Einladungsschrift

zu der

am 2ten und 3ten Oktober 1835

anzustellenden

öffentlichen Prüfung der Schüler

des

Königl. Friedrichs-Gymnasiums

zu Gumbinnen.

Inhalt:

Gumbinnen, 1835.
Gedruckt in der Krauseneckschen Regierungs-Buchdruckerei.

Einige Funktionen-Entwickelungen

nach einer auf die einfachsten Elemente beschränkten Methode.

Ich denke hier nicht etwas Neues zu liefern; sondern habe die Absicht, eine, wie es scheint, ziemlich in Vergessenheit gerathene Entwickelungsmethode, wenigstens für den Schulgebrauch, wieder zu empfehlen. Zu diesem Zwecke habe ich die Aufmerksamkeit des Lesers auf ihre ausgedehnte Brauchbarkeit zu lenken gesucht, indem ich an mehreren Entwickelungen theils sehr gebrauchter Funktionen gezeigt habe, daß diese Methode aus- und wohl noch weiter reicht, als gegenwärtig der Gymnasialunterricht erheischt. Es ist allerdings nicht zu leugnen, daß es genug und darunter auch ziemlich elementare Wege giebt, die man bei der Darstellung der Funktionen in Reihenform einschlagen kann; indeß macht dieser Umstand eine besondere Methode gerade noch nicht überflüßig, da sich wohl auch beim Unterrichte Gelegenheit findet, sich vorzugsweise ihrer zu bedienen. Wenn ferner in mancher Funktionen-Theorie Mannigfaltigkeit in den Prinzipien und eine gewisse Künstlichkeit in der Verknüpfung der einzelnen Entwickelungen der vorherrschende Charakter und diese Eigenschaft derselben dem Lehrer, den Einförmigkeit ermüdet, recht willkommen ist, so muß er auf der andern Seite aber auch als wichtig anerkennen und wünschen, seinen Schülern durch Einfachheit das Auffassen und Behalten der besprochenen Materie zu erleichtern und ihm zu zeigen, wie man oft mit geringen Mitteln viel ausrichten könne, und wie oft ein Grundprinzip durch eine Menge von Sätzen durchherrscht und sie zu einem Ganzen verkettet. Auf diese Weise giebt man dem Schüler zugleich ein Werkzeug in die Hand, das er leicht gebrauchen lernt und das ihm zu einer selbstständigen Weiterbildung dienen kann. Es war mir daher eine erfreuliche Bemerkung, als ich vor mehreren Jahren Lhuilier's Anleitung zur Elementar-Algebra in die Hände bekam, daß die hierin vorkommenden einfachen, eleganten und überzeugenden Entwickelungen sich auf ein Prinzip basiren, dessen Fruchtbarkeit reiche Ausbeute zuläßt und dessen Einfachheit dem Verstande, wie dem Gedächtnisse vortrefflich zu Statten kommt.

Doch die Nothwendigkeit einer ökonomischen Benutzung des Raumes gebietet mir möglichste Kürze, weshalb ich zur Sache eile und dem kundigen Leser überlasse, selbst zu prüfen und zu beurtheilen, ob die nachfolgende Entwickelungs-Methode in den Gymnasialunterricht verdient aufgenommen zu werden.

---

§. 1. Die Erklärung einer Funktion und eben so den Descartesschen Satz von der Gleichheit der korrespondirenden Coefficienten in den Reihen-Entwickelungen gleicher Funktionen als etwas sehr Bekanntes übergehend erinnere ich nur daran, daß der Ausdruck: $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ durch wirkliche Division sich in die Reihe:
$x^{n-1} + x^{n-2} . y + x^{n-3} . y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$ verwandelt und n Glieder hat, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Dieses und noch einige andere leicht faßliche Dinge werden die Grundlage der ganzen Theorie seyn.

§. 2. Bezeichnen wir durch $f(x)$ irgend eine Funktion von x; also durch $f(y)$ dieselbe Funktion, nur mit dem Unterschiede, daß x in y übergegangen ist, und setzen nach der Methode der unbestimmten Coefficienten:

1. $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$, also
2. $f(y) = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{etc.}$, so ist
3. $f(x) - f(y) = B(x-y) + C(x^2-y^2) + D(x^3-y^3) + E(x^4-y^4) + \text{etc.}$;

daher, wenn man auf beiden Seiten durch $(x-y)$ dividirt:

4. $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = B + C(x+y) + D(x^2+xy+y^2) + E(x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \text{etc.}$

Hierbei kommt es nun hauptsächlich darauf an, die Division linker Hand wirklich auszuführen, wofür sich im Allgemeinen zwar keine Regel angeben, aber in jedem besondern Falle das Mittel meistens leicht finden läßt.

Setzt man nach dieser Operation für y immer x, so erhält man linker Hand eine reine Funktion von x, die durch $f'(x)$ bezeichnet werden möge, und im Ganzen die Gleichung:

5. $f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.}$

Die Operationen von 1 bis 4 wiederholt führen auf:

6. $f''(x) = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{etc.}$,

dieses ähnlich auf:

7. $f'''(x) = 2.3D + 2.3.4Ex + \text{etc.}$

Hiernach ist nun schon zu übersehen, daß man zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D etc. gelangt, wenn man successive die Fuktionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. sucht und hierin, wie in $f(x)$ und den zugehörigen Reihen alles x gleich 0 macht. Dadurch erhält man:

$$A = f(0),\ B = \frac{f'(0)}{1},\ C = \frac{f''(0)}{1.2},\ D = \frac{f'''(0)}{1.2.3},\ D = \frac{f''''(0)}{1.2.3.4} \text{ etc.}$$

Die große Aehnlichkeit dieser Resultate und ihrer Berechnung mit dem, was das Maclaurinsche Differential-Theorem aufstellt, ist nicht zu verkennen. Doch hat jenes noch den Vorzug, daß es seine Differential-Quotienten nach bestimmten Regeln bilden kann, während hier zur Derivation der $f'(x)$, $f''(x)$ etc. noch besondere Kunstgriffe nöthig sind, vermöge welcher die Division durch $(x-y)$ ausführbar gemacht wird. Allerdings ließe sich auch hier eine besondere Differenzen-Methode zur Bestimmung der derivirten Funktionen nach allgemeinen Regeln aufstellen; allein dies würde für den Schulunterricht zu ausgedehnt und im Grunde nichts anderes, als eine Art Differential-Rechnung, folglich schon deshalb vom Lehrkursus ausgeschlossen seyn. — Indeß ist auch das Verfahren, welches ich hier empfehlen will, etwas anders und von der eben gezeigten successiven Bestimmungs-Methode, die in manchen Fällen nicht ohne wesentliche Vortheile ist, dadurch verschieden, daß man sogleich, wenn $f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 +$ etc. gefunden ist, $f'(x)$ auf $f(x)$, oder sollte man noch weiter gehen müssen, $f''(x)$ auf $f'(x)$ oder $f(x)$, also überhaupt ein derivirtes $f(x)$ auf ein vorhergehendes zu reduciren sucht. Auf diese Weise gewinnt man durch die Substitution eine Gleichung zwischen zwei Reihen und kann die Coefficienten A, B, C, D etc. durch Gleichsetzung der korrespondirenden Glieder bestimmen. Solche Reduktionen des $f'(x)$ auf $f(x)$ sind für den Ungeübten freilich mit einiger Schwierigkeit verbunden, jedoch ist dieses bei den gewöhnlichen (algebraischen) Funktionen nicht der Fall und meistens nur bei den transcendenten anzutreffen.

§. 3. Zur Erläuterung des Gesagten diene zunächst der binomische Ausdruck $(1+x)^n$, worin n eine ganze positive Zahl vorstellen möge. Setzt man nun

$$(1+x)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ etc., also}$$
$$(1+y)^n = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{ etc., so ist}$$

$$(1+x)^n - (1+y)^n = B(x-y) + C(x^2-y^2) + D(x^3-y^3) + E(x^4-y^4) + \text{ etc.}$$

Da nun der Divisor $(x-y)$ auch die Form: $(1+x) - (1+y)$ annehmen kann, welche gerade für die linke Seite nöthig ist, so erhält man nach §. 1.

durch wirkliche Division:

$$(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2}(1+y) + \ldots + (1+x)(1+y)^{n-2} + (1+y)^{n-1}$$
$$= B + C(x+y) + D(x^2+xy+y^2) + E(x^3+x^2y+xy^2+y^3) + \text{etc.},$$

folglich wenn y in x verwandelt und hierauf alles gehörig zusammen gezogen wird:

$$n(1+x)^{n-1} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.}$$

Die Multiplikation mit $(1+x)$ auf beiden Seiten verwandelt die linke in $n(1+x)^n$, oder $n(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.})$ und giebt daher die Gleichung:

$$n(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}) = B + (2C+B)x$$
$$+ (3D+2C)x^2 + (4E+3D)x^3 \text{ etc.},$$

woraus nach dem in §. 1. angeführten Satze folgt:

$B = nA$	oder:	$1B = nA$	oder:	$B = \frac{n}{1} . A$
$2C + B = nB$	„	$2C = (n-1)B$	„	$C = \frac{n-1}{2} . B$
$3D + 2C = nC$	„	$3D = (n-2)C$	„	$D = \frac{n-2}{3} . C$
$4E + 3D = nD$	„	$4E = (n-3)D$	„	$E = \frac{n-3}{3} . D$
etc. etc.		etc. etc.		etc. etc.

Vollständig entwickelt sind demnach die Coefficienten:

$$A = A$$
$$B = \frac{n}{1} . A$$
$$C = \frac{n(n-1)}{1 . 2} . A$$
$$D = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} . A$$
$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4} . A$$

etc. etc.

Setzt man endlich noch für A . . 1, welcher Werth aus der angenommenen Gleichung für $x = 0$ folgt, so ist die gesuchte Entwickelung die bekannte:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 . 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}x^3 + \text{etc.}$$

§. 4. Nimmt man nun n negativ und setzt wieder

$$(1+x)^{-n} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

also $(1+y)^{-n} = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{etc.}$

so bleibt im Uebrigen Alles wie vorhin, wenn man links noch, um die negativen Exponenten fortzuschaffen,

$$(1+x)^{-n} - (1+y)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n} - \frac{1}{(1+y)^n} = -\left\{\frac{(1+x)^n - (1+y)^n}{(1+x)^n\,(1+y)^n}\right\}$$

macht. Alsdann wird nach der Division und Umwandlung des y

$$-\frac{n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.}$$

Es ist aber wieder $-\frac{n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = -n(1+x)^{-n-1}$

und nach der Multiplikation mit $(1+x)$ auf beiden Seiten:

$$-n(1+x)^{-n} = -n(A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}) = (B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.})\,(1+x).$$

Dieses führt auf dieselben Resultate, wie im vorigen §., mit dem Unterschiede, daß n negativ und daher

$$B = -nA$$

$$C = \frac{-n(-n-1)}{1\,.\,2}A = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}A$$

$$D = \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}A = -\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}A$$

u. s. w.

zu setzen ist. A wird auch wie vorhin $= 1$ gefunden. Demnach hat man

$$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \text{etc.}$$

§. 5. Nimmt man dagegen einen gebrochenen Exponenten, so ist die Entwickelung zwar zusammengesetzter, aber auch noch ohne erhebliche Schwierigkeit; denn setzt man wieder

$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.},\ \text{also}$$

$$(1+x)^n = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.})^m \ \text{und}$$

$$(1+y)^n = (A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{etc.})^m$$

und bezeichnet die beiden letzten Gleichungen der Kürze wegen durch:

$\mathfrak{x}^n = X^m$ und $\mathfrak{y}^n = Y^m$, so ist $\mathfrak{x}^n - \mathfrak{y}^n = X^m - Y^m$; also auch

$\frac{\mathfrak{x}^n - \mathfrak{y}^n}{x - y} = \frac{X^m - Y^m}{x - y}$, wofür man die Form:

$\left(\frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{y}}{x-y}\right)\left(\frac{\mathfrak{x}^n-\mathfrak{y}^n}{\mathfrak{x}-\mathfrak{y}}\right)=\left(\frac{X-Y}{x-y}\right)\left(\frac{X^m-Y^m}{X-Y}\right)$ brauchen muß, um die Division ausführen zu können. Nun ist aber leicht zu übersehen, daß

$\frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{y}}{x-y}=1$ und $\frac{X-Y}{x-y}=B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2)+\text{etc.}$ und daher $\mathfrak{x}^{n-1}+\mathfrak{x}^{n-2}.\mathfrak{y}+\ldots+\mathfrak{x}\mathfrak{y}^{n-2}+\mathfrak{y}^{n-1}=$

$\{B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2)+\text{etc.}\}.\{X^{m-1}+X^{m-2}.Y\ldots+Y^{m-1}\}$

ist. Läßt man hier wieder y in x, also auch Y in X und $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{x}$ übergehen, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$n\mathfrak{x}^{n-1}=\{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.}\}mX$, welche mit $\mathfrak{x}.X$ multiplizirt und durch $\mathfrak{x}^n=X^m$ dividirt $nX=\{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.}\}m\mathfrak{x}$ liefert. Setzt man endlich noch für X und $\mathfrak{x}$ ihre Werthe und löst die Klammer auf, um die linke Seite nach Potenzen von x zu ordnen, so ist

$n(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.})=m[B+(2C+B)x+(3D+2C)x^2+\text{etc.}]$

oder $\frac{n}{m}(A+Bx+Cx^2+\text{etc})=B+(2C+B)x+(3D+2C)x^2+\text{etc.}$

Wegen der Analogie dieser Gleichung mit der korrespondirenden in §. 3. braucht man nur $\frac{n}{m}$ an die Stelle von n zu setzen, um aus den dortigen Coefficienten-Werthen die jetzigen zu finden, und es ist demnach, da auch hier $A=1$ wird,

$$(1+x)^{\frac{n}{m}}=1+\frac{n}{m}x+\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{1.2}x^2+\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

§. 6. Den vierten Fall mit negativem Bruchexponenten, welcher das Verfahren der beiden vorigen §§. vereinigt, übergehe ich hier als eine unnöthige Wiederholung, da es leicht seyn wird auf die Gleichung: $-\left\{\frac{\mathfrak{x}^n-\mathfrak{y}^n}{\mathfrak{x}^n.\mathfrak{y}^n}\right\}=X^m-Y^m$ zu kommen und wie in §. 5. weiter zu schließen. Augenscheinlich sind die Resultate hier den frühern ähnlich, und die in §. 3. gefundene binomische Formel zugleich die auf alle vier Fälle passende Entwickelung.

Daß x auch negativ seyn darf, versteht sich von selbst. Auch ist gegen die Allgemeinheit des Binomialtheorems von der Seite her nichts einzuwenden, daß das Binomium $(a+b)$ seyn könnte. Denn setzt man statt x $\frac{b}{a}$ und multiplizirt beide Seiten der Gleichung $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}$ mit a^n, so geht $(1+x)^n$ in $(a+b)^n$ über.

