Königliche Realschule

erster Ordnung

zu Tilsit.

Sieben und dreißigstes Jahresprogramm.

Zu

der öffentlichen Prüfung aller Klassen,

den Versuchen der Schüler im Vortrage und Gesange,

und

der Entlassung der Abiturienten,

Donnerstag, den 7. und Freitag, den 8. April 1881

an den Vormittagen,

sowie

der damit verbundenen

Ausstellung der Zeichnungen

ladet

im Namen des Lehrerkollegiums

ganz ergebenst ein

der Direktor

L. Koch.

Inhalt: 1) Einiges über den Unterricht in der analytischen Geometrie II, von Professor Dr. Julius Ellinger.
2) Schulnachrichten von dem Direktor.

Tilsit, 1881.

Druck von J. Reyländer & Sohn.

1881. Progr. No. 13.

Einiges über den Unterricht in der analytischen Geometrie.

Was Zweck und Form der nachstehenden Abhandlung betrifft, so darf ich wohl auf das Programm unsrer Tilsiter Realschule vom Jahre 1871 hinweisen. Es soll hier nur nochmals an einem Bruchstücke veranschaulicht werden, wie ein Leitfaden (— nicht „Lehrbuch", am wenigsten „zum Selbstunterrichte" —) beim Unterricht auf Realschulen nach meiner Ansicht beschaffen sein müßte. Jedem Lehrer, der nach einem solchen Leitfaden zu unterrichten sich entschließen könnte, würde freier Spielraum beim Unterrichte bleiben, und dem Schüler würde eine genügende Basis zur häuslichen Thätigkeit gegeben sein.

„Einleitung" und „Erster Abschnitt" erläutern in 15 Paragraphen die Methode der analytischen Geometrie zur Bestimmung der Lage eines Punktes durch rechtwinklige, durch schiefwinklige und durch Polar-Coordinaten, sowie auch die Transformationen dieser Coordinatensysteme. Letztere könnten auch ohne Nachteil für den Zusammenhang erst später ausführlich durchgenommen werden.

„Zweiter Abschnitt" (Linien des ersten Grades oder die Geraden) und „Dritter Abschnitt" (Linien des zweiten Grades oder die Kegelschnitte), „A. Der Kreis" sind in vorliegendem Programme abgedruckt. Dann würde folgen „B. Die Ellipse", aber nicht in dem durch die Schulprogramme gebotenen unzweckmäßigen Format (Siehe Programm 1871), dagegen vervollständigt durch Hinzufügung des Krümmungskreises. Ferner „C. Die Hyperbel", „D. Die Parabel" und „E. Die räumliche Deutung der allgemeinen Gleichung des 2. Grades mit zwei Variabeln."

Von anderen ebenen Curven und von der analytischen Geometrie des Raumes dürften in einem 4. und 5. Abschnitte nur einzelne ausgesuchte elementare Beispiele für den Unterricht in Realschulen geeignet sein.

Zweiter Abschnitt.

Linien des ersten Grades oder die Geraden.

§. 16. Die Gleichung einer Geraden MN zu finden, welche durch den Anfangspunkt A des rechtwinkligen Coordinatensystems geht und mit der positiven Richtung der Abscissenaxe den Winkel XAN = α bildet. (Fig. 9.)

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für jeden Punkt einer solchen Linie MN in der ersten und dritten Region, sondern behält auch dieselbe Form, wenn $\angle \alpha$ stumpf ist, wenn also die Linie MN in der 2. und 4. Region liegt. Bezeichnet a den absoluten Werth von tg α, so hat man, je nachdem α spitz oder stumpf ist,

$$y = + ax \quad \text{oder } y = - ax \qquad \text{(Fig. 10.)}$$

Für jeden Punkt außerhalb der Geraden MN ist $y \gtrless \operatorname{tg} \alpha \cdot x$; es gehört also die Gleichung $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$ in der analytischen Geometrie, wenn x und y rechtwinklige Coordinaten sind, immer nur zu der einen geraden Linie, welche die positive Richtung der Abscissenaxe im Anfangspunkte unter dem Winkel α durchschneidet.

Hier ist also, wie in allen späteren ähnlichen Fällen unter $\angle \alpha$ derjenige Winkel zu verstehen, den die positive xAxe mit demjenigen Teile der Linie MN bildet, dessen Punkte sämtlich positive Ordinaten haben, der also in der ersten oder zweiten Region liegt und auch wohl der positive Teil (die positive Richtung) von MN genannt wird.

§. 17. Die Gleichung einer Geraden MN zu finden, welche die positive yAxe in der Entfernung b vom Anfangspunkte durchschneidet und mit der positiven Richtung der Abscissenaxe den Winkel α bildet. (Fig. 11.)

Legt man durch den Schnittpunkt B in der Ordinatenaxe, also in der Entfernung b vom Anfangspunkte eine Parallele zu der Abscissenaxe, so ergiebt sich nach §. 16. die Gleichung

$$y - b = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

$$\text{oder} \qquad y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$$

Die Gleichung gilt auch für den Fall, daß $\alpha > 90^0$. Wenn also a den absoluten Wert von tg α bedeutet, so ist $y = \pm ax + b$, je nachdem α spitz oder stumpf ist.

Die Gleichung $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$ gehört ausschließlich derjenigen Geraden an, welche die positive yAxe in der Entfernung b vom Anfangspunkte durchschneidet und mit der positiven Richtung der Abscissenaxe den Winkel α bildet.

§. 18. Die Gleichung einer Geraden MN zu finden, welche die negative yAxe in der Entfernung b vom Anfangspunkte durchschneidet und mit der +xAxe den Winkel α bildet. (Fig. 12.)

Ganz ebenso wie vorher ergiebt sich hier

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - b$$

$$\text{oder } y = \pm ax - b$$

wo a wieder den absoluten Wert von tg α bedeutet.

Die Gleichung $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - b$ gilt nur für diejenige gerade Linie, welche die yAxe in der Entfernung $-b$ vom Anfangspunkte durchschneidet und mit der +xAxe den Winkel α bildet.

