Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte im Anschluß an die bei der Dreiecksberechnung vorkommenden Formeln.

Mit einer Figurentafel.

Festschrift IV

zur

50jährigen Jubelfeier
des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums
zu Greifenberg i. Pom.

am

15. Oktober 1902

von

Prof. Dr. Christoph Ibrügger.

Gedruckt bei C. Lemcke in Greifenberg i. Pommern.

Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte im Anschluß an die bei der Dreiecksberechnung vorkommenden Formeln.

Eine mathematische Arbeit aus einem eng begrenzten Gebiet in der Festschrift unsers Gymnasiums dürfte manchem Teilnehmer an der Jubelfeier befremdlich erscheinen. Aber vielleicht werden doch einige mit Interesse an einem konkreten Beispiel Kenntnis davon nehmen, welche Wandlung und Erweiterung die mathematischen Lehraufgaben unsrer Schule in letzter Zeit erfahren haben.

Während noch in den sechziger Jahren ein namhaftes Lehrbuch der Gymnasialpädagogik den Satz aufstellte: „es kommt nicht auf ein großes Quantum mathematischer Kenntnisse an; dies ist höchst schädlich", und sogar vorschlug, die Naturwissenschaften im Lehrplan der Gymnasien ganz wegzulassen — die preußische Unterrichtverwaltung hat sich freilich solche Ansichten nie zu eigen gemacht — so forderte dem gegenüber die erhöhte Bedeutung, welche die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer für das Kulturleben und die Wohlfahrt der Völker gewannen, eine stärkere Betonung derselben auch im Gymnasialunterricht. U. a. wurde auch der Ruf nach Einführung der Kegelschnitte laut, schon wegen ihrer Bedeutung für die Physik; ja es wurde sogar das Schlagwort gemünzt: „Kegelschnitte; kein griechisches Exercitium mehr!" Nun, der erste Teil dieser Forderung ist erfüllt; der zweite nicht und wird für das Gymnasium hoffentlich nie erfüllt werden, da dieses durch eine derartige Beschränkung des griechischen Unterrichts seine Eigenart und einen Hauptquellpunkt seiner bildenden Kraft verlieren würde.

Die Lehrpläne enthalten über die Kegelschnitte nur eine kurze Angabe des Lehrziels und geben über ihre Durchnahme in der Schule keine speziellen Vorschriften. Wie die Mehrzahl der gebräuchlichen Lehrbücher zeigt, geschieht ihre Behandlung meistens nach den Methoden der analytischen Geometrie. Für Realanstalten ist dies jedenfalls der gewiesene Weg, wenn auch etwa außer diesem noch andere Wege eingeschlagen werden; für das Gymnasium ist u. E. die rein analytische Methode nicht empfehlenswert, da hier, ohne Anlehnung an die dem Schüler sonst geläufigen Kenntnisse, die zur Durcharbeitung und Befestigung des Pensums nötige Zeit fehlt. Die Realanstalten können und sollen sich auf dem Gebiet der exakten Fächer weitere Ziele setzen als das Gymnasium; aber die Lehrer des letzteren dürfen — wozu sie infolge der gemeinsamen Arbeit in Versammlungen und Vereinen sowie in den Fachzeitschriften und durch die für beide Schularten meist gemeinsam bestimmten Lehrbücher versucht werden könnten — diese weitergehenden Ziele der Kollegen an den Realanstalten nicht als die ihrigen betrachten.

Frühere Darstellungen der Eigenschaften der Kegelschnitte z. B. von Erler und Buchbinder entwickeln diese nach Steiner's Vorgang auf synthetischem Wege.*) Hier erscheinen also die Kegelschnitte als das Ergebnis und der Schluß des planimetrischen Unterrichts. Andere — so Holzmüller — gliedern sie der Stereometrie ein, wo die Betrachtung der ebenen Schnitte des Cylinders und des Kegels auf sie hinführen, und die Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde — die lehrplanmäßig den Schülern vermittelt werden soll — weitere Anknüpfungspunkte bietet. Erwähnen wir endlich noch, daß die Lehre von den Gleichungen mit 2 Unbekannten durch die Kegelschnitte interessante und wichtige Aufgaben erhält, so hätten wir damit kurz skizziert, wie dieser Zuwachs der mathematischen Lehraufgabe des Gymnasiums in die älteren Teile derselben eingreift und sich mit ihnen verknüpft.