Dagegen wäre ein anderer Einwand gegen die unumschränkte Gültigkeit der binomischen Reihe zu machen, auf den selten Rücksicht genommen wird; ich meine die vielfältige Formverschiedenheit, welche der Exponent noch außer der ganzen Zahl und dem Bruche darbieten kann. Später werde ich Gelegenheit haben noch einmal auf diesen Einwand zurückzukommen.

Was übrigens die obige ganz mit Lhuilier's übereinstimmende Eintheilung des Exponenten in vier verschiedene Formen betrifft, so möchte ich dabei bemerken, daß die beiden ersten Fälle als Species der beiden andern füglich übergangen werden könnten. Ob der Schüler dabei etwas gewinnt, wenn dieser allmählige Uebergang vom Leichtern zum Schwerern ihm erspart wird, ist eine andere Frage.

§. 7. Zur Entwickelung deß Logarithmus setze man

$$\log(1+x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc., also}$$
$$\log(1+y) = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{etc, folglich}$$
$$\log(1+x) - \log(1+y) = B(x-y) + C(x^2-y^2) + D(x^3-y^3) + \text{etc.}$$

Da nun $\log(1+x) - \log(1+y) = \log\left(\frac{1+x}{1+y}\right) = \log\left(1+\frac{x-y}{1+y}\right)$ und nach der Annahme

$$\log\left(1+\frac{x-y}{1+y}\right) = A + B\left(\frac{x-y}{1+y}\right) + C\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2 + D\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^3 + \text{etc. ist,}$$

so hat man:

$$A + B\left(\frac{x-y}{1+y}\right) + C\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2 + \text{etc.} = B(x-y) + C(x^2-y^2) + \text{etc. und}$$

kann auf beiden Seiten, mit Ausnahme des ersten Gliedes, überall durch $(x-y)$ dividiren. Dieser eigenthümliche Fall, der sonst als ein Zeichen der Unzulässigkeit der angenommenen Reihenform gelten kann, läßt sich sogleich beseitigen, wenn man auf die Annahme zurückgeht und $x = 0$ setzt, wornach denn $A = \log 1 = 0$ seyn muß und fortfällt.

Es bleibt daher nach der erwähnten Division nur folgende Gleichung übrig:

$$B.\frac{1}{(1+y)} + C.\frac{(x-y)}{(1+y)^2} + D.\frac{(x-y)^2}{(1+y)^3} + \text{etc.} = B + C(x+y) + D(x^2+y+y^2) + \text{etc.}$$

welche durch Verwandelung des y in x in

$$\frac{B}{1+x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc. übergeht.}$$

Durch wirkliche Division mit $(1+x)$ erhält man

$$B(1 - x + x^2 - x^3 + \text{etc.}) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.; daher}$$

$$\begin{array}{llll} B = + B & \text{oder:} & B = + B & \\ 2C = - B & \text{"} & C = - \frac{B}{2} & \\ 3D = + B & \text{"} & D = + \frac{B}{3} & \\ 4E = - B & \text{"} & E = - \frac{B}{4} & \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} & & \text{etc.} \quad \text{etc.} & \end{array}$$

Folglich ist $\log. (1 + x) = Bx - \frac{Bx^2}{2} + \frac{Bx^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} + \text{etc.}$

$= B\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right)$, wie bekannt.

Die Bestimmung des B und die Erweiterung dieser Reihe bleibt die gewöhnliche; doch für x dürfen nur rationale Werthe zwischen -1 und $+1$ genommen werden. Daß auch irrationale und imaginäre Werthe gelten, was in den meisten Lehrbüchern ohne weitere Rechtfertigung angenommen wird, bedarf noch eines besondern Beweises, den ich mir weiter unten vorbehalte.

§. 8. Ich komme nun zur Entwickelung von a^x, die für die Verallgemeinerung der bereits gefundenen Entwickelungen von großem Nutzen seyn wird. Sey also wieder:

1. $a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ und
2. $a^y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{etc.}$, folglich
3. $a^x - a^y = B(x - y) + C(x^2 - y^2) + D(x^3 - y^3) + \text{etc.}$,

so kommt es hier hauptsächlich wieder auf die Behandlung des Ausdrucks $a^x - a^y$ an. Man setze $a^x - a^y = a^y \left(\frac{a^x}{a^y} - 1\right) = a^y (a^{x-y} - 1)$, leite aus der Annahme den Werth von $A = 1$ her und forme nun a^{x-y} nach 1. Dann ist

4. $a^y [B(x-y) + C(x-y)^2 + D(x-y)^3 + \text{etc.}] = B(x-y) + C(x^2-y^2) + \text{etc.}$

oder, wenn man durch $(x - y)$ dividirt,

5. $a^y [B + C(x-y)^2 + \text{etc}] = B + C(x+y) + D(x^2 + xy + y^2) + \text{etc.}$

und, wenn $y = x$ gesetzt wird,

6. $a^x . B = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.}$ Substituirt man endlich für a^x aus 1 seinen Werth, so ist, wenn $A = 1$ gesetzt wird,

7. $B(1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc}$

Hieraus ergeben sich sogleich folgende Beziehungen zwischen den Coefficienten:

$$B = B, \text{ oder: } B = B$$

$$2C = BB \quad " \quad C = \frac{1}{2}B^2$$

$$3D = BC \quad " \quad D = \frac{1}{2.3}B^3$$

$$4E = BD \quad " \quad E = \frac{1}{2.3.4}B^4$$

etc. etc. etc. etc.

Daher hat man nun:

$$8)\ a^x = 1 + Bx + \frac{B^2x^2}{1.2} + \frac{B^3x^3}{1.2.3} + \frac{B^4x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Auch hier setze ich die weitern Folgerungen aus dieser Reihe und die gewöhnliche Bestimmung des B bei Seite, nicht sowohl wegen der Bekanntheit, als vielmehr wegen der nöthigen Begründung der Schlüsse, die dazu führen. Zugleich hoffe ich durch ein genaueres Eingehen auf das Wesen der Potenz auch die Gültigkeit der früheren (binomischen und logarithmischen) Entwickelungen zu erweitern.

§. 9. Alle Formungen in Reihen sind, wenn man die Grundpfeiler des ganzen Schlußgebäudes untersucht, auf die gewöhnlichen Operationen mit den Potenzen gestützt, wie man sich namentlich leicht bei den gegenwärtigen Entwickelungen davon überzeugen kann. Daß die Richtigkeit derselben bei den elementaren Beweisen sich aber nur auf ganze und gebrochene Exponenten bezieht und ihre Statthaftigkeit für alle übrigen Zahlformen noch besonders nachgewiesen werden müsse, wenn von spätern, hierauf gegründeten, Resultaten eine unbeschränkte Anwendung gemacht werden soll, vergißt man sich häufig zu sagen, unbekümmert darum, daß die Wahrheit der Schlüsse, wie weit sie auch von der Quelle liegen, nicht weiter reichen könne, als die Gültigkeit der ersten Prämissen. Auf diesen Grund sehe ich mich daher genöthigt zurück zu gehen.

Welche Aenderung die Erklärung einer Potenz gleich Anfangs erleidet, sobald man den Begriff des Exponenten auch auf gebrochene Zahlen ausdehnt, ist bekannt, und daher eine noch bedeutendere Abänderung zu erwarten, wenn der Exponent jede nur denkbare (irrationale und imaginäre) Größe seyn soll. Man hat zwei Wege, die zu einer Erklärung führen: entweder die Rücksicht auf die Eigenschaften, oder die Rücksicht auf die Form, in sofern diese die Eigenschaften in sich schließt. Den ersten hat Crelle in seinem „Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen

Fakultäten" (s. S. 13 und 14.) eingeschlagen und sehr methodisch durchgeführt; ob auch jemand von der andern Ansicht der Sache ausgegangen, ist mir nicht bekannt. Ich will es daher versuchen diese Rücksicht zum Grunde zu legen und aus der Annahme der Form auf die allgemeinen Eigenschaften der Potenzen schließen. Dieses Verfahren steht mit den hier entwickelten Resultaten theils in genauerem Zusammenhange, theils ist es dem bei der gewöhnlichen Beschränkung der Potenzen-Definition analog.

§. 10. Setzt man nämlich in §. 8. 8. statt $x \ldots 1$, welche Annahme noch in den Grenzen der bis jetzt erlaubten Annahmen liegt, so ist:

$a = 1 + B + \frac{B^2}{1.2} + \frac{B^3}{1.2.3} + \frac{B^4}{1.2.3.4} + \text{etc}$, woraus wenigstens soviel hervorgeht, daß B lediglich von a abhängt und daß also jedesmal für dasselbe a auch dasselbe B gilt. Erklärt man nun eine Potenz ganz allgemein für eine Größe von der Form: $1 + Bx + \frac{B^2x^2}{1.2} + \frac{B^3x^3}{1.2.3} + \frac{B^4x^4}{1.2.3.4} + \text{etc. in inf.}$, die durch a^x bezeichnet werde, was x auch seyn mag, so folgt hieraus $a^x \,.\, a^y = a^{x+y}$ für jeden Werth von a, x und y. Denn nach der Erklärung ist

$$1.\quad a^x = 1 + Bx + \frac{B^2x^2}{1.2} + \ldots + \frac{B^{n-1}\,.\,x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{B^n x^n}{1.2\ldots n} + \text{etc.}$$

$$2.\quad a^y = 1 + By + \frac{B^2y^2}{1.2} + \ldots + \frac{B^{n-1}\,.\,y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{B^n y^n}{1.2\ldots n} + \text{etc.}$$

$$3.\quad a^{x+y} = 1 + B(x+y) + \frac{B^2(x+y)^2}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{B^n(x+y)^n}{1.2\ldots n} + \text{etc.}$$

Läßt sich nun nachweisen, daß die Multiplikation von 1 und 2 dieselbe Reihe als 3 giebt, so ist ohne Widerspruch $a^x \,.\, a^y = a^{x+y}$ zu setzen. Um uns von der Identität beider Ausdrücke vollständig zu überzeugen, wollen wir nur die Glieder des Produktes sammeln, die zusammen das Glied $\frac{B^n(x+y)^n}{1.2\ldots n}$ geben müßten, da dieses allgemeine Glied alle übrigen repräsentirt.

Diese wären also nach der Reihe:

$$1\,.\,\frac{B^n\,.\,x^n}{1.2\ldots n} \quad \text{oder} \quad \frac{B^n}{1.2\ldots n}\,.\,x^n$$

$$\frac{By}{1}\,.\,\frac{B^{n-1}\,.\,x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \quad \text{"} \quad \frac{B^n}{1.2\ldots n}\,.\,nx^{n-1}\,.\,y$$

$$\frac{B^2y^2}{1.2}\cdot\frac{B^{n-2}x^{n-2}}{1.2....(n-2)} \quad \text{oder:} \quad \frac{B^n}{1.2...n}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}\,x^{n-2}.\,y^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{B^{n-1}.\,y^{n-1}}{1.2...(n-1)}\cdot\frac{Bx}{1} \quad " \quad \frac{B^n}{1.2...n}\cdot nxy^{n-1}$$

$$\frac{B^n.\,y^n}{1.2....n}\cdot 1 \quad " \quad \frac{B^n}{1.2...n}\cdot y^n$$

wovon die Summe augenscheinlich $\frac{B^n(x+y)^n}{1.2....n}$ ist. Es leidet daher keinen Zweifel, daß für jedes a, x und y $a^x.a^y = a^{x+y}$ gesetzt werden darf.

§. 11. Hieraus folgt sogleich die andere Regel von den Potenzen, nämlich $\frac{a^z}{a^x} = a^{z-x}$. Denn setzt man $x + y = z$, also $y = z - x$ und daher (nach §. 10.) $a^z = a^x.a^y$; so ist, wenn man beiderseits durch a^x dividirt; $\frac{a^z}{a^x} = a^y = a^{z-x}$, wie bei den Potenzen mit ganzen, oder Bruch-Exponenten.

Die übrigen Regeln, welche von den Potenzen für die eben angeführte specielle Form des Exponenten noch bewiesen werden, stehen zwar noch weniger, als die eben abgeleiteten, oder vielmehr gar nicht, mit meiner anfangs ausgesprochenen Absicht in Berührung; indeß halte ich es dennoch nicht für ganz unnütz, auch diese noch nachzuweisen, da hierdurch die obige allgemeine Erklärung von Potenz (s. §. 10.) erst eine völlige Bestätigung ihrer Richtigkeit erhält, und anderntheils die Basis vervollständigt wird, worauf die Allgemeinheit aller nach der Analogie der hier vorkommenden Beispiele gemachten Entwickelungen beruht.

§. 12. Es soll also zunächst bewiesen werden, daß für jeden Werth von a, x und y $(a^x)^y = a^{xy}$ ist.

Nach §. 10. kann man setzen:

1. $a^{xy} = 1 + Bxy + \frac{B^2x^2y^2}{1.2} + \frac{B^3x^3y^3}{1.2.3} + \text{etc.}$

2. $(a^x)^y = 1 + B'y + \frac{B'^2.\,y^2}{1.2} + \frac{B'^3y^3}{1.2.3} + \text{etc.}$

woraus, wenn man für y 1 annimmt, respektive

3. $a^x = 1 + Bx + \frac{B^2x^2}{1.2} + \frac{B^3x^3}{1.2.3} +$ etc. und

4. $a^x = 1 + B' + \frac{B'^2}{1.2} + \frac{B'^3}{1.2.3} +$ etc. folgen, so daß hiernach $B' = Bx$ seyn muß. Wendet man diesen Werth von B' in 2. an, so werden beide Reihen identisch und es ist demnach jedesmal $(a^x)^y = a^{xy}$.

§. 13. Um zu finden, daß $a^x . b^x = (ab)^x$, setze man wieder:

1. $a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} +$ etc.

2. $b^x = 1 + Bx + \frac{B^2x^2}{1.2} + \frac{B^3x^3}{1.2.3} +$ etc.

3. $(ab)^x = 1 + Kx + \frac{K^2x^2}{1.2} + \frac{K^3x^3}{1.2.3} +$ etc.,

so giebt die Multiplikation von 1. und 2. als allgemeines Glied, ähnlich wie in §. 10., $\frac{(A+B)^n x^n}{1.2.3\ldots n}$; 3. dagegen für dasselbe Glied $\frac{K^n x^n}{1.2.3\ldots n}$.
Es müßte also $A + B = K$ seyn.

Ob diese Ausdrücke identisch sind, kann erst die Natur des A, B und K entscheiden. Deshalb wollen wir wieder $x = 1$, also statt 1.

4. $a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} +$ etc. setzen und den Werth von a, der zu $A = 1$ gehört, durch e bezeichnen; so ist

5. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} +$ etc.; folglich

6. $e^A = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} +$ etc. Aus dem Vergleich zwischen 4. und 6. geht nun hervor, daß

7. $e^A = a$; daher ist auch

8. $e^B = b$ und

9. $e^K = ab$. Die Multiplikation der 7. mit 8. giebt aber

10. $e^{A+B} = ab$, welches mit 9. verglichen den Schluß zuläßt, daß wirklich $A + B = K$, also auch $a^x . b^x = (ab)^x$ ist.

