für x $\frac{1}{z}$ substituiert und darauf die Unbekannte aus dem Nenner fortschafft. Wegen der symmetrischen Anordnung der Coefficienten in bezug auf Anfang und Ende, heissen die reciproken Gleichungen auch symmetrische. Die Wurzelwerte sind paarweis reciprok zu einander.

I. Reciproke Gleichungen dritten Grades.

Die typische Form ist

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0.$$

Nach Zusammenfassung der Glieder mit gleichen Coefficienten erkennt man sofort, dass die linke Seite in ein Produkt von zwei Faktoren verwandelt und die Gleichung nach den Schlussbemerkungen des §. 15 gelöst werden kann.

II. Die typische Form der reciproken Gleichungen vierten Grades ist

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Durch Division mit x^2 und Umstellung der Glieder erhalten wir

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$$

und durch formale Änderung

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0.$$

Diese Gleichung ist für $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ eine quadratische, nach deren Auflösung uns eine weitere quadratische Gleichung die Werte für x liefert.

III. Eine reciproke Gleichung fünften Grades

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

wird durch Zerlegung der linken Seite in zwei Faktoren auf eine Gleichung ersten Grades und eine reciproke Gleichung des vierten Grades zurückgeführt.

§. 19.

Wenn die Unbekannte als Exponent vorkommt, so wird die Gleichung Exponentialgleichung genannt. Eine solche ist für uns nur lösbar, wenn wir durch Logarithmieren die Gleichung durch eine andere ersetzen können, in welcher die Unbekannte nicht anders auftritt, als in Coefficienten der Logarithmen. Bei den dem Logarithmieren vorhergehenden Transformationen richtet man zum grossen Vorteil der Schlussoperation sein Augenmerk darauf, dass man den Potenzen gleiche Basen verschafft.

§. 20.

Die Auflösung der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten beruhte auf der Darstellung der Unbekannten als Resultat eines aus den beiden Seiten der Gleichung gesetzmässig gebildeten Aggregates. Wir erhalten kein Resultat in dem gewöhnlichen Sinn, wenn wir die angedeuteten Rechenoperationen nicht ausführen können. Der Fall wird eintreten, sobald auch nur noch eine Zahl, von der wir nicht wissen, ob sie der Unbekannten gleich ist, verloren gegangen. Es ist dann weiter nichts zu thun, als den Platz der zweiten unbekannten Zahl durch ein von x verschiedenes Symbol zu wahren und unter Benutzung der geläufigen Transformationen die Gleichung auf die Form

$$ax + by + c = 0$$

zu bringen.

Da uns strenge Regeln über das Auffinden der in gleichem Maasse unbekannten Grössen fehlen, wäre es verzeihlich, wenn man probeweise die Bestimmung der Wurzeln versuchte. Man merkt aber bald, dass die Aussicht auf eindeutige Wiederherstellung der Zahlen eine äusserst geringe ist, denn es ergiebt sich zu jedem beliebig angenommenen Wert von y ein zugehöriger von x und umgekehrt.

Wesentlich eingeschränkt wird die Mannigfaltigkeit der genügenden Wertepaare, wenn uns ungefähr der Inhalt des Herganges bekannt ist, den die Gleichung mathematisch fixiert, und wir daraus über die Natur der unbekannten Zahlen Schlüsse ziehen dürfen, etwa dass sie nur ganz, oder nur positiv, oder nur ganz und positiv sind u. s. w. Solche Schlüsse werden beispielsweise gerechtfertigt sein, wenn wir wissen, dass es sich um eine Anzahl lebender Wesen handelt, oder um Dinge, welche als Bruchstücke undenkbar sind (Barometer, Uhren, Charakteristiken von Logarithmen).

Unter Beschränkungen dieser Art lassen sich sehr interessante Betrachtungen über die Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

anstellen. Sie werden in einem späteren Abschnitt entwickelt werden, aber es sei bemerkt, dass sie sich sehr wohl auch schon hier einfügen liessen. Man nennt die Gleichung $ax + by + c = 0$ eine diophantische.

§. 21.