Man hat sich davon zu überzeugen, daß die in §. 17. und 18. angegebenen Gleichungen einer Geraden für jeden beliebigen Punkt derselben in jeder Region richtig sind.

§. 19. Aus Vorstehendem folgt:

Die allgemeine Form für die Gleichung einer Geraden in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist

$$\mathbf{y = ax + b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

wo a sowohl als b jede beliebige algebraische Zahl, positiv oder negativ oder Null sein kann.

Durch eine Gleichung von der Form $y = ax + b$ ist immer eine Gerade ihrer Richtung und Lage nach bestimmt. Der Coefficient bei x, d. i. tg α, zeigt ihre Richtung an (Richtungsconstante), während die andere Constante b die Entfernung ihres Schnittpunkts B in der positiven oder negativen Ordinatenaxe vom Anfangspunkte des rechtwinkligen Coordinatensystems angiebt.

Bezeichnet man den Schnittpunkt der Geraden MN in der xAxe durch den Buchstaben E und seine Entfernung vom Anfangspunkte durch e, so hat man für den Punkt E die Coordinaten $y = 0$ und $x = e$, mithin $0 = a \cdot e + b$, oder

$$e = -\frac{b}{a}$$

Hieraus ergiebt sich eine andere, für die Construction der Geraden geeignetere Form der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}} + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{e}} = +\mathbf{1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Diese Gleichung läßt sich auch unmittelbar durch planimetrische Betrachtung herleiten. Wenn man P (Fig. 13.) mit A verbindet, so ist (nach Planimetrie §. 86,2) $\triangle\, ABE = \frac{1}{2}\, eb = \frac{1}{2}\, ey + \frac{1}{2}\, bx$.

Dieses ist richtig für jeden Punkt P der Linie in jeder der 3 Regionen.

§. 20. Jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen kann keiner anderen als einer geraden Linie angehören.

$Ay + Bx + C = 0$, wo A, B und C beliebige, aber constante Zahlen sind, wird durch Division mit A auf die Form $y = ax + b$ zurückgeführt.

Es ist $a = -\frac{B}{A}$, $b = -\frac{C}{A}$, mithin $e = -\frac{C}{B}$ (§. 19.)

§. 21. Aus der allgemeinen Gleichung $Ay + Bx + C = 0$ oder $y = ax + b$ ergiebt sich für die Fälle, daß eine oder die andere Constante gleich Null ist, Folgendes:

1) Für $C = 0$ oder $b = 0$ hat man die Gleichung einer Geraden, die durch den Anfangspunkt des Systems geht.

2) Für $B = 0$ oder $a = 0$ wird y constant; man hat also die Gleichung einer Geraden, die zur xAxe im Abstande $-\frac{C}{A}$ oder $+b$ parallel ist.

3) Für $B = C = 0$ oder $a = b = 0$ wird $y = 0$, d. i. die Gleichung der xAxe selbst.

4) Für $A = 0$ läßt sich nicht die andere Form der Gleichung vermittelst Division durch A ableiten. Man erhält aber $x = -\frac{C}{B}$, mithin $x = e = -\frac{b}{a}$, d. i. die Gleichung der Geraden, welche in dem Abstande $-\frac{C}{B}$ oder $e = -\frac{b}{a}$ zur yAxe parallel ist.

5) Für $A = C = 0$ wird auch $x = 0$, d. i. die Gleichung der Ordinatenaxe selbst.

§. 22. Die Entfernung d **zweier durch ihre rechtwinkligen Coordinaten** (x_1y_1) **und** (x_2y_2) **bestimmte Punkte** P^1 **und** P'' (Fig. 14.), **sowie auch den Neigungswinkel** $(dx) = \alpha$ **der Linie** d **zur positiven** x**Axe zu berechnen.**

Es ist $\mathbf{d} = \sqrt{(\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2})^2 + (\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2})^2}$

und $\mathbf{tg}\,(\mathbf{dx}) = \mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2}}{\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}}$

Es ist auch hier nachzuweisen, daß diese Formeln für alle Fälle gültig sind, wie und in welchen Regionen die Punkte auch liegen mögen.

§. 23. Die Gleichung derjenigen Geraden zu finden, in welcher zwei Punkte $P'_{(x_1y_1)}$ und $P''_{(x_2y_2)}$ durch ihre Coordinaten bestimmt sind.

Bezeichnet man, wie es gewöhnlich zu geschehen pflegt, die allgemeinen, variabeln oder laufenden Coordinaten aller beliebigen Punkte der Linie mit x und y ohne Index, während die Coordinaten bestimmter Punkte mit x_1y_1, x_2y_2 u. s. w. bezeichnet werden, so hat man folgende Lösung der Aufgabe:

Die gesuchte Gleichung sei

$$y = ax + b$$

Da P′ sowohl als P″ in dieser Linie liegt, so ist auch

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$\text{und } y_2 = ax_2 + b$$

$$\text{mithin } y_1 - y_2 = a\,(x_1 - x_2) \qquad \text{oder } a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{(Vergl. §. 22.)}$$

$$\text{und daher } \mathbf{y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1)}$$

$$\text{oder auch } y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2}$$

Die vorletzte, dem Gedächtnis leichter einzuprägende Gleichung ließe sich auch wieder unmittelbar aus der Zeichnung (Fig. 14.) als Proportion herleiten.

Entwickelt man x als die abhängige Variable, so erhält man

$$x = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \cdot y + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1 - y_2}$$

Als Folgerung aus dem Vorstehenden ergiebt sich für drei Punkte (x_1y_1), (x_2y_2) und (x_3y_3), welche in einer und derselben Geraden liegen, die Bedingungsgleichung

$$y_3 - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x_3 - x_1)$$

§. 24. Die Gleichung $y = ax + b$ der Geraden MN ist gegeben; es ist die Gleichung einer anderen Geraden QR zu bestimmen, die zu MN parallel und durch den gegebenen Punkt $P_{(x_1y_1)}$ geht.

