Städtisches
Progymnasium zu Allenstein.

Zu der

Freitag den 4. Oktober 1878

stattfindenden

öffentlichen Prüfung aller Klassen

ladet

im Namen des Lehrer-Collegiums

ein

Dr. F. Friedersdorff,

Dirigent.

Inhalt:

Königsberg in Pr.
Druck von Longrien & Leupold (R. Leupold).
1878.

1878. Progr. Nr. 0 b

Rectoris F. Friedersdorff de antiquitatis studiis oratio inauguralis.

Qui antiquitati operam dant et quae veteres scripserint vel egerint aut qui factum sit, ut res eorum tum prospere efflorescerent tum misere interirent, pervestigandum sibi proponunt, ii multis hac aetate, cum plerique nihil, in quod inquirant, dignum habent, nisi unde praesens aliquod commodum ad se redundaturum sperant, nugas agere viresque ingenii in rebus obsoletis et ab horum temporum natura abhorrentibus videntur defatigare. haud aliter enim eos dicunt facere, ac qui reliquias urbium et templorum perscrutentur, ut divitias maiorum, quas sub terra reconditas sibi fingant, multa impensa opera in lucem protrahant, neque respiciant, quam facili negotio, si terram ipsam ararent, locupletes fieri possent. nec sola vituperatione multorum ii, qui antiquitati student, carpuntur ac deterrentur, sed voluptatum etiam illecebris, quibus abundamus, a rebus seriis haud ita raro avocantur. nam cum maxima pars hominum, quicquid libuit, adipisci, nummorum acervos quam celerrime congerere, ventri gulaeque quacunque ratione indulgere, denique quicquid est deliciarum brevissimo temporis spatio exhaurire cupiant, quid difficilius quam a tam communi tamque illustri exemplo dissentire, quid ut homine ingenuo dignius, ita rarius?

Nihilo tamen secius omnibus temporibus non defuerunt, qui spreta libidine, vituperatione contempta, neglectis vitae gaudiis in antiquitatis cognitione et scientia sic totos se collocarent, ut divitias, honores, imperia, vel si quid aliud magnum et expetendum videtur, prae his studiis pro nihilo aestimarent. apparet igitur, magnum aliquid et excelsum esse in hoc studiorum genere, cum ii ipsi, qui ingenio, doctrina, morum sanctitate maxime excellebant, ardentissimo ea desiderio sint amplexi. qui si ex rebus vetustate obsoletis leve quoddam et quasi puerile gaudium percepissent, aut si nihil nisi „antiqua mirantes“ eius aetatis, qua florebant, fuissent negligentes, quis non omnes ignominiae notas iis inurendas putaret, quis non ab iis imitandis, tanquam a patriae proditoribus iuvenes praecipue deterreret? sed alia prorsus est horum studiorum natura. quicquid enim veteres admirandi aut egregii fecerunt, quicquid in artibus et litteris aut subtiliter excogitaverunt aut divino quasi spiritu inflati protulerunt, militaria illa facinora, quae tanta ediderunt, quanta nulla unquam tulit aetas, leges illae institutaque, quibus hodie etiam utimur: haec omnia, quo maiore a nobis saeculorum spatio distant, eo videntur excelsiora animosque incredibili quodam et insatiabili desiderio alliciunt.

Nobiles etiam illi antiquitatis duces, opifices, poëtae, principesque in civitatibus viri, si quid in iis fuit vitii, id omne, mortui cum sint, quasi deposuerunt tantaque annorum serie a generis humani infirmitate videntur excepti maioresque quam pro natura humana habentur. hinc efficitur, ut qui vetustatem perscrutantur, in campos illos elysios, quo nisi qui vitam eleganter, sancte, iuste egerunt, pervenire non fas est, sibi videantur descendisse et colloqui cum iis, quos ut conveniret, saepe emori se velle Socratem e vita discessurum dixisse ferunt. et illinc eos haud facile posse avocari, quis mirabitur?

Atque fructus etiam sunt in his studiis, quibus nec opulentiores nec splendidiores possunt cogitari. quos cum omnes recensere longum atque infinitum videatur, paucis iisque maxime egregiis erimus contenti. ac primum quidem humanitatem, quae inde traxit nomen, quod nihil ea homine est dignius, quis ex antiquitatis cognitione, tanquam ex perenni quodam fonte profluere negat? Cicero quidem, cum Atticum suum humanitatem et aequitatem Athenis deportasse dicit, quid vult aliud, nisi illum contemplandis Atheniensium monumentis librisque eorum lectitandis non doctum magis et sapientem quam moderatum evasisse et aequum? adde animi magnitudinem ac honestatem, quae indidem oriuntur. an quisquam fieri posse putat, ut qui per longam annorum seriem praestantissimos cuiusvis aetatis homines animi oculis intueatur, quaeque scite dixerint aut egregie fecerint, ea quotidie perlustretur, non illarum virtutum quasi imaginem quandam apud se fingat, suosque mores ad illorum similitudinem conetur conformare?

Qui autem ita animis sunt comparati, ut excellentissima quaeque maxime colant, ii, si ex scholarum umbraculis in lucem ac pulverem erunt traducti, quae antea imbiberunt, non obliviscentur. itaque cum veteres, quae a maioribus accepissent, cum fide et constantia retinuisse viderint, cumque florentissimos antiquitatis populos ideo spe citius periisse iis persuasum sit, quod sacra iura atque instituta maiorum neglexissent, ipsi quoque, quae a patribus hereditatis loco ad se pervenerint, mores, instituta, leges, deorum religiones pio fidoque animo servabunt. nihil autem gravius, nihil sanctius iis poterit videri, quam patriae amor, cum neminem fere illorum veterum cognoverint, quin se suaque omnia prae patriae salute parvi aestimaret, cum, quidquid admirandum et insigne ab illis sit gestum, ex patriae amore sit natum.

Atque hac quidem aetate, nemo ignorat, quae singuli conemur, nisi antea quae cives universi sentiant, aut qui rerum publicarum sit status, diligenter perspexerimus, neque consilio nec ratione procedere, nec quicquam posse suscipi, quod quidem alicuius sit momenti, quin communi multorum consensu et comprobatione tanquam firmo et stabili quodam solo nitatur. haec ut his temporibus necessario fiunt, apud veteres etiam maximi erant ponderis. nam antiquissimis temporibus, nulla communi inter omnes gentes coniunctione orta, cum suis quaeque natio moribus viveret, haud facile cuiquam veniebat in mentem, se suaque a patrio solo segregare. extra fines gentis nec sermo erat communis nec iura ac ne di quidem ipsi, nullum peregrino cum peregrinis commercium, nulla fides, nulla religio, ut ea demum videatur humanitatis origo et fons, quod certae quaedam exstiterunt civitates, quae sanctissimis legibus praescribebant, ne quis hospitem violaret.

Postea etiam cum mitiores iam facti essent mores, nisi domi atque inter suos nec dignitatis nec honoris cuiquam erat spes: domi affines, sodales, amici latera cingebant ambientium, studiis favebant, bene meritorum augebant splendorem: foris omnia adversa, hostilia, ut ne Hannibal quidem, et odio Romanorum et bellica virtute praeter ceteros egregius, ad bellum Romanum regi extero satis fidus dux videretur. ac ne tum quidem, cum populus Romanus pacatum orbem in ditione teneret omniaque in unius provinciae formam viderentur redacta, alia fuit rerum condicio. cives enim Romani, etsi in remotissimis terrarum regionibus ab omnibus pro maiestate imperii colebantur, tamen, cum patria carere durissimum putarent, ita in provinciis degebant, ut conventibus et societatibus inter se iunctis quasi imaginem urbis patriae exprimerent. inviti in breve aliquod tempus exibant, vel lucro vel gloria ducti; quicquid agebant, aut quae commoda aut qui honores domi inde ad se essent perventura, secum reputabant; exacto magistratus vel imperii tempore impatientes desiderii revertebantur. itaque cum omnes illos veteres singulari quodam modo patria carere sive noluisse sive nequivisse videamus, haud sane mirabimur, quod qui exulatum abierant, ut restituerentur, operam dare non desistebant. omitto Coriolanum, Appium Herdonium, alios, qui armis contra rempublicam sumptis vi ac ferro reditum in patriam sibi munire conabantur: permulti fuerunt, qui, ut Cicero, ne exularent, nihil, quod quidem salva republica fieri posset, inexpertum relinquerent. atque ut redire cupiebant in urbem, ita ne patria interiret, aut damnum aliquod acciperet, ingenti studio nitebantur. hinc proelia Graecorum incredibili animo contra Persarum innumerabiles greges suscepta, hinc Romanorum illa bella et diutina et saepe sine ulla spe prosperi eventus cum Porsena, cum Samnitibus, Pyrrho, Hannibale gesta, hinc urbium usque ad gentis internecionem ferocissimae defensiones, hinc multorum in civitatis interitu mors voluntaria, hinc pro salute communi singulares illae ad mortem devotiones, hinc denique luculentissima cuiuslibet virtutis exempla, quae omnes anni insequentes et exceperunt et ad imitandum sibi proposuerunt.

Atque haec in bello; verum ne in pace quidem ac domi, quae veteres in augendam et illustrandam rempublicam impendebant, nobiscum possunt comparari. quotus enim quisque nostrum est, quin per summum otium et quietem securus inter suos versetur, suis negotiis rebusque privatis intentus, rempublicam administrandam iis permittat, qui aut universi populi consensu ad id munus exsequendum sunt electi, aut quibus regis clementissimi sapientia, ut partem aliquam civitatis regendae susciperent, est imperatum? tanta certe est horum temporum felicitas, ut et ea libertate, qua decet, utamur, quo nihil hominibus est dulcius, et cura ac providentia regum sapientissimorum, quibus non timore subacti, sed pietatis ac religionis vinculis obstricti iam maiores nostri parebant, cum ab externis tum a domesticis hostibus ac perditorum civium seditionibus defendamur.

Nihil huic otio apud veteres simile. illi sive propter aetatem militia vacabant, sive armis positis pacis negotia obibant, foro tamen carere aut a rebus gerendis abstrahi nec volebant nec poterant. quo maiore enim singuli libertate utebantur, eo diligentius erat cavendum, ne respublica aut malorum licentia ac libidine in discrimen vocaretur, aut ambitiosorum cupiditate labefactaretur, aut vulgi levitate et inscitia obiceretur calamitatibus. quae ut boni ac patriae amantes cives impedirent, quam saepe interdiu erat perstandum in comitiis, quam saepe tumultu exorto pervigilandum in armis, sedendum in iudiciis, dicendum ad plebem, sive ut legem aliquam suaderent, sive ut ipsi ab adversariorum criminationibus se purgarent! nec solum consilio, auctoritate, sententia erat opus; res ipsa familiaris ac bona locupletium in publicum conferebantur. in rebus enim adversis apud illos senatus: hostis imminet portis, da, civis, militem, da arma, calceamenta, vestem, stipendium, da socios navales, cibaria cocta; tu quoque, matrona, ex dote conferto! atque in pace etiam: aedilis es creatus, da ludos, bestiarios, forum exorna! tu aliquot ante annos praetor iniquo proelio commisso Iovi Statori templum vovisti: cave, religione neglecta ira deorum in rempublicam sese convertat! — quae si nostri magistratus edicerent, quantas contentiones, quantas invidias motum iri putamus! at apud veteres nemo fere est inventus, qui id genus onerum recusaret. hunc volebant esse patriae amorem, non illum, qui nostrae videtur aetatis, orationibus habendis votisque faciendis egregium; hoc ita facere omnes iubebant poëtae, et antiquissimi et recentes; pro patria mori dulcissimum esse et Homerus et Horatius pariter iuvenes docebant; haec singularis pietatis et amoris praecepta omnes omnium aetatum populi si non amplexi, at certe sunt admirati.

Ac nos quidem Germani, quamquam illorum exemplorum et praescriptorum praeter ceteros fuimus negligentes, tamen non prorsus caruimus iis, qui ea mente veteres lectitarent, ut non verbis laudarent solum, sed rebus etiam imitarentur. nam illis quidem temporibus, cum unum nos populum et quasi corpus esse prope eramus obliti, et cum Gallorum crudeli ac superba dominatione subacti iacebamus, quis acerbius est in hostes invectus, quis ardentiore studio, ut discordiam abiceremus patriamque liberaremus, est adhortatus, quam pauci illi quidem homines docti et antiquitatis studiosi, sed qui ex litterarum studiis cum doctrinam tum animi honestatem et patriae amorem reportaverant? illi iuvenes instigabant, illi, quicquid dicebant aut scribebant, humi iacentis et semimortuae patriae admonebant, illi, si non vindices libertatis, at certe extremi dedecoris ultores esse animis destinaverant. atque paucis etiam ante annis, cum simile periculum ab iisdem Gallis videbatur imminere, quis in communi omnium ardore et studio avidior certaminis, quis in certamine ipso ferocior, quis laborum etiam patientior, quam adolescentes illi, qui literarum universitatibus relictis, cum nomina dedissent, antiquitatis praeceptis se esse imbutos egregia reipublicae opera navata indicaverunt? itaque recte de illis scriptor quidam illius belli haud ignobilis: quam hi adolescentes patriae, libertatis nominisque Germani essent amantes, permultis adverso pectore acceptis vulneribus multoque sanguine profuso demonstraverunt.

Habetis fructus antiquitatis studiis comparatos. non obliviscuntur patriae, qui veteres admirantur, aut quae nunc sint agenda, non curant, nec quae tempus et res postulent, crassis ingeniis negligunt; immo honestiores, alacriores, elatis animis ex prisca antiquitate ad hoc saeculum revertuntur, quaeque egregia adspexerint, ea audendo, patiendo, moriendo imitantur. atque utinam contigat id nobis! utinam qui nostri erunt auditores huiusque gymnasii alumni, quicquid bonum est et honestum amplexentur, vereantur religiones, mores, institutā maiorum, patriam ardentissimo studio ament, et quae nostra disciplina imbuti vera esse cognoverint, per omnem vitam memori animo retineant! nam illud etiam, veritatis esse amantem et quae vera esse tibi persuaseris, ab iis non transversum unguem discedere, unde melius possis discere, quam ex antiquitate? in liberis illis civitatibus nemo philosophus, orator, poeta, quominus de rebus humanis vel coelestibus, quae investigando iuvenisse sibi videretur, apertissime expromeret, vel legibus vel institutis prohibebatur, unde et summum veritatis exquirendae studium et summae inter singulos oriebantur contentiones. nam illi, quae vera perspexissent, non solum disserendo ac disputando cum aliis communicabant, verum vivendi ratione ac moribus exprimebant et ex libris ac scholarum disputationibus in forum atque in publicum transferebant. philosophos quidem illos, qui animi constantiam et virtutem summum dicebant bonum, et ita vixisse, ut res humanas despicere et infra se positas habere viderentur, et cum tempus aut ipsorum voluntas videbatur postulare, voluntaria morte vitam finivisse, quis ignorat? quid? qui civitatibus praeerant, aut leges ferebant, num quae de optima reipublicae forma sentiebant, in utilitatem publicam convertere dubitabant? hinc, cum nemo singulorum licentiae se opponeret, haud ita raro bella civilia atrocissima; sed hinc itidem sapientissimae leges. duae igitur res sunt, quae ex his exemplis iuvenes discent: et fieri non posse, ut quae quis sentiat, per vim et iniuriam aliis obtundat, et decere hominem ingenuum, ne iustitia et veritas pereant, constanti animo et aequo, quantum valeat, se interponere. qui illa mente veteres legent, qui sic animis erunt conformati, eos nonne cuilibet vitae conditioni pares, non ad omne officium exsequendum aptos putabimus?

Proinde ingrediamur deo bene iuvante viam tot saeculorum tam luculentis exemplis illustratam eaque doctrina ac humanitate adolescentium animos instituamus, quae ex antiquitate recte pernoscenda gignitur, cum nihil illis studiis excelsius, nihil ad ingenia excolenda accomodatius, nihil ad mores corrigendos utilius posse cogitari nobis sit persuasum. illam profecto disciplinam adolescentibus saluti, emolumento huic urbi, nobis ipsis honori fore confidimus, ex illa ad patriam quoque aliquid commodi perventurum speramus. nec vero ignoramus, haud parva nos moliri, praesertim cum tantus hominum doctorum, tantus academiarum ac gymnasiorum in Germania numerus, quae nos modo inchoamus, et antiquitus summa cum laude exegerint neque nunc agere desinant. sed id nos consolatur, quod quo uberior est copia eorum, qui ante nos docuerunt, eo maior existit exemplorum multitudo, quae sequare et ex quibus quod potissimum placeat, eligas. quod si omnes, qui sumus huius gymnasii magistri, unanimo et concordi studio tenebimus, haud diffido, fore aliquando illud tempus, cum nos quoque et discipulorum multitudine ac nobilitate disciplinae cum clarissimis illis scholis, quibus iure Germani praeter ceteras gentes gloriantur, et habebimur et erimus comparandi.

Quaestionum Solonearum particula altera.

De
insula Salamine Solone auctore ab Atheniensibus expugnata.

Scripsit **Henricus Begemann**, Dr.

Priore harum quaestionum particula*) quoniam nuper Plutarcheae Solonis vitae, utpote in qua consistere credendum sit quasi fundamentum historiae Solonis vere construendae, quoad ejus fieri posse videbatur, qui essent fontes, quae auctoritas, denuo indagando eruere atque constituere sum conatus: nunc ad res ipsas tractandas progressurus primum haud alienum esse putavi inquirere in Salaminis insulae, quae Solone et auctore et duce facta esse fertur, expugnationem, de qua qui judicia his annis protulerunt, maxime a vero aberravisse mihi visi sunt. quae cum inter omnes, quae ad Solonem pertinent, res secundum ipsas leges saepissime a rerum scriptoribus vel narrata vel commemorata sit: re vera quomodo se habuerit tradi magis magisque desita est. namque quod istius insulae expugnatio et gravissima fuit amplificandis fortunis opibusque Atheniensium, quippe qui antea vi classibusque facillime a mari intercluderentur, et aptissima ad celebrandam gloriam Solonis, quippe qui aliquo modo expugnationis particeps fuisset: factum est, ut caligine quadam obduceretur, quam ne nunc quidem homines docti satis removerunt. quod vere me dicere facile concedes, si ea memineris, quae de insula Salamine expugnata in egregio illo de rebus Graecis libro Ernestus Curtius scripsit. elegiae enim Soloneae reliquiis ipse quodammodo excitatus et percussus de Solonis laudibus grandi quadam et sublimi oratione usus identidem disseruit ea, quae quin perpaucis probentur non dubito, quam ob rem ab Ernesto de Leutsch (philol. v. XXXI. p. 144. sq.) non ita leniter vituperatus, ut ea satis mutaret, ne in quarta quidem editione anni 1874. (I. p. 304.) a se impetravit.

