Zu

der öffentlichen Prüfung

im

hiesigen Königl. Friedrichs-Gymnasium

am 30sten September und 1sten Oktober d. J.

ladet

die resp. Eltern der Schüler, wie auch alle Gönner und Freunde der Anstalt

ganz ergebenst ein

J. D. PRANG,
Direktor.

Inhalt der Einladungsschrift:

1. Eine neue Methode das Maximum und Minimum zu finden. Vom Oberlehrer Sperling.
2. Schulnachrichten aus dem Jahre 1830/31

Gumbinnen, 1831.
Gedruckt in der Meltzerschen Buchdruckerei.

Neue Methode das Maximum und Minimum zu finden.

Nach dem weisen Ermessen unseres hohen Ministeriums des Geistlichen ~~Cultus~~ wurde zur Vermeidung eines Uebermaaßes in den mathematischen Disciplinen auf den Gymnasien die billige Forderung in Erinnerung gebracht, daß unter andern Ueberschreitungen des Schulunterrichtes auch der Vortrag der Differential-Rechnung eingestellt werden sollte. Dadurch ist allerdings den Lehrern, welche sich daran erfreuten, esoterische Schüler gebildet zu haben, ein Theil ihres Vergnügens genommen, aber die Freude nicht ganz zerstört; weil vieles Einzelne, was z. B. der Taylorsche Lehrsatz in sich vereinigt, auch auf elementärem Wege erreicht und gefunden werden kann. Daß hierzu verschiedene Reihen-Entwickelungen gehören, brauche ich nicht zu erwähnen; wohl aber möchte es angenehm seyn, die Lehre vom Maximum und Minimum, eines der interessantesten Kapitel der Differential-Rechnung, ohne ihre Hülfe behandelt und so basirt zu sehen, daß diejenigen mathematischen Elemente, welche unsere gegenwärtige Schulbildung vorschriftsmäßig darreichen soll, schon zur Lösung sehr vieler Aufgaben über das Maximum und Minimum hinreichend wären. — Die Rettung dieses so mannigfaltigen und schönen Gegenstandes, wollte man ihn — wo er eigentlich auch hin gehört — der Lehre von den Funktionen einverleiben, oder seine Theorie auch nur, zum Behufe des Gebrauchs bei häuslichen Uebungsaufgaben, isolirt hinstellen, würde, wenn es gelänge ihn einleuchtend, sicher und unabhängig vom höhern Kalkül zu machen, auch denen gewiß nicht unangenehm seyn, welche sich bei ihrem Schulunterrichte keinen Uebertritt in das Gebiet der Analyse des Unendlichen erlaubt haben.

Schon Herr Schaffer hat sich in seinem 1816 zu Oldenburg erschienenen Werke: „Geometrische Aufgaben mit vollständigen Auflösungen zum Selbstunterrichte für Anfänger“ bemüht, diesen Gegenstand auf den Boden der Elemente zu verpflanzen; allein mir scheint es, daß die dabei versprochene Vermeidung der Differential-Rechnung mehr in der Abschaffung der Namen, als in der Aenderung der Begriffe und der ganzen

Grundansicht zu suchen ist. Aus diesem Grunde, vorzüglich aber, weil ich glaube, daß verschiedene Ansichten derselben Sache jeder Wissenschaft förderlich sind, und wenn nicht in diesem, so doch in einem andern Falle nützen können, entschloß ich mich, auch meine Gedanken über die Erforschung des Größten und Kleinsten in diesen Zeilen einer größeren Oeffentlichkeit zu übergeben. Vielleicht begegnet meine Methode ähnlichen Ideen manches Lesers aus unserem programmatischen Verbande, oder ist wohl gar — was ich gegenwärtig nicht weiß — von Andern in ihren öffentlichen Schriften in gleicher Art zur Sprache gebracht; nichts desto weniger durfte ich sie aber dennoch zurückhalten, wenn ich hier auch einige Sorge für die Belehrung unserer Schüler in diesem Stücke tragen wollte. — Dieser Wunsch hat indeß nicht den Einfluß auf die Art der Darstellung gehabt, welchen man aus pädagogischen Gründen erwarten möchte; sondern, mehr die Klasse der sichern und einsichtsvollen Leser berücksichtigend, die erläuternden Beispiele der allgemeinen Theorie nachfolgend eingestreut, statt sie einleitend und vorbauend voran zu schicken. Auch so, hoffe ich, könnte dem verständigen, wenn auch nur bei den Beispielen mit Einsicht nachfolgenden, Schüler unserer Anstalt der gebrauchte Algorithmus nicht entgehen; zumal ihm in Fällen des Zweifels und der Unklarheit meine Hülfe nicht versagt ist. Doch nun zur Sache!

Um den geringen Raum dieser Blätter nicht mit bekannten Dingen aus der Funktionen-Lehre anzufüllen, setze ich solche ohne Besorgniß voraus, und mache nur auf die in dem Begriffe einer Funktion liegende Möglichkeit von Grenz- oder äußersten Werthen einer Größe y aufmerksam, in sofern sie als Funktion von x gedacht wird. Daß diese Möglichkeit indeß nicht bei allen Funktionen in Wirklichkeit übergeht, hindert darum nicht die Voraussetzung derselben, da die Rechnung jedenfalls hierüber entscheidet und das Wahre lehrt. Diese Grenzwerthe der Funktionen sind es nun eben, welche man sucht, wenn von Bestimmung ihrer (der Funktionen) Maxima und Minima die Rede ist. Ueberschreitet man sie, d. h. nimmt man $y = My + U$ an, wo My das Maximum oder Minimum von y und U den bald positiven (im Falle des Maximums), bald negativen (im Falle des Minimums) Ueberschuß bedeutet, so muß x nothwendig unmöglich werden. Denn so lange x noch möglich ist, kann $\mathrm{f}\,x$ (Funktion von x), oder das ihm gleiche y, wenn darin keine unmögliche Constanten stecken, auch nur einen möglichen Werth und zwar von der Klasse derjenigen Werthe haben, welche innerhalb der Grenzen der Funktionen liegen. Demnach müßte unter obiger Bedingung x die Form der unmöglichen Größen annehmen, und in seine Stelle etwa $x + \xi i$ gesetzt werden, worin ξ ebenfalls veränderlich und i, wie gewöhnlich, $= \sqrt{-1}$ ist. Der bessern Uebersicht und Verständniß wegen, schreibe ich noch einmal die beiden Gleichungen hin, welche der Leser bisher in Gedanken haben mußte, nämlich: 1) $y = f\,x$; 2) $M\,y + U = f\,(x + \xi\,i)$, und mache zugleich darauf aufmerksam, daß die in jedem besondern Falle vollständig auszuführende Entwickelung von $f\,(x + \xi\,i)$ einen Ausdruck von der Form $P + Q\,i$; folglich die Gleichung: 3) $M\,y + U = P + Q\,i$ herbei führen wird. Diese trägt nun zwar augenscheinlich das Gepräge des Widerspruches an sich, da eine mögliche Quantität einer zum Theil unmöglichen gleich seyn soll; allein bedenkt man, daß sich gegen die Richtigkeit der vorangehenden Betrachtungen und Schlüsse nichts einwenden läßt, und daß daher auch die Gleichung 3) selbst unleugbar wahr ist, so folgt nothwendig, daß, um jenen Schein eines Widerspruches aus dem Wege zu räumen, $Q\,i$, oder vielmehr Q gleich null gedacht und gesetzt werden muß. Auf diese Weise entstehen nun zwei Gleichungen, nämlich: 4) $Q = 0$ und $M\,y + U = P$, die beide ξ und x in der Bedeutung enthalten, welche man diesen beilegen muß, um aus $f\,x$, durch Substitution des $x + \xi\,i$ an Stelle des x, $M\,y + U$ zu machen. Will man also U verschwinden lassen, um $M\,y$ allein übrig zu behalten, d. h. y auf seine Grenzwerthe einzuschränken, so ist es nöthig, das Unmögliche aus $x + \xi\,i$ zu entfernen; folglich $\xi = 0$ zu setzen. Die Einführung dieser Bedingungen wandelt sogleich Q und P, welche so lange noch Funktionen von x und ξ zusammen waren, in einfache Funktionen von x; also 4) und 5) in zwei Gleichungen um, von denen die erste die dem $M\,y$ entsprechenden Werthe von x involvirt, und die zweite dazu dient, durch Substitution der aus der Gleichung $Q = 0$ entnommenen Werthe von x in P, die Werthe des $M\,y$ zu berechnen. Während der Rechner nun aber mit der Ausführung der hier angeführten Operationen beschäftigt ist, wird ihm ein Umstand begegnen, der leicht einen Irrthum, oder doch Bedenken veranlassen könnte und deshalb im Voraus Erwähnung und Erwägung verdient; dies ist nämlich die besondere Form des $Q\,i$ in 3) und seine anfängliche Behandlung als Gleichung. — Wer sich die Entstehung dieses $Q\,i$ vergegenwärtigt, wird sogleich einsehen, daß dasselbe aus lauter Gliedern bestehe, deren jedes eine ungerade Potenz von $\xi\,i$ enthält, weil diese allein den Charakter des Unmöglichen beibehalten. Aus diesem Grunde muß ξ gemeinschaftlicher Faktor in $Q\,i$ seyn, und außerdem könnte es scheinen, daß bisweilen auch ξ^3, ξ^5 oder noch höhere Potenzen den gemeinschaftlichen Faktor bilden, wenn nämlich zufällig die Glieder mit den ersten, oder auch die mit den dritten Potenzen von ξ u. s. w. sich auf-heben. Ob solche Fälle indeß je eintreten und wie die Bemerkung wegen des Faktors ξ mit dem übereinstimmt, was die Methode der Differential-Rechnung in der Theorie des Maximums und Minimums lehrt, wird am besten entschieden und eingesehen, wenn wir den Taylorschen Lehrsatz in Anwendung bringen. Ihm gemäß müßte

$$My + U = f(x + \xi i) = fx + \frac{d\,fx}{dx} \cdot \xi i + \frac{d^2 fx}{dx^2} \cdot \frac{\xi^2 i^2}{1.2} + \frac{d^3 fx}{dx^3} \cdot \frac{\xi^3 i^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$= fx + \frac{d\,fx}{dx} \cdot \xi i - \frac{d^2 fx}{dx^2} \cdot \frac{\xi^2}{1.2} - \frac{d^3 fx}{dx^3} \cdot \frac{\xi^3 \,.\, i}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$= fx - \frac{d^2 fx}{dx^2} \cdot \frac{\xi^2}{1.2} + \frac{d^4 fx}{dx^4} \cdot \frac{\xi^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$+ \left\{ \frac{d\,fx}{dx} \cdot \xi - \frac{d^3 fx}{dx^3} \cdot \frac{\xi^3}{1.2.3} + \frac{d^5 fx}{dx^5} \cdot \frac{\xi^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \right\} . i$$

also I. $P = fx - \frac{d^2 fx}{dx^2} \cdot \frac{\xi^2}{1.2} + \frac{d^4 fx}{dx^4} \cdot \frac{\xi^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$

II. $Q = \frac{d\,fx}{dx} \cdot \xi - \frac{d^3 fx}{dx^3} \cdot \frac{\xi^3}{1.2.3} + \frac{d^5 fx}{dx^5} \cdot \frac{\xi^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$

seyn. Da hier aber in keinem Differentialquotienten ξ steckt, so wird im Allgemeinen nur ξ gemeinschaftlicher Faktor in Q seyn. Sollte es ξ^3 werden, so müßte $\frac{d\,fx}{dx}$ an sich null seyn, in welchem Falle jedoch auch alle übrigen Differentialquotienten verschwinden; und daher an keinen gemeinschaftlichen Faktor weiter denken lassen. Daher hat man Q von der Form $R\,\xi$; folglich statt 4) die Gleichung: 6) $R\,\xi = 0$, welche jedenfalls zuerst durch ξ dividirt werden muß und darf; wiewohl die Besorgniß entstehen könnte, daß, wenn gleich darauf (nachdem man $R = \frac{0}{\xi}$ gebildet) $\xi = 0$ gesetzt wird, $R = \frac{0}{0}$ werden müßte. Denn da 6) noch vor Einführung der Bedingung $\xi = 0$, also bei jedem Werthe von ξ gilt, so muß natürlich R an sich null seyn. Die nun erfolgende Gleichung 7) $R = 0$, in welcher noch vorher alles ξ der Bedingung des Maximums und Minimums gemäß durch Nullsetzung vernichtet seyn muß, ist genau dieselbe, wie in der Differential-Methode die Gleichung $\frac{d\,fx}{dx} = 0$; denn wir hatten nach II.

$$Q = \frac{d\,f\,x}{d\,x} \cdot \xi - \frac{d^3 f\,x}{d\,x^3} \cdot \frac{\xi^3}{1.2.3} + \text{etc.} = 0; \text{ also}$$

$$R = \frac{d\,f\,x}{d\,x} - \frac{d^3 f\,x}{d\,x^3} \cdot \frac{\xi^2}{1.2.3} + \text{etc.} = 0 \text{ und, bei } \xi = 0,$$

$$R = \frac{d\,f\,x}{d\,x} = 0.$$

Wegen der stets übereinstimmenden Werthe, die x und auch ξ in den obigen systematischen Gleichungen 4) und 5) haben, wird nun ferner nicht zu übersehen seyn, daß auch in I. alles ξ annullirt werden und das damit Behaftete zugleich verschwinden müsse. Dies führt auf $P = f\,x$, worin natürlich x den Werth hat, den ihm die Gleichung 7) giebt. Alles, wie es auch die Differential-Methode lehrt!

Was endlich das Kriterium betrifft, wodurch wir erfahren, welche von den gefundenen Grenzwerthen Maxima und welche Minima sind, so wird es in vielen Fällen überflüssig seyn, aber nicht durchgängig entbehrt werden können. Deshalb dürften nachstehende Betrachtungen nothwendig und von Nutzen gefunden werden.

Als unzweifelhaft entscheidendes Mittel ließe sich zwar die Untersuchung ansehen, ob sowohl Vergrößerungen als Verkleinerungen der aus $R = 0$ entlehnten Wurzelwerthe des x, bei der Substitution in $f\,x$ unternommen, dieses zu einer solchen Quantität umschaffen, die in beiden Fällen das zugehörige $M\,y$ übertrifft, also als Minimum giebt, oder übertroffen wird, daher als Maximum bezeichnet. Wiewohl nun aber dieses sich zuerst darbietende Mittel mit sicherm Erfolge angewendet werden kann und für den Anfänger außerdem noch den Vortheil der augenblicklichen Ueberzeugung hat; so ist auf der andern Seite nicht zu übersehen, daß die wiederholten, oft weitläuftigen und mehrfachen, Entwickelungen des $f\,x$, mit allen Abänderungen des x, nicht zu den interessanten Arbeiten des Rechners gehören und ein einfacheres Entscheidungsmittel wünschenswerth machen. Dieses zu geben, soll sogleich versucht werden.