Für jede zu MN parallele Gerade ist die Richtungsconstante a oder tg α immer eine und dieselbe Größe und nur $b^1 \gtrless b$, also hat man für die gesuchte Linie QR

$$y = ax + b^1$$

Diese Gleichung muß auch für den in derselben Linie liegenden Punkt $P(x_1y_1)$ gültig sein, also hat man auch

$$y_1 = ax_1 + b^1$$

$$\text{Folglich } \mathbf{y - y_1 = a\,(x - x_1) = tg\,\alpha\,(x - x_1)}$$

$$\text{oder auch } y = ax + (y_1 - ax_1)$$

Bemerkung: Es ist nicht allgemein gebräuchlich, die laufenden Coordinaten zweier verschiedener Linien $y = ax + b$ und $y = a^1x + b^1$ auch verschieden zu bezeichnen, obgleich (worauf stets zu achten ist) zu einer und derselben Abscisse x offenbar verschiedene Ordinaten y gehören. Zuweilen bedient man sich aber auch der verschiedenen Zeichen y und y.

§. 25. Die Gleichungen zweier Geraden (1) und (2) sind gegeben. (Fig. 15.) **Es sollen die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes $P_{(x_1y_1)}$ bestimmt werden.**

Gegeben: $y = ax + b$ . . . . (1)

und $y = a^1x + b^1$ . . . . (2)

Gesucht x_1 und y_1

Da der Punkt (x_1y_1) in beiden Linien liegt, so gelten für ihn auch beide Gleichungen, und es ist daher

$$y_1 = ax_1 + b = a^1x_1 + b^1$$

folglich $\mathbf{x_1 = \frac{b^1 - b}{a - a^1}}$ und $\mathbf{y_1 = \frac{ab^1 - a^1b}{a - a^1}}$

Wenn $a = a^1$, so ergiebt sich hieraus sowohl x_1 als auch y_1 als unendlich groß, d. h. die Linien sind einander parallel.

§. 26. Die Gleichungen zweier Geraden (1) und (2) sind gegeben. (Fig. 15.) **Es soll der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, bestimmt werden.**

Gegeben $y = ax + b$ . . . . (1)

und $y = a^1x + b^1$ . . . . (2)

Gesucht $\angle\, \omega$

Sind die Neigungswinkel der Linien zur x Axe bezüglich α und α^1, so ist $\omega = \alpha^1 - \alpha$ und daher

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha^1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha^1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha^1 \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{a^1 - a}{1 + a^1 \cdot a}$$

Daß b und b^1 keinen Einfluß auf ω haben, war vorauszusehen. Denkt man sich nämlich durch den Anfangspunkt A zu den gegebenen Linien Parallele gezogen, so bilden diese denselben Winkel ω, und man hätte für diese Parallelen die Gleichungen $y = ax$ und $y = a^1x$.

Für $a = a^1$ ist $\omega = 0$, d. h. die Linien sind einander parallel.

Bemerkung. Der Winkel ω ist hier wohl zu unterscheiden von seinem Nebenwinkel. In vorstehender Auflösung ist mit ω derjenige Winkel bezeichnet, den die Linie (1), für welche $\operatorname{tg}\alpha = a$ ist, durchläuft, wenn man dieselbe um den Schnittpunkt beider Linien bis in die Lage der zweiten Linie (mit $\operatorname{tg}\alpha^1 = a^1$) in demselben Sinne herumgedreht denkt, wie in der Trigonometrie, also wie man von der 1. zur 2., 3. und zur 4. Region übergeht.

Man könnte auch den Winkel ω als denjenigen bezeichnen, den die positiven Richtungen beider Linien (S. §. 16.) mit einander bilden, wobei unter α^1 immer der größere von beiden Neigungswinkeln zu verstehen ist.

§. 27. Als Folgerung ergiebt sich

1) Sollen zwei Linien sich unter 45^0 durchschneiden, so muß sein

$$\mathbf{a^1 = \frac{1 + a}{1 - a}}$$ (Vergl. Trigon. Formel 40.)

oder $\mathbf{a = \frac{a^1 - 1}{a^1 + 1}}$

2) Sollen zwei Gerade auf einander senkrecht stehen, so muß $1 + a^1 \cdot a = 0$ sein, mithin

$$\mathbf{a^1 = -\frac{1}{a}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{\operatorname{tg}\alpha^1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

d. h. die Coefficienten bei x in den geordneten Gleichungen beider Linien müssen reciproke Werte und entgegengesetzte Vorzeichen haben.

§. 28. Die Gleichung einer Geraden zu finden, die senkrecht auf einer gegebenen Geraden steht und durch den bestimmten Punkt $P_{(x_1y_1)}$ geht.

Gegeben $y = ax + b$, ferner x_1 und y_1

Gesucht $y = a^1x + b^1$

Da beide Linien auf einander senkrecht stehen sollen, so muß nach §. 27. die Richtungsconstante $a^1 = -\frac{1}{a}$ sein, man hat also für die gesuchte Linie die Gleichung

$$y = -\frac{1}{a}x + b^1$$

Da ferner in dieser Linie der Punkt (x_1y_1) liegen soll, so ist

$$y_1 = -\frac{1}{a}x_1 + b^1$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{1}{a}\cdot(x - x_1) = -\,ctg}\ \alpha\ \mathbf{(x - x_1)}$$

$$\text{oder } y = -\frac{1}{a}x + (y_1 + \frac{1}{a}x_1) \quad \text{(Vergl. §. 24.)}$$

§. 29. Den Abstand PQ des bestimmten Punktes $P_{(x_1y_1)}$ von der gegebenen Linie $(y = ax + b)$ zu bestimmen.

Da der Fußpunkt $Q_{(x_2y_2)}$ des Perpendikels in dieser Linie PQ und zugleich in der gegebenen Geraden liegt, so hat man für ihn die beiden Gleichungen

$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{a}(x_2 - x_1) \quad \text{(nach §. 28.)}$$

$$\text{und } y_2 = ax_2 + b$$

$$\text{folglich } x_2 = \frac{ay_1 + x_1 - ab}{a^2 + 1} \qquad \text{und } y_2 = \frac{a^2y_1 + ax_1 + b}{a^2 + 1}$$

$$\text{mithin } x_1 - x_2 = \frac{-a(y_1 - ax_1 - b)}{a^2 + 1} \text{ und } y_1 - y_2 = \frac{y_1 - ax_1 - b}{a^2 + 1}$$

und daher nach §. 22.

$$\mathbf{PQ = \frac{y_1 - ax_1 - b}{\pm\sqrt{a^2 + 1}}}$$

Dieser Quotient ist als absoluter Wert der Strecke PQ immer positiv, und hiernach ist das Vorzeichen vor der Wurzel im Nenner zu wählen.

