PROGRAMM

der

höheren Bürgerschule

zu

Gumbinnen,

durch welches zu der

öffentlichen Prüfung der Schüler

Freitags den 31. März d. J.

im Namen des Lehrer-Kollegiums

ergebenst einladet

Rector Dr. H. Schwarz.

Inhalt: Die Theorie der Rechnung mit abgekürzten Dezimalbrüchen von dem Rector.
Schulnachrichten von demselben.

Gumbinnen.
Gedruckt bei Wilh. Krauseneck.
1882.

1882. Programm Nr. 20.

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Freitags am 31. März 1882

Vormittags von 8 Uhr ab.

Choral.

8 Uhr. **Erste Vorklasse:** Religion. Dill.
Rechnen. Puschke.

Max Pottinat: „Die Kinder im Walde“ von Houwald.
Georg Kieselbach: „Der Jäger und der Fischer“.

8 Uhr 50 Min. **Zweite Vorklasse:** Deutsch. Klein.
Rechnen. Klein.

Fritz Vormeyer: „Der Storch und die Kinder“ von Löwenstein.
Paul Kuhnke: „Das kann nicht sein“ von Kreibohm.

9 Uhr 30 Min. **Sexta:** Rechnen. Puschke.
Geographie. Jordan.

Otto Sperber: „Der Vater und seine drei Söhne“ von Lichtwer.
Paul Hein: „Der rechte Barbier“ von Chamisso.

Gesang.

10 Uhr 20 Min. **Quinta:** Latein. Rohde.
Naturgeschichte. Dr. Müller.

Emil Karschuck: „Frau Hütt“ von Carl Ebert.
Franz Beyer: „Der alte Derflinger“ von Th. Fontane.

11 Uhr 10 Min. **Quarta:** Geschichte. Jordan.
Latein. Kreutzberger.
Mathematik. Dr. Müller.

Otto Brakmann: „Der neue Diogenes“ von Chamisso.
Robert Nicolaus: „Der Triumphator“ von Salis-Saevis.

Gesang der gesamten Singklasse.

Nachmittags von 3 Uhr ab.

3 Uhr. **Tertia:** Religion. Rohde.
Französisch. Capeller.

Friedrich Gillcke: „Das rote Taschenbuch“ von Adolphi.
Richard Broszat: „The Erlking“ from Goethe by W. Scott.

3 Uhr 45 Min. **Sekunda:** Latein. Kreutzberger.
Geschichte. Rohde.
Englisch. Capeller.

Wilhelm Paszkowski: „La jeune captive“ par Marie André Chénier.
Max Keil, Ernst Cappeller,
Otto Schweiger, Richard Preuss,
Paul Gerlach, Wilh. Paszkowski,
Otto Dumont, Arthur Schrenk, } die Schlussscenen aus Kleist's „der Prinz von Homburg“.

Schlusschoral.

Theorie der abgekürzten Rechnung mit Dezimalzahlen.

Der Unterzeichnete hat schon einmal im 5ten Bande der Zeitschrift für den mathematischen Unterricht die abgekürzte Rechnung mit Dezimalzahlen wissenschaftlich untersucht. Die Vergleichung der damaligen Abhandlung mit der nachstehenden wird deren Berechtigung unzweifelhaft herausstellen. Jene war im Anschlusse an die geläufigen, nicht immer scharfen Begriffsbestimmungen dem praktisshen Bedürfnisse angepasst und begnügte sich mit der Begründung der hierfür aufgestellten Regeln: diese dagegen sucht in erster Linie die fundamentalen Begriffe in unantastbarer Weise herzustellen und geht dann dazu über, die gesammte Theorie in ihrem an und für sich schon interessanten Zusammenhange mit der Reihenlehre tiefer zu begründen und weiter auszubauen. So dürfte namentlich die Regel für die abgekürzte Multiplikation zum ersten Male streng und einwendungsfrei hergeleitet sein. Wenn daneben auch Einzelheiten und eine Anzahl von Beispielen ausführlich behandelt sind, so war die Absicht massgebend, sowohl dem Verständnisse geförderter Schüler, wie auch dem Bedürfnisse des Selbststudiums entgegen zu kommen.

§. 1. a) Die erste (oder höchste) geltende Stelle einer Dezimalzahl ist die erste (oder höchste) Stelle linker Hand, in welcher eine von Null verschiedene Ziffer sich vorfindet. Jede rechts folgende Stelle ohne Unterschied, ob sie durch 0 oder eine andere Ziffer ausgefüllt wird, zählt als eine geltende Stelle mit. So z. B. hat

20,068	2 ganze Stellen	3 Decimalbruchstellen	5 geltende Stellen.
0,059	0	3	2
0,900	0	3	3

Die Summe $0{,}07 = 0{,}0699 + 0{,}0001$, ihrer Entstehung nach betrachtet, ist 0,0700 anzuschreiben und hat mit demselben Rechte 3 geltende Ziffern, wie die Summe $0{,}0512 = 0{,}0507 + 0{,}0005$.

b) Alle Ziffern einer dekadischen Zahl bezeichnen Vielfache von positiven oder negativen Potenzen der Grundzahl 10. Die Exponenten dieser Potenzen bezeichnen den Rang der Stellen, in welchen die einzelnen Ziffern sich vorfinden, und können auch Ordnungszahlen genannt werden. Hiernach ist die Einerstelle als die 0te Stelle, die Stelle der Zehner als die $(+1)$te und die Stelle der Zehntel als die (-1)te, die Stellen der Hunderte als die $(+2)$te und die Stelle der Hundertstel als die (-2)te anzusehen u. s. w. fort. In der Reihe der Rang- oder Ordnungszahlen

$$\ldots\ldots +3 \quad +2 \quad +1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \ldots\ldots$$

oder, da $+$ meistenteils weggelassen wird,

$$\ldots\ldots 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \ldots$$

gilt jede als um so höher, je weiter sie nach links und als um so niedriger, je weiter sie nach rechts steht.

§. 2. a) Wenn die höchste geltende Stelle, mit welcher der Unterschied zweier dekadischer Zahlen beginnt, von einem niedrigeren Range ist als die höchste geltende Stelle sowohl der einen, wie der anderen Zahl, so heisst jede von beiden ein Näherungswert der anderen. Diejenige, welche die andere zum Näherungswert hat, ist gewöhnlich eine gegebene oder zu bestimmende Grösse; der Näherungswert dazu ist um so genauer, je niedriger die Anfangsstelle des Unterschiedes zwischen beiden ausfällt. Die Berechnung des Unterschiedes auf diese eine Stelle ist meistenteils ausreichend und mit einer Stelle von demselben dekadischen Range schliesst am zweckmässigsten auch der Näherungswert ab.

b) Im Allgemeinen stimmt ein Näherungswert mit der zugehörigen Zahl in mehreren geltenden Anfangsziffern überein und die Anzahl dieser Ziffern ist um Eins kleiner, als die Anzahl der geltenden Ziffern, welche der Näherungswert in seiner zweckmässigsten Form hat. Sollte der Unterschied zwischen beiden Ziffermengen mehr als Eins betragen, so ist derselbe durch dem Näherungswert angehängte Nullen auszugleichen.

So z. B. ist 2,3700865 — 2,37 = 0,0000865. also 2,37 ein Näherungswert von 2,3700865, aber in der Form 2,37000 anzuschreiben, damit seine vorletzte Stelle die Reihe der gemeinsamen Stellen von 2,37 und 2,3700865 abschliesse. Ferner ist 2,37 — 2,3699943 = 0,0000057, also 2,37 ein Näherungswert auch von 2,3699943 und am besten in der Form 2,370000 anzuschreiben. Man nimmt hierbei an, dass der Näherungswert 2,37 und die genaue Zahl 2,3699943 in den 6 ersten geltenden Stellen übereinstimmen und kann hierfür anführen, dass ihr Unterschied erst in der 7ten geltenden Stelle von 0 verschieden ausfällt.

Die bezeichnete Ausdrucksweise ist streng genommen nicht genau, aber wohl geeignet einzelne Ausnahmefälle ohne Weitläufigkeit gewissen allgemeinen Benennungen und Beweisführungen unterzuordnen und lässt sich in einigem Betracht auch rechtfertigen. Denn wenn mehrere Zahlen gemeinschaftliche Anfangsstellen haben, so wird dadurch die Annäherung ihres Grösseverhältnisses nach der Gleichheit hin bedingt und dies kommt in Zahlen, wie 2,370000 und 2.3699943 nicht minder zum Vorschein, wie in den Zahlen 2,3699901 und 2,3699958.

c) Je nachdem ein Näherungswert zu einer Dezimalzahl grösser oder kleiner als diese ist, heisst er ein oberer oder unterer Näherungswert. Hiernach ist 2,370000 ein oberer Näherungswert zu 2,3699943 und ein unterer Näherungswert zu 2,3700057.

d) Ein Näherungswert heisst bis auf eine bestimmte geltende Stelle genau, wenn der Unterschied zwischen ihm und der genauen (vollständigen) Zahl in der nächst folgenden Stelle beginnt. Jeder Näherungswert in normaler Form ist bis auf seine vorletzte Stelle genau.

§. 3. a) Absolute Fehlergrenze eines Näherungswertes zu einer bestimmten Zahl heisst jede den Unterschied zwischen diesen beiden übersteigende Zahl. Am passendsten wird dieselbe so gewählt, dass sie jenem Unterschiede möglichst nahe kommt und über ein einziffriges Vielfaches derjenigen Stelleneinheit nicht hinausgeht, welche der Endziffer des Näherungswertes entspricht.

b) Wenn eine Fehlergrenze eine einziffrige Menge von dekadischen Einheiten derjenigen Stelle darstellt, mit welcher der zugehörige Näherungswert abbricht, so ist dieser mindestens bis auf seine vorletzte Stelle genau — unmittelbare Folge aus den vorhergehenden Definitionen.

c) Den Gegensatz zu absoluten Fehlergrenzen bilden algebraische Fehlergrenzen. welche weiter unten definiert werden sollen. Letzterer bedient man sich indessen seltener und deswegen sind, wenn von Fehlergrenzen schlechthin gesprochen wird, stets absolute gemeint.

Als ein oberer Näherungswert der Zahl

$$\pi = 3{,}141\ \ 592\ \ 6536\ \ldots$$

möge 3,1416 angemerkt werden: derselbe gelangt durch 2 hinter 6 angehängte Nullen auf seine Normalform 3,141600. Die zugehörige Fehlergrenze ist 0,000 008, wie aus der Gleichheit 3,1416 − 3,1415926 . . . . = 0,000 0073 . . . . sogleich erhellt.

Die archimedische Zahl $3\frac{1}{7} = 3{,}142857\ 142\ 857\ \ldots$, die von dem Holländer Metius aufgefundene Zahl $\frac{355}{113} = 3{,}141\ \ 59292\ \ldots$, endlich die Zahl $3\frac{15}{106} = 3{,}141\ \ 5094\ \ldots$ sind gleichfalls Näherungswerte von π, die beiden ersten obere Näherungswerte, der dritte ein unterer. Die Normalformen derselben sind beziehungsweise

$$3\tfrac{1}{7} = 3{,}143 \qquad \tfrac{355}{113} = 3{,}141\ \ 5929 \qquad 3\tfrac{15}{106} = 3{,}14151$$

und die zugehörigen Fehlergrenzen

$$0{,}002 \qquad 0{,}000\ 0003 \qquad 0{,}00009.$$

§. 4. a) Jede Grösse ist zwischen der Summe und Differenz enthalten, welche aus einem Näherungswerte zu derselben und der zugehörigen Fehlergrenze sich bilden lassen.

Es sei z. B. A eine gegebene oder zu bestimmende Grösse, a ein Näherungswert derselben und α eine zugehörige Fehlergrenze, so ist A stets zwischen $a + \alpha$ und $a - \alpha$ enthalten.

Behufs des Beweises nehme man zuerst an, dass a ein oberer Näherungswert von A ist, so folgt nach §. 3 a

$$\begin{array}{ll} \alpha > a - A, \text{ also } A > a - \alpha, & \text{aber es ist auch} \\ a > A, & \text{also } a + \alpha > A \\ \hline & a + \alpha > A > a - \alpha. \end{array}$$

Zweitens nehme man an, dass a ein unterer Näherungswert zu A sei, so ist

$$\begin{array}{ll} a < A, \text{ also noch stärker } a - \alpha < A, & \text{aber es ist auch (§. 3 a)} \\ \alpha > A - a, \text{ also} & a + \alpha > A \\ \hline & a + \alpha > A > a - \alpha \end{array}$$

b) *Wenn eine Grösse zwischen Summe und Differenz eines zugehörigen Näherungswertes und einer dritten Grösse enthalten ist, so ist die dritte Grösse eine Fehlergrenze des Näherungswertes zur ersten Grösse* — in Zeichen: Wenn a ein Näherungswert von A ist und man hat $a + \alpha > A > a - \alpha$, so ist α eine Fehlergrenze des Näherungswertes a zu A.

Es sei a zuerst ein oberer Näherungswert von A, so folgt aus dem zweiten Theile der vorausgesetzten Ungleichheit, nämlich $A > a - \alpha$, durch Transposition sofort $\alpha > a - A$, woraus nach §. 3 a die Behauptung hervorgeht.

Es sei a zweitens ein unterer Näherungswert von A, so folgt aus dem ersten Theile der vorausgesetzten Ungleichheit, nämlich $a + \alpha > A$, durch Transposition sofort $\alpha > A - a$, d. h. α ist wiederum eine Fehlergrenze des Näherungswertes a zu A.

§. 5. *Unter einer algebraischen Fehlergrenze* eines Näherungswertes a zu einer bestimmten Grösse A versteht man jede Grösse α, deren Vorzeichen mit dem Vorzeichen der Differenz $A - a$ übereinstimmt und deren Wert numerisch über diese Differenz hinausgeht.

Zu dieser wesentlichen Bedingung kann noch die konventionelle hinzutreten, dass dieselbe höchstens eine Einerzahl von dekadischen Einheiten derjenigen geltenden Stelle darstelle, mit welcher der Näherungswert abschliesst.

Die algebraischen Fehlergrenzen vom oberen Näherungswerte sind stets negative und von unteren Näherungswerten stets positive Zahlen. So z. B. sind $-0{,}002$ $\quad -0{,}000\,0003$ $\quad +0{,}00009$ algebraische Fehlergrenzen beziehungsweise der Näherungswert $3\frac{1}{7}$, $\frac{355}{113}$, $3\frac{15}{106}$ von π.

§. 6. a) Jede Grösse ist zwischen einem ihrer Näherungswerte und der Summe von Näherungswert und einer zugehörigen algebraischen Fehlergrenze enthalten.

Es sei a zunächst ein oberer Näherungswert von A, so ist $A - a$ negativ und mithin auch die Fehlergrenze α irgend eine negative Zahl, welche numerisch über die Differenz $A - a$ hinausgeht. Folglich besteht im algebraischen Sinne des Wortes die Ungleichheit $\alpha < A - a$ (von zweien ungleichen negativen Zahlen ist die numerisch grössere im algebraischen Sinne kleiner als die andere). Hieraus folgt durch Transposition $a + \alpha < A$ oder umgekehrt $A > a + \alpha$,

$$\begin{array}{l} \text{aber } a > A \\ \hline a > A > a + \alpha. \end{array}$$

Es sei zweitens a ein unterer Näherungswert von A, so ist $A - a$ positiv und $\alpha > A - a$, woher durch Transposition $a + \alpha > A$ und umgekehrt $A < a + \alpha$ folgt,

$$\begin{array}{l} \text{aber } a < a \\ \hline a < A < a + \alpha. \end{array}$$

b) Wenn eine Grösse zwischen einem ihrer Näherungswerte und der Summe von Näherungswert und einer anderen Grösse enthalten ist, so ist letztere eine algebraische Fehlergrenze des Näherungswertes.

Es sei erstens $a > A > a + \alpha$ und hiermit in Uebereinstimmung a ein oberer Näherungswert von A, so folgt aus $A > a + \alpha$ durch Transposition $A - a > \alpha$, also umgekehrt $\alpha < A - a$. Nun ist $A - a$ negativ, also ist auch α eine negative Zahl, welche numerisch über $A - a$ hinausgeht, d. h. α ist eine algebraische Fehlergrenze des Näherungswertes a von A.

Es sei zweitens $a < A < a + \alpha$ und hiermit in Uebereinstimmung a ein unterer Näherungswert von A, so folgt aus $A < a + \alpha$ durch Transposition $A - a < \alpha$, also umgekehrt $\alpha > A - a$.

Nun ist A — a positiv, also ist auch α eine positive Zahl, welche numerisch über A — a hinausgeht, d. h. α ist anch in diesem Falle eine algebraische Fehlergrenze des Näherungswertes a von A.

§. 7. Eine hinter einem Näherungswerte in Klammern gestellte Zahl soll auf Decimaleinheiten der letzten Stelle desselben bezogen die zugehörige Fehlergrenze ausdrücken. So z. B. bedeutet 3,143 (2) einen Näherungswert der Zahl π mit der Fehlergrenze $\frac{2}{1000} = 0,002$, ebenso 3,1416 (— 0,1) einen Näherungswert der Zahl π mit der algebraischen Fehlergrenze $-\frac{0,1}{10000} = -0,00001$. In der That fällt die Differenz A — a = 3,141 5926 — 3,1416 negativ aus; sie ist näher — 0,0000074 und numerisch geht — 0,00001 über — 0,0000074 hinaus.

§. 8. a) Wenn von einer zu bestimmenden Grösse ein Näherungswert mit seiner Fehlergrenze gefunden ist, so kennt man wenigstens zwei die Grösse einschliessende Grenzen und die geltenden Anfangsstellen, welche beide Grenzzahlen gemeinsam haben, stellen die Anfangsziffern der gesuchten Zahl dar. So drückt z. B. 0,5267 (0,5) eine Zahl aus, welche nach (§. 4 a) zwischen $0,5267 + \frac{0,5}{10000}$ und $0,5267 - \frac{0,5}{10000}$, d. h. zwischen 0,52675 und 0,52665 liegt; die drei ersten geltenden Ziffern derselben müssen also 526 sein und sie ist, wenn die darauf folgenden, vorläufig unbekannten Ziffern durch Punkte markirt werden, darstellbar durch 0,526 . . . .

In der Praxis können Fälle eintreten, wo schon der Näherungswert 0,5267 unbedenklich an Stelle der genauen Zahl gesetzt werden kann. Wenn es sich z. B. um die Münzeinheit „Mark" handelt, so wird 0,5267 *M.* = 52,67 *Pf.* mit 53 *Pf.* berichtigt und anders kann die genaue Summe 0,526 . . . . *M.* = 52,6 . . . . *Pf.*, wie immer die durch Punkte markirten Stellen sich ergeben, auch nicht berichtigt werden. Der Näherungswert mit seiner geringen Zifferzahl ist in diesem Falle der vollständigen Zahl, auch wenn dieselbe bekannt wäre, unbedingt vorzuziehen.

b) Wenn ein Näherungswert eine algebraische Fehlergrenze hat, so ist das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte, welche die vollständige Zahl einschliessen ein genauerer Näherungswert, als der vorige, indem seine absolute Fehlergrenze auf die Hälfte der vorigen herabgeht.

Beispielsweise entspricht der Näherungswert 6,028 (— 1) einer Zahl 6,02 . . . ., welche (§. 6 a) zwischen 6,028 und 6,027 enthalten ist. Die in der Mitte zwischen den beiden Grenzwerten befindliche Zahl 6,0275 kann sich von der genauen Zahl noch nicht um die Hälfte der Fehlergrenze (— 1) unterscheiden; man weiss aber nicht, welcher Hälfte des durch die Fehlergrenze (— 1) gemessenen Zahlenintervalles jene mittlere Zahl angehört und deshalb ist die neue Fehlergrenze absolut. Die Bezeichnung für den zweiten Näherungswert ist mithin, da die Hälfte von — 0,001 die Zahl — 0,0005 ergiebt,

6,0275 (5).