Wenn wir mit Rücksicht darauf, dass uns x früher als Symbol für eine Unbekannte entgegengetreten ist, wie y, zunächst die Gewohnheit annehmen, x als diejenige Grösse anzusehen, deren Bestimmung durch das Auftreten der zweiten Unbekannten verhindert wird, so müssen wir als allgemeinen Grund der Nichtbestimmbarkeit des x das bezeichnen, dass uns keine Beziehung zwischen y und x gegeben ist, welche es uns möglich macht y durch x und bekannte Grössen auszudrücken und den dem y äquivalenten Ausdruck in die Gleichung einzusetzen. Oder wir müssen vielmehr, da die Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

eine Beziehung zwischen x und y angiebt, sagen, dass der Grund der Unbestimmbarkeit der ist, dass wir keine zweite Beziehung zwischen x und y haben.

Nur ein anderer Wortlaut ist es, wenn wir sagen: Sind in einer Gleichung zwei von einander verschiedene Zahlen verloren gegangen, so ist deren Auffinden nur möglich, wenn wir noch eine zweite Gleichung kennen, in der dieselben Zahlen gesucht werden.

Als eine zweite Gleichung d. h. als eine Gleichung, welche eine zweite Beziehung des x zu y giebt, ist es natürlich nicht anzusehen, wenn wir zwei Gleichungen haben, von denen die eine aus der anderen durch analytische Transformationen hervorgehen kann ($x + 2y = 3$ und $x^2 + 4xy + 4y^2 = 9$), wie wir andrerseits auch eine Gleichung als eine zweite nicht annehmen können, welche äusserlich wohl verschieden von der anderen, ihrem Inhalt nach, aber etwas Entgegengesetztes wie jene bedeutet z. B.

$$x + 3y = 7 \quad \text{oder} \quad 2x + 3y = 5$$
$$x + 3y = -7 \quad\quad\quad 2x + 3y = 9 \ (9 \equiv \text{nichtfünf}).$$

Jede der Gleichungen ist wohl einzeln zu erfüllen, gleichzeitig aber sind sie nicht für dieselben Wertepaare von x und y zu lösen.

§. 22.

Wir nennen jede Gleichung, welche sich auf die Form

$$ax + by + c = 0$$

bringen lässt, eine Gleichung vom ersten Grade mit zwei Unbekannten und wir brauchen, um allgemein gültige Gesetze über das Auflösen eines Systems aufzustellen, die Untersuchungen nur an die beiden Gleichungen zu knüpfen

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Es giebt vier wesentlich von einander verschiedene Methoden der Auflösung. Sie alle haben das in dem Gesagten begründete gemeinsame Streben, durch Ersetzen der einen Unbekannten oder, was dasselbe ist, durch Fortschaffen (Eliminieren) der einen Unbekannten in der einen Gleichung vermittelst der anderen Unbekannten aus der anderen Gleichung, das System der zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu einer Gleichung mit einer Unbekannten zu verschmelzen.

I. Substitutions-Methode.

Aus einer der beiden Gleichungen entwickelt man die eine Unbekannte und setzt den gefundenen Ausdruck in die andere ein:

$$y = \frac{-c_2 - a_2x}{b_2}$$

$$a_1x + b_1 \cdot \frac{-c_2 - a_2x}{b_2} + c_1 = 0$$

$$a_1b_2x - b_1c_2 - a_2b_1x + b_2c_1 = 0$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Ist eine Unbekannte bestimmt, so setzt man den Wert in eine der beiden Gleichungen ein und sucht aus der sich ergebenden Gleichung mit einer Unbekannten die noch fehlende Wurzel zu finden.

$$a_1 \cdot \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_1y + c_1 = 0$$

$$y = \frac{-c_1 - a_1 \cdot \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}{b_1}$$

$$= \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

II. Comparations-Methode.

Man entwickelt aus beiden Gleichungen dieselbe Unbekannte und setzt die gefundenen Ausdrücke einander gleich.

$$y = \frac{-c_1 - a_1x}{b_1}, \quad y = \frac{-c_2 - a_2x}{b_2}$$

$$\frac{-c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{-c_2 - a_2x}{b_2}$$

$$-c_1b_2 - a_1b_2x = -b_1c_2 - a_2b_1x$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Die Bestimmung der zweiten Unbekannten ist ebenso wie bei der Substitutionsmethode.