§. 30. Die Gleichung einer Linie MN zu finden, die durch einen bestimmten Punkt $P_{(x_1y_1)}$ geht und eine Gerade (1), deren Gleichung $y = ax + b$ gegeben ist, unter dem bestimmten Winkel ω durchschneidet. (Fig. 16.)

Die Gleichung der gesuchten Linie sei

$$y = a^1x + b^1$$

Da dieselbe durch den Punkt $P_{(x_1y_1)}$ geht, so hat man die algebraische Gleichung

$$y_1 = a^1x_1 + b^1$$

$$\text{mithin } y - y_1 = a^1(x - x_1)$$

Da aber diese und die gegebene Linie $y = ax + b$ sich unter dem Winkel ω schneiden sollen, so ist nach §. 26.

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{a^1 - a}{1 + a^1 a} \qquad \text{oder } a^1 = \frac{a + \operatorname{tg} \omega}{1 - a \cdot \operatorname{tg} \omega} = \operatorname{tg} (\alpha + \omega)$$

was sich auch unmittelbar aus der Zeichnung hätte entnehmen lassen; und man hat daher für die gesuchte Linie MN die Gleichung

$$y - y_1 = \operatorname{tg} (\alpha + \omega) (x - x_1) \qquad \text{(Vergl. §. 24.)}$$

Die Aufgabe läßt noch eine zweite Lösung zu, insofern nicht bestimmt ist, welcher von den beiden Nebenwinkeln zwischen der gesuchten Linie und der gegebenen Linie (1) gleich ω sein soll. Für die Linie M^1N^1 ist $\angle (\alpha^1) = \alpha + 180 - \omega$ und daher $\operatorname{tg} (\alpha^1) = \operatorname{tg} (\alpha - \omega)$, und man hat daher für beide Linien MN und M^1N^1

$$y - y_1 = \operatorname{tg} (\alpha \pm \omega) (x - x_1)$$

Für $\omega = 90^0$ wird $\operatorname{tg} (\alpha \pm \omega) = - \operatorname{ctg} \alpha$. (Vergl. §. 28.)

§. 31. Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch einen bestimmten Punkt $P_{(x_1 y_1)}$ geht und zwei gegebene Linien (1) und (2) unter gleichen Winkeln durchschneidet. (Fig. 17.)

Die Gleichungen der gegebenen Linien seien

$$y = ax + b \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$
$$\text{und } y = a^1 x + b^1 \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Da die gesuchte Linie durch den Punkt $P_{(x_1 y_1)}$ gehen soll, so erhält man für sie, wie im vorigen Paragraphen, die Gleichung

$$y - y_1 = a'' (x - x_1) \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots 3)$$

wo a'' die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der gesuchten Linie MN zur positiven xAxe ist. Es sollen aber die Winkel, welche diese Linie mit den beiden gegebenen Linien bildet, gleich groß sein; deshalb hat man mit Anwendung des §. 26.

$$\frac{a - a''}{1 + a a''} = \frac{a'' - a^1}{1 + a'' a^1}$$

Aus dieser quadratischen Gleichung erhält man den Wert von a''; und substituiert man denselben in Gleichung 3) der gesuchten Linie, so wird

$$y - y_1 = \frac{a a^1 - 1 \pm \sqrt{(a^2 + 1)(a^{1^2} + 1)}}{a + a^1} \cdot (x - x^1) \qquad \ldots \ldots 4)$$

Es giebt also wiederum zwei Linien, welche den gestellten Bedingungen entsprechen, je nachdem man die Wurzelgröße positiv oder negativ nimmt. Durch gewöhnliche trigonometrische Umformungen erhält man für $a'' = \operatorname{tg} \alpha''$ die beiden Werte

$$\text{entweder } \operatorname{tg} a'' = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \alpha^1}{2} \qquad \text{oder } \operatorname{tg} \alpha'' = - \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \alpha^1}{2}$$

was sich auch wieder aus Fig. 17. durch Anwendung des planimetrischen Satzes vom Außenwinkel beim Dreiecke nachweisen ließe.

Die Gleichungen der beiden Geraden MN und M^1N^1, welche den gestellten Anforderungen genügen, sind also

$$\left.\begin{aligned} y - y_1 &= \operatorname{tg} \frac{\alpha + \alpha^1}{2} \cdot (x - x_1) \\ \text{und } y - y_1 &= - \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \alpha^1}{2} \cdot (x - x_1) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots 5)$$

Es müssen daher nach §. 27. diese beiden Linien auf einander senkrecht stehen.

Wären x_1 und y_1 die gegebenen Coordinaten des Schnittpunkts der beiden Linien (1) und (2), so wären die gefundenen Linien die Halbierungslinien der beiden Nebenwinkel, unter welchen sich die Linien (1) und (2) schneiden, und dieselben sind bekanntlich stets senkrecht zu einander.

§. 32. Zwischen den Schenkeln des Winkels $BAC = \omega$ (Fig. 18.) die Gleichung des geometrischen Ortes für diejenigen Punkte zu bestimmen, deren Abstände von den beiden Schenkeln AB und AC das constante Verhältniß $m : n$ haben.

