Vierundzwanzigstes Jahresprogramm
der
städtischen Realschule
erster Ordnung
zu Tilsit.

Zu
der öffentlichen Prüfung aller Klassen,
den Versuchen der Schüler im Vortrage und Gesange
und
der Entlassung der Abiturienten
Donnerstag den 2. und Freitag den 3. April 1868
an den Vormittagen
sowie
zu der damit verbundenen
Ausstellung der Zeichnungen
ladet
im Namen des Lehrer-Collegiums
ganz ergebenst ein
der Director
L. Koch.

19

Inhalt: 1) Die Quadratur der parallelen Oberfläche der Elastizitätsoberfläche von dem dritten ordentlichen Lehrer Eduard Hutt.
2) Schulnachrichten von dem Director.

Tilsit, 1868.
Gedruckt bei Heinr. Post.

Quadratur der parallelen Oberfläche der Elasticitätsoberfläche.

Einleitung.

Zwei Oberflächen sind und heißen parallel, wenn sämmtliche Normalen der einen auch Normalen der anderen sind.

Man erhält die Punkte der parallelen Oberfläche einer Oberfläche, wenn man von der letzteren aus auf allen ihren Normalen, sei es nach außen, sei es nach innen, um ein konstantes Stück weiter geht. Nenne ich also diese konstante Linie λ und nenne ich die geradlinigen, rechtwinkligen Koordinaten der gegebenen Oberfläche x, y, z und die Richtungsdeterminanten irgend einer Normale derselben $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so sind

$$\xi = x + \lambda \cos\alpha$$

$$\eta = y + \lambda \cos\beta$$

$$\zeta = z + \lambda \cos\gamma,$$ worin λ positiv oder negativ sein kann, die Koordinaten der parallelen Oberfläche der gegebenen. Beweis:

Es ist

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \lambda^2,$$

folglich

$$(\xi - x)(d\xi - dx) + (\eta - y)(d\eta - dy) + (\zeta - z)(d\zeta - dz) = o$$

Da aber dx, dy, dz den Richtungsdeterminanten des Flächenelementes der gegebenen Oberfläche, welches ich immer do nennen will, und $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ nach der Definition den Richtungsdeterminanten der Normale des Elementes do proportional sind, so ist, weil die Normale auf do senkrecht steht:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = o, \text{ folglich ist auch}$$

$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,dz = o$$

d. h.: Die Richtung, deren drei Determinanten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sind, welche mit $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ proportional sind, steht auf dem Flächenelemente $d\omega$ der zweiten Oberfläche, dessen

Richtungsdeterminanten mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ proportional sind, senkrecht, ist also die Normale dieses Elementes, was zu beweisen war; denn daraus folgt, daß die zweite Oberfläche der gegebenen parallel ist.

Ist daher

$f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der gegebenen Oberfläche, so ist die Gleichung ihrer parallelen Oberfläche

$$f(x + \lambda \cos\alpha,\ y + \lambda\cos\beta,\ z + \lambda\cos\gamma) = 0,$$

oder, wenn wir für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die bekannten Ausdrücke einsetzen:

$$\cos\alpha = \pm \frac{f'(x)}{\sqrt{\left((f'(x))^2 + (f'(y))^2 + (f'(z))^2\right)}}$$

$$\cos\beta = \pm \frac{f'(y)}{\sqrt{\left((f'(x))^2 + (f'(y))^2 + (f'(z))^2\right)}}$$

$$\cos\gamma = \mp \frac{f'(z)}{\sqrt{\left((f'(x))^2 + (f'(y))^2 + (f'(z))^2\right)}},$$

$$f\left\{ x \pm \lambda \frac{f'(x)}{\sqrt{\left((f'(x))^2 + (f'(y))^2 + (f'(z))^2\right)}}, \ldots \right\} = 0$$

Ableitung einer Formel für das Flächenelement ($d\omega$) der parallelen Oberfläche.

Die Quelle für die höchst elegante Formel, die ich jetzt abzuleiten im Begriffe bin, vermag ich nicht anzugeben. Mitgetheilt wurde sie von Herrn Prof. Richelot in dem mathematischen Seminar zu Königsberg.

Denken wir uns auf der gegebenen Oberfläche einen Punkt p und die beiden durch p gehenden, auf einander senkrecht stehenden Prinzipalschnitte. Wenn wir dann von p aus, sowohl in dem einen, als auch in dem anderen Hauptschnitte auf der Oberfläche um ein unendlich kleines Stück bis q_1 resp. q_2 weiter gehen und in p, q_1, q_2 die Normalen konstruiren, welche wir resp. ρ, ρ_1, ρ_2 nennen wollen, so schneiden ρ_1 und ρ_2 zwar beide die Normale ρ, aber in verschiedenen Punkten. Schneidet nun ρ_1 von ρ das Stück ρ^1, ρ_2 von ρ das Stück ρ'' ab, so ist:

$\rho_1 = \rho^1$ der Krümmungsradius des einen Hauptschnittes im Punkte p,

$\rho_2 = \rho''$ derjenige des anderen Hauptschnittes im Punkte p, oder, wie man sich auszudrücken beliebt, es sind ρ_1 und ρ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien der Oberfläche im Punkte p.

Wenn man nun ρ, ρ_1, ρ_2 um die Konstante λ verlängert, so sind, wie wir bewiesen haben,

$$\rho + \lambda,\ \rho_1 + \lambda,\ \rho_2 + \lambda$$

Normalen der parallelen Oberfläche, und daher ist es offenbar, daß

$\rho_1 + \lambda$ und $\rho_2 + \lambda$ die beiden Hauptkrümmungsradien der parallen Oberfläche in demjenigen Punkte P sind, welcher dem Punkte p der gegebenen Oberfläche entspricht.

Bedeutet nun $d\Omega$ das Oberflächenelement derjenigen Kugel, auf welche man die Krümmung der gegebenen Oberfläche bezieht, so ist bekanntlich die nach Gauß so benannte mensura curvaturae der gegebenen Oberfläche

$$\frac{d\Omega}{do} = \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2},$$

mithin ist die mensura curvaturae der parallelen Oberfläche

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{1}{(\rho_1 + \lambda)\ (\rho_2 + \lambda)}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\omega}{do} = \frac{(\rho_1 + \lambda)\ (\rho_2 + \lambda)}{\rho_1 \cdot \rho_2}$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda}{\rho_1}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{\rho_2}\right)$$

$$= 1 + \lambda \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \lambda^2 \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2}$$

oder:

$$d\omega = do + \lambda\, do \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \lambda^2 \frac{do}{\rho_1 \cdot \rho_2}$$

$$= do + \lambda\, do \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \lambda^2\, d\Omega.$$

Es besteht also die Quadraturformel der parallelen Oberfläche einer gegebenen Fläche aus drei wesentlich verschiedenen Theilen, die resp. der 0^{ten}, 1^{sten} und 2^{ten} Potenz von λ proportional sind. Der erste Theil der Formel ist die Quadratur der gegebenen Fläche. Der zweite Theil läßt sich als das Potential derselben Oberfläche in Bezug auf einen um die Einheit entfernten Punkt ansehen, wenn die Oberfläche mit Masse belegt gedacht wird, deren Dichte $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ ist. Der dritte Theil endlich ist die curvatura integra, also, wenn die Quadratur über die ganze Oberfläche ausgedehnt wird, gleich 4π.

Wie viel komplizirter die Quadratur der parallelen Oberfläche einer gegebenen Fläche, als die der letzteren selbst ist, geht aus der Formel für $d\omega$ wohl klar hervor.

Setze ich für do und für $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ die bekannten Formeln in geradlinigen, rechtwinkligen Koordinaten:

$$do = dx\, dy \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}},$$

so wird:

$$d\omega = dx\, dy \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$$

$$+ \lambda\, dx\, dy \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$+ \lambda^2\, d\Omega$$

Anwendung der abgeleiteten Formel auf die Elasticitätsoberfläche. Bestimmung des Oberflächenelementes und des größten und kleinsten Krümmungsradius derselben.

Die Gleichung der Elasticitätsoberfläche sei in der Form

$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = r^4$ gegeben, worin $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist,

so ist:

$$2a^2xdx + 2b^2ydy + 2c^2zdz - 2r^2(2xdx + 2ydy + 2zdz) = o,$$

folglich:

$$1)\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}\left(\frac{2r^2 - a^2}{2r^2 - c^2}\right)$$

$$2)\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}\left(\frac{2r^2 - b^2}{2r^2 - c^2}\right)$$

$$3)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{z}\left(\frac{2r^2 - a^2}{2r^2 - c^2}\right) - \frac{x^2}{z^3}\left(\frac{2r^2 - a^2}{2r^2 - c^2}\right)^2 - \frac{4x^2}{z}\left(\frac{(a^2 - c^2)^2}{(2r^2 - c^2)^3}\right)$$

$$4)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{z}\left(\frac{2r^2 - b^2}{2r^2 - c^2}\right) - \frac{y^2}{z^3}\left(\frac{2r^2 - b^2}{2r^2 - c^2}\right)^2 - \frac{4y^2}{z}\left(\frac{(b^2 - c^2)^2}{(2r^2 - c^2)^3}\right)$$

$$5)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{xy}{z^3}\left(\frac{2r^2 - a^2}{2r^2 - c^2}\right)\left(\frac{2r^2 - b^2}{2r^2 - c^2}\right) - \frac{4xy}{z}\left(\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{(2r^2 - c^2)^3}\right)$$

Demnach ist:

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2(2r^2 - a^2)^2 + y^2(2r^2 - b^2)^2}{z^2(2r^2 - c^2)^2}$$

$$= \frac{x^2(2r^2 - a^2)^2 + y^2(2r^2 - b^2)^2 + z^2(2r^2 - c^2)^2}{z^2(2r^2 - c^2)^2}$$

$$= \frac{4r^4(x^2 + y^2 + z^2) - 4r^2(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) + a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2}{z^2(2r^2 - c^2)^2}$$

$$= \frac{a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2}{z^2(2r^2 - c^2)^2}.$$

Demnach ist die Formel für die Quadratur der Elasticitätsoberfläche selbst:

$$\iint do = \iint \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)} \, dx \, dy$$

$$(1) \qquad = \iint \frac{\sqrt{(a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2)}}{z(2r^2 - c^2)} \, dx \, dy$$

Dies Integral, als das erste Glied der gesuchten Quadratur, will ich nun kurz ausführen. Zwar ist der Werth desselben ein alt bekannter, doch ist die Ableitung desselben an dieser Stelle deshalb zweckmäßig, weil ich sämmtliche Formeln, auf die man jetzt geführt wird, auch bei meinen späteren Integrationen brauche, ich sie also jedenfalls irgend einmal hätte ableiten müssen.

Führe ich zunächst die gewöhnlichen Polarkoordinaten statt der bisher gebrauchten geradlinigen ein, setze also

$$z = r \cos \eta$$
$$y = r \sin \eta \cos \vartheta$$
$x = r \sin \eta \sin \vartheta$, so wird die Gleichung der Elasticitätsoberfläche:

$$r^2 = c^2\cos^2\eta + b^2\sin^2\eta\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\eta\sin^2\vartheta$$

Ferner wird:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = r\sin\vartheta\cos\eta + \frac{\sin\eta\sin\vartheta\sin\eta\cos\eta}{r}\left((b^2 - c^2)\cos^2\vartheta + (a^2 - c^2)\sin^2\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = r\cos\vartheta\sin\eta + \frac{\sin\eta\sin\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta}{r}(a^2 - b^2)\sin^2\eta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = r\cos\vartheta\cos\eta + \frac{\sin\eta\cos\vartheta\sin\eta\cos\eta}{r}\left((b^2 - c^2)\cos^2\vartheta + (a^2 - c^2)\sin^2\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = - r\sin\vartheta\sin\eta \; \frac{\sin\eta\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta}{r}(a^2 - b^2)\sin^2\eta$$

Daher ist:
$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} d\eta\, d\vartheta$$
$$= (2r^2 - c^2) \sin\eta \cos\eta\, d\eta\, d\vartheta$$
und die Formel (1) nimmt die Gestalt an:
$$\iint \frac{r \sqrt{(c^4 \cos^2\eta + b^4 \sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^4 \sin^2\eta \sin^2\vartheta)}}{r \cos\eta\,(2r^2 - c^2)} (2r^2 - c^2) \sin\eta \cos\eta\, d\eta\, d\vartheta =$$
$$\iint \sqrt{\left(c^4 \cos^2\eta + b^4 \sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^4 \sin^2\eta \sin^2\vartheta\right)} \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta,$$
und zwar ist, wenn die Quadratur über die ganze Oberfläche ausgedehnt werden soll,

nach η von $0 \ldots \pi$

nach ϑ von $0 \ldots 2\pi$ zu integriren, so daß die Quadratur der Elasticitätsoberfläche die Form annimmt:
$$\int_0^{\pi} \sin\eta\, d\eta \int_0^{2\pi} d\vartheta \sqrt{\left(c^4 \cos^2\eta + b^4 \sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^4 \sin^2\eta \cos^2\eta\right)}$$
oder, da man sich die ganze Oberfläche in 8 Oktanten getheilt denken kann, und die Fläche jedes einzelnen Oktanten durch eine Integration nach η und ϑ von $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ beherrscht wird, die Form:
$$8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\eta\, d\eta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sqrt{\left(c^4 \cos^2\eta + b^4 \sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^4 \sin^2\eta \cos^2\eta\right)}.$$

Um die zu integrirende Größe rational zu machen, führt Jacobi zwei neue Variable φ und ψ durch folgende Gleichungen ein:
$$\cos\eta = \frac{\frac{\cos\varphi}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^4}\right)}},$$
$$\sin\eta \cos\vartheta = \frac{\frac{\sin\varphi \cos\psi}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^4}\right)}}$$
$$\sin\eta \sin\vartheta = \frac{\frac{\sin\varphi \sin\psi}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^4}\right)}}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\psi$$

$$\cos\eta = \frac{\frac{1}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{c^4} + \left(\frac{\cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\psi}{a^4}\right)\operatorname{tg}^2\varphi\right)}},$$

und hieraus geht hervor, daß, während

ϑ von $o \ldots \frac{\pi}{2}$ geht, auch ψ von $o \ldots \frac{\pi}{2}$ geht,

und während

η von $o \ldots \frac{\pi}{2}$ geht, auch φ von $o \ldots \frac{\pi}{2}$ geht.