Atque unus qui exstat primarius, ut ita dicam, ac Solonis ipsius aetate ortus rerum Salaminiarum fons est ea, quae servata est, illius carminis pars, quod quidem Solo composuit, ut cives ad bellum contra Megarenses renovandum excitaret. inde igitur cum in causam ingredimur, jam velut in ejus vestibulo observamur exortam quaestionem, num quae vulgo feruntur re vera ex illa Solonis elegia orta sint. namque ex distichis, quae dicuntur, quattuor, ex quibus elegiam Salaminiam constitisse rerum scriptores tradiderunt, olim Niebuhrius (vorles. üb. alte gesch. I. p. 344.) unum ac quidem id, quod Plutarchus primum fuisse narrat, subditum esse judicavit, quod nuper Leutschius l. c. p. 137. denuo monuit. est autem hoc:

αὐτὸς κῆρυξ ἦλθον ἀφ' ἱμερτῆς Σαλαμῖνος,
κόσμον ἐπέων ᾠδὴν τ' ἀντ' ἀγορῆς θέμενος.

atque profecto, ut non dicam haec per se inepta esse, quis erat qui Soloni crederet, ex insula ab hostibus occupata Athenas venisse praeconem? quid, quod Salamine cum praeconem venire necesse esset Salaminium, tamen is, qui advenit, 'Αθηναῖον sive 'Αττικὸν se nominans Athenas patriam, ut ignominiam fugeret, alia patria commutare ardenter cupere sese affirmat, ne in numero τῶν Σαλαμιναφετῶν ab hominibus et fama haberetur? neque vero fieri poterat, ut ἴομεν diceret is praeco, qui ipse Salamine profectus Athenienses, ut bellum inirent, commovere studeret (cf. Hermann, lehrb. der griech.

*) edit. diss. Gottingensi et progr. Holtesmindensi a. 1875.

antiq. I. p. 339. n. 4.) ergo ab eo, de quo agimus, disticho ut Solo carmen Salaminium ordiretur, fieri potuisse justo jure Niebuhrius negat. quodsi nihilo setius et Niebuhrius et Leutschius, illos versus a Solone utique ortos esse rati, ex alio quodam ejus carmine, quo ad Salaminiam elegiam respiceret, eos desumptos et ab eis, qui Solonem se praeconem simulantem carmen recitasse fingerent, elegiae Salaminiae praescriptos esse conjecerunt, id quonam argumento vel indicio nitatur equidem non video. contra ob quas causas hi versus ad illam elegiam non pertineant, ob easdem a Solone eos omnino non esse factos judico. neque igitur aliud quidquam pro certo proponendum esse videtur nisi illa verba esse „prooemii cujusdam, quo“ postea „Soloneum carmen narratum sit.“ ceteris autem versibus (v. Bergk, poët. lyr. gr. Sol. fr. 2. 3.), qui quin ab ipso Solone compositi sint non est cur dubitemus, Solo Atheniensibus ipsorum ignominiam turpitudinemque vehementer exprobrat et ut ad eam tollendam statim insulae expugnandae causa bellum inirent adhortatur. quod ipsum cum totius carminis quasi argumentum fuisse jure sumamus, et Salaminem Solonis temporibus ab aliis ita fuisse occupatam, ut Atheniensibus dedecori esset, et Solonem ipsum cives, ut ad maculam delendam eam expugnarent, adhortatum esse e carminis Solonei reliquiis cognoscimus. neque autem aliud quidquam inde comperitur, nisi quod constitisse carmen e centum versibus et Σαλαμῖνα inscriptum fuisse auctores quidam tradunt (Plut. Sol. 8. Suidas s. v. Σόλων. Eudoc. p. 387.). praeterea χαριέντως illos πάνυ πεποιημένους fuisse Hermippo haud dubie auctore (vid. spec. I. p. 10. et 27.) Plutarchus addit et Polyaenus (1,20,1) eos ἀρήια ᾄσματα dicit.

Jam vero quamnam ob causam Solo civibus insulam ab aliis occupatam probro duxerit cum quaeritur, illud haudquaquam inter auctores discrepat, si quidem referunt, Athenienses cum bellum antea de insula Salamine contra Megarenses male gessissent, de victoria desperantes, ne omissum renovaretur, lege lata prohibuisse. capite enim ab eis sanctum esse traditur, ne cui ut renovaretur ad populum ferre liceret. quod quoniam narrant cum Plutarchus (Sol. 8.), Diogenes (1,46.), Justinus (2,7.), Frontinus (strat. 4, 7, 44.), Polyaenus (1, 20, 1.), alii, tum maxime Demosthenes (19, 252.), quo antiquiorem scriptorem tradidisse Solonem, ut insula expugnaretur, effecisse non invenimus, talem legem Solonis temporibus exstitisse Athenienses ipsos existimasse satis apparere mihi videtur. nihilo tamen setius eam exstitisse nostri homines (v. Prinz, de Sol. Plut. font. Bonnae. 1867. p. 3. sq.) negaverunt, cum tantam ignominiam ea contineri putarent, quantam Athenienses unquam sibi intulisse cogitari non possent. atenim similes leges, quibus quidquam ne quis ad populum ferret prohiberetur, etiam adultis Athenis haud ita raro perlatas esse satis constat (v. Thuc. 2, 24. 8, 15. — Schaefer, Demosth. I. p. 185. Boeckh, staatshaush. I. p. 194. ed. I.). etiamsi igitur ea lex, qua tanta se ignominia Athenienses affecerunt, in alia ulla republica bene temperata futurum non fuisse ut rogaretur concedo, tamen fieri sane potuisse putaverim, ut quod florentissimis quidem rebus de turpitudine securi in se admiserunt, id eo tempore, quo vel maxime res publica labefactata erat, cum suo dedecore facerent. ergo quod Demosthenes quamvis turpiter Athenienses fecisse credidit, equidem, etiamsi insignis quaedam turpitudo eo continebatur, tamen eos fecisse non negaverim. neque igitur quin illa lex, qua de agitur, Solonis temporibus fuerit, omnino dubitandum esse mihi videtur.

Solo igitur, ut bellum de Salamine insula in Megarenses renovarent, cum cives contra illam legem commovere studeret, carmine componendo ad poesim confugit, quod quidem illo tempore haud ita insolitum fuisse olim jam Grotius (gesch. Griechenl. übers. v. Meissner II. p. 71.) monuit. poësis enim tunc locum obtinebat solutae orationis, qua gentes humanitate politiores ut ad alios ita ad componendos, qui ad rem publicam bene et utiliter administrandam pertinent, libellos nunc utuntur. ad id vero ipsum, quod Solo voluit, efficiendum, cum civium animi incitandi atque inflammandi essent, ut ardore aliquo percussi legem, qua singuli capitis poena tenebantur, omnium paene consensu removerent atque tollerent, carmen multo plus valuisse soluta oratione quis est, qui neget?

Sed cum de vindicanda insula non modo ad populum ferre, sed omnino verba facere (νόμον ἔθεντο μήτε γράψαι τινὰ μήτ' εἰπεῖν. Plut. Sol. 8. θάνατον ζημίαν ψηφισαμένων, ἄν τις εἴποι κομίζεσθαι. Demosth. 19,252.) omnes lege prohibitos fuisse auctores narrarent, ne carmine quidem Solo cives, ut bellum inirent, adhortari sine magno suo periculo potuisse quibusdam visus est. itaque quomodo carmen in lucem ita protulerit, ut poenam quam maxime vitaret, magna opera alii alia excogitaverunt. alii enim Solonem carmen recitantem, ne supplicio afficeretur, insaniam simulasse, alii, ut sacrosanctus videretur, pro praecone se gessisse narraverunt. Hermippus vero, cujus auctoritatem Diogenes et Plutarchus secuti sunt, has duas, quae exstabant, relationes in unum ita conjunxit, ut Solonem insania simulata praeconis nomine carmen in foro Atheniensibus recitasse diceret (Plut. Sol. 8. Diog. 1, 46. cf. part. I. p. 9. sq.). quae quidem res quam absurda sit comprobare, quoniam parum credibilia et a Plutarcho et a Diogene tradita esse satis alii docuerunt, supersedere me posse puto. neque magis quod aut pro praecone se gessisse*) aut insaniam simulasse dicitur, fusius tractandum est, quandoquidem Demosthenes, quo nemo aut antiquior aut fide dignior de hac re scriptor facit mentionem, Solonem id ipsum periculum, quod utraque ratione effugere studuisse fertur, forti animo subiisse plane ac dilucide memoriae prodidit, cum dicit l. c.: τὸν ἴδιον κίνδυνον ὑποθεὶς ἐλεγεῖα ποιήσας ᾖδεν. in quibus vocabulum ᾖδεν, quo carminis recitatio significatur (cf. Aristid. v. II. p. 361. Dind.: τὰ μὲν εἰς Μεγαρέας ἔχοντα ᾆσαι λέγεται et Plut. Sol. 4: ἐν ᾠδῇ διεξῆλθε τὴν ἐλεγείαν) non nimis est premendum, siquidem verbis ἐλεγεῖα ᾄδειν formula quaedam videtur contineri. neque magis illud miraberis, quod ipse Solo carmen a se factum pronuntiasse dicitur, si eodem tempore Thespidem fabulas, quas composuerat, ipsum egisse memineris. ac vero neque qua ratione usus sit neque quo loco factum sit, certius atque accuratius compertum habemus. unum tantum constat, quod quidem scire plurimum nostra refert: rem prospere successisse ita, ut Athenienses Solonem auctorem secuti lege, qua prohibebantur, sublata contra Megarenses et bellum renovasse neque eo prius destitisse, quam in perpetuam insulae possessionem venissent.

Sed de eis, quae disputavimus, inter plurimos certe homines doctos convenit. at in summa disceptatione versantur ea, ad quae nunc pergendum est. quaeritur enim et quo duce expugnata sit insula et quo tempore et qua ratione. a Plutarcho igitur, qui sicut ceteri omnes scriptores antiqui ante leges a Solone latas Salaminem expugnatam esse sumit, duae de ipsa expugnatione relationes praebentur, quarum prior haec est. Solonem belli ducem creatum auctoritate Pisistrati collegae, quippe cui persuasisset, ut ipse quoque bellum renovandum censeret, maxime esse adjutum. ambos igitur una ad Coliadem pervectos esse eo tempore, quo mulieres Atticae ibi Cereris diem festum agerent; inde eos Salaminem nuntium misisse, qui se transfugam simulans Megarenses adhortaretur, ut mulieres et inopinatas opprimere et captas auferre conarentur. interea autem ipsos mulieres abduxisse eorumque vestimentis induisse juvenes armatos, qui tanquam mulieres ibi saltarent; itaque Megarenses, cum feminas oppressuri advecti essent, ab Atheniensibus muliebri veste tectis interfectos, deinde Salaminem insulam defensoribus nudatam facile expugnatam esse. jam vero haec prior Plutarchi narratio quanti sit facienda si quaeritur: ea probabilis non est non modo ob eam causam, quod uno velut ictu id bellum transactum esse dicitur, de quo antea Athenienses desperaverant, sed etiam quia Pisistratus una cum Solone rem gessisse narratur, falsa admodum judicanda est. neque enim fieri potuit, ut Pisistratus, quippe qui anno 527. a. C. n. senex mortuus (Thuc. 6, 54.) anno fere 600. natus sit, eo tempore, quo insula expugnata esse et traditur et putatur, ante leges a Solone latas (a. 594. sqq.) expeditionis ullius particeps esset**). non ille igitur ante leges latas aut in bello Salaminio gerendo ducem aut in perferendo auctorem Solonem adjuvare potuit. accedit vero ut nemo praeter Plutarchum Solonem rei Coliadensi interfuisse tradidit nisi Polyaenus (1, 20, 1.), qui quidem, cum ceteris in rebus eadem ac Plutarchus referat, nescio quem Plutarchi vel Hermippi auctorem secutus Solonem solum illum dolum commolitum esse nisi propter temporum rationem narrasse non videtur. quae cum ita sint, permulti alteram relationem a Plutarcho eis, quae postea Athenienses facere solebant,

*) hanc fuisse alterius narrationis vetustiorem formam apparet cum e versibus illis subditis: αὐτὸς κῆρυξ ἦλθον κτλ. tum e Plutarcheis verbis: ἀναβὰς ἐπὶ τὸν τοῦ κήρυκος λίθου. apud Diogenem eam paulo immutatam invenimus, cum scripserit: ἀνέγνω διὰ τοῦ κήρυκος κτλ., quibus Bernhardy (grundr. d. griech. lit. edit. 3. II. p. 514. et 469.) haud recte usus est.

**) Voemelius (exerc. chronol. de aetate Solonis et Croesi p. 19.) praeter Pisistratum tyrannum et anni 669. archontem alium tertium ejusdem nominis posuit, quod minime probari potest. — cf. quae Grotius dixit l. c. II. p. 72.

probatam (ἔοικε δὲ τῷ λόγῳ τούτῳ καὶ τὰ δρώμενα μαρτυρεῖν. ναῦς γάρ τις Ἀττικὴ προςέπλει σιωπῇ τὸ πρῶτον, εἶτα κραυγῇ καὶ ἀλαλαγμῷ προςφερομένων εἷς ἀνὴρ ἔνοπλος ἐξαλλόμενος μετὰ βοῆς ἔθει πρὸς ἄκρον τὸ Σκιράδιον . . . . ἐκ γῆς προςφερομένοις. πλησίον δὲ τοῦ Ἐνυαλίου τὸ ἱερόν ἐστιν ἱδρυσαμένου Σόλωνος. Plut. Sol. 9.) veriorem judicaverunt. hac enim altera narratur Solo solus belli dux, cum oraculi Delphici jussu heroibus Salaminiis sacra fecisset, unam navem quingentis voluntariis complevisse, qui clam ad insulam appulsi navem Megarensem exploratum missam oppressissent. quam eandam Atheniensibus completam cum ad urbem in insula sitam misisset, ipsum cum peditibus ab altera insulae parte Megarenses aggressum esse. itaque factum dicitur, ut cum Megarenses contra Solonem pugnam ingressi essent, Athenienses quingenti urbem insulae caperent. haec quidem cum per se verisimiliora sunt, tum sane ea, quam Athenienses observasse dicuntur, consuetudine confirmantur. tamen quod et Plutarchus Solonem a Pisistrato cum popularium animos incitantem tum hostes vincentem adjutum esse narrat et alii auctores a Pisistrato solo bellum aliquod contra Megarenses gestum esse referunt, id omnino neglegi non potest. itaque quae tradita essent explicari non posse nonnulli judicaverunt, nisi ita ut Salaminem insulam a Solone impetu improviso atque inopinato expugnatam postea ab Atheniensibus amissam a Pisistrato iterum captam esse censeremus. qua ratione a Bulwerio (Athens p. 138.) proposita, a Dunckerio (gesch. des altert. IV. p. 167. ann. et p. 295. sqq. cf. O. Mueller, Dor. I. p. 178. Curtius l. c. I. p. 648. ann. 137.) approbata nuper Prinzius (l. c. p. 6. sq.) et Bohrenius (philol. v. XXX. p. 187.) difficultates, quae exstarent, tolli posse demonstrare studuerunt. contra Thirlwallius (gesch. Griechenl. übers. von Schmitz II. p. 26.) et hanc eorum, qui duas expeditiones factas esse opinarentur, rationem criticae, qua nunc uteremur, arti aptam esse negavit et Solonis contra Salaminem expeditionem posteriore quam quo vulgo putaretur tempore factam esse censuit.

Hae tam contrariae sententiae de ea, qua de agimus, re his annis in medium prolatae sunt. ac quoniam qui postremi de ea disputaverunt, duas Salaminis insulae expugnationes, alteram Solone alteram Pisistrato duce factam, a rerum scriptoribus confusas esse judicaverunt, hanc prius tractare haud ineptum videtur esse. qua in re — id quod recte quidem Thirlwallius monuit — a via ac ratione nunc probata discedere eos, qui difficultatis tollendae causa eandem rem bis factam esse censeant, neque aliud facere quam eos, qui ob eandem videlicet causam duos ejusdem nominis viros fuisse ponant, praeteriens hoc loco commemoro. quae autem argumenta omnino ex eis, quae sunt tradita, ab istis allata sunt, ea deinceps recenseamus necesse est. namque si forte nullum, quod eo perducat, indicium in libris exstare apparuerit, non dubito quin nemo istorum viam repudiandam esse non confiteatur.

Atque unam rem ad sententiam suam confirmandam permultum valere isti arbitrati sunt. Plutarchus enim in Sol. c. 12., postquam scelus quod dicitur Cyloneum pluribus exposuit, ita scripsit: ταύταις δὲ ταῖς ταραχαῖς καὶ Μεγαρέων συνεπιθεμένων ἀπέβαλόν τε Νίσαιαν οἱ Ἀθηναῖοι καὶ Σαλαμῖνος ἐξέπεσον αὖθις. quae verba sic interpretati sunt: dum haec geruntur, Athenienses Nisaeam et Salaminem iterum amiserunt. atenim haec explicatio minime ferri potest. nam verba, quae sunt ταύταις ταῖς ταραχαῖς, non pertinent ad eam solam quae antecedit sententiam, ut ταραχαὶ sint judicii institutio et Myronis accussatio, quippe quibus rebus ipsis turbas magna certe ex parte sedatas esse Plutarchus affirmaverit: referenda ea potius sunt ad totam quae antecedit narrationem, ut scelere Cyloneo quae orta erant turbae dicantur ταραχαί. an priusquam illa re tranquillitas quaedam civitati recuperata esset, Salaminem ab Atheniensibus primum expugnatam esse judicas? immo turbis ex scelere Cyloneo ortis factum erat, ut insula a Megarensibus occuparetur. itaque illa de quibus agitur verba, si id, quod isti volunt, eis continerctur, ita vertenda aut adumbranda erant: intra illud tempus, quod intercessit ab acropoli a Cylone occupata ad Alcmaeonidas a Myrone accusatos (ταύταις ταῖς ταραχαῖς), Athenienses Nisaeam et Salaminem bis (αὖθις) amiserunt, quod recte se habere ne quis dicat non metuo. quid enim? permirum nonne esset, si Plutarchus, cum Lacedaemoniis arbitris pacem factam esse in c. 10. narrasset, in c. 12. insulam iterum amissam esse dixisset, quoniam hac pace bellum in omne tempus transactum esse et Plutarcho persuasum est neque quisquam his diebus negabit. quid, quod antea pugnas de insula ortas copiose narrans eam expugnatam iterum amissam esse ne uno quidem verbo commemoravit? verumenimvero hac re aut scriptorum aut scribentis perturbatio indicaretur tanta, ut eis ullam fidem habere prohibitus esse mihi viderer. si quis igitur illis verbis ita nitatur, ut opinionis commentum aliquod ab arte critica vel maxime alienum comprobare velit, is mehercle sperare non potest fore ut se alii sequantur.