Die folgende kleine Arbeit schlägt nun insofern einen eigenen Weg ein, als sie die Lehre von den Kegelschnitten an die Formeln der Dreiecksberechnung anschließt, also die Ableitung der Haupteigenschaften derselben wesentlich auf trigonometrischem Wege versucht. Angewandt werden dazu die Beziehungen, die zwischen konfokalen Kegelschnitten bestehen. Bei dieser Behandlung tritt einmal die Gleichartigkeit der meisten Eigenschaften von Ellipse und Hyperbel deutlich hervor, während sich die Parabel als Grenzfall jeder dieser Kurven darstellt, sodann wird — was nach dem vorhin gesagten wichtiger scheint — eine engere Verbindung hergestellt zwischen dem Gebiet der Dreiecksberechnung und dem der Kegelschnitte. Dabei werden nur die Kenntnisse vorausgesetzt, die dem Gymnasialprimaner geläufig sind; an einzelnen Stellen freilich, die aber für den Unterricht wohl nicht in Betracht kommen, ist hiervon abgewichen. Die gewonnenen Resultate werden nur kurz aufgezählt, die Arbeit giebt also nicht etwa einen vollständigen Lehrgang.

*) Buchbinder (im Programm der Landesschule Pforta 1878) verlangt dabei, daß das Gymnasium von der analytischen Geometrie frei zu lassen sei. Unsre Lehrpläne stehen insofern auf demselben Standpunkt, als sie einen „systematischen Unterricht in analytischer Geometrie" ausschließen, aber sie fordern doch mit Recht „die Einführung der Schüler in den wichtigen Koordinatenbegriff".

Ellipse und Hyperbel.

Es sei ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und den Winckeln α, β, γ; so ist C ein Punkt der Ellipse mit den Brennpunkten A und B, deren große Achse $EF = 2a_e = a + b$ ist. Ebenso liegt C auf einer Hyperbel mit der Hauptachse $2a_h = a - b$, die dieselben Brennpunkte A und B wie die Ellipse hat. Bezeichnen wir die Längen der Nebenachsen mit $2b_e$ und $2b_h$, die lineare Excentricität mit e, so ist Figur 1.

1) $$e^2 = a_e^2 - b_e^2 = a_h^2 + b_h^2$$

und die Seiten des Dreiecks sind

$$a = a_e + a_h,\ b = a_e - a_h,\ c = 2e,$$

woraus sich für das Produkt der Brennstrahlen ergiebt:

2) $$ab = a_e^2 - a_h^2 = b_e^2 + b_h^2.$$

Bezeichnet man den halben Umfang des Dreiecks mit s, so ist, wenn $a > b$ vorausgesetzt wird:

$$s = a_e + e,\ s - a = e - a_h,\ s - b = e + a_h,\ s - c = a_e - e,$$

$$\text{also } b_e = \sqrt{s(s-c)} \text{ und } b_h = \sqrt{(s-a)(s-b)}.$$

Der Inhalt*) des Dreiecks ABC wird dann ausgedrückt durch

$$F = b_e \cdot b_h$$

und die Höhe durch

$$CD = \frac{b_e \cdot b_h}{e}$$

Für die Abschnitte $AD = q$, $DB = p$, welche D auf AB bestimmt, ergiebt sich ferner $p^2 - q^2 = a^2 - b^2 = 4a_e a_h$, und da $p \pm q = 2e$ ist, je nachdem $\alpha \lesseqgtr 90^0$, so ist $p \mp q = \frac{2a_e a_h}{e}$ und $p = e + \frac{a_e a_h}{e}$, während für $\alpha = 90^0$ $p = \frac{2a_e a_h}{e}$ ist.

*) Durch Einführung der Größen b_e und b_h gewinnen auch andere Formeln der Trigonometrie eine anschauliche Bedeutung.