Berücksichtigt man nun, daß

$$\partial\eta\, d\vartheta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\eta}{\partial\varphi}, & \frac{\partial\eta}{\partial\psi} \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}, & \frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} \end{vmatrix} d\varphi\, d\psi \text{ ist,}$$

so ergiebt sich die Formel:

$$\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta = \frac{1}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{a^4}\right)^{3/2}},$$

so daß mein Integral in den neuen Variablen die Form annimmt:

$$\frac{8}{a^2b^2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{a^4}\right)^{3/2}}.$$

In Bezug auf ψ ist die Integration algebraisch ausführbar.

Bezeichne ich nämlich der Kürze wegen

$$\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{a^4} \text{ durch } \Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^4},$$

so ist:

$$\frac{8}{a^2b^2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^4}\right)^2} = -\frac{8}{a^2b^2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \zeta}\right]_{\zeta = o},$$

welches Zeichen bedeuten soll, daß, nachdem man nach ζ, einer von φ und ψ unabhängigen, übrigens willkührlichen Größe differenzirt hat, $\zeta = o$ zu setzen ist.

Es ist also zunächst das Integral zu bestimmen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{a^4} + \zeta}$$

$$=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{N\cos^2\psi + M\sin^2\psi} \text{ worin } N = \frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4} + \zeta,$$

$$M = \frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4} + \zeta$$

ist.

Setze ich $\sqrt{\left(\frac{M}{N}\right)} \operatorname{tg} \psi = t$, so wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{N\cos^2\psi + M\sin^2\psi} = \frac{1}{\sqrt{(MN)}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(M \, . \, N)}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left\{\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4} + \zeta\right\}\left\{\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4} + \zeta\right\}}}.$$

Daher ist

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(MN)}}\right)_{\zeta = 0} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2\,\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4 + b^4}}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4}\right)^{3/2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4}\right)^{3/2}}.$$

Es bleibt jetzt noch die Bestimmung des Werthes des folgenden Integrals übrig:

$$\frac{2\pi}{a^2b^2c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(2\,\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4 + b^4}\right) \sin\varphi \, d\varphi}{\left\{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4}\right)\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4}\right)\right\}^{3/2}}.$$

Dies Integral ist ein elliptisches.

In Bezug auf die Reihenfolge von a, b, c ihrer Größe nach setze ich hiermit fest, daß

$$c > b > a \text{ oder } \frac{1}{c} \angle \frac{1}{b} \angle \frac{1}{a} \text{ sein soll.}$$

Alsdann bringe ich das Integral auf die Form:

$$\frac{2\pi}{a^2b^2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(2\frac{\cos^2\varphi}{c^4}+\frac{\sin^2\varphi}{a^4+b^4}\right)\sin\varphi\, d\varphi}{\left\{\left(\frac{1}{a^4}-\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{c^4}\right)\cos^2\varphi\right)\left(\frac{1}{b^4}-\left(\frac{1}{b^4}-\frac{1}{c^4}\right)\cos^2\varphi\right)\right\}^{3/2}}$$

$$=$$

$$\frac{2\pi}{a^2b^2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^6b^6\frac{\left(2\frac{\cos^2\varphi}{c^4}+\frac{\sin^2\varphi}{a^4+b^4}\right)\sin\varphi\, d\varphi}{\left(1-\frac{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4}}\cos^2\varphi\right)^{3/2}\left(1-\frac{\frac{1}{b^4}-\frac{1}{c^4}}{\frac{1}{b^4}}\cos^2\varphi\right)^{3/2}}.$$

Setze ich nun

$$\frac{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4}}\cos^2\varphi=\sin^2\text{am } u,$$

$$\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{b^4}}\cdot\frac{\frac{1}{b^4}-\frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{c^4}}=\frac{c^4-b^4}{c^4-a^4}=\varkappa^2,$$

woraus hervorgeht, daß $\varkappa^2$ ein positiver, echter Bruch ist, so erhalte ich:

$$1-\frac{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4}}\cos^2\varphi=\cos^2\text{am } u$$

$$1-\frac{\frac{1}{b^4}-\frac{1}{c^4}}{\frac{1}{b^4}}\cos^2\varphi=\Delta^2\text{am } u$$

$$\sin\varphi\, d\varphi=-\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{c^4}}\right)}\cos\text{am } u\ \Delta\text{am } u\ du.$$

Es ist ferner:

$$\frac{\cos^2\varphi}{c^4}+\frac{\sin^2\varphi}{a^4}=\frac{1}{a^4}\cos^2\text{am } u$$

$$\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4} = \frac{1}{b^4}\,\Delta^2\mathrm{am}\,u, \text{ und}$$

daher wird das Integral, wenn ich

$$\frac{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4}} = \sin^2\mathrm{am}\,\omega \text{ setze, gleich dem folgenden:}$$

$$\frac{2\pi\, a^4 b^4}{c^2} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}\right)} \int_0^\omega \frac{\frac{1}{a^4}\cos^2\mathrm{am}\,u + \frac{1}{b^4}\Delta^2\mathrm{am}\,u}{\cos^2\mathrm{am}\,u + \Delta^2\mathrm{am}\,u}\,du$$

$$=$$

$$2\pi\,\frac{a^4 b^4}{c^2} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}\right)} \left\{ \frac{1}{a^4}\int_0^\omega \frac{du}{\Delta^2\mathrm{am}\,u} + \frac{1}{b^4}\int_0^\omega \frac{du}{\cos^2\mathrm{am}\,u} \right\}.$$

Nun ist:

$$\varkappa^2 \frac{\partial\, \frac{\sin\mathrm{am}\,u \cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\mathrm{am}\,u}}{\partial u} = \Delta^2\mathrm{am}\,u - \frac{\varkappa_1^{\,2}}{\Delta^2\mathrm{am}\,u},$$

wenn $\varkappa_1^{\,2} = 1 - \varkappa^2$ ist, und daher

$$\int_0^\omega \frac{du}{\Delta^2\mathrm{am}\,u} = \frac{1}{\varkappa_1^{\,2}}\int_0^\omega \Delta^2\mathrm{am}\,u\,du - \frac{\varkappa^2}{\varkappa_1^{\,2}} \cdot \frac{\sin\mathrm{am}\,\omega\cos\mathrm{am}\,\omega}{\Delta\mathrm{am}\,\omega},$$

und es ist

$$\frac{\partial\, \frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}}{\partial u} = \frac{\varkappa_1^{\,2}}{\cos^2\mathrm{am}\,u} + \Delta^2\mathrm{am}\,u - \varkappa_1^{\,2},$$

und daher:

$$\int_0^\omega \frac{du}{\cos^2\mathrm{am}\,u} = -\frac{1}{\varkappa_1^{\,2}}\int_0^\omega \Delta^2\mathrm{am}\,u\,du + \int_0^\omega du + \frac{1}{\varkappa_1^{\,2}}\,\frac{\sin\mathrm{am}\,\omega\,\Delta\mathrm{am}\,\omega}{\cos\mathrm{am}\,\omega}.$$

Führt man nun die Jacobischen Transzendenten E (u) und F (u) ein, setzt also

$$\int_0^\omega \Delta^2\mathrm{am}\,u\,du = E(\omega)$$

$$\int_0^\omega du = F(\omega), \text{ so ist der gesuchte Werth unseres Integrals:}$$

$$2\pi\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{c^4}}\right)}\left\{-\frac{b^4}{c^2}\cdot\frac{\varkappa^2}{\varkappa_1{}^2}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\,\omega\cos\mathrm{am}\,\omega}{\varDelta\mathrm{am}\,\omega}+\frac{a^4}{c^2}\cdot\frac{1}{\varkappa_1{}^2}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\,\omega\,\varDelta\mathrm{am}\,\omega}{\cos\mathrm{am}\,\omega}+\frac{a^4}{c^2}\cdot F(\omega)-\frac{a^4-b^4}{c^2}\cdot\frac{1}{\varkappa_1{}^2}\cdot E(\omega)\right\}.$$

Nun ist aber $\varkappa^2 = \frac{c^4-b^4}{c^4-a^4}$,

$$\sin^2\mathrm{am}\,\omega = \frac{c^4-a^4}{c^4},$$

$$\cos^2\mathrm{am}\,\omega = \frac{a^4}{c^4},$$

$\varDelta^2\mathrm{am}\,\omega = \frac{b^4}{c^4}$, und daher nimmt das letztgefundene Resultat die Form an:

$$\frac{2\pi c^2}{\sin\mathrm{am}\,\omega}\left\{-\frac{\varkappa^2}{\varkappa_1{}^2}\sin\mathrm{am}\,\omega\cos\mathrm{am}\,\omega\,\varDelta\mathrm{am}\,\omega+\frac{1}{\varkappa_1{}^2}\sin\mathrm{am}\,\omega\cos\mathrm{am}\,\omega\,\varDelta\mathrm{am}\,\omega+\cos^2\mathrm{am}\,\omega\,F(\omega)+\varkappa_1{}^2\sin^2\mathrm{am}\,\omega\,\frac{E(\omega)}{\varkappa_1{}^2}\right\}$$

$$=$$

$$\frac{2\pi c^2}{\sin\mathrm{am}\,\omega}\left(\sin\mathrm{am}\,\omega\cos\mathrm{am}\,\omega\,\varDelta\mathrm{am}\,\omega+\cos^2\mathrm{am}\,\omega\,F(\omega)+\sin^2\mathrm{am}\,\omega\,E(\omega)\right)$$

$$=$$

$$2\pi\left\{\frac{\cos^2\mathrm{am}\,\omega\,F(\omega)+\sin^2\mathrm{am}\,\omega\,E(\omega)}{\sin\mathrm{am}\,\omega}\,c^2+\frac{a^2b^2}{c^2}\right\}.$$

Das also ist der Werth der Quadratur der Elastizitätsoberfläche und zugleich das erste Glied der Quadratur ihrer parallelen Oberfläche. Die Form des gefundenen Resultates ist die von Jacobi an der angeführten Stelle im Crelleschen Journale mitgetheilte.

Ermittelung des Werthes des zweiten Gliedes der Quadratur der parallelen Oberfläche.

Mit Rücksicht auf die für die Elastizitätsoberfläche im Anfange des vorigen Abschnittes abgeleiteten Formeln wird der zu bildende Ausdruck:

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$=$$

$$-\left[1+\frac{x^2}{z^2}\left(\frac{2r^2-a^2}{2r^2-c^2}\right)^2\right]\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{2r^2-b^2}{2r^2-c^2}+\frac{y^2}{z^3}\left(\frac{2r^2-b^2}{2r^2-c^2}\right)^2+\frac{4y^2}{z}\frac{(b^2-c^2)^2}{(2r^2-c^2)^3}\right]$$

$$-\left[1+\frac{y^2}{z^2}\left(\frac{2r^2-b^2}{2r^2-c^2}\right)^2\right]\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{2r^2-a^2}{2r^2-c^2}+\frac{x^2}{z^3}\left(\frac{2r^2-a^2}{2r^2-c^2}\right)^2+\frac{4x^2}{z}\frac{(a^2-c^2)^2}{(2r^2-c^2)^3}\right]$$

$$+\frac{2xy}{z^2}\frac{(2r^2-a^2)(2r^2-b^2)}{(2r^2-c^2)^2}\left[\frac{xy}{z^2}\frac{(2r^2-a^2)(2r^2-b^2)}{(2r^2-c^2)^2}+\frac{4xy}{z}\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{(2r^2-c^2)^3}\right]$$

$$=$$

$$-\frac{1}{z}\frac{(2r^2-a^2)+(2r^2-b^2)}{2r^2-c^2}-\frac{y^2(2r^2-b^2)^2+x^2(2r^2-a^2)^2}{z^3(2r^2-c^2)^2}$$

$$-\frac{[x^2(2r^2-a^2)+y^2(2r^2-b^2)](2r^2-a^2)(2r^2-b^2)}{z^3(2r^2-c^2)^3}-4\frac{x^2(a^2-c^2)^2+y^2(b^2-c^2)^2}{z(2r^2-c^2)^3}$$

$$-4\frac{x^2y^2}{z^3(2r^2-c_2)^5}\Big((a^2-c^2)^2(2r^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2(2r^2-a^2)^2\Big)$$

$$+8\frac{x^2y^2}{z^3(2r^2-c^2)^5}(a^2-c^2)(b^2-c^2)(2r^2-a^2)(2r^2-b^2).$$

In diesem Ausdrucke reduziren sich zunächst die beiden letzten Glieder folgendermaßen:

Ziehe ich den gemeinsamen Faktor $-4\frac{x^2y^2}{z^3(2r^2-c^2)^5}$ heraus, so werden sie:

$$-4\frac{x^2y^2}{z^3(2r^2-c^2)^5}\Big\{(a^2-c^2)^2(2r^2-b^2)^2-2(a^2-c^2)(b^2-c^2)(2r^2-b^2)(2r^2-a^2)+(b^2-c^2)^2(2r^2-a^2)^2\Big\}$$

$$=-4\frac{x^2y^2}{z^3(2r^2-c^2)^5}\Big((a^2-c^2)(2r^2-b^2)-(b^2-c^2)(2r^2-a^2)\Big)^2$$

$$=-4\frac{x^2y^2(a^2-b^2)^2}{z^3(2r^2-c^2)^3}.$$

Dieses Glied fassen wir mit dem drittletzten des ganzen Ausdrucks zusammen und erhalten dadurch:

$$-4\frac{x^2y^2(a^2-b^2)^2+x^2z^2(a^2-c^2)^2+y^2z^2(b^2-c^2)^2}{z^3(2r_2-c^2)^3},$$

also im Ganzen:

$$(2)\quad\begin{aligned}&-\frac{1}{z}\cdot\frac{(2r^2-a^2)+(2r^2-b^2)}{2r^2-c^2}-\frac{y^2(2r^2-b^2)^2+x^2(2r^2-a^2)^2}{z^3(2r^2-c^2)^2}\\&-\frac{[x^2(2r^2-a^2)+y^2(2r^2-b^2)](2r^2-a^2)(2r^2-b^2)}{z^3(2r^2-c^2)^3}\\&-4\frac{x^2y^2(a^2-b^2)^2+x^2z^2(a^2-c^2)^2+y^2z^2(b^2-c^2)^2}{z^3(2r^2-c^2)^3}\end{aligned}$$

Aus der Gleichung der Elastizitätsoberfläche $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=r^4$ folgen nun aber sofort zwei neue Gleichungen, welche zur ferneren Reduktion ungemein brauchbar sind. Diese Gleichungen lauten:

$$x^2(2r^2-a^2)+y^2(2r^2-b^2)+z^2(2r^2-c^2)=r^4$$

$$x^2(2r^2-a^2)^2+y^2(2r^2-b^2)^2+z^2(2r^2-c^2)^2=a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2=r_1^{\,4},$$

so daß also $r_1^{\,4}$ den Ausdruck $a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2$ bedeutet.