Ist $M\,y = f\,x$ ein $\left.\begin{matrix}\text{Max.}\\ \text{Min.}\end{matrix}\right\}$, so wird $f\,(x \mp \xi)$ stets $\left.\begin{matrix}\text{weniger}\\ \text{mehr}\end{matrix}\right\}$ als $f\,x$ betragen, falls man für x durchgehends denselben, und zwar einen aus der Gleichung $R = 0$ hergenommenen, Werth setzt. Denkt man sich nun die Entwickelung von $f\,(x \mp \xi)$, nach Potenzen von ξ fortschreitend, gemacht, wie sie in den gewöhnlichen algebraischen Fällen immer erscheint, so wird selbige unter der Form: 8) $f\,x \mp C_1\,\xi + C_2\,\xi^2$

$\mp C_3 \xi^3 + C_4 \xi^4 \mp$ etc. aufgestellt werden können, worin die Coefficienten C_1, C_2, C_3 u. s. w. Funktionen von x, hingegen von ξ ganz unabhängige Größen sind. Zugleich muß man bemerken, daß die oben in 2) verlangte Entwickelung des $f(x + \xi i)$, welche in 3) schon auf die Form $P + Q i$ zurückgeführt angenommen wurde, ursprünglich der jetzigen Reihe ähnlich und nur darin von ihr unterschieden ist, daß in Verbindung mit jedem ξ eine gleichnamige Potenz von i, nirgends aber ein Minuszeichen vorkommt. Dieses führt zunächst auf den Schluß, daß unser früheres $Q = C_1 \xi - C_3 \xi^3 + C_5 \xi^5 -$ etc., also das R, so wie es in 7) verlangt wird, $= C_1$ seyn und eben darum dieses, bei dem Uebergauge des $f x$ in $M y$, verschwinden müsse. Man hätte es deshalb nur noch mit der Reihe:

9) $C_2 \xi^2 \mp C_3 \xi^3 + C_4 \xi^4 \mp$ etc. zu thun, in so fern es nöthig wäre zu wissen, ob sie in beiden Zeichenfällen ein negatives, oder in beiden ein positives Resultat giebt, wodurch das in Untersuchung stehende $M y$ respektive als Maximum oder Minimum angedeutet werden würde. Um über diesen Ausfall urtheilen zu können, wollen wir in jener Reihe 9) die zweideutigen Glieder von den übrigen absondern und daher das ganze Aggregat

$= \xi^2 . (C_2 + C_4 \xi^2 + \text{etc.}) \mp \xi^3 . (C_3 + C_5 \xi^2 + \text{etc.})$ schreiben; dann ist sogleich klar, daß, wenn das Resultat ein einfaches Vorzeichen erhalten soll, der erste Theil: $\xi^2 . (C_2 + C_4 \xi^2 + \text{etc.})$ durchaus überwiegend, oder

$\xi^2 . (C_2 + C_4 \xi^2 + \text{etc.}) > \xi^3 . (C_3 + C_5 \xi^2 + \text{etc.})$ seyn müsse. Hieraus ergiebt sich dann aber auch:

$C_2 + C_4 \xi^2 + \text{etc.} > \xi . (C_3 + C_5 \xi^2 + \text{etc.})$, oder

$C_2 > \xi . (C_3 + C_5 \xi^2 + \text{etc.}) - \xi^2 (C_4 + C_6 \xi^2 + \text{etc.})$, worin sich unverkennbar die Bedingung $C_2 > 0$ ausdrückt. Denn bedenkt man, daß Maxima und Minima von y zunächst nur in Beziehung auf die unmittelbar an sie angrenzenden Werthe des y statt finden, für welche zugleich ξ einen unendlich kleinen (positiven oder negativen) Werth annimmt, und daß also, wie klein auch C_2 seyn mag, jedesmal solche Werthe für ξ zu Gebote stehen, die den Ausdruck

$\xi (C_3 + C_5 \xi^2 + \text{etc.}) - \xi^2 . (C_4 + C_6 \xi^2 + \text{etc.})$ noch bei weitem kleiner machen: so ist offenbar nur nöthig $C_2 > 0$ zu haben, um behaupten zu können, daß es auch größer, als der eben angeführte Ausdruck seyn müsse. Diese Bedingung findet aber sicher beständig statt; da es keine Funktion geben kann, die Maxima und Minima hätte, ohne in ihrer Entwickelung bis auf die zweite Potenz der Variabeln (x) zu steigen, und dadurch C_2 zur Existenz zu bringen.

Ist nun C_2 die stets vorherrschende Größe, so wird auch ihr Zeichen allein unsern Zweifel über Maximum und Minimum heben, und zwar in der nämlichen Art, wie oben von der Reihe 9) gesagt ist. — Was C_2 ist, leuchtet ein; eben so auch, daß es in der Entwickelung von $f(x \mp \xi)$ ganz denselben Werth erhalten muß, wie in der von $f(x + \xi i)$, und daß man aus diesem Grunde die zur Entdeckung der Maxima und Minima gemachte Entwickelung gleichzeitig als Kriterium benutzen kann. Es ist nämlich nur nöthig das Zeichen von C_2 durch Zusammenziehung des Aggregats der in ξ^2 multiplizirten Glieder, nach Substitution des im vorliegenden My steckenden x=Werthes, zu bestimmen.

Ich gehe nun über, den Leser an einen andern wesentlichen Vortheil zu erinnern, den die Methode uns darbietet; in so fern wir gleich in der ursprünglichen Entwickelung des $f(x + \xi i)$ nach Potenzen von ξ, alle über ξ^2 hinausgehende Glieder als unnütz fortlassen können. Hierdurch wird in der Regel die Rechnung bedeutend abgekürzt und um nichts weitläuftiger, als die Befolgung der Differential=Methode. Was ferner noch übrig und der Erwähnung werth seyn sollte, um das Nöthige gesagt zu haben, verschiebe ich vorläufig bis zu passender Gelegenheit und eile zu den versprochenen Beispielen.

Aufgabe: In einen geraden Kegel einen andern geraden, mit seiner Spitze auf der Grundfläche des gegebenen senkrecht stehenden, zu beschreiben, der unter allen möglichen dieser Art der größte ist.

Auflösung: Wenn der Anfänger gefunden hätte, daß der hineingetragene Kegel $k = \frac{1}{3}\left\{\frac{h - x}{h}\right\}^2 . r^2 \pi . x$ ist, sobald man unter h und r Höhe und Radius des gegebenen, und unter x die Höhe des gesuchten Kegels versteht; so würde er zunächst alle Mühe darauf zu verwenden haben, den gehörigen Werth von x zu finden, da von ihm die Construktion des ganzen Kegels abhängt. — Nach unserer Vorschrift wäre $fx = \frac{r^2 . \pi}{3h^2} . (h - x)^2 x$ zu setzen und y mit k identisch. Der Kürze wegen schreibe man noch C statt der beständigen Größe $\frac{r^2 \pi}{3h^2}$ und setze nun $Mk + U = C . (h - x - \xi i)^2 . (x + \xi i)$, also überall an des x Stelle $x + \xi \sqrt{-1}$;

so ist, nach Potenzen von ξ entwickelt, α) $M k + U = C \,.\, [(h - x)^2 x + (h - x)(h - 3x)\xi i - (2h - 3x)\xi^2 i^2 + \xi^3 i^3]$; ferner β) P (so wie es oben in 3) aufgestellt wurde) $= C \,.\, [(h - x)^2 x + (2h - 3x)\xi^2]$, weil $i^2 = -1$, und γ) $Q\, i$ (auch aus 3) $= C \,.\, [(h - x)(h - 3x)\xi - \xi^3]\, i$, weil $i^3 = -i$; daher δ) R (wie in 6) $= C \,.\, [(h - x)(h - 3x) - \xi^2]$, oder, wie in 7), durch Vernichtung des ξ (und später C_2 genannt) ε) $R = C \,.\, (h - x)(h - 3x) = 0$. Hieraus folgt entweder $x = h$ oder $x = \frac{h}{3}$; also $M k = C (h - x)^2 \,.\, x$ entweder gleich 0, oder $= C \,.\, \frac{4h^3}{27} = \frac{r^2 \pi}{3h^2} \cdot \frac{4h^3}{27} = \frac{4 \,.\, r^2 \pi h}{81}$ d. i. $\frac{4}{27}$ des gegebenen Kegels. Daß das erste ein Minimum, und das zweite ein Maximum ist, leuchtet von selbst ein; doch wollen wir die Prüfung der Probe wegen nicht übergehen. Im gegenwärtigen Falle ist C_2 (aus α genommen) $= -(2h - 3x)$ und für $x = h$ und $x = \frac{h}{3}$ respektive entweder $= + h$, oder $= - h$; also wird $M k$ für $x = h$ zum Minimum und für $x = \frac{h}{3}$ zum Maximum.

Anmerkung: Warum die Rechnung uns ein zweites Minimum, nämlich $M k = 0$, für $x = 0$, verschwiegen hat, wird der erfahrene Mathematiker leicht finden. Unstreitig trägt die Gleichung einer Curve nie den Zwang in sich, nur einen gewissen Theil (Bogen) von ihr zu umfassen; sondern erstreckt sich vielmehr auf ihren ganzen Verlauf. Aus diesem Grunde bietet sie auch nur das als Maximum oder Minimum dar, was in der ganzen Linie als solches erscheint. Nehmen wir dagegen nur einen Theil der Curve, so werden die Ordinaten der beiden Grenzpunkte desselben allerdings auch als Maxima oder Minima auftreten; jedoch nur für diesen Curventheil gültig und so zu sagen einseitige seyn. — In unserm Falle erstreckt sich die Gl. $k = C (h - x)^2 x$ nicht nur auf den gegebenen Kegel; sondern zugleich auf dessen unendliche Ausdehnung über seinen Boden und seine Spitze (als entgegengesetzter Kegel) hinaus.

Aufgb. In ein elliptisches Sphäroid, welches durch Rotation um die große Achse entstanden ist, den möglichst-größten geraden kreisförmigen Cylinder hinein zu beschreiben.

Aufl.

Aufl. Dieser Cylinder wird offenbar mit seiner Achse in die große Achse a des elliptischen Sphäroids fallen und im Allgemeinen noch seyn:

$z = \frac{p}{a} x (a - x)(a - 2x)\pi$, wenn man die Scheitelgleichung für die große Achse der generirenden Ellipse $y^2 = \frac{p}{a} x (a - x)$ setzt. Man hat also kürzlich:

$$Z = \frac{p\pi}{a} \cdot (a^2 x - 3ax^2 + 2x^3)$$

$$Mz + U = \frac{p\pi}{a} \cdot [a^2 (x + \xi i) - 3a (x + \xi i)^2 + 2 (x + \xi i)^3] =$$
$$\frac{p\pi}{a} [a^2 x - 3ax^2 + 2x^3 + (a^2 - 6ax + 6x^2)\xi i - (3a - 6x)\xi^2 i^2 \text{ etc.}];$$

$Mz = \frac{p\pi}{a}(a^2 x - 3ax^2 + 2x^3)$; $R = C_1 = \frac{p\pi}{a}(a^2 - 6ax + 6x^2) = 0$ daher $x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}})$ und $x = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}})$; also $Mz = -\frac{a^2 p\pi}{6}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ oder $= +\frac{a^2 p\pi}{6}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, welches beides einerlei Cylinder ausdrückt, der aber rücksichtlich seiner Lage für positiv, oder negativ gelten kann, je nachdem man ihn, nach der Richtung der Abscissen, vorwärts, oder ihr entgegen gehend betrachtet. Der positive Werth, welchem $x = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}})$ zum Grunde liegt, ist ein Maximum; denn man hat C_2 d. i. $-(3a - 6x) = -3a\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, also etwas Negatives. Der negative Werth von Mz, welchem $x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}})$ zum Grunde liegt, kann als Minimum angesehen werden, da C_2 positiv wird. — Die Länge des größten oder kleinsten Cylinders ist also $a\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ und sein Durchmesser $= \sqrt{\frac{pa}{3}} = b\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, wenn b die kleine Achse der generirenden Ellipse bedeutet.

Anmerkg. Der elliptische größte Cylinder, wenn man ihn finden will, könnte aus der Gl. $z = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \right\}^2 \pi \,.\, (a - 2x)^2 \,.\, \sqrt{x\,(a - x)}$ gesucht und, der Rationalität wegen, lieber $M\,z^2$ in Frage gestellt werden. Doch ist es vortheilhafter diese Gl. dahin um zu wandeln, daß man statt der Abscisse x, auf der großen Achse, eine andere v, auf der kleinen Achse, einführt; wodurch man die viel einfachere und der frühern ähnliche Gl.: $\iota z = \frac{1}{4} \left\{ \frac{a}{b} \right\} \pi \,.\, v\,(b - v)\,(b - 2v)$, und das Maximum $= \frac{a^2\,p\,\pi}{24} \sqrt{\frac{1}{3}}$ erhält.

Aufgb. Eine gegebene Zahl a so zu theilen, daß das Produkt ihrer beiden Theile ein Maximum wird.

Aufl. Das Produkt $y = x\,(a - x)$ giebt $M\,y + U = a\,(x + \xi\,i) - (x + \xi\,i)^2 = a\,x - x^2 + (a - 2x)\,\xi\,i - \xi^2\,i^2$ d. i. $R = C_1 = a - 2x = 0$ folgl. $x = \frac{a}{2}$ und das Max. $M\,y = \frac{a^2}{4}$; denn $C_2 = -1$ ist zwar keiner Aenderung fähig; aber doch negativ.

Anmerkg. Aehnliche Resultate muß man auch bei Aufsuchung der größten Ordinate des Kreises, der Ellipse; des größten Rechtecks im Dreieck und im Kreise; des größten Parallelepipedums im Cylinder; des größten Cylinders im parabolischen Konoid, und einer Menge anderer finden; da bei allen die nöthige Gleichung von der Form $y = K\,.\,x\,(a - x)$ seyn wird.

Zweite Anmerkg. Ist $y = K\,x\,(a - x)$, und K constant; so hat man $x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{y}{k}}$; also $\frac{y}{k}$ höchstens $= \frac{a^2}{4}$, damit x nicht unmöglich werde. Das Maximum von y muß demnach $= K\,.\,\frac{a^2}{4}$ und der dazu führende Werth von $x = \frac{a}{2}$ seyn. Dies bemerkt auch schon Klügel in seinem math. Wörterbuche unter dem Artikel Größtes und Kleinstes, S. 661 sq.

Aufgb. Wenn $y = \frac{a}{x} + \frac{x}{a} = \frac{a^2 + x^2}{a\,x}$ ist, $M\,y$ zu finden.

Aufl. Die zugehörige Curve ist eine doppelte, mit einer senkrecht durch den Abscissen-Anfangspunkt gehenden Asymptote, wie eine ungefähre Zeichnung sogleich erkennen läßt, und hat zwei absolute Minima, für $x = + a$ und $x = - a$; denn

$$My + U = \frac{a^2 + x^2 + 2x\xi i + \xi^2 i^2}{a(x + \xi i)} = \frac{(a^2 + x^2 + 2x\xi i + \xi^2 i^2)(x - \xi i)}{a(x^2 + \xi^2)}$$

$$= \frac{(a^2 + x^2)x}{a(x^2 + \xi^2)} + \frac{(x^2 - a^2)\xi i}{a(x^2 + \xi^2)} + \frac{x\xi^2 i^2}{a(x^2 + \xi^2)} \text{ etc.}$$

folgl. $R = \frac{x^2 - a^2}{a \cdot x^2} = 0$ d. i. $x = \mp a$. Endlich $C_2 = \frac{x}{a x^2} = \frac{1}{a x}$ entweder $+ \frac{1}{a^2}$ oder $- \frac{1}{a^2}$; weshalb $My = + 2$ als Minimum und $My = - 2$ als relatives Maximum anzusehen ist.

Anmerkg. Jeder Bruch sammt seinem reciproken Werthe ist daher größer als 2.

Zweite Anmerkg. Bei den gebrochenen algebraischen Funktionen wird es von Nutzen seyn, nach der Substitution des $x + \xi i$ statt x, den Nenner der Funktion auf die Form $p + q i$ zu bringen und dann, durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit $p - q i$, möglich zu machen.

Aufg. Von einem Punkte aus der Abscissenlinie (Achse) einer Curve die kürzeste Linie nach der Curve zu ziehen.

Aufl. Diese kürzeste Linie heiße N; die Coordinaten des zugehörigen Curvenpunktes x und y; die Gleichung der Curve $y = f x$, und die Entfernung des gegebenen Punktes vom Abscissen-Anfangspunkte a; so ist $N^2 = y^2 + (a - x)^2 = (f x)^2 + (a - x)^2$.

Das weitere Verfahren erfordert eine spezielle Kenntniß von $f x$; ist im Uebrigen aber dem an allen vorhergehenden Beispielen gezeigten ganz ähnlich.

Anmerkg. Da die Linie N offenbar eine Normale für die Curve seyn muß, weil sie nur dann ein Minimum bilden kann, wenn sie dem getroffenen Elemente des Bogens senkrecht begegnet; so sehen wir hier zugleich eine ganz elementare Methode aufgedeckt, Normalen (N); Subnormalen $(a - x)$; Tangenten $\left\{\frac{y N}{a - x}\right\}$ und Subtangenten $\left\{\frac{y^2}{a - x}\right\}$ an die Curven zu ziehen.

Aufgb. In einen rechten Winkel werden lauter gleichflächige Rektangel hineingeschoben und durch ihre freie Ecke eine Curve gelegt; deren Gleichung also $x\,y = a^2$ d. h. die der gleichseitigen Hyperbel ist. Man wünscht, da diese Curve zwei Asymptoten hat, die kürzeste Tangente zwischen diesen Asymptoten zu kennen.