Wählen wir also AB als x-Achse, O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und ist OA die positive Richtung der x-Achse, so werden die Koordinaten eines Punktes C ihren absoluten Werten nach ausgedrückt durch

$$\text{I)} \qquad x = \frac{a_e\, a_h}{e},\ y = \frac{b_e\, b_h}{e}.$$

Hieraus ergeben sich mit Beachtung von 1) sogleich die Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und Hyperbel. Denn:

$$\text{3)} \qquad \begin{aligned} b_e^2\, x^2 + a_e^2\, y^2 &= a_e^2\, b_e^2 \,.\, \frac{a_h^2 + b_h^2}{e^2} = a_e^2\, b_e^2 \\ b_h^2\, x^2 - a_h^2\, y^2 &= a_h^2\, b_h^2 \,.\, \frac{a_e^2 - b_e^2}{e^2} = a_h^2 \,.\, b_h^2. \end{aligned}$$

Für den Winkel γ in $\triangle$ ABC findet man entsprechend den Formeln

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{s\,(s-c)}}$ u. s. w.

$$\text{II)} \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{b_h}{b_e},\ \sin \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{b_h}{\sqrt{ab}},\ \cos \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{b_e}{\sqrt{ab}},$$ in welchen

Formeln $\sqrt{ab}$ nach 2) noch ersetzt werden kann durch $\sqrt{a_e^2 - a_h^2} = \sqrt{b_e^2 + b_h^2}$.

Ferner, aus den Formeln:

$(a + b) : c = \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin \frac{1}{2}\gamma,\ (a - b) : c = \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos \frac{1}{2}\gamma$ bekommt man, wenn man die für die Seiten des Dreiecks geltenden Beziehungen und die Formeln II) beachtet:

$$\text{III)} \qquad \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a_e}{e} \cdot \frac{b_h}{\sqrt{ab}},\ \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a_h}{e} \cdot \frac{b_e}{\sqrt{ab}}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a_h \,.\, b_e}{a_e \,.\, b_h}.$$

Brennpunkte und Tangenten. Die Brennstrahlen a und b waren bestimmt durch

$$a = a_e + a_h,\ b = a_e - a_h.$$

Berechnet man a_h nach I), so wird

$$\text{4)} \qquad a = a_e + \frac{e}{a_e}\, x,\ \ b = a_e - \frac{e}{a_e}\, x.$$

Eliminiert man, um die Brennstrahlen nach einem Hyperbelpunkt zu finden, a_e — wir beschränken uns durchgehends auf Punkte des 1. Quadranten — so ist:

$$\text{5)} \qquad a = \frac{e}{a_h}\, x + a_h,\ b = \frac{e}{a_h}\, x - a_h.$$

Für das Produkt der beiden nach einem Punkt der Ellipse gezogenen Brennstrahlen ergiebt sich also:

$$ab = \frac{1}{a_e^2}\,(a_e^4 - e^2\, x^2),$$

während derselbe Ausdruck für die Hyperbel lautet:

$$ab = \frac{1}{a_h^2}\,(e^2\,x^2 - a_h^4).$$

Dadurch lassen sich unter Benutzung von I) die Formeln III) folgendermaßen ausdrücken:

$$\text{III}')\qquad \begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= \frac{a_e^2}{b_e}\,\frac{y}{\sqrt{a_e^4 - e^2\,x^2}} = b_h \cdot \frac{x}{\sqrt{e^2\,x^2 - a_h^4}} \\ \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= b_e \cdot \frac{x}{\sqrt{a_e^4 - e^2\,x^2}} = \frac{a_h^2}{b_h} \cdot \frac{y}{\sqrt{e^2\,x^2 - a_h^4}} \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) &= \frac{b_e^2}{a_e^2}\cdot\frac{x}{y} = \frac{a_h^2}{b_h^2}\cdot\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Vermittelst III) oder III') lassen sich nun die Ausdrücke für die Längen der Tangente (t), Subtangente (t'), Normale (n) und Subnormale (n') aufstellen. Denn die Ellipsentangente und damit die Hyperbelnormale des Punktes C bildet als Halbierungslinie*) des Außenwinkels C mit der x-Achse Figur 1.
den — spitzen — Winkel $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, während die Hyperbeltangente und damit die Ellipsennormale mit ihr den Winkel $90^0 - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ bildet.