Nun wird:

$$-4\,\frac{x^2y^2(a^2-b^2)^2+x^2z^2(a^2-c^2)^2+y^2z^2(b^2-c^2)^2}{z^3(2r^2-c^2)^3}$$

$$=-\frac{2}{z^3(2r^2-c^2)^3}\left\{\begin{array}{l} x^2[x^2(a^2-a^2)^2+y^2(a^2-b^2)^2+z^2(a^2-c^2)^2] \\ +\,y^2[x^2(b^2-a^2)^2+y^2(b^2-b^2)^2+z^2(b^2-c^2)^2] \\ +\,z^2[x^2(c^2-a^2)^2+y^2(c^2-b^2)^2+z^2(c^2-c^2)^2] \end{array}\right\}$$

$$=-\frac{2}{z^3(2r^2-c^2)^3}\left\{\begin{array}{l} x^2(a^4r^2-2a^2r^4+r_1^4) \\ +\,y^2(b^4r^2-2b^2r^4+r_1^4) \\ +\,z^2(c^4r^2-2c^2r^4+r_1^4) \end{array}\right\}$$

$$=-\frac{2\,.\,2r^2(r_1^4-r^6)}{z^3(2r^2-c^2)^3}.$$

Es ist ferner:

$$x^2(2r^2-a^2)+y^2(2r^2-b^2)=r^4-z^2(2r^2-c^2)$$

$$x^2(2r^2-a^2)^2+y^2(2r^2-b^2)^2=r_1^4-z^2(2r^2-c^2)^2,$$

und mit Rücksicht hierauf wird nun endlich der Ausdruck (2), wenn ich allen Gliedern den gemeinsamen Nenner $z^3(2r^2-c^2)^3$ gebe, gleich:

$$\frac{1}{z^3(2r^2-c^2)^3}\left\{\begin{array}{l} -\,2\,.\,2r^2(r_1^4-r^6)-z^2(2r^2-c^2)\Big((2r^2-a^2)+(2r^2-b^2)\Big) \\ -\,\Big(r_1^4-z^2(2r^2-c^2)^2\Big)\,(2r^2-c^2) \\ -\,\Big(r^4-z^2(2r^2-c^2)\Big)\,(2r^2-a^2)\,(2r^2-b^2) \end{array}\right\}$$

$$(3)\quad=\frac{-\,r_1^4(6r^2-c^2)+2r^6(a^2+b^2)-a^2b^2r^4+z^2(2r^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)}{z^3(2r^2-c^2)^3}$$

Durch eine nochmalige Reduktion des letzten Gliedes läßt sich dieser Ausdruck nun endlich auf eine oder vielmehr auf zwei sehr einfache Formen bringen. Addirt man nämlich zu dem letzten Gliede die beiden identisch verschwindenden Glieder

$$y^2(2r^2-b^2)(b^2-b^2)(a^2-b^2)\ \text{und}\ x^2(2r^2-a^2)(a^2-a^2)(b^2-a^2),$$

so wird es:

$$z^2(2r^2-c^2)\Big(a^2b^2-(a^2+b^2)\,c^2+c^4\Big)$$

$$+\,y^2(2r^2-b^2)\Big(a^2b^2-(a^2+b^2)\,b^2+b^4\Big)$$

$$+\,x^2(2r^2-a^2)\Big(a^2b^2-(a^2+b^2)\,a^2+a^4\Big)$$

$$=$$

$$a^2b^2r^4-2r^6(a^2+b^2)+2r^2r_1^4+(a^2+b^2)\,r_1^4-(c^6z^2+b^6y^2+a^6x^2).$$

Setze ich diesen Werth in die Formel (3) ein, so wird sie:

$$(4_a)\qquad \frac{-r_1^4(4r^2-a^2-b^2-c^2)-\Sigma c^6z^2}{z^3(2r^2-c^2)^3},$$

ein Resultat, das gegenüber der komplicirten Anfangsformel durch seine Einfachheit überrascht.

Daß Σc^6z^2 ein Symbol für $c^6z^2+b^6y^2+a^6x^2$ ist, brauche ich wohl kaum noch zu bemerken.

Die zweite einfache Endformel für (3) entspringt aus einer etwas abgeänderten Reduktion des letzten Gliedes in (3):

Dasselbe ist wieder, ähnlich wie vorhin, gleich:

$$z^2(2r^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)+y^2(2r^2-c^2)(b^2-b^2)(a^2-b^2)$$
$$+x^2(2r^2-c^2)(a^2-a^2)(b^2-a^2)$$
$$=$$
$$z^2(2r^2-c^2)\big(a^2b^2-(a^2+b^2)c^2+c^4\big)$$
$$+y^2(2r^2-c^2)\big(a^2b^2-(a^2+b^2)b^2+b^4\big)$$
$$+x^2(2r^2-c^2)\big(a^2b^2-(a^2+b^2)a^2+a^4\big)$$
$$=$$
$$2r^4a^2b^2-a^2b^2c^2r^2-2r^6(a^2+b^2)+(a^2+b^2)c^2r^4+2r^2r_1^4-c^2r_1^4.$$

Führt man diesen Ausdruck in (3) ein, so erhält man:

$$\frac{-4r^2.r_1^4+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)r^4-a^2b^2c^2r^2}{z^3(2r^2-c^2)^3}$$
$$=$$
$$(4_b)\qquad \frac{r^2(r^2\,\Sigma a^2b^2-4r_1^4-a^2b^2c^2)}{z^3(2r^2-c^2)^3}$$

Σa^2b^2 ist ein Symbol für $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$.

Zu beweisen, daß die beiden Resultate (4_a) und (4_b) identisch sind, ist nicht schwer. Man hat zu dem Ende nur zu zeigen, daß

$$(a^2+b^2+c^2)r_1^4-\Sigma c^6z^2=\Sigma a^2b^2.r^4-a^2b^2c^2r^2 \text{ ist.}$$

Da $r_1^4=\Sigma c^4z^2$, und $r^4=\Sigma c^2z^2$ ist, so ist:

$$(a^2+b^2+c^2)r_1^4-\Sigma c^6z^2=a^2(b^4y^2-c^4z^2)-b^2(a^4x^2+c^4z^2)+c^2(a^4x^2+b^4y^2),$$

und es ist:

$$\Sigma a^2b^2.r^4-a^2b^2c^2r^2=a^2(b^4y^2+c^4z^2)+b^2(a^4x^2-c^4z^2)+c^2(a^4x^2+b^4y^2)$$
$$+a^2b^2c^2r^2-a^2b^2c^2r^2,$$

mithin ist in der That identisch:

$$(a^2+b^2+c^2)r_1^4-\Sigma c^6z^2=\Sigma a^2b^2.r^4-a^2b^2c^2r^2.$$

Wir haben also gefunden:

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$=$$

$$\frac{r_1{}^4\,(a^2+b^2+c^2-4r^2)-\Sigma\,c^6z^2}{z^3\,(2r^2-c^2)^3}$$

$$=$$

$$\frac{r^2\,(r^2\,\Sigma a^2b^2-4r_1{}^4-a^2b^2c^2)}{z^3\,(2r^2-c^2)^3}$$

Da nun

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{r_1{}^4}{z^2\,(2r^2-c^2)^2}$$ ist, so ist:

$$\frac{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2-4r^2-\frac{1}{r_1{}^4}\,\Sigma c^6z^2}{z\,(2r^2-c^2)}=\frac{-4r^2+\left(\frac{r}{r_1}\right)^4\Sigma\,a^2b^2-\frac{r^2}{r_1{}^4}\,a^2b^2c^2}{z\,(2r^2-c^2)}$$

Daher ist das zweite Glied der Quadratur der parallelen Oberfläche der Elastizitätsoberfläche, abgesehen von dem Faktor λ, gleich dem Integral:

$$\iint\frac{a^2+b^2+c^2-4r^2-\frac{1}{r_1{}^4}\,\Sigma\,c^6z^2}{z\,(2r^2-c^2)}\,dx\;dy$$

$$=$$

$$\iint\frac{-4r^2+\left(\frac{r}{r_1}\right)^4\Sigma\,a^2b^2-\frac{r^2}{r_1{}^4}\,a^2b^2c^2}{z\,(2r^2-c^2)}\,dx\;dy,$$

so daß uns zur vollständigen Lösung unserer Aufgabe nichts übrig bleibt, als die Bestimmung des einen oder des anderen dieser beiden Integrale, von denen wir bewiesen haben, daß sie identisch sind.

Da in dem ersten der beiden Integrale drei wesentlich verschiedene Größen: $r, {}^2r_1{}^4, \Sigma c^6z^2$, in dem zweiten aber nur die beiden Größen r^2 und $r_1{}^4$ vorkommen, so wird man schon a priori dazu veranlaßt werden, die ferneren Operationen an das zweite Integral anzuknüpfen, was sich auch in dem weiteren Verlaufe der Untersuchungen von selbst rechtfertigt.

Die letzten Integrationen.

Setzt man wieder, wie früher:

$$z = r\cos\eta$$
$$y = r\sin\eta\cos\vartheta$$
$$x = r\sin\eta\sin\vartheta,$$

woraus

$$dx\,dy = (2r^2 - c^2)\sin\eta\cos\eta\,d\eta\,d\vartheta$$

folgt, so wird, da

$$\begin{aligned} r^2 &= c^2\cos^2\eta + b^2\sin^2\eta\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\eta\sin^2\vartheta \\ &= \Sigma\, c^2\cos^2\eta \quad, \\ r_1{}^4 &= c^4z^2 + b^4y^2 + a^4x^2 \\ &= r^2(c^4\cos^2\eta + b^4\sin^2\eta\cos^2\vartheta + a^4\sin\eta\sin^2\vartheta) \\ &= r^2\,\Sigma c^4\cos^2\eta \end{aligned}$$

ist, das zu bestimmende Integral gleich:

$$\int\!\!\int \left\{ -4 - \frac{a^2b^2c^2}{(\Sigma c^2\cos^2\eta)(\Sigma c4\cos^2\eta)} + \frac{\Sigma a^2b^2}{\Sigma c^4\cos^2\eta} \right\} \sqrt{(\Sigma\, c^2\cos^2\eta)}\sin\eta\,d\eta\,d\vartheta.$$

Die Grenzen sind, wenn die ganze Oberfläche beherrscht werden soll,

für η : o und π

für ϑ : o und 2π, wofür ich wieder die Grenzen o und $\frac{\pi}{2}$ einführen kann, wenn ich dem Integral den Faktor 8 gebe.

Um die zu integrirende Größe rational zu machen, setze man:

$$\cos\eta = \frac{\frac{\cos\varphi}{c}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{a^2}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{\cos\varphi}{c}}{\sqrt{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)}},$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{\frac{\sin\varphi\cos\psi}{b}}{\sqrt{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)}}$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{\frac{\sin\varphi\sin\psi}{a}}{\sqrt{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{a^2}\right)}},$$ so folgt daraus, indem wir die früher abgeleiteten Formeln zu Rathe ziehen,

$$\sin\eta \, d\eta \, d\vartheta = \frac{1}{abc} \, \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Die Grenzen in Bezug auf φ und ψ sind dieselben, wie diejenigen nach η und ϑ, nämlich für beide Variable o und $\frac{\pi}{2}$, und daher ist am letzten Ende das Integral zu bestimmen:

$$\frac{8}{abc} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -4 - \frac{a^2b^2c^2\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^2}{\Sigma c^2\cos^2\varphi} + \frac{\Sigma a^2b^2 \, \Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}}{\Sigma c^2\cos^2\varphi} \right\} \cdot \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^2},$$

welches in folgende drei Integrale zerfällt:

$$\mathrm{I} - 8\,abc \int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\Sigma\,(c^2\cos^2\varphi)},$$

$$\mathrm{II} - \frac{32}{abc} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^2}$$

$$\mathrm{III} \; \frac{8\,\Sigma a^2b^2}{abc} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi)\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)}.$$

Das erste dieser drei Integrale ist uns seiner Form nach bekannt. Die algebraische Integration nach ψ liefert, wie wir wissen:

$$-4\pi\,abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\{(c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\,(c^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)\}}}$$

$$=$$

$$-4\pi\,abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\{(b^2 - (b^2 - c^2)\cos^2\varphi)\,(a^2 - (a^2 - c^2)\cos^2\varphi)\}}}.$$

Erinnere ich mich nun daran, daß $c > b > a$ ist, so setze ich

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} \cos^2\varphi = \sin am\,(u, \mu), \text{ wenn } \mu = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \text{ ist.}$$

Definire ich ferner υ durch die Gleichung $\frac{a^2 - c^2}{a^2} = \sin^2 am\,\upsilon$, so wird mein Integral gleich:

$$-4\pi c \int_0^{\upsilon} \sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2 - c^2}\right)} \, \frac{\cos am\,u \, \Delta am\,u \, du}{\cos am\,u \, \Delta am\,u}$$

$$= -4\pi c \sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2 - c^2}\right)}\, F(\upsilon, \mu) = -4\pi c \frac{F(\upsilon, \mu)}{\sin \mathrm{am}(\upsilon, \mu)}.$$

Das zweite Integral ist:

$$-\frac{32}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{a^2}\right)^2},$$

ein Integral, das wir auch schon kennen. Seinen Werth erhalten wir nämlich aus der Quadratur der Elastizitätsoberfläche selbst, wenn wir in der Formel für jene statt des Faktors 2 den Faktor — 8 und statt c^2, b^2, a^2 resp. c, b, a setzen. Dann erhalten wir:

$$-\frac{8\pi c}{\sin \mathrm{am}(u, \nu)}\left\{\sin \mathrm{am}(u, \nu) \cos \mathrm{am}\, u\, \Delta \mathrm{am}\, u + \cos^2 \mathrm{am}\, u\, F(u) + \sin^2 \mathrm{am}\, u\, E(u)\right\}$$

$$=$$

$$-8\pi\left\{\frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u\, F(u) + \sin^2 \mathrm{am}\, u\, E(u)}{\sin \mathrm{am}\, u} c + \frac{ab}{c}\right\},$$

und es ist u definirt durch die Gleichung $\sin^2 \mathrm{am}\, u = \frac{c^2 - a^2}{c^2}$, während der Modul

$$\nu^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2} \text{ ist.}$$

Offenbar aber ist es jetzt, wie sehr es für unseren eigentlichen Zweck von Nutzen gewesen ist, die Quadratur der Elastizitätsoberfläche selbst detaillirt ausgeführt zu haben.