Aufl. Man könnte hier allerdings schon die Andeutungen der vorigen Anmerkung benutzen; jedoch leistet auch folgendes Verfahren Genüge:

Jede Tangente bildet mit den Asymptoten-Schenkeln ein rechtwinkliges Dreieck, worin das Rechteck $x\,y$ das größeste ist, da kein zweites im Dreieck ihm gleich seyn kann, ohne die Tangente zur Sekante zu machen. Das größte Rechteck bringt unsere Methode aber für den Fall heraus, daß seine Seiten die Hälften der Katheten sind. Daher ist die Tangente, welche — beiläufig gesagt — im Berührungspunkte immer halbirt wird, im Allgemeinen $T = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$, oder, rational gemacht, $T^2 = 4\,(x^2 + y^2) = 4\left\{x^2 + \frac{a^4}{x^2}\right\} = 4a^2\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2}\right\}$. Die weitere Ausführung ist, wegen der einleuchtenden Identität dieses Ausdrucks mit dem in der vorletzten Aufgabe, kaum noch nöthig. Zum Ueberflusse erinnere ich nur, daß man $\frac{u}{c}$ statt $\frac{x^2}{a^2}$ substituiren könnte, und daß der constante Faktor $4a^2$ in der Rechnung nichts zu ändern vermag. Man findet $M\,T = 2a\sqrt{2}$ als Minimum.

Wenn bis jetzt nur einfach-veränderliche Funktionen im Allgemeinen vorausgesetzt und auch in den Beispielen angewandt wurden; so geschah dieses keinesweges in der Absicht, die mehrfach-veränderlichen mit Stillschweigen zu übergehen; sondern nur, um das bei ihnen eintretende Verfahren zur Aufsuchung des Maximums und Minimums gehörig vorzubereiten.

Alle anscheinende Schwierigkeit und Fremdartigkeit wird dem Rechner hier sogleich schwinden, wenn er die mehrfach-veränderliche Funktion vor der Hand als eine einfach-veränderliche betrachtet und in dieser Rücksicht genau so, wie früher, verfährt. Nach Beendigung dieser ersten Rechnung bleibt nun aber, wenn etwa $y = f\,(x, x')$ war und vorläufig x' constant gesetzt wurde, $M\,y = \varphi\,x'$ d. h. noch als Funktion von x' übrig. Es muß also diese Größe $M\,y$ selbst wieder, in Beziehung auf x', gewisser Grenzwerthe fähig seyn und daher das nämliche Verfahren zu wiederholen erlauben. Ein solches allmäliges Fortschreiten zu einem immer vollständiger beschränkten $M\,y$ tritt natürlich bei allen, noch so vielfach veränderlichen Funktionen ein, und führt endlich jedesmal zu einem konstanten Werthe von My, wenn das erforderliche Verfahren so oft angewendet ist, als Veränderliche in der behandelten Funktion stecken. Ein Paar Beispiele zur Erläuterung!

Aufgb. In eine Kugel das größte Parallelepipedum zu beschreiben.

Aufl. Heißen die drei aus einer Ecke des Parallelepipedums auslaufenden Kanten x, x' und x'' und der Radius der Kugel r; so hat man das Parallelepipedum $y = x \,.\, x' \,.\, x''$ und $x^2 + x'^2 + x''^2 = 4r^2$; folgl. $y = x \,.\, x' \,.\, \sqrt{4r^2 - x^2 - x'^2}$, oder, der Rationalität wegen, $y^2 = x^2 \,.\, x'^2 \,.\, (4r^2 - x^2 - x'^2)$.

Um die Wiederholung einer schon früher durchgeführten Rechnung hier zu vermeiden, setze man $y^2 = Y$; das vorläufig konstante $x^2 = K$; $4r^2 - x^2 = a$ und $x'^2 = X$; so ist $Y = K \,.\, X\,(a - X)$ die oben betrachtete Funktion, welche uns $X = \frac{a}{2}$ und $MY = K \,.\, \frac{a^2}{4}$ als Maximum gab. Auf die anfängliche Bezeichnung zurückgeführt würde dieses heißen: $My^2 = x^2 \,.\, \left\{\frac{4r^2 - x^2}{2}\right\}^2$; oder $My = x\left\{\frac{4r^2 - x^2}{2}\right\}$. Daher ist, wenn wir jetzt die Veränderlicheit des x berücksichtigen, von neuem:

$$M(My) + U = (x + \xi i) \,.\, \left\{\frac{4r^2 - x^2 + \xi^2 - 2x\xi i}{2}\right\}$$

$$= \left\{\frac{4r^2 - x^2 + \xi^2}{2}\right\} x + \left\{\frac{4r^2 - x^2 + \xi^2}{2} - x^2\right\} \xi i - x\xi^2 \,.\, i^2.$$

Also $\frac{4r^2 - x^2 + \xi^2}{2} - x^2 = 0$, woraus für $\xi = 0$, $x^2 = \frac{4}{3} r^2$ folgt. Man hat nun $M(My) + U = \left\{\frac{4r^2 - x^2 + 3\xi^2}{2}\right\} x$ und $M(My) = \left\{\frac{4r^2 - x^2}{2}\right\} x = (2r^2 - \frac{2}{3} r^2)\, \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$, welches ein Maximum ist, da $C_2 = -x$ negativ bleibt, wenn man den absoluten Werth von x d. i. $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ setzt.

Es ist leicht zu übersehen, daß das letzte Resultat $\frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$ überhaupt ein Maximum und zwar der Würfel ist; denn es wird $x = x' = x''$.

Eine andere Art des Verfahrens wäre die, daß man nicht nach einander — unserer Bezeichnung gemäß — My (in Beziehung auf x), $M(My)$ (in Beziehung auf x') u. s. w.; sondern gleichzeitig My nur in Beziehung auf x, My nur in Beziehung auf x' u. s. w. suchte, die dadurch erhaltenen Bedingungsgleichungen für x, x' etc. ($R = 0$, $R' = 0$ u. s. w.) in ein System zur Lösung zusammenstellte, und die daraus erhaltenen Werthe von x, x' etc. anwendete. Um dieses Verfahren kürzer zu bezeichnen, erinnere ich an seine vollkommene Aehnlichkeit mit dem, welches die Differentiations-Methode bei mehrfach veränderlichen Größen aufzustellen pflegt. Der Deutlichkeit wegen und zur Ueberzeugung des zweifelnden Lesers möge das eben verlassene Beispiel wieder zur Probe dienen. Es war $y = x \cdot x' \sqrt{4r^2 - x^2 - x'^2}$; daher für My in Beziehung auf x' genommen: $R' = \frac{4r^2 - x^2}{2} - x'^2 = 0$ und, wegen der Symmetrie der gegebenen Funktion, auch für My, in Beziehung auf x genommen: $R = \frac{4r^2 - x'^2}{2} - x^2 = 0$. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich, wie vorhin, $x^2 = x'^2 = \frac{4}{3}r^2$; also, wegen $x^2 + x'^2 + x''^2 = 4r^2$, auch $x''^2 = \frac{4}{3}r^2$ und $M(My) = \frac{2r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{8r^3}{3 \cdot \sqrt{3}}$.

Anderes Beispiel. Um das größte Viereck im Kreise zu finden, setze man dessen Inhalt
$y = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin} x + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin} x' + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin} x'' + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin} x'''$, indem man durch r den Radius und durch x, x', x'', x''' die zwischen den Radien der Eckpunkte liegenden Centriwinkel bezeichnet.

Die Einführung der Bedingung: $x + x' + x'' + x''' = 360°$ und eine kleine goniometrische Umformung macht

$$y = -r^2 \operatorname{Sin}\left(\frac{x' + x''}{2}\right) \cdot \left\{\operatorname{Cos}\left(x + \frac{x' + x''}{2}\right) - \operatorname{Cos}\left(\frac{x' - x''}{2}\right)\right\},$$

eben so auch

$$y = -r^2 \operatorname{Sin}\left(\frac{x + x''}{2}\right) \cdot \left\{ \operatorname{Cos}\left(x' + \frac{x + x''}{2}\right) - \operatorname{Cos}\left(\frac{x - x''}{2}\right) \right\},$$ oder

$$y = -r^2 \operatorname{Sin.}\left(\frac{x' + x}{2}\right) \cdot \left\{ \operatorname{Cos}\left(x'' + \frac{x' + x}{2}\right) - \operatorname{Cos}\left(\frac{x' - x}{2}\right) \right\};$$ denn wegen der Symmetrie der Funktion y darf x mit x', so wie mit x'' vertauscht werden. Man hat also der Form nach, je nachdem man die Grenz-Ueberschreitung des y zuerst in Beziehung auf x, oder auf x', oder auf x'' betrachten will, folgende drei Gleichungen:

$$y = A + B \operatorname{Cos.} (x + \sigma)$$
$$y = A' + B' \operatorname{Cos} (x' + \sigma')$$
$$y = A'' + B'' \operatorname{Cos} (x'' + \sigma''),$$

worin die Werthe von A, B, σ leicht zu erkennen und während der Veränderlichkeit des x konstant sind. Etwas Aehnliches gilt im zweiten und dritten Falle, und man braucht daher nur für den ersten Fall die Gleichung $R = 0$ zu finden, da alsdann die Vertauschung des x mit x', oder mit x'', im Ausdrucke R die beiden andern Gleichungen $R' = 0$ und $R'' = 0$ giebt.

Setzt man nun aber $x + \xi i$ statt x; so ist $My + U = A + B \operatorname{Cos} \sigma . \operatorname{Cos} (x + \xi i) - B \operatorname{Sin} \sigma \operatorname{Sin} (x + \xi i)$, oder, wenn $\operatorname{Sin} (x + \xi i) = p + q i$; also $\operatorname{Cos} (x + \xi i) = \sqrt{1 - (p + q i)^2} = \sqrt{1 - p^2 + q^2 - 2 p q i} = (1 - p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{p q i}{(1 - p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} - \text{etc.}$ (nach dem binomischen Lehrsatze) gesetzt wird,

$$My + U = A + B \operatorname{Cos} \sigma \left\{ \sqrt{1 - p^2 + q^2} - \frac{p . q i}{\sqrt{1 - p^2 + q^2}} - \text{etc.} \right\}$$

$- B \operatorname{Sin} \sigma . (p + q i)$. Also hat man $R = \frac{- B \operatorname{Cos} \sigma . p}{\sqrt{1 - p^2 + q^2}} - B \operatorname{Sin} \sigma = 0$ oder vielmehr, weil $q = 0$ seyn muß, $\frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} = - \frac{\operatorname{Sin} \sigma}{\operatorname{Cos} \sigma}$. Da mit der Vernichtung des q aber auch die des ξ eintritt, so hat man $p = \operatorname{Sin} x$ d. h. $\sqrt{1 - p^2}$

$= \text{Cos}\ x$ und deshalb $\text{tng}\ x = -\ \text{tng}\ \sigma = -\ \text{tng} \left\{\frac{x' + x''}{2}\right\}$; folgl. ist 1) $x = 180° - \left\{\frac{x' + x''}{2}\right\}$ und wegen der oben erwähnten Symmetrie und der darauf beruhenden Vertauschbarkeit des x mit x' und x'', auch

2) $x' = 180° - \left\{\frac{x + x''}{2}\right\}$ und 3) $x'' = 180° - \left\{\frac{x' + x}{2}\right\}$

Diese drei Gleichungen geben $x = x' = x'' = 90°$ und als größtes Viereck das Quadrat.

Anmerkg. Wie schätzenswerth es ist in der Mathematik allgemeine Methoden zu besitzen; so ist es auf der andern Seite doch auch rathsam, daß der Rechner sich ihrer nicht ohne alle Ausnahme bediene; sondern die Vortheile einzelner Fälle erwägend und benutzend davon abweiche. Diese Lehre möchte sich auch im gegenwärtigen Beispiele als nützlich bewähren. Man setze nur — wozu die bekannte goniometrische Transformation einer Sinussumme und einer Cosinussumme leicht führt —

$y = 2r^2\ \text{Sin} \left\{\frac{x + x'}{2}\right\} \text{Sin} \left\{\frac{x + x''}{2}\right\} \text{Sin} \left\{\frac{x' + x''}{2}\right\}$; so ist klar, daß y so groß, wie möglich, wird, wenn man jeden der veränderlichen Faktoren so groß, wie möglich, macht; dies wäre, da alle drei von einander unabhängig sind,

$\text{Sin} \left\{\frac{x + x'}{2}\right\} = 1$; $\text{Sin} \left\{\frac{x + x''}{2}\right\} = 1$ und $\text{Sin} \left\{\frac{x' + x''}{2}\right\} = 1$. Hieraus hätte man sogleich: $\frac{x + x'}{2} = 90°$, $\frac{x + x''}{2} = 90°$ und $\frac{x' + x''}{2} = 90°$ d. h. $x = x' = x'' = 90°$

Der erfahrene Rechner wird bald die Symmetrie als die abkürzende Ursache erkennen, und überhaupt bemerken müssen, daß sie überall für das Maximum und Minimum Gleichheit der Variabeln zur Bedingung macht. Wer diese wichtige, Zeit und Mühe sparende, Bemerkung noch an andern Beispielen erproben will, wird dazu, unter unzähligen andern Fällen, auch bei den Aufgaben: das größte Neck in einen Kreis zu beschreiben; mit einem gegebenen Faden die größte Fläche zu umspannen; aus einer Zahl (a) m Theile zu machen, deren Produkt ein Maximum ist; der Funktion

$\frac{x}{y}$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, oder $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy}$ den kleinsten Werth zu geben; u. s. w., gute Gelegenheit finden.

Es bleibt mir nun noch übrig, das eben angezeigte zweite Verfahren zu rechtfertigen. Gesetzt wir haben $y = f(x, x', x'')$ und M y in Beziehung auf x, welches ich der Kürze und besseren Uebersicht wegen von jetzt ab durch $\frac{M}{x}.y$ bezeichnen werde, gebe die Gleichung $R = 0$, so ist nicht zu bezweifeln, daß hierin x in einer solchen Verbindung mit dem noch unbestimmten x' und x'' auftritt, daß es — was diese auch seyn mögen — vermöge der ihm durch die Bedingung $R = 0$ ertheilten Bedeutung seines Theiles die Funktion y in M y umschafft. Dasselbe gilt von x' in der Gleichung $R' = 0$ und von x'' in der Gleichung $R'' = 0$, welche Folgen der Operationen $\frac{M}{x'}.y$ und $\frac{M}{x''}.y$ seyn mögen. Setzt man daher die Gleichungen $R = 0$, $R' = 0$, und $R'' = 0$ zu einem System zusammen, so ist klar, daß man dem x in allen Gleichungen eine gleiche Bedeutung und zwar von der Form giebt, wie die Gleichung $R = 0$ sie ihm auferlegt. Dasselbe ist von x' und x'' einzusehen und aus diesem Grunde zu behaupten, daß die Lösung des ganzen Gleichungssystems x, x' und x'' in bestimmten, zugleich aber solchen Bedeutungen geben werde, welche vermöge der ihnen respektive durch die Gleichungen $R = 0$, $R' = 0$ und $R'' = 0$ aufgeprägten Formen geeignet sind, jede ihres Theils, ein M y hervorzurufen. — Was diese spezielle Betrachtung lehrt, läßt sich mit gleicher Ueberzeugung auch in allen erweiterten Fällen annehmen und gebrauchen.

Nicht sogleich möchte man sich aus der Verwirrung herausfinden, welche der vorgefaßte Begriff von einem Maximum und Minimum einfacher Funktionen bei den mehrfachen leicht verursachen könnte, sobald man untersuchte, was unter M M M y zu verstehen sey, und die mitunter widersprechenden Zeugnisse der verschiedenen C_2 zur Entscheidung herbeizöge. — Fände man jedes C_2 negativ, oder jedes C_2 positiv, so wäre kein Zweifel, daß man im ersten Falle ein Totalmaximum, im zweiten ein Totalminimum der mehrfachen Funktion besäße. Wie nun aber, wenn unter den negativen C_2 auch positive, und umgekehrt, vorkämen? — Dieser Frage eine kleine Erörterung zu widmen, um eine deutliche Ansicht von der Sache zu gewinnen, möchte der geneigte Leser mit mir nicht über-flüssig finden.