§. 14. Will man endlich noch beweisen, daß $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, so setze man $\frac{a}{b} = q$;

folglich $a = b.q$; $a^x = (b.q)^x = b^x.q^x$; daher $\frac{a^x}{b^x} = q^x$, oder $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ für jeden Werth von a, b und x. — Auch ist noch $a^{-x}.a^{+x} = a^{-x+x} = a^0 = 1$ und deshalb $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ und umgekehrt $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$.

§. 15. Kehren wir nun wieder zu den Logarithmen zurück und erinnern uns, daß in §. 7. $\log(1+x) - \log(1+y) = \log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$ gesetzt wurde, so liegt dieser Annahme weiter nichts, als der bereits §. 11. ganz allgemein gedachte Satz zum Grunde, daß $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ist. Jene Reihe für $\log(1+x)$ darf daher ohne alle Beschränkung der Form für x gebraucht werden, wenn es nur innerhalb der Grenzen geschieht, welche die Konvergenz der Reihe bedingt. In Betreff ihrer Constanten B und der gleichbezeichneten, aber von ihr ganz verschiedenen, der Reihe für a^x ist noch folgender Zusammenhang zu merken und an diesem Orte erst gründlich nachzuweisen möglich:

Man setze des Unterschiedes wegen die erste Constante $= M$, die letzte $= A$ und demgemäß

$$1.\quad \log(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}\right)$$
$$= Mx\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \text{etc.}\right)$$
$$= Mx.R, \text{ wo also}$$

$R = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \text{etc.}$ ist und für $x = 0$ in 1 übergeht.

$$2.\quad a^X = 1 + AX + \frac{A^2X^2}{1.2} + \frac{A^3X^3}{1.2.3} + \text{etc.} = 1 + x, \text{ so folgt hieraus}$$

$$3.\quad AX + \frac{A^2X^2}{1.2} + \frac{A^3X^3}{1.2.3} + \text{etc.} = x, \text{ oder}$$

$$4.\quad AX\left(1 + \frac{AX}{1.2} + \frac{A^2X^2}{1.2.3} + \text{etc.}\right) = x; \text{ auch folgt aus 2. noch:}$$

5. $X = \log(1+x) = MxR$. Substituirt man diesen Werth von X in 4., so ist

$$6.\quad A.MxR\left(1 + \frac{A.MxR}{1.2} + \frac{A^2M^2x^2R^2}{1.2.3} + \text{etc.}\right) = x \text{ oder}$$

7. $AMR\left(1+\frac{AMxR}{1.2}+\frac{A^2M^2x^2R^2}{1.2.3}+\text{etc}\right)=1$. Setzt man hierin $x=0$, in welchem Falle, wie oben bemerkt wurde, $R=1$ ist, so hat man $A.M=1$, als die gesuchte Relation.

16. Um endlich noch den Einwand zu heben, welchen man gegen die Allgemeinheit der binomischen Reihe machen könnte, da sie nur unter beschränkter Form des Exponenten entwickelt wurde (s. §. 6.), möchte ich von den verschiedenen Mitteln, die mir im Allgemeinen hierzu tauglich, aber auch nicht ohne große Weitläuftigkeit und Verwickelung der Rechnung schienen, folgendes als das Einfachste vorziehen und zugleich als Beispiel für ähnliche Fälle aufstellen:

Man nehme wieder, wie in §. 3., jedoch ohne alle Formbeschränkung des n

1. $(1+x)^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{etc.}=X^n$,
2. $(1+y)^n=1+Ay+By^2+Cy^3+\text{etc.}=Y^n$, daher
3. $X^n-Y^n=A(x-y)+B(x^2-y^2)+C(x^3-y^3)+\text{etc.}$ an, so ist wieder, weil $X-Y=x-y$,

4. $$\frac{X^n-Y^n}{X-Y}=\frac{A(x-y)+B(x^2-y^2)+C(x^3-y^3)+\text{etc.}}{x-y}$$

Setzt man nun aber nach §. 10.

5. $$X^n=1+\mathfrak{x}n+\frac{\mathfrak{x}^2n^2}{1.2}+\frac{\mathfrak{x}^3n^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

6. $$Y^n=1+\mathfrak{y}n+\frac{\mathfrak{y}^2n^2}{1.2}+\frac{\mathfrak{y}^3n^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$ also

7. $$X^n-Y^n=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})n+\frac{(\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)}{1.2}n^2+\frac{(\mathfrak{x}^3-\mathfrak{y}^3)}{1.2.3}n^3+\text{etc.}$$

8. $$X-Y=(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})+\frac{(\mathfrak{x}^2-\mathfrak{y}^2)}{1.2}+\frac{(\mathfrak{x}^3-\mathfrak{y}^3)}{1.2.3}+\text{etc.},$$ weil hier $n=1$ ist; so ist

9. $$\frac{X^n-Y^n}{X-Y}=\frac{n+\frac{(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})}{1.2}n^2+\frac{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{y}^2)}{1.2.3}n^3+\text{etc.}}{1+\frac{(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})}{1.2}+\frac{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{y}^2)}{1.2.3}+\text{etc.}},$$

wenn man nämlich den Bruch durch $(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})$ hebt.

Dividirt man ferner wirklich noch in 4. durch $(x-y)$ und setzt dann $y=x$, folglich auch $X=Y$ und $\mathfrak{y}=\mathfrak{x}$, so folgt aus 4. und 9.:

10. $$\frac{n + \frac{2\mathfrak{r}n^2}{1.2} + \frac{3\mathfrak{r}^2n^3}{1.2.3} + \text{etc.}}{1 + \frac{2\mathfrak{r}}{1.2} + \frac{3\mathfrak{r}^2}{1.2.3} + \text{etc.}} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \text{etc.},$$ oder:

11. $$\frac{n\left\{1 + \mathfrak{r}n + \frac{\mathfrak{r}^2n^2}{1.2} + \text{etc.}\right\}}{1 + \mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{r}^2}{1.2} + \text{etc.}} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \text{etc.}$$

Daher in Rücksicht auf 5.:

12. $\frac{nX^n}{X} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \text{etc.}$, oder in Rücksicht auf 1.:

13. $$\frac{n(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.})}{1 + x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \text{etc},$$

woraus das Uebrige wie in §. 3. folgt, so das ganz allgemein

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \text{etc. ist.}$$

Ich glaube jetzt die Mängel, welche den nach Lhuilier's Entwickelungsverfahren gefundenen Resultaten noch anklebten, gehoben zu haben und werde den Rest dieser wenigen Blätter auf Entwickelungen einiger von Lhuilier — meines Wissens — nicht behandelten goniometrischen Funktionen verwenden.

§. 17. Zuvörderst sey $\sin x$ in eine Reihe nach Potenzen des Bogens x (den Radius $= 1$ gesetzt) zu verwandeln.

Daß hierin kein von x unabhängiges Glied vorkommen könne, folgt aus dem Verschwinden der Funktion für x gleich 0; ebenso gewinnt man bei der Voraussetzung einer vollständigen Potenzenskale und einem dem nachfolgenden ganz ähnlichen Rechnungsverfahren bald die Ueberzeugung, daß die geraden Potenzen dieser Skale sämmtlich fortfallen müssen, weil ihre Coefficienten 0 sind.

Daher ist es vortheilhaft hinsichts der Form sogleich anzunehmen, daß

1. $\sin x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$, also
2. $\sin y = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \text{etc.}$, woraus
3. $\sin x - \sin y = A(x-y) + B(x^3-y^3) + C(x^5-y^5) + \text{etc.}$ folgt.

Wegen der nöthigen Division durch $(x - y)$ setze man nun der Goniometrie gemäß

$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$, oder in Rücksicht auf 1.

$$= 2\,\mathrm{Cos}\left(\frac{x+y}{2}\right)\left\{A\left(\frac{x-y}{2}\right) + B\left(\frac{x-y}{2}\right)^3 + C\left(\frac{x-y}{2}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

Dies mit 3. verglichen giebt

4. $2\,\mathrm{Cos}\left(\frac{x+y}{2}\right)\left\{A\left(\frac{x-y}{2}\right) + B\left(\frac{x-y}{2}\right)^3 + \text{etc.}\right\} = A(x-y) + B(x^3-y^3) + \text{etc.}$

und durch $(x-y)$ dividirt, alsdann aber $y = x$ gesetzt:

5. $A\,\mathrm{Cos}\,x = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + \text{etc.}$ Eben so ist auch

6. $A\,\mathrm{Cos}\,y = A + 3By^2 + 5Cy^4 + \text{etc.}$ Daher

7. $A\,(\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Cos}\,y) = 3B(x^2-y^2) + 5C(x^4-y^4) + \text{etc.}$

Auch hier ist eine Division durch $(x-y)$ wieder nöthig und deshalb, wie die Goniometrie lehrt,

$\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Cos}\,y = -2\,\mathrm{Sin}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{Sin}\left(\frac{x-y}{2}\right)$, oder in Rücksicht auf 1.

$$= -2\,\mathrm{Sin}\left(\frac{x+y}{2}\right)\left\{A\left(\frac{x-y}{2}\right) + B\left(\frac{x-y}{2}\right)^3 + C\left(\frac{x-y}{2}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

zu setzen. Die Substitution hiervon in 7., die eben erwähnte Division und die Reduktion, nach geschehener Verwandlung des y in x, geben

8. $-A^2\,\mathrm{Sin}\,x = 2.3\,Bx + 4.5\,Cx^3 + \text{etc.}$; also ist

9. $-A^2(Ax + Bx^3 + Cx^5 + \text{etc.}) = 2.3\,Bx + 4.5\,Cx^3 + 6.7\,Dx^5 + \text{etc.}$

Folglich hat man

$2.3B = -A^3,$	oder	$B = \frac{-A^3}{1.2.3}$	
$4.5C = -A^2B$	„	$C = \frac{+A^5}{1.2.3.4.5}$	
$6.7D = -A^2C$	„	$D = \frac{-A^7}{1.2\ldots7}$	
$8.9E = -A^2D$	„	$E = \frac{+A^9}{1.2\ldots9}$	
etc.	etc.	etc.	etc., also

10. $\mathrm{Sin}\,x = Ax - \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^5x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{A^7x^7}{1.2\ldots7} + \text{etc.}$

Um die Constante A zu bestimmen, berücksichtige man, daß $\frac{\mathrm{Sin}\,x}{x} = A + Bx^2 + Cx + \text{etc.}$, und daß das Verhältniß zwischen $\mathrm{Sin}\,x$ und x sich immer mehr der Gleichheit nähert, je kleiner m..n x setzt, ja für $x = 0$ vollständig darin übergeht. Diese Betrachtung giebt daher $A = 1$, und man hat demnach

11. $\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \text{etc.}$

Ganz leicht findet sich aus 5. nun auch

12. $\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \text{etc.}$

§. 18. Die beiden Reihen in 11 und 12. haben zunächst nur Gültigkeit als Kreisfunktionen und ihre Entwickelung stützt sich zum Theil auf ihre geometrische Natur. Ihr Zusammenhang mit e^x (s. §. 13. 5.), da $e^{\pm x\sqrt{-1}} = \operatorname{Cos} x \mp \sqrt{-1} \operatorname{Sin} x$, zeigt aber deutlich, daß man ihre Bedeutung noch weiter ausdehnen dürfe, und die Analysis bestätigt dieses hundertfältig. Läßt man also hier, ähnlich wie bei a^x, die Form der Reihe als den wesentlichen Charakter auftreten, so macht es keine Schwierigkeit, alle goniometrischen Eigenschaften dieser Funktionen ganz allgemein herzuleiten. Zum Beispiel führe ich nur an, daß $\operatorname{Sin.}(x+y) = \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y + \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} y$; wovon der Beweis sich wieder auf Uebereinstimmung des allgemeinen Gliedes gründet. Denn denkt man sich für $\operatorname{Sin} x$, $\operatorname{Cos} y$, $\operatorname{Cos} x$ und $\operatorname{Sin} y$ (nach §. 17. 11 und 12) die Reihen gebildet und setzt durch wirkliche Multiplikation das nte Glied von $\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y$ und ebenso von $\operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} y$ zusammen, welches letzte durch eine bloße Vertauschung des x mit dem y und umgekehrt geschieht, so hat man als

ntes Glied von $\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y$:

$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} \quad \text{oder: } (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}$$

$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{y^2\cdot x^{2n-3}}{1.2\,.\,1.2\ldots(2n-3)} \quad ,, \quad (-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\cdot y^2}{1.2\,.\,1.2\ldots(2n-1)}$$

$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{y^4\cdot x^{2n-5}}{1.2.3.4\,.\,1.2\ldots(2n-5)} \quad ,, \quad (-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-1)\ldots(2n-4)x^{2n-5}\cdot y^4}{1.2.3.4\,.\,1.2\ldots(2n-1)}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{y^{2n-2}\cdot x}{1.2\ldots(2n-2)} \quad ,, \quad (-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-1)x y^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-1)}$$

und ntes Glied von $\cos x \sin y$:

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{y^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}$$

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n-2)\, y^{2n-2} \cdot x^2}{1.2.1.2\ldots(2n-1)}$$

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-1)\ldots(2n-4) y^{2n-5} \cdot x^4}{1.2.3.4.1.2\ldots(2n-1)}$$

$$\vdots$$

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-1) y \cdot x^{2n-2}}{1.2\ldots\ldots(2n-1)}$$

Hiervon bildet die eine Columne die ungeraden, die andere die geraden Glieder der binomischen Reihe für den Exponenten $(2n-1)$, sämmtlich mit dem Faktor $\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}$ behaftet, und beide Columnen zusammen geben daher vollständig $\frac{(-1)^{n-1} \cdot (x+y)^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}$. Dasselbe giebt 11. in §. 17. aber auch als ntes Glied der Entwickelung von $\sin(x+y)$; folglich ist die obige Behauptung für jeden Werth von x und y wahr.

Einfacher wird der Beweis in diesem, wie in jedem andern Falle, wo dergleichen goniometrische Beziehungen in ihrer absoluten Allgemeinheit nachgewiesen werden sollen, wenn man die schon erwähnten Gleichungen $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$ und $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x$ benutzt und hiernach $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ setzt.

§. 19. Sollte $\sin x$ etwa nach Potenzen der Veränderung von x, welche ω heißen möge, entwickelt werden, so setze man wieder

1. $\sin(x+\omega) = A + B\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + \text{etc.}$
2. $\sin(x+\omega') = A + B\omega' + C\omega'^2 + D\omega'^3 + \text{etc.}$, folglich

3. $2\sin\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = B(\omega-\omega') + C(\omega^2-\omega'^2) + D(\omega^3-\omega'^2) + \text{etc.}$

Setzt man nun nach §. 17. 11 für Sin $\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right)$ die entsprechende Reihe, dividirt dann durch $(\omega - \omega')$ beide Seiten und restituirt für ω' ω, so bleibt:

4. $\text{Cos}\,(x + \omega) = B + 2C\omega + 3D\omega^2 + \text{etc.}$; daher auch

5. $\text{Cos}\,(x + \omega') = B + 2C\omega' + 3D\omega'^2 + \text{etc.}$ und abgezogen

6. $-2\,\text{Sin}\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right)\text{Sin}\left(x + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 2C(\omega - \omega') + 3D(\omega^2 - \omega'^2) + \text{etc.}$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf §. 17. 11 ähnlich wie vorhin:

7. $-\text{Sin}\,(x + \omega) = 2C + 2.3\,D\omega + 3.4\,E\omega^2 + \text{etc.}$, also in Vergleich mit 1.