Das dritte noch zu ermittelnde Integral ist:

$$\frac{8\,\Sigma a^2b^2}{abc}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß

$$\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right) = 1 \text{ ist.}$$

Beweis:

Die Gleichung der Elastizitätsoberfläche ist in den Polarkoordinaten η, ϑ gleich:

$$r^2 = \Sigma \frac{1}{c^2\cos^2\eta},$$

mithin hat sie in den Variablen φ und ψ die Form:

$$r^2 = \Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}.$$

Nun ist aber $\Sigma\, c^2\cos^2\varphi = \rho^2$ die Gleichung desjenigen Ellipsoids, dessen Radien Vektoren, die reziproken Werthe der Radien Vektoren der Elastizitätsoberfläche sind, folglich ist:

$$\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right) = \rho^2 \,.\, r^2 = \frac{1}{r^2}\, r^2 = 1.$$

Zweiter Beweis mittelst der Transformation der Koordinaten:

Ich setze: $$\sqrt{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} \quad \cos\varphi = \frac{\cos\eta'}{c}$$

$$\sqrt{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} \sin\varphi \cos\psi = \frac{\sin\eta' \cos\vartheta'}{b}$$

$$\sqrt{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} \sin\varphi \sin\psi = \frac{\sin\eta' \sin\vartheta'}{a},$$

eine Substitution, die ihre volle Berechtigung hat, weil sie φ und ψ durch η' und ϑ' und umgekehrt η' und ϑ' eindeutig durch φ und ψ ausdrückt, indem ich festsetze, daß die Quadratwurzel stets das Zeichen + haben soll.

Es folgt sofort:

$$\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2} = \Sigma \frac{\cos^2\eta'}{c^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \vartheta'$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{\cos\eta'}{c}}{\sqrt{\left(\Sigma \frac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) c^2 \operatorname{tg}^2\eta'\right\}}}$$

$$\sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'} = \frac{c^2 \frac{\sin\eta'}{\cos^3\eta'} \left(\frac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right)}{\left(1 + \left(\frac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) c^2 \operatorname{tg}^2\eta'\right)^{3/2}},$$

$$\sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta'} = \frac{c^2 \operatorname{tg}^2\eta' \sin\vartheta' \cos\vartheta' \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)}{\left(1 + \left(\frac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) c^2 \operatorname{tg}^2\eta'\right)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta'} = o, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta'} = \frac{b}{a} \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\vartheta'}.$$

Daher ist:

$$\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = \sin\varphi \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}, & \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta'} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta'}, & \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta'} \end{vmatrix} d\eta'\, d\vartheta' = \begin{vmatrix} \sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}, & \sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta'} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta'}, & \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta'} \end{vmatrix} d\eta'\, d\vartheta'$$

$$= \frac{\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta'\, \frac{b}{a}\, c^2 \frac{\cos^2\psi}{\cos^3\eta' \cos^2\vartheta'} \left(\frac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right)}{\left(1 + \left(\frac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) c^2 t^2 g\eta'\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{b}{ac} \sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta' \left(\frac{\frac{\cos^2\psi}{\cos^2\vartheta'} \left(\frac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right)}{\left(\Sigma \frac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)^{3/2}} \right).$$

Es ist aber:

$$\frac{\cos^2\psi}{\cos^2\vartheta'} \left(\frac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) = \frac{\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\cos^2\psi}{a^2} \operatorname{tg}^2\vartheta'$$

$$= \frac{1}{b^2} \left(\cos^2\psi + \sin^2\psi \right) = \frac{1}{b^2},$$

und daher wird:

$$\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = \frac{1}{abc} \cdot \frac{\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta'}{\left(\Sigma \frac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)^{3/2}}, \text{ folglich:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta'.}{abc \left(\Sigma \frac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)^{3/2}},$$

indem die Grenzen in Bezug auf η' und ϑ' dieselben wie diejenigen in Bezug auf φ und ψ sind.

Um die zu integrirende Größe rational zu machen, bediene ich mich der von uns nun schon mehrfach angewandten Substitutionen:

$$\cos\eta' = \frac{c \cos\varphi'}{\sqrt{(\Sigma c^2\cos^2\varphi')}}$$

$$\sin\eta' \cos\vartheta' = \frac{b \sin\varphi' \cos\psi'}{\sqrt{(\Sigma c^2\cos^2\varphi')}}$$

$$\sin\eta' \cos\vartheta' = \frac{a \sin\varphi' \sin\psi'}{\sqrt{(\Sigma c^2\cos^2\varphi')}}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\frac{1}{\Sigma \dfrac{\cos^2\eta'}{c^2}} = \Sigma\, c^2\cos^2\varphi',$$

$$\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta' = abc\, \frac{\sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'}{(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi')^{3/2}}.$$

Da ferner die Grenzen in Bezug auf φ' und ψ' dieselben wie diejenigen in Bezug auf η' und ϑ' sind, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta'}{abc\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi',$$

also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'$$

$$= \frac{\pi}{2},\ \text{q. e. d.}$$

Daher ist:

$$8\, \frac{\Sigma a^2b^2}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} = 3\,.\, \Sigma a^2b^2\,.\, \frac{4}{3}\, \frac{\pi}{abc}.$$

Wir sind am Ziele, denn wir haben gefunden:

$$\frac{8}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\Sigma a^2b^2}{\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} - \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma c^2\cos^2\varphi} - \frac{4}{\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^2} \right\} \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$$

$$=$$

$$3\,\Sigma a^2b^2\,.\,\frac{4}{3}\,.\,\frac{\pi}{abc} - 4\pi c\,\frac{F(\upsilon,\mu)}{\sin am\,(\upsilon,\mu)} - 8\pi\left[\frac{\cos^2 am\,(u,\nu)\,F(u,\nu) + \sin^2 am\,(u,\nu)\,E(u,\nu)}{\sin am\,(u,\nu)}\, c + \frac{ab}{c}\right].$$

Resultat.

Das Resultat, zu dem wir gelangt sind, ist, in Formeln ausgedrückt, dieses: Die Quadratur der ganzen parallelen Oberfläche einer Elastizitätsoberfläche, deren Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \text{ ist,}$$

ist gleich:

$$2\pi\left[\frac{\cos^2 am\,(\omega,\varkappa)\,F(\omega,\varkappa) + \sin^2 am\,(\omega,\varkappa)\,E(\omega,\varkappa)}{\sin am\,(\omega,\varkappa)}\, c^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}\right]$$

$$+ \lambda . \left\{ \begin{array}{l} - 4 . 2\pi \left[\dfrac{\cos^2 am\,(u, \nu)\, F(u, \nu) + \sin^2 am\,(u, \nu)\, E(u, \nu)}{\sin am\,(u, \nu)} c + \dfrac{ab}{c} \right] \\ - 4 . \pi c \dfrac{F(\upsilon, \mu)}{\sin am\,(\upsilon, \mu)} \\ + 3\, \Sigma a^2 b^2 . \dfrac{4}{3} \dfrac{\pi}{abc} \end{array} \right\}$$

$$+ \lambda^2 . 4\pi ,$$

und es ist:

$$\sin^2 am\, \omega = \frac{c^4 - a^4}{c^4},\ \varkappa^2 = \frac{c^4 - b^4}{c^4 - a^4};$$

$$\sin^2 am\, u = \frac{c^2 - a^2}{c^2},\ \nu^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2};$$

$$\sin^2 am\, \upsilon = \frac{a^2 - c^2}{a^2},\ \mu^2 = \frac{a^2}{b^2} . \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = \frac{\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}},$$

während die Reihenfolge der Größen c, b, a folgende ist:

$$c > b > a.$$

Deutung des Resultats.

Es haben die Glieder, aus denen unsere Quadratur besteht, auch einzeln eine schöne geometrische Bedeutung:

Das erste Glied, das in λ^0 multiplizirt ist, ist die Quadratur der gegebenen Elastizitätsoberfläche selbst.

Das zweite Glied ist die vierfache Quadratur einer zweiten Elastizitätsoberfläche, deren Axen die Quadratwurzeln der respektiven Axen der gegebenen sind.

Das dritte Glied ist das Potential eines Ellipsoids in Bezug auf seinen Mittelpunkt; desjenigen Ellipsoids nämlich, dessen Punkte zu denjenigen der gegebenen Elastizitätsoberfläche konjugirt sind in Bezug auf eine Kugel, die um den Mittelpunkt der Elastizitätsoberfläche mit dem Radius 1 beschrieben ist.

Das vierte Glied ist der Rauminhalt dieses Ellipsoids, multiplizirt mit 3 $(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)$.

Das fünfte Glied, das in λ^2 multiplizirt ist, ist die curvatura integra d. h. die Oberfläche einer Kugel, deren Radius 1 ist.

λ aber bedeutet die auf irgend einer Normale gemessene Entfernung der gegebenen Elastizitätsoberfläche von ihrer parallelen Oberfläche.

Im Zusammenhange und in Worten wird daher unser Resultat folgendermaßen lauten:

Die Quadratur der parallelen Oberfläche einer Elastizitätsoberfläche

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

besteht aus drei Gliedern, die, wenn λ die Entfernung beider Oberflächen von einander ist, resp. mit λ^0, λ, λ^2 proportional sind. Das erste Glied ist die Quadratur der gegebenen Elastizitätsoberfläche. Das zweite Glied ist ein Aggregat von drei Gliedern, von denen das erste die Quadratur einer zweiten Elastizitätsoberfläche

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

von denen das zweite das Potential eines Ellipsoids

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$$

in Bezug auf seinen Mittelpunkt, und von denen das dritte der Rauminhalt eben dieses Ellipsoids ist. Jedes dieser drei Glieder ist in eine Konstante multiplizirt. Das dritte Glied endlich, das in λ^2 multiplizirt ist, ist die curvatura integra.

E. Hutt.

Schulnachrichten.

A. Lehrverfassung.

Prima. Ordinarius: Oberlehrer Hohmann.

Religion, 2 St. w. Kirchengeschichte von der Reformation bis auf die neuere Zeit (Hollenberg §. 125—127), Erklärung der conf. Aug. und des Römerbriefes, Repetition von Sprüchen und Liedern. Oberl. Fleischer.

Deutsch, 3 St. w. Ueberblick über die Literatur von den Minnesängern bis auf Göthe, Lectüre einzelner Dichtungen Gellert's, Ramler's, Zachariae's, Gessner's, Klopstock's, Lessing's, Wieland's, Herder's. Vierwöchentliche freie Vorträge im Anschluß an die Lectüre und Aufsätze: 1) Suum cuique. 2) In den Froschpfuhl all' das Volk verbannt, das seinen Meister je verkannt. 3) Ueber die Worte Göthe's: Lieber durch Leiden möcht' ich mich schlagen, als so viel Freuden des Lebens ertragen. 4) Des Menschen Ohnmacht und seine gewaltige Kraft. 5) Wer Großes will, muß sich zusammenraffen; in der Beschränkung zeigt sich erst der Meister, und das Gesetz nur kann uns Freiheit geben. 6) Ueber den Einfluß der Phantasie auf die menschliche Zufriedenheit. 7) Ueber den Werth der Pünktlichkeit. 8) Ueber den Ausspruch: quid sit futurum cras, fuge quaerere. 9) Arbeit keine Last, sondern eine Wohlthat für den Menschen. (Abit. Arbeit). Im Sommer Oberl. Dr. Franck, im Winter der Director.

Latein, 3 St. w. Lectüre von Liv. I., Cicero: de imp. Cn. Pomp., pro Archia poeta, Vergil. Aen. I und II, ecl. I und IV, Wiederholung der Grammatik und Metrik, Wortbildungslehre nach Schultz §. 178—188 und §. 202 und 3. Exercitien. Lehrer Mogk.