§. 9. Näherungswerte zu Dezimalzahlen erhält man am einfachsten durch deren sogenannte Verkürzung im weiteren oder im engeren Sinne, wobei die Fehlergrenzen der Bezeichnung (1) oder ($\frac{1}{2}$) = (0,5) entsprechen.

a) Eine vollständige Dezimalzahl wird im weiteren Sinne abgekürzt, indem man eine begrenzte Menge ihrer höchsten geltenden Stellen beibehält und die Ziffer in der letzten beibehaltenen Stelle entweder unverändert lässt oder eine Eins erhöht. Die erhaltene unvollständige oder verkürzte Dezimalzahl ist im ersten Falle kleiner und im zweiten Falle grösser als die vollständige Dezimalzahl. In ~~dem~~ einen, wie in dem anderen Falle beträgt der Unterschied zwischen der vollständigen und der verkürzten Dezimalzahl noch nicht eine volle Dezimaleinheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle. Eine solche Dezimaleinheit ist also die Fehlergrenze des durch die Verkürzung der vollständigen Zahl hervorgehenden Näherungswertes derselben.

Beispielsweise erhält man aus dem unendlichen periodischen Dezimalbruche 0,428571 428571 . . . ., welcher dem gemeinen Bruche $\frac{3}{7}$ gleich ist, durch Verkürzung auf 4 geltende Stellen die Näherungswerte

0,4285 (1) und 0,4286 (1)

oder, wenn man algebraische Fehlergrenzen vorzieht,

0,4285 (+ 1) und 0,4286 (— 1).

b) Gewöhnlich wird eine vollständige Dezimalzahl im engeren Sinne verkürzt, d. h. die Ziffer in der letzten beizubehaltenden Stelle bleibt unverändert, wenn in der rechts folgenden Stelle weniger als 5 steht, und wird um 1 erhöht, wenn die rechts folgende Stelle mit 5 oder mit mehr als 5 besetzt ist. Der Fehler, den man begeht, indem man diese unvollständige (abgekürzte) Dezimalzahl an Stelle der vollständigen treten lässt, beträgt noch nicht eine halbe Dezimaleinheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle oder, was auf dasselbe hinausläuft, noch nicht 5 Dezimaleinheiten der höchsten in Wegfall gekommenen Stelle.

Es seien z. B.

$$0{,}429\ (\tfrac{1}{2}) \text{ und } 0{,}42857\ (\tfrac{1}{2})$$

durch engere Verkürzung hervorgegangene Näherungswerte einer Dezimalzahl, so erkennt man (§. 4 a) aus dem ersten, dass dieselbe zwischen 0,4295 und 0,4285 liegt und mithin 0,42 . . . . ist. Zufolge des zweiten Näherungswertes wird sie von den Zahlen 0,428575 und 0,428565 eingeschlossen und ist mitthin 0,4285 . . . . Ueber die Ziffern von der 5ten geltenden Stelle an kann man nur durch eine weiter gehende Näherung Aufschluss erhalten.

c) Näherungswerte ohne Angabe der Fehlergrenze werden als im engeren Sinne verkürzt angesehen. Die zu ergänzende Fehlergrenze ist alsdann immer $(\frac{1}{2})$.

In vielen Tabellen ist die letzte Ziffer jedes darin aufgenommenen Näherungswertes unterstrichen oder ohne solche Marke vermerkt, je nachdem sie sich in der entsprechenden Stelle der vollständigen Dezimalzahl um 1 vermindert oder unverändert vorfindet. Dies kommt auf die Einführung algebraischer Fehlergrenzen bei engerer Verkürzung hinaus, wodurch allerdings (cf. §. 8 b) ein kleiner Vorteil erreicht wird.

Beispielsweise sind 0,02083 und $0{,}0204\underline{1}$ nach dem logarithmisch-trigonometrischen Handbuche von Schlömilch die reciproken Werte von 48 und 49; dieselben liegen mithin, da die bezüglichen Fehlergrenzen $(+\frac{1}{2})$ und $(-\frac{1}{2})$ sind, zwischen den Grenzwerten 0,02083 und 0,020835, 0,02041 und 0,020405 (cf. §. 6 a) Die arithmetischen Mittel zwischen den Grenzwerten jedes Paares, nämlich 0,0208325 und 0,0204075, sind folglich (§. 6 b) etwas genauere Näherungswerte, als die in der Tafel verzeichneten; denn ihre Fehlergrenze ist auf $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10000} = \frac{0{,}25}{10000} = 0{,}000025$ herabgebracht — aber der Zuwachs um 2 Ziffern hinter der 5ten Dezimalbruchstelle macht ihre Benutzung unbequem.

d) Verkürzte Dezimalzahlen sind im Falle sowohl der weiteren, als in der engeren Verkürzung Näherungswerte, welche bis auf die letzte geltende Stelle genau sind; denn von den bezüglichen vollständigen Dezimalzahlen unterscheiden sie sich um weniger, als eine Dezimaleinheit ihrer letzten geltenden Stelle ausmacht (cf. §. 2 d).

§. 10. Wenn eine algebraische Summe von beliebig vielen Decimalzahlen dadurch in zwei Teile zerlegt wird, dass die Anfangsziffern bis zu einer passend gewählten Stelle zu der einen Teilsumme und die darauf folgenden Ziffern zu der anderen Teilsumme vereinigt werden: so ist die erste Teilsumme ein Näherungswert der vollständigen Summe und die zugehörige Fehlergrenze zählt so viele dekadische Einheiten der letzten geltenden Stelle, als die Zahl der Summanden anzeigt.

Beweis. Die Zahl der Summanden sei n, die positive oder negative Zahl $\varkappa$ bezeichne den dekadischen Rang der niedrigsten Stelle jedes Summanden, welche bei der Bildung der ersten Teilsumme zur Verwendung kommt: die erste Teilsumme hat hiernach die Form $S \,.\, 10^{\varkappa}$, wo S eine im Allgemeinen mehrziffrige ganze Zahl ausdrückt. S' endlich sei die zweite Teilsumme, welche durch Addition aller Stellen hinter der $\varkappa$ten Stelle hervorgeht: mithin ist $S \,.\, 10^{\varkappa} + S'$ die vollständige Summe.

Nun kann die algebraische Summe S' keinenfalls grösser sein als diejenige Summe S'', welche alle Summanden von S' mit dem Zeichen $+$ befasst, und die letztere Summe muss unterhalb derjenigen Summe S''' liegen, in welcher alle in die Summanden von S'' eintretenden geltenden Ziffern — auch die Nullen mit eingeschlossen, welche den letzten geltenden Ziffern in unendlicher Zahl angehängt werden können — durch den Höchstbetrag Neun ersetzt sind. Nach der bemerkten Substitution sind in jeder Stelle n Neunen zu addiren, wodurch sich 9 n ergiebt, und es folgt

$$\begin{aligned} S''' &= 9n \,.\, 10^{\varkappa-1} + 9n \,.\, 10^{\varkappa-2} + 9n \,.\, 10^{\varkappa-3} + 9n \,.\, 10^{\varkappa-4} + \ldots . \\ &= 9n \,.\, 10^{\varkappa-1}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots .\right) \end{aligned}$$

oder da für ächt gebrochene Werte von x die unendliche Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ die Summe $\frac{1}{1 - x}$ hat.

$$S''' = 9n \cdot 10^{\varkappa - 1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 9n \cdot 10^{\varkappa - 1} \cdot \frac{10}{9} = n \cdot 10^{\varkappa}.$$

Da nun $S' \leq S''$, $S'' < S'''$, so darf man schliessen, dass $S' < S'''$ ist, d. h.

$$S' < n \cdot 10^{\varkappa}, \text{ woher } (S \cdot 10^{\varkappa} + S') - S \cdot 10^{\varkappa} < n \cdot 10^{\varkappa}.$$

Wenn nun $\varkappa$ so gewählt wird, dass S mindestens eine geltende Stelle mehr als n hat, so muss $n \cdot 10^{\varkappa}$ und unter den Zahlen, die kleiner als $n \cdot 10^{\varkappa}$ sind, auch S' mit einer geltenden Stelle von niedrigerem Range beginnen als $S \cdot 10^{\varkappa}$. Aber $S \cdot 10^{\varkappa}$ und $S \cdot 10^{\varkappa} + S'$ haben, da S' lauter dekadische Einheiten unter $10^{\varkappa}$ befasst, eine und dieselbe geltende Anfangsziffer. Folglich hat die höchste geltende Stelle sowohl von $S \cdot 10^{\varkappa}$, als auch von $S \cdot 10^{\varkappa} + S'$ einen höheren Rang, als die höchste geltende Stelle der Differenz S' zwischen beiden. Dies ist nach (§. 2 a) die notwendige und zureichende Bedingung dafür, dass die Teilsumme $S \cdot 10^{\varkappa}$ ein Näherungswert der vollständigen Summe $S \cdot 10^{\varkappa} + S'$ sei.

Als eine Fehlergrenze dieses Näherungswertes muss zufolge §. 3 das Produkt $n \cdot 10^{\varkappa}$ angesehen werden.

§. 11. a) In der Praxis geht die Zahl der Summanden nicht leicht über 9 hinaus: die Fehlergrenze $n \cdot 10^{\varkappa}$ erfüllt mithin die konventionelle Bedingung nur eine einzige geltende Ziffer zu enthalten. Sollte n eine zwei- oder mehrziffrige Zahl sein, so kann man durch passende Verkürzung von $S \cdot 10^{\varkappa}$ und $n \cdot 10^{\varkappa}$ die Einziffrigkeit der Fehlergrenze stets herstellen.

b) Der Näherungswert $S \cdot 10^{\varkappa}$ enthält die willkürliche Ordnungszahl $\varkappa$ und ist um so genauer, je niedriger dieselbe angenommen wird. Näher ist er mindestens auf so viele geltende Stellen genau, als die Differenz zwischen der Zifferzahl von S und n anzeigt.

Es möge sich z. B. darum handeln ihn bis auf m geltende Stellen genau zu berechnen und es sei die höchste geltende Stelle, welche überhaupt in der Reihe der Summanden zum Vorschein kommt, vom λten Range. Alsdann sehe man zu, nötigenfalls unter Berücksichtigung der Zehner, welche von der nächst niedrigeren Stelle herrühren, ob die Summe der die λte Stelle einnehmenden Ziffern eine ein- oder zweiziffrige Zahl darstelle. Je nachdem das eine oder andere der Fall ist, setze man für ein einziffriges n $\varkappa = \lambda - m$ oder $\varkappa = \lambda - m + 1$, für ein zweiziffriges n $\varkappa = \lambda - m - 1$ oder $\varkappa = \lambda - m$, für ein dreiziffriges n $\varkappa = \lambda - m - 2$ oder $\varkappa = \lambda - m - 1$ u. s. w. fort.

Sämmtliche Summanden werden hierauf bis auf die $\varkappa$te Stelle dadurch im weiteren Sinne verkürzt, dass man die auf die kte Stelle folgenden Ziffern einfach weglässt. Die Summe der so verkürzten Summanden giebt einen auf m Stellen genauen Näherungswert zu der vollständigen Summe.

c) Die Schlüsse, welche bei dem Beweise des Satzes in §. 10 verwandt sind, behalten auch in dem Falle noch Giltigkeit, wenn alle Glieder oder einige Glieder der zu berechnenden Summen unendliche Dezimalbrüche sein sollten.

§. 12. Jede Verbindung einer beliebigen Anzahl von Näherungswerten durch Addition oder Subtraktion ergiebt im Allgemeinen einen Näherungswert zu der entsprechenden algebraischen Summe der vollständigen Zahlen und eine zugehörige Fehlergrenze ist die absolute Summe der Fehlergrenzen von den gegebenen Näherungswerten.

Beweis. Es mögen n vollständige Dezimalzahlen A, B, C, ... betrachtet werden, ihre Näherungswerte seien a, b, c, ... und (α), (β), (γ), ... die bezüglichen Fehlergrenzen. Weiter möge die höchste geltende Stelle desjenigen Summanden, welcher absolut genommen den grössten Wert hat, vom λten Range sein und vom $\varkappa$ten Range die niedrigste geltende Stelle, welche allen verkürzten Zahlen mit den bezüglichen unverkürzten Zahlen gemeinsam ist; dies schliesst nicht aus, dass einige der ersteren in noch mehreren Stellen mit der letzteren übereinstimmen. Endlich sei $S \cdot 10^{\varkappa}$ die algebraische Summe der ersten Summandenteile, welche sich auf alle Stellen bis zum $\varkappa$ten Range bezieht, so sind nach der in §. 10 angewandten Bezeichnung $S \cdot 10^{\varkappa} + s'$ und $S \cdot 10^{\varkappa} + S'$ die entsprechenden algebraischen Summen beziehungsweise der Näherungswerte a, b, c, ... und der vollständigen Zahlen A, B, C, ... Nach dem ebendaselbst bewiesenen Satze ist nun $S \,.\, 10^{\varkappa}$ ein Näherungswert sowohl von $S \,.\, 10^{\varkappa} + s'$, als auch von $S \,.\, 10^{\varkappa} + S'$ und in beiden Fällen stellt $n \,.\, 10^{\varkappa}$ eine Fehlergrenze dar.

Zufolge des dort geführten Beweises gelten die Ungleichheiten $s' < n \,.\, 10^{\varkappa}$ und $S' < n \,.\, 10^{\varkappa}$, aus denen die noch stärkere Ungleichheit $s' - S'$ oder $S' - s' < n \,.\, 10^{\varkappa}$ hervorgeht. Demzufolge kann der Rang der höchsten geltenden Ziffer der Differenz zwischen s' und S' nicht höher sein als der Rang der höchsten geltenden Ziffer von $n \,.\, 10^{\varkappa}$ und muss, sofern S mindestens eine geltende Stelle mehr als n hat, niedriger sein als der Rang der höchsten geltenden Ziffer von $S \,.\, 10^{\varkappa}$ und mithin auch von $S \,.\, 10^{\varkappa} + s'$ und $S' \,.\, 10^{\varkappa} + S'$. Da nun die Differenz zwischen s' und S' einerlei ist mit der Differenz zwischen $S \,.\, 10^{\varkappa} + s'$ und $S \,.\, 10^{\varkappa} + S'$, so folgt aus der fundamentalen Erklärung in §. 2 a, dass $S \,.\, 10^{\varkappa} + s'$ ein Näherungswert von $S \,.\, 10^{\varkappa} + S'$ ist. Eine zugehörige Fehlergrenze muss $n \,.\, 10^{\varkappa}$ sein, weil die in Rede stehende Differenz sich unterhalb dieser Grösse befindet.

Der erste Teil des Satzes ist hiermit erwiesen. Die Schlüsse, auf denen die Beweisführung für den zweiten Teil beruht, können an einem speziellen Beispiele aufgezeigt werden.

Es werde die algebraische Summe $A + B - C$ betrachtet. Alsdann ist (§. 4 a)

$$a + \alpha > \quad A > \quad a - \alpha,$$
$$b + \beta > \quad B > \quad b - \beta,$$
$$-c + \gamma > -C \,. > -c - \gamma$$ (folgt aus $c - \gamma < C < c + \gamma$ durch Multiplikation mit -1);

die Addition dieser Ungleichheiten ergiebt sofort

$$(a + b - c) + (\alpha + \beta + \gamma) > A + B - C > (a + b + c) - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Nun ist $a + b - c$ im Allgemeinen ein Näherungswert von $A + B - C$, mithin nach §. 4 b $\alpha + \beta + \gamma$ die zugehörige Fehlergrenze.

§. 13. Der zweite Teil des in §. 12 bewiesenen Satzes, welcher sich auf die Fehlergrenze eines zu einer algebraischen Summe gehörigen Näherungswertes bezieht, ist für algebraische, mit verschiedenen Vorzeichen behaftete Fehlergrenzen der Näherungswerte zu den einzelnen Summanden nicht allgemein giltig, was die zufällige Richtigkeit in einzelnen Fällen nicht ausschliesst.

Beispielsweise sind 0,02083 ($+ \frac{1}{2}$) und 0,02041 ($- \frac{1}{2}$) Näherungswerte von $\frac{1}{48}$ und $\frac{1}{49}$ und die Summe der beiden Fehlergrenzen ist 0. Aber daraus zu schliessen, dass nun auch die Summe 0,04124 der beiden Näherungswerte ein Näherungswert von $\frac{1}{48} + \frac{1}{49}$ mit der Fehlergrenze 0, d. h. der genaue Summenwert sei, wäre in dem gegebenen Falle völlig unzulässig: denn letzterer ist vielmehr

$$\tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{49} = 0{,}020\ 833\ 333\ 3 \ldots + 0{,}020\ 408\ 163\ 2 \ldots$$
$$= 0{,}041\ 241\ 496 \ldots$$

Der in Rede stehende Satz kann mit gewissen Modifikationen allerdings auch auf den Fall algebraischer Fehlergrenzen ausgedehnt werden — aber für praktische Rechnungen wird dadurch nichts gewonnen.

c) Bei der näherungsweisen Berechnung von algebraischen Summen kommt es hauptsächlich darauf an, dass alle Summanden bis auf eine bestimmte Stelle von demselben dekadischen Range verkürzt werden, und diese Stelle ist diejenige, welche unter den Schlussstellen aller verkürzten Summanden am weitesten nach links steht. Die Kenntniss von niedrigeren Ziffern einzelner Summanden nützt nichts. Denn die Schlussziffern von allen solchen Summanden sind ja doch ungenau und vermehren die Menge der ungenauen Endziffern des näherungsweise zu berechnenden Summenwerts.

§. 14. a) Um eine Summe, welche nicht mehr als 20 Summanden hat, näherungsweise bis auf eine bestimmte Stelle auszurechnen, reicht es hin, die einzelnen Summanden bis auf die nächst niedrigere Stelle im engeren Sinne abzukürzen und diese abgekürzten Summanden zu addiren. Wenn die Zahl der Summanden zwischen 20 und 200 ist, so muss jeder Summandus bis auf die zweitnächst niedrigere Stelle abgekürzt werden (engere Verkürzung).

Vorstehende Regel gilt auch für die Berechnung algebraischer Summen und namentlich für die Berechnung der Differenz zwischen zwei gegebenen Zahlen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 12.

Die Zahl der Summanden sei n, die Summe näherungsweise bis auf die $\varkappa$te Stelle zu berechnen und n zunächst unter 20 oder höchstens 20. Man verkürze jeden Summand im engeren Sinne auf die $(\varkappa - 1)$te Stelle, so ist die zugehörige Fehlergrenze jedesmal $(\frac{1}{2})$ und die Fehlergrenze der ganzen Summe $n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right) \leqq \left(\frac{20}{2}\right)$. Also ist die Fehlergrenze höchstens $(10) = 10 \cdot 10^{\varkappa - 1} = 10^{\varkappa}$ und mithin die näherungsweise gefundene Summe noch nicht um 1 Dezimaleinheit der $\varkappa$ten Stelle von dem vollständigen Werte der Summe verschieden, d. h. bis auf die bezeichnete Stelle genau (§. 2 d).

Wenn n eine zweiziffrige Zahl zwischen 20 und 200 ist, so ist jeder Summandus bis auf die $(\varkappa - 2)$te Stelle im engeren Sinne zu verkürzen, also die Fehlergrenze der näherungsweise gefundenen Summe $n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right) < \left(\frac{200}{2}\right)$; dieselbe ist also noch nicht um $(100) = 100 \cdot 10^{\varkappa - 2} = 10^2 \cdot 10^{\varkappa - 2} = 10^{\varkappa}$ von dem vollständigen Wert unterschieden, d. h. bis auf die $\varkappa$te Stelle genau (§. 2 d).

b) Wenn die Verkürzung der Summanden im weiteren Sinne erfolgt, so ist schon 10 die höchste Anzahl der Summanden, bei welcher die Verkürzung nur bis auf die nächst niedrigere noch als zulässig erscheint. Denn die Fehlergrenze $n \cdot (1) = (n) = n \cdot 10^{k-1}$ erreicht alsdann höchstens die Zahl $10 \cdot 10^{k-1} = 10^{k}$ und mithin beträgt der Unterschied zwischen der genauen Summe und dem berechneten Näherungswerte derselben noch nicht eine Dezimaleinheit der $\varkappa$ten Stelle.