8. $-(A + B\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + \text{etc}) = 2C + 2.3D\omega + 3.4E\omega^2 + 4.5F\omega^3 + \text{etc.}$

Daher $1.2\,C = -A$	oder	$C = -\frac{A}{1.2}$	
$2.3\,D = -B$	„	$D = -\frac{B}{1.2.3}$	
$3.4\,E = -C$	„	$E = +\frac{A}{1.2.3.4}$	
$4.5\,F = -D$	„	$F = +\frac{B}{1.2.3.4.5}$	
etc.	etc.	etc.	etc.

Aus. 1 folgt aber (für $\omega = 0$) $A = \text{Sin}\,x$ und aus 4. unter derselben Bedingung $B = \text{Cos}\,x$; folglich ist

9. $\text{Sin}\,(x + \omega) = \text{Sin}\,x + \text{Cos}\,x.\omega - \frac{\text{Sin}\,x}{1.2}\omega^2 - \frac{\text{Cos}\,x}{1.2.3}.\omega^3 + \text{etc.}$ und aus 4. hergeleitet:

10. $\text{Cos}\,(x + \omega) = \text{Cos}\,x - \text{Sin}\,x.\omega - \frac{\text{Cos}\,x}{1.2}\omega^2 + \frac{\text{Sin}\,x}{1.2.3}\omega^3 + \text{etc.}$, gerade so, wie man diese Entwickelungen auch nach anderen Methoden findet. — Wem es indeß nur auf das Resultat der Entwickelung ankommt, der verfährt kürzer, wenn er $\text{Sin}\,(x + \omega) = \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,\omega + \text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,\omega$, $\text{Cos}\,(x + \omega) = \text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,\omega - \text{Sin}\,x\,\text{Sin}\,\omega$ setzt und für Sin ω und Cos ω die Reihen aus 11. und 12. in §. 17. nimmt und alles nach Potenzen von ω ordnet.

§. 20. Will man die umgekehrte Aufgabe lösen, nämlich den Bogen x durch die Potenzen des Sin x ausdrücken, so erspart man sich einige unnütze Rechnung, wenn man nur die ungeraden Potenzen und nicht die vollständige Skale nimmt, da der Erfolg lehrt, daß die geraden Potenzen fortfallen. Man setze daher:

$$1.\quad x = A \operatorname{Sin} x + B \operatorname{Sin} x^3 + C \operatorname{Sin} x^5 + D \operatorname{Sin} x^7 + \text{etc.}$$
$$2.\quad y = A \operatorname{Sin} y + B \operatorname{Sin} y^3 + C \operatorname{Sin} y^5 + D \operatorname{Sin} y^7 + \text{etc.},\ \text{also}$$
$$3.\quad x - y = A(\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} y) + B(\operatorname{Sin} x^3 - \operatorname{Sin} y^3) + C(\operatorname{Sin} x^5 - \operatorname{Sin} y^5) + \text{etc.}$$

Damit nun rechts die bekannte Division ausgeführt werden kann, brauche man die Form: $\left(\frac{\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} y}{x - y}\right) \cdot \frac{R}{\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} y}$, wo R die rechte Seite in 3. bedeuten soll. Man hat alsdann nach wirklicher Division und Verwandlung des y in x, wobei nach §. 17. 5. Der Ausdruck $\frac{\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} y}{x - y}$ in Cos x übergeht,

$$4.\quad 1 = \operatorname{Cos} x \,\{A + 3B \operatorname{Sin} x^2 + 5C \operatorname{Sin} x^4 + 7D \operatorname{Sin} x^6 + \text{etc.}\}$$

Hieraus folgt durch eine leicht zu erkennende Operation:

$$5.\quad (1 - \operatorname{Sin} x^2)^{-\frac{1}{2}} = A + 3B \operatorname{Sin} x^2 + 5C \operatorname{Sin} x^4 + 7D \operatorname{Sin} x^6 + \text{etc.}$$

Entwickelt man jetzt noch die linke Seite nach der binomischen Regel in die Reihe: $1 + \frac{1}{2} . \operatorname{Sin} x^2 + \frac{1.3}{2.4} \operatorname{Sin} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \operatorname{Sin} x^6 + \text{etc.}$, so giebt der Vergleich der Coefficienten auf beiden Seiten ganz einfach: $A = 1$; $B = \frac{1}{3} . \frac{1}{2}$; $C = \frac{1}{5} . \frac{1.3}{2.4}$; $D = \frac{1}{7} . \frac{1.3.5}{2.4.6}$; etc.

Es ist also

$$6.\quad x = \operatorname{Sin} x + \frac{1}{2} . \frac{\operatorname{Sin} x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} . \frac{\operatorname{Sin} x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\operatorname{Sin} x^7}{7} + \text{etc.}$$

Um den Bogen von seinem Cosinus abhängig zu machen, setzt man hier bekanntlich $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x, wodurch Sin $(\frac{1}{2}\pi - x)$ in Cos x übergeht, und erhält so

$$7.\quad \tfrac{1}{2}\pi - x = \operatorname{Cos} x + \tfrac{1}{2} . \frac{\operatorname{Cos} x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} . \frac{\operatorname{Cos} x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} . \frac{\operatorname{Cos} x^7}{7}\ \text{etc.}$$

Beide Reihen können zur Berechnung des π auf mehrere Dezimalstellen gebraucht werden, wenn man in 6. $x = \frac{\pi}{2}$ und in 7. $x = 0$ setzt; aber die Convergenz, welche ihnen eigen ist, wird — soweit sie von den Coefficienten abhängt — nach und nach immer geringer und macht daher für die angegebenen Werthe von x die Rechnung um so ausgedehnter, je mehr Dezimalen von π man finden will. Für andere Werthe von x und namentlich solche, wodurch Sin x und Cos x kleine Brüche werden, verbessert sich die Convergenz der Reihen allerdings bedeutend.

§. 21. So einfach bisher die Gesetze waren, wornach die Coefficienten in und außer der Ordnung bestimmt werden konnten; so verwickelt und schwierig werden wir sie dagegen bei einigen der folgenden Beispiele finden. Zunächst gilt dieses von der sogleich folgenden Entwickelung der Tangente nach Potenzen ihres Bogens.

Setzt man nämlich, da auch hier die geraden Potenzen wegfallen und die Funktion für $x = 0$ verschwindet,

1. $\mathrm{Tng}\,x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$ und

2. $\mathrm{Tng}\,y = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \text{etc.}$; dann aber

$$\mathrm{Tng}\,x - \mathrm{Tng}\,y = \frac{\mathrm{Sin}\,(x-y)}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y} = \left\{(x-y) - \frac{(x-y)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right\} : \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y,$$

so giebt unser Algorithmus:

3. $\dfrac{1}{\mathrm{Cos}\,x^2} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \text{etc.}$, oder weil

$\dfrac{1}{\mathrm{Cos}\,x^2} = \mathrm{Sec}\,x^2 = 1 + \mathrm{Tng}\,x^2$ ist, und bei dieser Substitution $A = 1$ wird, wenn man $x = 0$ nimmt,

4. $\mathrm{Tng}\,x^2 = 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \text{etc.}$ Man hat daher in Rücksicht auf 1. zur Bestimmung der Coefficienten die Gleichung:

5. $(Ax + Bx^3 + Cx^5 + \text{etc.})^2 = 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \text{etc.}$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$3B = A^2$ . . . . . . d. i. $B = \dfrac{1}{3}$

$5C = 2AB$ . . . . . . „ „ $C = \dfrac{2}{15}$

$7D = 2AC + B^2$ . . . . „ „ $D = \dfrac{17}{315}$

$9E = 2AD + 2BC$ . . . . „ „ $E = \dfrac{71}{2835}$

$11F = 2AE + 2BD + C^2$ . . „ „ $F = \dfrac{4532}{155925}$

$13G = 2AF + 2BE + 2CD$. „ „ $G = \dfrac{41743}{6071075}$

u. s. w.

Demnach wäre:

$$\mathrm{Tng}\,x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{71}{2835}x^9 + \text{etc. oder auch}$$

$$\mathrm{Tng}\, x = 1 \cdot \frac{x}{1} + 1 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{17}{45} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{71}{315} \cdot \frac{x^9}{9} + \text{etc.}$$

Aus den vorstehenden Coefficientengleichungen ist zwar leicht zu entnehmen, daß die Tangentenreihe auch zu derjenigen Art von recurrirenden Reihen gehört, bei welchen die Bestimmung jedes Gliedes von allen vorhergehenden abhängt; aber ein allgemeines Gesetz, wornach sich die Coefficienten auch außer der Ordnung bestimmen ließen, wegen Einmischung den sogenannten Bernoullischen Zahlen nicht ohne bedeutende Weitläuftigkeit und Schwierigkeit angebbar. Daß $\mathrm{Sec}\, x^2$ (also auch $\mathrm{Sec}\, x$) und $\mathrm{Tng}\, x^2$ mit ähnlichen Schwierigkeiten behaftet sind, zeigen die Reihen 3. und 4. Dasselbe gilt von $\mathrm{Cotg}\, x$, in sofern dies $= \mathrm{Tng}\, (\frac{1}{2}\pi - x)$ ist. Dagegen bietet die Umkehrung eine merkwürdige Einfachheit dar, wie der folgende §. zeigt.

§. 22. Man setze der Kürze wegen $\mathrm{Tng}\, x = t$ und $\mathrm{Tng}\, x' = t'$ und, um unnöthige Glieder zu vermeiden

1. $x = At + Bt^3 + Ct^5 + Dt^7 + \text{etc.}$, denn die Annahme einer vollständigen Potenzenskale wird bald durch die Rechnung zurückgewiesen und auf die ungeraden Potenzen allein beschränkt.

Es ist also

2. $x' = At' + Bt'^3 + Ct'^5 + Dt'^7 + \text{etc.}$ und

3. $x - x' = A(t - t') + B(t^3 - t'^3) + C(t^5 - t'^5) + D(t^7 - t'^7) + \text{etc.}$

Dividirt man nun, wie immer, beide Seiten durch $x - x'$, nachdem man rechts den gemeinschaftlichen Faktor $(t - t')$ herausgezogen hat, und verwandelt dann wieder x' in x und t' in t, in welchem Falle nach §. 21. 3. $\frac{t - t'}{x - x'} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\, x^2} = \mathrm{Sec}\, x^2 = 1 + \mathrm{Tng}\, x^2 = 1 + t^2$ zu setzen ist, so hat man

4. $1 = (1 + t^2)\,\{A + 3Bt^2 + 5Ct^4 + 7Dt^6 + \text{etc.}\}$, oder, indem man beide Seiten durch $1 + t^2$ dividirt:

5. $1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \text{etc.} = A + 3Bt^2 + 5Ct^4 + 7Dt^6 + 9Et^8 + \text{etc.}$

Folglich ist $A = 1$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{5}$, $D = -\frac{1}{7}$, $E = \frac{1}{9}$ etc und hiernach

6. $x = \mathrm{Tng}\, x - \frac{1}{3}\mathrm{Tng}\, x^3 + \frac{1}{5}\mathrm{Tng}\, x^5 - \frac{1}{7}\mathrm{Tng}\, x^7 + \frac{1}{9}\mathrm{Tng}\, x^9 - \text{etc.}$

Auch diese Reihe ist bequem zur Berechnung der Zahl π, da für $x = \frac{1}{4}\pi$ $\mathrm{Tng}\, x = 1$ und somit

7. $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$

$= \frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \frac{2}{13.15} + \text{etc.}$ wird. Daher

8. $\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \text{etc.}$

Eine stärkere Convergenz erhält die Reihe, wenn man den Bogen von 30° nimmt, also $x = \frac{1}{6}\pi$ und $\text{Tng}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ setzt. Dadurch erhält man:

9. $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^8} - \text{etc.}\}$, also

10. $\pi = 2\sqrt{3}\,\{1 - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} - \frac{1}{7.3^6} + \frac{1}{9.3^8} + \text{etc.}\}$,

eine Reihe, die wegen ihrer schnelleren Convergenz zur Berechnung des π mehr zu empfehlen und zu diesem Zweck von den Mathematikern auch schon öfter gebraucht ist.

§. 23. Zum Beschlusse setze ich noch die Entwickelung der Funktion $\text{Sin}\, x^n$ her, deren Form nach einem flüchtigen Versuch folgendermaaßen angenommen werden muß:

1. $\text{Sin}\, x^n = Ax^n + Bx^{n+2} + Cx^{n+4} + Dx^{n+6} + \text{etc.}$

Hieraus kann wie früher gefolgert werden, daß:

2. $\frac{\text{Sin}\, x - \text{Sin}\, y}{x - y} \left\{\frac{\text{Sin}\, x^n - \text{Sin}\, y^n}{\text{Sin}\, x - \text{Sin}\, y}\right\} = \frac{A(x^n - y^n)}{x - y} + \frac{B(x^{n+2} - y^{n+2})}{x - y} + \text{etc.}$

oder

3. $\text{Cos}\, x . n\, \text{Sin}\, x^{n-1} = nAx^{n-1} + (n+2)\, Bx^{n+1} + (n+4)\, Cx^{n+3} + \text{etc}$ ist.

Multiplizirt man nun beide Seiten mit $\text{Sin}\, x$ und setzt für $\text{Sin}\, x^n$ seinen Werth aus 1.; für $\text{Sin}\, x$ und $\text{Cos}\, x$ aber ihre Werthe durch x, so giebt dies:

4. $n\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right)(Ax^n + Bx^{n+2} + Cx^{n+4} + \text{etc.})$

$$= \left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)(nAx^{n-1} + (n+2)\, Bx^{n+1} + \text{etc.})$$

Hieraus lassen sich nach vollführter Multiplikation folgende Coefficienten-Gleichungen herleiten:

$$A - A = 0$$

$$1B + \frac{nA}{1.2.3} = 0$$

$$2C + \frac{(n-1)B}{1.2.3} - \frac{2nA}{1.2.3.4.5} = 0$$

$$3D + \frac{(n-2)C}{1.2.3} - \frac{(2n-1)B}{1.2.3.4.5} + \frac{3nA}{1.2.3.4.5.6.7} = 0$$

$$4E + \frac{(n-3)D}{1.2.3} - \frac{(2n-2)C}{1.2.3.4.5} + \frac{(3n-1)B}{1.2.3.4.5.6.7} - \frac{4nA}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} = 0$$

u. s. w.