Quae cum ita sint, aliam vocabuli αὖθις explicandi rationem olim Plassius (die griech. tyran. I. p. 183. ann. 5.) secutus est. is enim vocabulum αὖθις ad ipsam tantummodo auctoris orationem spectare putavit et Plutarchum, quippe qui in vitis describendis non semper temporum ordinem servaverit, nihil ea voce addita significare voluisse nisi de insula expugnata jam antea mentionem se fecisse moneret. quae sententia quamquam nec Prinzio aut Bohrenio nec mihi placet, cum nullum quo probetur exemplum afferri possit, tamen recte Plassius cognovisse mihi videtur, vocabulo αὖθις hoc loco non singularem quandam rem significari, sed Plutarchei generis dicendi quiddam proprium contineri. namque Plutarchus illa particula praeter necessitatem abundanti usus est eodem modo, quo a Romanis haud ita raro „rursus“ (tridui viam progressi rursus reverterunt. Caes. b. g. 4, 4. cf. ib. 6, 3. b. c. 3, 93. etc.), a nostris saepissime „wieder“ orationi addi solet, ut oppositio quaedam inter duas, quae narrantur, actiones earumque vicissitudo magis eluceat. quod verum esse ut intellegatur, Plutarchi nonnullos, quorum numerus facile augeri potest, exscripsi locos et quidem ita comparatos ut αὖθις particula verbo postposita sit. ὅτι (sc. ἡ γαστὴρ) τὴν τροφὴν ὑπολαμβάνει μὲν εἰς ἑαυτὴν ἅπασαν, ἀναπέμπει δ'αὖθις ἐξ αὐτῆς. Coriol. 6. ἐκείνοις συνέτυχε τότε παρ' οὐδὲν ἐλθόντας ἀπολέσθαι διαφυγεῖν αὖθις ἀπροσδοκήτους τόν κίνδυνον. Camil. 8. ὁ διδάσκαλος . . . . ἐξῆγεν αὐτοὺς ἡμέρας ἑκάστης ὑπὸ τὸ τεῖχος ἐγγὺς τὸ πρῶτον, εἶτ' ἀπῆγεν αὖθις εἴσω γυμνασαμένους. ib. 10. ἐξέπεσον αὖθις οἱ πολλοὶ τῆς πρὸς αὐτὸν εὐνοίας, quae pertinent ad ea quae antecedunt: ἐδυσωποῦντο τὴν ἀρετήν καὶ λόγον ἀλλήλοις ἐδίδοσαν ὡς ἐκεῖνον ἀποδείξοντες. Coriol. 15. praeterea conferas velim quae Hertleinius disseruit (zur literatur des Xenoph.) in annal. phil. Fleckeisen. a. 1867. vol. 95. p. 475. quod cum ita sit, non dubito, quin etiam eo quo de agitur loco vocabulum αὖθις ita interpretandum sit, ut nihil aliud significetur nisi Athenienses et Salaminem et Nisaeam, cum in dicionem suam aliquando redegissent, eo tempore, quo ex scelere Cyloneo civitas turbata esset, rursus amisisse. ac tantum abest, ut altera insulae amissio priori opponatur, ut notio amittendi, quae inest in vocabulis ἀπέβαλον et ἐξέπεσον, obstet notioni possidendi vel occupandi, quae etiamsi non ipso verbo addita tamen legentium animis cogitatur. ergo bis Salaminem insulam ab Atheniensibus vi et armis recuperatam esse hoc loco non demonstratur.

Satis mihi multa verba fecisse videor de ea ut ita dicam vocula, qua ad probandam sententiam suam non pauci falso usi sunt; restat de universo loco ut pauca addam. ac primum quidem si verba ταύταις ταῖς ταραχαῖς ad ea quae dixi recte referuntur, Plutarchus et is quem secutus est Salaminem insulam ante bellum Solone auctore ortum aliquamdiu in Atheniensium dicione ac potestate fuisse sunt opinati. quod quidem recte num fecerint, infra quaeretur; sed ad eam in qua versamur quaestionem magis pertinet, quod Nisaeam Salamini adjunxerunt, ut Nisaea non minus quam Salamis Atheniensium aliquamdiu ante idem bellum fuisse dicatur. quod factum esse cum cogitari omnino nequeat, quoniam ipsorum emporio ab Atheniensibus occupato bello de possessione insulae gerendo desistere Megarenses coactos esse apparet, hac re quid de omnibus his verbis judicandum sit satis indicari putaverim. tantum enim abest, ut illa quidem, quae Cyloneae narrationi quasi aliena interposita sunt, derivata sint ex integro quodam antiquarum rerum fonte, ut ex Hermippi mente orta sint, quem tam sagacem scriptorem quam plurima posset ratiocinatione quadam excogitare iisque res traditas exornare studuisse harum quaestionum part. I. iterum ac saepius argumentis mihi videor probasse. is Salaminem, cum res et Atheniensium eo quod dicitur Cyloneo scelere turbarentur et Megarensium Theagene tyranno florerent, ab his occupatam esse — nescio an recte — et ratiocinatione conjecit et dignum putavit, quod prius omissum Cylonearum rerum narrationi insereret.

Alter vero locus, quo ei quibus repugno opinionem suam confirmari arbitrati sunt, est Justini 2, 8., a quo Prinzius (l. c. p. 16.), id quod jam antea Dunckerus (l. c. IV. p. 167. ann.) cognovisse sibi visus erat, distincte ac perspicue duas insulae expugnationes discerni judicavit. sed ne hoc quidem jure. Justinus enim in c. 7. Solonem insaniam simulantem carmine recitato effecisse narrat, ut

Athenienses bello contra Megarenses renovato insulam Salaminem expugnarent. et haec sunt ultima capitis 7. verba: „omniumque animos ita cepit, ut extemplo bellum adversus Megarenses decerneretur insulaque devictis hostibus Atheniensium fieret.“ deinde in c. 8. ita pergit: „interea Megarenses, memores illati Atheniensibus belli et deserti (veriti al.), ne frustra arma movisse viderentur, matronas Atheniensium in Eleusiniis sacris noctu oppressuri, naves conscendunt. qua re cognita dux Atheniensium Pisistratus juventutem in insidiis locat“ etc., et sequitur narratio ejusdem doli, quem Plutarchus Hermippum secutus Solonem una cum Pisistrato ad Coliadem commolitum esse narrat. primum igitur tantum abest, ut insulam Solone duce expugnatam esse ille dicat, ut bello Solone quidem auctore renovato Atheniensium eam omnino factam esse narret. deinde quod particula „interea“ ea, quae de Pisistrati dolo sequuntur, eis annexa sunt, quae de Solone belli auctore antecedunt, hoc vocabulum idem esse ac „postea“ i. e. „alio bello exorto“ jure dici minime potest. immo vero siquidem id in narratione scriptoris admodum neglegentis multum valere eique magnam vim tribuendam esse censueris, „interea“ ad ea ipsa quae proxima sunt commemorata recte refertur, ut id tempus significetur, quod inter carmen recitatum et insulam expugnatam intercessit. medio igitur bello si ea quae narrantur accidisse particula „interea“ affirmari tibi persuaseris, illa quae exscripsi bene congrunut cum hisce exstremae narrationis verbis: „Pisistratus paulum a capienda urbe afuit“, quibus bellum illo dolo confectum esse haud dubie negatur. deinde verbis, quae sunt „ne frustra arma movisse viderentur“, satis demonstratur, capite 8. de eodem bello, quo in exstremo capite 7., non de alio agi. namque mulieribus captis fieri poterat, ut bellum, quod gerebant, non frustra gererent; fieri non poterat, ut bellum, quod frustra gesserant, perfectum in aliud mutarent. nihil igitur restat, quod ab istis sit, quibus repugno, nisi verba „memores illati Atheniensibus belli et deserti“, quibus si — id quod minime licet —, neglecta „interea“, particula „quondam“ addatur, forsitan in istorum sententiam interpreteris. atque miror, quod isti bellum Atheniensibus (sc. a Megarensibus) illatum et desertum intellegunt id, ad quod Megarensibus inferendum Solonem cives incitasse et quod Solonem ducem Megarensibus devictis confecisse ipsi statuunt. quid, quod Megarenses memores belli prioris alterum bellum non indictum eo conflasse dicuntur, quod mulieres Athenienses noctu opprimere conabantur? itaque haec verba, si modo aliquid veri in eis inest, intellegi non possunt nisi ita: Megarenses cum a bello cum Atheniensibus de Salamine orto aliquando nimium relaxavissent, se in hostium fines non sine aliquo commodo suo antea ingressos esse recordati (v. p. 12.) denuo bellum acrius gerendum in Atticam transferre constituerunt. quae cum ita sint, quod Justinus Pisistratum bello Megarensi rem quandam gessisse refert, dignum illud quidem judico, quod paulo infra recenseatur; sed tamen nunc satis habeo docuisse, ne apud Justinum quidem, nisi quis verbis traditis quasi vim fecerit, duplicis Salaminis insulae expugnationis indicium inveniri.

Alia igitur suae opinionis testimonia quoniam isti afferre non potuerunt, in eis, quae tradita sunt, nihil exstat, quo insulam bis captam esse ut putemus impellamur. immo quicunque scriptores de hac re egerunt, unam omnes expugnationem insulae fuisse rettulerunt. quam ob rem ipsi illa, quam et supra laudavimus et semper servandam esse profitemur, historiae via ac ratione usi duabus non sumptis difficultates, quae supersint, tollere studeamus necesse est. quod ut fiat, jam quaeritur, num re vera in eis, quae tradita sunt, quidquam causae et momenti insit, cur adducamur, ut Solonem et Pisistratum una ac conjunctis quasi viribus insulam expugnasse arbitremur. nam si forte contra apparuerit, unum tantum sive Solonem sive Pisistratum ab eis auctoribus, quibus certa fides habenda sit, belli de Salamine contra Megarenses ducem fuisse tradi: nihil sane superit, quo quis, ut duas expugnationes factas esse statuat, omnino commoveatur.

Atque hanc quaestionem instituturi ab eadem re proficiscamur, de qua modo disseruimus et quam praeter Justinum etiam Aeneas Tacticus (4.) Frontinus (4, 7, 44.) Plutarchus (Sol. 8.) Polyaenus (1, 20, 1.) exhibent, cum referunt Megarenses, mulieres Atticas sacra facientes oppressuros, insidiis collocatis ab Atheniensibus deletos esse. quod quidem cum Justinus aliique Eleusine factum esse narrent, in errorem inciderunt, quia feminarum sacra, de quibus agitur, non Eleusine, sed Halimunte ad Coliadem fieri solita esse Plutarchus et Polyaenus recte docent (Hermann, lehrb. d. griech. antiq. II. § 56. n. 20.

(p. 387. ed. II.) Mommsen, heortol. p. 300. n.). praeterea inter eos quos dixi auctores, qui plurima praebent, Justinus et Plutarchus, ut quo duce rem gestam esse dicant nunc quidem praetermittam, eo inter se discrepant, quod hic Athenienses consilii fallacis auctores fuisse dicit, cum ipsi Megarenses ad feminas opprimendas transfuga misso pellexissent, ille Megarenses ultro feminas opprimere conatos esse narrat, qua de re certiores facti Athenienses eos antevenissent. apud Plutarchum igitur ea, quae Justinus tradidit, aucta esse videmus addita causa qua Megarenses, ut rem agerent, nescio cui auctori commoti esse videbantur. atque is causam addidit eo nimirum consilio, ut Atheniensium eorumque ducis, quippe qui rem prudenter et excogitasset et effecisset, gloriam augeret. itaque si quidem omnibus quos attuli locis eandem rem narrari apparet, inter ea quae diverse feruntur simpliciorem Justini narrationem pleniori Plutarcheae praeferre non dubitabimus, praesertim cum ea quae Justinus refert ex antiquiore libro repetita esse, quam ea quae Plutarchus auctore Hermippo narrat, ob aliam quoque causam verisimile sit. quae Justinus enim, quem totum ad Trogi auctoritatem se contulisse constat, memoriae prodidit, ea ex Ephori libris derivata esse putantur (v. Wolffgarten, de Ephori et Dinonis historiis a Trogo Pompejo expressis. Bonnae. 1868.), quod quidem apte cum eis congruit, quae de ratione, quae inter Hermippum et Ephorum intercedere videatur, in part. I. p. 27. sqq. ipse disserui. Hermippi igitur opera factum est, ut Megarenses, quod antea sua sponte gessisse narrabantur, ad id ab Atheniensibus certo consilio incitati esse dicerentur. denique vero, ut ad rem institutam redeamus, in hac ipsa pleniore Hermippi narratione Solonem et Pisistratum una et doli auctores et belli duces fuisse dicitur, cum in simpliciore illa et antiquiore, quae ab Ephoro orta apud Justinum exstat, Pisistratum solum et bello praefuisse nec dolo non usum esse narretur (ac protinus classe captiva intermixtis mulieribus, ut speciem captarum matronarum praeberent, Megara contendit. Just. 2, 8.). quae cum ita sint, dubitari nequit, quin Hermippus aut ea ratione, quam propriam ei fuisse in priore specimine docui, narrationem, qua Solo, cum altera, qua Pisistratus dux fuisse dicebatur, in unum conjunxerit, aut nulla re nisi Solonis gloriae augendae studio commotus nullo auctore ei narrationi, qua Pisistratus celebrabatur, illius nomen inseruerit. rem igitur Coliadensem, si antiqua sequimur, neque ad Solonem pertinere nobis judicandum est et a Pisistrato gestam esse ab eis, quibus major est habenda fides, auctoribus affirmatur. ceterum quo Plutarchi narrationem probabilitate carere supra dixi, id ipsum in Justini libro non invenitur. nam is Pisistratum re Coliadensi gesta statim urbem, sive Nisaeam dicit sive Megara, expugnasse eoque bellum confecisse verbis, quae sunt „paulum a capienda urbe afuit“, aperte negat.

Altera Plutarchi narratio verbis ἄλλοι δέ φασιν allata, qua Solo insulam solus expugnasse traditur, apud alium rerum scriptorem non invenitur. nullius igitur auctoritate, ut fidem illi habeamus, adducimur nisi Hermippi, qui quidem eam verisimiliorem dicit eisque, quae τὰ δρώμενα appellantur, comprobare studuit. atque si ipsam narrationem paulo accuratius perpenderimus, suspicionem gravissimam auctor vel eo nobis movet, quod ab oraculo Delphico in ea proficiscitur. inde enim cum fabulam ab eo praeberi appareat ad sapientes, qui proprie dicuntur, pertinentem, nisi certissimis argumentis probata erit, eam veram judicare non licet. quamquam non est, cur τὰ δρώμενα vera esse negemus. est sane credibile et ea, quae Plutarchus narrat, Athenienses observasse et templum, quod a Solone consecratum esse dicebatur, in insula exstitisse. nihilo tamen setius, num ad ipsius Solonis tempora recte referantur, cum etiam statua ejus post annum 400. a. C. n. in insula posita ipso vivo collocata esse putaretur (Demosth. 19, 251.), dubitandum est. atque multo magis dubium mihi esse videtur id, quod Hermippus illis rebus comprobare studuit vel potius confingere ex eis conatus est. namque ut erat non tam plane comminiscendi quam acriter componendi studiosissimus, nisi eis quae dixi nullo argumento usus est ille ad fingendam eam narratiunculam, qua Solonem et magnum in artibus pacis nec minorem virtute bellica fuisse demonstraretur. itaque Solonis nomen in hac quoque narratione quaerentibus historiae veritatem nobis neglegendum atque omittendum est, quo quidem facto eandem ipsa habet vim, quam quae prior a Plutarcho proposita est. utrique enim, cum una clade Megarenses devictos non putem, subesse arbitror aliquid, quod re vera bello haud ita brevi levique acciderit. ergo in altera recte narratur, Pisistratum aliquando belli contra Megarenses gesti ducem fuisse hostesque arte usum oppressisse; in altera alio ejusdem belli tempore Atheniensibus ad meridianam insulae regionem (Wachsmuth, Athen. I. p. 443. n. 2.) prope a Sciradio promontorio appulsis Megarenses occupatos cladem accepisse.

Neque vero uno proelio debellatum esse demonstratur etiam tertio quodam, quod ab Herodoto memoriae proditum addere nunc liceat, ut quaecunque singula de bello Salaminio tradita sunt uno jam ordine congeram. Herodotus enim (1, 30.) Tellum Atheniensem, quem Solo beatum praedicasse dicitur, cecidisse proelio ad Eleusinem commisso contra vicinos (ἀστυγείτονας), quos Megarenses fuisse alii satis docuerunt (Schömann, verfassungsgesch. Athens. p. 16. Müller, Dorier I. p. 177. ann. I.). qua de re quamquam ipse perlegas velim, quae Bohrenius disseruit (l. c. p. 190. sq.), tamen etiam hoc loco unum quod suo jure dixit non omiserim: e verbis Herodoti, quae sunt πόλιος εὖ ἡκούσης, illam rem post leges a Solone institutas factam esse apparere. accuratiorem quidem temporis quo acciderit descriptionem spero fore ut in extrema hac dissertatione ipse in medium proferam.

Deinde quartum aliquod, quod ad bellum illud pertinet, Pausanias (1, 40, 5.) tradidit, cum dicit: ἐνταῦθα τῷ ναῷ τριήρους ἀνάκειται χαλκοῦν ἔμβολον. ταύτην τὴν ναῦν λαβεῖν φασι περὶ Σαλαμῖνος ναυμαχήσαντες πρὸς Ἀθηναίους. in Olympieo igitur Megarensi Pausaniae aetate navis Atticae rostrum ostentabatur, quam bello Salaminio pugna navali captam esse Megarenses perhibebant, unde iterum, ut plura non dicam, bellum haud ita leve breveque fuisse elucet.

Quinto denique loco affero, quae scripta videmus apud Herodotum (1, 59.): πρότερον (sc. priusquam tyrannus exstitit Pisistratus) εὐδοκιμήσας ἐν τῇ πρὸς Μεγαρέας γενομένῃ στρατηγίῃ, Νίσαιάν τε ἑλὼν καὶ ἄλλα ἀποδεξάμενος μεγάλα ἔργα. quae verba, cum ab auctore gravissimo orta omnium, quae de bello Salaminis insulae causa gesto tradita sunt, primum fere locum obtineant, ad eam quam instituimus quaestionem plurimum valent dignaque sane sunt, quae accuratissime considerentur. primum igitur Herodotus Solonem bello interfuisse neque hoc loco neque usquam commemorat. deinde Pisistratum belli Megarensis summam obtinuisse et rebus bene gestis magnam sibi gloriam peperisse aperte ac dilucide narrat. praeter alias autem res Nisaeam, Megarensium emporium, eum cepisse affirmat, quod unum omnium praeclarissimum arbitratur ita, ut Salaminem ipsam ejus opera Atheniensium factam esse non addiderit. quod si quis miretur, id quod supra dixi, Megarenses ipsorum emporio occupato bello desistere sine dubio coactos esse monuerim. jam igitur Salamis ipsa cum aliis rebus praeclare gestis tum illis fortasse victoriis, de quibus aliquid veri, quantulum idcunque est, in duabus quas tractavimus Plutarchi narrationibus inhaerescit, ab Atheniensibus occupata erat: cum hostium emporio a Pisistrato expugnato bellum acerbissimum ac gravissimum confectum est, cujus rei memoriam quandam etiam Hermippi verba a Plutarcho in Sol. c. 12. tradita, de quibus egi p. 8. sq., obscuratam quidem indicant.