Die Verkürzung von Dezimalzahlen im weiteren Sinne kann auf doppelte Art erfolgen und ergiebt zwei einschliessende Grenzwerte für die Summe der absoluten Werte. Letztere hat dieselben Anfangsziffern, welche beiden Grenzwerten gemeinsam sind.

c) Die Summe der Näherungswerte von den Summanden bringt nur ausnahmsweise einen im engeren Sinne verkürzten Näherungswert der genauen Summe hervor. In der Regel muss man sich damit begnügen, die vorletzte Stelle in soweit genau zu erhalten, dass die Fehlergrenze ein einziffriges Vielfaches von Dezimaleinheiten der letzten Stelle nicht überschreitet, und bei etwaigen weiteren Rechnungen die letzte ungenaue Stelle zugleich mit der vorhergehenden genauen verwenden.

Beispiel 1) Die Summe $0{,}627 + 9{,}0516279 - 3{,}1798 + 11{,}528952 - 0{,}08163725$ soll unter der Voraussetzung, dass alle Summanden vollständige Dezimalzahlen sind, bis auf Tausendstel genau berechnet werden.

Nach der Regel hat man alle Summanden bis auf 4 Dezimalbruchstellen zu verkürzen. Aber der erste und dritte Summand bedürfen keine Verkürzung und es bleiben also nur 3 Summanden zu verkürzen, welche bei Betrachtung der Fehlergrenze selbstverständlich auch allein in Betracht kommen.

Unverkürzte Rechnung.	Engere Verkürzung.	Weitere Verkürzung.	
0,627	0,6270	0,6270	0,6270
9,0516279	9,0516 $(\frac{1}{2})$	9,0516 (+ 1)	9,0517 (— 1)
11,528952	11,5290 $(\frac{1}{2})$	11,5289 (+ 1)	11,5290 (— 1)
+ 21,2075799	+ 21,2076	+ 21,2075	+ 21,2077
— 3,1798	— 3,1798	— 3,1798	— 3,1798
— 0,08163725	— 0,0816 $(\frac{1}{2})$	— 0,0816 (+ 1)	— 0,0817 (— 1)
— 3,26143725	— 3,2614	— 3,2614	— 3,2615
+ 17,94614265	+ 17,9462 $(\frac{3}{2})$	+ 17,9461 (3)	+ 17,9462 (3)

Die Fehlergrenzen der Summanden bei der weiteren Verkürzung sind allerdings algebraische — sie müssen aber bei der Fehlerbestimmung der Summen nach §. 12 als absolute in Rechnung gebracht werden. Hiernach ergeben sich folgende Paare einschliessender Werte;

17,94635 und 17,94605, also die genaue Summe 17,946 . . . .
17,9464 und 17,9458 - - - 17,94 . . . .
17,9465 und 17,9459 - - - 17,94 . . . .

Beispiel 2). Die vorige Summe soll in der Voraussetzung berechnet werden, dass sämmtliche Summanden verkürzte Zahlen sind. Alsdann ist die Summe + 17,94614265 wegen der ungenauen Endziffern der Summanden schon von der dritten Dezimalbruchstelle an unzuverlässig und die auf die Berechnung der folgenden Stellen verwandte Mühe überflüssig. Den höchsten Rang unter den

Endziffern hat die Endziffer des ersten Summanden, welcher mit Tausendsteln abschliesst und bis auf diese Stelle sind folglich auch die übrigen Summanden zu verkürzen und hat man alsdann die Sicherheit, dass die Summe bis auf Hundertstel genau ausfällt. Man bekommt

$$\begin{array}{rcrcr}
0{,}627\ (\tfrac{1}{2}) & \qquad & -\ 3{,}180\ (\tfrac{1}{2}) & \qquad & +\ 21{,}208 \\
9{,}052\ (\tfrac{1}{2}) & & -\ 0{,}082\ (\tfrac{1}{2}) & & -\ \ 3{,}262 \\
\underline{11{,}529\ (\tfrac{1}{2})} & & \overline{-\ 3{,}262\phantom{\ (\tfrac{1}{2})}} & & \overline{17{,}946} \\
21{,}208\phantom{\ (\tfrac{1}{2})} & & & & \text{Fgr. } (\tfrac{5}{2}) = 0{,}0025)
\end{array}$$

Folglich sind 17,948 5 und 17,9435 die beiden die genaue Summe einschliessenden Grenzwerte und diese selbst ist 17,94 . . . .

Mit Rücksicht darauf, dass die Fehlergrenze des ersten Summanden noch nicht 0,0005 ausmacht, ist es vortheilhafter auch die Stelle der Zehntausendstel mit in Rechnung zu ziehen und gestaltet sich die Rechnung auf folgende Art:

$$\begin{array}{rcrcr}
0{,}6270\ \ (5) & \qquad & \left.\begin{array}{r}-\ 3{,}1798 \\ -\ 0{,}0816\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}) & \qquad & +\ 21{,}2076 \\
\left.\begin{array}{r}9{,}0516 \\ 11{,}5290\end{array}\right\}(\tfrac{1}{2}) & & \overline{-\ 3{,}2614(\tfrac{1}{2})}} & & \underline{-\ \ 3{,}2614} \\
\overline{21{,}2076(\tfrac{1}{2})}} & & & & +\ 17{,}9462 \\
& & & & \text{Fgr. } (5) + 4\,.\,(\tfrac{1}{2}) = (7) = 0{,}0007
\end{array}$$

Folglich wird die genaue Summe von 17,9469 und 17,9455 eingeschlossen und ist 17,94 . . . .

Beispiel 3) Die Differenz

$$0{,}467\ 23 - \tfrac{218}{9254}$$

ist unter der Annahme zu berechnen, dass der Minuandus eine verkürzte Dezimalzahl ist. Man muss alsdann auch den Subtrahendus in einen Dezimalbruch verwandeln, der im Sinne der engeren Verkürzung mit der 5ten Dezimalbruchstelle abschliesst. Man findet 0,02356 und die in Rede stehende Differenz wird 0,59079 mit der Fehlergrenze $(\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}) = (1) = 0{,}00001$. Die Summe liegt also zwischen 0,59080 und 0,59078 und ist jedenfalls 0,5907 . . . ., denn alle zwischen jenen beiden Grenzen liegenden Zahlen haben entweder die Form 0,59079 . . . . oder 0,59078 . . . .

§. 15. Das Produkt zweier dekadischen Zahlen wird näherungsweise gefunden, indem man beide auf eine und dieselbe über 2 hinausgehende Anzahl von geltenden Anfangsziffern durch Weglassung der übrigen Ziffern verkürzt und die so verkürzten Zahlen multipliciert. Die Fehlergrenze beträgt noch nicht 200 dekadische Einheiten von einem Range, welcher um jene Anzahl niedriger ist als die Summe der höchsten Ordnungszahlen in beiden Faktoren. Der gefundene Näherungswert ist zufolge der Anlage der Rechnung ein unterer.

$A_1, A_2, A_3, \ldots . B_1, B_2, B_3, \ldots .$ mögen einziffrige Zahlelemente darstellen, $\varkappa$ und λ die höchsten Ordnungszahlen der beiden Faktoren A und B, endlich n die Anzahl von geltenden Stellen, auf welche A und B verkürzt sind, diese verkürzten Zahlen seien a und b. Näher sei

$$\mathrm{I}\quad\left\{\begin{array}{l}
A = A_1\,10^{\varkappa} + A_2\,10^{\varkappa-1} + A_3\,10^{\varkappa-2} + \ldots A_n\,10^{\varkappa-n+1} + A_{n+1}\,10^{\varkappa-n} + A_{n+2}\,10^{\varkappa-n-1} + \ldots . \\
a = A_1\,10^{\varkappa} + A_2\,10^{\varkappa-1} + A_3\,10^{\varkappa-2} + \ldots A_n\,10^{\varkappa-n+2} \\
B = B_1\,10^{\lambda} + B_2\,10^{\lambda-1} + B_3\,10^{\lambda-2} + \ldots B_n\,10^{\lambda-n+1} + B_{n+1}\,10^{\lambda-n} + B_{n+2}\,10^{\lambda-n-1} + \ldots . \\
b = B_1\,10^{\lambda} + B_2\,10^{\lambda-1} + B_3\,10^{\lambda-2} + \ldots B_n\,10^{\lambda-n+1}
\end{array}\right.$$

und der Abkürzung halber mögen noch folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\mathrm{II}\quad\left\{\begin{array}{l}
C_1 = A_1\,B_1\,,\ C_2 = A_1\,B_2 + A_2\,B_1\,,\ C_3 = A_1\,B_3 + A_2\,B_1 + A_3\,B_1\,, \\
\qquad\qquad C_4 = A_1\,B_4 + A_2\,B_3 + A_3\,B_2 + A_4\,B_1 \\
\qquad\qquad\quad \ldots\ldots \\
\qquad\qquad\quad \ldots\ldots \\
\qquad C_n = A_1\,B_n + A_2\,B_{n-1} + A_3\,B_{n-2} + \ldots . + A_n\,B_1
\end{array}\right.$$

$$\text{III}\begin{cases} C_{n+1} = A_1 B_{n+1} + A_2 B_n + A_3 B_{n-1} + \dots + A_{n-1} B_3 + A_n B_2 + A_{n+1} B_1 \\ C_{n+2} = A_1 B_{n+2} + A_2 B_{n+1} + A_3 B_n + \dots + A_n B_3 + A_{n+1} B_2 + A_{n+2} B_1 \\ C_{n+3} = A_1 B_{n+3} + A_2 B_{n+2} + A_3 B_{n+1} \dots + A_{n+1} B_3 + A_{n+2} B_2 + A_{n+3} B_1 \\ \qquad \cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots \\ C_{2n-1} = A_1 B_{2n-1} + A_2 B_{2n-2} + \dots + A_{n-1} B_{n+1} + A_n B_n + A_{n+1} B_{n-1} + \dots + A_{2n-1} B_1 \end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases} C_{2n} = A_1 B_{2n} + A_2 B_{2n-1} + \dots + A_n B_{n+1} + A_{n+1} B_n + \dots + A_{2n} B_1 \quad (2\,n \text{ gliedrig}) \\ C_{2n+1} = A_1 B_{2n+1} + A_2 B_{2n} + \dots + A_n B_{n+1} + A_{n+1} B_{n+1} + A_{n+2} B_n + \dots + A_{2n+1} B_1 \\ \qquad (2\,n + 1 \text{ gliedrig}) \\ \qquad \cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots \end{cases}$$

$$\text{V}\begin{cases} c_{n+1} = A_2 B_n + A_3 B_{n-1} + \dots + A_{n-1} B_3 + A_n B_2 \\ c_{n+2} = A_3 B_n + A_4 B_{n-1} + \dots + A_{n-1} B_4 + A_n B_3 \\ c_{n+3} = A_4 B_n + A_5 B_{n-1} + \dots + A_{n-1} B_5 + A_n B_4 \\ \qquad \cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots \\ c_{2n-2} = A_{n-1} B_n + A_n B_{n-1} \\ c_{2n-1} = A_n B_n \end{cases}$$

Dies vorausgesetzt ergiebt sich durch unmittelbare Multiplikation unter Zusammenfassung aller Glieder, welche eine und dieselbe Potenz von 10 enthalten,

$$\begin{aligned} \text{VI}\quad A B = {} & C_1\, 10^{\varkappa-\lambda} + C_2\, 10^{\varkappa+\lambda-1} + C_3\, 10^{\varkappa+\lambda-2} + \dots C_{n-1}\, 10^{\varkappa+\lambda-n+2} + C_n\, 10^{\varkappa+\lambda-n+1} \\ & + C_{n+1}\, 10^{\varkappa+\lambda-n} + C_{n+2}\, 10^{\varkappa+\lambda-n-1} + \dots + C_{2n-1}\, 10^{\varkappa+\lambda-2n+2} \\ & + C_{2n}\, 10^{\varkappa+\lambda-2n+1} + C_{2n+1}\, 10^{\varkappa+\lambda-2n} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VII}\quad a b = {} & C_1\, 10^{\varkappa+\lambda} + C_2\, 10^{\varkappa+\lambda-1} + C_3\, 10^{\varkappa+\lambda-2} + \dots + C_{n-1}\, 10^{\varkappa+\lambda-n+2} + C_n\, 10^{\varkappa+\lambda-n+1} \\ & + c_{n+1}\, 10^{\varkappa+\lambda-n} + c_{n+2}\, 10^{\varkappa+\lambda-n-1} \dots + c_{2n-1}\, 10^{\varkappa+\lambda-2n+2}. \end{aligned}$$

Indem man nunmehr die Differenz $AB - ab$ bildet, heben sich die Gliederkomplexe der beiden ersten Zeilen in VI und VII gegenseitig auf und teilweise auch die Gliederkomplexe der beiden zweiten Zeilen, da C_{n+1} und c_{n+1}, C_{n+2} und c_{n+2} .... C_{2n-1} und c_{2n-1} wenigstens in einigen Gliedern übereinstimmen, also

$$\begin{aligned} \text{VIII}\quad A B - a b = {} & (A_1 B_{n+1} + A_{n+1} B_1)\, 10^{\varkappa+\lambda-n} + \\ & (A_1 B_{n+2} + A_2 B_{n+1} + A_{n+1} B_2 + A_{n+2} B_1)\, 10^{\varkappa+\lambda-n-1} \\ & + (A_1 B_{n+3} + A_2 B_{n+2} + A_3 B_{n+1} + A_{n+1} B_3 + A_{n+2} B_2 + A_{n+3} B_1)\, 10^{\varkappa+\lambda-n-2} + \\ & \qquad \cdots\cdots \\ & \qquad \cdots\cdots \\ & + (A_1 B_{2n-1} + A_2 B_{2n-2} + \dots + A_{n-1} B_{n+1} + A_{n+1} B_{n-1} + \dots A_{2n-2} B_2 + A_{2n-1} B_1)\, 10^{\varkappa+\lambda-2n+2} \\ & + C_{2n}\, 10^{\varkappa+\lambda-2n+1} + C_{2n+1}\, 10^{\varkappa+\lambda-2n} + C_{2n+2}\, 10^{\varkappa+\lambda-2n-1} + \dots \end{aligned}$$

Nun wird die linke Seite dieser Gleichung offenbar kleiner als die rechte Seite, wenn man allen rechts vorkommenden Zahlelementen A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ... und insbesondere auch den unendlich vielen Nullen, welche hinter die niedrigst geltende Ziffer jedes Faktors gesetzt werden dürfen, den höchst möglichen Zifferwert 9 substituirt. Sämmtliche Teilprodukte, wie z. B. $A_1 B_{n+1} + A_{n+1} B_1$, $A_1 B_{n+2}$ u. s. w. erlangen hierdurch den Wert 81 und die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von 10 schliessen das Produkt 81 soviel mal in sich ein, als ihre Gliederzahl anzeigt. Mithin folgt

$$AB - ab < 2 . 81 . 10^{\varkappa+\lambda-n} + 4 . 81 . 10^{\varkappa+\lambda-n-1} + 6 . 81 . 10^{\varkappa+\lambda-u-1} + \ldots$$
$$+ 2(n-1) . 81 . 10^{k+\lambda-2n+2}$$
$$+ 2n . 81 . 10^{\varkappa+\lambda-2n+1} + (2n+1) . 81 . 10^{\varkappa+\lambda-2n} + \ldots . \text{ in infin.})$$

oder:

$$AB - ab < 2 . 81 . 10^{\varkappa+\lambda-n}\left(1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots . + \frac{n-1}{10^{n-2}}\right)$$
$$+ 81 . 10^{\varkappa+\lambda}\left(\frac{2n}{10^{2n-1}} + \frac{2n+1}{10^{2n}} + \frac{2n+2}{10^{2n+1}} + \ldots . \text{ in infin.}\right)$$

oder endlich, wenn man die Summen der beiden in Klammern gestellten Reihen beziehungsweise mit S und S′ bezeichnet,

$$\text{IX} \qquad AB - ab < 2 . 81 . 10^{\varkappa+\lambda-n} S + 81 . 10^{\varkappa+\lambda} . S'$$

und es ist

$$\left.\begin{aligned} S &= \quad 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots . + \frac{n-2}{10^{n-3}} + \frac{n-1}{10^{n-2}} \\ 10\,S &= 10 + 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \ldots . + \frac{n-1}{10^{n-3}} \end{aligned}\right\} \text{Subtr.}$$

$$9\,S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots . + \frac{1}{10^{n-3}} - \frac{n-1}{10^{n-2}}; \text{ aber}$$

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots . + \frac{1}{10^{n-3}} = \frac{1-(\frac{1}{10})^{n-2}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} - \frac{1}{9 . 10^{n-3}}$$

$$9\,S = 10 + \frac{10}{9} - \frac{1}{9 . 10^{n-3}} - \frac{n-1}{10^{n-2}} = \frac{100}{9} - \frac{9n+1}{9 . 10^{n-2}},$$

$$\text{X} \quad S = \frac{100}{81} - \frac{9n+1}{81 . 10^{n-2}}.$$

$$\left.\begin{aligned} S' &= \frac{2n}{10^{2n-1}} + \frac{2n+1}{10^{2n}} + \frac{2n+2}{10^{2n+1}} + \ldots . \text{ in infin.} \\ 10\,S' &= \frac{2n}{10^{2n-2}} + \frac{2n+1}{10^{2n-1}} + \frac{2n+2}{10^{2n}} + \frac{2n+3}{10^{2n+1}} + \ldots . \text{ in infin.} \end{aligned}\right\} \text{Subtr.}$$

$$9\,S' = \frac{2n}{10^{2n-2}} + \frac{1}{10^{2n-1}} + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{2n+1}} + \ldots . \text{ in infin.}$$
$$= \frac{2n}{10^{2n-2}} + \frac{1}{10^{2n-1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots . \text{ in infin.}\right)$$

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^1} + \ldots . \text{ in infin.} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

$$9\,S' = \frac{2n}{10^{2n-2}} + \frac{10}{9} . \frac{1}{10^{2n-1}} = \frac{18n+1}{9 . 10^{2n-2}}$$

$$\text{XI} \quad S' = \frac{18n+1}{81 . 10^{2n-2}}$$

Durch Einsetzung der Werte von S und S′ in IX geht die folgende Ungleichheit hervor:

$$AB - ab < 2 . 81 . 10^{\varkappa+\lambda-n} . \left(\frac{100}{81} - \frac{9n+1}{81 . 10^{n-2}}\right) + 81 . 10^{\varkappa+\lambda} . \frac{18n+1}{81 . 10^{2n-2}}$$

woher

$$\text{X} \quad AB - ab < 200 . 10^{\varkappa+\lambda-n} - 10^{\varkappa+\lambda-2n+2}.$$

Diese Ungleichheit wird noch verstärkt, wenn man rechter Hand den Subtrahendus $10^{\varkappa+\lambda-2n+2}$ fortlässt und kommt hierdurch auf die einfache Form

$$\text{XI} \quad AB - ab < 200 \,.\, 10^{\varkappa+\lambda-n} \text{ oder } 2 \,.\, 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$$

Hiernach kann der Unterschied zwischen AB und ab höchstens mit einer Ziffer von $(\varkappa+\lambda - n+2)$ten Range beginnen und da die Ordnungszahl $\varkappa+\lambda$ oder $\varkappa+\lambda+1$, welche in der höchsten geltenden Stelle sowohl von AB, als auch von ab sich vorfindet, für jeden über 2 hinausgehenden Wert von n stets höher ist als $\varkappa+\lambda-n+2$, so wird (§. 2 a) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür erfüllt, dass ab ein Näherungswert von AB sei. Die zugehörige Fehlergrenze ist, wie aus der Betrachtung der Ungleichheit XI sofort hervorgeht, $2 \,.\, 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ oder $200 \,.\, 10^{\varkappa+\lambda-n}$ (§. 13).