Um zuvörderst nur die Möglichkeit einer solchen Erscheinung zu begreifen, denke man daran, daß sich alle einfachen Funktionen, trotz der großen Verschiedenheit und Mannigfaltigkeit, nach folgenden Charakteren in drei Klassen sammeln lassen: 1) von solchen Formen, vermöge welcher sie nur der Maxima fähig sind; 2) von solchen, die, als wären sie reciprok, nur Minima zulassen, und 3) von Formen, aus den vorigen gemischt, die beides erlauben. — Nun ist sogleich klar, daß mehrfache Funktionen, wegen der Willkührlichkeit ihrer Zusammensetzung, nicht in Beziehung auf jede Variabele nothwendig nur Formen der einen, oder der andern Klasse in sich vereinigen; sondern etwa in Beziehung auf x zu der ersten, in Beziehung auf x′ aber zur zweiten Klasse gehören können. Diese Vermischung der Formen in beliebiger Mannigfaltigkeit gedacht führt zu der Einsicht, daß nur zufällig alle C_2 negativ, oder alle positiv werden; oder daß eine mehrfache Funktion nicht jedesmal ein Totalmaximum, oder ein Totalminimum haben könne. Hieraus ergiebt sich dann auch ferner, daß es bei Verschiedenheit in den Vorzeichen der C_2 schwankend bleibt, ob man das Endresultat für M M M y als Maximum, oder als Minimum, der mehrfachen Funktion im Ganzen ansehen solle. Eigentlich ist also bei einer mehrfachen Funktion im Ganzen nur Ausnahmsweise von einem Maximum und Minimum zu sprechen, und im Allgemeinen diese Ansicht nicht zu gestatten. Vielmehr erfordern dergleichen Funktionen, daß man frage, was aus ihnen in Rücksicht auf jede einzelne Variabele werden kann. — Noch einige nicht ungeschickte Gedanken, das Wesen des M M M y zu beleuchten, unterdrücke ich hier theils in der Hoffnung, daß der Leser von Interesse selbst die Spur dazu finden werde; theils aber auch in der ökonomischen Rücksicht, zu dem Reste des spärlichen Programmenraumes für ein drittes noch mögliches Verfahren bei Aufsuchung der Funktional-Grenzwerthe einer Spanne Zulage zu gewinnen. Um hierzu sogleich übergehen zu können, und die leicht eintretende Undeutlichkeit zu großer Abstraktion zu vermeiden, möge folgender besonderer Fall unsere Gedanken fesseln und jenem Verfahren zur Grundlage dienen.

Aufgb. Den größten oder kleinsten Werth des Ausdruckes:
$c\,(a\,x - x'\,x'')\,x + a\,(b\,x' - x\,x'')\,x' + b\,(c\,x'' - x\,x')\,x''$ zu finden.

Aufl. Da hier x, x′ und x″ gänzlich von einander unabhängig sind, und deshalb im Falle eines Supermaximums oder Subminimums als gleichzeitig ihre mögliche Grenze überschreitend gedacht werden können; so darf man natürlich, wenn der gegebene Ausdruck durch y bezeichnet wird, sogleich setzen:

$$MMMy + U = c\,[a\,(x + \xi i) - (x' + \xi' i)\,(x'' + \xi'' i)]\,(x + \xi i) + a\,[b\,(x' + \xi' i) - (x + \xi i)\,(x'' + \xi'' i)]\,(x' + \xi' i) + b\,[c\,(x'' + \xi'' i) - (x + \xi i)\,(x' + \xi' i)]\,(x'' + \xi'' i).$$

Bei der Rückkehr des y zu seinen äußersten Grenzen, die rücksichtlich des x, x′ und x″ Statt finden, muß nun sowohl alles, was in ξi multiplizirt ist, wie das in $\xi' i$, oder $\xi'' i$ Multiplizirte für sich null seyn, da auch ξi, $\xi' i$ und $\xi'' i$ gänzlich von einander unabhängig sind, und man wird gestützt auf diese Betrachtung folgende drei Gleichungen haben:

$$c\,a\,x - c\,(x' + \xi' i)\,(x'' + \xi'' i) + c\,a\,x - a\,(x'' + \xi'' i)\,(x' + \xi' i) - b\,(x' + \xi' i)\,(x'' + \xi'' i) = 0$$

$$-c\,(x'' + \xi'' i)\,(x + \xi i) + a\,b\,x' - a\,(x + \xi i)\,(x'' + \xi'' i) + a\,b\,x' - b\,(x + \xi i)\,(x'' + \xi'' i) = 0$$

$$-c\,(x' + \xi' i)\,(x + \xi i) - a\,(x + \xi i)\,(x' + \xi' i) + b\,c\,x'' - b\,(x + \xi i)\,(x' + \xi' i) + b\,c\,x'' = 0,$$

von denen die erste das in ξi, die zweite das $\xi' i$ und die dritte das in $\xi'' i$ multiplizirte Aggregat enthält. Eine Vereinfachung dieser Gleichungen, die auch sogleich bei ihrer Herleitung hätte bewerkstelligt werden können, liegt in der eben ausgesprochenen Unabhängigkeit des ξ, ξ' und ξ'' von einander, weshalb man alle drei null setzen kann. Alsdann ist

$$c\,a\,x - c\,x'\,x'' + c\,a\,x - a\,x''\,x' - b\,x'\,x'' = 0$$

$$-c\,x''\,x + a\,b\,x' - a\,x\,x'' + a\,b\,x' - b\,x\,x'' = 0$$

$$-c\,x'\,x - a\,x\,x' + b\,c\,x'' - b\,x\,x' + b\,c\,x'' = 0,$$ oder in besserer Ordnung:

$$2\,a\,c\,x = (a + b + c)\,x'\,x''$$

$$2\,a\,b\,x' = (a + b + c)\,x\,x''$$

$$2\,b\,c\,x'' = (a + b + c)\,x\,x'$$

Hieraus hat man $x\,x'\,x'' = \dfrac{8\,a^2\,b^2\,c^2}{(a + b + c)^3}$; $x^2 = \dfrac{4\,b^2\,a\,c}{(a + b + c)^2}$

$x'^2 = \dfrac{4\,c^2\,a\,b}{(a + b + c)^2}$; $x''^2 = \dfrac{4\,a^2\,b\,c}{(a + b + c)^2}$; also

$$MMMy = a\,c\,x^2 + a\,b\,x'^2 + b\,c\,x''^2 - (a + b + c)\,x\,x'\,x'' = \frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(a + b + c)^2}$$

Was für einen Namen dieses Resultat verdient, wollen wir vorläufig noch ungewiß lassen, und uns zunächst an die Nachweisung der Identität der auf unserm Wege gefundenen Bedingungsgleichungen für das Maximum oder Minimum mit dem durch die Differential-Methode hergeleiteten machen, um daran die Erörterung unseres MMMy, wie jedes im Allgemeinen, zu knüpfen. Hiezu bedarf es wieder der Hülfe des allgemeinen Entwickelungs-Theorems der Differentialrechnung, welches wir der nicht zu großen Ausdehnung wegen nur auf eine dreifach-veränderliche Funktion $y = f(x, x', x'')$ anwenden wollen, indem wir diese Variabeln sich respektive um ξi, $\xi' i$ und $\xi'' i$ ändern lassen. Wir haben demnach:

$$
\begin{aligned}
f(x + \xi i,\ x' + \xi' i,\ x'' + \xi'' i) = y &+ \frac{dy}{dx} \cdot \xi i + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{\xi^2 i^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.} \\
&+ \frac{dy}{dx'} \cdot \xi' i + \frac{d^2 y}{dx \cdot dx'} \cdot \frac{\xi i \cdot \xi' i}{1 \cdot 1} + \text{etc.} \\
&+ \frac{dy}{dx''} \cdot \xi'' i + \frac{d^2 y}{dx \cdot x''} \cdot \frac{\xi i \cdot \xi'' i}{1 \cdot 1} + \text{etc.} \\
&+ \frac{d^2 y}{dx'^2} \cdot \frac{\xi'^2 i^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.} \\
&+ \frac{d^2 y}{dx' dx''} \cdot \frac{\xi' i \cdot \xi'' i}{1 \cdot 1} + \text{etc.} \\
&+ \frac{d^2 y}{dx''^2} \cdot \frac{\xi''^2 i^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Nach unserer Vorschrift wäre also, wenn wir zuerst die Coeffizienten des ξi, dann des $\xi' i$ und endlich des $\xi'' i$ zusammenstellen und jede Gruppe $= 0$ setzen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx\, dx'} \cdot \xi' i + \frac{d^2 y}{dx\, dx''} \cdot \xi'' i + \text{etc.} = 0 \\
&\frac{dy}{dx'} + \frac{d^2 y}{dx\, dx'} \cdot \xi i + \frac{d^2 y}{dx'\, dx''} \cdot \xi'' i + \text{etc.} = 0 \\
&\frac{dy}{dx''} + \frac{d^2 y}{dx\, dx''} \cdot \xi i + \frac{d^2 y}{dx'\, dx''} \cdot \xi' i + \text{etc.} = 0.
\end{aligned}
$$

Da nun voraus zu sehen ist, daß der Entwickelung der Funktion gemäß, wornach schon alle Glieder der zweiten Vertikalkolumne zweiïgig sind, die etwa noch hinzuzu fügenden Glieder in der Entwickelung mehr als zweizig; folglich in den Gleichungen selbst, wo sie schon vorher ein ξ eingebüßt haben, wenigstens noch einzig erscheinen, und da alle nun noch in der Gleichung vorkommenden ξ, jedes für sich, gleich null gesetzt werden; so ist der Erfolg davon offenbar derselbe, wie nach den Bedingungen der Differential-Methode, nämlich: $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx'} = 0$ und $\frac{dy}{dx''} = 0$.

Der ganze Unterschied läge also höchstens in dem rücksichtlich der Richtigkeit unwesentlichen Umstande einer abweichenden Berechnung der in $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx'}$ und $\frac{dy}{dx''}$ involvirten Quantitäten.

Was nun aber die Entdeckung des Kriteriums betrifft, wornach wir die Bedeutung des MMMy auf diesem Wege der Behandlung zu bestimmen haben, so wird es nothwendig seyn, vorher die Bedingungen aufzusuchen, welche das auf eine richtige Ansicht gestützte Verfahren mit sich führt. Denken wir uns also in der vorangehenden Entwickelung ξi, $\xi' i$ und $\xi'' i$ als mögliche Größen und deshalb durch h, h' und h'' vorgestellt; zugleich aber x, x' und x'' mit den Werthen verwechselt, die sie nach den Gl. $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx'} = 0$ und $\frac{dy}{dx''} = 0$ haben; folgl. y in dem Zustande, den wir durch MMMy bezeichnen: so werden sowohl die Differentialquotienten der zweiten Vertikalkolumne $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx\,dx'}$, $\frac{d^2y}{dx\,dx''}$ u. s. w., als aller etwa noch folgenden, lauter konstante Größen, und die entsprechenden Glieder selbst von h^2, hh', hh'' u. s. w. abhängig. Sollen diese Glieder nun über die Bedeutung des MMMy entscheiden, so ist dem h, h', h'' etc. gegenseitige Unabhängigkeit und ein gewisser begrenzter Grad von Veränderlichkeit nicht abzusprechen. Die Unabhängigkeit leuchtet ein; was aber die nicht ganz unumschränkte Zu- oder Abnahme des h, h', h'' etc. betrifft, so muß ich darauf hindeuten, daß diese Größen in der allgemeinen Betrachtung ihre Veränderung nur zwischen den engen Grenzen einer unendlich kleinen Größe behaupten können. Denn es ist nicht zu leugnen, daß in beliebiger, also auch in unmeßbarer Nähe eines MMMy, aber auf verschiedenen Seiten desselben, ein anderes Maximum oder Minimum liegen könnten, die zufällig respektive einem $x + h$, $x' + h'$, $x'' + h''$ und einem $x - h$, $x' - h'$, $x'' - h''$ zugehörten, und daß es dann ein Irrthum wäre, das gefundene M M M y nicht als ein solches gelten zu lassen, weil $x \mp h$, $x' \mp h'$, $x'' \mp h''$ nicht beidemal etwas Größeres, oder beidemal etwas Kleineres, als M M M y gäben. Wir sehen daher wieder, wie ich schon früher bei Gelegenheit der einfachen Funktionen erwähnte, daß man hauptsächlich die unmittelbar an M M M y angrenzenden Werthe der mehrfachen Funktion mit ihm vergleichen und deshalb die hierzu dienenden Inkremente h, h′, h″ etc. für alle Fälle so klein, wie möglich, setzen müsse, um zu erfahren, in welcher Bedeutung M M M y auftritt. — Gehen wir nun auf die Bedingung der Unabhängigkeit der hs von einander zurück, vermöge welcher man $h'' = h' = h$ setzen kann, und bezeichnen nun, da in der zweiten Kolumne der obigen Entwickelung h^2, in der dritten h^3 u. s. w. gemeinschaftlicher Faktor wird, diese ganzen Kolumnen mit $K_2 h^2$, $K_3 h^3$ u. s. w.; so folgt wieder, daß man, um sowohl bei gleichen als entgegengesetzten Vorzeichen der hs immer einerlei Vorzeichen der Aggregatsumme $K_2 h^2 + K_3 h^3 + K_4 h^4 +$ etc. zu erhalten, $K_2 h^2$ als überwiegend, d. h. $K_2 h^2 > K_3 h^3 + K_4 h^4 +$ etc., oder auch $K_2 > K_3 h + K_4 h^2 +$ etc. annehmen müsse. Da dieser Umstand der nothwendigen unendlichen Kleinheit der hs zufolge jedesmal in Erfüllung geht, so giebt wieder lediglich die Kolumne K_2 das Kriterium über die Bedeutung des M M M y; doch liegt hierin soviel Verwickelung und Stoff zu besondern Betrachtungen, daß wir, um Beleuchtung der Sache willen, genöthigt seyn möchten in die Einzelheiten und Eigenthümlichkeiten des Ausdruckes K_2 einzugehen. Vor allen Dingen würde hierbei aber immer der Gedanke fest zu halten seyn, daß wir das Vorzeichen von K_2 erforschen wollen. In diesem Falle können wir von zwei Annahmen ausgehn, nämlich 1) daß alle zu K_2 gehörigen Glieder vollständig vorhanden sind, oder 2) daß einige fehlen. — Gilt die erste Annahme und man setzt bei der Untersuchung über die Bedeutung des M M M y lauter gleichbezeichnete Inkremente (h) voraus, wodurch das Produkt aus je zweien immer positiv wird, so hat man es in dem Ausdrucke K_2 nur mit den eigenthümlichen Vorzeichen der Glieder $\frac{d^2 y}{d x^2}$, $\frac{d^2 y}{d x\, d x'}$, $\frac{d^2 y}{d x\, d x''}$, $\frac{d^2 y}{d x'^2}$, $\frac{d^2 y}{d x'\, d x''}$, $\frac{d^2 y}{d x''^2}$ u. s. w. zu thun, und kann, falls K_2 negativ wird, M M M y ein bedingtes Totalminimum, falls es positiv wird, ein bedingtes Totalmaximum nennen. In unserm letzten Beispiele, wo $K_2 = ca + ab + bc - (a + b + c)(x + x' + x'')$ und $x = \mp \frac{2b\sqrt{ac}}{a+b+c}$

$x' = \mp \frac{2c\sqrt{ab}}{a+b+c}$, $x'' = \mp \frac{2a\sqrt{bc}}{a+b+c}$, also nach dieser Substitution $K_2 = (ca + ab + bc) \pm 2(b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} + a\sqrt{bc})$ ist, müssen wir M M M y, wenn wir die positiven Werthe des x, x′ und x″ genommen haben, ein bedingtes Totalmaximum, und sind ihre negativen Werthe gesetzt, ein bedingtes Totalminimum nennen; denn es ist

$2(b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} + a\sqrt{bc}) > ca + ab + bc$, folglich K_2 das erstemal negativ, das anderemal positiv. Wie es sich mit den übrigen sechs Werthen verhält, welche M M M y wegen der doppelten und beliebig zu setzenden Vorzeichen des x, x′, x″ nach den Gesetzen der Combination haben kann, muß in jedem Falle besonders untersucht werden und erfordert eine speziellere Kenntniß des a, b und c.