P sei irgend einer der gedachten Punkte. Nimmt man nun den einen Schenkel AB als x Axe und den Scheitel A als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, zieht durch P die Linie $CB \perp AX$ und $PD \perp AC$, so ist $\angle DPC = BAC = \omega$. Nach der Bedingung ist aber

$$PB : PD = m : n$$

oder $$y : (x \cdot tg\ \omega - y) \cdot \cos\omega = m : n$$

mithin $$y = \frac{m \cdot \sin\omega}{n + m \cdot \cos\omega} \cdot x$$

Diese Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Scheitel A geht (§. 21,1) und mit dem Schenkel AB den Winkel

$$XAP = arc \left(tg = \frac{m \cdot \sin\omega}{n + m \cdot \cos\omega}\right) \text{ bildet.}$$

Ist $m = n$, so hat man die Gleichung für dte Halbierungslinie des Winkels BAC

$$y = \frac{\sin\omega}{1 + \cos\omega} = tg\ \frac{\omega}{2} \cdot x \quad \text{(Vergl. §. 31.)}$$

§. 33. Den geometrischen Ort derjenigen Punkte P zu bestimmen, für welche die Differenz zwischen den Quadraten ihrer Entfernungen von den Endpunkten einer der Lage und Größe nach gegebenen Geraden $AB = c$ gleich einem gegebenen Quadrate q^2 ist. (Fig. 19.)

Nimmt man die Richtung von $AB = c$ als Abscissenaxe und A als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, so hat man für irgend einen Punkt $P_{(xy)}$ des gesuchten geometrischen Ortes

$$\text{entweder } PA^2 - PB^2 = q^2$$
$$\text{oder } PB^2 - PA^2 = q^2$$

also $$x^2 + y^2 - \{y^2 + (c-x)^2\} = \pm q^2$$

und hieraus $$x = \frac{c^2 \pm q^2}{2c}$$

Dieses ist die Gleichung für die beiden Geraden PQ und P'Q', welche im Abstande $\frac{c^2 \pm q^2}{2c}$ parallel zur y Axe, also senkrecht zu AB sind. (§. 21,4.)

Die planimetrische Behandlung dieser wie der vorigen Aufgabe, kann hier wohl als bekannt angenommen werden.

§. 34. Wenn die Gleichungen zweier Geraden sich auf ein und dasselbe Coordinatensystem beziehen, so erhält man nach §. 25. durch die gewöhnlichen Eliminations-Methoden die Werte von x und y als die Coordinaten des Schnittpunkts beider Linien. Wenn nun die Gleichung einer dritten Linie, mit einer der beiden ersten in algebraische Verbindung gebracht, ebendieselben Werte von x und y ergiebt, so geht auch die dritte Linie durch den Schnittpunkt der beiden ersten; alle drei Linien sind geometrische Oerter für einen und denselben Punkt. Wenn man daher aus den Gleichungen zweier Geraden durch algebraische Operationen eine dritte Gleichung vom ersten Grade herleitet, so muß diese irgend eine dritte Gerade bedeuten, welche ebenfalls ein geometrischer Ort für den Schnittpunkt der beiden ersten Linien ist.

Aehnliches gilt nicht nur für die Gleichungen gerader Linien, sondern ganz allgemein für irgend welche geometrische Oerter.

§. 35. Als Beispiele für die Anwendung des vorstehenden Paragraphen mögen hier folgende aus der Planimetrie bekannte Sätze auf analytischem Wege bewiesen werden.

1) **In jedem Dreiecke schneiden sich die drei Höhen in einem einzigen Punkte.**

Bezeichnet man (Fig. 20.) die Coordinaten der Ecken A, B und C des Dreiecks in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges System bezüglich mit $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$ und $(x_3\, y_3)$, so ergiebt sich nach §. 23 für AB die Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1)$$

Man hat daher für das durch $C_{(x_3 y_3)}$ gehende Perpendikel auf AB oder für die Höhe CF nach §. 28. die erste der drei folgenden Gleichungen und erhält die beiden letzten derselben auf ähnliche Weise für die Höhen AD und BE.

$$y - y_3 = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \cdot (x - x_3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

$$y - y_1 = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} \cdot (x - x_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

$$y - y_2 = -\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} \cdot (x - x_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

Die Addition zweier dieser Gleichungen führt auf die dritte, also schneiden sich nach §. 34. die drei Höhen in einem Punkte.

Der Beweis wird etwas kürzer, wenn man AB als x Axe und entweder A oder auch den Fußpunkt F der Höhe CF als Anfangspunkt annimmt. Im ersten Falle wird $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ im zweiten Falle x_1 negativ und $x_3 = y_1 = y_2 = 0$. Nach Fortschaffung der Nenner in obigen Gleichungen 1) bis 3) erhält man alsdann für die Höhe CF entweder $x = x_3$ oder im zweiten Falle $x = 0$ u. s. w.

Für den Schnittpunkt der drei Höhen im Dreiecke ist daher (§. 25.) im ersten Falle die Abscisse $x_4 = x_3$ und die Ordinate $y_4 = \frac{(x_2 - x_3)\; x_3}{y_3}$; im zweiten Falle $x_4 = 0$ und $y_4 = \cdot \frac{x_1\, x_2}{y_3}$ Beides drückt den bekannten planimetrischen Satz aus, daß das Rechteck aus der ganzen Höhe und ihrem unteren Abschnitte gleich dem Rechteck aus den beiden Segmenten der Grundlinie ist. (S. Planim. §. 127,1.)

Man hätte auch nach §. 25. die Coordinaten für den Schnittpunkt der Linien 1) und 2) und für den Schnittpunkt von 1) und 3) bestimmen und sich auf diese Weise überzeugen können, daß beide Schnittpunkte in einen Punkt zusammenfallen.

2) **Die drei Schwerlinien eines jeden Dreiecks schneiden sich in einem einzigen Punkte.**

Sind wieder für ein beliebiges rechtwinkliges System die Coordinaten der Ecken A, B und C (Fig. 21.) bezüglich $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ und $(x_3 y_3)$, so hat man für die Halbierungspunkte D, E und F der Seiten folgende Coordinaten

$\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$ und $\frac{1}{2}(y_2 + y_3)$ . . . . für D
$\frac{1}{2}(x_3 + x_1)$ und $\frac{1}{2}(y_3 + y_1)$ . . . . für E
$\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ . . . . für F

Dies giebt nach §. 23. folgende drei Gleichungen für die drei Schwerlinien

$$y-y_1 = \frac{2y_1-y_2-y_3}{2x_1-x_2-x_3}\cdot(x-x_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{für AD}$$

$$y-y_2 = \frac{2y_2-y_3-y_1}{2x_2-x_3-x_1}\cdot(x-x_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{für BE}$$

$$y-y_3 = \frac{2y_3-y_1-y_2}{2x_3-x_1-x_2}\cdot(x-x_3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{für CF}$$

Die Addition zweier dieser Gleichungen führt auf die dritte, also geht nach §. 34. die dritte Linie durch den Schnittpunkt der beiden ersten.