Französisch, 4 St. w. Lectüre von Voltaire's Mérope und Regnard's joueur, einzelne Gedichte von J. B. Rousseau, Gresset, André, Chénier, Delille, der introduction littéraire, und einzelner prosaischer Stücke von Staël aus Herrig und Burguy, curs. Molière's: le bourgeois gentilhomme. Wiederholung der Grammatik nach Borel, freie Vorträge, wöchentliche Extemporalien und Exercitien, Aufsätze: 1) Sur la guerre de sept ans. 2) Sur la révolution angl. sous Charles I. 3) Bataille de Leipsick. 4) Le devoir avant tout, et le plaisir après. 5) Gustave Adolphe en Allemagne. 6) Rodolphe de Habsbourg. 7) Guerre de Charlemagne contre les Saxons 8) L'électeur Frédéric III. 9) Sur la bataille de Fehrbellin. Der Director.

Englisch, 3 St. w. Lectüre von Shakspere's Richard II von a 3 bis zu Ende und Jul. Caesar, einzelner Gedichte von Beaumont und Fletcher, curs.: Einzelnes aus Dicken's Dr. Marigold's prescriptions. Wiederholung der Grammatik nach Baskerville, freie Vorträge, Extemporalien, Exercitien, Uebersetzungen aus dem Englischen in das Französische und umgekehrt, Aufsätze: 1) The Russian campaign of Napoleon. 2) The 30 years' war, its causes and beginning. 3) Brennus before Rome. 4) Contents of Shakspere's Richard II. 5) Quarrel of Henry IV with pope Gregory VII. 6) The war between England and France in the 14th. and 15th. century. 7) Contents of the first two acts of Shakspere's Julius Caesar. Der Director.

Geschichte, 2 St. w. Die neuere Zeit vom westphäl. Frieden bis 1815 und Uebersicht über die neueste Geschichte, Repetition aus dem ganzen historischen Gebiete. Oberl. Fleischer.

Geographie, 1 St. w. Politisch-statistische Beschreibung der Hauptstaaten Europas, Repetition aus dem ganzen Gebiete der Geographie. Oberl. Fleischer.

Naturwissenschaften, 6 St. w. a. Physik, 3 St. Die mechanischen Erscheinungen und die Wärmelehre mit mathemat. Begründung; Wiederholung des ganzen Gebietes, Uebung im Lösen physikalischer Aufgaben, Experimente, mathematische Geographie und das Wichtigste aus der populären Astronomie. — b. Chemie, 3 St. Die Metalle und ihre wichtigsten sowie die bedeutendsten organischen Verbindungen, Lösung chemischer Aufgaben, Experimente; Anfangsgründe der qualitativen Analyse. Anfertigung schriftlicher Arbeiten. Oberl. Hohmann.

Mathematik, 5 St. w. a. Arithmetik 2 St. Berechnung der Logarithmen, der trigonometrischen Funktionen und der Zahl π, cubische Gleichungen. b. Stereometrie, nebst den Elementen der descriptiven Geometrie und der sphärischen Trigonometrie, 3 St. Schriftliche Arbeiten. Oberl. Dr. Ellinger.

Zeichnen, 3 St. w. Freihandzeichnen nach Gypsen und großen Vorlagen aux deux crayons 2 St. Linearzeichnen, Aufgaben aus der Perspective, architectonisches Reißen, Planzeichnen 1 St. Lehrer Thiel.

Gesang, 1 St. w. combinirt mit Secunda, Tertia A und B und Quarta: Lieder und größere Chöre, Psalmen, Motetten für gemischten Chor. Oberl. Dr. Ellinger.

Secunda. Ordinarius: im S. Oberlehrer Dr. Franck, im W. Lehrer Mogk.

Religion, 2 St. w. Nach Hollenberg §. 46—96: Das Leben Jesu und die Zeit der Apostel. Erklärung der beiden Briefe an die Thessalonicher, an die Galater und des 1. Corintherbriefes. Lehrer Voelkel.

Deutsch, 3 St. w. Lectüre klassischer Gedichte mit kurzer Besprechung der verschiedenen Gattungen der Poesie und Metrik. 2 St. Disponirübungen, sowie Vorträge im Anschluß an die Lectüre, Aufsätze: 1) Wie hat Schiller uns in seinem Kampf mit dem Drachen die Kapelle geschildert? 2) Welche Eigenschaften muß ein guter Aufsatz haben? 3) Lobrede auf Epaminondas (besonders nach Cornel. Nepos). 4) Der Herbst. 5) Die Zunge, als das wohlthätigste und verderblichste Glied des menschlichen Leibes. 6) Opfertod Zriny's und seiner Schaar (nach Körner). 7) Charakter Hermann's in Göthe's Hermann und Dorothea. 8) Steter Tropfen höhlt den Stein.

a. Das Werk lobt den Meister (Probearbeit), b. Das Leben eine Reise. Im S. Oberl. Dr. Franck, im W. Lehrer Mogk.

Latein, 4 St. w. Lectüre von Caes. b. c. I, Ovid. Metam. IV 615—787, V 1—268, 294—571, 642—678. Memorirübungen. Syntax nach Schultz §. 236—291, Wiederholung der übrigen Theile der Grammatik, Exercitien. Im S. Oberl. Dr. Franck, im W. Lehrer Mogk.

Französisch, 4 St. w. Lectüre von Plötz Lectures choisies, sect. 2, 9, 10. und curs. Th. Pavie: le peau d'ours. Syntax und Wiederholung der Etymologie nach Plötz. Memorir- und Sprechübungen, wöchentliche Exercitien und Extemporalien, einzelne freie Aufsätze der oberen Abtheilung. Der Director.

Englisch, 3 St. w. Lectüre einzelner Abschnitte aus Plate's Blossoms, Grammatik und mündliches Ueben derselben nach Plate's Lehrgang, Theil II, Exercitien und Extemporalien. Oberl. Fleischer.

Geschichte, 2 St. w. Geschichte des römischen Staates bis zum Untergange desselben. Oberl. Fleischer.

Geographie, 1 St. w. Europa mit besonderer Berücksichtigung des internationalen Verkehrs, Repetition der außereuropäischen Erdtheile. Oberl. Fleischer.

Naturwissenschaften, 6 St. w. a. Im S. Botanik 2 St. Wiederholung und Erweiterung des früher Gelernten durch fortgesetzte Beschreibung von Pflanzen mit besonderer Berücksichtigung der natürlichen Familie, Grundzüge der Pflanzen-Anatomie und Physiologie. Im W. Mineralogie 2 St.: Genauere Beschreibung der Mineralien nach der Sammlung der Anstalt, das Wichtigste aus der Geognosie und Geologie. b. Physik, 2 St.: Die Lehre von der Electricität, dem Schalle, dem Lichte und der Wärme, verbunden mit Experimenten. c. Chemie, 2 St.: Kenntniß der Metalloide, des Kaliums, des Natriums und der wichtigsten Verbindungen dieser Elemente; Experimente; Anleitung zum Lösen chemischer Aufgaben. Oberl. Hohmann.

Mathematik, 5 St. w. a. Prakt. Rechnen, 1 St.: Anwendung der Gleichungen des 1. und 2. Grades. b. Arithmetik 2 St.: Rechnen mit Logarithmen, Gebrauch der Logarithmentafeln, die Reihen I. Ordnung, Rentenrechnung. c. Trigonometrie, 2 St.: Anfertigung schriftlicher Arbeiten. Oberl. Dr. Ellinger.

Zeichnen, 2 St. w. Zeichnen nach großen Vorlagen in Kreide und Blei, Anfertigung häuslicher Aufgaben: Projection der Körper, Durchschnitte u. s. w. Lehrer Thiel.

Gesang, 1 St. w. s. Prima.

Tertia A. Ordinarius: Oberlehrer Dr. Ellinger.

Religion, 2 St. w. Lectüre der Apostelgeschichte, Beendigung der Erklärung des Katechismus, deutsche Reformationsgeschichte, Erklärung der Sonntagsepisteln, Wiederholung von Kirchenliedern. Lehrer Voelkel.

Deutsch, 3 St. w. Das Wichtigste über den Satzbau, aus der Metrik und Poetik; Lectüre Schiller'scher Gedichte und der Odyssee in der Voss'schen Uebersetzung; dreiwöchentliche Aufsätze. Im S. Lehrer Mogk, im W. Lehrer Hutt.

Latein, 5 St. w. Lectüre von Caes. b. Gall. VII 1—60, Phaedrus ed. Siebelis V, VI, I, Syntax nach Schultz §. 239—91. Wiederholung der Etymologie und Casuslehre, 14tägige Exercitien abwechselnd mit Extemporalien. Im S. Oberl. Dr. Franck, im W. Lehrer Mogk.

Französisch, 4 St. w. Lectüre von Plötz: lectures choisies sect. 2. № 9—161., sect. 3, № 1—3, sect. 8, № 1—8, die Formenlehre und das Wichtigste aus der Syntax, Uebersetzung sämmtlicher Uebungsstücke aus Plötz, Memoriren von Vocabeln aus Plötz pet. vocab. 79—107, Erlernen kleinerer Gedichte, wöchentliche Exercitien und Extemporalien. Lehrer Voelkel.

Englisch, 4 St. w. Plate's Lehrgang, Th. I, 2. Abtheil., Lect. 31—64, Lectüre des Anhanges mit steter Berücksichtigung der Aussprache und der Grammatik, Erlernen einzelner prosaischer und poetischer Stücke, 14tägige Exercitien. Oberl. Fleischer.

Geschichte, 2 St. w. Geschichte des preußischen Staates. Oberl. Fleischer.

Geographie, 2 St. w. Repetition des früher Gelernten, die Hauptlehren der mathem. Geographie; physische und politische Geographie des preußischen Staates. Oberl. Fleischer.

Naturkunde, 2 St. w. Im S. Oryktognosie, im W. kurzer Abriß der Experimentalphysik. Lehrer Hutt.

Mathematik, 6 St. w. a. Prakt. Rechnen 1 St. Schlußrechnung und Anwendung der einfachen Gleichungen. b. Arithmetik, 3 St. Begründung der Buchstaben- und der Decimalbruchrechnung, Potenzen, Wurzeln, das verkürzte Radiciren, Gleichungen des ersten Grades. c. Planimetrie, 2 St. Verhältnisse der Linien und Flächen, namentlich Uebungssätze und Constructionsaufgaben, schriftliche Arbeiten. Oberl. Dr. Ellinger.

Zeichnen, 2 St. w. Ausgeführte Ornamente, Köpfe ꝛc. nach größeren Vorlagen und nach Gyps. Häusliches Zeichnen: Projection begrenzter Ebenen. Lehrer Thiel.

Gesang, 1 St. w. s. Prima.

Tertia B. Ordinarius: im S. Lehrer Mogk, im W. Lehrer Thomas.

Religion, 2 St. w. Lectüre des Evangel. Luc., Wiederholung des ersten Hauptstücks, Erklärung der beiden ersten Artikel des Katechismus, Einführung in das Verständniß des christl. Kirchenjahres und Gottesdienstes, Erlernung von Sprüchen und Kirchenliedern. Lehrer Voelkel.

Deutsch, 3 St. w. Lectüre von Auras und Gnerlich, Erklärung ausgewählter Gedichte, Declamations- und Disponirübungen, 3wöchentliche Aufsätze. Lehrer Thomas.

Latein, 5 St. w. Lectüre von Corn. Nepos: Datames, Epaminondas, Themistocles, Repetition der Formenlehre, die Congruenz- und Casuslehre geübt an den betreffenden Stücken in Ellendt's Handbuch und 14tägige Exercitien. Im S. Lehrer Mogk, im W. Dr. Lipkau.

Französisch, 4 St. w. Lectüre von Voltaire's Charles XII b. 1 und 2, mündliches und schriftliches Einüben der unregelmäßigen verbes, Memoriren der Vocabeln aus Plötz, pet. vocab. 45—78, wöchentliche Exercitien und Extemporalien. Lehrer Voelkel.

Englisch, 4 St. w. Plate's Lehrgang 1. Stufe p. 23—110, Einübung der Hauptregeln der Grammatik, wöchentliche Extemporalien, im W. auch Exercitien. Lehrer Mogk.

Geschichte, 2 St. w. Geschichte der Deutschen von der Völkerwanderung bis 1648, die Ausbreitung des Christenthums, Entwickelung der Hierarchie, Kreuzzüge, die Eroberung Constantinopels, Erfindung des Schießpulvers und der Buchdruckerkunst, die Entdeckung Amerika's und des Seeweges nach Ostindien. Lehrer Thomas.

Geographie, 2 St. w. Politische und physische Geographie von Deutschland, Belgien, Holland, Schweiz, Dänemark, Zeichnen von Karten auf Papier und an der Wandtafel. Lehrer Thomas.

Naturbeschreibung, 2 St. w. Im S. Botanik: Erweiterung der Kenntniß der hiesigen Flora durch fortgesetzte gründlichere Beschreibung der Pflanzen, Uebung im Selbstbestimmen derselben nach Linné'schem System; in einigen Stunden Behandlung der Schmetterlinge und Käfer. Im W. Zoologie: Speciellere Beschreibung der Gliederthiere (Insecten, Spinnen, Krustenthiere und Würmer), kürzere Beschreibung der übrigen Thiere und Einführung in die Kenntniß der wichtigsten Organe des menschlichen Körpers. Oberl. Hohmann.

Mathematik, 6 St. w. a. Prakt. Rechnen 1 St. b. Algebra 2 St.: Die 4 Species in Buchstaben, die Potenzen. c. Planimetrie: von den Vierecken, vom Kreise, von der Gleichheit der Figuren, häufige Constructionsaufgaben, 14tägige schriftliche Arbeiten. Lehrer Hutt.

Zeichnen, 2 St. w. Nach Vorlagen, Zeichnen ausgeführter Ornamente, Köpfe, Blumen, Baumstudien. Häusliches Zeichnen, die Anfänge des Projectionszeichnens. Lehrer Thiel.

Gesang, 1 St. w. s. Prima.

Quarta. Ordinarius: Lehrer Hutt.

Religion, 2 St. w. Erlernen und Besprechen des jedesmaligen Sonntagsevangeliums; Einführung in die Bibel verbunden mit der Lectüre ausgewählter Abschnitte des A. T. Wiederholung der 5 Hauptstücke, eingehendere Besprechung des ersten Erlernen von Sprüchen und Kirchenliedern. Im S. Lehrer Voelkel, im W. Oberl. Fleischer.