Das Gesetz dieser Gleichungen fällt in die Augen, nicht so bei den daraus entwickelten Coefficienten, welche wegen der sich jedesmal auf alle vorangehenden Glieder zurückerstreckenden Recurrenz und wegen der Einmischung der Bernoullischen Zahlen sehr verwickelt sind. — Noch ist indeß zu bemerken, daß zuvor das oben unbestimmt gebliebene A gefunden werden muß, wenn die Coefficienten bloß von n abhängig gemacht werden sollen. Dies geschieht ähnlich wie früher in §. 17., indem man die Gleichung $\frac{\text{Sin } x^n}{x^n} = A + Bx^2 + Cx^4 + \text{etc.}$ für ein abnehmendes und zuletzt verschwindendes x betrachtet und $A = \left\{\frac{\text{Sin }(x=0)}{(x=0)}\right\}^n = 1^n = 1$ setzt; oder indem man $Ax^n + Bx^{n+2} + \text{etc.} = (x - \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.})^n =$ $x^n - nx^{n-1}.\left(\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1\ldots5} + \text{etc.}\right) + \text{etc.}$ und demgemäß $A = 1$ setzt. — Die fünf ersten Coefficienten sind hiernach folgende:

$$A = 1$$

$$B = -\frac{n}{1.(1.2.3)^2}$$

$$C = +\frac{n(n-1)}{1.2(1.2.3)^2} + \frac{n}{1.2\ldots.5}$$

$$D = -\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3(1.2.3)^2} - \frac{n(n-1)}{1.2.3.1\ldots5} - \frac{n}{1.2\ldots.7}$$

$$E = +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4(1.2.3)^4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2(1.2.3)^2.1.2..5} + \frac{n(n-1)}{1.2.3.1.2..7}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2(1.2\ldots5)^2} + \frac{n}{1.2\ldots9}$$

Die Bemerkung, daß der Entwickelung von Sin x^n die Potenzenskale x^n, x^{n+2}, x^{n+4}, x^{n+6} u. s. w. zum Grunde liegt, führt zu dem Schlusse, daß bei der Annahme einer vollständigen Skale die Coefficienten von x^0, x^1, x^2, u. s. w. bis x^{n-1}, so wie von x^{n+1}, x^{n+3}, x^{n+5}, ohne Ende fort, sammt und sonders 0 seyn müssen. Man findet diese Coefficienten und durch sie eine Menge merkwürdiger und ganz allgemeiner Zahlenbeziehungen wirklich, wenn man die Entwickelung auf einem andern Wege sucht, und, wie bekannt,

$$\operatorname{Sin} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{i}{2}\left\{e^{ix} - e^{-ix}\right\} \text{ also}$$

$\operatorname{Sin} x^n = \left(-\frac{i}{2}\right)^n \left\{e^{ix} - e^{-ix}\right\}^n$ setzt und diesen Ausdruck nach Potenzen von x, also zuerst in Beziehung auf n, dann die einzelnen Glieder in Beziehung auf ihre Exponenten, entwickelt. — Um die Rechnung etwas abzukürzen, werde ich die Coefficienten der $n$ten Potenz durch N_1, N_2, N_3 u. s. w. bezeichnen, wofür hinterher wieder die Werthe: n, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ u. s. w. gebraucht werden sollen. Es ist demnach:

$$\operatorname{Sin} x^n = \left(-\frac{i}{2}\right)^n \cdot \left\{e^{nix} - N_1 e^{(n-2)ix} + N_2 e^{(n-4)ix} - N_3 e^{(n-6)ix} + \text{etc.}\right\}$$

$$= \left(-\frac{i}{2}\right)^n \cdot \left\{\begin{array}{l} +\left[1 + nix + \frac{n^2i^2x^2}{1.2} + \frac{n^3i^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right] \\ -N_1\left[1+(n-2)ix + \frac{(n-2)^2i^2x^2}{1.2} + \frac{(n-2)^3i^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right] \\ +N_2\left[1+(n-4)ix + \frac{(n-4)^2i^2x^2}{1.2} + \frac{(n-4)^3i^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right] \\ -N_3\left[1+(n-6)ix + \frac{(n-6)^2i^2x^2}{1.2} + \frac{(n-6)^3i^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right] \\ + \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= \left(-\frac{i}{2}\right)^n \cdot \left\{\begin{array}{l} +\left[1 - N_1 + N_2 - N_3 + \text{etc.}\right] \\ +\left[n-(n-2)N_1 + (n-4)N_2 - (n-6)N_3 + \text{etc.}\right] ix \\ +\left[n^2-(n-2)^2N_1 + (n-4)^2N_2 - (n-6)^2N_3 + \text{etc.}\right]\frac{i^2x^2}{1.2} \\ +\left[n^3-(n-2)^3N_1 + (n-4)^3N_2 - (n-6)^3N_3 + \text{etc}\right]\frac{i^3x^3}{1.2.3} \\ + \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Die gesuchten Relationen sind also, wenn man die gemeinschaftlichen Faktoren wegläßt und für die N's ihre Werthe setzt, folgende:

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \text{etc.} = 0,$$

$$n - n(n-2) + \frac{n(n-1)}{1.2}.(n-4) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.(n-6)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(n-8) - \text{etc.} = 0,$$

$$n^2 - n(n-2)^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(n-8)^2 - \text{etc.} = 0,$$

$$n^3 - n(n-2)^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^3 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(n-8)^3 - \text{etc.} = 0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$n^{n-1} - n(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^{n-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(n-8)^{n-1} - \text{etc.} = 0.$$

Ferner ist auch:

$$n^{n+1} - n(n-2)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n+1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^{n+1}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(n-8)^{n+1} \text{ etc.} = 0,$$

$$n^{n+3} - n(n-2)^{n+3} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n+3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^{n+3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(n-8)^{n+3} \text{ etc.} = 0,$$

$$n^{n+5} - n(n-2)^{n+5} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n+5} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-6)^{n+5}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(n-8)^{n+5} - \text{etc.} = 0$$

u. s. w.

§. 24. Aus allen bisherigen Endresultaten der nach unserer Methode angewandten Operationen geht unleugbar eine durchgehende und genaue Uebereinstimmung mit den Resultaten der Differentiation hervor und es wäre zur Verallgemeinerung und Abkürzung der Rechnung daher rathsam, ähnliche Operationszeichen wie in der Differentialrechnung zu gebrauchen und dieselben Elementarformeln wie hier aufzustellen. So z. B. könnte ein der Funktion fx vorgesetztes $\left(\frac{d}{x}\right)$ das Ergebniß des Ausdrucks $\frac{fx - fx'}{x - x'}$ bezeichnen, wenn nach vollführter Division darin x' in x verwandelt wird. Das d würde also die beiden Operationen der Subtraktion und Division und das x die Theile des Nenners andeuten. Eine Wiederholung derselben Operation ließe sich durch $\left(\frac{d}{x}\right)^2$, die folgende durch $\left(\frac{d}{x}\right)^3$ u. s. w. bezeichnen. Bei Funktionen von zwei Veränderlichen, wie etwa $f(x,y)$, wäre, um die wegen x und dann wegen y zu vollziehenden Operationen anzugeben, das Zeichen $\left(\frac{d^2}{y,x}\right)$, oder bei umgekehrter Ordnung der Operationen, $\left(\frac{d^2}{y,x}\right)$ zweckmäßig zu gebrauchen.

Nach diesem Vorschlage hätte man also für eine Veränderliche, x, die Fundamentalformeln:

1. $\left(\frac{d}{x}\right) ax^n = nax^{n-1}$ (für jeden nur denkbaren Werth von a und n)

2. $\left(\frac{d}{x}\right) \log x = \frac{\text{Modul}}{x}$; also $\left(\frac{d}{x}\right) lx = \frac{1}{x}$

3. $\left(\frac{d}{x}\right) a^x = (\log a)a^x$; folglich $\left(\frac{d}{x}\right) e^x = e^x$

4. $\left(\frac{d}{x}\right) \text{Sin } x = \text{Cos } x = \sqrt{1 - \text{Sin } x^2}$

5. $\left(\frac{d}{x}\right) \text{Cos } x = - \text{Sin } x = - \sqrt{1 - \text{Cos } x^2}$

6. $\left(\frac{d}{x}\right) \text{Tng } x = \text{Sec } x^2 = 1 + \text{Tng } x^2$

7. $\left(\frac{d}{x}\right) \text{Cotg } x = - \text{Cosc } x^2 = - (1 + \text{Cotg } x^2)$

8. $\left(\frac{d}{x}\right) \text{Sec } x = \text{Sin } x \text{ Sec } x^2 = \text{Sec } x \sqrt{\text{Sec } x^2 - 1}$

9. $\left(\frac{d}{x}\right) \text{Cosc } x = - \text{Cos } x \text{ Cosc } x^2 = - \text{Cosc } x \sqrt{\text{Cosc } x^2 - 1}$

10. $(\frac{d}{\text{Sin } x})\, x = \text{Sec } x = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{Sin } x^2}}$

11. $(\frac{d}{\text{Cos } x})\, x = -\text{Cosc } x = \frac{-1}{\sqrt{1 - \text{Cos } x^2}}$

12. $(\frac{d}{\text{Tng } x})\, x = \text{Cos } x^2 = \frac{1}{1 + \text{Tng } x^2}$

u. a. m.

Um noch ein zusammengesetztes Beispiel zu haben, worin gleichzeitig drei dieser Formeln Anwendung finden, wollen wir die Entwickelung von l Sin x machen und sogleich von der Reihenform ausgehen, worauf die Rechnung bei verfehlter Annahme zurückweist, nämlich:

$l\,\text{Sin } x = lx + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \text{etc.}$, so ist

$(\frac{d}{x})\, l\,\text{Sin } x = (\frac{d}{x})\, lx + (\frac{d}{x})\, Ax^2 + (\frac{d}{x})\, Ax^4 + \text{etc.}$ Man hat aber

$(\frac{d}{x})\, l\,\text{Sin } x = (\frac{\text{Sin } x - \text{Sin } x'}{x - x'})\, (\frac{l\,\text{Sin } x - l\,\text{Sin } x'}{\text{Sin } x - x'}) =$

$(\frac{d}{x})\, \text{Sin } x \,.\, (\frac{d}{\text{Sin } x})\, l\,\text{Sin } x = \text{Cos } x \,.\, \frac{1}{\text{Sin } x} = \text{Cotg } x.$ Daher ist

$\text{Cotg } x = \frac{1}{x} + 2Ax + 4Bx^3 + 6Cx^5 + 8Dx^7 + \text{etc.}$, woraus die Coefficienten A, B, C etc. zu finden sind, wenn man entweder für Cotg x, oder für Cos x und Sin x ihre Reihen setzt und mit dem letztern auf beiden Seiten multiplizirt.

Für zwei und mehrere Veränderliche in der Funktion ändert sich im Wesen der Sache nichts, da die Operationen nach einander vorzunehmen sind und z. B.

$(\frac{d^2}{x,\, y})\, f(x, y) = (\frac{d}{y})\, \left\{\frac{f(x, y) - f(x', y)}{x - x'}\right\}$ und, wenn hier

$\left\{\frac{f(x, y) - f(x', y)}{x - x'}\right\} = f'(x, y)$ wäre, weiter $= \frac{f'(x, y) - f'(x, y')}{y - y'}$ gesetzt werden kann. Man braucht also immer nur die Fundamentalformeln anzuwenden, denn die etwanige Abhängigkeit des y von x hindert nicht die Operationen ohne Rücksicht auf diesen Umstand auszuführen, da auch nach Beendigung derselben seine Bedingung nicht zu spät eintritt und sehr wohl in dem Ausdruck $f''(x, y)$ — wenn dieser das Ergebniß der letzten Operation seyn sollte — nachgeholt werden kann.

Gumbinnen, im August 1835. J. G. A. Sperling.

Jahresbericht.

I. Uebersicht der in dem Schuljahre $18\frac{34}{35}$ abgehandelten Lehrgegenstände.

Prima.

Ordinarius: Oberlehrer Petrenz.

1. Deutsch, im 1sten Semester 2, später 3 St. (die 3te St. dem geschichtl. Unterrichte entzogen): Rhetorik, vorzugsweise die Pronunziation, die Aktion und der Schmuck der Rede. — Gelesen sind Oden von Klopstock. — Monatl. eine schriftl. Stilübung. — Mündliche Vorträge, theils unvorbereitet, theils zu Hause durchdacht. O.L. Dr. Hamann.

2. Latein, 9 St. Davon 3 St. Cic. de orat. lib. I. II. init. Die Erklär. lat. — 2 St. im Winter Terent. Heautontim., im Sommer Horat. Od. lib. IV., Carm. secul. Epod. 2. 16. — 2 St. Stilübb.: theils freie Aufsätze, theils häusl. Exerzitien, theils Extemporalien. O.L. Petrenz. — 2 St. Liv. lib. 29, 1—12. lib. 30. kursorisch, und Tacit. Ann. lib. II, 69 — III, 31. Die Erklärung lat. Direktor.

3. Griechisch, 6 St. Davon 3 St. Herodot. lib. V. VI. von Ostern ab in's Lat. übers. u. lat. erklärt. — 1 St. Syntax und Exerzitien. O.L. Petrenz. — 2 St. Metrik mit schriftl. Uebungen und Sophocl. Philoct. u. kursor. Hom. Il. lib. 13. 14. O.L. Dr. Janson.

4. Hebräisch, in 2 außerordentl. St. nach der Gramm. und dem Leseb. v. Gesenius. Die Lehre vom Nomen bis zum Ende der Formenlehre wiederholt, die Syntax bei der Lesung berücksichtigt und die Regeln darüber nachgeschlagen. — Einige prosaische Stücke und die in d. Leseb. aufgenommenen Psalmen in's Lat. übersetzt und gramm. erläutert. — Einige Exerzitien und öftere Uebung im Vokalisiren u. Uebersetzen unpunktirter Stücke nach Schröders Uebungsb. Direktor.

5. Französisch, 2 St. Gramm. nach Hirzel: das Haupt-, Bei-, Für- und Zeitwort (mit Einschluß der unregelmäßigen Verben) im Zusammenhange erläutert und eingeübt. Der Gebrauch der Zeitformen und der Verneinungspartikeln, die Wortfolge rc. theils hierbei, theils bei der Lesung und den Exerzitien erklärt. — Gelesen: Voltaire, Charles XII liv. 4. und Molière, l'Avare bis zum 4ten Akt. — Exerzitien. Derselbe.

6. Religion, nach Niemeyers Lehrb. 2 St. Der positive Theil der Religionslehre und die Einleit. nebst den 2 ersten Abschn. der Sittenlehre. Derselbe.

7. Philosoph. Propädeutik, vom Januar bis 4. Juli in 2 St. wöchentl. Die Erfahrungsseelenlehre. O.L. Sperling.

8. Mathematik, vom Januar bis 4. Juli 3 St., sonst 5 St. nach Matthias: Sphärische Trigonometrie mit Aufgaben aus Meier Hirsch (2. Th.); dann die Apollonischen Kegelschnitte und einige andere Kurven. — Uebung im Auflösen von Aufgaben in der Klasse und alle 3 Wochen eine häusl. Ausarbeit. Derselbe.

9. Physik nach Kries, 2 St. Geostatik und Geodynamik, desgl. Einiges aus der Hydrostatik, Hydraulik, Aerostatik und Aerodynamik. Zuletzt die Lehre vom Weltgebäude. Ders.