So ist:

$$6)\quad t_e = n_h = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{b_h}{a_h}\sqrt{ab},\quad t_h = n_e = \frac{y}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{b_e}{a_e}\sqrt{ab}$$

oder:

$$t_e = \frac{1}{b_e}\,\frac{y\sqrt{a_e^4 - e^2\,x^2}}{x},\quad t_h = \frac{1}{b_h}\,\frac{y\sqrt{e^2\,x^2 - a_4^2}}{x}$$

$$n_e = \frac{b_e}{a_e^2}\,\sqrt{a_e^4 - e^2\,x^2},\quad n_h = \frac{b_h}{a_h^2}\,\sqrt{e^2\,x^2 - a_h^4}.$$

Bezeichnen wir die Koordinaten eines Punktes der Ellipsen- resp. der Hyperbeltangente mit ξ und η, so lautet die Gleichung der ersteren:

$$7)\qquad \frac{\eta - y}{x - \xi} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{b_e^2}{a_e^2}\,\frac{x}{y},$$

woraus sich unter Berücksichtigung der Mittelpunktsgleichung der Ellipse (3) die übliche Form ergiebt. Für die Hyperbeltangente ist analog:

$$8)\qquad \frac{\eta - y}{\xi - x} = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{b_h^2}{a_h^2}\,\frac{x}{y}.\text{**)}$$

---

*) Diese Eigenschaften der Tangenten werden also vorausgesetzt; sie sind event. elementar-geometrisch zu beweisen.

**) Man kann diese Erörterungen auch an die Figur der Berührungskreise des Dreiecks anknüpfen. Z. B.: Die Tangente der Ellipse CT_e geht durch die Mittelpunkte der den Seiten a und b von $\triangle$ ABC anbeschriebenen Kreise M_a und M_b. Letztere Punkte liegen auf den Scheiteltangenten der Ellipse, und die Radien dieser Kreise sind:

Fällt man von A und B auf die Tangente der Ellipse die Lote p_e' und p_e'', so ist:

$$p_e' = b \cos \tfrac{1}{2}\gamma,\ p_e'' = a \cos \tfrac{1}{2}\gamma, \text{ also nach II)}$$

9) $$p_e' = \frac{b\, b_e}{\sqrt{ab}},\ p_e'' = \frac{a\, b_e}{\sqrt{ab}},\ p_e' \cdot p_e'' = b_e^2,$$

und die Tangente hat von O den Abstand:

$$d_e = \tfrac{1}{2}(p_e' + p_e'') = \frac{a_e\, b_e}{\sqrt{ab}}.$$

Analog ist für die Hyperbel:

$$p_h' = b \sin \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{b\, b_h}{\sqrt{ab}},\ p_h'' = a \sin \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{a\, b_h}{\sqrt{ab}}$$

10) $$p_h' \cdot p_h'' = b_h^2,\ d_h = \frac{a_h\, b_h}{\sqrt{ab}}.$$

Wir projizieren ferner die Normale der Ellipse CT_h auf einen der Brennstrahlen, so ist die Projektion $p_e = n_e \cos \frac{1}{2}\gamma$, also nach II) und 6)

11) $$p_e = \frac{b_e^2}{a_e}$$

d. h. gleich dem Halbparameter der Ellipse.

Ebenso ist die Projektion von n_h auf b:

12) $$p_h = n_h \sin \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{b_h^2}{a_h}.$$

CT_h teilt AB innen im Verhältnis der beiden Seiten b und a, daher ist:

$$A\,T_h = \frac{b\,.\,c}{a+b} = b\,\frac{e}{a_e}.$$

Die Projektion dieses Abschnitts auf AB ist $b\,\frac{e}{a_e}\cos\alpha$, also findet man:

$$b = b\,\frac{e}{a_e}\cos\alpha + p_e.$$

Führt man für α seinen Nebenwinkel φ ein, so ergiebt sich die auf den Brennpunkt A bezogene Polargleichung der Ellipse:

$\varrho_a = \dfrac{b_e\, b_h}{e - a_h}$, $\varrho_b = \dfrac{b_e\, b_h}{e + a_h}$. CT_e schneidet die y-Achse auf dem um $\triangle$ ABC umbeschriebenen Kreise, und es ist $OR = \frac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b) = \dfrac{e\, b_e}{b_h} = \dfrac{b_e^2}{y}$, — eine Beziehung, die auch zur Aufstellung der Gleichung der Tangente benutzt werden kann. Analoges gilt für die Hyperbeltangente. Ferner lassen sich die — auch dem Gymnasialschüler geläufigen — harmonischen Eigenschaften der Mittelpunkte der Berührungskreise auf die Tangenten von Ellipse und Hyperbel übertragen; u. a. m. z. B. $RC\,.\,CT_e = CS\,.\,CT_h = ab$.