Je nachdem das Produkt der beiden höchsten geltenden Ziffern von A und B eine ein- oder zweiziffrige Zahl darstellt, stimmen AB und ab in allen Ziffern mindestens bis auf die $(\varkappa+\lambda-n+3)$te Stelle überein und ist die folgende Stelle um weniger als zwei Dezimaleinheiten dieser Stelle fehlerhaft. Bei $n=3$ haben AB und ab 1 oder 2, bei $n=4$ 2 oder 3, bei $n=5$ 3 oder 4, bei $n=6$ 4 oder 5 gleiche Ziffern u. s. w.

Wenn A_1B_1 sich als zweiziffrig ausweist, so ist sogar schon für $n=2$ regelmässig ab ein Näherungswert von AB: denn $\varkappa+\lambda-n+2$ ist in diesem Falle stets kleiner als $\varkappa+\lambda+1$.

Beispielsweise betrachte man die gemeinen Brüche

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571\ 428571\ldots,;\ \frac{7}{11} = 0{,}63\ 63\ 63\ 63\ldots.;\ \varkappa = -1,\ \lambda = -1;$$

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{11} = \frac{3}{11} = 0{,}27\ 27\ 27\ldots.$$

Man findet durch Multiplikation der Näherungswerte der beiden ersten gemeinen Brüche und Abkürzung der Produkte bis auf die $(\varkappa+\lambda-n+2)\text{te} = (-n)$te Stelle, weil die Fehlergrenze bis zu dieser Stelle heranreicht

für $n=1$	$0{,}4 \,.\, 06 = 0{,}24$ (zufällig ein Näherungswert)		
2	$0{,}42 \,.\, 0{,}63 = 0{,}2646$	abgekürzt 0,26	Flgr. (2)
3	$0{,}428 \,.\, 0{,}636 = 0{,}272208$	„ 0,272	
4	$0{,}4285 \,.\, 0{,}6363 = 0{,}27265455$	„ 0,2727	
5	$0{,}42857 \,.\, 0{,}63636 = 0{,}2727248052$ . . .	„ 0,27272	
6	$0{,}428571 \,.\, 0{,}636363 = 0{,}272726727273$ . .	„ 0,272727	

Die unmittelbare Ansicht dieser Näherungswerte lässt erkennen, dass die Fehlergrenze (2) in der letzten Stelle auch nicht einmal annähernd erreicht wird: sie sind vielmehr mit Ausnahme eines einzigen, der dem Werte $n=2$ entspricht in allen geltenden Stellen genau. Zugleich aber springt die Menge nutzloser Multiplikationen ins Auge, vermöge welcher dies Resultat erzielt ist. Denn um z. B. den Näherungswert 0,272727 zu finden hat man noch 6 niedrigere Stellen berechnet, obwohl deren Unsicherheit von vorn herein durch Betrachtung der Fehlergrenze hervortrat. Also ist ein abgekürztes Verfahren, welches alle solche überflüssigen Rechnungen erspart, dringend erfordert.

Man hat ferner

$$\frac{1}{37} = 0{,}027\ 027\ 027\ldots.;\ \varkappa = -2;\ \frac{37}{101} = 0{,}3663\ 3663\ldots.;\ \lambda = -1;$$

$$\frac{1}{37}\cdot\frac{37}{100} = \frac{1}{101} = 0{,}0099\ 0099\ldots.$$

und findet ähnlich, wie vorhin, indem man die gefundenen Produkte bis auf die $(\varkappa+\lambda-n+2)\text{te} = -(n+1)$te Stelle abkürzt,

für $n=1$	$0{,}3 \,.\, 0{,}02 = 0{,}006$ — kein Näherungswert.		
2	$0{,}36 \,.\, 0{,}027 = 0{,}00972$ — zufällig ein Näherungswert.		
3	$0{,}366 \,.\, 0{,}0270 = 0{,}0098820$	verkürzt 0,0099	Flgr. (2)
4	$0{,}3663 \,.\, 0{,}02702 = 0{,}009897426$	„ 0,00990	
5	$0{,}36633 \,.\, 0{,}027027 = 0{,}00990080091$ . . .	„ 0,009901	
6	$0{,}366336 \,.\, 0{,}0270270 = 0{,}0099009630720$.	„ 0,0099010	

Für alle über 2 hinausgehenden Werte von n können die gefundenen Näherungswerte aus dem genauen Produkte durch engere Verkürzung hergeleitet werden; der wirklich erreichte Grad ihrer Genauigkeit entspricht also der Fehlergrenze (0,5), welche nur den vierten Teil der aus dem Satze sich ergebenden Fehlergrenze (2) ausmacht, und geht in einzelnen Fällen sogar erheblich unter (0,5) herab. Denn z. B. der letzte Näherungswert 0,0099010 hat thatsächlich die Fehlergrenze $(0{,}01) = 0{,}000\ 00001$.

§. 16. Die Bestimmung der Fehlergrenze im vorigen §. führte auf das Problem die unendliche Reihe $2 \cdot 81 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-n}\left(1+\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\ldots\ldots+\frac{n-1}{10^{n-2}}\right)$

$$+\,81 \cdot 10^{\varkappa+\lambda}\left(\frac{2n}{10^{2n-1}}+\frac{2n+1}{10^{2n}}+\frac{2n+2}{10^{2n+1}}+\ldots\ldots \text{in infin.}\right)$$

zu summieren. Dieselbe gestattet die Form

$$162 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-n}\left(1+\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\ldots\ldots+\frac{n-1}{10^{n-2}}\right)$$

$$+\,81 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-n}\left(\frac{2n}{10^{n-1}}+\frac{2n+1}{10^{n}}+\frac{2n+2}{10^{n+1}}+\ldots\ldots \text{in infin.}\right)$$

Indem man nun die Multiplikationen mit 162 und 81 gliederweise ausführt, erhält man für n = 3 und n = 4 durch direkte Addition beziehungsweise

$10^{\varkappa+\lambda-3} \cdot 162,$	$10^{\varkappa+\lambda-4} \cdot 162,$
324	324
486	486
567	648
.648	729
..729	.810
...810	..891
....891	...972
.....972	...1053
.....1053	1134
......1134	1215
.......1215	1296
....	....
....	....
$10^{\varkappa+\lambda-3} \cdot 199{,}89999999\ldots\ldots$	$10^{\varkappa+\lambda-3} \cdot 199{,}989999999\ldots\ldots$

und übersieht sogleich, dass für n = 5, 6, 7, die Ziffer 8 in die 3te, 4te, 5te Dezimalbruchstelle rückt und dass alle folgenden Dezimalbruchstellen mit 9 zu besetzen sind. Nunmehr verkürze man die erhaltenen Summen bis auf die Stelle, in welcher 8 steht: sofort ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&\text{für } n=3 \quad 199{,}9 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-3} = 200 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-3} - 10^{\varkappa+\lambda-4}\\
&\text{für } n=4 \quad 199{,}99 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-4} = 200 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-4} - 10^{\varkappa+\lambda-6}\\
&\text{für } n=5 \quad 199{,}999 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-5} = 200 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-5} - 10^{\varkappa+\lambda-8}\\
&\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

allgemein, wie im vorigen §., $200 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-n} - 10^{\varkappa+\lambda-2n+2}$.

§. 17. In §. 15 wurden beide Faktoren des Produktes A B bis auf dieselbe Anzahl geltender Stellen verkürzt: man kann aber die Verkürzung auch in ungleicher Weise vornehmen und etwa B auf n, A auf m + n geltende Stellen reducieren, so dass

$$b = B_1 \cdot 10^{\lambda} + B_2 \cdot 10^{\lambda-1} + \ldots\ldots + B_n \cdot 10^{\lambda-n+1},$$

$$\begin{aligned}
a' &= A_1 \cdot 10^{\varkappa} + A_2 \cdot 10^{\varkappa-1} + \ldots\ldots + A_{n+m} \cdot 10^{\varkappa-n-m+1}\\
&= a + (A_{n+1} \cdot 10^{\varkappa-n} + A_{n+2} \cdot 10^{\varkappa-n-1} + \ldots\ldots + A_{n+m} \cdot 10^{\varkappa-n-m+1}
\end{aligned}$$

wird. Da die Faktoren a' und b jedenfalls die n ersten geltenden Stellen mit A und B gemeinsam haben, so wird zufolge der Beweisführung in §. 15 auch a' b ein Näherungswert von A B sein. In der That bleibt der Gliederkomplex

XII $C_1\,10^{\varkappa+\lambda} + C_2\,.\,10^{\varkappa+\lambda-1} + C_3\,10^{\varkappa+\lambda-2} + \ldots + C_n\,10^{\varkappa+\lambda-n+1}$,
welcher nach Ausweis der Formeln VI und VII den Ausdrücken ab und AB gemeinsam ist, auch den Ausdrücken a'b und AB gemeinsam, wird aber auffälliger Weise auch nicht um ein einziges Glied vermehrt. Denn aus den Koeffizienten

$$C_{n+1} \quad C_{n+2} \quad C_{n+3} \ldots . \; C_{2n-1} \quad C_{2n} \ldots .$$

der hinter dem Komplexe XII in VI stehenden Glieder erhält man die entsprechenden Koeffizienten

$$c'_{n+1} \quad c'_{n+2} \quad c'_{n+3} \ldots . \; c'_{2n-1} \quad c'_{n} \ldots .$$

des Produktes a'b dadurch, dass man in den betreffenden Formeln III und IV Null an Stelle der Zahlelemente

$$B_{n+1} \quad B_{n+2} \quad B_{n+3} \ldots . \text{ und } A_{n+m+1} \quad A_{n+m+2} \quad A_{n+m+3} \ldots .$$

treten lässt. Hierdurch werden nicht einmal C_{n+1} und c'_{n+1} identisch: denn das erste Glied $A_1 B_{n+1}$ von C_{n+1} kommt in c'_{n+1} nicht wieder zum Vorschein, während alle übrigen Glieder allerdings beiden Grössen gemeinsam sind. Ebenso haben C_{n+2}, C_{n+3}, C_{n+4}, ... beziehungsweise die 2, 3, 4 .... ersten Glieder vor c'_{n+2}, c'_{n+3}, c'_{n+4}, ... voraus bei Gemeinsamkeit aller übrigen Glieder. Folglich sind auch C_{n+2} und c'_{n+2}, C_{n+3} und c'_{n+3}, C_{n+4} und c'_{n+4} von einander verschieden und der Komplex XII ist für ab derselbe wie für a'b.

Zufolge der Werte von a, a', b ergiebt sich

$$AB - a'b = AB - (a + A_{n+1}\,10^{\varkappa-n} + A_{n+2}\,10^{\varkappa-n-1} + \ldots + A_{n+m}\,10^{\varkappa-n-m+1})\,.\,b \text{ oder}$$

$$\text{XIII} \quad AB - a'b = AB - ab - (A_{n+1}\,10^{\varkappa-n} + A_{n+2}\,10^{\varkappa-n-1} + \ldots + A_{n+m}\,10^{\varkappa-n-m+1})$$
$$.\,(B_1\,10^{\lambda} + B_2\,10^{\lambda-1} + \ldots + B_n\,10^{\lambda-n+1}).$$

und um die Fehlergrenze des Näherungswertes a'b von AB zu erhalten muss man rechts jedes der Zahlelemente A_1 und B_1, A_2 und B_2, ... sowie sämmtliche Nullen, welche hinter den letzten geltenden Ziffern von A und B denkbar sind, durch den höchst möglichen Zifferbetrag 9 ersetzen. Nach §. 15 geht dadurch AB — ab in $2\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n+2} - 10^{\varkappa+\lambda-2n+2}$ über und für das Produkt der beiden in Klammern gestellten Grössen erhält man, wenn m den Wert 1 hat,

$$9\,.\,10^{\varkappa-n}\,.\,9\,(10^{\lambda} + 10^{\lambda-1} + \ldots + 10^{\lambda-n+1}) = 81\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n}\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

$$= 81\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n}\,.\,\frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}} = 9\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n+1}\,(1-10^{-n})$$

Für einen Wert von m über 1 wird das in Rede stehende Produkt

$$9\,(10^{\varkappa-n} + 10^{\varkappa-n-1} + \ldots + 10^{\varkappa-n-m+1})\,.\,9\,(10^{\lambda} + 10^{\lambda-1} + \ldots + 10^{\lambda-n+1})$$

$$= 81\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n}\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{m-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

$$= 100\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n}\left(1 - \frac{1}{10^m}\right)\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= 10^{\varkappa+\lambda-n+2} - 10^{\varkappa+\lambda-n-m+2} - 10^{\varkappa+\lambda-2n+2} + 10^{\varkappa+\lambda-n-mn+2}.$$

Nach der Schlussweise des mehr erwähnten § folgt nunmehr aus der Gleichheit XIII im ersten Fall die Ungleichheit

$$AB - a'b < 2\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n+2} - 10^{\varkappa+\lambda-2n+2} - 9\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n+1}\,(1-10^{-n})$$

oder, wenn man 10—1 an Stelle von 9 setzt, die Multiplikationen rechter Hand ausführt, die gehörigen Hebungen und Zusammenziehungen vornimmt und die Ungleichheit durch Weglassung des letzten negativen Gliedes $-10^{\varkappa+\lambda-2n+1}$ verstärkt

XIV $AB - a'b < 1{,}1\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n+2}$, ja meist schon $AB - a'b < 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$,
da der Betrag $0{,}1\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ nur sehr selten zur Aufrechthaltung des Sinnes der Ungleichheit erforderlich ist.

Im zweiten Falle erhält man zunächst aus der Gleichheit XIII die Ungleichheit

$$AB - a'b < 2\,.\,10^{\varkappa+\lambda-n+2} + 10^{\varkappa+\lambda-2n+2} - (10^{\varkappa+\lambda-n+2} - 10^{\varkappa+\lambda-n-m+2}$$
$$- 10^{\varkappa+\lambda-2n+2} + 10^{\varkappa+\lambda-n-mn+2})$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$AB - a'b < 10^{\varkappa+\lambda-n+2} + 10^{\varkappa+\lambda-n-m+2} - 10^{\varkappa+\lambda-n-mn+2}.$$

Jedes der beiden letzten Glieder rechts stellt, da m über 1 hinausgeht, eine erheblich niedrigere Decimaleinheit dar als das erste Glied: folglich genügt die Beschränkung auf dieses allein und kommt man dadurch auf die zweite Ungleichheit XIV zurück, welche mithin allgemeine Geltung hat.

Wenn man A auf n und B auf n + m geltende Stelle verkürzt, dem entsprechend $b' = B_1\,10^{\lambda} + B_2\,10^{\lambda-1} + \ldots + B_{n+m}\,10^{\lambda-n-m+1}$ setzt und unter $c''_{n+1}, c''_{n+2}, c''_{n+3}, \ldots$ diejenigen Koefficienten versteht, welche aus den Koefficienten $C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3} \ldots$ durch die Substitution von 0 an Stelle der Zahlenwerte $A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3} \ldots B_{n+m+1}, B_{n+m+2}, B_{n+m+3} \ldots$ hervorgehen, so kann man in ähnlicher Weise wie die Ungleichheit XIV die Ungleichheit

$$\text{XV}\quad AB - ab' < 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$$

herleiten und ist demgemäss auch ab' ein Näherungswert zu AB mit der Fehlergrenze $10^{\varkappa+\lambda-n+2}$.

Die Zusammenfassung der gewonnenen Resultate giebt folgenden Satz:

Wenn ein Produkt durch die Verkürzung seiner Faktoren näherungsweise berechnet wird, so empfiehlt es sich, beide Faktoren auf ein und dieselbe Anzahl geltender Stellen zu verkürzen; jedoch erzielt man eine Herabdrückung der Fehlergrenze nahezu auf den halben Betrag, wenn man dem einen Faktor eine geltende Stelle mehr als dem anderen giebt: die Hinzufügung von geltenden Stellen über diese eine hinaus ist wertlos.

Im ersten Falle ist die Fehlergrenze $2 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$, im zweiten Fall nur $10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ und im Allgemeinen die Gewissheit vorhanden, dass der gefundene Näherungswert von dem genauen Näherungswerte höchstens um ein einziffriges Vielfache der $(\varkappa + \lambda - n + 1)$ten Stelle sich unterscheiden kann.

Man betrachte wieder das erste Beispiel im § 15. Bei der Verkürzung auf 4 und 5 Stellen hat man

$$a = 0{,}4285,\ a' = 0{,}42857,\ a'' = 0{,}4285714, \text{ also } A_1 = 4,\ A_{n+1} = 7,\ A_{n+m} = 4,$$
$$b = 0{,}6363,\ b' = 0{,}63636,\ b'' = 0{,}6363636, \text{ also } B_1 = 6,\ B_{n+1} = 6,\ B_{n+m} = 6.$$

Alsdann stellen sich $a''b$, ab'' nur sehr wenig genauer als beziehungsweise $a'b$, ab' heraus und die Mehrarbeit, welche ihre Berechnung erfordert, erscheint als durchaus überflüssig. Dies alles erhellt sofort aus der Betrachtung der nachstehenden Resultate:

		AB =	0,27272727	
a''b = 0,27269	998182	verkürzt	0,27270	(2,8)
a' b = 0,27269	9091	„	0,27270	(2,8)
a b' = 0,27267	0260	„	0,27267	(5,8)
ab'' = 0,27268	180260	„	0,27268	(4,8)

Die jedem dieser 4 Näherungswerte nach dem Satze dieses §. zukommende Fehlergrenze ist

$$10^{\varkappa+\lambda-n+2} = 10^{-1-1-4-2} = 0{,}0001,$$

welche sich beträchtlich über die bezüglichen engeren Fehlergrenzen

0,000028 0,000028 0,000058 0,000048

erhebt.

§. 17. Wenn man die Näherungswerte zu den Faktoren eines Produktes mit einander multipliziert, so erhält man im Allgemeinen einen Näherungswert zu dem genauen Produkte. Bezeichnet n die Zahl von geltenden Stellen, welche der eine Faktor B mit dem zugehörigen Näherungswerte b und m + n die Zahl von geltenden Stellen, welche der andere Faktor A mit dem zugehörigen Näherungswerte a gemeinsam hat, so ist je nachdem m = 0 ist oder über 0 hinausgeht, ab ein Näherungswert von AB mit der Fehlergrenze $2 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ in dem einen Falle und im anderen Falle mit der Fehlergrenze $10^{\varkappa+\lambda-n+2}$.