10. Geschichte in Verbindung mit histor. Geogr., bis Ostern 4, später 3 St. Mittlere Gesch. bis zur Reformation, nach Wachsmuths Grundriß. Dr. O.L. Hamann.

11. Gesangunterricht. Obere Klasse, aus Schülern der 3 obern Klassen bestehend, 2 St. Fortsetzung der prakt. Uebungen. Vierstimmige fugenartige Sätze. Ders.

Sekunda.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Hamann.

1. Deutsch, bis Ostern 2, später 3 St.: prakt. Anleit. zur Anordnung der Gedanken in schriftl. und mündl. Darstellungen. — Freie Aufsätze und Uebungen im mündl. Vortrage ohne Vorbereitung. O.L. Dr. Hamann.

2. Latein, 10 St. Davon 1 St. Gramm. nach Zumpt: Wiederholung der Lehre von den casibus, das Allgem. aus d. Lehre v. d. temporibus, modis und den hypothetischen Sätzen, zuletzt synt. ornata. — 2 St. Exerzitien, theils nach Webers U. S., theils nach Diktaten; von Neujahr ab auch monatlich 1 freier Aufsatz (von den ältern Sekundanern) und Extemporalien. 3 St. Liv. lib. 25. 26. O.L. Skrzeczka. — 2 St. Cic. in Catil. I — IV. Die Hauptwiederholung latein. O.L. Petrenz. 2 St. Virg. Georg. lib. 1—3 incl. und Eclog. 7 — 9. O.L. Dr. Janson.

3. Griechisch, 6 St. Davon 2 St. Gramm. nach Buttmanns mittl. Gr.: Accentlehre, Wiederholung der Formenlehre, Rekt. der Casus und der Präpositionen, die Lehre von den Modis und den Negationen; wöchentl. 1 Exerzitium nach Rost's Anleit. 4 K's. — 2 St. Xenoph. Cyrop. lib. III — V, 3. und VIII, 7 bis zu Ende, in's Lat. übers. — 2 St. Hom. Il. 13 — 18. O.L. Dr. Janson.

4. Hebräisch, 2 St. Gramm. nach Gesenius: summar. Wiederholung der Formenlehre bis zum regelm. Verb. einschl.; die Verba mit Gutturalen und Suffixen

und die verba anomala und defectiva. — Ins Lat. übersetzt und gramm. erläut. sind prosaische Stücke aus dem Leseb. v. Gesenius. Direktor.

5. Französisch, 2 St. Einüb. der unregelm. Zeitwörter. — Gelesen: das 3. Buch von Voltaire's Charles XII. und das 1. Buch von Florians Guill. Tell mit Beiziehung der Gramm. — Wöchentl. ein Exerzitium. O.L. Dr. Hamann.

6. Religion nach Niemeyer, 2 St.: Einleitung in die Schriften d. A. u. N. T. Eine Auswahl von Stellen des N. T. im Grundtexte gelesen. O.L. Skrzeczka.

7. Mathematik nach Matthias, 4 St.: zuvörderst die Theorie der Logarithmen (Vega's Tafeln), dann die ebene Trigonometrie, die analyt. Geometrie und Konstrukt. algebraischer Gleichungen. Wöchentlich 1 St. zur Lösung von Aufgaben und alle 14 Tage eine häusl. Arbeit. O.L. Sperling.

8. Physik nach Kries, 2 St. physische Geogr. und Meteorologie, dann der 3te und 4te Abschn. des 1. Haupttheils der allgem. Naturlehre. Ders.

9. Geschichte, nach Wachsmuth's Grundriß rc. 2 St. Alte Gesch. bis auf Alexander d. Gr. O.L. Dr. Hamann.

10. Geographie, nach Cannabich 1 St.: Asien und Nord- und Südeuropa. Ders.

11. Gesangunterricht. S. bei Prima.

Ober - Tertia.

Ordinarius: Oberlehrer Sperling.

1. Deutsch, 3 St. Verskunst nach Gottholds Hephäst. bis § 112. — Lesung nach Hülstetts Samml. II. 1. und Deklamiren. Aufsätze und Uebungen in freier mündl. Mittheilung. O.L. Skrzeczka.

2. Latein, 8 St. Davon 2 St. Syntax nach Zumpt bis zur synt. ornata ausschl. — 2 St. Exerzitien nach Diktaten und Extemporalien. — 2 St. Caes. de. bell. civ. lib. II. III. O.L. Dr. Janson. 2 St. Ovid. Met. nach Seidels Ausz. lib. I—III. und die erste Hälfte von lib. XIV. Dr. Kossak.

3. Griechisch, 6 St. Davon 2 St. Gramm. nach Buttmann: das Pensum der Quarta wiederholt und bis § 114 fortgesetzt, und Exerzitien nach Rost's Anleit. 1. und 2. Ks. — 2 St. Xenoph. Anabas. lib. VI. VII. O.L. Dr. Janson. — 2 St. Hom. Od. lib. IX—XI. Dr. Kossak.

4. Französisch, 2 St., das Nomen und das regelmäßige Verbum nach der Hirzelschen Gramm. eingeübt, die am häufigsten vorkommenden unregelm. Zeitwörter bei der Lektüre erlernt. — Uebersetzt sind die Anekdoten aus dem Anhange zur Gramm. (mehre auch memorirt). O.L. Dr. Hamann.

5. Religion (kombinirt mit Unter-Tertia, indem etwa die Hälfte der Schüler beider Abtheilungen den gleichzeitigen kirchlichen Unterricht genießt) 2 St. Glaubens- und Sittenlehre nach Ziegenbein's Katechismus. — Bibelstellen und Liederverse memorirt. O.L. Skrzeczka.

6. Mathematik nach Matthias, 5 St. Arithmet. Abschn. 3. Abth. 1—4. Algebra Abschn. 7. Abth. 1—3. Geom. Abschn. 6. 7. Voran Wiederholung des Pensums der Quarta. O.L. Sperling.

7. Naturwissenschaften, 2 St. Botanik. Einleit. Terminologie und die einheimischen, wie auch die in technolog. und therapeutischer Hinsicht wichtigen ausländ. Gewächse. Ders.

8. Geschichte nach dem chronolog. Abriß rc. von Kohlrausch, 3 St.: neue Geschichte bis 1740 und alte bis auf Alexander d. Gr., mit Ausnahme der römischen. O.L. Petrenz.

9. Geographie, nach Cannabich, 1 St. Die Beschreib. von Europa wiederholt. Ders.

10. Gesangunterricht. S. bei Prima.

Unter - Tertia.

Ordinarius: Oberlehrer Skrzeczka.

1. Deutsch, 3 St. Verskunst nach Gottholds Hephäst. bis § 114 mit prakt. Uebb. — Lesung und Deklamiren nach Hülstett II. 1. — 18 Aufsätze und Uebb. in freier mündl. Mittheilung. Dr. Kossak.

2. Latein, 8 St. Davon 2 St. Syntax nach der Schulgramm. v. O. Schulz, 2 St. Exerzitien, mit Beziehung auf den erklärten Theil der Syntax und auf das aus Cäsar Gelesene; desgl. leichte Extemporalien. — Caes. de bell. Gall. lib. I. II. O.L. Skrzeczka. 2 St. Ovid. Met. nach Seidels Ausz. lib. IV. V. Voran Wiederholung der Quantitätslehre und das eleg. Versmaß. O.L. Dr. Janson.

3. Griechisch, 6 St. Davon 2 St. Gramm. nach Buttm. Schulgr. (das Pensum der Quarta wiederholt, vervollständigt und bis § 116 fortgeführt; bei der Lektüre anomal. Verba gelernt) und Exerzitien nach Rost's Anleit. 1 Ks. — 2 St. Jakobs Elem. Buch, 2 Ks. Abschn. A. II. C. a. b. Dr. Kossak. — 2 St. Homerische Formen- und Verslehre und Od. lib. I. II. O.L. Skrzeczka.

4. Französisch, 2 St. Gramm. nach Hirzel: Lesen, Dekliniren und die 1., 2. und 4. Konjugation. — Memoriren von Vokabeln, hauptsächlich von Verben der 3 vorgedachten Konjugationen. — Erste Uebersetzungsübungen nach dem Anhange zur Gramm. O.L. Dr. Hamann.

5. Religion. S. bei Ober-Tertia.

6. Mathematik nach Matthias, 5 St. Arithmet. Abschn. 2, Abth. 3 oder § 58 — 68. Die Kettenbrüche. — 3. Abschn. Allgem. Rechnung in Potenzen und Wurzeln, Abth. 1 — 4 oder § 69 — 150. — 7. Abth. oder § 169 — 179. v. d. unmöglichen Größen. — Geometrie: das Pensum der Quarta wiederholt und bis § 168 fortgesetzt. — Algebr. § 279 — 293. Einleit. und Gleichungen des 1. Grades. G.L. Mauerhoff.

7. Naturwissenschaften, 2 St. Botanik, wie in Ober-Tertia. — Anleitung zum Selbstbeschreiben und Exkursionen in der Umgegend. G.L. Brunckow.

8. Geschichte nach dem chronolog. Abr. v. Kohlrausch, 3 St. Einleit. in die Geschichte überhaupt und alte Gesch. bis auf die Völkerwanderung, besonders der Griechen und Römer. Ders.

9. Geographie nach Cannabich, 1 St.: die polit. Geogr. v. Europa wiederholt. — Kartenzeichnen. Ders.

10. Kalligraphie 1 St. Ders.

11. Gesangunterricht. Untere Klasse, aus Unter-Tertianern und Schülern der drei untern Klassen bestehend. Die Dur-Tonarten mit ihren Vorzeichen. — Intervallen — Verschiedene Treffübungen. Kanons, 2-, 3- und 4stimmige kurze Sätze und Lieder. G.L. Mauerhoff.

Quarta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Brunckow.

1. Deutsch, 4 St. Davon 2 St. Gramm.: die Lehre von d. Redetheilen u. d. Sätzen wiederholt, vervollständigt und tiefer begründet; dann von der Verbindung und Folge der Sätze; zuletzt Anfangsgr. der Verslehre nach Gottholds Hephäst. § 1 — 62. — 1 St. theils Aufsätze (Erzähll., Beschreibungen, Schilderungen, Vergleichungen und Briefe), theils Uebb. in freien mündl. Mittheil. — 1 St. Lesung und Deklamiren. G.L. Küßner.

2. Latein, 7 St. Davon 1 St. Gramm. nach d. Schulgr. v. O. Schulz. Die Formenlehre wiederholt und beendigt; dann die Stamm- und Ableitungslehre im Zusammenhange. — 2 St. Syntax und Exerzitien nach den Aufgg. v. Schulz. — 2 St. Jacobs Elem.B. 2s. Bdch. Abschn. A. B. C. G.L. Gerlach. — 2 St. Phaedr. lib. 1 — 3 mit Auswahl. Voran die Quantitätslehre und aus der Metrik das zum metr. Lesen Erforderliche. — Monatl. 1 Fabel memorirt. O.L. Skrzeczka.

3. Griechisch, 5 St. Gramm. nach Buttmann: von Anfang bis zu den Verben in mi ausschl., und Jacobs Elem.B. 1. Ks. Im letzten Quartal auch erste Exerzz. nach Rost's 1. Ks. G.L. Gerlach.

4. Religion, 2 St. Abriß der Rel.Gesch., Einleit. in die H. S. nach

Krummachers Bibelkatech., Lesung und erbaul. Erläut. der Bibel, besonders der Evangelien, nebst Memoriren von Beweisstellen. G.L. Küßner.

5. Mathematik nach Matthias, 5 St. Davon 2 St. allg. Größenl. § 1 — 57 und 3 St. Planimetr. § 93 — 168. Bei den Proportt. einige §§ aus der Arithm. eingeschaltet. — Häusl. Arbeiten. G.L. Mauerhoff.

6. Naturbeschreibung, 2 St. das Thier- und Mineralreich system. nebst Erklärung des Knochen-, Muskel- und Gefäßsystems des menschl. Körpers. G.L. Brunckow.

7. Geographie, nach Cannabich, 4 St.: Abriß der math. und phys. G.; dann Einleit. in d. G. v. Europa und die polit. G. v. Europa, Asien und Afrika. Kartenzeichnen. Ders.

8. Geschichte, 1 St. zur Wiederholung des Pensums der Quinta. Ders.

9. Kalligraphie, 2 St. nach den Vorschriften v. Henning, Hornung und Mädler. Ders.

10. Zeichnen, 2 St. 3. und Anfang der 4. Stufe des vorgeschrieb. Lehrplans. Ders.

11. Gesangunterricht. S. bei Unter-Tertia.

Quinta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Kossak.

1. Deutsch, 6 St. Davon 2 St. Gramm. nach Krause's Lehrb. ꝛc. (die Lehre v. einfachen Satze wiederholt und vervollständigt, dann d. zusammenges. Satz nebst der Interpunktionslehre). — 1 St. Orthographie mit schriftl. Uebb. — 1 St. Sprech- und erste Aufsatzübb. Dr. Kossak. — 2 St. deklamator. Lesen, Erkl. d. Gelesenen und Deklamiren, nach Heinsius Musen 1. Thl. G.L. Küßner.

2. Latein, 7 St. Davon 4 St. Gramm. (die analoge Formenl. wiederholt, die anomal. erkl. und eingeübt, und kleine Exerzitien. Dr. Kossak. — 3 St. Reuß Elem. Uebb. 1. Ks. mit Auswahl. G.L. Küßner.

3. Religion, 2 St. Gesch. und Lehren d. N. T. nach Kohlrausch; die 5 Hauptstücke erläut. und nebst Bibelstellen und Liederversen memor. Ders.

4. Kopf- und Zifferrechnen, 4 St.: die Bruchrechnung wiederholt; dann die Verhältnißrechn. bis z. Beendig. d. prakt. Rechnens. G.L. Mauerhoff.

5. Geometrie, nach Matthias, 2 St.: Planimetrie § 1 — 94. G.L. Küßner.

6. Naturbeschreibung, 2 St.: die 3 Reiche vollständiger als in Sexta

und vorbereitend auf d. system. Unterr. Ueber die Eintheilungen legten die Schüler Tabellen an. G.L. Brunckow.

7 u. 8. Geogr. u. Gesch., 3 St., jene nach Weiß (d. preuß. Staat wiederholt, dann d. besond. G. v. Europa u. d. übr. Erdtheilen; (Kartenzeichnen) — diese nach Bredows Begebenheiten: Abriß der alten, mittl. und neuen Gesch. v. biograph. Standpunkte aus. G.L. Gerlach.

9. Kalligraphie, 3 St. nach den bei Quarta genannten Vorschr. G.L. Mauerhoff.

10. Zeichnen, 2 St. nach d. 2. u. 3. Stufe des vorgeschrieb. Lehrplans. G.L. Brunckow.

Gesangunterricht. S. bei Unter-Tertia.

Sexta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Mauerhoff.

1. Deutsch, 6 St. Davon 3 St. theils Sprachlehre analyt. nach Krause (der einfache Satz) theils Sprechübb.; 1 St. Orthogr. G.L. Gerlach. 2 St. Lesen und Deklamiren. G.L. Küßner.