13) $$b = \frac{p_e}{1 + \frac{e}{a_e} \cos \varphi}.$$

Wir projizieren in gleicher Weise $AT_e = \frac{b.\,c}{a - b} = b\,\frac{e}{a_h}$ auf b, so ist $b = p_h - b\,\frac{e}{a_h} \cos \alpha$. Nehmen wir für diese Gleichung die positive Richtung der x-Achse nach der zu A gehörigen Leitlinie der Hyperbel, also von O nach B gerichtet, so ist:

14) $$b = \frac{p_h}{1 + \frac{e}{a_h} \cos \varphi}.$$

Konjugierte Durchmesser. Wir verbinden O mit C und ziehen durch O einen der Tangente CT_e parallelen Durchmesser der Ellipse $2a'_e$. $OC = b'_e$ möge mit AB den spitzen Winkel ε bilden. Dann ist, da b'_e eine Seitenhalbierende in $\triangle$ ABC ist:

15) $$b'^2_e = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2_e + a^2_h - e^2 = b^2_e + a^2_h\,{}^{*)}$$
$$\cos \varepsilon = \frac{x}{b_e'} = \frac{a_e\,a_h}{e\,b_e'},\ \sin \varepsilon = \frac{y}{b_e'} = \frac{b_e\,b_h}{e\,b_e'},\ \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b_e\,b_h}{a_e\,a_h}.$$

Nennen wir den Winkel, den $2a'_e$ mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, ϑ, so ist $\operatorname{tg} \vartheta = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Also ist entsprechend III) oder III')

16) $$\operatorname{tg} \varepsilon \,.\, \operatorname{tg} \vartheta = -\frac{b^2_e}{a^2_e}.$$

Das ist die Beziehung, die zwischen 2 konjugierten Durchmessern einer Ellipse besteht.

Bezeichnen wir die Koordinaten der Schnittpunkte des Durchmessers $2a'_e$ mit der Ellipse mit ξ und η, so ist $\xi = \pm\, a'_e \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\eta = \pm\, a'_e \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, welche Werte wir in die Gleichung (3) der Ellipse einsetzen.

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{a^2_e} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{b^2_e} = \frac{1}{a'^2_e} \quad \text{oder nach III)}$$

$$\frac{b^2_h}{e^2\,ab} + \frac{a^2_h}{e^2\,ab} = \frac{1}{a'^2_e},$$

woraus, da $e^2 = a^2_h + b^2_h$ ist, folgt:

17) $$a'^2_e = ab.$$

*) Aus dieser und der folgenden Formel für cos ε kann man durch Elimination von a_h die auf den Mittelpunkt bezogene Polargleichung der Ellipse ableiten.

Ersetzen wir die rechte Seite dieser Gleichung durch $a_e^2 - a_h^2$ (2) und addieren $b'^2_e = b_e^2 + a_h^2$, so erhalten wir:

18) $$a'^2_e + b'^2_e = a_e^2 + b_e^2.$$

Nehmen wir die beiden konjugierten Durchmesser als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems und bezeichnen die Koordinaten mit u und v, so ist:

Figur 2. $$x = u \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) + v \cos \varepsilon, \quad y = - u \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) + v \sin \varepsilon,$$

oder mit Anwendung der Formeln III) und 15)

$$\frac{x}{a_e} = \frac{u\, b_h}{e \sqrt{ab}} + \frac{v\, a_h}{e\, b'_e}, \quad \frac{y}{b_e} = - \frac{u\, a_h}{e \sqrt{ab}} + \frac{v\, b_h}{e\, b'_e}, \text{ also}$$

$$1 = \frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b_e^2} = \frac{u^2}{e^2\, ab}(a_h^2 + b_h^2) + \frac{v^2}{e^2\, b'^2_e}(a_h^2 + b_h^2),$$

woraus sich mit Berücksichtigung von 1) und 17) ergiebt:

19) $$\frac{u^2}{a'^2_e} + \frac{v^2}{b'^2_e} = 1.$$

Der spitze Winkel, den die konjugierten Durchmesser bilden, sei ω_e, so ist $\omega_e = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \varepsilon$, woraus man wieder mit Anwendung von III) und 15) und unter Berücksichtigung von 1) und 17) findet:

20) $$\sin \omega_e = \frac{a_e\, b_e}{a'_e\, b'_e}, \quad \cos \omega_e = \frac{a_h\, b_h}{a'_e\, b'_e}, \text{ also ist}$$

$$a'_e\, b'_e \sin \omega_e = a_e\, b_e.$$

Auf analoge Weise erhält man die Beziehungen zwischen den konjugierten Durchmessern einer Hyperbel, die sich oft aus dem früheren sogleich dadurch ergeben, daß

$$a\, b = a'^2_h \text{ und } \omega_e + \omega_h = 90^0 \text{ ist.}$$

Asymptoten der Hyperbel. Wir beschreiben mit e um O einen Kreis und errichten auf der x-Achse in den Scheiteln der Hyperbel die Senkrechten, so bestimmen die Schnittpunkte derselben mit dem Kreise und O die „Asymptoten“. Die zu x gehörige Ordinate der Asymptote $DI = Y$ ist dann zu berechnen aus:

$$Y : x = b_h : a_h, \text{ also nach Einsetzung von x aus I) ist:}$$

$$Y = \frac{a_e\, b_h}{e}.$$

Derselbe Wert ergiebt sich, wenn man die Ordinate des Ellipsenpunkts C bis zum Schnittpunkt mit dem um O mit a_e beschriebenen Kreise verlängert. Denn die Kreisordinate ist $\sqrt{a_e^2 - x^2}$, daher nach Einsetzung von x aus I) auch gleich $\frac{a_e\, b_h}{e}$. Der Endpunkt der Kreisordinate liegt daher auf der Asymptote.

Ferner ist:

$$Y - y = \frac{a_e\, b_h}{e} - \frac{b_e\, b_h}{e} = \frac{b_h}{e}\,(a_e - b_e).$$

Rückt der Punkt C auf derselben Hyperbel vor, so behält $\frac{b_h}{e}$ seinen konstanten endlichen Wert, während $a_e - b_e$ gegen Null konvergiert. Asymptote!

$$Y + y = \frac{b_h}{e}\,(a_e + b_e), \text{ also } Y^2 - y^2 = b_h^2.$$

Bezeichnet man den Asymptotenwinkel, durch den die x-Achse geht, mit $2\varepsilon_0$, so ist:

$$\sin\,\varepsilon_0 = \frac{b_h}{e},\ \cos\varepsilon_0 = \frac{a_h}{e},\ \sin 2\,\varepsilon_0 = \frac{2\,a_h\,b_h}{e^2}.$$

Für die auf die Asymptoten als Achsen bezogenen Koordinaten u und v ergeben sich dann aus der Figur leicht die Beziehungen Figur 3.

$$\sin\,\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2}\,(Y - y) : u = \tfrac{1}{2}\,(Y + y) : v.$$

Also ist nach dem vorigen:

$$u = \tfrac{1}{2}\,(a_e - b_e),\ \ v = \tfrac{1}{2}\,(a_e + b_e) \text{ und}$$

21) $$u\,v = \tfrac{1}{4}\,(a_e^2 - b_e^2) = \tfrac{1}{4}\,e^2$$

22) $$u\,v \sin 2\,\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2}\,a_h\,b_h.$$

Leitlinien. Wir verlängern CA bis zum zweiten Durchschnittspunkt C_1 mit der Ellipse und ziehen durch C_1 die Tangente, indem wir $2a_e$ auf AC von A bis B″ abtragen und auf BB″ die Mittelsenkrechte errichten. Figur 4. Vom Schnittpunkt der beiden Tangenten R_e wird $R_e R'_e \perp AB$ gefällt, und von C aus $CH_e \perp R_e R'_e$ gezogen. Dann ist $R_e A \perp CC_1$.*) Da also $ACH_e R_e$ ein Sehnenviereck ist, so ist $\sphericalangle\, CH_e A = \sphericalangle\, CR_e A = \tfrac{1}{2}\,\gamma$ und $\sphericalangle\, H_e AC = \sphericalangle\, H_e R_e C = 90^0 - \tfrac{1}{2}\,(\alpha - \beta)$. Also ist nach dem Sinussatz in $\triangle\, ACH_e$:

$$CA : CH_e = \sin \tfrac{1}{2}\,\gamma : \cos \tfrac{1}{2}\,(\alpha - \beta),$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung $= c : (a + b)$ ist, so ergiebt sich:

23) $$CA : CH_e = e : a_e.$$

$R_e R'_e$ ist die zum Brennpunkt A gehörige Leitlinie der Ellipse.**)

Wir verfahren in analoger Weise bei der Hyperbel, indem wir die Tangente in dem Punkt an diese ziehen, in welchem sie von CA zum zweiten

*) Dies läßt sich für unsern Zweck am leichtesten zeigen, wenn man auf AC auch nach oben $2a_e$ bis B′ abträgt. Dann ist $AB' = AB''$, $R_e B = R_e B' = R_e B''$, also $R_e A \perp B'B''$.