Deutsch, 3 St. w. Declamirübungen, Besprechung der 14tägigen Aufsätze, orthographische Uebungen, Lectüre von Auras und Gnerlich mit sachlicher Erklärung und Inhaltsangabe. Im S. Lehrer Hutt, im W. Dr. Lipkau.

Latein, 6 St. w. Repetition und Erweiterung der Formenlehre, namentlich Einüben der unregelm. verba, einige syntactische Regeln von acc. c. inf., abl. absol., ut., Lectüre von Ellendt p. 42—72 und Eutropius l. III—V., wöchentliche Exercitien. Im S. Lehrer Mogk, im W. Dr. Lipkau.

Französisch, 5 St. w. Plötz I., Lect. 60—91, im Anschlusse daran Grammatik, Erlernen von Vocabeln aus Plötz petit vocab., 14tägige Exercitien. Im S. Oberl. Dr. Franck, im W. Lehrer Hutt.

Geschichte, 2 St. w. Griechische und römische Geschichte mit Ausschluß der späteren Kaiserzeit, alte Geographie von Griechenland und Italien. Lehrer Thomas.

Geographie, 2 St. w. Europa mit Ausnahme von Deutschland, Belgien, Holland, Dänemark und der Schweiz; Kartenzeichnen auf Papier und an der Wandtafel. Lehrer Thomas.

Naturbeschreibung, 2 St. w. Im S. Botanik: Erweiterte Beschreibung der Pflanzen, Einübung des Linné'schen Systems; Versuche im Selbstbestimmen der Pflanzen. Im W. Zoologie: Speciellere Beschreibung der Wirbelthiere mit besonderer Berücksichtigung der Säugethiere. Das menschliche Skelett. Oberl. Hohmann.

Mathematik, 6 St. w. a) Geometrie, 4 St. Fundamentalsätze, geometrische Aufgaben. b) Rechnen, 2 St. Bürgerliches Rechnen, Decimalbrüche. Lehrer Hutt.

Zeichnen, 2 St. w. Zeichnen einfacher Körper nach Vorlagen und nach der Natur. Häusliche Uebungen geometrischer Constructionen. Lehrer Thiel.

Schreiben, 2 St. w. Uebung deutscher und lateinischer Schrift nach Vorschriften. Lehrer Thiel.

Gesang, s. Prima.

Quinta. Ordinarius: Lehrer Voelkel.

Religion, 3 St. w. Biblische Geschichte des N. T. nach Woike. Erlernen der 5 Hauptstücke, von Sprüchen und Kirchenliedern. Lehrer Voelkel.

Deutsch, 4 St. w. Lectüre von Hopf und Paulsiek 1 Th. 2 Abth.; Erzählen des Inhalts; die Lehre vom einfachen und zusammengesetzten Satz, Declamirübungen, wöchentliche Dictate, abwechselnd mit freien Arbeiten. Cantor Kohrt.

Latein, 6 St. w. Repetition und Erweiterung des Pensums von Sexta, verba depon. und anom., Präpos. und einige Conjunctionen. Ellendt curs I, Abschn. 3 und 4, Erlernen von Vocabeln, wöchentliche Exercitien. Im S. Lehrer Hutt, im W. Dr. Lipkau.

Französisch, 5 St. w. Plötz Elementarb., Lection 1—59, Erlernen von Vocabeln aus Plötz pet. vocab. 1—16 und der regelmäßigen Conjugation, wöchentliche Exercitien und Extemporalien. Lehrer Voelkel.

Geschichte, im S. 1, im W. 2 St. Biographische Bilder aus der griechischen, römischen, deutschen und preußischen Geschichte. Lehrer Thomas.

Geographie, im S. 2, im W. 1 St. w. Die außereuropäischen Erdtheile. Lehrer Thomas.

Naturbeschreibung, 2 St. w. Im S. Botanik: Kenntniß der wichtigsten Organe der Pflanzen, besonders der Blattformen, theils an Pflanzen selbst, theils an Abbildungen geübt. Im W. Zoologie: Ueberblick über die Klassen und Ordnungen der Thiere durch Beschreibung der wichtigsten Repräsentanten derselben, eingehendere Behandlung der Säugethiere. Oberl. Hohmann.

Rechnen, 3 St. w. Bruchrechnen, Resolviren und Reduciren benannter Bruchzahlen, Regeldetrie-Aufgaben mit Brüchen in mündlicher und schriftlicher Lösung. Cantor Kohrt.

Formlehre, 1 St. w. Winkel, ebene Figuren, Gebrauch des Lineals und Zirkels, die Netze der regelmäßigen und anderer Körper. Oberl. Dr. Ellinger.

Zeichnen, 2 St. w. Nach Wandtafeln Zeichnen von Häusern und einfachen Ornamenten mit Anwendung krummer Linien. Lehrer Thiel.

Schreiben, 2 St. w. Schreiben nach Vorschrift an der Wandtafel. Lehrer Thiel.

Gesang, 1 St. w. Fortsetzung der Uebungen im Notenschreiben, Notendictate, Einüben von Choralmelodien und zweistimmigen Liedern. Cantor Kohrt.

Sexta. Ordinarius: Cantor Kohrt.

Religion, 3 St. w. Die biblischen Erzählungen des A. T. nach Woike, № 1 — 43. Erlernen der Hauptstücke, des ersten mit der Luther'schen Erklärung und mehrerer Kirchenlieder. Cantor Kohrt.

Deutsch, 4 St. w. Lectüre von Hopf und Paulsiek 1. Th. 1. Abth., Memoiren kleiner Gedichte, Flexion der Subst., Adj. und Verba, Erklärung des einfachen Satzes mit seinen Erweiterungen, wöchentliche Dictate, kleinere Aufsätze der Oberklasse. Cantor Kohrt.

Latein, 8 St. w. Declination, Comparation, die Zahlwörter, Pronomina, das verbum esse und die regelmäßigen Conjugationen nach Ferd. Schultz, Uebersetzen aus Ellendt 1—19, wöchentliche Exercitien der Oberklasse. Lehrer Thomas.

Geschichte, 1 St. w. Im S.: Der trojan. Krieg, Odysseus und Aeneassage, der Director; im W.: Die Perseus-, Hercules-, Theseus-, Oedipussage. Lehrer Mogk.

Geographie, 2 St. w. Die allgemeinen Verhältnisse der Gestalt und Oberfläche der Erde, die Provinz Preußen, kurze Uebersicht der 5 Erdtheile. Im S. Lehrer Thomas, im W. Cantor Kohrt.

Rechnen, 5 St. w. In der Unterklasse die 4 Species in benannten Zahlen; in der Oberklasse: Erweiterung des Pensums der Unterklasse, Schlußrechnungen, mündlich und schriftlich geübt. Cantor Kohrt.

Zeichnen, 2 St. w. Gerade Linien, Winkel, geradlinige Flächenfiguren nach Dictat oder Vorzeichnung an der Schultafel. Lehrer Thiel.

Schreiben, 3 St. w. Wörter und Sätze nach Vorschrift an der Schultafel. Lehrer Thiel.

Gesang, im S. 1 St., im W. 2 St. Einübung der musikalischen Grundformen, leichter Lieder und Choräle, Notenschreiben und Notenlesen. Cantor Kohrt.

Turnen, im S. und W. jede Klasse 2 St. w. Oberl. Dr. Ellinger und Cantor Kohrt.

Vorbereitungsschule.

I. Klasse, Ordinarius: Lehrer Preuß.

Religion, 3 St. w. Die vorzüglichsten Geschichten des N. T., die 10 Gebote mit der Luther'schen Erklärung, Erlernen einiger Liederverse und Sprüche. Lehrer Preuß.

Deutsch, 10 St. w. Lectüre des zweiten Theils des Münsterberg'schen Volksschul-Lesebuches, Uebung im Wiedererzählen, Wort- und Sacherklärung einzelner gelernter Gedichte, Einiges aus der Satzlehre, Kenntniß der wichtigsten Redetheile, Flexion der Hauptwörter, Eigenschafts- und Zeitwörter, die wichtigsten Regeln der Orthographie, wöchentliche Dictate, tägliche Uebungen im Abschreiben. Lehrer Preuß.

Rechnen, 4 St. w. Die 4 Species mit unbenannten größeren Zahlen, Resolviren und Reduciren, das große Einmaleins. Preuß.

Schreiben, 4 St. w. Uebung in deutscher und lateinischer Schrift. Preuß.

Anschauungs-, Denk- und Sprechübungen, 2 St. w. Fortgesetzte Berichtigung der Aussprache, Uebung der Anschauung, vorzugsweise mit Rücksicht auf Naturgeschichte und Geographie. Preuß.

Gesang, 1 St. w. Gehörübungen, leichte Choräle und Volkslieder. Preuß.

II. Klasse, Ordinarius: Lehrer Lange.

Religion, 3 St. w. Die vorzüglichsten biblischen Geschichten des A. T., die 10 Gebote ohne Erklärung, Erlernen einiger leichten Sprüche und Liederverse. Lehrer Lange.

Deutsch, 8 St. w. Lectüre des 2ten Theils des Münsterberg'schen Volks-Lesebuchs, Uebung im Erkennen der Haupt- und Fürwörter, Eigenschafts- und Zeitwörter, orthographische Uebungen durch Abschreiben von Druckschrift, wöchentliche Dictate, Erlernen kleinerer Gedichte. Lange.

Rechnen, 4 St. w. Die 4 Species mit größeren Zahlen. Lehrer Preuß.

Schreiben, 4 St. w. Fortgesetzte Uebung in deutscher und lateinischer Schrift. Lange.

Anschauungs-, Denk- und Sprechübungen, 1 St. w. Berichtigung der Aussprache, Erweiterung der Vorstellungen an sinnlichen Anschauungen unter Benutzung der Bilder von Reimer und Wilke. Lange.

III. Klasse, Ordinarius: Lehrer Lange.

Religion, 2 St. w. Einführung in eine kleine Anzahl biblischer Geschichten. Lehrer Lange.

Lesen und Schreiben, 10 St. w. Lautiren und Lesen nach der Wandfibel und im ersten Theil des Münsterberg'schen Lehrbuches; Einübung der deutschen Schrift. Lange.

Rechnen, 4 St. w. Zählen und Einüben der Zahlreihen von 1—100, die 3 ersten Species im Zahlenraum von 1—100. Lange.

Turnen, Kl. 1 und einzelne Schüler von 2 im S. 2 St. w. Lehrer Preuß.

Die Aufgaben für die diesjährige Abiturientenprüfung waren:

a) Deutsch:

Arbeit keine Last, sondern eine Wohlthat für den Menschen.

b) Französisch:

Pierre le Grand de Russie.

c) Englisch:

Ein Exercitium.

d) Mathematik:

1) **Wenn man die Differenz zwischen den in Kubikfuß ausgedrückten Inhaltszahlen zweier Würfel mit der Summe derselben multiplicirt, so erhält man die Zahl a = 232,75. Wird dagegen dieselbe Differenz mit dem Product aus der Summe der Grundflächen und der Summe der**

Höhen beider Würfel multiplicirt, so ergiebt sich eine um b = 183,75 größere Zahl. Wie groß sind die Kanten beider Würfel?

2) Um ein gegebenes Quadrat mit der Seite m ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß 2 Ecken des ersteren in der Hypotenuse, und die beiden andern Ecken in den Katheten des Dreiecks zu liegen kommen, und daß die Summe aus Hypotenuse und Höhe des Dreieck's gleich der gegebenen Linie n wird. — In welchem Verhältnisse müssen die gegebenen Linien zu einander stehen, wenn das verlangte Dreieck gleichschenklig werden soll?

3) Von einem Luftballon herab erblickt man die beiden Orte A und B auf der Erde unter den Depressionswinkeln $\alpha = 72\frac{1}{2}$ Grad und $\beta = 30\frac{1}{4}$ Grad; während die Entfernung beider Orte von einander c = 1800 Fuß beträgt und vom Luftballon aus unter dem Gesichtswinkel $\gamma = 25\frac{3}{4}$ Grad erscheint. Wie hoch befindet sich der Ballon über der Horizontalebene, in welcher die Orte A und B liegen, und wie weit ist derselbe von letzteren entfernt?

4) Aus einer Kugel mit dem Radius r = 5 Fuß ist eine h = 7 F. dicke Schicht so herausgeschnitten, daß der Kugelmittelpunkt von den beiden Endflächen der Schicht um n = 3 und n = 4 F. entfernt ist. In jede der beiden Endflächen ist ein Rechteck beschrieben, dessen Seiten sich wie 1 : 2 zu einander verhalten, jedoch so, daß die kürzere Seite des einen Rechteck's parallel zu der längeren Seite des anderen Rechteck's ist. Diese Rechtecke sind die Endflächen eines Obelisken, dessen Volumen, Oberfläche, Winkel ꝛc. zu berechnen sind.

e) Naturwissenschaften:

1) Der erste Luftballon (Charlière), womit der Physiker Charles im Jahre 1783 in Paris aufstieg, hatte einen Inhalt von 10000 Kubikfuß, und $\frac{27}{28}$ dieses Inhalts waren bei einem Barometerstande von $28{,}_3$ Zoll, mit unreinem Wasserstoff gefüllt, der $5\frac{1}{4}$ mal so leicht war als atmosphärische Luft. Das Gewicht des nicht gefüllten Ballons nebst Zubehör betrug $604\frac{1}{2}$ Pfund. Es fragt sich: a) mit welcher Kraft stieg der Ballon in die Höhe? b) in welcher Höhe blähte er sich ganz auf? (Anwendung der Mayer'schen Formel).