2. Latein, 7 St. Davon 1 St. zu Leseübb., 3 St. Formenlehre von Anfang bis zu den unregelm. Verben. (Schriftl. Uebb.) — 3 St. Reuß Elem. Uebb. 1. Ks. G.L. Küßner.

3. Religion, 2 St. Gesch. und Lehren d. A. T. nach Kohlrausch. Memoriren der Bibelstellen und Liederverse aus dem Anhange. G.L. Gerlach.

4. Kopf- und Zifferrechnen bis z. März 6, später 5 St.: die 4 Grundrechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen. G.L. Mauerhoff.

5. Naturbeschreibung, 2 St. Fragmentar. Vorbereitungsunterr. hauptsächl. üb. vaterländ. Naturkörper a. all. 3 Reichen. G.L. Gerlach.

6. Geographie, nach Weiß, 2 St.: der allgem. Theil u. v. d. besondern d. preuß. Staat. Ders.

7. Schreiben, 3 St. G.L. Mauerhoff.

8. Zeichnen, 2 St. nach d. 1. Stufe des vorgeschrieb. Lehrplans. G.L. Brunckow.

9. Gesangunterricht. S. bei Unter-Tertia.

Vom März d. J. ab wöchentl. 1 St. zur Censur der Quintaner und Sextaner.

Was man den Primanern, Sekundanern und Ober-Tertianern zur Privatlektüre im Lat. und Griech. empfohlen hatte, war auf Ergänzung der öffentlichen Lesung berechnet; doch hat sich der Privatfleiß mehrer Primaner nicht auf diese Auswahl beschränkt.

II. Verordnungen und Verfügungen der hohen Königl. Unterrichtsbehörden.

1. Vom 10. Sept. 1834. Ein Erlaß des Königl. Minist. der g., U. u. M.A. vom 7. August 1834, betreffend die zu ergreifenden Maßregeln, das studentische Treiben der Gymnasiasten und die Richtung derselben zu gesetzwidrigen Verbindungen zu verhüten, wird zur Kenntnißnahme und mit der Aufforderung zugefertigt, nicht allein die angedeuteten, sondern auch andere zweckdienliche Mittel anzuwenden.

2. Vom 16. Oktober 1834. Ein Reskript des Königl. Ministerii d. g., U. u. M.A. vom 13. Sept. v. J., den mathemat. Unterricht u. die demselben zu Grunde zu legenden Lehrbücher betr., wird auszugsweise mit der Aufgabe zugefertigt, unter den in Vorschlag gebrachten Büchern von Matthias, Grunert, Förstemann, Lacroix u. Crelle mit Zuziehung der Lehrer des fraglichen Faches zu wählen. (Ref. und seine betreffenden Kollegen haben sich vorläufig und bis ein nach dem gleichzeitig zugefertigten Entwurfe bearbeitetes anderes Lehrbuch erschienen seyn und den von dem hohen Königl. Ministerium deßhalb ausgesetzten Preis erhalten haben wird, für die Beibehaltung des Leitfadens von Matthias erklärt.)

3. Vom 21. Nov. 1834. Die Bestimmung in § 7. des Abit.Prüf.Regl. vom 4. Juni 1834 bringt es mit sich, daß von jetzt ab in allen Gymnasien an die aus Sekunda nach Prima zu versetzenden Schüler dieselben Anforderungen gemacht und die Lehrkursen wenigstens der drei obern Klassen überall nach denselben Grundsätzen geregelt werden. Zu dem Ende werden die im Königl. Friedrichskollegium zu Königsberg in beiden Rücksichten bestehenden Einrichtungen mitgetheilt und über Beistimmung oder etwanige Abweichungen Bericht erfordert.

4. Vom 11. Januar 1835. Nach einer Verordnung des Königl. Ministerii der g., U. u. M.A. vom 19. Dezember v. J. soll die für den ganzen Gymnasialunterricht als erforderlich anzusehende Zeit von 9 Jahren so vertheilt werden, daß der Lehrkursus von Sexta bis Quarta einschließlich einjährig, von Tertia bis Prima zweijährig ist. Wo eine hinreichende Anzahl von Lehrern vorhanden ist, sollen die drei obern Klassen in zwei Abtheilungen, deren eine der andern subordinirt ist, jede mit einem einjährigen Pensum für den ganzen Sprach- und wissenschaftlichen Unterricht getheilt werden.

5. Vom 20. Febr. 1835. Zufertigung des Urtheils der Königl. wissensch. Prüfungs-Kommission über die vorjährige Abiturienten-Prüfung.

6. Vom 27. Febr. 1835. Nach einer Allerhöchsten Kabinetsordre vom 11. Januar d. J. soll die Aufnahme in Pensionsanstalten, die mit öffentlichen Unterrichts-Instituten verbunden sind, nicht eher erfolgen, als bis der aufzunehmende Zögling seine Vaccination oder Revacination als innerhalb der letzten zwei Jahre wirksam an ihm vollzogen nachgewiesen hat.

7. Vom 11. März 1835. Ein Reskript des Königl. Ministerii d. g., U. u. M.A. vom 29. Januar d. J. an das Königl. Prov. Schulkollegium zu Koblenz,

das Abiturienten-Reglement von 4. Juni v. J. betr., wird auszugsweise zur Kenntniß und Nachachtung zugefertigt. Was in dem Reglement nicht vorgeschrieben ist, soll auch nicht verlangt werden. Erklärende Anmerkungen zu der Uebersetzung aus dem Griechischen sind nicht zu fordern. Die Erforschung der grammat. u. mytholog. Kenntnisse bleibt der mündlichen Prüfung vorbehalten. In § 18 des Reglem. sind den Abiturienten bei Anfertigung der schriftl. Arbeiten Wörterbücher der erlernten Sprachen gestattet, ohne die lateinischen auszunehmen. Dabei soll es sein Bewenden haben. — Bei der mündl. Prüfung im Griech. und Lateinischen sind aus einem Prosaiker nicht gelesene Stellen, die keine besonderen Schwierigkeiten enthalten, aus Dichtern dagegen gelesene, die indessen in den beiden letzten Semestern nicht interpretirt sein müssen, vorzulegen. — Es wird zugegeben, daß, da nunmehr in der Naturbeschreibung geprüft werden soll, entweder dann und wann eine Wiederholung dieser Wissenschaft in den oberen Klassen angestellt, oder den Schülern ein Leitfaden zum Privatstudium empfohlen werde. — In Betreff der § 28 des Reglem. geforderten grammat. Korrektheit des deutschen und latein. Aufsatzes verstehe es sich von selbst, daß dies nicht mit buchstäblicher Strenge durchgeführt werden könne, wie denn überhaupt bei dem ganzen Reglement vorausgesetzt sei, die Prüfungs-Kommission werde nicht aus der Acht lassen, daß die Examinanden noch Schüler sind. — Der Ausdruck „nicht völlig" in § 28 B sei allerdings strenge zu nehmen, so daß Unwissenheit in den übrigen Fächern von dem Zeugnisse der Reife ausschließe, auch wenn im Latein. und Deutschen das Erforderliche und mehr als dieses geleistet sei. — Daß die Bestimmung § 28 D dahin zu verstehen sei, daß derjenige als nicht reif zu betrachten, der das unter A oder B, oder in besondern, als Ausnahme geltenden Fällen unter C Vorgeschriebene nicht leistet, sei schon durch den Zusatz „auch nicht einmal" hinreichend angedeutet. — Den für nicht reif erachteten Schülern könne allerdings auch gestattet werden, mit der nochmaligen Prüfung ein Jahr zu warten; doch sei es nicht nothwendig, sie von dem Gymnasium zu entfernen, wenn diese Prüfung ebenfalls ungünstig ausgefallen sei. Indeß könnten dergleichen junge Leute, nachdem sie das Gymnasium verlassen, allerdings zu einer nochmaligen Prüfung zugelassen werden. — Wenn Abiturienten nach der Prüfung die Schulstunden nachlässig oder gar nicht mehr besuchen, oder sich der Schulordnung nicht mehr unterwerfen: so sei jedenfalls das Urtheil über Fleiß und Betragen nach einem solchen Benehmen in ihrem Zeugnisse abzuändern.

8. Vom 12. März 1835. Die Censuren und einige andere disziplinarische Einrichtungen der Anstalt betreffend. Es wird die Wiederherstellung der monatlichen Censuren in den vier untern Klassen und daneben die Einführung einer wöchentlichen Censur in Quinta und Sexta genehmigt und angeordnet, daß die tägliche Morgenandacht mit allen Klassen zusammen im Schulsaale gehalten werden soll.

9. Vom 20. Mai 1835, eine von mehreren Pädagogen und Schulmännern beabsichtigte Zusammenkunft zu Wittenberg betreffend.

10. Vom 17. Juni 1835. Ein an das Königl. Prov. Schulkolleg. von Brandenburg erlassenes Reskript des Königl. Ministerii der g., U. u. M.A. vom

14. Dezember v. J. wird abschriftlich zugefertigt und Bericht erfordert. Inhalt: Da in dem Gymnasialunterr. eine streng-wissenschaftliche und erschöpfende Behandlung derjenigen Lehren der Physik und derj. Gesetze in dem astronomischen Theile der math. Geographie, bei welchen die sphärische Trigonometrie und die Lehre von den Kegelschnitten ihre Anwendung finden, nicht möglich sein wird, so soll der mathem. Unterricht nicht über das in dem Reglement vom 4. Juni v. J. gesteckte Ziel hinaus erweitert werden. Wenn indessen Schüler von ausgezeichneten Anlagen zur Mathematik in der Prima eines Gymnasiums sich befinden und die vorhandenen Lehrkräfte und Mittel ausreichen: so wird gestattet, außerordentlich und vorübergehend eine classis selecta für die Mathematik aus solchen Schülern zu errichten, die das in dem Reglement vom 4. Juni v. J. in der Mathem. gesteckte Pensum wirklich zu ihrem geistigen Eigenthum gemacht haben und Neigung zeigen, auch schon in der Schule über dieses Pensum hinauszugehen. Hiernach läßt sich entweder das mathem. Pensum der Prima zweimal durchmachen, oder das Ganze für Ober-Sekunda und Prima gesteckte Pensum auf drei Jahre vertheilen. Es würden also wohl drei Stunden wöchentlich für die Mathematik in Prima ausreichen, und die der Mathematik abgenommene Stunde könne dem Latein und namentlich den lateinischen Stilübungen zugelegt werden.

11. Vom 25. Juni 1835. Die Festsetzung des Königl. Finanz-Ministerii, wie es mit dem Quittungsstempel gehalten werden solle, wenn Lehrer oder sonstige Beamte in Folge einer Versetzung ihre Besoldung im Laufe eines Jahres aus verschiedenen Kassen bezogen haben.

12. Vom 29. Juni 1835. Das Königl. Ministerium der g., U. u. M. A. ist mit dem Königl. General-Postamte übereingekommen, daß, da die bisher bestandenen Verordnungen über Portofreiheit in Schulsachen, namentlich der Gymnasien und Seminarien, bei der jetzigen Schulverfassung nicht mehr ausreichen, die von der letztern hohen Behörde unter dem 14. Januar 1822 wegen der Portofreiheit der Universitäten an die Königl. Postämter erlassenen Bestimmungen, wovon Abschrift beigefügt wird, nunmehr auch auf Schulsachen, namentlich der Gymnasien und Seminarien, Anwendung haben und in Betreff der Geldsendungen dieser Anstalten in der Art ausgedehnt werden sollen, wie die abschriftlich beigefügte Cirkular-Verfügung des Königl. General-Postamtes an die Königl. Postämter vom 2. Jun. d. J. bestimmt. (Hiernach sind von jetzt ab auch die Geldsendungen aus Königl. und Kommunalkassen an die Gymnasien und Seminarien portofrei, und an jedem Posttage sollen Packete bis 20 Pfund — bisher 10 Pfund — frei befördert werden, ohne daß das Gewicht der von verschiedenen Orten oder von verschiedenen Absendern abgegebenen Packete zusammengerechnet werden darf. Zur Erleichterung des Geschäftsbetriebes soll auf dem Couverte die Nummer der Expedition oder des Journals beigefügt werden.*)

*) Zur Verwaltung der Gymnasialsachen gehört folglich nunmehr auch die Führung eines Eingangs- und Expeditions-Journals.

Vom 15. August 1835. Das Königl. Ministerium d. g., U. u. M. A. hat auf die Anfrage, nach wie langer Zeit Schüler, die aus der Prima eines Gymnasiums abgegangen sind, zur Maturitätsprüfung zugelassen werden können, in einem Reskripte vom 28. Juli d. J. Sich dahin erklärt, daß auch auf solche Schüler die Bestimmungen des § 7 des Reglements vom 4. Juni v. J. Anwendung leiden. Hiernach können diejenigen, welche vor anderthalb Jahren in Prima aufgenommen waren und demnächst das Gymnasium verlassen haben, um sich durch Privatunterricht für bie Universität vorbereiten zu lassen, nur ausnahmsweise und wenn sie sich nach pflichtmäßiger Beurtheilung der betreffenden Prüfungs-Kommission durch ihre sittliche Reife, durch ihre Gesammtbildung, so wie durch ihre Kenntnisse in den einzelnen Fächern auszeichnen, schon in den drei letzten Monaten des dritten Semesters seit ihrer Aufnahme in Prima zur Prüfung zugelassen werden. Ob und in wie weit solche Jünglinge der eben gedachten Bedingung entsprechen, ist erforderlichen Falles durch ein vorgängiges Tentamen zu ermitteln und nach dem Ausfalle desselben durch Stimmenmehrheit zu beschließen, ob sie schon in den drei letzten Monaten des dritten Semesters seit ihrer Aufnahme in Prima zur Maturitätsprüfung zugelassen werden können.

III. Zur Chronik des Gymnasiums.

Das Schuljahr $18\frac{34}{35}$ begann mit dem 20. Oktober v. J. und wird mit der angekündigten Prüfung schließen.

Auf den Antrag der hiesigen Königl. Regierung Abth. d. Inn. hat das Königl. Provinzial-Schul-Kollegium dem Oberlehrer Sperling unter dem 1. Okt. v. J. gestattet, an der im Oktober v. J. hier eröffneten Königl. Gewerbschule wöchentlich einige Stunden zu unterrichten, doch soll die Lage dieser Stunden stets und unter allen Umständen der Lage seiner Lektionen im Gymnasium untergeordnet bleiben.