Auch hier wird der Beweis wieder einfacher, wenn man AB als x Axe und A als Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems nimmt, in welchem Falle $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ ist.

Durch Subtraktion der Gleichungen für AD und BE ergiebt sich auch (§. 25.), daß die Ordinate y_4 des Schwerpunktes gleich dem dritten Theil von y_3 ist, mithin auch der bekannte planimetrische Satz über das Verhältnis, nach welchem die drei Schwerlinien im Dreiecke sich gegenseitig teilen. (Planim. §. 107.)

3) **Die Perpendikel durch die Mitten der drei Seiten des Dreiecks schneiden sich in einem einzigen Punkte.**

Wie vorher seien $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ und $(x_3 y_3)$ die Coordinaten der Ecken A, B und C in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges System. Alsdann ist die Gleichung für die Seite AB

$$y-y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot(x-x_1)$$

Der Halbierungspunkt F hat die Coordinaten $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ und $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, und daher ist die Gleichung des Perpendikels in F nach §. 28

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = - \frac{x_1-x_2}{y^1-y^2}\cdot\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

oder $\quad 2(y_1-y_2)\,y - y_1^2 + y_2^2 = -2(x_1-x_2)\,x + x_1^2 - x_2^2$

Analog für die Perpendikel in D und E

$$2(y_2-y_3)\,y - y_2^2 + y_3^2 = -2(x_2-x_3)\,x + x_2^2 - x_3^2$$

und $\quad 2(y_3-y_1)\,y - y_3^2 + y_1^2 = -2(x_3-x_1)\,x + x_3^2 - x_1^2$

Nimmt man wieder A als Anfangspunkt und AB als die positive Richtung der x Axe (Fig. 22), so ist $x_1 = y_1 = y_2 = 0$, und man hat

$$x = \frac{1}{2}x_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{für das Perpendikel in F}$$

$$-2y_3 y + y_3^2 = -2(x_2-x_3)\,x + x_2^2 - x_3^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{in D}$$

$$2y_3 y - y_3^2 = -2x_3\cdot x + x_3^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{in E}$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen giebt die drittletzte, daher schneiden sich nach §. 34. die drei Perpendikel durch D, E und F in einem einzigen Punkte.

Für die Ordinate y_4 des Schnittpunktes O erhält man aus den Gleichungen für die Perpendikel durch E und F

$$2y_3y_4 - y_3^2 = -2x_3 \cdot \tfrac{1}{2}x_2 + x_2^2$$

$$\text{oder} \qquad 2y_4 = y_3 - \frac{(x_2 - x_3)\,x_3}{y_3}$$

Da aber nach Obigem unter 1) in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem der untere Abschnitt der zu OF parallelen Höhe gleich $\frac{(x_2 - x_3)\cdot x_3}{y_3}$ ist, so ergiebt sich der bekannte Satz, daß der Abstand der Seite vom Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises halb so groß ist als der obere Abschnitt der zu derselben Seite gehörigen Höhe. (Planimetrie §. 128,1.)

§. 36. Analytisch zu beweisen, daß in jedem vollständigen Vierecke die Halbierungspunkte der drei Diagonalen in einer Geraden liegen. (Planimetrie §. 172,3.)

Nimmt man die Ecke A (Fig. 23.) als Anfangspunkt und die Seite AB des Vierecks als x Axe und bezeichnet die Coordinaten der Ecken A, B, C und D bezüglich mit $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$ und $(x_4 y_4)$, so ist $x_1 = y_1 = y_2 = 0$. Die Gleichungen der x Axe AB und der gegenüberliegenden Seite CD sind (§. 21,3 und §. 23,1)

$$y = 0$$

$$\text{und} \qquad y = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} \cdot x + \frac{x_3 y_4 - x_4 y_3}{x_3 - x_4}$$

mithin nach §. 25. die Coordinaten des Schnittpunktes E

$$y_5 = 0 \qquad \text{und } x_5 = \frac{x_3 y_4 - x_4 y_3}{-y_3 + y_4}$$

Ferner für AD und BC sind die Gleichungen

$$y = \frac{y_4}{x_4} \cdot x$$

$$\text{und} \qquad y = \frac{-y_3}{x_2 - x_3} \cdot x + \frac{x_2\, y_3}{x_2 - x_3}$$

mithin die Coordinaten des Schnittpunkts F dieser beiden Seiten

$$y_6 = \frac{x_2 y_3 y_4}{x_2 y_4 - x_3 y_4 + x_4 y_3} \qquad \text{und} \qquad x_6 = \frac{x_2 x_4 y_3}{x_2 y_4 - x_3 y_4 + x_4 y_3}$$

Es hat daher der Halbierungspunkt P der Diagonale EF die Coordinaten

$$y_7 = \tfrac{1}{2} \cdot (y_5 + y_6) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x_2 y_3 y_4}{x_2 y_4 - x_3 y_4 + x_4 y_3}$$

$$\text{und} \qquad x_7 = \tfrac{1}{2} \cdot (x_5 + x_6) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x_2 y_3 y_4^2 - x_2 x_4 y_3^2 - (x_3 y_4 - x_4 y_3)^2}{(x_2 y_4 - x_3 y_4 + x_4 y_3)\,(y_4 - y_3)}$$

Für die Halbierungspunkte M und N der Diagonalen AC und BD sind aber die Coordinaten

$\tfrac{1}{2}x_3$ und $\tfrac{1}{2}y_3$ . . . . für M

und $\tfrac{1}{2}(x_2 + x_4)$ und $\tfrac{1}{2}y_4$ . . . . für N und man hat daher für die Linie MN die Gleichung

$$y - \tfrac{1}{2} y_3 = \frac{y_3 - y_4}{-x_2 + x_3 - x_4} \cdot (x - \tfrac{1}{2} x_3)$$

Soll nun auch der Punkt P, dessen Coordinaten x_7 und y_7 sind, in der Verlängerung der Linie MN liegen, so muß vorstehende Gleichung zur identischen werden, sobald man in der Gleichung für MN die laufenden Coordinaten y und x durch die obigen Werthe von y_7 und x_7 ersetzt (§. 23.), was sich auch nach Ausführung der gewöhnlichen algebraischen Operationen als richtig ergiebt.