Quoniam igitur omnes deinceps res et contuli et tractavi, ex eis locis, quibus singulae, quae ad bellum Salaminium pertinent, res narrantur, Solonem belli summae ipsum praefuisse non apparere fore ut concedatur spero. contra Pisistrato duce totum bellum gestum esse his sane locis, qui quidem ob id ipsum magni sunt momenti, quod ad singula pertinent, vel maxime probari videtur. itaque cum quaerendum jam sit, num eis locis, quibus de Salamine insula expugnata in universum disseritur, contrariae sententiae argumenta exstent, duos inveni, quos quis forsitan ita interpretetur. nam et Valerius Maximus (5, 3. ext. 3.) haec prodidit: „jam Solon . . . . qui Salaminem velut hostilem aram ex propinquo saluti eorum imminentem recuperavit", et Demosthenes (61, 60.): Σόλωνα . . . . ὃς οὐκ ἀπεληλαμένος τῶν ἄλλων τιμῶν, ἀλλὰ τῆς μὲν ἀνδρείας τὸ πρὸς Μεγαρέας τρόπαιον ὑπόμνημα καταλιπὼν τῆς δ'εὐβουλίας τὴν Σαλαμῖνος κομιδήν. atenim his ipsis locis nos doceri putaverim, quomodo omnino factum sit, ut belli auctor idem belli dux fuisse diceretur. Solo enim, qui elegia composita ut bellum renovaretur effecerat, cum res bene successisset, idem is erat, cujus opera et auctoritate insula in dicionem Atheniensium esset redacta. quam ob rem, etiamsi bello ipsi non interfuerit, tamen „insulam recuperasse", prout verba intellegebantur, et recte et falso dici poterat. quod cum ita esset, Athenienses ei, ut gratiam referrent, in insula Salamine statuam posuerunt, qua illius rei memoria posteritati propagaretur. quo facto praesertim cum et Solonis propter legum scriptarum praestantiam gloria magis magisque amplificaretur et Pisistrati tyranni, quem de re publica bene meritum esse nemo antiquus nisi Thucydides et Aristoteles satis perspexit, plus aequo imminueretur, nihil facilius potuit fieri, quam ut rerum a Pisistrato gestarum obliti Solonem ipsum belli ducem insulam expugnasse et Athenienses dictitarent et scriptores referrent. illis igitur auctoribus, quorum in verbis utrum Solo belli dux an auctor belli significetur etiam dubitari potest, jam sufficit opponere eos, qui Solonem ducem non fuisse eo probare videntur, quod quamquam eum elegia composita cives ad bellum renovandum commovisse narrant, tamen eum summae praefuisse non commemorant. quo ex numero neminem jam affero nisi Pausaniam, qui eo quam supra attuli loco (1, 40, 5.) ita pergit: ὁμολογοῦσι δὲ καὶ 'Αθηναῖοι χρόνον τινὰ Μεγαρεῦσιν ἀποστῆναι τῆς νήσου, Σόλωνα δὲ ὕστερόν φασιν ἐλεγεῖα ποιήσαντα προτρέψαι σφᾶς, καταστῆναι δὲ ἐπὶ τούτοις ἐς ἀμφισβήτησιν 'Αθηναῖοι, κρατήσαντες δὲ πολέμῳ Σαλαμῖνα αὖθις ἔχειν. quibus verbis sive quae Athenis comperta ipsa meminerat Pausanias refert sive — id quod verisimilius judico — quae ut cetera Megaris narrata auditione acceperat: exstitisse ex eis famam apparere videtur, qua nihil aliud Solonem fecisse nisi cives ad bellum incitasse tradebatur. Megarenses autem narrasse Pisistratum Atheniensium bello Salaminio ducem fuisse etiam magis ex eis apparet, quae apud Strabonem (9. p. 394.) scripta legimus de diversitate inter memoriam Atheniensium et Megarensium intercedenti. versu enim subdito hos dixisse a Pisistrato, illos a Solone Homerum apud Lacedaemonios judices testem adhibitum esse Strabo narrat. quod quomodo factum sit, cum re vera illud Soloni tribuendum esse aliorum testimoniis atque auctoritate constet, intellegi nequit, nisi totum bellum a Pisistrato administratum esse Megarensium memoria ita proditum fuisse cogitatur, ut etiam quae in pace apud Lacedaemonios agenda Solo fecisse recte quidem dicebatur, belli duci Pisistrato addicerent, cum Athenienses ea quae ipso bello gesserat odiosissimus ille tyrannus clarissimo legumlatori tribuerent.

Accedit vero quod Solonem bellum administravisse unus auctor ipsis verbis negavit. Plutarchus enim scripsit in comp. Sol. et Popl. 4: τῶν μέντοι πολιτικῶν (sc. τῶν τοῦ Σόλωνος) οὐδὲ τὰ πρὸς Μεγαρεῖς Δαΐμαχος ὁ Πλαταιεὺς μεμαρτύρηκεν, ὥσπερ ἡμεῖς διεληλύθαμεν. quae verba cum plurimi Daimachi veritati diffisi temere neglexissent, nuper paulo artificiosius explicavit Prinzius, quippe qui eis contineri Daimachum res a Solone bello Megarensi gestas non commemoravisse judicaverit. atenim Plutarchus si id voluisset, profecto permultos scriptores, in quos idem caderet, afferre potuit. neque vero hac re sententiam, quam sequebatur, probare poterat: Solonem virtute Poplicola inferiorem fuisse. an aequum esse censebat, si qua res a scriptore quodam memoriae non esset prodita, eam factam omnino non esse putari? immo hoc ferri nequit. quod ipse sentiens, etiamsi alterum illud, ex quo Daimachus Solonem bello interfuisse negaverit, insit in eis verbis, de quibus agitur, tamen huic rei nihil tribuendum esse judicat, quia „Daimachi fides etiam alias minima fuerit (Strabo II. p. 70.)“. sed ne hanc quidem sententiam, quamquam Bohrenius (l. c. p. 189. ann. 21.) ei assensus est, equidem probaverim. jure sane fidem habere tali auctori, qualis Daimachus fuisse dicitur, dubitaveris in eis rebus, quae ab aliis rerum scriptoribus non commemoratae nec per se verisimiles ab eo solo narrentur. sed si rem aliquam, quam alii tradiderant, ipse negavit, hoc non sine certa causa fecisse mihi videtur. et Daimachus, cum de ea re agatur, quam propter temporum longinquitatem sine ira et studio auctor Athenis non ortus narrasse utique cogitandus est, cur Solonem bello interfuisse negaverit, non aliam causam reperiri posse video nisi quod ab aliquo auctore id negari ipse invenerat. exstabant igitur inter rerum scriptores, qui belli gloriam Solonem sibi peperisse negarent. quodsi haud ita raro ad hominem illustriorem ab homine minus praeclaro aliquam rem bene gestam translatam esse meminerimus, dignam quae probetur perscrutandi viam ac rationem secuti, quod re vera a Pisistrato tyranno et Atheniensibus semper inviso et a rerum scriptoribus minime laudato praeclare gestum erat, id falsa memoria Soloni legumlatori sapientissimo et omnibus temporibus vel maxime celebrato attributum esse arbitrari non dubitabimus. Solonem igitur ut primi belli sacri (v. spec. I. p. 12.) ita belli, quo Salamis expugnata est, Megarensis, cum vere utriusque auctor fuisset, a scriptoribus, qui ejus gloriam aucturi magnum domi nec minorem in bellis eum fuisse videri volebant, falso ducem factum esse judicandum est.

Itaque ut paucis quae disputavi comprehendam: Solo carmine, quod composuerat, publice recitato effecit, ut bellum contra Megarenses Salaminis insulae expugnandae causa renovaretur. ipse autem bello, quod haud ita brevi tempore confectum est, neque praefuit neque interfuit, sed Pisistratus re optime gesta et Nisaea capta ad finem perduxit. quae cum ita sint, restat ut quo tempore insula expugnata sit, quantum fieri potest, describere conemur.

Atque in hac re apte a verbis Plutarcheis ταύταις δὲ ταῖς ταραχαῖς καὶ Μεγαρέων συνεπιθεμένων . . . . . . Σαλαμῖνος ἐξέπεσον (Sol. 12.) proficiscemur, quae quamquam ratiocinatione quadam inventa esse supra dixi, tamen dubitari vix potest, quin auctor Salaminem in Megarensium dicionem venisse paulo postquam arx Atheniensium a Cylone occupata esset recte affirmet. alteram enim occupationem cum altera ita cohaesisse verisimile est, ut Theagenes, Megarensium tyrannus, generum suum Salamine insula occupata aut adjuvare aut ulcisci studeret. quod ipsum eo tempore factum est, quo Atheniensium vires maxime debilitatae jacebant, quoniam civitas partium certaminibus discors Epimenidis demum expiatione (a. 596. a. C. n.) et Solonis legibus in meliorem condicionem est redacta. contra Megarensium res per idem tempus maxime florebant. Theagenes enim a. 621. a. C. n. tyrannidem instituerat, qua non ante a. 590. sublata initio optimates rem publicam non minus feliciter moderabantur. neque igitur eo tempore Salaminem ab Atheniensibus expugnatam esse verisimile est. contra eo ipso tempore multis cladibus acceptis ab eis legem perlatam esse putaverim, qua omnes, ut bellum insulae expugnandae causa denuo gereretur, ad populum ferre vetarentur. quo facto cum bello intermisso res publica Solone auctore bene esset composita, eorum juventus interea sensim recreata et aucta est (τῶν νέων ὁρῶν πολλοὺς δεομένους ἀρχῆς ἐπὶ τὸν πόλεμον. Plut. Sol. 8.). tum demum lege illa sublata bellum renovatum est, quod quo ipso anno factum sit accurate quidem definiri nequit. neque enim aliud quidquam habemus, quo utamur, nisi ea, quae de Pisistrati vita tradita sunt. ac si recte Plutarchus a Pisistrato Solonem, cum cives ut bellum denuo inirent commovere studeret, adjutum esse dicit (μάλιστα δὲ τοῦ Πεισιστράτου τοῖς πολίταις ἐγκελευομένου καὶ παρορμῶντος πεισθῆναι τῷ λέγοντι sc. Σόλωνι. Sol. 8.), bellum ante a. 580. a. C. n. renovatum esse sumi vix potest, quippe quo anno Pisistratus viginti fere demum annorum fuerit. neque dubie ante illum annum non est debellatum, quoniam Pisistrato duce Nisaea capta est (Herod. 1, 59.). nescio vero an finis belli, cum eo tempore, quo rerum potitus est, bellicae Pisistrati gloriae recentem memoriam fuisse cum ex ipsa re tum ex Herodoti verbis apparere videatur, ab tyrannide occupata etiam multo propius afuerit. tunc vero Atheniensium vires recreatas esse jam dixi et pax inter eos concordiaque a Solone aliquantum reconciliatae erant. Megarensium contra opes corruerant, cum civitate in duas partes divisa acerrimum optimatium et plebis certamen exarsisset. res igitur Megarensium et Atheniensium eo tempore, quo Salamis ab his est expugnata, prorsus contrariae erant atque fuerant eo tempore, quo insula ab illis occupata erat. atque haec sententia — id quod paene admodum supervacaneum esse videtur — vel maxime confirmatur cum eo, quod Atheniensium πόλιος εὖ ἡκούσης Tellum bello Megarensi cecidisse apud Herodotum (1, 30.) scriptum legi jam dixi, tum alia re, quae eo, quem identidem attuli, Pausaniae loco (1, 40, 5.) narrata et a me adhuc praetermissa et sicut illa Daimachi verba, de quibus exposui, aequo temerius ab aliis neglecta est. Pausanias enim ibi narrandi finem ita facit: Μεγαρεῖς δὲ παρὰ σφῶν λέγουσιν ἄνδρας φυγάδας, οὓς Δορυκλείους ὀνομάζουσιν, ἀφικομένους προδοῦναι Σαλαμῖνα Ἀθηναίοις. quibus verbis etiamsi Bohrenius (l. c. p. 189.) nihil contineri nisi narrationem fictam, qua Megarenses excusarentur, recte dixerit, tamen aliquid veri, quod ejus ansam dederit, ei subesse pro certo statuendum est. itaque ea, ut minimum dicam, Megarenses ipsos se eo tempore Salamine expulsos et bello devictos esse putasse demonstratur, quo φυγάδες qui dicuntur exstarent. quod cum esset eo tempore, quo tyranno oppresso civitas in diversas partes discesserat, ea quae Megarensium memoria prodita sunt optime congruunt cum hac quam nos quidem ob alias causas statuimus sententia, ex qua Salamis post leges a Solone latas paulo ante occupatam a Pisistrato tyrannidem ab Atheniensibus expugnata est.

Megarenses igitur, ut unum quod restat addam, et Salamine expulsi et Nisaea privati, cum de victoria desperarent, ad Lacedaemoniorum consanguineorum arbitrium confugerunt, cui etiam Athenienses se subicere parati erant (Plut. Sol. 10. Diog. 1, 48. Ael. v. h. 4, 7, 19. schol. ad Demosth. 19, 251.

Strabo 9, p. 394.). nomina quidem et numerum arbitrorum, quae a Plutarcho referuntur, ficta esse ex eis, quae in part. I. p. 11 disserui, fore ut concedatur spero. sed cum Pisistratus bellum gessisset, Solo, quippe qui et summa auctoritate inter cives floreret et simili munere jam alio tempore bello sacro gesto bene functus esset, quin cum Lacedaemoniis de judicio egerit, non est quod dubitemus. causam igitur Solo Atheniensium cum diceret, miror quod inter ea, quibus insulam civibus suis vindicare studuisse fertur, Salaminem ante ipsum bellum Atheniensium fuisse non affirmasse, sed nihil aliud nisi quae aut ad fabulas aut ad mores pertinerent, afferens ad antiquissima tantum tempora respexisse dicitur. quae cum ita sint, dubito an Salamis insula ante Solonem nunquam in Atheniensium dicione fuerit. immo cum Megarenses insulam, quae antea sui juris erat, Theagene tyranno occupassent, tum demum eam, quam qui obtinebant mare Saronicum utrisque maximi momenti tenebant, ipsis Atheniensibus dignam visam esse putaverim, ad quam expugnandam extrema belli persequerentur. nihilo tamen setius Solo ut, cum cives de victoria desperassent, belli renovandi acerrimus auctor ita, cum hostes devicissent, actor aptissimus belli componendi arbitros Lacedaemonios adduxit, ut Atheniensibus insulam decernerent atque addicerent. ita factum est, ut mare eis in perpetuum aperiretur.

Ueber einige besondere sphärische und ebene Polygone.

Von Gymnasiallehrer **Dolega**.

1.

Die excentrische Anomalie eines Punktes einer sphärischen Ellipse.

Fällt man von einem Punkte P einer ebenen Ellipse (Fig. 1) auf die grosse Achse derselben eine Senkrechte, welche den über der grossen Achse als Durchmesser beschriebenen Kreis in einem Punkte P' schneidet, und verbindet man P' mit dem Mittelpunkte der Ellipse, so schliesst dieser Radiusvector mit der grossen Achse der Ellipse einen Winkel ϑ ein, welchen man bekanntlich die excentrische Anomalie des Punktes P der Ellipse nennt. Man kann diese Definition von der Ebene auf die Kugel übertragen. Beschreibt man nämlich (Fig. 2) über der grossen Achse AB einer sphärischen Ellipse einen kleinen Kugelkreis, legt man ferner durch einen Punkt P der Ellipse einen Hauptkreis senkrecht zur grossen sphärischen Achse und nennt den Schnittpunkt dieses Hauptkreises mit dem kleinen Kreise P', so schliesst der durch P' und das sphärische Centrum der sphärischen Ellipse gelegte Hauptkreis mit der grossen sphärischen Achse einen Winkel $P'OB$ ein, welchen man die excentrische Anomalie des Punktes P der sphärischen Ellipse nennen kann.

Man hat in der ebenen Geometrie den Satz (s. Fig. 1): Der Schnittpunkt der Senkrechten von einem Punkte P einer Ellipse auf die grosse Achse mit dem über dieser Achse als Durchmesser beschriebenen Kreise (P'), der Schnittpunkt der Senkrechten von demselben Ellipsenpunkte auf die kleine Achse mit dem über der kleinen Achse beschriebenen Kreise (P'') und der Mittelpunkt der Ellipse (O) liegen in einer Geraden. Dieser Satz, welcher eine zweite Definition der excentrischen Anomalie eines Ellipsenpunktes zulässt, nämlich mittelst des Kreises über der kleinen Achse, kann sofort von der Ebene auf die Kugel übertragen werden. Denkt man sich nämlich eine Kugel, welche die Ebene im Mittelpunkte der Ellipse berührt, und projicirt man die Punkte, Geraden und Curven der ebenen Figur durch Verbindungsgerade mit dem Mittelpunkte der Kugel auf dieselbe, so ist die Projection der ebenen Ellipse eine sphärische Ellipse, die Projectionen der beiden Kreise über den Achsen der ebenen Ellipse sind kleine Kugelkreise über den Achsen der sphärischen Ellipse, die Projectionen der Senkrechten vom Ellipsenpunkte P auf die Achsen der ebenen Ellipse sind Hauptkreise, die durch denselben Punkt der sphärischen Ellipse gehen und senkrecht zu den sphärischen Achsen derselben sind, und die Projection der Geraden durch die drei Punkte, von denen der planimetrische Satz handelt, ist ein Hauptkreis, welcher die drei entsprechenden Punkte der Kugel enthält. Also (Fig. 2): Beschreibt man über den beiden Achsen einer sphärischen Ellipse kleine Kreise und legt man durch einen Punkt P der sphärischen Ellipse Hauptkreise senkrecht zu ihren sphärischen Achsen, so schneiden dieselben die beiden kleinen Kreise in zwei Punkten P' und P'', welche mit dem sphärischen Centrum O der sphärischen Ellipse in einem Hauptkreise liegen.

Wir denken uns jetzt (Fig. 3) ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit dem Mittelpunkte C der Kugel, auf welcher die sphärische Ellipse liegt, zusammenfällt. Die z-Achse gehe durch den Mittelpunkt der sphärischen Ellipse, die xz-Ebene falle mit der Ebene der grossen, die yz-Ebene mit der Ebene der kleinen sphärischen Achse der sphärischen Ellipse zusammen. Die drei Coordinatenachsen mögen die Kugel in den Punkten M, N, O treffen, so dass M der Pol der kleinen, N der Pol der grossen sphärischen Achse und O der Mittelpunkt der sphärischen Ellipse ist.

Jetzt versuchen wir die excentrische Anomalie eines Punktes P der sphärischen Ellipse durch die halben Achsen derselben u und v, sowie durch seine sphärischen Abstände von M, N, O auszudrücken. Der Hauptkreis durch P, welcher zur grossen sphärischen Achse senkrecht ist, schneide dieselbe in p', den über ihr beschriebenen kleinen Kreis in P', dann ist $\angle P'OM = \vartheta$ die excentrische Anomalie des Punktes P. Man hat nun in dem rechtseitigen sphärischen Dreieck OPM

$$\cos POM = \frac{\cos PM}{\sin PO}$$

und in dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck OPp' hat man

$$tg\, Op' = tg\, OP \,.\, \cos POM = \frac{\cos PM}{\cos PO}$$

Da ferner $P'O = u$ ist als sphärischer Radius des Kreises über der grossen Achse der sphärischen Ellipse, so hat man aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $P'Op'$

$$\cos \vartheta = \frac{tg\, Op'}{tg u} = \frac{1}{tg u} \cdot \frac{\cos PM}{\cos PO}.$$

Man erhält eine ganz ähnliche Formel für $\sin \vartheta$. Bezeichnet man nämlich den Schnittpunkt des durch P und M gelegten Hauptkreises mit der kleinen Achse durch p'', mit dem über ihr beschriebenen kleinen Kreise durch P'', so liegen nach dem oben abgeleiteten Satze O, P', P'' in einem Hauptkreise; es ist demnach $\angle NOP'' = \angle NOP' = -\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \vartheta - \frac{\pi}{2}$. Man erhält daher aus dem rechtseitigen Dreieck PON

$$\cos PON = \frac{\cos PN}{\sin PO}$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck POp''

$$tg\, Op'' = tg\, PO \,.\, \cos PON = \frac{\cos PN}{\cos PO}$$

Endlich erhält man aus dem Dreieck $Op''\, P''$, da $OP'' = v$ ist:

$$\cos p''\, OP'' = \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \vartheta = \frac{tg\, Op''}{tg v} = \frac{1}{tg v} \cdot \frac{\cos PN}{\cos PO}.$$

2.

Die Beziehung zwischen den excentrischen Anomalien zweier um einen Quadranten von einander abstehender Ellipsenpunkte.