Zur Feier des Geburtsfestes Sr. Majestät, unsers allverehrten und geliebten Königs und Landesvaters, wurde am 3. August von 9 bis 11 Uhr Vormittags in dem Saale des Gymnasiums ein Rede- und Deklamationsakt gehalten. Nach einem von der obern Singklasse gesungenen passenden Choral schilderte der Oberlehrer Dr. Hamann in einem Prolog die in den letzten Jahren von Sr. Majestät den östlichen Provinzen überhaupt und der Provinz Litthauen insbesondere erwiesenen Wohlthaten. Unter diesen blieb natürlich nicht unerwähnt das großartige Geschenk Königl. Huld, welches unserer Stadt schon im Jahre 1824 bei Gelegenheit ihres ersten hundertjährigen Jubelfestes verheißen war, das bronzene Standbild ihres Gründers, König Friedrich Wilhelm I., dessen nahe bevorstehende Enthüllung eben damals die Bewohner der Stadt und die zahlreichen Fremden aller Stände aus der Nähe und Ferne in die freudigste Bewegung gesetzt hatte. — Nach einem Zwischengesange wechselten Redeversuche der Primaner Nast und Böttcher, und der Sekundaner Wichgraf und Arnoldt I. in latein. und deutscher Sprache mit Deklamationen von Schülern der vier untern Klassen und noch einem Gesange ab. Ein Choral beschloß die Feier, die vor einem mehr als gewöhnlich zahlreichen Auditorium Statt gefunden hatte.

IV. Statistische Nachrichten.

1 Die Veränderung in der Frequenz der Schule ist aus der angehängten tabellarischen Uebersicht zu entnehmen. — Aus Sekunda ist Schlick abgegangen, ohne von dem Ordinarius der Klasse Abschied genommen zu haben.

2. Die Bibliothek des Gymnasiums ist im Laufe des Schuljahres durch folgende, aus den betreffenden Fonds angekaufte Bücher vermehrt worden:

G. J. Vossii Aristarchus, Ed. Foertsch. Hal. 1823 sq. 2 Voll. 4. — Freund, Wörterb. d. lat. Spr. 1. Bd. Lpz. 1834. — Forcellini etc Lexicon. Schneeb. (Beschluß.) — Fr. Hand, Lehrb. des lat. Stils. Jen. 1833. — Ejusd. Tursellinus sive de particulis lat. commentarii. Lips. 1829. 32. 2 Voll. — Fortsetz. des Corp. scriptt. hist. Byz., Theophylact. Simocotta et Genesius; — Georg. Pachymer. 2 Voll.; — Nicet. Choniat. Recognov. I. Bekker. zusammen 4 Bdd. gr. 8. — Demosth. orat. pro Corona. Ed. Bremi. 1834. — Dess. Staatsreden nebst d. Rede f. d. Krone. Uebers. v. Fr. Jacob's. 2. Aufl. Lpz. 1833. gr. 8. — Cic. de fin. Ed. Rath. Hal. 1804. — Neue Jahrb. für Philolog. und Paedagog. Jahrg. 1835. — Hoffmann, Lexicon bibliograph. III. 1. Lips. 1835. — Gesenii Lexic. manuale hebr. et chald. in V. T. Lips. 1833. — Graff, Althochdeutscher Sprachschatz. Lips. Lief. 1—3. Hölty's und Matthisson's Gedichte. — Paul et Virginie. Par St. Pierre. — Théâtre de T. Corneille. 5 Voll. 12. — Hist. Romaine par Rollin. 5 Voll. 8. Hall. 1753—55. — Schoell, Cours d' histoire des états Europ. etc. Tom. 42 —47. (beendigt). — Ségur, Hist. de Napoléon et de la gr. armée pend. l' année 1812. Stuttg. 1834. — Stielers Handatlas. 6. und letzte Lief. — Niemeyers Beobachtt. auf Reisen. 1. 2. Bd. und 4. Bds. 1. Abth. — Unger, Arithmet. Unterhaltt. Erf. 1832. — Cuvier, das Thierreich ꝛc. Uebers. v. Voigt. Leipz. 1831 ff. 1.—3. Bd. gr. 8. — Fortsetz. v. Oken's Handb. d. Naturgesch. bis zur 19. Lief. — Goldfuss, naturhist. Atlas. 17. u. 18. Lief. — Ruthe, Flora der Mark Brandenburg ꝛc. (empfohlen) — Platners Briefe über den menschl. Körper. 2 Bdd. 8. — V. T. graec. ex vers. LXX interpr. Lond. 1653. — Eine Nürnberg. Ausg. der Vulgata von 1529. — Luthers Tischreden v. J. 1569. Fol. — Konkordienformel. Frankf. a. d. O. 1581. — Heß, Lebensgesch. Jesu. 3 Bdd. — Rosenmülleri Scholl. in V. T. in compend. red. Vol. II. — Krug, Handwörterbuch der philosoph. Wissensch. 2. Aufl. 4 Bdd. gr. 8. — Schwarz, üb. religiöse Erzieh. 1834. — Neigebaur, das Volksschulwesen in d. Preuß. Staaten. (empfohl.) — Ergänz. - Bl. zum Jahrg. 1834 u. 1835. d. Hall. Lit. Zeit. — Preuß. Provinzialblätter. Jahrg. 1834, 1835.

Außerdem ist die Bibliothek durch folgende Geschenke der Huld des hohen Königl. Ministerii der geistl., Unt. und Medizinalangelegenheiten vermehrt worden: Freytagii Lexicon Arabico-Latin Vol. I. II. Hal. 1830. 33. 4 max — v. Ledebur, Neues Archiv f. d. Geschichtsk. des Preuß. Staats. 14. Bds. 2. — 4. Hft. 15. Bd. und 16. Bds. 1. Heft. — Meyen, Reise um die Erde, 2 Bd. Berl. 1835. 4. — Sinnhold, Neuest. Abr. einer Geogr. des Preuß. Staats aus statist. Gesichtsp. Liegn. 1835. 4. — Crelle, Journal für Math. 13. und 14. Bd. 4. — Müller, lithographisch-anatomische Darstellung des menschlichen Herzens. — Corpus Reformatorum Ed. Bretschneider Vol. I Hal. 1834. 4. — Hegel's Werke 10. Bds. 1. Abth. 16. u. 17. Bd. — Neigebaur, die Preuß. Gymnasien u. höhern Bürgerschulen. Berl. rc. 1835. gr. 8. — Encyclop. der medicin. Wissensch 12. Bd. Berl. 1835. gr. 8. — Museum, Blätter für bildende Kunst 3. Jahrg. №. 1—26. Berl. 1835. 4. — Gloger, Naturg. der Vögel rc. 1. Th. Breslau 1834. gr. 8.

Von Programmen inländischer, wie auch einiger ausländischen Gymnasien sind eingegangen: 91 aus d. J. 1834 und 49 aus 1835.

An andern Geschenken sind hinzugekommen:

a) von dem Herrn Pfarrer Arnoldt zu Plibischken: Ambros. Calepini Dictionarium emendat. etc. a J. L. de la Cerda. (in 8 Sprachen) Lugd. 1647. Fol. max. — Das veränderte Rußland. Frkf. a. d. O. 1721. 39. 2 Bdd. 4. — Vitringa, Ausleg. der Weissagg. des Jesaia. Uebers. v. Busching. Hall. 1749. 2 Bdd. 4.

a) Von dem Herrn Oberlehrer Dr. Merleker zu Königsberg: 1 Exempl. des von ihm herausgeg. Leitfadens der allg. Weltgesch. für die oberen Gymnasialklassen. Königsb. 1835. gr. 8.

c) Von den Herren Buchhändlern, Gebr. Bornträger zu Königsberg: Förstemann, Arithmet. Uebungsbuch. Königsb. 1835. gr. 8.

d) Von dem Herrn Oberlehrer Sperling hierselbst: Niemeyers Beobachtt. auf Reisen. 3. Bd. und 4. Bds. 2. Abth.

e) Von dem unter dem Lehrerkollegio bestehenden Lesezirkel: Hall. Litt. Zeit. Jahrg. 1834 (ohne die Erg.Bl.) — Jahrg. 1834 des Journal's Minerva.

f) Vom Ref.: Königsberger Cholera-Zeitung.

3. In den übrigen Sammlungen der Anstalt sind keine erwähnenswerthe Veränderungen vorgekommen.

Gerade vor dem Schlusse seines Berichts nimmt Ref. noch ein sehr werthvolles Geschenk der hohen Huld des Königl. Ministerii der geistl., U. u. M. A. für das Gymnasium mit dem ehrfurchtsvollsten Danke in Empfang. Es ist die Gypsbüste Melanchthons, an Größe und Kunstwerth der S. 24. des Progr. von 1832 erwähnten Büste Luthers gleich. Sie wird derselben gegenüber in dem Schulsaale aufgestellt werden.

Nachtrag.

Zur Universität werden mit dem Zeugniß der Reife folgende, in alphabetischer Ordnung aufgeführte Zöglinge der Anstalt entlassen:

1. Friedr. Gust. Dewitz aus Mattischkehmen bei Trakehnen, $19\frac{3}{4}$ Jahr alt, $8\frac{1}{2}$ Jahr im Gymnasium von Quinta ab, 2 Jahr auf Prima.

2. Eduard Gottl. Dickhäuser aus Gumbinnen, $21\frac{3}{4}$ Jahr alt, 11 Jahr in der Anstalt von Sexta ab, 2 Jahr auf Prima.

3. Gust. Eduard Ludw. Nast aus Gumbinnen, $19\frac{1}{4}$ Jahr alt, $10\frac{1}{2}$ Jahr in der Anstalt von Sexta ab, 2 Jahr auf Prima.

4. Karl Leop. Friedr. Neiß aus Stallupönen, $21\frac{1}{4}$ Jahr alt, $6\frac{1}{2}$ Jahr im Gymnasium von Quarta ab, 2 Jahr auf Prima.

5. Hans Otto Elimar Oppeln v. Bronikowski aus Königsberg in Pr., $22\frac{1}{2}$ Jahre alt, vom Oktober 1823 bis zum März 1825 und wieder vom Juni 1828 bis jetzt im Gymnasio von Sexta ab, 3 Jahr auf Prima.

6. Ludw. Stahl aus Stallupönen, $22\frac{3}{4}$ Jahr alt, $7\frac{1}{2}$ Jahr in der Anstalt von Quarta ab, 2 Jahr auf Prima.

Sie sind alle entschlossen, in Königsberg Theologie zu studiren.

V. Tabellarische Uebersicht der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums im Schuljahre $18\frac{34}{35}$.

1. Lehrerkollegium.

- Direktor Prang.
- Oberlehrer Petrenz.
- O.L. Sperling.
- O.L. Dr. Hamann.
- Gymnas.L. Küßner.
- O.L. Skrzeczka.
- O.L. Dr. Janson.
- G.L. Brunckow.
- G.L. Mauerhoff.
- G.L. Gerlach.
- G.L. Dr. Kossak.

2. Allgemeiner Lehrplan.

Fächer.	Klassen und Stunden. I	II	III sup.	III inf.	IV	V	VI	Zusammen
Deutsch . . .	3	3	3	3	4	6	6	28
Latein	9	10	8	8	7	7	7	56
Griechisch . .	6	6	6	6	5	—	—	29
Hebräisch . .	2	2	—	—	—	—	—	4
Französisch .	2	2	2	2	—	—	—	8
Religion . . .	2	2	2⌣	2	2	2	2	12
Philos.Propäd.	1	—	—	—	—	—	—	1
Mathematik .	4	4	5	5	5	6	5	34
Naturwissensch.	2	2	2	2	2	2	2	14
Geographie .	—	1	1	1	4	1	2	10
Geschichte . .	3	2	3	3	1	2	—	14
Kalligraphie .	—	—	—	1	2	3	3	9
Zeichnen . . .	—	—	—	—	2	2	2	6
Gesanglehre .	2 ⌣		2	2 ⌣			2	4
	36	34	32	33	34	31	29	229

Anmerk. Das Zeichen ⌣ bedeutet Kombination. Die Stunden für den Gesangunterricht sind der Kombination wegen nur bei I. und Unter-Tertia, die Religionsstunden der III. nur bei III. inf. mitgezählt.

3. Nachweisung über

a) die Schüler

In	waren n. d. Versetz. z. Mich. v. J.	Aufgenommen	Abgegangen	Sind jetzt
I	18	—	7	11
II	20	1	3	18
III	69	5	19	55
IV	60	4	9	55
V	60	10	6	64
VI	16	13	2	27
	243	33	46	230

b) die zur Universität Entlassenen.

Anzahl der Entlassenen		Ort, wo sie studiren.		Was sie studiren.	
mit dem Zeugnisse der Reife	6	Königsberg	6	Theologie	6

Anmerk. Unter den aus I. Abgegangenen sind die Abiturienten mitbegriffen. Die durch die Versetzung zu Michaelis d. J. bewirkten Veränderungen sind hier unberücksichtigt geblieben.

VI. Folge der Prüfungsgegenstände.

Freitag, den 2ten Oktober Vormittags von 8 bis 12 Uhr.

Gesang.

1. Sexta.

Religion. Herr G.L. Gerlach.
Rechnen. Herr G.L. Mauerhoff.
Latein. Herr G.L. Küßner.
Naturbeschreibung. Herr G.L. Gerlach.

2. Quinta.

Deutsche Sprachlehre. Herr Dr. Kossak.
Geschichte. Herr G.L. Gerlach.
Latein. Herr Dr. Kossak.
Naturbeschreibung. Herr G.L. Brunckow.

Die untere Singklasse. Herr G.L. Mauerhoff.
Probeschriften und Zeichnungen liegen vor.

Gesang.

Nachmittags von 2 bis 5 Uhr.

Gesang.

3. Quarta.

Deutsch. Herr G.L. Küßner.
Latein. Jakobs E.B. Herr G.L. Gerlach.
Geometrie. Herr G.L. Mauerhoff.
Geographie. Herr G.L. Brunckow.

4. Unter-Tertia.

Latein. Cäsar. Herr O.L. Skrzeczka.
Französisch. Herr O.L. Dr. Hamann.
Griechisch. Odyssee. Herr O.L. Skrzeczka.
Geschichte. Herr G.L. Brunckow.

Probeschriften und Zeichnungen liegen vor.

Gesang.

Sonnabend, den 3ten Oktober Vormittags von 8 bis 12 Uhr.

Gesang.

5. Ober-Tertia.

Griechisch. Odyssee. Herr Dr. Kossak.
Latein. Cäsar. Herr O.L. Dr. Janson.
Mathematik. Herr O.L. Sperling.

6. Sekunda.

Latein. Livius. Herr O.L. Skrzeczka.
Griechisch. Xenophon. Herr O.L. Dr. Janson.
Geschichte. Herr O.L. Dr. Hamann.

7. Prima.

Latein. Cicero. Herr O.L. Petrenz.
Griechisch. Sophokles. Herr O.L. Dr. Janson.
Physik. Herr O.L. Sperling.

Entlassung der Abiturienten. — Abschiedsworte des Abiturienten Dewitz. — Erwiederung des Primaners Schirmeister.

Schlußgesang.

Die Herbstferien dauern 14 Tage. Das neue Schuljahr beginnt mit dem 19ten Oktober d. J.

Neu aufzunehmende Schüler bitte ich, insofern sie sich für eine der 4 obern Klassen eignen, Freitag, den 16ten Oktober (Vormittags um 10 Uhr), die für Quinta oder Sexta geeigneten aber Sonnabend, den 17ten, um dieselbe Stunde zur Prüfung vorzustellen.

Gumbinnen, am 21sten September 1835.

Prang.