Nimmt man ferner, wieder unter der zuerst genannten Bedingung der Vollständigkeit aller zu K_2 gehörigen Glieder, die Inkremente h nicht bei allen Variabeln mit gleichen Zeichen; so hängt die Untersuchung davon ab, ob

$\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{d^2 y}{d x'^2} + \frac{d^2 y}{d x''^2} + \text{etc.}\right\} > \frac{d^2 y}{d x\, d x'} + \frac{d^2 y}{d x\, d x''} + \frac{d^2 y}{d x'\, d x''}$ + etc. ist, oder nicht, wobei natürlich dem x, x′, x″ etc. die in M M M y gebrauchten Werthe zum Grunde liegen. Im ersten Falle würde dieses Verhältniß sich auch dann nicht ändern, wenn jedes h sein Zeichen umkehrt, d. h. man würde, je nachdem $\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{d^2 y}{d x'^2} + \frac{d^2 y}{d x''^2}$ + etc. positiv oder negativ wäre, in M M M y ein Totalminimum oder Totalmaximum haben, beides aber insofern noch bedingt, als diese Behauptung nur für gleiche Inkremente (h) gilt. Ist dagegen der zweite Fall wahr, daß nämlich $\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{d^2 y}{d x'^2} + \frac{d^2 y}{d x''^2} + \text{etc.} < \frac{2\, d^2 y}{d x\, d x'} + \frac{2\, d^2 y}{d x'\, d x''} + 2\frac{d^2 y}{d x'\, d x''}$ + etc. ist, so läßt sich von M M M y nichts aussagen; denn würde bei der einen Zeichen-Annahme die rechte Seite dieses Ausdrucks eine positive Summe, also auch K_2 positiv werden, so müßte sie für die entgegengesetzte Zeichen-Annahme negativ, also auch K_2 negativ ausfallen. Es gäbe demnach zunächst dem M M M y einen größern auch einen kleinern Werth von y, oder M M M y wäre weder ein Maximum noch ein Minimum. — Sonderbar! Nun dann lügen alle unsere Methoden, möchte man vielleicht übereilt sagen. Doch nicht so! Wir können die Wahrheit unserer Rechnungs-Aussagen noch retten, wenn wir nicht verlangen, daß sie uns fast ganz unbedingte Grenzwerthe angeben sollen. Wer bei den vorangehenden Betrachtungen nicht übersehen hat, daß von einem absoluten Total-Minimum oder Maximum noch gar nicht die Rede war; sondern daß im Gegentheil das gefundene M M M y nur in Rücksicht auf gleiche und gleichbezeichnete, oder doch wenigstens in Rücksicht auf gleiche Inkremente (h) als Grenzwerth auftrat, der wird es natürlich finden, daß ein solches M M M y auch wohl andere, als die bisher gemachten Bedingungen, erheischen kann, um die Rolle eines Grenzwerthes zu spielen. — Und dieses ist in der That so, wenn man von der Forderung abgeht, in M M M y bei gleichzeitiger Veränderung aller Variabeln einen Grenzwerth zu haben. Denn prüft man das Resultat M M M y nach einzelnen, abgesonderten, Rücksichten, d. h. läßt man nur den in M M M y steckenden Werth von x, oder nur den Werth von x′ u. s. w. sich ändern; so wird sich unstreitig finden, daß M M M y seinen Charakter behauptet. Zugleich wird man wahrnehmen, daß die früher festgehaltene Bedingung von der Gleichheit aller hs hier füglich aufgegeben werden kann. Zur Ueberzeugung rufe man sich nur die Glieder der zweiten Kolumne aus der Entwickelung des $f(x + h, x' + h', x'' + h'')$ ins Gedächtniß zurück, und setze h′ und h″ gleich null, wenn man die Bedeutung des M M M y nur in Beziehung auf x (d. h. nur so lange x allein sich ändern darf) betrachten will; so bleibt in diesem Falle von der ganzen Kolumne allein $\frac{d^2 y}{d x^2} \cdot \frac{h^2}{1.2}$ übrig. Auf ähnliche Weise würde nur $\frac{d^2 y}{d x'^2} \cdot \frac{h'^2}{1.2}$, oder $\frac{d^2 y}{d x''^2} \cdot \frac{h''^2}{1.2}$ übrig bleiben. Hierbei sieht man nun aber ein, daß wegen der zweiten Potenz das Zeichen der Inkremente seinen Einfluß auf die Bezeichnung des ganzen restirenden Gliedes verliert, und daß $\frac{d^2 y}{d x^2}$ d. i. der in $\xi^2 i^2$ multiplizirte Coeffizient durch sein Zeichen allein entscheidet, ob M M M y in Beziehung auf x und bei Unveränderlichkeit der übrigen, in den Grenzwerth-Zustand getretenen, Variabeln ein Maximum oder Minimum sey. Diese Untersuchung des Vorzeichens muß sich für x′ bei $\frac{d^2 y}{d x'^2}$ d. i. bei den Coeffizienten von $\xi'^2 i^2$, und ähnlich

für

für die übrigen Variabeln wiederholen. Eines solchen Verfahrens haben wir uns schon früher bedient und darauf besonders am Ende der zweiten, mehrfache Funktionen betreffenden, Maximirungs-Methode hingedeutet. Ich glaube nun den Leser auf den Standpunkt gestellt zu haben, von wo aus er leicht einsehen kann, an welche Bedingungen sich die Richtigkeit der dort ausgesprochenen Behauptungen knüpft, und wie selten es überhaupt vorkommen werde, daß ein gewisses M M M y ein absolutes Totalmaximum oder Minimum ist, also das Aggregat aller in i^2 multiplizirten Glieder unter allen Umständen (d. h. wie groß und von welchen Zeichen ξ, ξ', ξ'' u. s. w. auch seyn mögen) negativ oder positiv macht. Es scheint mir sogar zweifelhaft, ob sich die Existenz eines solchen absoluten Universalgrenzwerthes da, wo man alle Glieder der zweiten Differentialquotienten-Kolumne vollständig hat, möchte nachweisen lassen. Dieser Mangel an einem allgemeinen Kriterium hält mich daher auch ab, einem Falle eine Untersuchung zu widmen, der recht eigentlich den Namen eines Maximums oder Minimums verdient. Sollte er sich irgendwo vorfinden, so glaube ich, daß seine Entdeckung eine ganz spezielle Kenntniß der Funktion und ihrer Constanten verlangen würde. — Was nun endlich den oben erwähnten zweiten Fall betrifft, in welchem die zu K^2 gehörigen Glieder nicht vollständig vorhanden seyn sollen, so übergehe ich hier die schon erkannten Variationen in den Bedingungen bei den Grenzwerthen und die möglichen Combinationen der gegebenen Glieder, weil aus dem Vorigen das Nöthige der Ansicht, wie des Verfahrens, erhellet, und mache nur schließlich noch darauf aufmerksam, daß das Verschwinden einiger Glieder das Aufhören anderer zur Folge haben kann, und daß durch solche Ausfälle die ohnehin schon große Varietät des M M M y noch mehr nuançirt werden muß. Denn nimmt man z. B. an, es fehle $\frac{d^2 y}{d x\, d x'}$, so ist voraus zu sehen, daß auch entweder $\frac{d^2 y}{d x^2}$, oder $\frac{d^2 y}{d x'^2}$ null seyn müsse. Wo sowohl $\frac{d^2 y}{d x\, d x'}$ als auch $\frac{d^2 y}{d x\, d x''}$ und $\frac{d^2 y}{d x'\, d x''}$ mangelt, kann unmöglich $\frac{d^2 y}{d x^2}$, $\frac{d^2 y}{d x'^2}$ und $\frac{d^2 y}{d x''^2}$ vorhanden seyn; aber eben so wenig setzt auch die Existenz der ersten Glieder diese letzten voraus. Ein Fall dieser Art tritt bei der Funktion $y = D - \frac{D}{a\,b\,c} \left[(a - x'') x + a (b - x) x' + b (c - x') x'' \right]$ ein, welche den Flächeninhalt y eines in ein

Dreieck D (mit den Seiten a, b, c) einbeschriebenen andern Dreiecks, abhängig von den drei Distanzen (x, x′, x″) zwischen seinen und des gegebenen Dreiecks Ecken, darstellt. Es kommen nämlich für das Kriterium nur die Glieder: $\frac{D}{bc} \cdot \xi\xi' + \frac{D}{ac} \cdot \xi'\xi'' + \frac{D}{ab} \cdot \xi\xi''$ heraus; wogegen die drei Glieder mit ξ^2, ξ'^2, und ξ''^2 ganz fehlen. Da diese Aufgabe: „das kleinste Dreieck in ein anderes zu beschreiben" auch in anderer Beziehung interessant ist, so will ich zum Beschlusse dieser Abhandlung noch die Resultate hervorheben, welche die Rechnung darüber liefert und welche die sonderbaren Erscheinungen bei oberflächlicher geometrischer Betrachtung nicht ganz unbeleuchtet lassen. Nachdem man durch Hülfe unserer Methode auf die Gl. $ca - cx'' - ax = 0$, $ab - ax - bx'' = 0$, $bc - cx - bx' = 0$ und dem zufolge auf $x = \frac{b}{2}$, $x' = \frac{c}{2}$ und $x'' = \frac{a}{2}$ gekommen ist, hat man $MMM\,y = \frac{1}{4}D$ und hierin so lange ein Totalminimum, als man ξ, ξ' und ξ'' d. h. die respektiven Inkremente von x, x′ und x″, mit gleichen Vorzeichen nimmt; denn sowohl für $\frac{b}{2} + \xi$, $\frac{c}{2} + \xi'$ und $\frac{a}{2} + \xi''$ als auch für $\frac{b}{2} - x$, $\frac{c}{2} - \xi'$ und $\frac{a}{2} - \xi''$ wird $y = \frac{1}{4}D + \frac{D}{abc}(a\xi\xi' + b\xi'\xi'' + c\xi\xi'')$. Bei Verschiedenheit in den Zeichen der ξ können Zu- und Abnahme des y erfolgen, also bis zu gewissen Grenzen hin $\frac{1}{4}D$ noch als Minimum, oder andernfalls als Maximum geltend machen. — Am meisten aber möchte wohl der Umstand überraschen, daß das Heraustreten einer einzigen Variabele aus dem Zustande, den sie in $MMM\,y$ angenommen hat, hier durchaus keine Aenderung hervorbringt; denn setzt man $\frac{b}{2} + \xi$ statt $\frac{b}{2}$, und $\xi' = \xi'' = 0$, so ist wieder $y = \frac{1}{4}D$. Auch die geometrische Betrachtung stimmt hiermit überein. Da nämlich das Dreieck y mit seinen Ecken in die Mitten der Seiten a, b, c fällt; also mit seinen Seiten den gegebenen parallel läuft; so kann eine dieser Ecken, etwa die in a fallende beliebig verschoben, oder ihr Abstand $\frac{b}{2}$ (x) von der in a liegenden Ecke des gegebenen nach Gefallen erweitert und verkürzt werden, ohne den Inhalt ($\frac{1}{4}D$) zu ändern. Man muß demnach wenigstens zwei Variabeln aus dem durch M M M y herbeigeführten Zustande entfernen, um eine Aenderung des y zu erhalten. Bei Erfüllung dieser Bedingung ist $\frac{1}{4}D$ wieder Minimum, wenn man die $\mathfrak{x}$s gleich bezeichnet und Maximum, wenn man sie ungleich bezeichnet. — Aehnliche Bemerkungen werden sich bei allen Funktionen machen lassen, denen in der Entwickelung $\frac{d^2 y}{d x^2}$, $\frac{d^2 y}{d x'^2}$, $\frac{d^2 y}{d x''^2}$, oder die in $\mathfrak{x}^2 i^2$, $\mathfrak{x}'^2 i^2$, $\mathfrak{x}''^2 i^2$ multiplizirten Coeffizienten fehlen. Man erkennt sie daran, daß sie in Beziehung auf jede Variabele die Gleichung einer geraden Linie darstellen. Außerdem kann sich nur bei ihnen die merkwürdige Erscheinung zeigen, daß sie in Beziehung auf eine einzelne Variabele keines Grenzwerthes fähig; solche aber wohl in Rücksicht auf je zwei von ihnen zusammen besitzen. Der Grund davon liegt zunächst in der Glieder-Reihe: $\frac{d^2 y}{d x\, d x'} \cdot h\, h$, $\frac{d^2 y}{d x\, d x''} \cdot h\, h''$ u. s. w. und ursprünglich in einer Form, wie die Glieder $c\,(a - x'')\,x$, $a\,(b - x)\,x'$ u. s. w. unseres letzten Beispiels sie haben; denn es bildet darin $x''x$ oder $x\,x'$ gewissermaaßen ein Surrogat für die zweite Potenz einer Variabele, deren eine Funktion zur Annahme eines Grenzwerthes immer bedarf.

Geschrieben zu Gumbinnen im Juli-Monat des Cholera-Jahres 1831.

J. G. A. Sperling.

Schulnachrichten.

I. Uebersicht des im Schuljahre $18\frac{30}{31}$ ertheilten Unterrichts.

Prima, mit zweijährigem Lehrgange.

Ordinarius: O.L. Petrenz.

1. Deutsch 3 St. Rhetorik nach Püllenberg's R. f. Gymn.; freie Aufsätze und Vortragsübungen. O.L. Dr. Hamann.

2. Latein 9 St. Davon 2 St. Stilübb. und Exerzitien; 2 St. im Winter Terent. Adelphi, im Sommer Horat. Od. I. II (mit Ausnahme einer Ode) und aus III 10 Oden; 3 St. Cic. Tusc. I u. II. O.L. Petrenz. 2 St. Tacit. Ann. III, 48 — IV, 61. Dir.

3. Griechisch 7 St. Davon 2 St. im 1sten Quartale griech. und lat. Metrik, dann Euripid. Phoeniss. u. Alcest.; 1 St. Hom. Il. XXII — XXIV u. XI kurs.; 3 St. Platon. Laches, Charmid, Menexen. O.L. Petrenz.

4. Hebräisch 2 St. Die Lehre v. Nomen und der Rest der Formenlehre; dann die Lehre v. Verbo wiederholt, nach Gesenius Gramm.; etliche pros. Abschnitte und die Psalmen aus Gesen. Lesebuche ins Lat. übers. u. gramm. erläut. Exerzz. und Uebb. im Vokalisiren nach Schröder's Uebungsb. Dir.

5. Religion 2 St. nach Niemeyer's Lehrb. f. d. ob. R.Kl. Abschn. 2 — 4 der Religions- u. Einleit. u. 1r Abschn. der Sittenlehre. Dir.

6. Philosoph. Propädeutik 1 St. Empir. Psychologie. O.L. Sperling.

7. Mathematik 4 St. nach Matthias. Sphär. Trigonometrie und deren Anwendung auf mannigfaltige Aufgaben des Lehrers u. aus d. 2n Thle v. M. Hirsch; die Apollon. Kegelschnitte und Analyse einiger andern Kurvengleichungen. Häusl. freie Arbeiten. Derselbe.

8. Physik 2 St. nach Kries L. d. Ph. Die einfachen mechan. Potenzen, einige Sätze aus d. Hydrostatik u. die Lehre vom Weltgebäude. Derselbe.

9. Gesch. und Geogr. 4 St. nach Ellendt. Von der Völkerwanderung bis 1555, mit besonderer Rücksicht auf den jedesmaligen geogr. Zustand der Welt. O.L. Dr. Hamann.

10. Der Unterricht der obern Singklasse, die aus den geeigneten Schülern der 5 obern Klassen besteht, hat, nach häufigen und zum Theil langwierigen Unterbrechungen vom Jul. ab bis zum Ende des Schuljahres ganz eingestellt werden müssen

(Vergl. unten in III. Chronik. ꝛc.). Für die Theorie hat daher nur sehr wenig geschehen können; praktisch sind Choräle, Kasualgesänge ꝛc. eingeübt worden. Kantor Hermes.

Sekunda, mit zweijährigem Lehrgange.

Ordinarius: O.L. Dr. Hamann.

1. Deutsch 3 St. Lit. Gesch. bis auf Opitz, nach Koberstein; Lesung nach Kunisch Handb. 1r u. 2r Thl.; außerdem einige vollst. Gedichte; freie Aufsätze u. Vortragsübb. Dr. Janson.

2. Latein 10 St. Davon 1 St. Synt. ornat. nach Zumpt; 2 St. Exerzz. nach Weber und freie Aufsätze; 3 St. Liv. I — III nach Bauer's Ausz. O.L. Dr. Hamann. 2 St. Salust Catil. 1ste Hälfte (die zweite privatim) und Cic. in Cat. I, II, u. III bis zur Mitte. O.L. Petrenz. 2 St. Virg. Aen. VI, 628 — fin. II und III, 1 — 293. Bis 26. Jul. Dir., später Dr. Janson.

3. Griechisch 7 St. Davon 2 St. Gramm. Wiederholung und Vervollständ. der Akzentlehre, Syntax nach Matthiä's Sch. Gr. bis zum Verbo excl. und Exerzz. nach Rost ꝛc. 2r u. 3r Kurs.; 3 St. im Winter Xenoph. Anab. III u. IV, im Sommer Memorabb. I. 1 u. II, 1 ins Lat. übers.; 2 St. Hom. Il. XI, 195 bis XV incl. Dr. Janson.

4. Hebräisch 2 St. Gramm. nach Gesenius v. §. 47 — 57 u. §. 1 — 57 wiederholt. Aus d. Lesebuche S. 1 — 11 übers. und zur Einpräg. der Gramm. benutzt. G.L. Lucks.