Wenn alle Buchstaben dieselbe Bedeutung wie in dem vorigen Abschnitte und in Figur 3 haben, so bestehen, wie wir sahen, die Gleichungen:

$$1. \quad \left|\begin{array}{l} tg u \,.\, \cos \vartheta = \dfrac{\cos PM}{\cos PO} \\[2ex] tg v \,.\, \sin \vartheta = \dfrac{\cos PN}{\cos PO}. \end{array}\right.$$

Für einen beliebigen anderen Ellipsenpunkt Q, dessen excentrische Anomalie ϑ' ist, gelten die Gleichungen:

$$2. \quad \left|\begin{array}{l} tg u \,.\, \cos \vartheta' = \dfrac{\cos QM}{\cos QO} \\[2ex] tg v \,.\, \sin \vartheta' = \dfrac{\cos QN}{\cos QO}. \end{array}\right.$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen erhält man weiter:

3. $$1 + tg^2 u . \cos\vartheta . \cos\vartheta' + tg^2 v . \sin\vartheta . \sin\vartheta' = \frac{\cos PO . \cos QO + \cos PM . \cos QM + \cos PN . \cos QN}{\cos PO . \cos QO} = \frac{\cos PQ}{\cos PO . \cos QO}.$$

Ist der sphärische Abstand der Punkte P und Q ein Quadrant, also $PQ = \frac{\pi}{2}$, so ist $\cos PQ = 0$. Demnach erfüllen die excentrischen Anomalien zweier Punkte der Ellipse, welche um einen Quadranten von einander abstehen, die Gl.

4. $$1 + tg^2 u . \cos\vartheta . \cos\vartheta' + tg^2 v . \sin\vartheta . \sin\vartheta' = 0.$$

Gibt man dieser Gleichung die Form:

5. $$\cos\vartheta . \cos\vartheta' + \sin\vartheta . \sin\vartheta' \cdot \frac{tg^2 v}{tg^2 u} = -\frac{1}{tg^2 u},$$

so erkennt man sofort ihre grosse Aehnlichkeit mit der Lagrange'schen Formel für die Summation elliptischer Integrale, nämlich mit der Formel:

$$\cos am\, x . \cos am\, y + \sin am\, x . \sin am\, y . \Delta\, am\, (x - y) = \cos am\, (x - y).\text{*)}$$

In der That stimmen beide Formeln genau mit einander überein, wenn

6. $$\left| \begin{array}{l} \vartheta = am\, x \\ \vartheta' = am\, y \end{array} \right.$$
7. $$\left| \begin{array}{l} \Delta\, am\, (x - y) = \frac{tg^2 v}{tg^2 u} \\ \cos am\, (x - y) = -\frac{1}{tg^2 u} \end{array} \right.$$

gesetzt wird. Da u und v für dieselbe Ellipse constant sind, so geht aus einer der letzten Gleichungen hervor, dass, wie gross auch x und das davon abhängige y seien, $am\, (x - y)$ oder auch $(x - y)$ constant ist. Setzt man $y - x = a$, so ist also:

8. $$\left| \begin{array}{l} \vartheta = am\, x \\ \vartheta' = am\, (x + a) \end{array} \right.$$
9. $$\left| \begin{array}{l} \Delta\, am\, a = \frac{tg^2 v}{tg^2 u} \\ \cos am\, a = -\frac{1}{tg^2 u} \end{array} \right.$$

Man erkennt aus 8) zunächst, dass $am\, a$ der Werth von ϑ' ist, welcher dem Werthe $\vartheta = 0$ entspricht, d. h. die excentrische Anomalie des Endpunktes eines vom Scheitel der Ellipse ausgehenden, derselben eingeschriebenen Quadranten; ferner: wenn die excentrische Anomalie eines beliebigen Punktes der Ellipse $\vartheta = am\, x$ ist, so ist die excentrische Anomalie des um einen Quadranten von ihm abstehenden Ellipsenpunktes $\vartheta' = am\, (x + a)$, wo die Constante a die eben angegebene Bedeutung hat.

Der Modul dieser elliptischen Functionen ergibt sich aus den Gll. 9) durch Elimination von a. Quadrirt man nämlich die beiden Gleichungen 9), multiplizirt die zweite mit $-k^2$ und addirt beide zu einander, so erhält man: $1 - k^2 = \frac{tg^4 v - k^2}{tg^4 u}$ und hieraus:

10. $$k^2 = \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1}.$$

Man kann sich übrigens auch leicht direct überzeugen, dass ϑ und ϑ' die elliptische Differentialgleichung erfüllen. Durch Differentiation der Gleichung 4) erhält man nämlich:

$$tg^2 v\, (\sin\vartheta . \cos\vartheta'\, d\vartheta' + \sin\vartheta' . \cos\vartheta\, d\vartheta) - tg^2 u . (\cos\vartheta . \sin\vartheta' . d\vartheta' + \cos\vartheta' . \sin\vartheta . d\vartheta) = 0$$

oder:

$$(tg^2 v . \sin\vartheta . \cos\vartheta' - tg^2 u . \cos\vartheta . \sin\vartheta')\, d\vartheta' + (tg^2 v . \sin\vartheta' . \cos\vartheta - tg^2 u . \cos\vartheta' . \sin\vartheta)\, d\vartheta = 0.$$

Die Gleichung 4) ist eine Relation zwischen zwei Variablen ϑ und ϑ', deren eine sich daher durch die andere ausdrücken lässt. Da $\cos\vartheta = \sqrt{1 - \sin^2\vartheta}$ und $\sin\vartheta = \sqrt{1 - \cos^2\vartheta}$ ist, so ist die Bestimmung von $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ durch ϑ' und umgekehrt von $\sin\vartheta'$, $\cos\vartheta'$ durch ϑ auch praktisch leicht ausführbar. Sie erfordert in der That nur die Auflösung einer quadratischen Glei-

*) Vgl. Durège, Elliptische Functionen; pag. 110.

chung. Führt man dieselbe aus und beachtet man bei der Bestimmung der zusammengehörigen Werthe, dass Gl. 4) erfüllt werden muss, so findet man:

$$\textbf{11.}\quad\left|\begin{aligned}
\cos\vartheta' &= -\frac{tg^2 u \,.\, \cos\vartheta + tg^2 v \,.\, \sin\vartheta \,.\, \sqrt{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta - 1}}{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta}\\
\sin\vartheta' &= -\frac{tg^2 v \,.\, \sin\vartheta - tg^2 u \,.\, \cos\vartheta \,.\, \sqrt{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta - 1}}{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta}\\
\cos\vartheta &= -\frac{tg^2 u \,.\, \cos\vartheta' - tg^2 v \,.\, \sin\vartheta' \,.\, \sqrt{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta' + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta' - 1}}{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta' + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta'}\\
\sin\vartheta &= -\frac{tg^2 v \,.\, \sin\vartheta' + tg^2 u \,.\, \cos\vartheta' \,.\, \sqrt{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta' + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta' - 1}}{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta' + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta'}
\end{aligned}\right.$$

Setzt man in der oben erhaltenen Differentialgleichung im Faktor von $d\vartheta'$ für $\sin\vartheta'$ und $\cos\vartheta'$, im Faktor von $d\vartheta$ für $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ ihre Werthe, so erhält man:

$$\sqrt{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta - 1}\; d\vartheta' - \sqrt{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta' + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta' - 1}\; d\vartheta = 0$$

und wenn man jetzt durch das Product der beiden Wurzeln dividirt:

$$\frac{d\vartheta'}{\sqrt{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta' + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta' - 1}} - \frac{d\vartheta}{\sqrt{tg^4 u \,.\, \cos^2\vartheta + tg^4 v \,.\, \sin^2\vartheta - 1}} = 0$$

oder:

$$\frac{d\vartheta'}{\sqrt{(tg^4 u - 1) - (tg^4 u - tg^4 v)\sin^2\vartheta'}} - \frac{d\vartheta}{\sqrt{(tg^4 u - 1) - (tg^4 u - tg^4 v)\sin^2\vartheta}} = 0$$

oder:

$$\textbf{12.}\quad \frac{d\vartheta'}{\sqrt{1 - \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1}\sin^2\vartheta'}} - \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1}\sin^2\vartheta}} = 0.$$

Dieses ist aber die elliptische Differentialgleichung.

Bezeichnet daher α den Werth von ϑ', welcher dem Werthe $\vartheta = 0$ entspricht und setzt man

$$\alpha = am\,(a, k)$$
$$\vartheta = am\,(x, k),$$

so ergibt sich auch hier durch Integration $\vartheta' = am\,(x + a, k)$. Der Modul $k = \sqrt{\frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1}}$ ist hier direct aus der Differentialgleichung 12) zu entnehmen.

3.

Ueber rechtseitige sphärische Polygone, welche der sphärischen Ellipse eingeschrieben sind.

Sind ϑ und ϑ' die excentrischen Anomalien zweier Ellipsenpunkte P und P', welche von einander um einen Quadranten abstehen, so kann man, wie wir im vorigen Abschnitt sahen:

$$\textbf{1.}\quad \left|\begin{aligned}\vartheta &= am\,(x, k)\\ \vartheta' &= am\,(x + a, k)\end{aligned}\right. \qquad k^2 = \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1}$$

setzen, wo a eine constante Grösse bedeutet. Denkt man sich nun von P' aus eine zweite Sehne gelegt, wieder gleich einem Quadranten, deren Endpunkt P'' die excentrische Anomalie ϑ'' haben möge, so kann ϑ'' aus ϑ' nach derselben Regel bestimmt werden, wie ϑ' aus ϑ, d. h. es ist $\vartheta'' = am\,(x + a + a, k) = am\,(x + 2a, k)$. Fährt man mit dieser Construction von Sehnen fort, so wird allgemein der Endpunkt der n^{ten} Sehne (wobei jedoch nicht zu übersehen ist, dass sämmtliche Sehnen Quadranten sein müssen) eine excentrische Anomalie haben, die durch $\vartheta^n = am\,(x + na, k)$ ausgedrückt ist.

Soll nun der Endpunkt P^n der n^{ten} Sehne mit dem Ausgangspunkt P zusammenfallen, so können die excentrischen Anomalien von P und P^n nur um Vielfache von 2π von einander verschieden sein, und zwar um so viele Vielfache von 2π, als man bei der successiven Construction der Sehnen Umläufe um die Peripherie der Ellipse gemacht hat. Bezeichnet man die Anzahl dieser Umläufe mit p, so wird sich also das n-Eck schliessen, wenn

$$\vartheta^n - \vartheta = am\,(u + na, k) - am\,(u, k) = 2p\pi$$

ist, also

$$am\,(u + na, k) = am\,(u, k) + 2p\pi = am\,(u + 4pK, k),$$

woraus sich

$$na = 4pK\,,\; a = \frac{4pK}{n} \text{ und } \alpha = am\left(\frac{4pK}{n}, k\right)$$

ergibt.

Da α, welches die excentrische Anomalie eines vom Scheitel der Ellipse ausgehenden, derselben als Sehne eingetragenen Quadranten ist, der der rechten Seite gegenüberliegende Winkel eines rechtseitigen sphärischen Dreiecks ist, dessen andere beide Seiten gleich der halben grossen Achse der sphärischen Ellipse sind, so ist $\cos\alpha = -\frac{1}{tg^2 u}$. Man kann daher die Bedingung für das sich schliessende Polygon auch unter der Form:

$$2. \qquad \cos am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) = -\frac{1}{tg^2 u}\,,\; k^2 = \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1}$$

schreiben. Man erkennt hieraus, dass es nicht möglich ist, jeder sphärischen Ellipse ein geschlossenes Polygon von lauter rechten Seiten mit gegebener Seitenzahl und einer bestimmten Anzahl von Umläufen einzuschreiben. Es entspricht vielmehr jedem Werthe von u ein ganz bestimmter Werth von k, also auch von v. Umgekehrt entspricht jedem Werthe von v nur ein Werth von u.

Wenn k gegeben ist, so sind die beiden Achsen leicht zu bestimmen. Es ist nämlich

$$\cos^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) = 1 - \sin^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) = \frac{1}{tg^4 u}\,,$$

also:

$$\sin^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) = \frac{tg^4 u - 1}{tg^4 u}$$

$$k^2 \sin^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) = \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u}$$

$$\Delta^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) = \frac{tg^4 v}{tg^4 u}$$

und endlich:

$$\frac{\cos^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right)}{\Delta^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right)} = \sin^2 am\left(\frac{4pK}{n} - K, k\right) = \frac{1}{tg^4 v}\,.$$

Man hat also:

$$3. \quad \left|\begin{array}{l} tg^4 v = \dfrac{1}{\sin^2 am\left(\frac{4pK}{n} - K, k\right)} = \dfrac{\Delta^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right)}{\cos^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right)} \\[2ex] tg^4 u = \dfrac{1}{\cos^2 am\left(\frac{4pK}{n}, k\right)}\,. \end{array}\right.$$

Ist dagegen nicht k, sondern eine der beiden Achsen, z. B. u gegeben, so ist die Berechnung der anderen Achse schwieriger, da zunächst aus der Gleichung

$$\cos am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) = -\frac{1}{tg^2 u}$$

k gefunden werden muss, was allgemein wohl nur durch Probiren möglich ist. Doch lässt sich diese Berechnung in besonderen Fällen durch rein algebraische Rechnung ausführen und für einzelne bestimmte Werthe von n und p ergeben sich recht elegante Relationen zwischen u und v.

Unter den verschiedenen sphärischen Ellipsen, welchen sich ein Polygon der bezeichneten Art von gegebener Seitenzahl n und gegebener Zahl der Umläufe p einschreiben lässt, befindet sich auch ein Kreis, dessen sphärischer Radius leicht bestimmt werden kann. In diesem Falle ist nämlich $u = v$ zu setzen; in der Gleichung 2 pag. 20 wird daher $k = 0$ und die Bedingung $\cos am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) = -\frac{1}{tg^2 u}$ geht über in: $\cos \frac{p}{n} \cdot 2\pi = -\frac{1}{tg^2 u}$.

Aus der Formel 2 kann man noch einen interessanten Satz ablesen. Die Bedingung $\cos am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) = -\frac{1}{tg^2 u}$ enthält die excentrische Anomalie des Ausgangspunktes P nicht; die Lage desselben auf der Ellipse ist daher gleichgiltig, und man hat den Satz: Kann man einer sphärischen Ellipse, von einem Punkte ausgehend ein Sehnenpolygon von n Seiten einschreiben, die sämmtlich Quadranten sind, und welches sich nach p Umläufen um die Peripherie der Ellipse schliesst, so kann man die Construction von einem beliebigen Punkte der Ellipse beginnnen; das Polygon wird sich immer nach eben so vielen Umläufen schliessen.

Es muss übrigens bemerkt werden, dass die Seitenzahl und die Anzahl der Umläufe nicht vollständig willkürlich sind, sondern in gewissser Weise von einander abhängen. Da wir nämlich die grossse Achse der Ellipse kleiner als π annehmen, so wird, wenn wir die sphärische Ellipse ähnlich wie die ebene Ellipse in 4 Quadranten theilen, der Endpunkt der einem Quadranten gleichen Sehne vom Scheitel der grossen Achse der Ellipse in den zweiten Quadranten fallen, d. h. α wird zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2} = am\,(K, k)$ und $\pi = am\,(2K, k)$ liegen, also muss

$$am\,(K, k) < am\left(\frac{4pK}{n}, k\right) < am\,(2K, k)$$

sein, oder da mit wachsendem Argumente auch die Amplitude zunimmt $K < \frac{4pK}{n} < 2K$

$$\text{oder } 1 < \frac{4p}{n} < 2$$

$$\text{oder } \frac{n}{4} < p < \frac{n}{2}.$$

Wenn also die Anzahl der Seiten gleich n gegeben ist, so muss die Anzahl der Umläufe p grösser als $\frac{n}{4}$, aber kleiner als $\frac{n}{2}$ sein.

4.

Ueber sphärische Polygone, welche einer sphärischen Ellipse eingeschrieben und ihre eigene Polarfigur sind.

Von besonderem Interesse sind die Polygone von ungerader Seitenzahl $2n + 1$, bei welchen die Anzahl der Umläufe n ist. Hier sind die am Ende des vorigen Abschnittes angegebenen Bedingungen, nämlich

$$\frac{2n+1}{4} < n < \frac{2n+1}{2}$$

stets erfüllt, da n eine positive ganze Zahl ist.

Die excentrischen Anomalien der Ecken eines solchen Polygons sind:

$\vartheta_1 = am\,(x, k)$

$\vartheta_2 = am\left(x + \frac{4nK}{2n+1}, k\right)$ $\qquad\qquad$ $\vartheta_3 = am\left(x + 2 \cdot \frac{4nK}{2n+1}, k\right)$

$\vartheta_4 = am\left(x + 3 \cdot \frac{4nK}{2n+1}, k\right)$ $\qquad\qquad$ $\vartheta_5 = am\left(x + 4 \cdot \frac{4nK}{2n+1}, k\right)$

. . . .

$$\vartheta_{2n-2k} = am\,(x + [2n-2k-1]\cdot\frac{4nK}{2n+1}, k) \qquad \vartheta_{2n-2k+1} = am\,(x + [2n-2k]\,\frac{4nK}{2n+1}, k)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vartheta_{2n} = am\,(x + [2n-1]\,\frac{4nK}{2n+1}, k) \qquad \vartheta_{2n+1} = am\,(x + 2n\cdot\frac{4nK}{2n+1}, k).$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\vartheta_{2n-2k} &= am\,(x + [2n-2k-1]\cdot\frac{4nK}{2n+1} - [n-k-1]\,.\,4K) + (n-k-1)\,.\,2\pi\\ &= am\,\left(x + [k+1]\cdot\frac{4K}{2n+1}\right) + (n-k-1)\,.\,2\pi\\ \vartheta_{2n-2k+1} &= am\,(x + [2n-2k]\cdot\frac{4nK}{2n+1} - [n-k-1]\,.\,4K) + (n-k-1)\,.\,2\pi\\ &= am\,\left(x + [n+k+1]\cdot\frac{4K}{2n+1}\right) + (n-k-1)\,.\,2\pi.\end{aligned}$$

Benutzt man diese beiden Formeln und ordnet man die oben stehenden excentrischen Anomalien so, dass man mit ϑ_1 anfängt, dann die ϑ mit geraden Indices und endlich diejenigen mit ungeraden Indices folgen lässt, beide in umgekehrter Ordnung, so erhält man:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= am\,(x, k)\\ \vartheta_{2n} &= am\,(x + \frac{4K}{2n+1}, k) + (n-1)\,.\,2\pi\\ \vartheta_{2n-2} &= am\,(x + 2\cdot\frac{4K}{2n+1}, k) + (n-2)\,.\,2\pi\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \vartheta_2 &= am\,(x + n\cdot\frac{4K}{2n+1}, k)\\ \vartheta_{2n+1} &= am\,(x + [n+1]\cdot\frac{4K}{2n+1}, k) + (n-1)\,.\,2\pi\\ \vartheta_{2n-1} &= am\,(x + [n+2]\cdot\frac{4K}{2n+1}, k) + (n-2)\,.\,2\pi\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \vartheta_3 &= am\,(x + 2n\cdot\frac{4K}{2n+1}, k).\end{aligned}$$

Abgesehen von den Vielfachen von 2π sind hier die excentrischen Anomalien nach ihrer Grösse geordnet. Verbindet man die Eckpunkte des Polygons in der Reihenfolge, wie sie hier durch die excentrischen Anomalien angegeben ist (die Eckpunkte seien P_1, P_{2n}, etc.), so erhält man ein geschlossenes sphärisches Polygon von einfachem Umlaufe. In demselben liegt dem Punkte P_1 die Seite $P_2\;P_{2n+1}$ gegenüber; da der Construction zufolge $P_1\;P_2 = \frac{\pi}{2}$ und $P_{2n+1}\;P_1 = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist P_1 der Pol der gegenüberliegenden Seite $P_2\;P_{2n+1}$. Ebenso ist jede andere Ecke Pol zur gegenüberliegenden Seite; das Polygon $P_1\;P_{2n}\;\;P_{2n-2}\ldots\;P_3$, in welchem die excentrischen Anomalien der Ecken Amplituden sind, deren Argument um die constante Grösse $\frac{4K}{2n+1}$ zunimmt, ist demnach seine eigene Polarfigur, und wir können jetzt aus dem Satze pag. 21 sofort den folgenden Lehrsatz folgern:

Kann man einer sphärischen Ellipse ein Polygon von gegebener Seitenzahl einschreiben, welches seine eigene Polarfigur ist, so kann man ihr unendlich viele solcher Polygone einschreiben.