2) Wie groß ist das Gewicht der Wassermasse, welche in einer 1000 Fuß hohen, über einem Flächenraum von einer Viertelquadratmeile befindlichen + 20° C warmen und mit Wasserdämpfen völlig gesättigten Luftsäule enthalten ist und welche Regenmenge würde aus derselben herabfallen, wenn die Temperatur + 11° C herabsinkt. (Die Spannkraft des Wasserdampfes
von + 20° C = $17{,}^{3}$ m. m.
von + 11° C = 10 m. m.)

3) Eine Sodafabrik soll mit einer englischen Schwefelsäurefabrik verbunden werden, die gerade den Bedarf der Sodafabrik liefert. In dieser werden monatlich 1000 cf. krystallisirte Soda erzeugt. Wie groß ist der monatliche Bedarf an Eisenkies für die zu errichtende Schwefelsäurefabrik, wenn aus demselben erst Schwefel und aus diesem dann die Säure dargestellt wird?

B. Lehrmittel.

Die Lehrerbibliothek wurde in dem verflossenen Schuljahre durch folgende Werke vermehrt: Stiehl Centralblatt pro 1867. Langbein: Pädagogisches Archiv, Jahrg. 1867. Keil: Handbuch der biblischen Archaeologie. Munk: Palestine, description géogr., histor. et archéologique. Hopf und Paulsiek: Deutsches Lesebuch, 5 Bde. Voltaire: Oeuvres complètes. Lucas englisch-deutsches Lexicon. Chambers: Cyclopaedia of English Literature. Latham: An elementary English grammar. Byron's works, Burns, Moore. Herrig: Archiv für das Studium der neueren Sprachen, Bd. 40. Jacobs und Ruehle: Zeitschrift für das Gymnasialwesen, Jahrg. 1867. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, 67. Bd., Jahrg. 1867. Jacobi: Vorlesungen über Dynamik. Sturm: Cours d'analyse de l'école polytechnique. Wiedemann: Die Lehre vom Galvanismus und Electromagnetismus. Petermann: Mittheilungen aus J. Perthes geogr. Anstalt, Jahrg. 1867. Berghaus: Chart of the world. Altpreußische Monatsschrift, Jahrgang 1867. Wolff: Die Klassiker aller Zeiten: Die spanische Nationalliteratur.

Für die Schülerbibliothek wurden angeschafft: Dittmar: Geschichte der Welt, 6 Bde. mit historischem Atlas, neu bearbeitet und ergänzt von Voelter. Der Globus, Jahrg. 1867. Ruff: In der freien Natur und: Meine Freunde. Andersen: Gesammelte Werke. Krummacher: Parabeln. E. am Strand: Das Ehrenwort. Johansen: Die Seemannswittwe auf der Düneninsel. Wildenhahn: Erzgebirgische Dorfgeschichten, Geschichten aus dem Volksleben und geschichtliche Erzählungen. Seidel: Balthasar Schwarzenberg. Bornewiek: Tau Hus un in dei Frömm'. P. Nathusius: Hast Du gelernt? M. Nathusius: Tagebuch einer Reise nach der Provence, Italien und der Schweiz und Familien-Skizzen. v. Horn: Jugendschriften, 51 Bde. Stoeber: Die barmherzigen Steine. Treumund: Vogelbärbchen. Glaubrecht: Erzählungen, 16 Bde. Grimm: Märchen der 1001 Nacht. Louise Pichler: Novellen, 14 Bde. Fr. Hoffmann: Erzählungen, 5 Bde. Souvestre: Confessions d'un ouvrier. Nina Balatka: The story of a maiden of Prague. Grace Kennedy: Father Clement. Thackeray: Denis Duval. John Ruffini: A quiet nook in the Jura. Henry Wood: Orville college. Baensch's: Packet miscellany, vol. 15 and 16.

Die physikalischen Apparate wurden vermehrt durch: 6 Schwerd'sche Figuren, einen Spalt (zur Optik), 2 schwarze verstellbare Spiegel, einen electro-magnetischen Inductions-Apparat nach Ruhmkorff mit einem Satz Geisler'scher Röhren, die Geisler'schen Phosphoroscenzen, 2 Flaschenzüge mit je 3 Scheiben.

An Geschenken erhielt die Anstalt von dem Königlichen Ministerium der geistlichen Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten: den 11ten Band der Denkmale deutscher Baukunst von Dr. Ernst Förster und 1 Exemplar der von Graner herausgegebenen Schrift: Kepler's wahrer Geburtsort; von Herrn Oberbürgermeister Kleffel: Thiel: Statistisch-topographische Beschreibung der Stadt Tilsit; von Herrn Eckstein: Tischendorf: Aus dem heiligen Lande; von Herrn Blachière: Ein Schul- und Reise-Taschen-Wörterbuch der italienischen und deutschen Sprache ed. Tauchnitz; Alessandro Tassoni: La secchia rapita und ein holländisch-deutsches und deutsch-holländisches Wörterbuch ed. H. Graef.

Für diese Gaben herzlichen Dank im Namen der Schule!

C. Wichtige Verordnungen der Behörden.

A. Des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums.

15. März 1867: Die Einführung des deutschen Lesebuchs von Hopf und Paulsiek für Sexta und Quinta wird genehmigt.

25. März: Das Königl. Prov.-Schul-Collegium sendet Abschrift des Ministerial-Erlasses vom 21. Januar 67, die künftige Einrichtung der colloquia pro rectoratu betreffend.

15. April: Es verlangt Einsendung eines Exemplars der Statuten und Schulgesetze der Anstalt, sowie Erklärung darüber, in welcher Weise die Arbeitszeit der Schüler, ihre schriftlichen Arbeiten und ihre Privatlectüre geregelt werden.

30. April: Es theilt mit, daß die höhere Bürgerschule zu Marienwerder dem Programmaustausch beigetreten sei.

1. Mai: Es übersendet den Ministerial-Erlaß vom 30. März 67, Bestimmungen über das von Candidaten der höheren Lehranstalten abzuhaltende Probejahr enthaltend.

21. Mai: Es zeigt an, daß fortan 45 Programme für die neu erworbenen Landestheile, im Ganzen 276 Exemplare einzusenden seien.

3. Juni: Es sendet mehrere Exemplare der neuen Directoren-, Klassenlehrer- und Lehrer-Instruction, letztere zur Vertheilung unter die Lehrer der Anstalt.

27. Juni: Einsendung einer Abschrift des Ministerial-Erlasses vom 14. Mai, durch welchen die Directoren auf den Uebelstand der Ueberbürdung der Lehrer durch Nebenämter und Privatunterricht aufmerksam gemacht und zur Abhilfe desselben aufgefordert werden.

22. Juli: Der Ministerial-Erlaß vom 22. Juni empfiehlt die Abiturienten-Prüfungen nicht zu weit vor dem Semesterschluß abzuhalten, damit das Biennium der Prima möglichst wenig abgekürzt werde.

24. August: Dem Oberlehrer Dr. Franck wird ein 3monatlicher Urlaub bewilligt.

25. August: Nach dem Ministerial-Erlaß vom 31. März soll das Zeugniß über das absolvirte Probejahr, wenn der Director und der betreffende Ordinarius das dem Probandus zugewiesene Fach nicht auch ihrerseits vertreten, auch von dem resp. Fachlehrer unterzeichnet werden.

18. November: Einsendung einer Abschrift das monitum an den hiesigen Magistrat die Erhöhung des Besoldungsetats an der Realschule betreffend.

22. November: Mit dem Berichte über die Probecandidaten soll zugleich ihr Prüfungszeugniß zur stempelfreien Nachtragung des Urtheils über das Probejahr eingesendet werden.

26. November: Der Urlaub des Oberlehrers Dr. Franck wird auf fernere 3 Monate verlängert.

1. December: Einsendung eines Exemplars der Verhandlungen der ersten schlesischen Directoren-Conferenz.

3. Januar 1868: Es ist darauf zu achten, daß die an Realschulen angestellten Elementarlehrer ihrer Verpflichtung auf den Beitritt zur Schullehrer-Wittwen- und Waisen-Unterstützungs-Anstalt des Regierungsbezirks nachkommen.

21. Januar: Die Einführung der Haester'schen Fibel und der Paulsiek'schen Lese-

bücher für die erste und zweite Klasse der Vorschule, so wie des Hopf und Paulsiek'schen Buches für die Quarta und Tertia wird genehmigt.

27. Januar: Der Urlaub des Oberlehrers Dr. Franck wird bis zum 1. Mai c. verlängert.

8. Februar: Das Aufrücken des Lehrers Thomas in die dritte ordentliche Lehrerstelle wird genehmigt.

B. Des Magistrats.

2. März 1867: Einsendung einer Abschrift der das Aufrücken des Lehrers Voelkel in die 2. und die Anstellung des Candid. Hutt für die 3. ordentliche Lehrerstelle genehmigenden Verfügung des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums.

19. März: Einsendung der bestätigten Vocation des Lehrers Voelkel für die 2. ordentliche Lehrerstelle.

1. November: Die Kosten für die Vertretung des Oberlehrers Dr. Franck werden auf 3 Monate bewilligt.

13. November: M. zeigt an, daß er nach erfolgtem Abbruch des städtischen Turnhauses ein Privatlocal für das Winterturnen der Realschule acquirirt habe und sendet eine Abschrift des darüber abgeschlossenen Contractes.

20. December: Einsendung der Dienstentlassung des 3. ordentl. Lehrers Hutt zum 1. April 68.

1. Februar 1868: Die Vertretungskosten für den Oberlehrer Dr. Franck werden auf weitere 3 Monate bewilligt.

D. Abiturienten-Prüfung.

Bei der am 18. Februar d. J. unter dem Vorsitz des Herrn Provinzial-Schulraths Dr. Schrader abgehaltenen Maturitätsprüfung wurde folgenden 7 Abiturienten das Zeugniß der Reife zuerkannt:

89) Franz Bartsch, 19½ J. alt, Sohn des Steuercontroleurs Herrn Bartsch in Tilsit, evang. Conf., 3½ J. in der Schule, 1½ J. in Prima, mit dem Prädicat „gut bestanden", will zum Postfach übergehen.

90) Gustav Hammer, 19¾ J. alt, Sohn des in Tilsit verstorbenen Kreisgerichtsraths gl. N., evang. Conf., 12½ J. in der Schule, 2 J. in Prima, mit dem Prädicat „genügend bestanden", hat sich noch für keinen bestimmten Beruf entschieden.

91) Ernst Heinemann, 18¾ J. alt, Sohn des Kreisgerichtsdirector a. D. und Stadtraths Herrn H. in Tilsit, evang. Conf., 5½ J. in der Schule, 2 J. in Prima, mit dem Prädicat „genügend bestanden", hat sich gleichfalls noch nicht für einen bestimmten Beruf entschieden.

92) Eugen Henning, 18¾ J. alt, Sohn des Kreisgerichts-Secretairs Herrn H. in Heydekrug, evang. Conf., 6 J. in der Schule, 2 J. in Prima, mit dem Prädicat „genügend bestanden", will zum Postfach übergehen.

93) Heinrich Lessing, 19¾ J. alt, Sohn des Steuercontroleurs a. D. Herrn L. in Moritzkehmen, evang. Conf., 11 J. in der Schule, 2 J. in Prima, mit dem Prädicat „gut bestanden", widmet sich dem Postfach.

94) Robert Reuter, 20 J. alt, und

95) Hugo Reuter, $18^1/_4$ J. alt, Söhne des in Tilsit verst. Steuercontroleurs gl. N., evang. Conf., $4^1/_2$ J. in der Schule, 2 J. in Prima, beide mit dem Prädikat „gut bestanden", ersterer widmet sich dem Postfach, der zweite hat sich noch nicht für einen bestimmten Beruf entschieden.

Die drei letzten Abiturienten wurden von dem mündlichen Examen dispensirt.

E. Chronik.

Unter den Veränderungen, welche im Laufe des verflossenen Schuljahres bei der Anstalt eintraten, ist die definitive Anstellung des Herrn Hutt und Thomas für die dritte und vierte ordentliche Lehrerstelle hervorzuheben, deren Vereidigung am 29. Juni und am 23. August vor dem versammelten Lehrercollegium durch Herrn Oberbürgermeister Kleffel vollzogen wurde. Unter dem 10. August wurde dem am 1. November 1866 aus seinem Amte geschiedenen Lehrer Herrn Jackstein die ihm auf ein Jahr bewilligte Unterstützung aus städtischen Mitteln auf ein neues Jahr bereitwilligst verlängert. Doch mußten leider schon beim Beginne des Wintersemesters die Kräfte der Stadt im Interesse der Anstalt von Neuem in Anspruch genommen werden. Denn kurz vor den Sommerferien erkrankte der dritte Oberlehrer derselben, Herr Dr. Franck in so bedenklicher Weise, daß seine Beurlaubung vom 1. August ab zunächst auf 3 Monate nothwendig wurde. Seine Vertretung für diese Zeit wurde mit Genehmigung des Königlichen Provinzial-Schulcollegiums von dem Lehrercollegium selbst in der Weise ausgeführt, daß keines der von dem Erkrankten vertretenen Fächer ganz ausfallen durfte; da jedoch nach Ablauf dieses Vierteljahres der Gesundheitszustand desselben sein Wiedereintreten noch nicht gestattete, hielt es der Unterzeichnete für angemessen, nunmehr eine besondere Stellvertretung für ihn zu beantragen. Diese wurde dann auch vom 1. November ab auf Kosten der Stadt vorläufig auf 3 Monate bewilligt und von dem Candidaten des höheren Schulamts Herrn Dr. Lipkau*) übernommen, dem sie, nachdem ein inzwischen eingeholtes Physikats-Gutachten sich für eine fernere Beurlaubung des Erkrankten ausgesprochen hatte, auch für weitere 3 Monate übertragen wurde. Mit Ausnahme dieses beklagenswerthen Unfalles war der Gesundheitszustand der Lehrer in dem verflossenen Jahre ein im Ganzen befriedigender, mehr aber hatten die Schüler in demselben durch Krankheit zu leiden, denn von den Sommerferien an bis Michaeli war der Schulbesuch in der Vorbereitungsschule und in den beiden unteren Klassen namentlich in Folge der am Orte herrschenden Masern ein sehr unregelmäßiger, und leider mußte auch der Schüler der 2. Vorbereitungsklasse, Emil Klumbies, ein hoffnungsvolles, strebsames Kind, den Folgen dieser trotz ihrer großen Ausdehnung im Allgemeinen doch milde auftretenden Epidemie erliegen. — Am 22. März wurde das Geburtsfest Sr. Majestät des Königs in gewohnter Weise unter zahlreicher Betheiligung der Angehörigen der Schüler und der städtischen Behörden durch einen Schulakt feierlich begangen. Am 5. Juli unternahm die Schule bei günstigem Wetter einen allgemeinen Spaziergang nach Grünwalde, außerdem fanden noch an verschiedenen Nachmittagen des Frühherbstes Turnfahrten und Excursionen einzelner Klassen statt, die wesentlich zur Erfrischung