III. Additions- oder Subtractions-Methode.

(Englische Methode.)

Durch Multiplikation oder Division einer der Gleichungen oder auch beider mit entsprechenden Zahlen verschafft man der einen Unbekannten in beiden Gleichungen denselben Coefficienten und eliminiert, je nachdem die Vorzeichen der Unbekannten in beiden Gleichungen dieselben oder entgegengesetzte sind, die betreffende Unbekannte durch Subtraktion der Gleichungen von einander oder durch Addition zu einander.

$$\begin{array}{r|l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 & b_2 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 & b_1 \\ \hline a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 & \\ a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 & \\ \hline a_1b_2x - a_2b_1x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0 & \end{array}$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Auch hier ist die Berechnung des y gleich der obigen.

IV. Methode des unbestimmten Factors.

(Französische oder Bézout'sche Methode.)

Man multipliziert eine der Gleichungen mit einer beliebigen Zahl und addiert die erweiterte Gleichung zu der andern.

$$a_1x + b_1y + c_1 + a_2\lambda x + b_2\lambda y + c_2\lambda = 0.$$

Dann zieht man x und y als gemeinschaftliche Faktoren aus den Produkten aus

$$(a_1 + a_2\lambda)x + (b_1 + b_2\lambda)y + c_1 + c_2\lambda = 0$$

und legt dem λ, wenn man y eliminieren will, einen solchen Wert bei, dass der Coefficient von y gleich Null wird.

$$\lambda = -\frac{b_1}{b_2}$$

$$\left(a_1 + a_2\left(-\frac{b_1}{b_2}\right)\right)x + c_1 + c_2\left(-\frac{b_1}{b_2}\right) = 0$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

§. 23.

Zur übersichtlichen Darstellung der vier Auflösungsmethoden nehmen wir an, dass die beiden Bestimmungsgleichungen auf die Normalform gebracht wären. Das ist wohl stets möglich, aber nicht immer nötig. Je nach der Beschaffenheit der Gleichungen kann man in jedem Stadium der Umformung halt machen und von da aus eine der angeführten Methoden benutzen.

Wegen ihrer häufigen Anwendung möge noch das System der beiden Gleichungen

$$x + y = \alpha$$
$$x - y = \beta$$

Platz finden. Aus ihm ergiebt die englische Methode

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Man nennt dieses und jedes andere, gewissen Auflösungen zu grunde liegende und durch Häufigkeit geläufige Rechnungsverfahren Algorithmus.

§. 24.

Wenn wir beim Anstreben der Normalformen für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf eine oder zwei Gleichungen kommen, welche die eine Unbekannte oder beide in der zweiten Potenz enthalten, so haben wir Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Dasselbe erhalten wir, wenn in einer der beiden Gleichungen oder in beiden das Produkt der Unbekannten steht. Die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten ist

$$mx^2 + nxy + py^2 + qx + ry + s = 0.$$

In ihr heissen die Glieder mit x^2, xy und y^2 Glieder der zweiten Dimension. Die Bezeichnung ist hergenommen von der Anschauung, welche räumlich mit den Gliedern x, x^2 und x^3 bequem verknüpft werden kann. Wenn man nämlich unter x die Masszahlen der Länge einer geraden Linie versteht, so bietet x^2 die Anzahl der Flächeneinheiten, welche ein über der Geraden errichtetes Quadrat enthält, und x^3 die Zahl der cubischen Einheiten eines die betreffende Linie zur Kante habenden Würfels. Mit $x \cdot y$ verbindet man dementsprechend die Vorstellung eines Rechtecks, mit $x \cdot y \cdot z$ die eines rechtwinkligen Parallelepipedons u. s. w. Leider hat die auf dieser Übereinstimmung beruhende Veranschaulichung des x^2 und x^3 auch Einfluss auf das Lesen der Potenzen gehabt, so dass man gewöhnt ist, zu sagen: xquadrat und x im Cubus. Es ist das zu bedauern, weil dadurch dem Lernenden von vorne herein die geometrische Interpretation dieser Potenzen so in den Vordergrund gestellt wird, dass ihm ein Auseinanderhalten der arithmetischen und geometrischen Bedeutung von algebraischen Ausdrücken sehr erschwert wird und es viel Mühe kostet zu zeigen, wie wesentlich verschieden beide Auffassungen von einander sind.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass man, auch ohne für das Vorstellungsvermögen eine Verwendung zu haben, von höheren als der dritten Dimension spricht und z. B. sagt