Da das Polygon, welches der gegebenen sphärischen Ellipse eingeschrieben ist, gleichzeitig der supplementären*) sphärischen Ellipse umschrieben ist, so hat man noch den Satz:

Kann man einer sphärischen Ellipse ein Polygon umschreiben, welches seine eigene Polarfigur ist, so kann man ihr unendlich viele solcher Polygone von derselben Seitenzahl umschreiben.

---

*) Unter supplementärer sphärischer Ellipse wird hier diejenige sphärische Ellipse verstanden, welche die Polarfigur der gegebenen ist. Auch die Bezeichnung „reciproke Ellipse“ ist passend und gebräuchlich.

5.

Das sphärische Fünfeck, welches seine eigene Polarfigur ist.

Gauss hat das sphärische Fünfeck, welches seine eigene Polarfigur ist, Pentagramma mirificum genannt und für dasselbe eine Anzahl von Formeln angegeben, welche sich in seinem Nachlasse vorfanden und im dritten Bande seiner Werke pag. 481 u. ff. abgedruckt sind. Diese Formeln, von Gauss ohne Zusammenhang und Beweis gegeben, können mit Hilfe der bisherigen Entwickelungen sehr bequem abgeleitet werden. Bevor wir jedoch zu dieser Ableitung übergehen, untersuchen wir die Bedingung genauer, unter welcher sich einer sphärischen Ellipse ein Fünfeck, welches seine eigene Polarfigur ist, einconstruiren lässt und welche identisch ist mit der Bedingung, unter welcher man der Ellipse ein Fünfeck von lauter rechten Seiten einzeichnen kann. Die Bedingung erhält man aus Form. 2 pag 20, wenn man darin $p = 2$, $n = 5$ setzt; sie ist also:

$$\textbf{1.}\quad \left|\begin{aligned} &\cos am\left(\frac{8K}{5}, k\right) = -\frac{1}{tg^2 u} \\ &k^2 = \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1}. \end{aligned}\right.$$

Diese Bedingung lässt sich durch eine algebraische Beziehung zwischen $tg\,u$ und $tg\,v$ ausdrücken.

Weil $am\,\frac{8K}{5} = \pi - am\,\frac{2K}{5}$ ist, erhält man aus 1) zunächst $\cos am\,\frac{2K}{5}$, hieraus leicht $\sin am\,\frac{2K}{5}$ und $\Delta am\,\frac{2K}{5}$. Man findet:

$$\textbf{2.}\quad \left|\begin{aligned} \sin am\,\frac{2K}{5} &= \frac{\sqrt{tg^4 u - 1}}{tg^2 u} \\ \cos am\,\frac{2K}{5} &= \frac{1}{tg^2 u} \\ \Delta am\,\frac{2K}{5} &= \frac{tg^2 v}{tg^2 u}. \end{aligned}\right.$$

Für $\sin am\,\frac{4K}{5}$, $\cos am\,\frac{4K}{5}$, $\Delta am\,\frac{4K}{5}$ kann man drei verschiedene Ausdrücke finden. Um dieselben herzuleiten, schreiben wir uns einige Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen her; nämlich:

$$\textbf{3.}\quad \left|\begin{aligned} \sin\,am\,2a &= \frac{2\sin am\,a\,.\,\cos am\,a\,.\,\Delta am\,a}{1 - k^2 \sin^4 am\,a} \\ \cos\,am\,2a &= \frac{\cos^2 am\,a - \sin^2 am\,a\,.\,\Delta^2 am\,a}{1 - k^2 \sin^4 am\,a} \\ \Delta am\,2a &= \frac{\Delta^2 am\,a - k^2 \sin^2 am\,a\,.\,\cos^2 am\,a}{1 - k^2 \sin^4 am\,a} \end{aligned}\right.$$

(vergl. Jacobi, Fund. nova, § 18 oder Durège, Elliptische Funktionen, § 30).

Durch Addition der letzten beiden Formeln zu einander und zur Einheit, und Subtraction derselben von einander und von der Einheit findet man:

$$\textbf{4.}\quad \left|\begin{aligned} \cos am\,2a + \Delta\,am\,2a &= \frac{2\cos^2 am\,a\,.\,\Delta^2\,am\,a}{1 - k^2 \sin^4 am\,a} \\ \cos am\,2a - \Delta\,am\,2a &= -\frac{2k_,^2 \sin^2 am\,a}{1 - k^2 \sin^4 am\,a} \\ 1 + \cos am\,2a &= \frac{2\cos^2 am\,a}{1 - k^2 \sin^4 am\,a} \\ 1 - \cos am\,2a &= \frac{2\sin^2 am\,a\,.\,\Delta^2\,am\,a}{1 - k^2 \sin^4 am\,a} \\ 1 + \Delta\,am\,2a &= \frac{2\Delta^2\,am\,a}{1 - k^2 \sin^4 am\,a} \\ 1 - \Delta\,am\,2a &= \frac{2k^2 \sin^2 am\,a\,.\,\cos^2 am\,a}{1 - k^2 \sin^4 am\,a}. \end{aligned}\right.$$

Durch Division je zweier dieser Formeln durch einander und durch Radicirung findet man folgende drei Formeln, die Umkehrungen von 3):

$$\sin am\, a = \sqrt{\frac{1 - \cos am\, 2a}{1 + \Delta\, am\, 2a}}$$

$$\cos am\, a = \sqrt{\frac{\cos am\, 2a + \Delta\, am\, 2a}{1 + \Delta\, am\, 2a}}$$

$$\Delta\, am\, a = \sqrt{\frac{\cos am\, 2a + \Delta\, am\, 2a}{1 + \cos am\, 2a}}$$

Endlich schreiben wir noch folgende drei Formeln her:

$$6. \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin am\,(a+b) - \sin am\,(a-b)}{\sin am\,(a+b) + \sin am\,(a-b)} = \dfrac{\sin am\, b\,.\cos am\, a\,.\,\Delta\, am\, a}{\sin am\, a\,.\cos am\, b\,.\,\Delta\, am\, b} \\ \dfrac{\cos am\,(a+b) - \cos am\,(a-b)}{\cos am\,(a+b) + \cos am\,(a-b)} = -\dfrac{\sin am\, a\,.\sin am\, b\,.\,\Delta\, am\, a\,.\,\Delta\, am\, b}{\cos am\, a\,.\cos am\, b} \\ \dfrac{\Delta\, am\,(a+b) - \Delta\, am\,(a-b)}{\Delta\, am\,(a+b) + \Delta\, am\,(a-b)} = -\dfrac{k^2 \sin am\, a\,.\sin am\, b\,.\cos am\, a\,.\cos am\, b}{\Delta\, am\, a\,.\,\Delta\, am\, b} \end{array}\right.$$

Man setze in den drei Formeln 3) $a = \frac{2K}{5}$ und dann für $\sin am \frac{2K}{5}$, $\cos am \frac{2K}{5}$, $\Delta\, am \frac{2K}{5}$ ihre Werthe aus 2). Man erhält:

$$\sin am \frac{4K}{5} = \frac{2 \sin am \frac{2K}{5} \cdot \cos am \frac{2K}{5} \cdot \Delta\, am \frac{2K}{5}}{1 - k^2 \sin^4 am \frac{2K}{5}} = \frac{2\sqrt{tg^4 u - 1}\,.\,tg^2 v}{tg^6 u} \cdot \frac{1}{1 - \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1} \cdot \frac{(tg^4 u - 1)^2}{tg^8 u}}$$

$$= \frac{2\sqrt{tg^4 u - 1}\,.\,tg^2 u\,.\,tg^2 v}{tg^4 u\,.\,tg^4 v + tg^4 u - tg^4 v}$$

$$\cos am \frac{4K}{5} = \frac{\cos^2 am \frac{2K}{5} - \sin^2 am \frac{2K}{5} \cdot \Delta^2\, am \frac{2K}{5}}{1 - k^2 \sin^4 am \frac{2K}{5}} = \frac{\frac{1}{tg^4 u} - \frac{tg^4 v}{tg^8 u} \cdot (tg^4 u - 1)}{1 - \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1} \cdot \frac{(tg^4 u - 1)^2}{tg^8 u}} = -\frac{tg^4 u\,.\,tg^4 v - tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u\,.\,tg^4 v + tg^4 u - tg^4 v}$$

$$\Delta\, am \frac{4K}{5} = \frac{\Delta^2\, am \frac{2K}{5} - k^2 \sin^2 am \frac{2K}{5} \cdot \cos^2 am \frac{2K}{5}}{1 - k^2 \sin^4 am \frac{2K}{5}} = \frac{\frac{tg^4 v}{tg^4 u} - \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1} \cdot \frac{tg^4 u - 1}{tg^4 u} \cdot \frac{1}{tg^4 u}}{1 - \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1} \cdot \frac{(tg^4 u - 1)^2}{tg^8 u}}$$

$$= \frac{tg^4 u\,.\,tg^4 v - tg^4 u + tg^4 v}{tg^4 u\,.\,tg^4 v + tg^4 u - tg^4 v}.$$

Man setze ferner in 5) $a = \frac{4K}{5}$, ersetze rechts $am \frac{8K}{5}$ durch $\pi - am \frac{2K}{5}$ und setze dann für $\sin am \frac{2K}{5}$, $\cos am \frac{2K}{5}$, $\Delta am \frac{2K}{5}$ ihre Werthe aus 2) ein. Man erhält:

$$\sin am \frac{4K}{5} = \sqrt{\frac{1 - \cos am \frac{8K}{5}}{1 + \Delta am \frac{8K}{5}}} = \sqrt{\frac{1 + \cos am \frac{2K}{5}}{1 + \Delta am \frac{2K}{5}}} = \sqrt{\frac{tg^2 u + 1}{tg^2 u + tg^2 v}}$$

$$\cos am \frac{4K}{5} = \sqrt{\frac{\Delta\, am \frac{8K}{5} + \cos am \frac{8K}{5}}{1 + \Delta am \frac{8K}{5}}} = \sqrt{\frac{\Delta\, am \frac{2K}{5} - \cos am \frac{2K}{5}}{1 + \Delta am \frac{2K}{5}}} = \sqrt{\frac{tg^2 v - 1}{tg^2 u + tg^2 v}}$$

$$\Delta\, am \frac{4K}{5} = \sqrt{\frac{\Delta\, am \frac{8K}{5} + \cos am \frac{8K}{5}}{1 + \cos am \frac{8K}{5}}} = \sqrt{\frac{\Delta\, am \frac{2K}{5} - \cos am \frac{2K}{5}}{1 - \cos am \frac{2K}{5}}} = \sqrt{\frac{tg^2 v - 1}{tg^2 u - 1}}.$$

Wir setzen ferner in 6) $a = \frac{3K}{5}$, $b = \frac{K}{5}$ und ersetzen rechts $am\ \frac{3K}{5}$ durch $am\ \frac{2K}{5}$ mit Hilfe der Formeln:

$$7.\quad \left|\begin{aligned} \sin am\,(K - a) &= \frac{\cos am\ a}{\Delta\ am\ a} \\ \cos am\ (K - a) &= \frac{k_{,} \sin am\ a}{\Delta\ am\ a} \\ \Delta\ am\ (K - a) &= \frac{k_{,}}{\Delta\ am\ a}.\ ^{*)} \end{aligned}\right.$$

Wir finden zunächst:

$$\frac{\sin am\,\frac{4K}{5} - \sin am\,\frac{2K}{5}}{\sin am\,\frac{4K}{5} + \sin am\,\frac{2K}{5}} = \frac{\sin am\,\frac{K}{5}}{\cos am\,\frac{K}{5}\cdot\Delta\ am\,\frac{K}{5}}\cdot\frac{\cos am\,\frac{3K}{5}\cdot\Delta\ am\,\frac{3K}{5}}{\sin am\,\frac{3K}{5}}$$

$$= \frac{\sin am\,\frac{K}{5}}{\cos am\,\frac{K}{5}\cdot\Delta\ \mathrm{am}\,\frac{K}{5}}\cdot\frac{k_{,}^2 \sin am\,\frac{2K}{5}}{\cos am\,\frac{2K}{5}\ \Delta\ \mathrm{am}\,\frac{2K}{5}}$$

$$\frac{\cos am\,\frac{4K}{5} - \cos am\,\frac{2K}{5}}{\cos am\,\frac{4K}{5} + \cos am\,\frac{2K}{5}} = -\frac{\sin am\,\frac{K}{5}\cdot\Delta\ am\,\frac{K}{5}}{\cos am\,\frac{K}{5}}\cdot\frac{\sin am\,\frac{3K}{5}\cdot\Delta\ am\,\frac{3K}{5}}{\cos am\,\frac{3K}{5}}$$

$$= -\frac{\sin am\,\frac{K}{5}\cdot\Delta\ am\,\frac{K}{5}}{\cos am\,\frac{K}{5}}\cdot\frac{\cos am\,\frac{2K}{5}}{\sin am\,\frac{2K}{5}\cdot\Delta\ am\,\frac{2K}{5}}$$

$$\frac{\Delta\ am\,\frac{4K}{5} - \Delta\ am\,\frac{2K}{5}}{\Delta\ am\,\frac{4K}{5} + \Delta\ am\,\frac{2K}{5}} = -k^2\,\frac{\sin am\,\frac{K}{5}\cdot\cos am\,\frac{K}{5}}{\Delta\ am\,\frac{K}{5}}\cdot\frac{\sin am\,\frac{3K}{5}\cdot\cos am\,\frac{3K}{5}}{\Delta\ am\,\frac{3K}{5}}$$

$$= -k^2\,\frac{\sin am\,\frac{K}{5}\cdot\cos am\,\frac{K}{5}}{\Delta\ am\,\frac{K}{5}}\cdot\frac{\sin am\,\frac{2K}{5}\cdot\cos am\,\frac{2K}{5}}{\Delta\ am\,\frac{2K}{5}}$$

Man ersetze jetzt rechts in diesen drei Formeln $\sin am\,\frac{2K}{5}$ durch Functionen von $am\,\frac{K}{5}$ nach Form. 3); es heben sich dann einige Faktoren fort, so dass nach einer der Formeln 4) für sämmtliche Faktoren, die $am\,\frac{K}{5}$ enthalten, eine Funktion von $am\,\frac{2K}{5}$ gesetzt werden kann; nämlich:

$$\frac{\sin am\,\frac{4K}{5} - \sin am\,\frac{2K}{5}}{\sin am\,\frac{4K}{5} + \sin am\,\frac{2K}{5}} = \frac{1}{\cos am\,\frac{2K}{5}\cdot\Delta\ am\,\frac{2K}{5}}\cdot\left\{\frac{2k_{,}^2 \sin^2 am\,\frac{K}{5}}{1 - k^2\sin^4 am\,\frac{K}{5}}\right\} = \frac{\Delta\ am\,\frac{2K}{5} - \cos am\,\frac{2K}{5}}{\cos am\,\frac{2K}{5}\cdot\Delta\ am\,\frac{2K}{5}}$$

$$\frac{\cos am\,\frac{4K}{5} - \cos am\,\frac{2K}{5}}{\cos am\,\frac{4K}{5} + \cos am\,\frac{2K}{5}} = \frac{\cos am\,\frac{2K}{5}}{\Delta\ am\,\frac{2K}{5}}\cdot\left\{-\frac{1 - k^2\sin^4 am\,\frac{K}{5}}{2\cos^2 am\,\frac{K}{5}}\right\} = -\frac{\cos am\,\frac{2K}{5}}{\Delta\ am\,\frac{2K}{5}}\cdot\frac{1}{1 + \cos am\,\frac{2K}{5}}$$

$$\frac{\Delta\ am\,\frac{4K}{5} - \Delta\ am\,\frac{2K}{5}}{\Delta\ am\,\frac{4K}{5} + \Delta\ am\,\frac{2K}{5}} = -\frac{\cos am\,\frac{2K}{5}}{\Delta\ am\,\frac{2K}{5}}\cdot\left\{\frac{2k^2\sin^2 am\,\frac{K}{5}\cdot\cos^2 am\,\frac{K}{5}}{1 - k^2\sin^4 am\,\frac{K}{5}}\right\} = -\frac{\cos am\,\frac{2K}{5}\cdot\left(1 - \Delta\ am\,\frac{2K}{5}\right)}{\Delta\ am\,\frac{2K}{5}}$$

Wendet man auf diese drei Formeln die correspondirende Addition an, und führt man dann für $\cos am\,\frac{2K}{5}$, $\Delta\ am\,\frac{2K}{5}$ ihre Werthe aus 2) ein, so erhält man:

*) Vergl. Jacobi, Fund. nova § 17 oder Durège: Elliptische Functionen § 10.

$$-\frac{\sin am\frac{4K}{5}}{\sin am\frac{2K}{5}}=\frac{\Delta am\frac{2K}{5}-\cos am\frac{2K}{5}+\cos am\frac{2K}{5}\cdot\Delta am\frac{2K}{5}}{\Delta am\frac{2K}{5}-\cos am\frac{2K}{5}-\cos am\frac{2K}{5}\cdot\Delta am\frac{2K}{5}}=\frac{\frac{tg^2v}{tg^2u}-\frac{1}{tg^2u}+\frac{tg^2v}{tg^4u}}{\frac{tg^2v}{tg^2u}-\frac{1}{tg^2u}-\frac{tg^2v}{tg^4u}}$$
$$=\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u-tg^2v}$$

$$-\frac{\cos am\frac{4K}{5}}{\cos am\frac{2K}{5}}=\frac{-\cos am\frac{2K}{5}+\Delta am\frac{2K}{5}+\cos am\frac{2K}{5}\,.\,\Delta am\frac{2K}{5}}{-\cos am\frac{2K}{5}-\Delta am\frac{2K}{5}-\cos am\frac{2K}{5}\,.\,\Delta am\frac{2K}{5}}=-\frac{\frac{tg^2v}{tg^2u}-\frac{1}{tg^2u}+\frac{tg^2v}{tg^4u}}{\frac{tg^2v}{tg^2u}+\frac{1}{tg^2u}+\frac{tg^2v}{tg^4u}}$$
$$=-\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v+tg^2u+tg^2v}$$

$$-\frac{\Delta am\frac{4K}{5}}{\Delta am\frac{2K}{5}}=\frac{-\cos am\frac{2K}{5}+\cos am\frac{2K}{5}\cdot\Delta am\frac{2K}{5}+\Delta am\frac{2K}{5}}{-\cos am\frac{2K}{5}+\cos am\frac{2K}{5}\cdot\Delta am\frac{2K}{5}-\Delta am\frac{2K}{5}}=-\frac{\frac{tg^2v}{tg^2u}-\frac{1}{tg^2u}+\frac{tg^2v}{tg^4u}}{\frac{tg^2v}{tg^2u}+\frac{1}{tg^2u}-\frac{tg^2v}{tg^4u}}$$
$$=-\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v+tg^2u-tg^2v}.$$

Wenn wir diese drei Gleichungen mit $-\sin am\frac{2K}{5}$, $-\cos am\frac{2K}{5}$, $-\Delta\, am\frac{2K}{5}$ multipliciren und für $\sin am\frac{2K}{5}$, $\cos am\frac{2K}{5}$, $\Delta\, am\frac{2K}{5}$ ihre Werthe aus 2) setzen, so erhalten wir endlich:

$$\sin am\frac{4K}{5}=-\frac{\sqrt{tg^4u-1}}{tg^2u}\cdot\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u-tg^2v}$$
$$\cos am\frac{4K}{5}=\frac{1}{tg^2u}\cdot\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v+tg^2u-tg^2v}$$
$$\Delta\, am\frac{4K}{5}=\frac{tg^2v}{tg^2u}\cdot\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v+tg^2u-tg^2v}.$$