5. Religion. Gesch. der christl. Relig. u. Kirche nach Niemeyer. Dir.

6. Mathematik 4 St. nach Matthias. Ebene Trigonometrie. Die Regeln der Logarithmen und d. Gebr. der Vega'schen Tafeln, an vielfält. Beispielen eingeübt. Analyt. Geom. und Konstrukt. algebr. Ausdrücke. Alle 14 Tage eine häusl. freie Arbeit. O.L. Sperling.

7. Physik 2 St. nach Kries. Aus der allgem. N.L. Abschn. 1, 3, 5; aus d. bes. Abschn. 1 — 5 und 7. Derselbe.

8. Geschichte 3 St. nach Ellendt. Alte Gesch. von Anfang bis auf Alexander d. Gr. O.L. Dr. Hamann.

9. Geographie 1 St. nach Cannabich. Asien und Amerika. Ders.

10. Gesangunterricht. S. bei I.

Tertia, mit zweijährigem Lehrgange.

Ordinarius: bis Pfingsten G.L. Lehmann, später O.L. Sperling.

1. Deutsch 4 St. Lesung nach Wilmsen's Lesestücken, prakt. Stilübb. u. Uebb. im Deklam. u. in freier mündl. Mittheil. Bis 21. Mai G.L. Lehmann, später G.L. Skrzeczka.

2. Latein 8 St. Davon 2 St. Syntax nach Schulz Sch. Gr.; 2 St. Exerzz. nach Strack's Anleit; 2 St. Jul. Caes. de bell. Gall. IV, V u. VI, 1 — 10. Bis

21. Mai G.L. Lehmann, später G.L. Skrzeczka; 2 St. Ovid. Met. nach Seidels Ausz. l. III, 511 — fin. IV, u. V bis 235. O.L. Petrenz.

3. Griechisch 7 St. Davon 2 St. theils Gramm. nach Buttmann: die Formenlehre bis §. 109 wiederholt, durch Hinzunahme des Anomalischen vervollst. und beendigt, theils Exerzz. nach Rost's 1. Ks; 2 St. im Winter Jacob's Element. B. 2r Ks Abschn. C u. v. D I u. II, im Sommer Xenoph. Anab. l. IV c. 1 — 5. G.L. Lucks. 3 St. im 1n Quartale die hom. Formenlehre u. Fortsetzung des metr. Unterrichts der IV durch das elegische Versmaaß, dann Odyss. XV — XVIII. O.L. Dr. Hamann.

4. Religion. Zusammenhängender Unterricht in der Glaubens- und Pflichtenlehre nach Ziegenbein's Katech. der christl. L. nebst Memoriren von Sprüchen und Liederversen. Bis 21. Mai G.L. Lehmann, später G.L. Lucks.

5. Mathematik 5 St. nach Matthias. Arithmetik Abschn. 3, Abth. 1 — 4; aus der Algebra Abth. 7 nebst vielen Exempeln nach M. Hirsch; aus der Geometrie Fortsetz. des Pensums der IV bis zum Ende des 7n Abschn. Wöchentlich eine häusliche Arbeit.

6. Naturwissenschaften 2 St. Bis Pfingsten Botanik G.L. Lehmann; später Anfangsgründe der Naturlehre, nach Kries Lehrb. der N.L. Abschn. 7 u. 9 vom Feuer und Magnet. O.L. Sperling.

7. Geschichte 3 St. Alte Geschichte bis auf Augustus, nebst dem Erforderlichen aus der alten Geogr. Dr. Janson.

8. Geographie 1 St. nach Cannabich. Asien, und von Europa Span., Ital., Helvet., Oesterreich u. Preuß. Staaten. Derselbe.

9. Gesanglehre. S. bei 1.

Quarta, mit einjährigem Lehrgange.

Ordinarius: G.L. Lucks.

1. Deutsch 4 St. Theils Grammatik: das Pensum der Quinta wiederholt und ergänzt, die Wortfügung theor. und prakt., und deutsche Verskunst nach Gottholds Hephästion von §. 1 — 84; theils Aufsätze, auch aus dem Geschäftsleben, und Uebb. in freier mündl. Mittheilung; theils deklamator. Lesen, Erklärung des Gelesenen und Deklamiren, nach Heinsius Musen 2r Thl. G.L. Küßner.

2. Latein 7 St. Davon 3 St. theils Gramm. nach Schulz, die analoge und anomale Formenlehre wiederholt und beendigt, dann die Etymologie; theils Syntax der Kasus und Exerzz. nach den Schulz'schen Aufgg. 2. Lehrst. Kand. Kossak; 2 St. Jacobs lat. L.B. 2. Bdch. Regn. Assyr., Med., Pers. u. res Athen.; 2 St. Phaedr. I u. II. Voran die Quantitätslehre u. was aus d. Metrik zum rhythm. Lesen d. Ph. erforderlich ist. Dr. Janson.

3. Griechisch 5 St. Gramm. nach Buttmann von §. 1 — 107, und Jacobs Elem. B. 1r Ks I — XII mit Auswahl. G.L. Lucks.

4. Religion 2 St. Abriß der Rel. Gesch., Einleitung in die h. S. nach Krum-

machers Bibelkat., d. Evang. Matth. nebst den Ergänzz. aus Markus und Lukas gelesen u. erbaul. erläutert, u. Beweisstellen memorirt. Bis 21. Mai G.L. Lucks, später G.L. Küßner.

5. Mathematik 5 St. nach Matthias 4. Aufl. allg. Größenl. §. 1 — 57. Häusl. Aufgg. Geom. §. 93 — 168. Bei den Proportt. wurden einige §. §. aus der Arithm. eingeschaltet. G.L. Mauerhoff.

6. Naturbeschreibung 2 St. Systemat. Mineralogie, Zoologie u. ein Abriß der Anthropol. nach Funke's 3. Leitf. Bis 21. Mai G.L. Lehmann, später G.L. Lucks.

7. Geographie 3 St. nach Cannabich und nach Wandkarten. Abriß der mathem. u. phys. G. und Europa. Kartenzeichnen. G.L. Brunkow.

8. Geschichte 2 St. nach Bredow's Vgbhtt. Uebersicht der ganzen Weltgesch. mit Ergänz. des Pensums der V. Zuletzt preuß. Gesch. nach Heinel. Chronologische Tabellen v. d. Schülern angefertigt. Ders.

9. Kalligraphie 2 St. nach Henning's Berl. Schulvorf. 2. Hft. Derselbe.

10. Zeichnen 2 St. nach Korff's und andern, für die Fähigern auch nach größern Vorlegeblätt. Derselbe.

11. Gesanglehre. S. bei I. u. V.

Quinta, in 2 Abtheilungen mit einjährigem Lehrgange.

Ordinarius: G.L. Brunkow.

1. Deutsch 6 St. Davon 4 Stunden theils zur Gramm. (Formenlehre, Ableit. und Zusammensetz., Rektion, zusammenges. Sätze u. Wortfolge) theils zur Orthogr., theils zu Sprech= und den ersten Aufsatzübb. Bis 21. Mai G.L. Brunkow in A und B, später nur in A, in B aber Kand. Kossak. — 2 St. deklamator. Lesen u. Deklamiren nach Heinsius Musen 1r Thl. Bis 26. Jul. G.L. Küßner in A u. B, später nur in A, in B aber Kand. Gotthardt.

2. Latein 7 St. Davon 4 St. Gramm. (die regelm. Formenlehre wiederholt, die anomal. hinzugefügt u. das Ganze beendigt) nach Schulz, und Exerzz. nach dessen Aufgg. 1. Lehrst. — 3 St. Reuß El. Uebb. 1 Ks. In A bis 21. Mai G.L. Lucks, später G.L. Skrzeczka; in B bis 21. Mai Kand. Kossak alle 7 St., später nur die 4 ersten, die übrigen G.L. Lucks.

3. Religion 2 St. Gesch. u. Lehre des N. T. nach Kohlrausch und der Katechismus Luthers erläutert und memorirt; desgl. Bibelsprüche und Liederverse. Bis 21. Mai komb. G.L. Küßner, bis 26. Jul. G.L. Lucks, später Derselbe in A, in B Kand. Gotthardt.

4. Kopf= und Zifferrechnen 4 St. Die Bruchrechnung wiederholt; dann die Verhältnißrechnungen bis zur Beendigung des prakt. Rechn. G.L. Mauerhoff, in A und B getrennt.

5. Geometrie 2 St. nach Matthias Planimetrie §. 1 — 91 d. 4. Aufl. G.L. Küßner.

6. Naturbeschreibung 2 St., komb., nach Nicolai. Alle 3 Reiche vollständiger als in VI und vorbereitend auf den spätern system. Unt. Bis 21. Mai G.L. Lehmann, später G.L. Brunkow.

7. u. 8. Geographie u. Geschichte 3 St., und zwar in den 2 ersten Monaten jedes Semesters allein Geographie nach Weiß und nach Wandkarten: d. preuß. Staat wiederholt, dann d. besondere Geogr. von Europa und d. übrigen Erdtheilen; in den übrigen 8 Monaten allein ein Abriß der ganzen Weltgesch. nach Bredow's Bgbhtt. u. Gesch. Preußens nach Heinel's „Uebersicht ꝛc.“ Bis 21. Mai Dr. Janson, später G.L. Skrzeczka, in jeder Abth. besonders.

9. Kalligraphie 3 St. nach Henning's Vorschr. G.L. Brunkow.

10. Zeichnen 3 St. Derselbe.

11. Untere Singklasse, größtentheils aus Quintanern und Sextanern bestehend, mit 2 St. 2te Hälfte des Lehrganges. Die Intervallen und Skalen wiederholt; die diaton, Tonleiter eingeübt, die Dur=Tonarten mit ihren Vorzeichen erläutert ꝛc. Praktisch Kanons, Choräle und ein= bis dreistimmige Lieder, besonders aus d. musikal. Schulgesangb. v. Anschütz. G.L. Mauerhoff.

Sexta, mit halbjährigem Lehrgange.

Ordinarius: G.L. Mauerhoff.

1. Deutsch 6 St. Davon 2 St. Sprachlehre, analyt., nach Krause: der einfache Satz. — 1 St. Orthogr. G.L. Mauerhoff. — 2 St. Sprech= Lese= und Deklamirübb. Bis 21. Mai G.L. Küßner, später Dr. Janson. — 1 St. Denkübungen. G.L. Lucks.

2. Latein 7 St. Leseübb., Gramm., u. zwar die regelm. Formenlehre bis zum Grundtypus aller 4 Konjugat. incl., u. erste Uebungen im Kostruiren und Uebers. nach Reuß. G.L. Küßner.

3. Religion 2 St. Gesch. u. Lehren d. A. T. nach Kohlrausch. Memoriren wie in V. Bis 21. Juni G.L. Lehmann, später G.L. Küßner.

4. Kopf= u. Zifferrechnen 6 St. Die 4 Spezies in ganzen und gebrochenen Zahlen. G.L. Mauerhoff.

5. Naturbeschreibung. 2 St. nach Nicolai. Fragmentar. Vorbereitungsunterr. hauptsächl. über vaterländ. Naturkörper aus allen 3 Reichen. Bis 21. Mai G.L. Lehmann, später G.L. Brunkow.

6. Geographie 2 St. nach Weiß u. nach Wandkarten. Allg. Geogr. u. von der besond. der preuß. Staat. Bis 21. Mai G.L. Mauerhoff, später G.L. Brunkow.

7. Kalligraphie 3 St. nach Henning's Schulvorschr. G.L. Mauerhoff.

8. Zeichnen 2 St. Die Anfangsgründe. G.L. Brunkow.

9. Gesanglehre. S. bei V.

In Folge der unten in der Chronik näher zu bezeichnenden, höhern Orts angeordneten

neten Maaßregel zur Sicherung der Gesundheit wurden vom 26. Jul. ab entzogen: dem Deutschen von I bis V B 1 Stunde; in VI 1 St. Deklamiren u. 1 St. Denkübb.; dem Latein in I 2 St., in den übrigen Klassen 1 St.; dem Griechischen in jeder der 4 Klassen 1 St.; der Mathem. u. dem Rechnen in jeder Klasse 1 St.; den Naturwiss. in II u. III 1 St.; der Gesch. in I, II, III, IV, V A u. B 1 St.; der Geogr. in IV 1 St.; der Kalligr. in IV, V, VI 1 St.; dem Zeichnen in IV u. V 1 St.

Zur Privatlektüre war ausgewählt: 1) für die Primaner Cic. epistt. ad div., nach einer vom Ordinarius der Klasse getroffenen Auswahl; Terent. Andr., Herodot. lib. V u. VI., Sophocl. Oedip. Rex. — 2) Für die Sekundaner: a) für die ältern Liv. l. 22 — 33 nach Bauer's Ausz., Virg. Aen. I; b) für die jüngern Sallust. Jug. u. Ovid. Met. l. IV; c) für alle Odyss. I — IV. — 3) Für die ältern Tertianer theils Salust Cat., Ovid. Met. XIII, 1 — 398 u. Xenoph. Anab. II, 3 — 6, theils Corn. Nep. de regg. Hamilc., Hannib., Cato; Jul. Caes. de bello Gall. l. III; einige Abschnitte aus Jacob's lat. Anthol. und Odyss. l. I.

Um einer hohen Verfügung vom 21. Aug. d. J. nachzukommen, habe ich am Schlusse dieses Abschnittes noch über dasjenige zu berichten, was seit 2 Jahren und darüber zur Uebung unserer Schüler in freier mündlicher Mittheilung gethan ist. Zur Ausführung der deßfalls erlassenen hohen Verordnung (s. S. 19. des Progr. von 1829) wurde zuvörderst von Michaelis 1829 ab dem deutschen Unterrichte in jeder Klasse wöchentlich eine, durch Beschränkung anderer Lehrgegenstände ermittelte Stunde zugelegt, die jedoch in Folge des hohen Reskripts vom 4. Jul. 1830 (s. S. 30 des Progr. von 1830) über die Verminderung der Unterrichtsstunden, in VI von Michaelis v. J., in Folge der obgedachten polizeilichen Sicherungsmaaßregel aber vom 26. Jul. d. J. ab auch in den übrigen Klassen wieder eingezogen werden mußte. Bei Anordnung der auf Fertigkeit und Gewandtheit in zusammenhängender mündlicher Mittheilung abzweckenden Uebungen selbst haben wir uns im Allgemeinen an den Sinn und Geist des hohen Reskripts gehalten. Wir waren darüber einverstanden, daß es nöthig sei, namentlich in den 4 obern Klassen, Belehrungen über das Wesen und den Zweck solcher Uebungen der freien Rede theils voranzuschicken, theils bei Beurtheilung des von den Schülern Vorgetragenen zu erneuern, um ihnen zu zeigen, worauf es dabei hauptsächlich ankomme, wie sie sich auf dergleichen Vorträge vorzubereiten, die zu dem Ende gesammelten Gedanken zu ordnen, diese Ordnung sich vorher fest einzuprägen, und was sonst für Hülfsmittel sie zu Hause anzuwenden hätten, um bei ihrem Auftreten das Gedächtniß nur eine untergeordnete Rolle spielen zu lassen, und aus demselben weit weniger die Worte als die Sachen zu entnehmen. Wir erkannten ferner, wie wichtig es für das Gedeihen der ganzen Anordnung sein müßte, nach und nach einen möglichst reichen Vorrath verschiedenartiger Aufgaben zu sammeln, um in jedem Falle die der Individualität und dem Bildungsstandpunkte des Schülers angemessenste Auswahl ohne langes Suchen treffen zu können. Zugleich nahmen wir auf die Mitwirkung verschiedener Zweige des lat. und griech. Sprach- und des Sachunterrichts zur Förderung der Redefertigkeit Bedacht. Endlich einigten wir uns über einen nach dem Alter und den Vorkenntnissen der Schüler abgemessenen Stufengang von Uebungen für alle Klassen, und fanden es rathsam, vorläufig und so lange die Sache noch neu wäre, mit den Forderungen immer um eine Klasse zurückzugehen. Diesen Stufengang, der von dem Beschreiben anwesender sinnlicher Gegenstände und von dem Auffassen und Wiedergeben kurzer Erzählungen ꝛc. bis zu kleinen Redeversuchen über geeignete, aus der Geschichte, dem Leben und dem Umgange mit Menschen ꝛc. entlehnte Stoffe aufsteigt, genauer anzugeben, verbietet der enge Raum dieser Blätter. Bei der in den obern Klassen seit Juli, in den übrigen seit Oktober 1829 begonnenen Ausführung dieses Planes zeigte sich bald, was wir schon im Voraus besorgt hatten, daß nämlich diese Vortragsübungen, namentlich in den 3 obern Klassen, wenn sie die ganze Stunde ausfüllen, bei den zuhörenden Schülern leicht Ermüdung hervorbringen. Dieser begegnen wir seitdem dadurch, daß die Vorträge auf alle deutsche Stunden vertheilt werden, so daß im Anfange jeder Stunde 2 bis 3 Schüler auftreten.