x^2yz sei von der vierten, xy^2z^2 von der fünften Dimension.

§. 25.

Aus der einen allgemeinen Form der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten

$$mx^2 + nxy + py^2 + qx + ry + s = 0$$

ergeben sich je nach der Anzahl der verschwindenden Coefficienten sehr mannigfache Gleichungen, eine Mannigfaltigkeit, welche noch vermehrt wird durch die gleiche Unbestimmtheit der Form der zweiten zur Auffindung der Wurzeln nötigen Gleichung Es lassen sich daher hier nicht so einheitliche Vorschriften über das Auflösen der Gleichungen geben, wie das bei den Gleichungen ersten Grades möglich war, und wir müssen uns darauf beschränken, nur wenige Andeutungen allgemeiner Natur zu machen.

I. Ist die eine Gleichung vom ersten Grade, oder ist eine Gleichung in bezug auf die eine Unbekannte rational lösbar, so kann die Substitutionsmethode empfohlen werden.

II. In den meisten Fällen ist es nicht ratsam, direkt auf die Bestimmung von x und y los zu steuern, vielmehr wird häufig die Rechnung wesentlich vereinfacht, oder ist überhaupt nur durchzuführen, wenn man zuerst versucht, gewisse einfache algebraische Verbindungen von x und y zu finden. Als solche Verbindungen sind zu nennen

$$x + y,\ x - y,\ x \cdot y,\ \frac{x}{y},\ (x \pm y)^2,\ x^2 y,\ \frac{x}{y_2},\ (x \pm 2y),\ (x - a + y)\ \text{u. s. w.}$$

Nicht selten sind, ehe die Bestimmungsgleichungen für die Hülfsgrössen gewonnen werden, gewisse formale Veränderungen in den Gleichungen vorzunehmen. Besonders sind Ergänzungen unvollständiger Potenzen von Binomen anzuführen oder auch Verschmelzung der beiden Gleichungen zu einer dritten. Ferner Division oder Zerlegung der Faktoren.

§. 26.

Noch ist ein Hinweis auf die Zusammengehörigkeit der Wurzelwerte für x und y geboten. Da wir die Gleichungen für aufgelöst ansehen müssen, wenn wir solche Wertepaare von x und y haben, welche in beide Gleichungen eingesetzt, dieselben identisch erfüllen, so finden wir den zu dem Wert x zugehörigen Wert von y, wenn wir die Wurzel x in eine derjenigen Gleichungen einsetzen, welche zur Auffindung eben dieser Wurzel unmittelbar mitgewirkt haben. Wo sich durch Verschmelzung der zwei Gleichungen eine Gleichung höheren als zweiten Grades zeigt, muss man bei Aufstellung der Wurzelpaare besonders vorsichtig sein.

§. 27.

Das über Gleichungen mit zwei Unbekannten Gesagte lässt sich in der Praxis ohne grosse Mühe auf Gleichungen mit drei und mehr Unbekannten erweiternd anwenden. Am bequemsten ist zumeist die Benutzung der englischen Methode, mit Hülfe deren man aus n Gleichungen mit n Unbekannten n — 1 Gleichungen mit n — 1 Unbekannten bildet. Dieses System ersetzt man durch ein äquivalentes aus n — 2 Gleichungen mit n — 2 Unbekannten u. s. w., bis man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält. Nach Feststellung der einen Wurzel setzt man diese rückläufig in die sich allmählich erweiternden Gleichungssysteme ein und stellt so die zugehörigen Werte der Unbekannten fest.