Der bequemeren Uebersicht wegen schreiben wir die im Vorstehenden gefundenen Ausdrücke der drei Funktionen von $am\frac{4K}{5}$ noch einmal zusammen. Es ist:

$$8.\left\{\begin{array}{l}
\sin am\frac{4K}{5}=\sqrt{\frac{tg^2u+1}{tg^2u+tg^2v}}=-\frac{\sqrt{tg^4u-1}}{tg^2u}\cdot\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u-tg^2v}=\frac{2\sqrt{tg^4u-1}\;tg^2u\,.\,tg^2v}{tg^4u\,.\,tg^4v+tg^4u-tg^4v}\\
\cos am\frac{4K}{5}=\sqrt{\frac{tg^2u-1}{tg^2u+tg^2v}}=\frac{1}{tg^2u}\cdot\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v+tg^2u+tg^2v}=-\frac{tg^4u\,.\,tg^4v-tg^4u-tg^4v}{tg^4u\,.\,tg^4v+tg^4u-tg^4v}\\
\Delta\, am\frac{4K}{5}=\sqrt{\frac{tg^2v-1}{tg^2u-1}}=\frac{tg^2v}{tg^2u}\cdot\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v+tg^2u-tg^2v}=\frac{tg^4u\,.\,tg^4v-tg^4u+tg^4v}{tg^4u\,.\,tg^4v+tg^4u-tg^4v}.
\end{array}\right.$$

Die Formeln 8) enthalten algebraische Beziehungen zwischen $tg u$ und $tg v$, welche stattfinden müssen, wenn sich einer sphärischen Ellipse von den Halbachsen u und v ein sphärisches Fünfeck, welches seine eigene Polarfigur ist, soll einzeichnen lassen. Zur etwaigen Berechnung der einen Halbachse, wenn die andere gegeben ist, würde sich die letzte Gleichung 8)

$$9.\quad\frac{tg^2v}{tg^2u}\cdot\frac{tg^2u\,.\,tg^2v-tg^2u+tg^2v}{tg^2u\,.\,tg^2v+tg^2u-tg^2v}=\frac{tg^4u\,.\,tg^4v-tg^4u+tg^4v}{tg^4u\,.\,tg^4v+tg^4u-tg^4v}$$

empfehlen, theils wegen ihrer vollkommenen Symmetrie zwischen u und v, theils, weil sie als kubische Gleichung für tg^2u und tg^2v (sie ist nur scheinbar biquadratisch, wie sich sogleich zeigen wird) immer auflösbar ist. Auch kann man aus ihr erkennen, dass jedem Werthe von tg^2u nur ein reeller Werth von tg^2v und umgekehrt jedem Werthe von tg^2v nur ein reeller Werth von tg^2u entspricht. Es möge in der Gleichung 9) eine der Grössen tg^2u und tg^2v als gegeben, die andere als gesucht betrachtet werden; erstere möge der Kürze wegen mit a, letztere mit x bezeichnet werden, dann ist die Gleichung

$$\frac{a^2x^2 - a^2 + x^2}{a^2x^2 + a^2 - x^2} = \frac{x}{a} \cdot \frac{ax - a + x}{ax + a - x}$$

d. i. nach Fortschaffung der Nenner:

$$a\,[a^2x^2 - (a^2 - x^2)]\,[ax + (a - x)] = x\,[a^2x^2 + (a^2 - x^2)]\,[ax - (a - x)]$$

oder nach Auflösung der Parenthesen

$$a\,[a^3x^3 - (a^2 - x^2)\,ax + (a - x)\,a^2x^2 - (a - x)\,(a^2 - x^2)] =$$
$$x\,[a^3x^3 + (a^2 - x^2)\,ax - (a - x)\,a^2x^2 - (a - x)\,(a^2 - x^2)]$$

oder indem man die Glieder von der rechten auf die linke Seite schafft:

$$a^3x^3\,(a - x) - (a + x)\,(a^2 - x^2)\,ax + (a + x)\,(a - x)\,a^2x^2 - (a - x)^2\,(a^2 - x^2) = 0.$$

Man erkennt jetzt, dass die Gleichung den Faktor $a - x$ hat; lässt man denselben fort, so bleibt:

$$a^3x^3 - (a + x)^2\,ax + (a + x)\,a^2x^2 - (a - x)\,(a^2 - x^2) = 0$$

oder nach Potenzen von x geordnet:

$$(a - 1)\,(a + 1)^2\,x^3 + a\,(a - 1)^2\,x^2 - a^2\,(a - 1)\,x - a^3 = 0$$

oder nach Division mit a^3:

$$\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 \left(\frac{a-1}{a}\right)^3 x^3 + \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 x^2 - \left(\frac{a-1}{a}\right) x - 1 = 0.$$

Setzt man $\frac{a-1}{a}\,x = \frac{1}{y}$, so geht die vorstehende Gleichung über in $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + y - y^2 - y^3 = 0$ und endlich durch die Substitution $y = z - \frac{1}{3}$ in

$$\textbf{10.}\quad z^3 - \frac{4}{3}\,z + \frac{11}{27} - \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 = 0.$$

Die kubische Gleichung $z^3 + 3\,Az + 2\,B = 0$ hat aber eine reelle, zwei imaginäre Wurzeln, wenn ihre Discriminante $B^2 + A^3$ positiv ist.*) In dem vorliegenden Falle ist

$$3A = -\frac{4}{3}$$

$$2B = \frac{11}{27} - \left(1 + \frac{2}{a-1}\right)^2 = \frac{11}{27} - \left(1 + \frac{4a}{(a-1)^2}\right) = -\frac{16}{27} - \frac{4a}{(a-1)^2}$$

also

$$A = -\frac{4}{9}$$

$$B = -\frac{8}{27} - \frac{2a}{(a-1)^2},$$

folglich die Discriminante

$$B^2 + A^3 = \frac{64}{729} + \frac{32a}{27\,(a-1)^2} + \frac{4a^2}{(a-1)^4} - \frac{64}{729} = \frac{32a}{27\,(a-1)^2} + \frac{4a^2}{(a-1)^4}.$$

Da a als das Quadrat einer trigonometrischen Tangente stets positiv ist, so ist auch die Discriminante stets positiv und die Gleichung 10), also auch 9), welche aus 10 durch eine reelle eindeutige Substitution entsteht, hat nur eine reelle Wurzel.

Da jetzt gezeigt ist, wie die zweite Halbachse einer sphärischen Ellipse, welcher sich ein sphärisches Fünfeck, das seine eigene Polarfigur ist, einzeichnen lässt, durch Rechnung gefunden werden kann, wenn die erste gegeben ist, aus u und v sich aber leicht $k^2 = \frac{tg^4 u - tg^4 v}{tg^4 u - 1}$ berechnen lässt, so werden wir im Folgenden k als bekannt voraussetzen.

Bezeichnet man die excentrische Anomalie einer Ecke des Fünfecks, welches seine eigene Polarfigur ist, durch $\varphi^0 = am\ (u,\ k)$, so sind nach Abschnitt 4 die excentrischen Anomalien der fünf Ecken der Reihe nach:

*) Vrgl. Baltzer: Elemente der Mathematik; pag. 253.

$$
11.\quad \left|\begin{aligned}
\varphi^0 &= am\,(u,\,k)\\
\varphi' &= am\,(u+\frac{4K}{5},\,k)\\
\varphi'' &= am\,(u+\frac{8K}{5},\,k)\\
\varphi''' &= am\,(u+\frac{12K}{5},\,k)\\
\varphi'''' &= am\,(u+\frac{16K}{5},\,k).
\end{aligned}\right.
$$

Die excentrischen Anomalien der fünf Ecken eines der sphärischen Ellipse eingeschriebenen sphärischen Fünfecks, welches seine eigene Polarfigur ist, sind also Amplituden, deren Argumente um $\frac{4K}{5}$ wachsen. Mit Hilfe dieser Bemerkung ist es leicht, die Beziehungen zwischen den excentrischen Anomalien, welche sich bei Gauss an der am Anfange dieses Abschnittes bezeichneten Stelle finden, herzuleiten. Wir leiten zu diesem Zwecke wieder erst einige Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen ab. Es ist:

$$
12.\quad \left|\begin{aligned}
2\sin^2\frac{1}{2}\,[am\,(u+v) - am\,(u-v)] &= 1 - \cos\,[am\,(u+v) - am\,(u-v)]\\
2\cos^2\frac{1}{2}\,[am\,(u+v) - am\,(u-v)] &= 1 + \cos\,[am\,(u+v) - am\,(u-v)]\\
2\sin^2\frac{1}{2}\,[am\,(u+v) + am\,(u-v)] &= 1 - \cos\,[am\,(u+v) + am\,(u-v)]\\
2\cos^2\frac{1}{2}\,[am\,(u+v) + am\,(u-v)] &= 1 + \cos\,[am\,(u+v) + am\,(u-v)]
\end{aligned}\right.
$$

Drücken wir hierin die Cosinus auf der rechten Seite durch Functionen der einfachen Argumente u und v aus, wozu die Formeln:

$$\cos\,[am\,(u+v) + am\,(u-v)] = \frac{\cos^2 am\,u - \sin^2 am\,u\,.\,\Delta^2 am\,v}{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v}$$

$$\cos\,[am\,(u+v) - am\,(u-v)] = \frac{\cos^2 am\,v - \sin^2 am\,v\,.\,\Delta^2 am\,u}{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v}$$

benutzt werden können, und bringen wir die Ausdrücke rechts auf den gleichen Nenner $1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v$, so wird der Zähler des ersten Ausdrucks:

$$1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v - \cos^2 am\,v + \sin^2 am\,v\,.\,\Delta^2 am\,u =$$
$$\sin^2 am\,v\,.\,(1-k^2\sin^2 am\,u) + \sin^2 am\,v\,.\,\Delta^2 am\,u = 2\sin^2 am\,v\,.\,\Delta^2 am\,u;$$

der Zähler des zweiten Ausdrucks:

$$1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v + \cos^2 am\,v - \sin^2 am\,v\,.\,\Delta^2 am\,u =$$
$$\sin^2 am\,v\,.\,(1-k^2\sin^2 am\,u) + 2\cos^2 am\,v - \sin^2 am\,v\,.\,\Delta^2 am\,u = 2\cos^2 am\,v;$$

der Zähler des dritten Ausdrucks:

$$1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v - \cos^2 am\,u + \sin^2 am\,u\,.\,\Delta^2 am\,v =$$
$$\sin^2 am\,u\,(1-k^2\sin^2 am\,v) + \sin^2 am\,u\,.\,\Delta^2 am\,v = 2\sin^2 am\,u\,.\,\Delta^2 am\,v;$$

der Zähler des vierten Ausdrucks:

$$1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v + \cos^2 am\,u - \sin^2 am\,u\,.\,\Delta^2 am\,v =$$
$$\sin^2 am\,u\,(1-k^2\sin^2 am\,v) + 2\cos^2 am\,u - \sin^2 am\,u\,.\,\Delta^2 am\,v = 2\cos^2 am\,u.$$

Man findet demnach aus dem System 12)

$$
13.\quad \left|\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}\,[am\,(u+v) - am\,(u-v)] &= \frac{\sin am\,v\,.\,\Delta\,am\,u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v}}\\
\cos\frac{1}{2}\,[am\,(u+v) - am\,(u-v)] &= \frac{\cos am\,v}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v}}\\
\sin\frac{1}{2}\,[am\,(u+v) + am\,(u-v)] &= \frac{\sin am\,u\,.\,\Delta\,am\,v}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v}}\\
\cos\frac{1}{2}\,[am\,(u+v) + am\,(u-v)] &= \frac{\cos am\,u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v}}.
\end{aligned}\right.
$$

Diese vier Formeln gestatten die vollständige Herleitung der erwähnten Beziehungen. Bezeichnen nämlich $am\ (u+v)$ und $am\ (u-v)$ die excentrischen Anomalien zweier auf einander folgender Ecken des sphärischen Fünfecks, welches seine eigene Polarfigur ist, so ist $u+v=u-v+\frac{4K}{5}$, also $v=\frac{2K}{5}$. Die excentrische Anomalie des Eckpunktes, welcher der die beiden ersten verbindenden Seite gegenüberliegt, ist $am\left(u+v+\frac{8K}{5}\right)=am\left(u+\frac{2K}{5}+\frac{8K}{5}\right)=am\,(u+2K)=\pi+am\,u$, also $am\,u$ ist gleich der excentrischen Anomalie minus π. Bezeichnen wir jetzt die Anomalien mit φ, φ' φ'', φ''', φ'''', so erhalten wir aus den vorstehenden Formeln:

$$\textbf{14.}\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi'') &= \frac{\sin am\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi''''-\varphi''') &= \frac{\sin am\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi'}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'''') &= \frac{\sin am\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi''}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi) &= \frac{\sin am\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi'''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi'''}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi') &= \frac{\sin am\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi''''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi''''}}
\end{aligned}\right.$$

$$\textbf{15.}\quad\left\{\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi'') &= \frac{\cos am\frac{2K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi''''-\varphi''') &= \frac{\cos am\frac{2K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi'}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'''') &= \frac{\cos am\frac{2K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi''}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi) &= \frac{\cos am\frac{2K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi'''}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi') &= \frac{\cos am\frac{2K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi''''}}
\end{aligned}\right.$$

$$\textbf{16.}\quad \left|\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'') &= -\frac{\Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi'''' + \varphi''') &= -\frac{\Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin\varphi'}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi'}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi'''') &= -\frac{\Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin\varphi''}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi''}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) &= -\frac{\Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin\varphi'''}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi'''}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi') &= -\frac{\Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin\varphi''''}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi''''}}
\end{aligned}\right.$$

$$\textbf{17.}\quad \left|\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'') &= -\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi'''' + \varphi''') &= -\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi'}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi'''') &= -\frac{\cos\varphi''}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi''}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) &= -\frac{\cos\varphi'''}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi'''}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi') &= -\frac{\cos\varphi''''}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2\varphi''''}}
\end{aligned}\right.$$

Durch Division erhält man aus den Systemen 14) und 15) und aus den Systemen 16) und 17):

$$\textbf{18.}\quad \left|\begin{aligned}
tg\,\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'') &= tg\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi''') &= tg\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi'\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi - \varphi'''') &= tg\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi''\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) &= tg\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi'''\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi') &= tg\, am\,\frac{2K}{5}\cdot\Delta\varphi''''
\end{aligned}\right.$$

$$19.\quad \left|\begin{array}{l} tg\,\frac{1}{2}\,(\varphi''' + \varphi'') = \Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot tg\,\varphi \\ tg\,\frac{1}{2}\,(\varphi'''' + \varphi''') = \Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot tg\,\varphi' \\ tg\,\frac{1}{2}\,(\varphi + \varphi'''') = \Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot tg\,\varphi'' \\ tg\,\frac{1}{2}\,(\varphi' + \varphi) = \Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot tg\,\varphi''' \\ tg\,\frac{1}{2}\,(\varphi'' + \varphi') = \Delta\, am\,\frac{2K}{5}\cdot tg\,\varphi'''' \end{array}\right.$$

Gehen wir wieder zum Systeme 13) zurück und nehmen wir an, dass darin $am\,(u+v)$ und $am\,(u-v)$ die excentrischen Anomalien von zwei nicht auf einanderfolgenden Ecken bedeuten, dann ist $u+v = u-v+\frac{8K}{5}$, also $v=\frac{4K}{5}$. Die excentrische Anomalie der von den ersten beiden eingeschlossenen Ecke ist $am\left(u+v-\frac{4K}{5}\right) = am\,u$. Wir erhalten demnach aus dem Formelsysteme 13) folgende vier Systeme:

$$20.\quad \left|\begin{array}{l} \sin\frac{1}{2}\,(\varphi' - \varphi'''') = \dfrac{\sin am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi}} \\ \sin\frac{1}{2}\,(\varphi'' - \varphi) = \dfrac{\sin am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi'}} \\ \sin\frac{1}{2}\,(\varphi''' - \varphi') = \dfrac{\sin am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi''}} \\ \sin\frac{1}{2}\,(\varphi'''' - \varphi'') = \dfrac{\sin am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi'''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi'''}} \\ \sin\frac{1}{2}\,(\varphi - \varphi''') = \dfrac{\sin am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi''''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi''''}} \end{array}\right.$$

$$21.\quad \left|\begin{array}{l} \cos\frac{1}{2}\,(\varphi' - \varphi'''') = \dfrac{\cos am\,\frac{4K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi}} \\ \cos\frac{1}{2}\,(\varphi'' - \varphi) = \dfrac{\cos am\,\frac{4K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi'}} \\ \cos\frac{1}{2}\,(\varphi''' - \varphi') = \dfrac{\cos am\,\frac{4K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi''}} \\ \cos\frac{1}{2}\,(\varphi'''' - \varphi'') = \dfrac{\cos am\,\frac{4K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi'''}} \\ \cos\frac{1}{2}\,(\varphi - \varphi''') = \dfrac{\cos am\,\frac{4K}{5}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi''''}} \end{array}\right.$$

$$22.\quad \left\{\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi'''') &= \frac{\Delta\, am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi''+\varphi) &= \frac{\Delta\, am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi'}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi'''+\varphi') &= \frac{\Delta\, am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi''}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi''''+\varphi'') &= \frac{\Delta\, am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin\varphi'''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi'''}}\\
\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi''') &= \frac{\Delta\, am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin\varphi''''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi''''}}
\end{aligned}\right.$$

$$23.\quad \left\{\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi'''') &= \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi''+\varphi) &= \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi'}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi'''+\varphi') &= \frac{\cos\varphi''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi''}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi''''+\varphi'') &= \frac{\cos\varphi'''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi'''}}\\
\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi''') &= \frac{\cos\varphi''''}{\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2\varphi''''}}
\end{aligned}\right.$$

Durch Division von 20) und 21), sowie von 22) und 23) erhält man:

$$24.\quad \left\{\begin{aligned}
tg\,\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'''') &= tg\,am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi) &= tg\,am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi'\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi') &= tg\,am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi''\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi''''-\varphi'') &= tg\,am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi'''\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi-\varphi''') &= tg\,am\,\frac{4K}{5}\cdot\Delta\varphi''''
\end{aligned}\right.$$

$$25.\quad \left\{\begin{aligned}
tg\,\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi'''') &= \Delta\,am\,\frac{4K}{5}\cdot tg\,\varphi\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi''+\varphi) &= \Delta\,am\,\frac{4K}{5}\cdot tg\,\varphi'\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi'''+\varphi') &= \Delta\,am\,\frac{4K}{5}\cdot tg\,\varphi''\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi''''+\varphi'') &= \Delta\,am\,\frac{4K}{5}\cdot tg\,\varphi'''\\
tg\,\frac{1}{2}(\varphi+\varphi''') &= \Delta\,am\,\frac{4K}{5}\cdot tg\,\varphi''''
\end{aligned}\right.$$

Aus den Formeln 18, 19, 24, 25 erhält man endlich:

$$
26. \left|
\begin{aligned}
&\frac{tg\,am\,\frac{2K}{5}}{tg\,am\,\frac{4K}{5}} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi'''')} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi''')}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi)} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi - \varphi'''')}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi')} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi'')} \\
&\qquad = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi - \varphi''')} \\
&\frac{\Delta\,am\,\frac{2K}{5}}{\Delta\,am\,\frac{4K}{5}} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'')}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'''')} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi'''' + \varphi''')}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi)} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi'''')}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi')} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi'''' + \varphi'')} \\
&\qquad = \frac{tg\,\frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi')}{tg\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi''')}
\end{aligned}
\right.
$$