Wer nun die Frequenz der Klassen, die große Ungleichheit der Anlagen und der häuslichen Entwickelung des Sprachvermögens, die tief eingewurzelten verkehrten Redeweisen, welche die Mehrzahl der Lehrlinge in die Schule mitbringt, und andere Hindernisse mehr, wohin auch die im Laufe dieses Schuljahres erfolgte Abberufung zweier geübten Lehrer des Deutschen zu rechnen ist, in Erwägung zieht, der wird über die Resultate dieser zweijährigen Uebungen nur mäßige Erwartungen hegen, und nicht verlangen, daß sie bei Allen, die daran Theil genommen haben, gleiche Früchte getragen haben sollen. Die Meisten haben an Unbefangenheit und Dreistigkeit in mündlicher Mittheilung gewonnen. Die Zunge ist bei Vielen schon weniger gebunden als früher. In allen Lehrfächern werden Fragen häufiger als sonst in vollen Sätzen beantwortet, und außerdem mancherlei Anliegen und mündliche Gesuche verständlicher und geschickter angebracht. Mündlich oder schriftlich mitgetheilte Gedanken werden von Vielen klarer, vollständiger und besonders fester aufgefaßt und von fähigern Köpfen leichter als vormals mit andern Worten und in veränderten Sätzen wiedergegeben. In den obern Klassen gibt sich daneben ein der Sache angemessener Ton und eine passende Modulation der Stimme mehr als ehedem kund. In Prima gerieth mancher, freilich noch vorbereitete, Vortrag nicht übel, wie denn überhaupt in den beiden obern, vornämlich jedoch in der obersten Klasse der Erfolg bemerkbarer als in den übrigen ist. Auch auf die schriftlichen Aufsätze, besonders wieder in den obern Klassen, sind die Redeübungen nicht ohne wohlthätigen Einfluß geblieben. Selbst in den von Quartanern und Quintanern gelieferten ist hin und wieder mehr Ueberlegung, eine geregeltere Behandlung des Stoffs, eine passendere Ausdrucksweise und Verminderung der Rektions- und Interpunktionsfehler zu bemerken. Nebenher zeigt sich bei Schwächern Stärkung des Wortgedächtnisses, woran freilich bei Anordnung der freien Redeübungen am wenigsten gedacht worden ist. Man kann es daher den meisten jungen Leuten, besonders der mittlern Klassen, nicht oft genug vorhalten, daß, wer die ihm gestattete häusliche Vorbereitung in schriftliche Zusammenstoppelung und demnächst wörtliche Auffassung des vollständig Niedergeschriebenen mit dem Gedächtnisse setzt, den Zweck der Anordnung durchaus verfehlt, und daß solchem Memorienwerke die Deklamation erläuterter Musterstücke weit vorzuziehen ist.

Daß nun unsere bisherigen Leistungen in dem fraglichen Unterrichtszweige, gegen die Forderungen gehalten, nur als ein schwacher Anfang zu betrachten sind, ergibt sich aus dem oben Gesagten von selbst; doch darf man sich von einer längern Fortdauer dieser Uebungen und von der zunehmenden Erfahrung für die Zukunft einen bedeutendern Erfolg versprechen, zumal, wenn in ruhigern und bessern Zeiten, als die gegenwärtigen, der schöne Zweck der ganzen Anordnung nicht mehr blos von unten hinauf, sondern auch von oben herab durch geeignete Veranstaltungen auf der Universität gefördert werden, und wenn dereinst, nach verminderter Federthätigkeit, das Bedürfniß und der hohe Werth des lebendigen Wortes und einer unvorbereiteten, freien und beredten Darlegung von Ansichten rc. im öffentlichen Leben sich lauter als bisher ankündigen wird.

II. Verordnungen und Verfügungen der hohen Königl. Unterrichtsbehörden.

Vom 3. Sept. 1830. Es wird Bericht erfordert, ob und in welcher Art der Katalog der Bibliothek des Gymnasiums geführt werde.

Vom 8. Sept. 1830. Der Etat der Gymnasialkasse für 1831 bis 1833 wird zugefertigt.

Vom 13. Okt. 1830. Der eingesandte Lektionsplan für $18\frac{30}{31}$ wird genehmigt.

Vom 15. Januar 1831. Den inländischen Studirenden, die sich der Theologie widmen, soll das akadem. Triennium erst von der Zeit an gerechnet werden, wo sie mittelst eines Zeugnisses einer Schul- oder einer Königl. wissensch. Prüfungs-Kommission nachgewiesen haben, daß sie in Hinsicht der Kenntniß des Hebr. zum theolog. Studium reif sind. Als Maaßstab dieser Reife wird festgesetzt: eine schriftl. und mündl. darzulegende sichere und vollständige Bekanntschaft mit den Regeln der kleinen hebr. Gramm. von Gesenius — wohin jedoch die in den Anmerkungen enthaltenen feinern Bestimmungen und Ausnahmen nicht zu rechnen sind — und die Fähigkeit, einen Abschnitt aus einer histor. Schrift des A. T. oder einen leichten Psalm ohne Beihülfe eines Wörterbuchs richtig zu übersetzen. Ohne ein Zeugniß über diese Reife darf von jetzt an kein inländ. Studirender in das Album einer inländ. theolog. Fakultät eingetragen werden. Das Maaß der Kenntnisse im Hebr. soll daher in dem Entlassungszeugnisse durch das Prädikat reif oder unreif ausdrücklich angegeben werden.

Vom 6. Febr. 1831. Das Urtheil der Königl. wiss. Prüfungs-Kommission über die Prüfung der Abiturienten von Michaelis v. J. wird nebst den schriftlichen Arbeiten derselben und dem Protokolle zugefertigt.

Vom 18. Febr. 1831. In Folge und zur nähern Deklaration von §. 26 des Allerhöchsten Edikts v. 12. Okt. 1812 wird verordnet:

1) Alle jungen Leute, die entweder von einer gemischten oder wissensch. Prüfungs-Kommission bei ihrer ersten Prüfung das Zeugniß Nro. III erhalten haben und in einer nochmaligen Prüfung sich ein besseres erwerben wollen, müssen sich innerhalb

achtzehn Monate, vom Tage ihrer Immatrikulation an gerechnet, bei einer Königl. wissensch. Prüf. Kommiss. wieder zur Prüfung stellen. Nach Ablauf dieser Frist soll keine Kommission sie weiter annehmen.

2) Erhalten sie auch bei dieser zweiten Prüfung Nro. III, so sollen sie sich zu keiner weitern Prüfung pro immatriculatione melden dürfen. Ausnahmen hievon können nur in einzelnen außerordentlichen Fällen und nach einer zuvor einzuholenden Erlaubniß des Königl. Ministerii der geistl. U. und M. A. Statt finden.

Vom 2. Mai 1831. Das „Corpus scriptt. hist. Byzant. Bonn b. Weber" wird nochmals zum Ankauf empfohlen. (Das hies. Gymnas. hat gleich nach Ankündigung des Unternehmens auf die ganze Sammlung unterzeichnet).

Vom 2. Mai 1831. Die Schulvorsteher sollen darüber wachen, daß zu Beispielen, Diktaten, Vorschriften u. dgl. nicht Tagesbegebenheiten oder Gegenstände der Politik gewählt werden.

Vom 2. Mai 1831. Die Verordnung des Hohen Königl. Staatsministerii vom 22. Jan. d. J., die Militairverhältnisse der Civilbeamten betr., wird auszugsweise mitgetheilt, und eine tabellarische Nachweisung über die ihrem Alter nach noch der Landwehr 1sten Aufgebots verpflichteten Lehrer, behufs der Ausfertigung von Unentbehrlichkeits-Attesten für dieselben für den Fall einer Mobilmachung des Heeres, erfordert.

Vom 16. Mai 1831. Der Unterricht im Zeichnen soll in jedem größern Gymnasio in 4 Klassen und in je 2 auf einander folgenden Stunden wöchentlich genau nach einem beigegebenen, von der Königl. Akademie der Künste zu Berlin revidirten Lehrplane ertheilt werden. Die Klasseneintheilung für den fragl. Unterr. soll, wo möglich, von der Klasseneintheilung der Schule unabhängig sein. In Anstalten von geringerem Umfange können die 1ste und 2te, oder die 3te und 4te Bildungsstufe kombinirt werden. Jeder Schüler muß wenigstens den Kursus der 1sten und 2ten Bildungsstufe im Zeichnen durchmachen*). — Wo es irgend geschehen kann, muß für das Zeichnen ein eigenes Lehrzimmer eingerichtet werden. — Jünglinge, die sich dem Lehrfache widmen wollen und Talent für das Zeichnen haben, sind aufmerksam zu machen, daß sie durch sorgfältige Benutzung des fragl. Unterrichts sich für denselben befähigen, und daß sie als dereinstige ordentliche Lehrer ihr Einkommen durch Uebernahme von außerordentl. Zeichenstunden verbessern können. — Wer als Zeichenlehrer angestellt sein will, muß auch künftig, wie bisher, ein Qualifikationsattest von einer Königl. Kunstakademie beibringen.

Vom 20. Mai 1831. Schülern, die durch Anlage, Neigung und Vorkenntnisse zum Studium der Naturgeschichte vorzüglich bestimmt zu sein scheinen, soll bei ihrem Abgange von der Schule die Theilnahme an dem naturwissenschaftlichen Seminar zu Bonn besonders anempfohlen werden.

Vom 25. Mai 1831. Es wird der Anstalt bekannt gemacht, daß der von

*) In unserer Anstalt haben von jeher alle Schüler der 3 untern Klassen an dem Unterr. im Zeichnen Theil genommen. Bis zum J. 1825 hatten wir 4 Zeichenklassen, von welchen die oberste in Folge einer hohen Verordnung v. 6. Novbr 1824 einging.

des Königes Majestät zum Regierungs-Schulrathe bei der Königl. Regierung zu Gumbinnen ernannte bisherige Schuldirektor, Herr Dieckmann, zum Spezial-Komissarius des Königl. Provinzial-Schul-Kollegii zu Königsberg für die Gymnasien und das Schullehrer-Seminar im Verwaltungsbezirke der vorgenannten Königl. Regierung ernannt worden ist.

Vom 21. Jun. 1831. Vorschriften zur Regulirung des nicht fixirten Diensteinkommens von Invaliden, die im Civil — bei Gymnasien als Aufwärter oder Pedelle — angestellt sind.

Vom 24. Jun. und 23. Aug. 1831. Ueber diejenigen Bestimmungen des Abiturienten-Prüfungs-Reglements vom 12. Okt. 1812, welche nach dem Ermessen des Direktors und der einzelnen Fachlehrer einer Abänderung bedürftig scheinen, soll zum 1. Nov. d. J. ein motivirtes Gutachten eingesandt und darin das Französische nicht übersehen werden.

Vom 20. Jul. 1831. Ein Exemplar des Reglements vom 20. April. d. J. für die Prüfungen der Kandidaten des höhern Schulamts wird der Anstalt zugefertigt.

Vom 5. Aug. 1831. Abschrift eines Erlasses an Hrn. Reg. Schulrath Dieckmann, wodurch die unten in III „Chronik" zu erwähnende Beschränkung des Unterrichts während der Choleragefahr gut geheißen wird.

Vom 21. Aug. 1831. Auf die kleine Schrift des Prof. Heinsius: „Die Bildung zur deutschen Beredsamkeit. An einen Staatsmann ꝛc. Berlin 1831" werden wir aufmerksam gemacht.

III. Chronik des Gymnasiums.

Der Unterricht begann mit dem 18. Okt. 1830 und wird mit dem 1. Okt. d. J. schließen.

Zur Feier des Geburtsfestes Sr. Majestät des Königs wurde am 3. Aug. um 10 Uhr Morgens ein Redeaktus gehalten. Ein Chorgesang der obern Singklasse eröffnete die Feier. Hierauf erörterte der O.L. Sperling in einem Prolog die Frage: Welche Einflüsse auf die Denkungsart des heranwachsenden Geschlechts sind von den Ereignissen unserer Tage zu erwarten? Er knüpfte daran zeitgemäße Ermahnungen an die versammelten Jünglinge der obern Klassen, und schloß mit innigen Wünschen für das allen Preußen so theuere Leben ihres vielgeprüften und in Seiner Weisheit und Gerechtigkeit eben so vielfältig bewährten Landesvaters, und für die Erhaltung des ganzen Königl. Hauses. Nach einem Zwischengesange sprach der Primaner Mertineit lateinisch über die verderblichen Wirkungen der Schmeichelei; der Primaner Heuer deutsch über die Hoffnung, daß dereinst aller Nationalhaß schwinden werde; der Sekundaner Burchard lateinisch über das Angenehme der Rückerinnerung an überstandene Leiden. Zuletzt versuchte der Sekundaner Ramschüssel in deutscher Sprache eine Vergleichung des Zustandes der Wissenschaften im Zeitalter des Augustus und in dem gegenwärtigen. Zum Schlusse wieder ein Chorgesang. Die sonst gewöhnlichen Deklamationen ausgewählter Schüler der 4 untern Klassen fielen in diesem Jahre auf höhere Anordnung weg, um die schon von verschiedenen Seiten her bedrohte Gesundheit durch eine zahlreichere Versammlung in der heißen Jahreszeit nicht noch mehr zu gefährden.

Aus gleicher Rücksicht mußte, ebenfalls in Folge höherer Anordnung, vom 26. Jul. ab der Unterricht um eine Stunde täglich abgekürzt werden. Zwar kann diese, durch die Annäherung der furchtbaren Epidemie, die jetzt Europa durchwandert, gebotene Vorsichtsmaßregel nicht ohne hemmenden Einfluß auf Fleiß und Fortschritte bleiben: doch, wenn wir bedenken, wie es in dieser Hinsicht so vielen vaterländischen höhern und niedern Lehranstalten ergangen ist: so müssen wir uns von kindlichem Danke gegen die Vorsehung durchdrungen fühlen, die unsere Stadt sammt ihren nächsten Umgebungen vor dem Einbruche der auf 3 bis 4 Meilen von uns wüthenden Seuche bisher gnädig beschirmt hat. Möge nur keine größere Beschränkung des Unterrichts nöthig werden! — Außerdem haben im Laufe des Schuljahres theils Lehrerwechsel und eine, wenngleich nur kurze Vakanz, theils Krankheiten unter den Mitgliedern des Lehrerkollegiums — wiewohl Gottlob! keine langwierige — theils andere Vorkommenheiten, wozu auch persönliche Thorwachdienste zu rechnen sind, vorübergehende Abänderungen des Stundenplanes herbeigeführt.

Die vorgedachten im Lehrerpersonale vorgefallenen Veränderungen sind folgende: Herr Dr. Merleker, der sich hier zum Lehramte praktisch ausgebildet und vom 2. Jun. 1826 ab als Lehrer der Gesch. und Geogr., des Deutschen, Lat. und Griech. in verschiedenen Klassen bis Sekunda einschl., wie auch als Ordinarius einer Abtheilung von Quarta, dem Gymnasium unverkennbare Dienste geleistet hat, ist mit dem 1. Okt. v. J. als 5r Oberlehrer an das Königl. Friedrichs-Kollegium zu Königsberg versetzt worden. An seine Stelle trat mit dem 18. Nov. v. J. Herr Dr. George Ludwig Janson aus Danzig. — Der 5te ordentliche Lehrer und Predigtamtskandidat Herr Lehmann, von dem Patron der Kirche zu Trempen in der Darkehmer Diözese zum Pfarramte bei der dortigen Gemeinde berufen und von der hiesigen Königl. Regierung bestätigt, verließ uns am 21. Mai d. J. Sehr ungern sahen wir einen Mann aus unserer Mitte scheiden, der, durch innern und äußern Beruf dem Schulstande angehörend, über 9 Jahre als Lehrer und Ordinarius nach und nach mehrer Klassen sich um die Anstalt wesentlich verdient gemacht hat. In seine Stelle rückte auf der bisherige 6te ordentliche Lehrer Herr Predigtamtskandidat Lucks. Zu der auf diese Weise erledigten 6ten Lehrstelle wurde der schon früher in Vorschlag gebrachte Schulamtskandidat Herr Rudolf Ferdinand Skrzeczka aus Oletzko von den vorgesetzten hohen Königl. Behörden berufen. Am 25. Mai d. J. vereidigt und eingeführt, trat er sofort seine Amtsgeschäfte an. — Endlich wurde dem Kandidaten der Theologie, Herrn Gotthardt aus Kulm, auf sein Ansuchen, nach eingeholter höherer Genehmigung, vom 26. Jul. d. J. ab der Unterricht in der Religion und im deklamatorischen Lesen in V B., zusammen 4 St. wöch. übertragen. — Der außerordentliche Hülfslehrer der obern Singklasse, Herr Hermes, fand sich durch eine langwierige Krankheit und durch sein Alter bewogen, seine Verbindung mit dem Gymnasio ganz aufzugeben. Vom Okt. d. J. an wird mit hoher Genehmigung H. O.L. Dr. Hamann den Unterricht dieser Klasse übernehmen.