Behufs des Beweises nehme man m zunächst gleich 0 an, d. h. beide Faktoren stimmen mit ihren Näherungswerten in den n ersten geltenden Stellen überein und sind mindestens in der (n + 1)ten Stelle mit verschiedenen Ziffern besetzt. Alsdann ist, indem die Bezeichnungsweise der vorigen §. beibehalten wird,

$$\text{XVI}\quad (A_1\,10^{\varkappa} + A_2\,10^{\varkappa-1} + \ldots + A_n\,10^{\varkappa-n+1})\,(B_1\,10^{\lambda} + B_2\,10^{\lambda-1} + \ldots + B_n\,10^{\lambda-n+1}) = P,$$

sobald n über 2 hinausgeht, ein unterer Näherungswert sowohl von AB als auch von ab mit der Fehlergrenze $2 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$. Folglich hat man

$$AB - P < 2 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-n+2} \text{ und } ab - P < 2 \cdot 10^{\varkappa+\lambda-n+2}.$$

Nun ist der Unterschied zweier Zahlen, die unterhalb einer und derselben dritten Zahl liegen, kleiner als die dritte Zahl. Also ergiebt sich, je nachdem AB grösser oder kleiner als ab ist,

$$(AB - P) - (ab - P),\ \text{d. h. } AB - ab < 2 . 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$$

$$\text{oder } (ab - P) - (AB - P),\ \text{d. h. } ab - AB < 10^{\varkappa+\lambda-n+2}.$$

Weil nun die höchste geltende Stelle sowohl von AB als auch von ab entweder vom $(\varkappa + \lambda + 1)$ten oder vom $(\varkappa + \lambda)$ten Range ist, ihre Differenz aber zufolge der vorigen Ungleichheit höchstens mit einer Ziffer vom $(\varkappa + \lambda - n + 2)$ten Range beginnen kann und, sofern n mehr als 2 beträgt, sowohl $\varkappa + \lambda$ als auch $\varkappa + \lambda + 1$ über $\varkappa + \lambda - n + 2$ hinausgeht, so beginnt die Differenz der Zahlen AB und a b mit einer Ziffer von niedrigerer Ordnung als jedes Glied dieser Differenz. Dies ist die notwendige und zureichende Bedingung dafür, dass jede der Zahlen AB und ab als ein Näherungswert der anderen angesehen werden darf. Dies vorausgesetzt erhellt aus der vorigen Ungleichheit sofort, dass $2 . 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ eine zugehörige Fehlergrenze ist.

Wenn $m = 1$ ist oder > 1 ist, so gilt dieselbe Schlussweise in Bezug auf die Produkte

$$\text{XVII}\quad (A_1 10^{\varkappa} + A_2 10^{\varkappa-1} + \ldots + A_{n+1} 10^{\varkappa-n})(B_1 10^{\lambda} + B_2 10^{\lambda-1} + \ldots + B_n 10^{\lambda-n+1}) = P' \text{ und}$$

$$\text{XVIII}\quad (A_1 10^{\varkappa} + A_2 10^{\varkappa+1} + \ldots + A_{n+m} 10^{\varkappa-n-m+1})(B_1 10^{\lambda} + B_2 10^{\lambda-1} + \ldots + B_n 10^{\lambda-n+1}) = P'',$$

aber die Fehlergrenze sinkt auf $10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ herab.

Uebrigens ist es unzweckmässig mit m über 1 hinauszugehen, da dadurch die Menge der zu berechnenden Ziffern beträchtlich, aber höchst unbeträchtlich deren Genauigkeit wächst.

Die Differenz zwischen AB und a b ist jedenfalls kleiner als die Differenz zwischen P und dem grösseren der beiden Produkte a b und AB, welches noch nicht $2 . 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ ausmacht. Also wird (cf. die Bemerkungen in §. 15 und §. 17) die Fehlergrenze des Näherungswertes a b zu AB nicht unbeträchtlich unter $2 . 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ herabsinken. Demzufolge ist sie mit wachsender Wahrscheinlichkeit ein einziffriges Vielfaches der $(\varkappa + \lambda - n + 1)$ten Stelleneinheit.

Hiernach kann man sich von dem Versuche sie womöglich unter $2 . 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ oder $10^{\varkappa+\lambda-n+2}$ herabzubringen Erfolg versprechen und dies leistet der folgende Satz:

§ 19. Wenn ein Produkt näherungsweise durch die Multiplikation der Näherungswerte seiner Faktoren berechnet wird, so wird die zugehörige Fehlergrenze gefunden, indem man den Näherungswert jedes Faktors mit dem anderen Faktor multipliziert und diese beiden Produkte addiert.

Beweis. Es sei a ein Näherungswert von A mit der Fehlergrenze α, b ein Näherungswert von B mit der Fehlergrenze β, so ist, wie bewiesen, ab im Allgemeinen ein Näherungswert von AB. Ferner ist

$$a + \alpha > A > a - \alpha,$$
$$b + \beta > B > b - \beta.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation

$$ab + (a\beta + \alpha b) + \alpha\beta > AB > ab - (a\beta + \alpha b) + \alpha\beta.$$

Rechter Hand kann nun $\alpha\beta$ ohne Bedenken weggelassen werden: denn der Ausdruck rechts wird dadurch verkleinert und mithin der Sinn der Ungleichheit verstärkt. Dagegen links kann $\alpha\beta$ nur dann gestrichen werden, wenn die dadurch herbeigeführte Verkleinerung des Ausdruckes $ab + (a\beta + \alpha b) + \alpha\beta$ nicht beträchtlich genug ist, um denselben bis zur Gleichheit mit AB herabzubringen oder gar kleiner als AB zu machen. Dies vorausgesetzt kann man aus der vorigen dreigliedrigen Ungleichheit auf die etwas einfachere dreigliedrige Ungleichheit

$$ab + (a\beta + \alpha b) > AB > ab - (a\beta + \alpha b)$$

schliessen und folgt sofort durch Anwendung von § 4 b, dass $a\beta + \alpha b$ eine Fehlergrenze des Näherungswerts ab zu AB ist.

Die Gültigkeit der Ungleichheit $ab + (a\beta + \alpha b) > AB$, auf welche es hierbei wesentlich ankommt, kann auf folgende Art dargetan werden:

Indem n als eine Zahl über 2 vorausgesetzt wird und $a_{n+1}, b_{n+1}, \alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$, einziffrige Zahlen bezeichnen, setze man

$$\text{XIX}\ \begin{cases} a = A_1 10^{\varkappa} + A_2 10^{\varkappa-1} + \ldots + A_n 10^{\varkappa-n+1} + a_{n+1} 10^{\varkappa-n};\ \alpha = \alpha_{n+1} 10^{\varkappa-n} \\ a = B_1 10^{\lambda} + B_2 10^{\lambda-1} + \ldots + B_n 10^{\lambda-n+1} + B_{n+1} 10^{\lambda-n};\ \beta = \beta_{n+1} 10^{\lambda-n}. \end{cases}$$

Indem man nun die Werte für a, b, α, β, A, B in die Ungleichheit

$$ab + (a\beta + \alpha b) + \alpha\beta > AB)$$

einsetzt und unter S die Gesammtheit aller Glieder versteht, welche ab und AB gemeinsam haben, erhält man die Ungleichheit

$$\text{XX.}\quad S + \left|\begin{array}{l} A_1 b_{n+1} + a_{n+1} B_1 \\ + A_1 \beta_{n+1} + \alpha_{n+1} B_1 \end{array}\right| 10^{\varkappa+\lambda-n} + \left|\begin{array}{l} A_2 b_{n+1} + a_{n+1} B_2 \\ + A_2 \beta_{n+1} + \alpha_{n+1} B_2 \end{array}\right| 10^{\varkappa+\lambda-n-1} \begin{array}{l} + \ldots \\ + \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \\ + \end{array} \left|\begin{array}{l} A_n b_{n+1} + a_{n+1} B_n \\ + A_n \beta_{n+1} + \alpha_{n+1} B_n \end{array}\right| 10^{\varkappa+\lambda-2n+1} + (a_{n+1} b_{n+1} + \alpha_{n+1} \beta_{n+1}) 10^{\varkappa+\lambda-2n} >$$

$$\begin{aligned} S &+ (A_1 B_{n+1} + A_{n+1} B_1) 10^{\varkappa+\lambda-n} + (A_1 B_{n+2} + A_2 B_{n+1} + A_{n+1} B_2 + A_{n+2} B_1) 10^{\varkappa+\lambda-n-1} + \ldots \\ &+ (A_1 B_{2n-1} + A_2 B_{2n-2} + \ldots + A_{n-1} B_{n+1} + A_{n+1} B_{n-1} + \ldots + A_{2n-2} B_2 + A_{2n-1} B_1) 10^{\varkappa+\lambda-2n+2} \\ &+ (A_1 B_{2n} + \ldots + A_{n-1} B_{n+2} + A_n B_{n+1} + A_{n+1} B_n + A_{n+2} B_{n-1} + \ldots + A_{2n} B_1) 10^{\varkappa+\lambda-2n+1} \\ &+ (A_1 B_{2n+1} + \ldots + A_n B_{n+2} + A_{n+1} B_{n+1} + A_{n+2} B_n + \ldots + A_{2n+1} B_1) 10^{\varkappa+\lambda-2n+1} \\ &+ (A_1 B_{2n+2} + \ldots + A_n B_{n+3} + A_{n+1} B_{n+2} + A_{n+2} B_{n+1} + A_{n+3} B_n + A_{2n+2} B_1) 10^{\varkappa+\lambda-2n-1} + \ldots + \end{aligned}$$

Durch Transposition und Vereinigung der zusammengehörigen Glieder folgt hieraus

$$\begin{aligned} \text{XXI.}\ &\big((b_{n+1} + \beta_{n+1}) 10^{\lambda-n} - (B_{n+1} 10^{\lambda-n} + B_{n+2} 10^{\lambda-n-1} + \ldots)\big)(A_1 10^{\varkappa} + A_2 10^{\varkappa-1} + \ldots + A_n 10^{\varkappa-n+1}) \\ &+ \big((a_{n+1} + \alpha_{n+1}) 10^{\varkappa-n} - (A_{n+1} 10^{\varkappa-n} + A_{n+2} 10^{\varkappa-n-2} + \ldots)\big)(B_1 10^{\lambda} + B_2 10^{\lambda-1} + \ldots + B_n 10^{\varkappa-n+1}) \\ &\qquad + (a_{n+1} b_{n+1} + \alpha_{n+1} \beta_{n+1}) 10^{\varkappa+\lambda-2n} > \\ &\qquad + A_{n+1} B_{n+1} 10^{\varkappa+\lambda-2n} + (A_{n+1} B_{n+2} + A_{n+2} B_{n+1}) 10^{\varkappa+\lambda-2n-1} \\ &\qquad + (A_{n+1} B_{n+3} + A_{n+2} B_{n+2} + A_{n+3} B_{n+1}) 10^{\varkappa-\lambda-2n-2} + \ldots \end{aligned}$$

Nun ist die Summe rechts mit Bestimmtheit kleiner als die Summe

$$81 . 10^{\varkappa+\lambda-2n} + 2.81 . 10^{\varkappa+\lambda-2n-1} + 3.81 . 10^{\varkappa+\lambda-2n-2} + \ldots$$

$$= 10^{\varkappa+\lambda-2n} . 81, \quad = 100 . 10^{\varkappa+\lambda-2n} = 10^{\varkappa+\lambda-2n+2}.$$

$$\begin{array}{r} 16{,}2 \\ 2{,}43 \\ 324 \\ .405 \\ ..486 \\ \ldots 567 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \hline 99.9999.. = 100 \end{array}$$

und da aus den Ungleichheiten $a + \alpha > A$ und $b + \beta > B$ durch Weglassung der beiden Seiten gemeinsame Glieder und Transposition sich

$$(a_{n+1} + \alpha_{n+1}) 10^{\varkappa-n} > A_{n+1} 10^{\varkappa-n} + A_{n+2} 10^{\varkappa-n-1} + A_{n+3} 10^{\varkappa-n-2} + \ldots \text{ und}$$

$$(b_{n+1} + \beta_{n+1}) 10^{\lambda-n} > B_{n+1} 10^{\lambda-n} + B_{n+2} 10^{\lambda-n-1} + B_{n+3} 10^{\lambda-n-2} + \ldots$$

ergiebt, müssen die Produkte der beiden ersten Zeilen linker Hand in XXI nicht nur positive Grössen sein, sondern auch als Vielfache von $10^{\varkappa+\lambda-n}$ grösser als diese Potenz.

Aber die Ungleichheit

$$10^{\varkappa+\lambda-n} > 10^{\varkappa+\lambda-2n+2} \text{ oder } 10^{\varkappa+\lambda-n} . \frac{1}{10^{n-2}}$$

besteht für jeden Werth von n über 2 und mithin noch stärker

$$10^{\varkappa+\lambda-n} + 10^{\varkappa+\lambda-n} > 10^{\varkappa+\lambda-2n+2}.$$

Für die beiden Potenzen $10^{\varkappa+\lambda-n}$ setze man die beiden so eben bezeichneten grösseren Produkte und für die Potenz $10^{\varkappa+\lambda-2n+2}$ die obige kleinere Summe. Dadurch geht die Ungleichheit XXI ohne die beiden Glieder der 3ten Zeile links hervor, von denen eigentlich nur das zweite in Betracht kommt. Indem man endlich beiderseits S hinzufügt und transponiert, bekommt man die Ungleichheit XX ohne das Glied $\alpha_{n+1} \beta_{n+1} 10^{\varkappa+\lambda-2n}$, d. h. es gilt die zu erweisende Ungleichheit

$$ab + (a\beta + \alpha b) > AB.$$

Wenn man a mit einer geltenden Stelle mehr als b, d. h. in der Form

$$a = A_1 10^{\kappa} + A_2 10^{\kappa-1} + \ldots + A_{n+1} 10^{\kappa-n} + a_{n+2} 10^{\kappa-n-1},\ \alpha = \alpha_{n+2} 10^{\kappa-n-1}$$

voraussetzt, so kann man die vorhergehenden Formeln auch auf diesen Fall ausdehnen, indem man $a_{n+1} = A_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{10}$ und $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_{n+2}}{10}$ setzt. Die rechte Seite der Ungleichheit XXI wird dadurch nicht geändert, die linke Seite geht aber durch eine Hebung in der zweiten Zeile in den folgenden Ausdruck über:

$$\text{XXII}\left\{\begin{aligned} &\big((b_{n+1} + \beta_{n+1}) 10^{\lambda-n} - (B_{n+1} 10^{\lambda-n} + B_{n+2} 10^{\lambda-n-1} + \ldots)\big) \\ &\qquad\qquad (A_1 10^{\kappa} + A_2 10^{\kappa-1} + \ldots + A_n 10^{\kappa-n+1}) \\ &+ \big((a_{n+2} + \alpha_{n+2}) 10^{\kappa-n-1} - (A_{n+2} 10^{\kappa-n-1} + A_{n+3} 10^{\kappa-n-2} + \ldots)\big) \\ &\qquad\qquad (B_1 10^{\lambda} + B_2 10^{\lambda-1} + \ldots + B_n 10^{\lambda-n+1}) \end{aligned}\right.$$

$$+ A_{n+1} b_{n+1} 10^{\kappa+\lambda-2n} + (a_{n+2} b_{n+1} + \alpha_{n+2} \beta_{n+1}) 10^{\kappa+\lambda-2n-1}$$

Die beiden ersten Glieder dieses Ausdruckes sind Produkte, deren zweite Faktoren als positiv sofort erkannt werden. Aber auch die ersten Faktoren sind positiv, wie aus den Ungleichheiten $a + \alpha > A$ und $b + \beta > B$ durch Weglassung der beiden Seiten gemeinsame Glieder und Transposition hervorgeht. Folglich sind auch die Produkte selbst positiv uud als Vielfache der Potenzen $10^{\kappa+\lambda-n}$ und $10^{\kappa+\lambda-n-1}$ beziehungsweise grösser als diese. Setzt man nun in der Ungleichheit

$$10^{\kappa+\lambda-n} + 10^{\kappa+\lambda-n-1} > 10^{\kappa+\lambda-2n+2} \text{ oder } 10^{\kappa+\lambda-n-1} \cdot \frac{1}{10^{n-3}},$$

welche für alle Werte von n über 3 Bestand hat, für die Potenzen linker Hand die grösseren Produkte und für die Potenz rechts die kleinere Summe, welche die rechte Seite der Ungleichheit XXI ausmacht, so kommt man auf diese Ungleichheit zurück, welche, wie vorhin, auf die zu erweisende Ungleichheit $ab + (a\beta + \alpha b) > AB$ führt.

Ganz in derselben Weise wird der Beweis erbracht, wenn a noch mehr überschüssige Glieder hat, also

$$a = A_1 10^{\kappa} + A_2 10^{\kappa-1} + \ldots + A_n 10^{\kappa-n+1} + \ldots + A_{n+m-1} 10^{\kappa-n-m+2} + a_{n+m} 10^{\kappa-n-m+1}$$

ist. Man muss dann

$$a_{n+1} = A_{n+1} + \frac{A_{n+2}}{10} + \frac{A_{n+3}}{10^2} + \ldots + \frac{a_{n+m}}{10^{m-1}},\ \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_{n+m}}{10^{m-1}}$$

setzen und wird finden, dass namentlich der erste Faktor der zweiten Zeile links in XXI durch Hebungen die Form

$$(a_{n+m} + \alpha_{n+m}) 10^{\kappa-n-m+1} - (A_{n+m} 10^{\kappa-n-m+1} + A_{n+m+1} 10^{\kappa-n-m} + \ldots)$$

annimmt.

§ 20. Wiederum nehme man an, dass a überschüssige Stellen haben könne, also

$$(1)\ a = A_1 10^{\kappa} + A_2 10^{\kappa-1} + \ldots + A_n 10^{\kappa-n+1} + A_{n+1} 10^{\kappa-n} + \ldots + A_{n+m-1} 10^{\kappa-n-m+2} + \ldots + a_{n+m} 10^{\kappa-n-m+1}$$

$$(2)\ \alpha = \alpha_{n+m} 10^{\kappa-n-m+1}$$

$$(3)\ b = B_1 10^{\lambda} + B_2 10^{\lambda-1} + \ldots + B_n 10^{\lambda-n+1} + B_{n+1} 10^{\lambda-n}$$

$$(4)\ \beta = \beta_{n+1} . 10^{\lambda-n}$$

Dies vorausgesetzt bemerke man, dass die Fehlergrenze $a\beta + \alpha b$ des Näherungswertes ab zu AB dadurch, dass sie beliebig erhöht wird, nicht aufhört eine Fehlergrenze zu bleiben. Am zweckmässigsten wird die Erhöhung durch die Verkürzung von a und b im weiteren Sinne bewerkstelligt, indem man von einem der Ungleichheitssysteme

$$(5)\ a < 10^{\kappa+1} \text{ und } b < 10^{\lambda+1},$$

$$(6)\ a < (A_1 + 1) 10^{\kappa} \text{ und } b < (B_1 + 1) 10^{\lambda},$$

$$(7)\ a < \left(A_1 + \frac{A_2+1}{10}\right) 10^{\kappa} \text{ und } b < \left(B_1 + \frac{B_2+1}{10}\right) 10^{\lambda}$$

ausgeht. Die dem ersten entsprechende Substitution von $10^{\kappa+1}$ und $10^{\lambda+1}$ für a und b ergiebt die Fehlergrenze

$$(8)\ 10^{\varkappa+1} . \beta_{n+1} . 10^{\lambda-n} + \alpha_{n+m} . 10^{\varkappa-n-m+1} . 10^{\lambda+1} = \left(\beta_{n+1} + \frac{\alpha_{n+m}}{10^{m-1}}\right) 10^{\varkappa+\lambda-n+1},$$

welche für $m = 1$ und $m = 2$, da $\beta_{n+1} < 10$ und $\alpha_{n+1} < 10$ ist, übergeht in

$$(9)\ 2 . 10^{\varkappa+\lambda-n+2}\ (m = 1)$$

$$\text{und } (10)\ 10^{\varkappa+\lambda-n+2}\ (m = 2),$$

das heisst in die Hälfte der vorigen. Dieselbe Fehlergrenze ergiebt sich für jeden über über 2 hinausgehenden Werth von m, da die Ungleichheit $\beta_{n+1} + \frac{\alpha_{n+m}}{10^{m-1}} < 10$ für wachsende Werte von m in verstärktem Sinne gilt. Folglich wird dadurch, dass der eine Faktor a eine grössere Anzahl überschüssiger Stellen vor b voraus hat, für die Genauigkeit des Resultates nichts gewonnen und nur die Rechenarbeit unnütz vergrössert. Am vortheilhaftesten ist es, wenn der eine Faktor eine geltende Stelle mehr als der andere hat, nächstdem, dass beide Faktoren eine und dieselbe Anzahl geltender Stellen haben.