Die Seiten eines sphärischen Fünfecks, welches seine eigene Polarfigur ist, lassen sich ebenfalls durch die excentrischen Anomalien ausdrücken. Nach Formel 3) pag. 18 ist der Cosinus eines Bogens PP', dessen Endpunkte P und P' die excentrischen Anomalien ϑ und ϑ' haben:

$$27.\quad \cos PP' = \cos PO \,.\, \cos P'O\,(1 + tg^2 u \,.\, \cos\vartheta \,.\, \cos\vartheta' + tg^2 v \,.\, \sin\vartheta \,.\, \sin\vartheta')$$

Für $\cos PO$ und $\cos P'O$ findet man Ausdrücke in ϑ und ϑ', indem man die beiden Formeln 1) oder 2) pag. 17 quadirt und ihre Summe zur Einheit addirt. Man erhält, da

$$\cos^2 PO + \cos^2 PM + \cos^2 PN = 1$$

ist, folgende Gleichungen:

$$1 + tg^2 u \,.\, \cos^2\vartheta + tg^2 v \,.\, \sin^2\vartheta = \frac{1}{\cos^2 PO}$$

$$1 + tg^2 u \,.\, \cos^2\vartheta' + tg^2 v \,.\, \sin^2\vartheta' = \frac{1}{\cos^2 P'O}$$

Die Formel 27) geht daher über in:

$$28.\quad \cos PP' = \frac{1 + tg^2 u \,.\, \cos\vartheta \,.\, \cos\vartheta' + tg^2 v \,.\, \sin\vartheta \,.\, \sin\vartheta'}{\sqrt{1 + tg^2 u \,.\, \cos^2\vartheta + tg^2 v \,.\, \sin^2\vartheta}\;\sqrt{1 + tg^2 u \,.\, \cos^2\vartheta' + tg^2 v \,.\, \sin^2\vartheta'}}$$

Nimmt man für P und P' die beiden auf einander folgenden Ecken des Fünfecks, deren excentrische Anomalien φ und φ' sind, so ist nach 15) und 17), sowie nach 15) und 16):

$$
29. \left|
\begin{aligned}
tg^2 u \,.\, \cos\varphi &= \frac{\cos\varphi}{\cos am\,\frac{2K}{5}} = -\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')} \\
tg^2 v \,.\, \sin\varphi &= \frac{\Delta\,am\,\frac{2K}{5}}{\cos am\,\frac{2K}{5}} \cdot \sin\varphi = -\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')}
\end{aligned}
\right.
$$

Indem man die erste dieser Gleichungen mit $\cos\varphi'$, die zweite mit $\sin\varphi'$ multiplicirt und dann ihre Summen zur Einheit addirt, erhält man:

$1 + tg^2 u \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\varphi' + tg^2 v \,.\, \sin\varphi \,.\, \sin\varphi' =$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'') - [\cos\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'') \,.\, \cos\varphi' + \sin\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'') \,.\, \sin\varphi']}{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'') - \cos[\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'') - \varphi']}{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi')\sin\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')}$$

Ebenso ist:

$$1 + tg^2 u \,.\, \cos^2\varphi + tg^2 v \,.\, \sin^2\varphi =$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'') - [\cos\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'')\,.\,\cos\varphi + \sin\frac{1}{2}(\varphi''' + \varphi'')\,.\,\sin\varphi]}{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi)\,.\,\sin\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')}$$

Aus der letzten Formel findet man durch cyclische Vertauschung der φ:

$$1 + tg^2 u \,.\, \cos^2\varphi' + tg^2 v \,.\, \sin^2\varphi' = 2\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi')\,.\,\sin\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi''')}$$

Mit Hilfe dieser Formeln findet man aus 28)

30. $$\cos PP' = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi'')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')}}\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi')}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi)\,.\,\sin\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi')}}\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi)\,.\,\sin\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi')}}$$

Hieraus findet man die Cosinus der übrigen Seiten durch cyclische Vertauschung der φ.

Verhältnissmässig weit einfacher gestaltet sich das Product der Cosinus sämmtlicher Seiten. In demselben heben sich die aus den ersten beiden Faktoren von 30) entstehenden Ausdrücke fort und im letzten Faktor wird der Ausdruck unter der Wurzel ein vollständiges Quadrat, so dass übrig bleibt:

31. $$\cos PP'\,.\,\cos P'P''\,.\,\cos P''P'''\,.\,\cos P'''P''''\,.\,\cos P''''P$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')}{\sin\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi'''')}\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi''')}{\sin\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi)}\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi'''')}{\sin\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi')}\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi'')}\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')}{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi''')}$$

Die fünf Faktoren auf der rechten Seite können durch cyclische Vertauschung der φ aus einem derselben abgeleitet werden.

In dem Ausdrucke 31) setze man für die Sinus der halben Winkeldifferenzen ihre Werthe aus 14) und 20) ein. Wir erhalten dann:

32. $$\cos PP'\,.\,\cos P'P''\,.\,\cos P''P'''\,.\,\cos P'''P''''\,.\,\cos P''''P =$$

$$= \left(\frac{\sin am\,\frac{2K}{5}}{\sin am\,\frac{4K}{5}}\right)^5 \prod_0^4{}_n \sqrt{\frac{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{4K}{5}\cdot\sin^2 am\left(x + n\,.\,\frac{4K}{5}\right)}{1 - k^2\sin^2 am\,\frac{2K}{5}\cdot\sin^2 am\left(x + n\,.\,\frac{4K}{5}\right)}}\,.$$

6.

Das sphärische Polygon, welches seine eigene Polarfigur ist und das ebene Polygon, dessen Normalen von den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten sich in einem Punkte schneiden.

$P_1\ P_2\ \ldots .\ P_{2n}\ P_{2n+1}$ sei ein spsärisches Polygon, welches seine eigene Polarfigur ist. Ausser diesem Polygon sei eine beliebige Tangentialebene T der Kugel, auf welcher das Polygon liegt, mit ihrem Berührungspunkte B gegeben. Man lege durch B und die Ecken des Polygons grösste Kreise, welche die Polygonseiten in p, p_2, ..., p_{2n}, p_{2n+1} schneiden mögen. Weil in Polygonen der bezeichneten Art jede Ecke der Pol zur gegenüberliegenden Seite ist, so steht der Hauptkreis durch B und eine Ecke des Polygons senkrecht auf der der Ecke gegenüberliegenden Polygonseite oder, was dasselbe ist, die Ebenen, in welchen diese Hauptkreise liegen, stehen auf einander senkrecht. Es ist also z. B. $OP_{n+1}p_{n+1} \perp OP_{2n+1}P_1$, wo O den Mittelpunkt der Kugel bedeutet.

Bezeichnet man die Centralprojection eines Punktes der Kugel auf die Ebene T durch denselben Buchstaben mit einem Strich, also die Centralprojection von P_1 durch P_1', so ist die Centralprojection des Polygons $P_1\ P_2 \ldots P_{2n}\ P_{2n+1}$ auf die Ebene T: $P'_1\ P'_2 \ldots P'_{2n}\ P'_{2n+1}$. Nun steht die Ebene $OP'_{n+1}\ p'_{2n+1}$ senkrecht auf der Ebene T, weil sie deren Normale OB enthält; sie steht aber auch, da $OP'_{n+1}\ p'_{n+1}$ und $OP_{n+1}\ p_{n+1}$ dieselbe Ebene ist, wie wir bereits sahen, senkrecht auf $OP_{2n+1}\ P_1$, also auch senkrecht zur Schnittlinie dieser beiden Ebenen, d. h. zu $P'_{2n+1}\ P'_1$. Steht aber die Ebene $OP'_{n+1}\ p'_{n+1}$ senkrecht auf $P'_{2n+1}\ P'_1$, so steht auch jede Gerade in ihr senkrecht darauf, also auch $P'_{n+1}\ p'_{n+1} \perp P'_{2n+1}\ P'_1$. Dasselbe lässt sich für jede andere durch B und eine Ecke des ebenen Polygons gezogene Gerade und die der Ecke gegenüberliegende Seite nachweisen. Also:

In dem ebenen Polygon $P'_1\ P'_2 \ldots P'_{2n}\ P'_{2n+1}$ stehen die Verbindungsgeraden der $2n+1$ Ecken mit B senkrecht auf den gegenüberliegenden Seiten; oder:

In dem ebenen Polygon $P'_1\ P'_2 \ldots P'_{2n}\ P'_{2n+1}$ gehen die $2n+1$ Normalen von den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten durch denselben Punkt B.

Eine zu T parallele Ebene schneidet die körperliche Ecke, deren Scheitel im Mittelpunkte der Kugel liegt und deren Seitenflächen die Seiten des Polygons $P_1\ P_2 \ldots P_{2n}\ P_{2n+1}$ enthalten, in einem zu $P'_1\ P'_2 \ldots P'_{2n}\ P'_{2n+1}$ ähnlichen Polygon, für welches daher derselbe Satz gilt. Der Satz gilt demnach für die Centralprojection des Polygons $P_1\ P_2 \ldots P_{2n}\ P_{2n+1}$ auf eine beliebige Tangentialebene der Kugel und auf jede dazu parallele Ebene, d. h. überhaupt auf jede Ebene und kann jetzt ausgesprochen werden, wie folgt:

Die Centralprojection eines sphärischen Polygons, welches seine eigene Polarfigur ist, auf eine beliebige Ebene, ist ein ebenes Polygon, welches die Eigenschaft hat, dass die Senkrechten von allen Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten sich in einem Punkte schneiden.

Gauss nennt den gemeinsamen Schnittpunkt der Senkrechten „Augenpunkt".

Ein ebenes $(2n+1)$-Eck ist im Allgemeinen durch $4n-1$ Elemente bestimmt. Wir fragen, wie viele Elemente noch willkürlich bleiben, wenn das Polygon einen Augenpunkt haben, die $2n+1$ Senkrechten von den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten also durch einen Punkt gehen sollen. Zwei dieser Senkrechten schneiden sich immer in einem Punkte; wenn auch die übrigen $2n-1$ Senkrechten durch denselben Punkt gehen sollen, so wären das $2n-1$ Bedingungen, wenn die Lage aller Senkrechten ganz unabhängig von einander wäre. Das ist aber nicht der Fall; man hat vielmehr den Satz: Wenn in einem ebenen Polygon von der ungeraden Seitenzahl $2n+1$ die Senkrechten von $2n$ Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt gehen, so geht die Senkrechte von der letzten Ecke auf die gegenüberliegende Seite durch denselben Punkt. Ein ebenes Polygon von $2n+1$ Ecken hat also einen Augenpunkt, wenn nur $2n$ von den erwähnten Senkrechten sich in einem Punkte schneiden, und die Forderung, dass das Polygon einen Augenpunkt haben soll, gilt daher nur für $2n-2$ Bedingungen; es bleiben somit noch $(4n-1)-(2n-2)=2n+1$ Elemente willkürlich.

Die Construction eines $2n+1$-Ecks mit einem Augenpunkte aus den $2n+1$ gegebenen Elementen ist ganz einfach, wenn diese Elemente eine Seite und die Verbindungslinien des Augenpunktes mit $2n$ Ecken sind. Fig. 4 sei ein Theil eines solchen Polygons, dann ist

$$\Delta P'_1\ Bp'_{n+1} \sim \Delta p'_1\ BP'_{n+1}, \text{ also } \frac{BP'_1}{Bp'_{n+1}} = \frac{BP'_{n+1}}{Bp'_1} \text{ oder } BP'_1 \,.\, Bp'_1 = BP'_{n+1} \,.\, Bp'_{n+1}.$$

Aus der Betrachtung anderer ähnlicher Dreiecke erhält man analoge Gleichungen, so dass man vollständig hat: $Bp'_1 \,.\, BP'_1 = Bp'_2 \,.\, BP'_2 = \text{etc.} = Bp'_{2n} \,.\, BP'_{2n} = Bp'_{2n+1} \,.\, BP'_{2n+1}$.

Also: In jedem ebenen Polygon, welches einen Augenpunkt hat, ist das Product aus den beiden Abschnitten, in welche der Augenpunkt jede Normale theilt, für jede Normale constant.

Der entsprechende Satz für das sphärische Polygon, welches seine eigene Polarfigur ist, nämlich: $tg\, Bp_1 \,.\, tg\, BP_1 = tg\, Bp_2 \,.\, tg\, BP_2 = \text{etc.} = tg\, Bp_{2n+1} \,.\, tg\, BP_{2n+1}$ ist selbstverständlich, da $BP_1 + Bp_1 = BP_2 + Bp_2 = \text{etc.} = BP_{2n+1} + Bp_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ und $tg\, x \,.\, tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$ ist.

Errichtet man jetzt im Augenpunkte B zur Ebene des Polygons die Normale und legt durch einen beliebigen Punkt O derselben zwei Ebenen, die eine durch die Seite $P'_{2n+1}\, P'_1$, die andere durch die ihr zugehörige Senkrechte $P'_{n+1}\, p'_{n+1}$, so ist die Ebene $OP'_{n+1}\, p'_{n+1}$ die Neigungsebene von $P'_{n+1}\, P'_{2n+1}\, P'_1$ und $OP'_{2n+1}\, P'_1$, weil sie auf der Schnittlinie $P'_{2n+1}\, P'_1$ dieser beiden Ebenen senkrecht steht und ist als solche senkrecht zu $OP'_{2n+1}\, P'_1$. Wählt man nun den Punkt O so, dass $OB = \sqrt{BP'_{n+1} \cdot Bp'_{n+1}}$ ist, so ist nach einem bekannten planimetrischen Satze $P'_{n+1}\, O \perp p'_{n+1} O$, oder weil $OP_{2n+1}\, P'_1 \perp OP'_{n+1}\, p'_{n+1}$ steht, $P'_{n+1}\, O \perp OP'_{2n+1}\, P'_1$. Ebenso beweist man, dass die Verbindungslinien von O mit den übrigen Ecken auf den Ebenen durch O und die gegenüberliegenden Seiten des Polygons senkrecht stehen. Legt man daher um O eine Kugel von beliebigem Radius und projicirt die Punkte der ebenen Figur durch Verbindungsgerade mit dem Mittelpunkte auf die Kugel, so erhält man als Projection des ebenen Polygons ein sphärisches, in welchem jede Ecke der Pol zur gegenüberliegenden Seite, welches also seine eigene Polarfigur ist. Man kann daher den Satz auf Seite 35 umkehren und behaupten: dass jedes ebene Polygon mit einem Augenpunkte als Centralprojection eines sphärischen Polygons, welches seine eigene Polarfigur ist, aufgefasst werden kann." Man findet den Mittelpunkt der Kugel, auf welcher letzteres liegt, indem man zur Ebene des Polygons im Augenpunkte eine Senkrechte errichtet und auf derselben die mittlere Proportionale der beiden Abschnitte abträgt, in welche der Augenpunkt jede durch ihn gehende Normale des ebenen Polygons zerlegt.

Das ebene $(2n + 1)$-Eck mit einem Augenpunkte und das sphärische $(2n + 1)$-Eck, welches seine eigene Polarfigur ist, sind daher in gewissem Sinne sich entsprechende Figuren, und man kann eine Anzahl von Eigenschaften der einen Figur direct auf die andere übertragen. So erkennt man durch einfache Uebertragung sofort, dass einer ebenen Ellipse sich unendlich viele Polygone von der Beschaffenheit einschreiben lassen, dass sie einen gegebenen Punkt zum Augenpunkte haben, wenn sich derselben ein solches Polygon einzeichnen lässt;

dass jeder Punkt der Ellipse als Ecke eines solchen Polygons angesehen wsrden kann;

dass aber durch die Ellipse, einen Punkt in ihrer Peripherie und den Augenpunkt das Polygon vollständig bestimmt ist.

Im Allgemeinen lässt sich aber jeder ebenen Ellipse ein Polygon von gegebener Seitenzahl so einzeichnen, dass ein gegebener Punkt sein Augenpunkt wird. Denn construirt man eine Hilfskugel von beliebigem Radius, welche die Ebene in dem gegebenen Punkte berührt, so ist die Centralprojection der ebenen Ellipse auf die Kugel eine sphärische Ellipse, die Projectionen der Achsen der ersteren sind die sphärischen Achsen der letzteren. Diese beiden Achsen müssen nach Formel 3 pag. 20

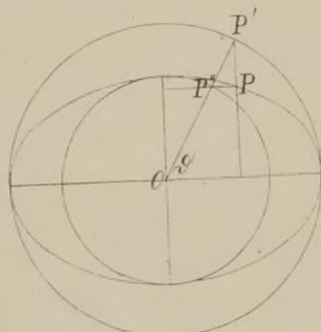
$$tg^4 v = \frac{\Delta^2 am\left(\frac{4nK}{2n+1}, k\right)}{\cos^2 am\left(\frac{4nK}{2n+1}, k\right)}$$

$$tg^4 u = \frac{1}{\cos^2 am\left(\frac{4nK}{2n+1}, k\right)}$$

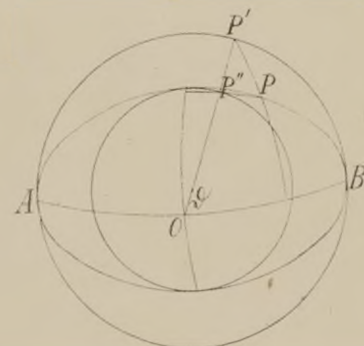
oder nach Elimination von k einer Relation zwischen u und v genügen, wenn sich der sphärischen Ellipse ein $(2n + 1)$-Eck einschreiben lassen soll, welches seine eigene Polarfigur ist oder, wofür ja nach dem Vorhergehenden dieselbe Bedingung gilt, wenn der ebenen Ellipse ein $(2n + 1)$-Eck mit dem gegebenen Punkte als Augenpunkt einzuzeichnen möglich sein soll. Diese eine Relation wird man aber immer noch befriedigen können, da für den Mittelpunkt der Kugel bisher erst ein geometrischer Ort gegeben war, nämlich die Senkrechte zur Ebene der Ellipse in dem gegebenen Augenpunkte.

Da durch eine Ellipse und einen Punkt in ihrer Ebene zugleich die Kugel bestimmt ist, auf welcher die sphärische Ellipse, deren Projection auf die Ebene jene ebene Ellipse ist und welcher sich Polygone, die ihre eigene Polarfigur sind, einschreiben lassen, da ferner diese Kugel dieselbe bleibt für alle der ebenen Ellipse eingeschriebenen Polygone, welche einen mit dem gegebenen Punkte zusammenfallenden Augenpunkt haben, und da endlich nach pag. 36 der Radius dieser Kugel $OB = \sqrt{BP''_{n+1} \cdot Bp'_{n+1}}$ ist, so ist ersichtlich: dass für all' diese unendlich vielen ebenen Polygone das Product der beiden Abschnitte, in welche der Augenpunkt jede Normale zerlegt, constant ist.

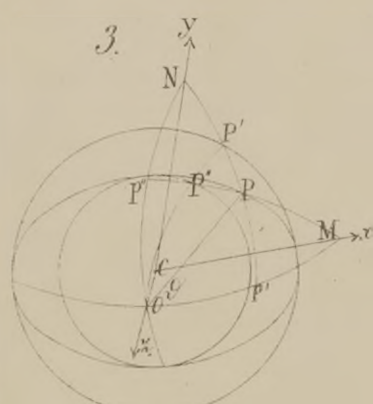
1.



2.



3.



4.