§. 37. Den Flächeninhalt $\triangle$ eines Dreiecks durch die gegebenen Coordinaten der drei Ecken $A_{(x_1y_1)}$, $B_{(x_2y_2)}$ und $C_{(x_3y_3)}$ zu bestimmen.

Bezeichnet man (Fig. 24.) die Neigungswinkel der Seiten a, b und c zur xAxe mit α, β und γ, so ist

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, bc \cdot \sin A = \tfrac{1}{2}\, bc \cdot \sin(\beta - \gamma)$$
$$= \tfrac{1}{2}\, bc \cdot (\sin\beta \cos\gamma - \cos\beta \cdot \sin\gamma)$$

Da aber $\sin\beta = \frac{y_3 - y_1}{b}$ und $\cos\gamma = \frac{x_2 - x_1}{c}$

ferner $\cos\beta = \frac{x_3 - x_1}{b}$ und $\sin\gamma = \frac{y_2 - y_1}{c}$

so ergiebt sich $\triangle = \tfrac{1}{2} \cdot \{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\}$

oder $\triangle = \tfrac{1}{2} \cdot \{\mathbf{x_1}(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_3}) + \mathbf{x_2}(\mathbf{y_3} - \mathbf{y_1}) + \mathbf{x_3}(\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2})\}$

Diese Formel hätte man auch wieder rein planimetrisch herleiten können (Fig. 25.):

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\,(ADEF - AGHK)$$

Die Seiten der beiden Rechtecke sind nur durch die Coordinaten der Punkte A, B und C auszudrücken.

Für den Fall, daß A der Anfangspunkt und AB die xAxe ist, wird $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ und daher

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, x_2 y_3,\ \text{d. h.} = \tfrac{1}{2}\, ch$$

§. 38. Durch einen gegebenen Punkt $P_{(x_1y_1)}$ eine Gerade MN zu ziehen, welche mit den beiden Coordinatenaxen ein Dreieck AMN von gegebenem Flächenraume ($= m^2$) bildet. (Fig. 26.)

a) Wäre M_1N_1 die gesuchte Linie und $y = ax + b = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$ die Gleichung derselben, so hätte man für den gegebenen Punkt (x_1y_1)

$$y_1 = \operatorname{tg}\alpha \cdot x_1 + b$$

Ferner $m^2 = \tfrac{1}{2}\, b \cdot b \cdot \operatorname{ctg}(180 - \alpha) = -\tfrac{1}{2}\, b^2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

Aus diesen beiden Gleichungen könnte man zuerst $\operatorname{tg}\alpha$ oder auch b eliminieren, in welchem letzteren Falle jedoch zu bemerken ist, daß $b = m\sqrt{-2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}$ nicht imaginär ist, insofern $\alpha > 90^0$. Dann erhielte man $e = \frac{b}{\operatorname{tg}(180 - \alpha)}$. Man kann aber auch zweckmäßig die Gleichung der Geraden M_1N_1 erst auf die Form $\frac{y}{b} + \frac{x}{e} = 1$ oder $ye + x\,b = be$ bringen und hat dann für den Punkt (x_1y_1):

$$y_1 e + x_1 b = be \quad \ldots \quad 1)$$

und nach der Bedingung $be = 2\ m^2 \quad \ldots \quad 2)$

$$\text{mithin } y_1 e - x_1 b = \sqrt{4\ m^4 - 8\ m^2\ x_1 y_1} = 2\ m \sqrt{m^2 - 2\ x_1 y_1} \quad \ldots \quad 3)$$

Die Gleichungen 1) und 3) geben alsdann

$$e = \frac{m}{y_1}\left(m \pm \sqrt{m^2 - 2\ x_1 y_1}\right)$$

$$\text{und} \quad b = \frac{m}{x_1}\left(m \mp \sqrt{m^2 - 2\ x_1 y_1}\right)$$

und hieraus $\operatorname{tg}(180 - \alpha) = \frac{1}{{x_1}^2}\left(m^2 - x_1 y_1 \mp m \sqrt{m^2 - 2\ x_1 y_1}\right)$

Die doppelten Vorzeichen vor den Wurzeln beziehen sich auf die beiden Linien M_1N_1 und M_2N_2.

b) Der Aufgabe wird auch genügt, wenn eine positive und eine negative Axe durchschnitten wird. Alsdann ist $m^2 = + \frac{1}{2} b^2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ zu setzen; und für die zuletzt angegebene Lösung ist zu bemerken, daß entweder b oder e negativ ist, daher $2\,m^2 = -$ be. Es ergiebt sich alsdann:

$$e = \frac{m}{y^1}\left(-\ m \pm \sqrt{m^2 + 2\ x_1 y_1}\right)$$

$$b = \frac{m}{x_1}\left(-\ m \mp \sqrt{m^2 + 2\ x_1 y_1}\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{{x_1}^2}\left(m^2 + x_1 y_1 \pm m \sqrt{m^2 + 2\ x_1 y_1}\right)$$

welche Größen sich auf die Linien M_3N_3 und M_4N_4 beziehen.

c) Die beiden ersten Linien M_1N_1 und M_2N_2 sind unmöglich, wenn $m^2 < 2\ x_1 y_1$ gegeben ist; sie fallen zu einer einzigen zusammen, wenn $m^2 = 2\,x_1 y_1$. Im letztern Falle wird $e : b = x_1 : y_1$, weshalb für das möglich kleinste Dreieck NAM die Linie MN so gezogen werden muß, daß $\angle$ PAM = PMA, mithin MN parallel zur Verbindungslinie zwischen den Fußpunkten der von P auf die Axen gefällten Perpendikel ist. — Die beiden Linien M_3N_3 und M_4N_4 sind immer möglich.