Die Substitutionen (6) führen auf die Fehlergrenze

$$(11)\ (A_1 + 1) 10^{\varkappa} \beta_{n+1} 10^{\lambda-n} + \alpha_{n+m} 10^{\varkappa-n-m+1} (B_1 + 1) 10^{\lambda} = \left((A_1 + 1)\beta_{n+1} + \frac{(B_1 + 1)\alpha_{n+m}}{10^{m+1}}\right) 10^{\varkappa+\lambda-n}$$

$$\text{für } m = 1\ \left((A_1 + 1)\beta_{n+1} + (B_1 + 1)\alpha_{n+1}\right) 10^{\varkappa+\lambda-n}$$

$$\text{für } m = 2\ \left((A_1 + 1)\beta_{n+1} + \frac{(B_1 + 1)\alpha_{n+2}}{10}\right) 10^{\varkappa+\lambda-n}$$

$$\text{für } m > 2\ (A_1 + 1)\beta_{n+1} . 10^{\varkappa+\lambda-n}$$

Man hat also die Fehlergrenze jedes Faktors mit der ersten um Eins erhöhten geltenden Ziffer des anderen Faktors zu multiplizieren und beide Produkte zu addieren.

Die Resultate für $m = 2$ und $m > 2$ sind nicht sehr verschieden, da sie ein gemeinsames Glied haben, welches das eine Resultat ganz und das andere zum grossen Theil repräsentiert. Jedenfalls aber wird die Fehlergrenze dadurch, dass man dem einen Faktor eine grössere Anzahl überschüssiger Stellen giebt, auch nicht um eine einzige Stelle weiter nach links gerückt.

Die Substitutionen (71) kommen seltener zur Anwendung und ergeben die Fehlergrenze

$$(12) \left(A_1\, \beta_{n+1} + \frac{(A_{2+1})\,\beta_{n+1}}{10} + \frac{\left(B_1 + \frac{B_{2+1}}{10}\right)\alpha_{n+m}}{10^{m-1}} \right) 10^{\varkappa+\lambda-n}$$

$$\text{für } m = 1\ \left(A_1\,\beta_{n+1} + B_1\,\alpha_{n+1} + \frac{(A_{2+1})\,\beta_{n+1} + (B_{2+1})\,\alpha_{n+1}}{10}\right) 10^{\varkappa+\lambda-n}$$

$$\text{für } m = 2\ \left(A_1\,\beta_{n+1} + \frac{(A_{2+1})\,\beta_{n+1} + B_1\,\alpha_{n+2}}{10}\right) 10^{\varkappa+\lambda-n}$$

$$m = 3, 4, \ldots \text{ kommt nicht in Betracht.}$$

In der Praxis kommt dies darauf hinaus, dass man von den beiden Produkten, die sich auf die zweiten geltenden Ziffern der Faktoren beziehen, nur die Zehner in Rechnung bringt.

Nachstehende Tabelle lässt erkennen, wie weit höchstens die Unsicherheit in den einzelnen Stellen des Produktes ab hinaufgeht: alle vor der in den Tabellen bezeichneten Stelle stehenden Ziffern finden sich zuverlässig im genauen Produkte AB wieder und nur die letzte derselben kann ausnahmsweise um 1 differieren. Die Maximalformeln sind für die grössten Beträge der Koeffizienten α_{n+1}, α_{n+2} und β_{n+1} innerhalb des betrachteten Intervalles berechnet, die Maximalbeträge für die grössten Werte von A_1 und B_1.

Betrag der Koeffizienten α_{n+1}, α_{n+2}, β_{n+1}	Werte von A_1 und B_1.	Maximalformeln der Fehlergrenzen.	Maximalbetrag der Fehlergrenze an der Stelle von dem Range		
			$\varkappa+\lambda-n+2$	$\varkappa-\lambda+n+1$	$\varkappa-\lambda+n$
$10 > \alpha_{n+1} > 5$	$A_1 + B_1 > 8$	$\left(\frac{A_1+B_1+2}{10}\right) 10^{\varkappa+\lambda-n+2}$	2		
$10 > \beta_{n+1} > 0$	$A_1 + B_1 \leqq 8$		1		
$5 \geqq \alpha_{n+1} > 1$	$A_1 + B_1 > 8$	$\left(\frac{A_1+B_1}{2}+1\right) 10^{\varkappa+\lambda-n+1}$	1		
$5 \geqq \beta_{n+1} > 0$	$A_1 + B_1 \leqq 8$			5	
$1 \geqq \alpha_{n+1} > \frac{1}{2}$	$A_1 + B_1 > 8$	$(A_1+B_1+2) 10^{\varkappa+\lambda-n}$		2	
$1 \geqq \beta_{n+1} > 0$	$A_1 + B_1 \leqq 8$			1	
$\frac{1}{2} \geqq \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} > 1$	$A_1 + B_1 > 8$	$\left(\frac{A_1+B_1}{2}+1\right) 10^{\varkappa+\lambda-n}$		1	
	$A_1 + B_1 \leqq 8$				5
$10 > \alpha_{n+1} > 5$	$A_1 > 3$	$\left(A_1+1+\frac{B_1+1}{10}\right) 10^{\varkappa+\lambda-n+1}$	1,1		
$10 > \beta_{n+2} > 0$	$A_1 \leqq 3$			5	
$5 \geqq \alpha_{n+1} > 1$	$A_1 > 3$	$\left(A_1+1+\frac{B_1+1}{10}\right) 5 \,.\, 10^{\varkappa+\lambda-n}$		5.5	
$5 \geqq \beta_{n+2} > 0$	$A_1 \leqq 3$			2,5	
$1 \geqq \alpha_{n+2} > \frac{1}{2}$	$A_1 > 3$	$\left(A_1+1+\frac{B_1+1}{10}\right) 10^{\lambda+\lambda-n}$		1,1	
$1 \geqq \beta_{n+1} > 0$	$A_1 \leqq 3$				5
$\frac{1}{2} \geqq \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} > 0$	$A_1 > 3$	$\left(A_1+1+\frac{B_1+1}{10}\right) 5 \,.\, 10^{\varkappa+\lambda-n-1}$			5,5
	$A_1 \leqq 3$				2,5

Hiernach kann und wird in einer sehr grossen Anzahl von Fällen der Fehler von ab nicht aber die $(\varkappa+\lambda-n)$te Stelle herausreichen, aber im Allgemeinen auch stets in diese Stelle hineinreichen. Alle niedrigeren Stellen sind nahezu mit Gewissheit fehlerhaft und eine Rechnungsregel, welche deren Berechnung erspart, das nächstliegende Bedürfniss Diesem genügt die Regel der sogenannten verkürzten Multiplikation: das Produkt

$$ab = A_1 B_1 10^{\varkappa+\lambda} + \left|\begin{array}{l} A_1 B_2 \\ +A_2 B_1 \end{array}\right| 10^{\varkappa+\lambda-1} + \left|\begin{array}{l} A_1 B_3 \\ +A_2 B_3 \\ +A_3 B_1 \end{array}\right| 10^{\varkappa+\lambda-2} + \ldots.$$

wird bis zur $(\varkappa+\lambda-n)$ten Stelle dadurch möglichst genau hergestellt, dass zu dem Koeffizienten an dieser Stelle die Anzahl der Zehner, welche in den einzelnen Gliedern des nächst folgenden Koeffizienten

$$A_1 b_{n+1} + A_2 B_n + A_3 B_{n-1} + A_4 B_{n-2} + \ldots.$$

enthalten sind, successive hinzugefügt werden.

§. 21. Die Fehlergrenze $a\beta+\alpha b$ des Näherungswertes ab zu AB kann leicht auf mechanische Werte berechnet werden. Je nachdem nämlich die Faktoren a und b entweder beide $(n+1)$ stellige Zahlen sind oder der erste Faktor $n+2$ oder der zweite $n+1$ oder der erste Faktor $n+1$ und der zweite Faktor $n+2$ geltende Stellen hat, multipliziere man in der betreffenden Zahlenreihe

$$\begin{array}{lllll} A_1+1 & \alpha_{n+1} & B_1+1 & \beta_{n+1} & \text{oder} \\ \frac{A_1+1}{10} & \alpha_{n+2} & B_1+1 & \beta_{n+1} & \text{oder} \\ A_1+1 & \alpha_{n+1} & \frac{B_1+1}{10} & \beta_{n+2} & \end{array}$$

sowohl die beiden äusseren als auch die beiden inneren Glieder: die Summe dieser beiden Produkte ist die gesuchte auf Einheiten der $(\varkappa+\lambda-n)$ten Stelle bezogene Fehlergrenze. Hierbei kann man auch A_1+1 durch $A_1+\frac{A_2+1}{10}$ und B_1+1 durch $B_1+\frac{B_2+1}{10}$ ersetzen und von den Produkten, die sich auf die zweiten Glieder dieser Ausdrücke beziehen, nur die darin enthaltene Anzahl von Zehnern rechnen.

$A=\frac{32}{33}=0{,}9696\ldots$ $\quad \varkappa=-1 \quad A_1=9$
$B=\frac{66}{7}=9{,}428\ 571\ 428571\ldots$ $\quad \lambda=0 \quad B_1=9$
$AB=\frac{64}{7}=9{,}142857\ 142\ 857\ldots$

Man nehme $n=4$ an: so müssen a und b 5 oder 6 geltende Stellen haben und es ist $\varkappa+\lambda-n=-1+0-4=-5$,

$a=0{,}96977\ (8)$	$b=9{,}4292\ (7)$		Flgr. von ab
$10.7=70$	$10.8=80$	$70+80=150$	0,001 50
$9{,}7.7=68$	$9{,}5.8=76$	$68+76=144$	0,001 44
$a'=0{,}96978\ (9)$	$b'=9{,}4277\ (9)$		Flgr. von a′b′
$10.9=90$	$10.9=90$	$90+90=180$	0,001 80
$9{,}7.9=87$	$9{,}5.9=86$	$87+86=173$	0,001 73
$a''=0{,}96976\ (7)$	$b''=9{,}42865\ (8)$		Flgr. von a″b″
$10.8=80$	$\frac{9}{10}.7=7$	$80+7=87$	0,00087
$9{,}7.8=78$	$\frac{9{,}5}{10}.7=7$	$78+7=85$	0,00085

In der That findet man

	9,14285 | 7	9,14285 | 7	9,14285 | 7
	ab = 9,14415 | 5284	a′b′ = 9,14279 | 4906	a″b″ = 9,14352 | 76240
engere Flgr.	0,00130	0,00007	0,00068
berechn Flgr.	0,00144	0,00173	0,00085

Die zweite Art der Berechnung der Fehlergrenzen ist umständlicher und leistet meistenteils nicht viel mehr als die erste.

§ 22. Die Regel der abgekürzten Multiplikation.

Man multipliziere mit der höchsten geltenden Ziffer des Multiplikators (untern Faktors) den ganzen Multiplikandus (oberen Faktor), bringe bei der Multiplikation mit den folgenden Ziffern des Multiplikators die niedrigsten Stellen des Multiplikandus successive in Wegfall und rechne zu jedem Partialprodukte diejenige Zehnerzahl hinzu, welche dem Produkte der betreffenden Multplikationsziffer mit der zuletzt weggelassenen Ziffer des Multiplikandus zunächst liegt — hierbei zählt 5 als voller Zehner mit. Von dem Produkte endlich sind soviel Dezimalbruchstellen abzuschneiden, als die Anzahl der in beiden Faktoren vorhandenen Dezimalbruchstellen vermindert um die Anzahl der weggelassenen und etwaigen unverwandten Stellen angiebt. Sollte diese Differenz negativ ausfallen, so ist dem Produkte linker Hand die entsprechende Anzahl von Nullen anzuhängen und dahinter das Komma zu setzen oder zu denken.

In der Hauptsache besteht die abgekürzte Multiplikation in der Abwerfung der niedrigsten Stellen desjenigen Produktes, welches durch die gewöhnliche Multiplikation erhalten wird: diese Stellen kommen aber für praktische Zwecke in der Regel nicht in Betracht und sind ausserdem, wenn die Faktoren abgekürzte Dezimalzahlen sind, geradezu unrichtig. Die Methode hat also jedenfalls den Vorteil eine Menge zweckloser Rechnungen zu beseitigen.

In den nachfolgenden Beispielen sind die successive weggelassenen Stellen des Multiplikandus durch Punkte markiert und etwaige nicht verwandte Stellen in Klammern gesetzt. Wenn einzelne Stellen mit Punkten besetzt sind, so soll dadurch der dekadische Charakter der vorhergehenden Stellen kenntlich gemacht werden, was auf andere Weise nicht geschehen kann, wenn die eigentlich in diese Stellen hineingehörigen Ziffern unbekannt sind. Solche Stellen können selbstverständlich bei Ausführung der Multiplikation niemals zur Verwendung kommen.

	....	.....
50, 2 9769	50,29769	32978(000)
6 5027	6,5027	9000, 7 8
30 178614	6 × 5029769 .. 30178614	296802
2 514884 | 5	5 × 502976.... 2514885 5.9	22 7.2
10059 | 538	2 × 5029........ 10059 2.7	2 8.3
3520 | 8383	7 × 502.......... 3520 7.9	296826000000
327,07078 | 8763	327,07078	2 — (5 + 3) = — 6
	(5 + 4) — 4 = 5 Dezimalbruchstellen.	6 anzuhängende Nullen.

	.... .	...
6502, 7	6502, 7	832(.)
5029769	502976(9)	5302(...)
325135	5 × 65027 325135	4160
1300 | 54	2 × 650.......... 1300 2.2	250 3.2
585 | 243	9 × 65............ 535 9.0	2 2.8
45 | 5189	7 × 6.............. 46 7.5	44120000000
3 | 90162	4 6.6	0 — (3 + 4) = — 7
| 58524 3	32707000000	7 anzuhängende Nullen.
327070 | 78876,3	1 — (5 + 1) = — 5 Dezimalbruchstellen, d. h. 5 anzuhängende Nullen.	

§ 23. Der durch das Verfahren der abgekürzten Multiplikation zweier Dezimalzahlen im Produkte hervorgebrachte Fehler beträgt noch nicht halb soviel Einheiten der niedrigsten Stelle desselben, als die um Eins verminderte Anzahl der (horizontalen) Partialprodukte ausmacht.

Der in dem Produkte begangene Fehler ist die Summe der Fehler, welche in den einzelnen Partialprodukten sich vorfinden. Das oberste Partialprodukt, welches von der höchsten Stelle des Multiplikators herrührt, ist in allen Stellen zuverlässig und hat die Fehlergrenze 0. Das nächstfolgende Partialprodukt ist dem Bildungsgesetze seiner niedrigsten Ziffer gemäss immer eine im engeren Sinne verkürzte Dezimalzahl und jedes folgende Partialprodukt mit Sicherheit freilich nur eine im weiteren Sinne verkürzte Dezimalzahl, so jedoch, dass man mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit die engere Verkürzung anch hier als vorhanden annehmen darf. Der Beweis hierfür lässt sich auf folgende Art führen:

A sei die Ziffer in irgend einer Stelle des Multiplikators, welche niedriger sei als die zweithöchste geltende Stelle, B die Ziffer in der niedrigsten, bei der Multiplikation mit A beibehaltenen Stelle des Multiplikandus und B', B'', B''', – die darauf folgenden Ziffern. Alsdann wird die niedrigste Stelle des der Multiplikation mit A entsprechenden Partialproduktes erhalten, indem man zu AB die Zehneranzahl addiert, welche in dem Produkte AB' im Sinne der engeren Verkürzung enthalten ist, und von der Summe die Endziffer C hinschreibt. Hierbei ist allerdings der Einfluss von AB'' zunächst nicht berücksichtigt. Es sei z. B. A = 8, B' = 3, also AB' = 24, so izt zu AB wegen AB' die hierin enthaltene Zehneranzahl 2 hinzuzufügen. Aber B'' kann jede der Zahlen von 0 bis 9 sein und nur die beiden Annahmen B'' = 0, 1 ändern nichts in der veranscblagten Zehnerzahl 2. Wenn hingegen B'' einen der 8 Werte über 1 hat, so wächst das Produkt AB'' durch Hinzufügung von AB'' auf einen der 8 Werte.

25,6 26,4 27,2 28 28,8 29,6 30,4 31,2

an; die zu AB hinzutretende Zehneranzahl wächst also von 2 auf 3, d. h. die obige Endziffer C ist um 1 zu erhöhen, damit das betreffende Partialprodukt im engeren Sinne verkürzt sei.

Wenn man in ähnlicher Weise immer je 10 von den 9.10. = 900 Fällen in Betracht zieht, welche für

A = 1 2 3.... 9 , B' = 0 1 2.... 9 B'' = 0 1 2 von 9

möglich sind — A = 0 ist ausgeschlossen, weil für diesen Wert von A kein zu verzeichnendes Partialprodukt entsteht – so ergeben sich im Ganzen 164 Fälle, in welchen, wenn das auf A bezügliche Partialprodukt im engeren Sinne verkürzt sein soll, C durch C + 1 zu ersehen ist.

In Wahrheit wird die Anzahl dieser Fälle noch etwas grösser sein, weil hin und wieder auch der Einfluss der übrigen weggelassenen Stellen sich geltend machen kann. Wie aber die auf B″ folgenden Stellen besetzt sein mögen, immer wird dieser Einfluss überwogen durch den Einfluss, welchen die Erhöhung der Ziffer B″ um 1 ausübt. Hiernach untersuche man wieder zu je 10 alle nur möglichen 900 Fälle, welche den Annahmen

$$A = 1\ 2 \ldots . 9 \quad B' = 0\ 1\ 2 \ldots . 9 \quad B'' = 1\ 2\ 3 \ldots . 10$$

entsprechen, und wird 169 Fälle finden, in welchen C im Sinne der engeren Verkürzung um 1 zu erhöhen ist. Folglich wird die Anzahl der in Wirklichkeit stattfindenden Fälle von dieser Art ein wenig geringer ausfallen, weil die Annahmen

$$, B''', B'''', \ldots . . = 0\ 1\ 2 \ldots . 9$$

der Erhöhung von C etwas weniger günstig sind, als die so eben in Betracht gezogene Vergrösserung von B″ um Eins. Die näheren Details der Untersuchung ergeben sich aus den nachfolgenden beiden Tabellen:

Anzahl der Fälle, in welchen das Partialprodukt mit C nicht im Sinne der engeren Verkürzung schliesst

B″=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B′=0						1	2	3	4
1			3	7				1	3
2		5				5	8		2
3				2			4	8	1
4						8		6	
5						1		3	
6				7			5	1	8
7		5				5	1		7
8			6	2				8	6
9						8	7	6	5

10 + 9 + 18 + 28 + 27 + 36 + 36 = 164

B″=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
					2	3	4	5	0 = B′
		4	8				2	4	1
	5				5	9		3	2
			3			5	9	2	3
					9		7		4
					2		4		5
			8			6	2	9	6
	5				5	2		8	7
		7	3				9	7	8
					9	8	7	6	9

10 + 11 + 22 + 32 + 33 + 44 + 44 = 196

Bei der Berechnung der zweiten Tabelle ist 5 in den Produkten 5 15 25 35 45 nicht als voller Zehner gerechnet, weil der zweite Faktor derselben grösser angenommen ist als er eigentlich sein dürfte.

Hiernach ist die Anzahl der Fälle, in denen das mit C schliessende Partialprodukt nicht im engeren Sinne verkürzt, grösser als 164 und kleiner als 196; sie darf also als der in der Mitte befindlichen Zahl 180 mindestens nahezu gleich angesehen werden. Die engere Verkürzung findet demgemäss in etwa 720 unter je 900 Fällen statt und hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{720}{900} = \frac{4}{5}$ für sich.