Schließlich habe ich noch des Verlustes eines unserer talent- und hoffnungsvollsten Zöglinge, des Primaners Moritz Stier zu gedenken. Bei seinen guten Anlagen hatte er es durch regelmäßigen Schulbesuch und oft belobten Fleiß zu seiner Eltern und Lehrer Freude so weit gebracht, daß er schon im 18ten Lebensjahre zu Michaelis d. J. mit einem ehrenvollen Zeugnisse die Universität zu beziehen hoffen durfte, als er während der Sommerferien in ein hitziges Nervenfieber verfiel. Was auch immer die langbewährte Kunst des vielerfahrenen Arztes und die unermüdliche mütterliche Sorgfalt und Pflege zu seiner Rettung aufbieten mochten: der zart gebaute Körper des Jünglings erlag im Jul. d. J. der Macht des Uebels. Mögen die tief gebeugten Eltern und Geschwister des früh Vollendeten in ihrem Bewußtsein, zur Erhaltung des geliebten Sohnes und Bruders Alles, was menschliche Hülfe vermag, aufgeboten zu haben, noch mehr aber in dem festen christlichen Vertrauen, daß auch das Allerschmerzlichste von dem Alleinweisen aus liebevollen Absichten über uns verhängt wird, und daß viele Jahre der Entwickelung diesseits des Grabes nicht Eines der freien Entfaltung im Lande der Vollkommenheit aufwiegen, Beruhigung und Aufrichtung finden!

IV. Statistische Nachrichten.

1) Die Anzahl der abgegangenen und der aufgenommenen Schüler, so wie die gegenwärtige Frequenz weiset die unten folgende tabellarische Uebersicht nach.

Zur Universität werden am Schlusse des Schuljahres mit dem Zeugnisse Nro. II entlassen:

1) Albert Leop. Hassenstein aus Kattenau, $20\frac{1}{2}$ Jahr alt, 10 J. in der Anstalt von Sexta ab, 2 J. in Prima.

2) Aug. Eduard Mertineit aus Sodargen, $20\frac{1}{4}$ J. alt, 11 J. im Gymn. von Sexta ab, 2 J. in Prima;

3) Jul. Eduard Gubba aus Szirgupönen, $21\frac{1}{4}$ J. alt, 10 J. im Gymn. von Sexta ab, 2 J. in Prima;

4) Karl Rud. Voigt aus Gumbinnen, $20\frac{3}{4}$ J. alt, 11 J. im Gymn. von Sexta ab, 2 J. in Prima.

5) Karl Heinr. Krauß aus Insterburg, 19 J. alt, $4\frac{1}{2}$ J. im Gymn. von Sekunda ab, 2 J. in Prima;

6) Otto Ludw. Reuter aus Goldapp, $19\frac{3}{4}$ J. alt, 6 J. im Gymn. von Quinta ab, 1 J. in Prima.

7) Ludw. Gust. Lindt aus Schirwindt, 21 J. alt, 7 J. im Gymn. von Quarta ab, 2 J. in Prima;

8) Ernst Adolf Hamann aus Königsberg in Pr., $21\frac{1}{2}$ J. alt, 4 J. im Gymn. von Sekunda ab, 2 J. in Prima.

Mertineit, Voigt, Lindt und Hamann wollen sich in Königsberg der Theologie, Hassenstein ebendaselbst den Rechten, Reuter in Bonn den Kameralwissenschaften u. Krauß in Königsberg der Mathematik widmen. Gubba hat noch kein Fach gewählt.

2) Die Gymnasialbibliothek. Das Hohe Königl. Ministerium der geistl., Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten hat mit gnädigster Berücksichtigung des Umstandes, daß das hiesige Gymnasium von 1822 bis 1830 zu seinen baulichen Einrichtungen und andern äußern Zwecken aus dem Schulgelde und aus ersparten Besoldungen eine Summe von 2610 Rthlr. aufbringen mußte und deßhalb außer Stande war, für eine außerordentliche Vermehrung seiner Büchersammlung etwas Erhebliches aus eigenen Mitteln herzugeben, auf das von E. Königl. Hochwürdigen Provinzial-Schul-Kollegium unterstützte amtliche Ansuchen des Unterzeichneten, aus andern Fonds folgende am 4. Febr. d. J. hier eingegangene Werke für unsere Bibliothek in Berlin huldreichst ankaufen und kostenfrei zusenden zu lassen geruhet: Diodor. Sicul. Ed. Wesseling. Amst. 746. 2 Voll. fol. — Antholog. Graec. Cur. Jacobs. 13 Thle in 11 Bden. 8. — Aristot. hist. animall. Ed. Schneider. 4 Thle in 2 Bden. — Sueton. Opp. Ed. Baumgarten-Crus. 3 Bde 8. — Poetae latt. minores. Cur. Burmann. 2 Bde 4. — Appuleji Opp. omnia. Ed. Oudendorp et Ruhnken. Lugd. B. 786 3 Bde gr. 4. — Mureti Varr. lectt. Ed. Wolf et Faehse. Hal. 2 Bde 8. — Aglaophamus von Lobeck. 2 Bde. 8. — Pitisci Lexic. antiquitt. Roman. 3 Voll. fol. — Noltenii Lexic. antibarb. Cur. Wichmann. 2 Bde. gr. 8. — Kreuzer und Mone, Symbolik ꝛc. Neueste Ausg. 6 Bde 8. und 1 Bd. Kupf. 4. — Voss, Antisymbolik. — Wilken, Gesch. der Kreuzzüge. Leipz. 808 — 830. 6 Bde 8. — Gehler's physikal. Wörterbuch. Neue Aufl. 5 Thle in 9 Bden 8. und 1 Bd. Kupf. 4. — Francoeur, Mechanik. Dresd. 824. 8. — Brandes, Vorless. üb. d. Astronomie. Leipz. 828. 2 Bde. — Mascheroni, über den Gebrauch des Zirkels, übers. v. Gruson. Berl. 825 8. — Auch verdankt die Anstalt eben dieser hohen Huld folgende, im Laufe des Schuljahres geschenkte neue Werke und Fortsetzungen: Caspari, Lehrb. der ebenen Geom. für Gymnas. ꝛc. 1r u. 2r Bd. Kobl. 1829 8. — Spiller, Leitf. in der niedern Math. für d. Bedarf der Gymnas. 2r Thl. Gr. Glogau 1831. 8. — Crelle, Journ. für etc. Math. 6. Bds. 3. u. 4. Hft. und 7. Bd. — Gesch. der Staatsveränd. in Frk. unt. Ludw. 16. 5r Bd. — Schoell's Gesch. der griech. Lit. A. d. Fr. v. Pinder 3r u. letzt. Bd. — Encyklop. Woerterb. der medicin. Wissenschft. 5. Bd. — Bernd, Schriftenkunde der Wappenwissenschaft. Bremen 1830. 2 Thle. — Kaulfuß, Nachr. v. d. Kgl. Gymn. zu Neustettin. — Falbe, Geschichte des Stargarder Gymn. — E. Fischer, über Gesang und Gesangunterricht. Berl. 831 8. — 5 Expl. des Schmiederschen Atlasses der alt. Geogr.

Außerdem darf sich unsere Bibliothek noch einen bedeutenden Zuwachs hauptsächlich für das Fach der griech. und röm. Literatur versprechen. Die Bewilligung der Kosten aus dem vorjährigen Bestande unserer Kasse ist uns bereits huldreichst zugesagt.

Mit der freudigsten Rührung und dem ehrfurchtsvollsten Danke haben der Unterzeichnete und seine Kollegen diese ausgezeichneten Beweise der huldreichen Fürsorge ihrer hohen Oberen für sie und das Gymnasium empfangen. Aus dem Etatsfond für die Bibl. sind theils ganze Werke, als: Statii Silvae v. Markland, Schotts Theorie der Beredsamkeit, Becker's deutsche Sprachl. 2 Bde u. a., theils Fortsetzungen: als die im Laufe des Jahres erschienenen Lieferungen des Forcellin. Lexikons, der 3. Bd. von Gerlach's Sallust., mehre Bde des Corp. scriptt. hist. Byzant., des „Cours d' hist. des états Europ. etc." von Schoell, d. 5. Bd. von Klügels math. Wörterbuch, der 4. v. Berzelius Chemie, die letzten Hefte von Lorreks preuß. Flora, u. a. m. angekauft worden.

Endlich sind noch an Privatgeschenken hinzugekommen: von Hr. D.L. Petrenz, die Jenaer allg. Lit. Zeit. Jahrg. 1821 bis 1830 incl. Die vier letzten mit den Erg. Bl. Von einem Lesezirkel, woran die meisten Lehrer der Anstalt Theil nehmen, die Hall. Lit. Zeit. nebst d. Erg. Bl. von 1830; vom Hrn. Pfarrer Lehmann zu Trempen: v. Baer, über Entwickelungsgesch. der Thiere. Koenigsb. 1828. 1 Bd. gr. 4.

Den wohlwollenden Gebern sage ich im Namen der Anstalt den herzlichsten Dank.

An Programmen anderer Gymnasien sind eingegangen 91 aus 1830 und 31 aus 1831.

3) Die kleine Sammlung von Lesebüchern ist ebenfalls aus ihrem geringen Fond, dem Versetzungsgelde, durch einige ganze Werke und durch Fortsetzungen vermehrt worden. Desgl. hat die Sammlung von Schulbüchern für arme Schüler theils Ersatz des Abganges, theils Zuwachs aus dem v. Meelbeckschen Legate, wie auch durch ein Geschenk des Hr. Pfarrers Lehmann erhalten.

4) Für Vermehrung des physikalischen Apparats hat bei der Geringfügigkeit des betreffenden Etatstitels Nichts geschehen können. Dagegen hat uns das Hohe Königl. Ministerium huldreichst verheißen, auch auf diesen Theil unserer Sammlungen Bedacht zu nehmen.

5) Unser Mineralienkabinet hat einen eben so unerwarteten als werthvollen Zuwachs erhalten. Herr Professor Dr. Zipser zu Neusohl in Ungarn hat unserm Gymnasio über Wien und Breslau ein „Erstes Hundert einer orykto- geognostischen Mineralien-Sammlung von Ungarn" von vorzüglicher Qualität als Geschenk zugesandt. Nach dieser Ueberschrift des Verzeichnisses sowohl, als nach einigen Andeutungen in demselben dürfen wir noch einer zweiten Sendung entgegensehen. Auf amtlichem Wege ist mir kund geworden, daß Herr Professor Zipser gegen mehre andere Königl. Preuß. Gymnasien sich bereits eben so wohlthätig bewiesen hat, und gegen alle übrigen es noch zu thun gesonnen ist. Je seltener diese aus dem fernen Auslande uns gewährte Gabe ist, um desto mehr verdient sie hervorgehoben zu werden. Das Hohe Königliche Ministerium hat Sich vorbehalten, dem hochherzigen Geber Seinen Dank auf eine ausgezeichnete Weise zu erkennen zu geben.

Unter den Freischülern der Anstalt waren auch in diesem Jahre vier Zöglinge der litth. Friedensgesellschaft.

Uebersicht

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums im Schuljahre 18$\frac{30}{31}$.

1. Lehrerkollegium.

Direktor Prang.
Oberlehrer Petrenz.
O.L. Sperling.
O.L. Dr. Hamann.
Gymn.L. Küßner.
G.L. Lucks.
G.L. Skrzerzka.
G.L. Dr. Jänson.
G.L. Brunkow.
G.L. Mauerhoff.
Kandidat Kossak.
Gesanglehrer Hermes.
Kandidat Gotthardt.

2. Allgemeiner Lehrplan.

Fächer.	Klassen und Stunden. I	II	III	IV	V A	V B	V A. u. B. komb.	VI	Summa
Deutsch	3	3	4	4	6	6	—	6	32
Latein.	9	10	8	7	7	7	—	7	55
Griechisch	7	7	7	5	—	—	—	—	26
Hebräisch	2	2	—	—	—	—	—	—	4
Religion	2	2	2	2	2	2	—	2	14
Philos. Propäd.	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Mathematik	4	4	5	5	6	6	—	6	36
Naturkunde	2	2	2	2	—	—	2	2	12
Geographie	1	1	1	3	1	1	—	2	10
Geschichte	3	3	3	2	2	2	—	—	15
Schönschreiben	—	—	2	2	—	—	3	3	10
Zeichnen	—	—	—	2	—	—	3	2	7
Gesanglehre	2							2	4
	36	34	34	34	24	24	8	32	226

Anmerk. Das Zeichen ⌣ bedeutet Kombination. Die Stunden für den Gesangunterricht sind der Kombination wegen nur bei I und VI mitgezählt.

3. Nachweisung über die

Schüler.

In	waren nach d. B. z. Mich. 30.	wurd. aufgen.	abgegangen	sind jetzt
I	19	1	11	9
II	28	3	4	27
III	48	1	9	40
IV	44	8	9	43
V	89	7	8	88
VI	13	35	6	42
	241	55	47	249

Abiturienten.

Anzahl der Entlassenen.		Ort, wo sie studiren.		Was sie studiren.	
mit No. II.	8	in Königsberg	7	Theologie	4
		in Bonn	1	Kameralwiss.	1
				Rechte	1
				Math.	1
				Unentschloss.	1

Anmerk. Unter den aus I. abgegangenen sind die Abiturienten mitbegriffen. Auf die durch die Translokation zu Michaelis d. J. bewirkten Veränderungen hat hier noch nicht Rücksicht genommen werden können.

V. Folge der Prüfungs-Gegenstände.

Freitag, den 30. September, von 8 bis 12 Uhr.

Chorgesang.

I. Sexta.

Religion. Hr. Küßner.
Rechnen. Hr. Mauerhoff.
Latein. Hr. Küßner.
Deklamationen einiger Sextaner.

II. Quinta.

B. Geschichte. Hr. Skrzeczka.
Deutsche Sprache. Hr. Kossak.
A. u. B. Naturgeschichte. Hr. Brunkow.
A. Geographie. Hr. Skrzeczka.
Geometrie. Hr. Küßner.
Latein. Hr. Skrzeczka.
Deklamationen einiger Quintaner.

Die untere Singklasse. Herr Mauerhoff.

Chorgesang.

Nachmittags von 2 bis 5 Uhr.

Chorgesang.

III. Quarta.

Arithmetik. Hr. Mauerhoff.
Griechisch. Hr. Lucks.
Geographie. Hr. Brunkow.
Deklamationen einiger Quartaner.

IV. Tertia.

Mathematik. Hr. O.L. Sperling.
Latein. Cäsar. Hr. Skrzeczka.
Griechisch. Xenoph. Hr. Lucks.
Deklamation eines Tertianers.

Während der Prüfung der drei untern Klassen liegen Probeschriften und Zeichnungen zur Ansicht vor.

Chorgesang.

Sonnabend, den 1. Oktober, von 8 bis 12 Uhr.

Chorgesang.

V. Sekunda.

Geschichte. Hr. O.L. Dr. Hamann.
Griechisch. Ilias. Hr. Dr. Janson.
Lat. Cic. in Cat. Hr. O.L. Petrenz.
Deutsche Lit. Gesch. Hr. Dr. Janson.

VI. Prima.

Lat. Horat. Hr. O.L. Petrenz. Physik. Hr. O.L. Sperling.
Rhetorik. Hr. O.L. Dr. Hamann.

Entlassung der Abiturienten durch den Direktor. — Lat. Abschiedsrede des Abiturienten Hassenstein. — Der Primaner Strohmann wünscht den Abgehenden Glück.

Chorgesang.

Das neue Schuljahr beginnt mit dem 17. Oktober. — Eltern und Vormünder, die ihre Söhne oder Mündel in das Gymnasium aufnehmen zu lassen wünschen, werden ersucht, dieselben, wenn sie sich für Quinta oder eine höhere Klasse zu eignen scheinen, am 14., die für Sexta geeigneten aber am 15. Oktober um 10 Uhr Vormittags zur Prüfung vorzustellen.

Gumbinnen, im September 1831.

Prang.