*) Arthur Carl Theodor Lipkau, geboren den 16. December 1839 zu Spandinen, Kr. Königsberg, besuchte das Altstädtsche Gymnasium zu Königsberg bis Michael. 1859, studirte daselbst Geschichte bis Ostern 1864, promovirte im Januar 1865, unterrichtete dann von Ostern bis Michael. d. J. an der Stadtschule zu Stallupönen, von da an bis Juli 1866 an der höheren Bürgerschule zu Pillau und legte im Juni 1867 die Prüfung pro fac. doc. ab.

der Betheiligten beitrugen. Am 11. November hatte der Unterzeichnete die Freude, die Hauptprämie der hiesigen Schillerstiftung, bestehend in einem Gesammtexemplar und in den poetischen Werken des Dichters, zwei würdigen Schülern, dem Oberprimaner Hugo Reuter und dem Obersecundaner Julius Sziedat zu überreichen. Unterbrechungen im Unterricht fanden noch statt: am 31. August wegen der Wahl für das norddeutsche Parlament, am 5. September zur gemeinschaftlichen Feier des Abendmahls, am 24. September wegen des in der Stadt beginnenden Jahrmarktes, endlich am 30. October aus Anlaß der Wahl der Wahlmänner für das Abgeordnetenhaus.

Die Gesammtzahl der Schüler betrug beim Beginne des Sommersemesters: 338, und zwar in Prima 12, in Secunda 33, in Tertia A. 31, in Tertia B. 37, in Quarta 51, in Quinta 60, in Sexta 45; in der Vorbereitungsschule 69. Am Anfange des Wintersemesters: 325, und zwar in Prima 10, in Secunda 29, in Tertia A. 26, in Tertia B. 46, in Quarta 42, in Quinta 60, in Sexta 50; in der Vorbereitungsschule 57; darunter 98 Auswärtige und 3 Ausländer.

F. Unterstützungsfonds.

Nach der vorjährigen Mittheilung behielt der Unterstützungsfonds für arme und würdige Schüler unserer Anstalt einen Bestand von 358 Thlr. 1 Sgr. 6 Pf. Hiezu kamen im September v. J. von den Herren: Kaufm. Blachière 2 Thlr., Stadtrath Bernhardi 2 Thlr., Stadtrath Boy 2 Thlr., Kaufm. Bruder 1 Thlr., Partic. Brandtner 1 Thlr., Gutsbes. Buscke 1 Thlr., Kaufm. Bremsteller 1 Thlr., Justizrath Chales 1 Thlr., Stadtv. Decomin 1 Thlr., Kaufm. Ehleben 1 Thlr., Kaufm. Fergel 1 Thlr., Stadtr. Frischmuth 1 Thlr., Kaufm. J. L. Franck 1 Thlr., Mad. Geiger 1 Thlr., Prediger Dr. Gerlach 1 Thlr., Dr. Goburek 1 Thlr., Seifenfabr. Grosse 15 Sgr., Oberamtm. Hasford 2 Thlr., Dr. Habedank 2 Thlr., Dr. Haussmann 2 Thlr., Steuerrath v. Hauenschild 1 Thlr., Lederfabrik. Jacoby 1 Thlr., Commerzienrath Jabs 2 Thlr., Justizrath Kämpffert 2 Thlr., Partic. Kellner 1 Thlr., Stadtverordn. Klabund 1 Thlr., Oberbürgermeister Kleffel 2 Thlr., Kaufm. Kühn 1 Thlr., Kaufm. Lilienthal 1 Thlr., Kaufm. Lutterkorth 5 Thlr., Kaufm. Migge 1 Thlr., Stadtrath Meding 1 Thlr., Partic. Mielentz 2 Thlr., Stadtrath Müller 1 Thlr., Kaufm. Naujoks 1 Thlr., Stadtv. Ostwald 1 Thlr., Kaufm. Penschuck 1 Thlr., Justizrath Preuß 1 Thlr., Buchdruckereibesitzer Post 1 Thlr., Buchhändler Hesse 2 Thlr., Buchdruckereibes. Reyländer 1 Thlr., Partic. Rohrmoser 1 Thlr., Fabrikbes. Rohrmoser 1 Thlr., Kaufm. Reiner 1 Thlr., Syndikus Schlenther 1 Thlr., Stadtrath Schlegelberger 1 Thlr., Grundbes. Steiner 1 Thlr., Kaufm. Sklower 1 Thlr., Partic. Schütz 1 Thlr., Fabrikbes. Sternkopf 1 Thlr., Kaufm. Schott 1 Thlr., Stadtr. Teubner 1 Thlr., Kaufm. Volkmann 1 Thlr., Restaurat. Voigt 1 Thlr., Stadtr. Zermelo 1 Thlr., an Zinsen 12 Thlr., als Ueberschuß einer Sammlung zum Schulfest 3 Thlr. 2 Sgr., im Ganzen 84 Thlr. 17 Sgr. An Rabatt gingen noch ein 21 Thlr. 15 Sgr., die wieder zu Anschaffung von Büchern verwendet wurden. Allen obigen Wohlthätern herzlichen Dank!

Verausgabt wurde an Geldunterstützung für 2 Primaner und 1 Quintaner 45 Thlr., für Bücher 18 Thlr. 20 Sgr., an Botenlohn 1 Thlr., im Ganzen 64 Thlr. 20 Sgr. Der Fonds beträgt demnach gegenwärtig 377 Thlr. 28 Sgr. 6 Pf.

Tabellarische Uebersicht über die Vertheilung der Lectionen unter die Lehrer
während des Winter=Semesters 1867/68.

Namen der Lehrer.	Ordinarius von	Realschule. I.	II.	III A.	III B.	IV.	V.	VI.	Vorbereitungsschule. I.	II.	III.	Summe der wöchentl. Stunden
1) Koch, Director.		3 Deutsch 4 Franz 3 Engl.	4 Franz.									14
2) Hohmann, erster Oberlehrer.	I.	3 Chemie 3 Physik	2 Naturb. 2 Chemie 2 Physik		2 Naturb.	2 Naturb.	2 Naturb.					18
3) Fleischer, zweiter Oberlehrer.		2 Religion 3 Gesch. u. Geogr.	3 Englisch 3 Gesch. u. Geogr.	4 Englisch 4 Gesch. u Geogr.		2 Religion						21
4) Dr. Ellinger, vierter Oberlehrer.	III A.	1 Gesang. 5 Mathem.	5 Mathem	6 Mathem.			1 Forml.					18
5) Mogk, erster ord. Lehrer.	II.	3 Latein	3 Deutsch 4 Latein	5 Latein	4 Englisch			1 Gesch.				20
6) Voelkel, zweiter ord. Lehrer.	V.		2 Relig.	2 Relig 4 Franz	2 Relig. 4 Franz.		3 Relig 5 Franz.					22
7) Hutt, dritter ord. Lehrer.	IV.			3 Deutsch 2 Physik	6 Mathem	5 Franz. 6 Mathem						22
8) Thomas, vierter ord. Lehrer.	III B.				3 Deutsch 4 Gesch. u Geogr.	4 Gesch. u. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.	8 Latein				22
9) Dr. Lipkau, Vertreter des dritten Oberl. Dr. Franck.					5 Latein	3 Deutsch 6 Latein	6 Latein					20
10) Kohrt, fünfter ord. Lehrer.	VI.						4 Deutsch 3 Rechnen 1 Gesang	3 Relig. 4 Deutsch 5 Rechnen 2 Geogr. 2 Gesang				24
11) Thiel, technischer Lehrer.		3 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Schreib. 2 Zeichn.	2 Schreib. 2 Zeichn.	3 Schreib. 2 Zeichn.				22
12) Preuß, erster Elementarlehrer.	I. der Vorschule.								3 Relig. 2 Anschauungslehre. 6 Lesen 4 Schreib. 4 Rechnen 4 Deutsch 1 Gesang	4 Rechnen		28
13) Lange, zweiter Elementarlehrer.	II. und III. der Vorschule.									3 Relig. 6 Lesen 2 Deutsch 4 Schreib. 1 Anschauungslehre.	2 Relig. 6 Lesen 4 Schreib. 4 Rechnen	32

Ordnung der öffentlichen Prüfung
in der Aula der Realschule.

Donnerstag den 2. April 1868, Vormittags von 8 Uhr an.

Choral. Gebet.

Vorbereitungsschule um 8 Uhr.

3. Klasse: **Rechnen** . . . . Lange.
Wilhelm Schulz: Knabe und Esel von Hey.
Richard Arnoldt: Katze von Hey.

2. Klasse: **Biblische Geschichte** Lange.
Robert Deskau: } Lamm von Hey.
Hugo Meister: }

Lesen . . . . Lange.
Hugo Döhring: } Täubchen von Hey.
Louis Wittenberg: }

1. Klasse: **Deutsch** . . . . Preuß.
Karl Bruder: } Drei Vogelstimmen von Hammer.
Louis Müller: }
Fritz Koch: }

Geographie . . . . Preuß.
Julius Apstein: Der schlafende Bettler von Hammer.

Gesang.

Sexta.

Rechnen . . . . Kohrt.
Georg Ebner: Der Storch von Hebel.

Latein . . . . Thomas.
Hermann Deskau: Die Wahrsagerin von E. Goetze.

Quinta.

Religion . . . . Voelkel.
Gustav Meister: Rudolph von Habsburg von Franz Pocci.

Deutsch . . . . Kohrt.
Hermann Nadolny: Kaiser Maximilian von E. v. Rappard.

Quarta.

Geschichte . . . . Thomas.
Paul Borchert: Pipin der Kurze von Streckfuß.

Latein . . . . Lipkau.
Max Steiner: Georg II. von Anhalt von A. v. Marées.
Max Ellinger: la cigale et la fourmi par La Fontaine.

Choral.

Freitag den 3. April, Vormittags von 8 Uhr ab.

Choral. Gebet.

Tertia B.

Naturbeschreibung . . Hohmann.

Englisch . . . . Mogk.

Tertia A.

Geographie . . . . . Fleischer.

Französisch . . . . . . Voelkel.

Secunda.

Physik . . . . Hohmann.

Mathematik . . . . . Ellinger.

Prima.

Latein . . . . Mogk. **Deutsch** . . . . Koch.
Religion . . . . . . Fleischer.

Versuche der Schüler im Gesange und Vortrage.

Gesang: „Singet dem Herren und lobet seinen Namen", Motette von **C. Kuntze.**

Vorträge:

Otto Karp	in IIIB.:	„Belsatzar" von H. Heine.
Max Schomer . . .	„ „	„La primevère" par A. Pastu.
Oskar Wenzel . . .	„ „	„the voice of spring" by F. Hemans.
Ernst Bauer . .	in IIIA.:	„Die nächtliche Erscheinung zu Speier" von W. Müller.
Julius Hoeler . . .	„ „	„le savetier et le financier" par La Fontaine.
Leo Mietke	„ „	„the sick man and the angel" by J. Gay.
Hugo Rielo	in II.:	v. Tellheim } Lessing: „Minna v. Barnhelm" A. 3. Sz. 7.
Louis Donsée	„ „	Paul Werner }
Albert Kraus	„ „	Ovid metam. 2, v. 680—707.
Emil Paarmann . . .	„ „	Geronte } Molière: les fourberies de Scapin a. 2, sc. 11.
Ernst Cochius	„ „	Scapin }
Max Reiner	„ „	W. Scott: the chase, from the lady of the lake, canto 1 v. 1—45.
Ernst Heinemann . .	in I.:	„Rodolphe de Habsbourg" (e. A.)
Eugen Henning. . . .	„ „	„Alfred the Great" (e. A.)
Franz Bartsch	„ „	Richard II. } Shakspere: king Richard II. a. 4 sc. 3.
Albert Ritter	„ „	Bolingbroke }
Richard Tagmann . .	„ „	Northumberland }

Gesang: „Selig sind, die Gottes Wort hören", Motette von L. Hellwig.
„Der Jäger Abschied" von F. M. Bartholdy, für gemischten Chor von **Fr. Erk.**
„Das Wandern ist des Turners Lust" von C. Zoellner.
„Die Ehre Gottes aus der Natur" von L. v. Beethoven.

Abschiedsworte des Abiturienten Heinrich Lessing.

Schlußwort des Directors und Entlassung der Abiturienten.

Die Zeichnungen,

welche die Schüler im letzten Schuljahre angefertigt haben, nebst den Probeschriften werden Mittwoch den 1. April von 3 bis 5 Uhr Nachmittags, so wie an den Prüfungstagen Vormittags in den beiden Klassen am Eingange ausgestellt sein.

Sonnabend den 4. April wird das laufende Schuljahr mit der Austheilung der vierteljährlichen Zeugnisse geschlossen. Der neue Cursus beginnt Montag den 20. April Morgens 8 Uhr. Die aus der 1. Klasse der Vorbereitungsschule als reif entlassenen Schüler bitte ich Montag den 6. April zur Aufnahme anzumelden, zur Prüfung anderer neu aufzunehmender Schüler werde ich in den Vormittagsstunden des 15. bis 18. April bereit sein.

L. Koch.