**) Auch der Abstand AR'_e läßt sich leicht trigonometrisch berechnen:

$$AR'_e = b \sin\alpha \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\,\gamma = \frac{b_e^2}{e}.$$

Male geschnitten wird. Der dem Punkte R_e entsprechende Punkt R_h liegt dann auf der Halbierungslinie von γ und auf der Verlängerung von $R_e A$, und es ergiebt sich aus $\triangle CH_h A$:

$$CA : CH_h = e : a_h, \tag{24}$$

d. h. $H_h R_h$ ist eine Leitlinie der Hyperbel.

Aus 23) und 24) folgt

$$H_e C : CH_h = a_e : a_h = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Wird daher $CB \parallel AB$, d. h. ist $\beta = O$, $\gamma = 180^0 - \alpha$, so wird $H_e C = C H_h$. Aus

$CA : CH_e = \sin \frac{1}{2}\gamma : \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ u. $CA : CH_h = \cos \frac{1}{2}\gamma : \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

folgt dann, daß $CA = CH_e$ und $CA = CH_h$ ist.

Aus der Ellipse und der Hyperbel entsteht je eine Kurve, deren Punkte von einem festen Punkt A und einer festen Geraden $R_e R'_e$ resp. $R_h R'_h$ gleiche Entfernung haben — eine Parabel.

Die Parabel.

Figur 5. Da $CT_1 \measuredangle H_1 CA$ halbiert, da ferner $CA = CH_1$ und $CH_1 \parallel AT_1$ ist, so ist $T_1 ACH_1$ ein Rhombus, und ebenso $AT_2 H_2 C$ und $T_1 ACH_1 \cong AT_2 H_2 C$.

Ihre Diagonalen haben die Länge:

$$CT_1 = 2b \cos \tfrac{1}{2}\alpha \text{ und } CT_2 = 2b \sin \tfrac{1}{2}\alpha. \text{ Also ist:}$$

$$AR'_1 = 2b \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha,\ AR'_2 = 2b \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha,$$

welche Werte sich auch ergeben, wenn man in den für die Ellipse resp. Hyperbel geltenden Ausdrücken (vergl. Anm. 2 S. 11) $\beta = o$ setzt. Bezeichnen wir AR_1' mit p_1, AR_2' mit p_2, so ist:

$$p_1 = 2b \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = b(1 - \cos\alpha),\ p_2 = b(1 + \cos\alpha).$$

Rechnet man hierin wieder diejenige Richtung der x-Achse, die nach der Leitlinie gerichtet ist, als die positive, so lautet die Polargleichung der Parabel:

$$b = \frac{p}{1 + \cos\varphi}, \tag{25}$$

ein Resultat, das sich wie früher auch durch Projektion von CT_2 und AT_2 auf AC ergeben würde.

Es sei nun E der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und EA die positive Richtung der x-Achse. Da

$$T_1 D = AR'_2 = p_2 \text{ und } T_2 D = AR'_1 = p_1$$

ist, und $T_1 D$ durch E halbiert wird, so ergeben sich aus der Figur die Transformationsgleichungen:

26) $$x = \tfrac{1}{2}\,p_2,\ y^2 = p_1 p_2.$$

Eliminiert man daraus p_2, so findet man als Scheitelgleichung der Parabel:

27) $$y^2 = 2\,p\,x.$$

Weiter ist: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\,\alpha = \frac{y}{T_1 D} = \frac{y}{p_2} = \frac{p_1}{y} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$

Die Gleichung der Tangente heißt daher:

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{p}{y}$$

oder mit Berücksichtigung von 27)