Wenn man nunmehr annimmt, dass der Multiplikator α von 0 verschiedene Ziffern befasst, so erscheint das totale Produkt als die Summe von α Partialprodukten, von denen das erste die Fehlergrenze 0 hat, das zweite mit Gewissheit und die folgenden mit grosser Wahrscheinlichkeit die Fehlergrenze $\left(\frac{1}{2}\right)$ haben. Dem totalen Produkte kommt also, wie behauptet wird, die Fehlergrenze $(\alpha - 1 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)$ zu.

Die diesem Schlusse zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeiten gehen äusserst nahe in Gewissheit über, wenn man die niedrigste Stelle jedes Partialproduktes mit Rücksicht auf den etwa vorhandenen Einfluss der letzten Stelle berechnet. Diese gewöhnlich unterbleibende, sehr unerhebliche Mehrarbeit sollte im Interesse der grösstmöglichen Genauigkeit der Rechnung nicht gescheut werden.

Freilich wird dadurch nur in wenigen Fällen etwas genützt und in der weit überwiegenden Anzahl von Fällen überflüssige Mühe aufgewandt.

Obschon die Fehlergrenzen der einzelnen Partialprodukte am passendsten im absoluten Sinne genommen werden, so schliesst dies das thatsächliche Vorhandensein entgegengesetzter Fehlergrenzen um so weniger aus, da Verkürzungen im engeren Sinne ebensogut positive wie negative Fehler zur Folge haben könne. Solche Fehler müssen sich im totalen Produkte mindestens theilweise aufheben und können dessen Genauigkeit oft in unerwarteter Weise steigern.

So z. B ist in dem ersten Beispiele zu § 22 das 1ste Partialprodukt zu gross, das 3te und 4te sind zu klein; indem diese Fehler sich zum Teil ausgleichen, erhält man den Näherungswert 327,07078, welcher dem genauen Werte 327,07078 8763 sehr nahe kommt. Ja, die genauere Rechnungsregel giebt diesmal ein ungenaueres Resultat. Denn wenn man die letzte Ziffer des 3ten und 4ten Partialproduktes um je 1 erhöht, weil zu 2 . 7 der Zehner von 2 . 6 und zu 7 . 9 die Zehner von 7 . 7 hinzutreten, so erhält man 327,07080 mit der Fehlergrenze $\left(\frac{3}{2}\right) = (1{,}5)$ und dieser Näherungswert liegt lange nicht so nahe an den genauen Wert wie der vorige Näherungswert. Der Grund ist leicht ersichtlich; das 2te, 3te, 4te Partialprodukt sind alle drei zu gross genommen, die begangenen Fehler sind also gleichartig und müssen sich in der Summe verstärken.

§. 24. a) Die auf Dezimaleinheiten der niedrigsten Stelle zu beziehende Fehlergrenze eines durch abgekürzte Multiplikation berechneten Produktes setzt sich durch Addition zweier Fehlergrenzen zusammen, von denen die eine aus dem Verfahren der abgekürzten Multiplikation und die andere aus der Fehlerhaftigkeit der verwendeten Faktoren hervorgeht. Die erste jener Fehlergrenzen ist die Hälfte der um Eins verminderten Anzahl von Partialprodukten und die zweite die Summe der Produkte, welche die Multiplikation jedes Faktors, resp. seiner um 1 vermehrten höchsten geltenden Ziffer, mit der Fehlergrenze des anderen Faktors ergiebt.

Beweis. Das Produkt AB unterscheidet sich von den Produkten a b um weniger als die Fehlergrenze $a\beta + \alpha b$ angiebt (§ 19); das durch vollständige Multiplikation berechnete Produkt a b unterscheidet sich von dem durch verkürzte Multiplikation berechnete Produkt P derselben beiden Faktoren a und b um weniger als die Hälfte von der um 1 verminderten Anzahl der Partialprodukte angiebt (§ 23). Im ungünstigsten Falle sind diese beiden Fehlergrenzen gleichartig, d. h. entweder liegt AB oberhalb a b und a b oberhalb P oder AB liegt unterhalb a b und a b unterhalb P. Alsdann verstärken sich beide Fehlergrenzen und AB ist von P um weniger, als deren Summe ausmacht, entfernt. Wenn die beiden Fehlergrenzen ungleichartig sind, d. h. entweder AB oberhalb a b und a b unterhalb P oder AB unterhalb a b und a b oberhalb P liegt, so werden dadurch AB und P einander genähert und AB ist von P um weniger, als die Differenz der beiden Fehlergrenzen ausmacht, verschieden. Um so mehr muss der in Rede stehende Unterschied unterhalb der Summe derselben Fehlergrenzen sich befinden.

b) Die verkürzte Multiplikation von Näherungswerten, deren Genauigkeit bei 3 geltenden Stellen nur bis zur zweiten reicht, wird am besten vermieden. Denn die Zahl n der geltenden Stellen in denen a und A, b und B übereinstimmen, hat alsdann der Wert 2: dass dieselbe über 2 hinausgehe, ist die Bedingung dafür, dass a b unter allen Umständen ein Näherungswert von AB wird (§. 17 und 18).

In der Regel, namentlich bei kleinen Fehlergrenzen und bei Zweiziffrigkeit des Produktes A_2 B_1 der beiden höchsten geltenden Stellen von a und b wird dies doch eintreten (§. 15) und ist alsdann auch $a\beta + \alpha b$ eine Fehlergrenze des Näherungswertes a b zu AB.

Unvollständige Zahlen mit weniger als drei geltenden Stellen verkürzt zu multiplizieren unterliegt selbstverständlich noch grösseren Bedenken und sollte eigentlich gar nicht geschehen.

c) Sobald die Genauigkeit der näherungsweise ausgedrückten Faktoren eines zu berechnenden Produktes mindestens bis zur 3ten geltenden Stelle reicht, kann die abgekürzte Multiplikation eintreten. Hierbei ist derjenige Faktor, der die wenigsten geltenden Ziffern hat, als oberer Faktor (Multiplikandus) zu verwenden und der andere, der in die Stelle des unteren Faktors (Multiplikator) kommt, soweit zu verkürzen, dass er eine geltende Stelle mehr hat als der obere. Sollten beide Faktoren gleich viel geltende Stellen zählen, so ist die Ordnung, in welcher sie multipliziert werden, im Allgemeinen gleichgültig und nur etwa in dem Falle, wo der eine Faktor unter seinen geltenden Ziffern mehr Nullen zählt als der andere, dem ersteren die untere Stelle zuzuweisen.

Die Nötigung, die überschüssigen Stellen des einen Faktors a auf eine einzige zu beschränken, folgt aus § 20. Dass gerade dieser Faktor zum untern und der andere zum oberen gemacht werden muss, ergiebt sich aus der Betrachtung der Schlussstelle des so berechneten Produktes, welche, wie das erste Partialprodukt $A_1\, 10^{\varkappa}\, (B_1\, 10^{\lambda} + B_2\, 10^{\lambda-1} + \ldots + b_{n+1}\, 10^{\lambda-n})$ erkennen lässt, von $(\varkappa + \lambda - n)$ ten Range ist. Gerade diese Stelle aber ist, wiederum nach §. 20, die niedrigste, um deren Kenntniss es sich handelt. Bei der umgekehrten Anordnung der Multiplikation würde man auch noch die $(\varkappa + \lambda - n - 1)$te Stelle erhalten, deren Berechnung eine ganz unnütze Mühe verursacht.

Wenn die Anzahl der geltenden Stellen in beiden Faktoren gleich ist, der eine aber in diesen Stellen mehr Nullen hat als der andere, so wird dadurch, dass ersterem die untere Stelle zugewiesen wird, die Anzahl der Partialprodukte und demzufolge auch (§ 23) der durch das Verfahren der verkürzten Multiplikation bedingte Fehler vermindert.

d) Wenn der eine Faktor eine genaue Dezimalzahl ist, so muss man den andern unverkürzt lassen und demjenigen von beiden Faktoren die untere Stelle geben, der die wenigsten von 0 verschiedenen geltenden Ziffern zählt.

Denn die durch die etwaige Ungenauigkeit nur eines Faktors bedingte Fehlergrenze des Produktes bleibt für jede Anordnung der Multiplikation eine und dieselbe, dagegen der von dem verkürzten Verfahren herrührende Fehler wird verkleinert (§ 23), wenn die Zahl der von 0 verschiedenen geltenden Stellen des unteren Faktors abnimmt.

e) Wenn ein Produkt bis auf eine bestimmte Anzahl geltender Stellen, welche m sein möge, genau berechnet werden soll, so ist es mindestens notwendig und im Allgemeinen auch hinreichend dasselbe auf eine Stelle weiter zu berechnen.

Jedes verkürzt berechnete Produkt hat nämlich ebenso viel geltende Stellen, wie der Multiplikandus (obere Faktor) oder eine mehr. Soll es $m + 1$ stellig sein, so muss der obere Faktor auf m und der untere auf $m + 1$, oder der obere auf $m + 1$ und der untere auf $m + 2$ oder beide Faktoren auf m, resp. $m + 1$ geltende Stellen gebracht werden können. Ist dieses nach der Zahl der verfügbaren Stellen ausführbar, so bestimme man zunächst die Fehlergrenze und gehe nur, wenn dieselbe hinlänglich klein ausfällt, zur Berechnung des Produktes über. Je nachdem es sich um ein bis auf m geltende Stellen genaues Produkt im Sinne der engeren oder weiteren Verkürzung handelt, kann die Fehlergrenze bis zu 5 oder 9 Einheiten der $(m + 1)$ten geltenden Stelle aufsteigen, dem Produkte aber sind alle $m + 1$ Stellen zu belassen, weil seine Verkürzung auf m Stellen die Genauigkeit beeinträchtigen könnte.

Sollte die Fehlergrenze des Produktes ein zweiziffriges Vielfaches der niedrigsten Stelleneinheit ausmachen, so muss jedem Faktor je eine Stelle zugesetzt werden: das Produkt erlangt hierdurch $m + 2$ geltende Stellen und hat auf $m + 1$ Stellen verkürzt zur Fehlergrenze die Summe des dieser Verkürzung entsprechenden Fehlers und der früheren Fehlergrenze.

Bei Produkten, welche mehr als zwei Faktoren befassen, wird man am besten thun die Rechnung von vorn herein auf zwei Ueberstellen anzulegen.

f) Wenn ein Produkt bis auf eine bestimmte Stelle genau berechnet werden soll, so stelle man durch eine Ueberschlagsrechnung, bei welcher die Faktoren auf ihre höchste geltende Stellen verkürzt werden, die Ordnungszahl der höchsten geltenden Stelle des Produktes fest und zähle die Anzahl der Stellen von dieser höchsten geltenden Stelle bis zu der bestimmten Stelle. Bis auf die gleiche Anzahl von geltenden Stellen genau ist das Produkt zu berechnen und zu diesem Zweck zu verfahren, wie unter e) gezeigt wurde.

g) Wenn beide Faktoren eines Produktes zu verkürzen sind und verkürzt werden können, so setzt man am besten denjenigen Faktor unten hin, dessen höchste geltende Ziffer den kleineren Wert hat und giebt ihm zugleich eine geltende Stelle mehr als dem andern.

Beispiel 1. $a = 8{,}201509 \left(\frac{1}{2}\right)$ $b = 9{,}80767 \left(\frac{1}{2}\right)$ $ab = 80{,}43769$ (7)

$$(8+1)\cdot\frac{1}{2}+\frac{9+1}{10}\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=7 \qquad \begin{array}{r} 7 \\ \hline 80{,}43776 \\ 80{,}43762 \\ ab = 80{,}437\ldots. \end{array}$$

Beispiel 2. $a = 0{,}046709825$ $\qquad b = 0{,}009387251.$

Das Produkt ab soll bis auf die 6te Dezimalbruchstelle genau berechnet werden. Ueberschläglich ist es $0{,}05 \cdot 0{,}009 = 0{,}00045$; also fängt es mit der 4ten Stelle nach dem Komma an. Von der 4ten Stelle nach dem Komma bis zur 6ten Stelle nach dem Komma sind 3 geltende Stellen. Um dieselben einigermassen sicher zu stellen, rechne man noch eine Stelle weiter und gebe dem Produkt 4 geltende Stellen, was am passendsten dadurch geschieht (cf. unter g) dieses §.), dass man a zum unteren Faktor mit 4 und b zum oberen Faktor mit 3 geltenden Stellen macht. Indessen zufolge der zufälligen Beschaffenheit von a ist es diesmal noch zweckmässiger umgekehrt a als oberen Faktor mit 3 und b als unteren Faktor mit 4 geltenden Stellen hinzuschreiben.

$a = 0{,}04671\ (0{,}02)$ $\quad b = 0{,}00939\ (0{,}3)$ $\quad$ oder $\quad a = 0{,}0467\ (0{,}1)$ $\quad b = 0{,}009387\ (0{,}3)$

$$(4+1)\,0{,}3+\frac{9+1}{10}\cdot 0{,}02+3\cdot\frac{1}{2}=3 \qquad \frac{4+1}{10}\cdot 0{,}3+(9+1)\cdot 0{,}1+3\cdot\frac{1}{2}=2{,}7$$

Beide Fehlergrenzen verbürgen ein hinlänglich genaues Produkt.

$$\begin{array}{r} 0{,}00\dot{9}\dot{3}\dot{9} \\ 0{,}04671 \\ \hline 3756 \\ 563 \\ 66 \\ 1 \\ \hline 0{,}0004386\ (3) \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}0\dot{4}\dot{6}\dot{7} \\ 0{,}009387 \\ \hline 4203 \\ 140 \\ 37 \\ 3 \\ \hline 0{,}0004383\ (2{,}7) \end{array} \qquad \begin{array}{r} ab = 0{,}0004386 \\ 3 \\ \hline 4389 \\ 4383 \\ ab = 0{,}000438\ldots. \end{array} \qquad \begin{array}{r} ba = 0{,}0004383 \\ 27 \\ \hline 43857 \\ 43803 \\ ba = 0{,}000438\ldots. \end{array}$$

Beispiel 3. Die Potenz $a^5 = 38{,}756098^5$ bis auf die Stelle der Zehntausende genau zu berechnen.

Die Potenz $40^5 = 102400000$ hat 9 ganze Stellen und die Potenz 38^5 ersichtlich eine weniger, also nur 8 ganze Stellen. Von der 8ten Stelle vor dem Komma bis zur 5ten Stelle vor dem Komma sind 4 geltende Stellen und zunächst wird zuzusehen sein, ob dieselben hinlänglich sicher gestellt sind, wenn man das Produkt bis auf 6 geltende Stellen ausrechnet, also den Faktoren zwei Ueberstellen giebt.

Da $a^5 = a^2 \cdot a^3$ ist, so hat man, um die Fehlerrechnung bis zu Ende durchführen zu können, die Ueberschlagswerte von a^2 und a^3 nötig. a^2 überschläglich $40^2 = 1\ldots,$.
a^3 überschläglich $38^3 = (40-2)^3 = 64000 - 9600 = 5\ldots,$.

Dies vorausgesetzt nimmt der Fehlerkalkül folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{lll} a = 38{,}756\ (0{,}1) & a^2 = 1\ldots,\ldots\ (2{,}9) & a^3 = 5\ldots,\ (14{,}2) \\ a = 38{,}7561\ (0{,}02) & a\ = 38{,}75610\ (0{,}2) & a^2 = 1\ldots,\ (2{,}9) \\ 4\cdot 0{,}1+\frac{4}{10}\cdot 0{,}02+\frac{5}{2}=2{,}9 & 4\cdot 2{,}9+\frac{2}{10}\cdot 0{,}2+\frac{5}{2}=14{,}2 & 2\cdot 14{,}2+6\cdot 2{,}9+\frac{5}{2}=48 \end{array}$$

Da die Fehlergrenze des Endproduktes 48 ist, so kann dessen vorletzte Stelle noch nicht um 5 Einheiten zu hoch oder zu niedrig sein: die drittletzte Stelle, welche die Stelle der Zehntausende ist, erscheint hiernach im Sinne der engeren Verkürzung sicher gestellt. Zugleich erkennt man, dass bei der dritten Multiplikation sich die Gleichstelligkeit beider Faktoren nicht vermeiden lässt, und dies kommt auch sonst sehr häufig vor. Bei der wirklichen Ausrechnung zeigt sich, dass die letzte Fehlergrenze in Folge der besonderen Beschaffenheit von a^2 etwas unter 48 herabgeht.

. . . .	. . . . .	58212,9 (14,2)	$a^5 = 874375$ . . , . (47)
38,756	38,7561 (0,02)	1502,03 (2,9)	47
38,7561	1502,03 (2,9)	582129	422
116268	387561	291065	328
31005	193781	1164	
2713	775	17	
194	12	874375 . . , .	$a^5 = 874$ . . . . . , .
23	$a^3 = 58212{,}9$ (14,2)	$2 . 14{,}2 + 6 . 2{,}9 + \frac{3}{2} = 47$	auf 4 geltende Stellen verkürzt:
0	$2 . 0{,}02 + 4 . 2{,}9 + \frac{5}{2} = 14{,}2$		$a^5 = 8744$ . . . . , . (0,7),
$a^2 = 1502{,}03$			denn $0{,}25 + 0{,}47 = 0{,}72$.

Rücksichtlich der Stelle der Zehntausende bleibt es immer noch unsicher, ob darin 4 oder 3 stehen müsse: dennoch ist der Näherungswert 874375 . . , . . ., der auf 87438 . . . , . . reducirt werden kann, bis auf die Stelle der Zehntausende im Sinne der engeren Verkürzung genau.

Wenn die noch bestehende Ungewissheit in Betreff der Stelle der Zehntausende gehoben werden soll, so bleibt nichts übrig als die Rechnung auch mit der 3ten Ueberstelle vorzunehmen. Zufolge der Beschaffenheit von a^2, welches ein Paar Nullen unter seinen geltenden Ziffern und vor allem eine kleine Anfangsziffer hat, empfiehlt es sich der Berechnung die Formel $a^5 = a^2 . a . a^2$ zu Grunde zu legen. Dieselbe kann, wie in allen Fällen, wo es sich nur um wenige Multiplikation handelt, ohne vorhergehenden Fehlerkalkül angestellt werden, weil die grösste Wahrscheinlichkeit den beabsichtigten Erfolg zu erreichen von vorn herein vorhanden ist, und in diesem Sinne könnte man selbst von jeder Bestimmung der Fehlergrenze absehen. Indessen ist dieselbe unerlässlich, wenn man Gewissheit über die Beschaffenheit des Endproduktes sich verschaffen will, und wird am passendsten nach jeder Einzelmultiplikation bewerkstelligt.

. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	
38,7561 (0,02)	38,75610 (0,2)	$a^3 = 58213{,}05$ (13,2)	$a^5 = 8743811$. , . (38)
38,7561 (0,02)	1502,036 (2,7)	$a^2 = 1502{,}036$ (2,7)	38
1162683	3875610	5821305	849
310049	1937805	2910653	773
27129	7751	11643	$a^5 = 8743$ . . . . , .
1938	116	175	auf 6 geltende Stellen
233	23	35	verkürzt:
4	58213,05 (13,2)	8743811 . . , . (38)	$a^5 = 874381$ . . , . (3,9),
$a^2 = 1502{,}036$ (2,7)	$2 . 0{,}2 + 4 . 2{,}7 + \frac{4}{2} = 13{,}2$	$1{,}5 . 13{,}2 + 6 . 2{,}7 + \frac{4}{2} = 38$	dann $0{,}1 + 3{,}8 = 3{,}9$.
$4 . 0{,}02 + 4 . 0{,}02 + \frac{5}{2} = 2{,}7$		19,8	

Die Stelle der Zehntausende wird also mit 3 ausgefüllt. Ausserdem ist noch die Gewissheit gewonnen, dass der Näherungswert 874381 . . , , für a^5 im Sinne der engeren Verkürzung bis auf die Stelle der Tausende genau ausfällt; denn die Eins in der Stelle der Hunderte ist noch nicht um 4 von der genauen Ziffer verschieden, welche dort stehen müsste.

Bericht

über das Schuljahr von Ostern 1881 bis Ostern 1882.

I. Chronik der Schule.

Kurz nach Beginn des Schuljahres erkrankte der ordentliche Lehrer Rieder und musste bis zum Schlusse desselben vertreten werden, in der ersten Zeit durch das Lehrerkollegium, darauf durch den Lehrer Dill an der hiesigen Volksschule, zuletzt durch den Kandidaten des höheren Schulamtes Kreutzberger. Mit dem ersten April dieses Jahres tritt er nach 45jähriger amtlicher Wirksamkeit in den wohl verdienten Ruhestand. Für das Wintersemester erhielt der ordentliche Lehrer Korell Urlaub, um sich an der Zeichnenakademie in Königsberg die Qualifikation für den Zeichnenunterricht an höheren Schulen zu erwerben, seine Vertretung wurde dem Lehrer Dill übertragen. Letzterem, wie dem Kandidaten Kreutzberger spricht der Unterzeichnete für die wertvolle Hülfe, mit welcher sie während ihrer stellvertretenden Thätigkeit dem Lehrerkollegium zur Seite gestanden haben, auch an dieser Stelle seinen besten Dank aus.

Der Gesundheitszustand von Lehrern und Schülern war im Ganzen befriedigend, nur in den unteren Klassen wurde in den Monaten Januar und Februar leider eine übergrosse Anzahl von Schülern durch Erkältungskrankheiten und eine Masernepidemie am Schulbesuche verhindert. Durch Krankheit, resp. notwendige Beurlaubungen wurden von der Wahrnehmung ihrer Lektionen abgehalten:

der unterzeichnete Rektor 5 Tage lang,
der Lehrer Dr. Müller 2 „ „
„ „ Rohde 6 „ „
„ „ Capeller 2 „ „

Am 29. Mai, dem Sonntage Exaudi, fand in der hiesigen altstädtischen Kirche die Einsegnung der Konfirmanden statt und am darauf folgenden Montag die gemeinsame Kommunion von Lehrern und Schülern der Anstalt.

An Stelle des allgemeinen Schulfestes erfolgte eine Turnfahrt der Sekunda nach Karalene und ein Ausflug der Klassen Tertia, Quarta, Quinta nach Kallnen.

Am 19. September des vorigen und am 20. März dieses Jahres wurde unter dem Vorsitze des Herrn Geheimen Regierungs- und Provinzial-Schulrats Dr. Schrader resp. des Herrn Regierungsrates Risch die beiden Abiturientenexamina der Anstalt abgehalten, über welche die näheren Angaben weiter unten folgen.

Am 2. September wurde zur Feier des Sedantages ein öffentlicher Aktus veranstaltet; Herr Dr. Müller hielt die Festrede über die Verdienste, welche sich die Kurfürsten aus dem Hause Hohenzollern um Deutschland erworben haben.

Am 22. März fand zur Feier des Geburtstages unseres allergnädigsten Kaisers und Herrn ein öffentlicher Aktus statt, die Festrede hatte Herr Rohde übernommen, welcher über die Verdienste des Höchstseligen Königs Friedrich Wilhelm IV. sprach.

Von der äussersten Wichtigkeit für die höhere Bürgerschule ist die mit dem neuen Schuljahre erfolgende Einführung des sogenannten Normaletats und die voraussichtliche Zuerkennung des Rechtes, dass sie ihren Obersekundanern auch ohne Ablegung eines Examens das Zeugniss der wissenschaftlichen Qualifikation für den einjährig-freiwilligen Militairdienst ausstellen darf. Die Entwickelung der Schule in diesem Sinne hat der Unterzeichnete beharrlich angestrebt und in der öffentlichen Meinung zur Anerkennung gebracht. Jedoch nur den unausgesetzten Bemühungen des Königlichen Provinzial-Schulkollegiums ist nach fast zweijährigen Verhandlungen der in letzter Stunde erreichte Erfolg zu danken. Der Bestand der Anstalt ist nunmehr äusserlich sicher gestellt: das Lehrerkollegium wird mit derselben treuen Hingabe, wie bisher, aber mit vermehrter Freudigkeit an dem innerlichen Aufbau der Schule arbeiten und dadurch der Stadtgemeinde das Aequivalent für den erhöhten Aufwand an Geldmitteln bieten.

Die öffentliche Prüfung sämmtlicher Schüler wird am 31sten März abgehalten und am Sonnabend darauf die Verteilung der Censuren erfolgen. Der Beginn des neuen Schuljahres ist auf

Montag den 17. April 1882

angesetzt.

2. Amtliche Verfügungen von allgemeinem Interesse.

1) 29. März 1881. Das Centralblatt für die gesammte Unterrichtsverwaltung ist für das Archiv jeder Anstalt zu halten.

2) 7. April 1881. Venns „deutsche Aufsätze“ sind von der Einführung an höheren Schulen und der Anschaffung für die Bibliotheken derselben ausgeschlossen.

3) 25. April 1881. Die feste Anstellung der Kandidaten Capeller und Rohde zum 1. April 1881 beziehungsweise mit 2700 und 2400 M. Gehalt wird genehmigt.

4) 27. April 1881. In Bezug auf die Schreibweise mehrstelliger Zahlen wird der Ministerialbeschluss, dass das Komma ausschliesslich für die Abtrennung der Dezimalstellen von der Einerstelle anzuwenden und die Abteilung mehrziffriger Zahlen durch die Anordnung derselben in Gruppen zu je drei zu bewirken ist, zur Nachachtung mitgeteilt.

5) 17. September 1881. Bei der Beschäftigung von Probekandidaten ist es thunlichst zu vermeiden denselben eine grössere Anzahl von Lektionen zuzuteilen.

6) 6. October 1881. Dr. Berthold Beneke's Werk: „Fische, Fischerei und Fischzucht“ wird zur Anschaffung für Anstaltsbibliotheken empfohlen.

7) 24. October 1881. Die üblichsten Choralmelodien sind in dem Gesangunterrichte an höheren Schulen sicher und rein einzuüben.

8) 19. Nov. 1881. Die Jahreskurse und die dadurch bedingten jährlichen Versetzungen sind streng einzuhalten.

9) 12. Januar 1882. Die Einführung der deutschen Lesebücher von Hopf und Paulsiek in Octava, Septima, Sexta, Quinta, Quarta wird genehmigt.

3. Lehrapparat.

Bibliothek und Sammlungen sind nach Massgabe der verfügbaren Mittel vervollständigt und erweitert worden.

4. Lehrverfassung.

Der ausführliche Lehrplan ist im vorigen Programm mitgeteilt und in diesem Schuljahre unverändert beibehalten worden. Demgemäss mögen blos die Themata zu den deutschen Aufsätzen in Sekunda angemerkt werden:

1) Thu, was du kannst, und lass das andere dem, der's kann; zu jedem ganzen Werk gehört ein ganzer Mann.

2) Die Undankbarkeit der Griechen gegen ihre grossen Männer.

3) Die Folgen der Kreuzzüge (Probearbeit).

4) Des Lebens ungemischte Freude ward keinen Sterblichen zu teil.

5) Albas Monolog im vierten Aufzuge des Göthe'schen Egmont, eine Umsetzung in fünffüssigen Jamben.

6) Egmonts Monolog am Schlusse des Göthe'schen Trauerspieles in fünffüssige Jamben umgesetzt. (Probearbeit).

7) Erinnerung und Hoffnung, zwei unentbehrliche Begleiter im Leben.

8) Welchen Nutzen und welche Annehmlichkeiten gewährt uns die Schifffahrt.

9) Nicht an die Güter hänge dein Herz, die das Leben vergänglich zieren; wer besitzt, der lerne verlieren; wer im Glück ist, lerne den Schmerz. (Probearbeit).

10) Die Fabel des Kleist'schen Stückes: „der Prinz von Homburg“.

11) Lasst uns besser werden, gleich wird's besser sein.

12) Der Monolog der Regentin in Göthes Egmont (Umsetzung in fünffüssige Jamben, Probearbeit).

5. Tabellarische Uebersicht des Lehrplanes und der Verteilung der Lektionen unter die Lehrer während des Wintersemesters 1881/82.

	Secunda. Ord.: Dr. Schwarz.	Tertia. Ord.: Capeller.	Quarta. Ord.: Dr. Müller.	Quinta. Ord.: Rohde.	Sexta. Ord.: Kreutzberger.	Erste Vorclasse. Ord.: Puschke.	Zweite Vorclasse. Ord.: Klein.	Wöchentliche Stundenzahl.
Dr. Schwarz.	3 Deutsch. 6 Mathematik.	6 Mathematik.						15 St.
Dr. Müller.	2 Physik. 2 Chemie. 1 Naturgeschichte.	1 Physik. 2 Naturgeschichte. (Chemie.)	2 Naturgeschichte. 5 Mathematik. 2 Rechnen.	4 Rechnen. 2 Naturgeschichte.				23 St.
Capeller.	4 Französisch. 3 Englisch.	4 Französisch. 4 Englisch.	4 Französisch.	5 Französisch				24 St.
Rohde.	2 Religion. 2 Geschichte. 1 Geographie.	2 Religion. 2 Geschichte. 1 Geographie.	2 Religion.	3 Religion. 6 Lateinisch.	3 Religion.			24 St.
Jordan.		3 Deutsch.	3 Deutsch. 2 Geschichte. 2 Geographie.	4 Deutsch. 2 Geschichte. 2 Geographie.	1 Geschichte. 2 Geographie.			21 St.
Kreutzberger.	4 Lateinisch.	5 Lateinisch.	6 Lateinisch.		8 Lateinisch.			23 St.
Puschke.	2 Singen combinirt.				6 Rechnen. 2 Naturgeschichte. 2 Singen.	7 Deutsch. 7 Rechnen. 2 Geographie. 1 Singen combinirt.		29 St
Klein.					4 Deutsch.	4 Schreiben.	8 Deutsch. 1 Anschauung. 5 Rechnen. 4 Schreiben.	26 St
Dill.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen. 2 Schreiben.	2 Zeichnen. 2 Schreiben.	2 Zeichnen. 2 Schreiben.	3 Religion. 2 Anschauung.	3 Religion.	24 St
Wöchentlich	34 St.	34 St.	34 St.	33 St.	32 St.	26 St.	22 St.	

Der Turnunterricht wurde während des Sommers 2 mal wöchentlich in je 3 Stunden und in 2 Abtheilungen erteilt.

6. Statistisches.

Die Schülerfrequenz in dem abgelaufenen Schuljahre erhellt aus folgender Zusammenstellung:

Zahl der Schüler in	Sekunda	Tertia	Quarta	Quinta	Sexta	Septima	Oktava
nach Ostern	17	22	41	49	46	50	21
nach Michaelis	17	21	38	46	49	52	21

Hiernach zählte die höhere Bürgerschule	im Sommer	175	Schüler, unter denen	49	Auswärtige waren;
„ „ „ „ „	im Winter	169	„ „ „	50	„ „
„ „ die Vorschule	im Sommer	71	„ „ „	7	„ „
„ „ „ „	im Winter	73	„ „ „	9	„ „

7. Abiturientenexamen.

Für den Michaelistermin 1881 hatte sich nur 1 Abiturient, Emil Brillat, gemeldet, welcher das Zeugniss der Reife zur Prima einer Realschule erster Ordnung mit dem Prädikate „genügend bestanden“ erhielt.

Die Zahl der Meldungen für den Ostertermin 1882 betrug 3; allen dreien Examinanden wurde das Zeugniss der Reife zugesprochen, zweien mit dem Prädikat „genügend“ und einem mit dem Prädikat „gut bestanden“.

Für den Michaelstermin war das deutsche Thema: „Erinnerung und Hoffnung, zwei unentbehrliche Begleiter im Leben“; für den Ostertermin: „Wie lässt sich die Ueberlegenheit Europas über die andern Erdtheile erklären?“

Die mathematischen Aufgaben für beide Termine waren:

1) Jemand gewinnt bei einer Lieferung $12\frac{1}{2}$ %, spekuliert mit der erlangten Summe Geldes unglücklich, so dass er $8\frac{1}{3}$ % verliert, ist aber doch im Stande mit dem Reste des ihm gebliebenen Kapitales eine in 12 Jahren 6 Monaten fällige Schuld von 1 389850 M. mit $4\frac{4}{5}$ % Rabatt zu bezahlen. Welches Kapital hat er bei der Lieferung angelegt?

2) Jemand lässt einen Brunnen graben und zahlt für das erste Meter 5 M., für jedes folgende Meter 50 Pf. mehr als für das vorhergehende. Wie tief wird der Brunnen, wenn er im Ganzen 590 M. kosten soll?

3) Aus der Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, dessen grössere Kathet die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und der kleineren Kathete ist.

4) In eine Kugel mit dem Radius r sei ein Cylinder konstruiert, dessen Axenschnitt ein Quadrat ist. Wie gross sind die 4 Stücke, in welche die Kugel dadurch zerfällt?

5) Ein Kapitalist hat 64000 M. in einem Geschäfte, welches mit 15 % Gewinn arbeitet, angelegt, überlässt aber den Geschäftsinhaber für dessen Mühe jährlich $16\frac{2}{3}$ % des Gewinnes. Zu wie viel Prozent verzinst sich sein Geschäftsanteil?

6) In einer arithmetischen Reihe von 20 Gliedern ist die Summe aller Glieder gleich 590, die Summe der Quadrate der beiden mittleren Glieder gleich 1745. Wie gross ist das erste Glied und die Differenz?

7) Ein Dreieck aus $h_a + h_b$, α, γ zu konstruieren.

8) Den Radius ϱ des der Kathet BC$=$a cm angeschriebenen Striches zu berechnen, wenn der dieser Kathete anliegende spitze Winkel β gegeben ist. Zahlenrechnung für $\varrho = 2{,}5359$ und $\beta = 30°$.

Die persönlichen Verhältnisse der Abiturienten erhellen aus folgender Zusammenstellung:

Vor- und Zuname des Abiturienten.	Geburtsort.	Alter in Jahren.	Religion.	Name und Stand des Vaters.	Wie viel Jahre. in der Schule.	in Secunda.	Gewählter Beruf.	Wie bestanden.
				Michaelis 1881.				
Brillat, Adolf Emil	Stallupönen	$19\frac{1}{2}$	ev.	Friedr. Brillat, Gerichtsexekutor	$9\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	Militärdienst	genügend.
				Ostern 1882.				
Dumont, Otto	Gumbinnen	$16\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	ev.	Ludwig Dumont, Händler	8	2	Kaufmännischer Beruf	genügend.
Keil, Max	Pietrellen, Kirchspieles Buddern, Kreises Angerburg	$19\frac{1}{2}\frac{1}{2}$	ev.	Ferdinand Keil, Lehrer	5	2	Bautechniker	genügend.
Schweiger, Otto	Goldap	$18\frac{1}{2}$	ev.	W. Schweiger, Grundbesitzer	2	2	Prima einer Realschule erster Ordnung	gut.

8. An die Eltern unserer Schüler.

Zur Vermeidung nachteiliger Missverständnisse sei bemerkt, dass die Zeit unmittelbar nach Ostern als der Beginn des Schuljahres die zum Eintritt in die Schule geeignetste Zeit ist, während zu Michaelis im Interesse des Unterrichts Receptionen weniger wünschenswert sind.

Die Aufnahme in die Elementarklassen der Anstalt kann in der Regel nicht vor dem vollendeten 6. Lebensjahre, der Eintritt in die Sexta nicht vor dem vollendeten 9. Lebensjahre erfolgen. Für die Aufnahme in die unterste Klasse der Vorschule sind Vorkenntnisse weder erforderlich noch wünschenswert, die zum Eintritt in die Sexta notwendigen elementaren Kenntnisse und Fertigkeiten sind: Geläufigkeit im Lesen deutscher und lateinischer Druckschrift, eine leserliche und reinliche Handschrift, Fertigkeit Diktiertes ohne grobe orthographische Fehler nachzuschreiben, Sicherheit in den vier Grundrechnungsarten mit unbenannten und gleichbenannten Zahlen, einige Bekanntschaft mit den Geschichten des alten und neuen Testaments, sowie mit Bibelsprüchen und Liederversen.

Solche Schüler, welche nach Alter und Vorkenntnissen in eine höhere Classe als Sexta einzutreten wünschen, haben ein Abgangszeugniss der bisher besuchten Schule vorzulegen und durch dieses dasjenige Maass von Kenntnissen nachzuweisen, welches sie befähigt mit den länger auf der Schule unterrichteten Schülern gleichen Schritt zu halten.

Auswärtige Schüler dürfen ihre Wohnung nur mit Vorwissen und nach vorher eingeholter Genehmigung des Rektors nehmen und verändern. Gelegenheit zu passenden Pensionen ist sowol in respectabeln Bürgerhäusern, wie auch bei Lehrern der Anstalt hinlänglich geboten.

Um einem weit verbreitetem Irrtume zu begegnen wird hiermit ausdrücklich erklärt, dass der Kursus der ersten Vorklasse ein zweijähriger ist und dass nur ältere oder besonders begabte junge Schüler denselben mit einem Jahre sich aneignen können. Dem entsprechend findet zu Ostern jedes Jahres eine Versetzung aus der untern Abteilung in die obere und aus der oberen nach Sexta statt. Zweijährig ist auch noch der Kursus in Tertia und Sekunda, in allen übrigen Klassen ist er einjährig.

Alle aufzunehmenden Schüler müssen ein Impfattest mitbringen oder, wenn sie das zwölfte Lebensjahr überschritten haben, den Nachweis der Revaccination liefern.

Die Aufnahmeprüfung findet Freitag und Sonnabend am 14. und 15. April von 9 bis 1 Uhr Vormittags in der Amtswohnung des designierten Nachfolgers des Unterzeichneten, Herrn Dr. Küsel, statt.

Mit dem 1. April d. J. scheide ich nach zehnjähriger Wirksamkeit aus meiner hiesigen amtlichen Stellung aus. Schwer wird mir die Trennung von meinen Schülern, die mir immerdar willig entgegen gekommen sind, welchen Selbständigkeit des Denkens, Festigkeit des dem Guten zugewandten Willen, patriotischen und religiösen Sinn einzupflanzen ich mit aller Kraft bemüht war. Was hiervon während meiner Amtsthätigkeit erreicht worden ist, das ist, ich erkenne es gerne an, hauptsächlich das Verdienst des Lehrerkollegiums, welches mir treulich zur Seite gestanden hat, mit welchem ich je länger, je mehr mich verwachsen gefühlt habe. Ihm meinen wärmsten Dank für das Vergangene, meine besten Wünsche für die Zukunft darzubringen ist mir innerstes Bedürfniss. Auch in der Ferne werde ich das Band der Zugehörigkeit, welches mich mit ihm verknüpft, in treuer Erinnerung hochhalten.

Von Anfang bis zu Ende meiner Amtsführung habe ich nur Gutes gewollt und erstrebt: darum konnten Anfechtungen mir nicht erspart bleiben. Aber ohne Bitterkeit, gehobenen Mutes darf ich darauf zurückblicken, denn der einsichtige und der Schule wohl gesinnte Teil der Bürgerschaft hat mir reichliche Anerkennung entgegengetragen und die heftig Widerstrebenden selber haben zuletzt nicht umhin gekonnt sich mein für die Entwickelung der Schule aufgestelltes Programm ganz und gar anzueignen und zweifellos erscheint nunmehr dessen Verwirklichung. So eröffnen sich der Schule die erfreulichsten Aussichten; mögen sie alle unter meinem Amtsnachfolger der Erfüllung entgegenreifen und die Anstalt eine Stätte edler Bildung, die Pflegerin nationalen Geistes, die Bewahrerin religiöser Sitte bleiben.

Gumbinnen, 20. März 1882.

Der Rektor der höheren Bürgerschule
Dr. **Schwarz.**