28) $$\eta\, y = p\,(\xi + x).$$

CT_1 und CT_2 lassen sich auch aus dem rechtwinkligen Dreieck $T_1\,C\,T_2$ berechnen, in dem

$$T_1\,T_2 = 2\,b = p_1 + p_2 \text{ ist. Nämlich}$$

$$C\,T_1 = \sqrt{p_2\,(p_1 + p_2)},\ C\,T_2 = \sqrt{p_1\,(p_1 + p_2)},$$

woraus sich weiter ergiebt:

$$\sin \tfrac{1}{2}\,\alpha = \frac{y}{CT_1} = \sqrt{\frac{p_1}{p_1 + p_2}},\ \cos \tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{p_2}{p_1 + p_2}},\ \text{oder}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{p_1}{p_1 + 2\,x}} = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + y^2}},\ \cos \tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{2\,x}{p_1 + 2\,x}} = \frac{y}{\sqrt{p_1^2 + y^2}}.$$

Leicht ergeben sich nun die Längen der Subtangente und Subnormale, wie sich überhaupt die Eigenschaften der Tangente, die im Unterricht zuerst mitgeteilt werden, aus der Figur anschaulich ablesen lassen.

Bezeichnen $x'y'$, $x''y''$ die Koordinaten zweier Punkte auf der Parabel, so ist die Gleichung ihrer Verbindungsgeraden:

$$\eta - y' = \frac{2\,p}{y' + y''}\,(\xi - x').$$

Soll dieselbe der durch den Punkt x, y gehenden Tangente parallel sein, so ist:

$$\frac{2\,p}{y' + y''} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\,\alpha = \frac{p}{y},\ \text{also}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\,(y' + y''),$$

d. h. der durch C gehende Durchmesser halbiert die zu der Tangente parallelen Sehnen der Parabel, ein Resultat, das sich auch durch Betrachtung der entsprechenden Sätze über die Ellipse oder die Hyperbel ergiebt.*)

---

*) So findet man aus 20) S. 10 für den Konjugationswinkel ω zweier konjugierten Durchmesser einer Ellipse $\operatorname{tg} \omega \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\gamma$, woraus für $\beta = 0$, $\gamma = 180^0 - \alpha$ folgt: $\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\,\alpha$, wodurch sich zeigt, daß der Parabeldurchmesser CH_2 dem Ellipsendurchmesser CO entspricht.

Wir nehmen die Tangente und den Durchmesser durch C als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems (u, v), so ist für den Punkt x′, y′ der Parabel:

$$x' = x + u + v \cos \tfrac{1}{2}\alpha = x + u + v \frac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}}$$

$$y' = y + v \sin \tfrac{1}{2}\alpha = y + v \frac{p}{\sqrt{p^2 + y^2}}.$$

Wir setzen diese Werte in die Parabelgleichung 27) ein, so erhalten wir:

$$v^2 \cdot \frac{p^2}{p^2 + y^2} = v^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 2pu.$$

Nun war $p = 2b \sin^2 \frac{1}{2}\alpha$, also ergiebt sich:

30) $$v^2 = 4bu,$$

wo b noch durch den ihm gleichen Abstand des Punktes C von der Leitlinie ersetzt werden kann.

Aufgaben.

Wir erwähnen noch einige Aufgaben, die sich an das vorige leicht anschließen lassen.

1. Der geometrische Ort der Mittelpunkte jedes der Berührungskreise eines Dreiecks ist zu bestimmen, dessen Grundlinie $c = 2e$ und Seitensumme $a + b = 2a_e$ gegeben sind.*)

Die Spitze des Dreiecks muß auf der in Fig. 1 gezeichneten Ellipse liegen. Die Mittelpunkte der den Seiten AC und BC anbeschriebenen Kreise M_b und M_a liegen — der Abstand der auf der Grundlinie befindlichen Berührungspunkte ist $a + b$ — auf den Geraden $x = \pm a_e$. Sind ξ und η die Koordinaten des Mittelpunkts des $\triangle$ ABC einbeschriebenen Kreises, so ist

$$\xi = \tfrac{1}{2}(a - b) = a_h,\ \eta = \varrho = \frac{F}{s} = \frac{b_e\ b_h}{a_e + e}.$$

Also ist nach I)

$$\xi = \frac{ex}{a_e} \text{ und } \eta = \frac{ey}{a_e + e}.$$

Setzt man die hieraus für x und y berechneten Werte in die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ein, so ergiebt sich für den gesuchten Ort eine Ellipse mit den Halbachsen e und $\frac{e\,b_e}{a_e + e}$. Auch der Mittelpunkt des der Seite

*) Vergl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte I. Bd. S. 345. 6. Aufl.