d) Nach der Bedingung ist für alle 4 Linien MN das Produkt be in absoluter Hinsicht ein und dasselbe, mithin $e_1 : b_2 = e_2 : b_1$ und $e_3 : b_4 = e_4 : b_3$, d. h. es ist M_1N_2 parallel M_2N_1 und auch M_3N_4 parallel M_4N_3. Nach den obigen für e und b berechneten Werten ist aber sowohl

$$e_1 : b_2 = e_2 : b_1 = x_1 : y_1$$

$$\text{als auch} \quad e_3 : b_4 = e_4 : b_3 = x_1 : y_1$$

$$\text{und daher} \quad e_2 : b_1 = e_3 : b_4$$

d. h. es ist auch M_3N_4 parallel M_2N_1; mithin sind alle 4 Verbindungslinien M_1N_2, M_2N_1, M_3N_4 und M_4N_3 einander parallel, und nach Obigem unter c) sind dieselben auch parallel zu der Linie, welche von der Winkelebene zwischen den positiven Richtungen der Coordinatenaxen das möglich kleinste Dreieck abschneidet.

§. 39. Ein Dreieck ABC zu bestimmen, von welchem bekannt ist die Grundlinie AB, die Summe aus der Höhe und dem einen Segment, CD + AD = s, und das Verhältnis der Höhe zum andern Segment, CD : BD = m : n, (Fig. 27.)

Nimmt man A als Anfangspunkt und AB als die positive xAxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, so ergiebt sich für die zu bestimmende Spitze C des Dreiecks $y + x = s$ oder $\frac{y}{s} + \frac{x}{s} = 1$. Dieses ist aber, wenn man y und x als variabel betrachtet, ein geometrischer Ort für die Spitze C und zwar die gerade Linie MN, für welche $b = e = s$ ist. Ferner ist nach der Bedingung $CD : BD = m : n$, oder $y : (AB - x) = m : n$, also $y = -\frac{m}{n}x + \frac{m}{n}AB$, d. i., wenn man wieder y u. x als variabel betrachtet, ein zweiter geometrischer Ort für die Spitze C, nämlich die Gerade BP, welche von der yAxe $b = \frac{m}{n}AB$, gleich der 4. Proportionale zu n, m und AB, und von der xAxe $e = AB$ abschneidet. Die hienach auszuführende Konstruktion der beiden geometrischen Oerter MN und BP giebt die zu bestimmende Spitze C des gesuchten Dreiecks.

§. 40. Ein Dreieck ABC zu konstruieren, für welches wieder die Grundlinie AB, dagegen die Differenz $CD - AD = d$ und das Verhältnis $(CD + BD) : AD = m : n$ gegeben ist. (Fig. 28.)

Durch ähnliche Betrachtung wie im vorigen Paragraphen ergiebt sich hier als geometrischer Ort für die Spitze C

$$y - x = d \quad \text{oder } y = x + d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

ferner $(y + AB - x) : x = m : n$

$$\text{oder} \quad y = \frac{n+m}{n}x - AB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Gleichung 1) bedeutet die gerade Linie MN, welche von der yAxe $b = d$ und von der xAxe $e = -d$ abschneidet. Die Gleichung 2) gehört der Geraden B^1P an, für welche $AB^1 = b = -AB$ und $AP = e = \frac{n}{n+m}AB$ ist.

§. 41. Die Gleichung der Geraden für ein schiefwinkliges Coordinatensystem, welches mit dem rechtwinkligen System dieselbe Abscissenaxe und denselben Anfangspunkt, aber den Coordinatenwinkel ω hat, könnte man vermittelst §. 10. aus der Gleichung für das rechtwinklige System, aus $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$ herleiten, indem man dort die rechtwinkligen Coordinaten für den Anfangspunkt des schiefwinkligen Systems, sowie auch den Winkel zwischen den Abscissenaxen beider Systeme gleich 0 setzt. Alsdann hat man $x = t + u \cdot \cos\omega$ und $y = u \cdot \sin\omega$ zu substituieren. Das a oder $\operatorname{tg}\alpha$ aus der Gleichung $y = ax + b$ bleibt ein und dasselbe, insofern der Neigungswinkel der Geraden zu den beiden zusammenfallenden Abscissenaxen derselbe bleibt. Für das b in der Gleichung $y = ax + b$ ergiebt sich aber, wenn man das durch die Gerade abgeschnittene Stück der Ordinatenaxe mit b^1 bezeichnet, die Proportion $b : b^1 = \sin(\omega - \alpha) : \cos\alpha$, und man hat daher nach einigen Umformungen die Gleichung

$$u = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)} \cdot t + b^1$$

oder wenn man $\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$ durch a^1 setzt,

$$u = a^1 t + b^1$$

Einfacher aber ergiebt sich diese Gleichung durch unmittelbare Betrachtung der Figur 29. Für jeden Punkt P der Linie MN verhält sich im Dreieck PBC

$$PC : BC = \sin PBC : \sin BPC$$

oder $$(u - b^1) : t = \sin \alpha : \sin (\omega - \alpha)$$

also $$u = \frac{\sin \alpha}{\sin (\omega - \alpha)} \cdot t + b^1 = a^1 t + b^1$$

Das von der xAxe durch die Gerade abgeschnittene Stück e, welches im rechtwinkligen System gleich $-\frac{b}{a}$ war (S. §. 19.), wird im schiefwinkligen System die Form erhalten

$$e = -\frac{b^1}{a^1} = -b^1 \cdot \frac{\sin (\omega - \alpha)}{\sin \alpha}$$

und daher hat man für ein schiefwinkliges System ebenso wie für das rechtwinklige auch die Gleichung

$$\frac{u}{b^1} + \frac{t}{e} = +1$$

was sich ebenfalls wieder wie oben §. 19. unmittelbar aus der Zeichnung ableiten läßt.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß in allen den früheren Betrachtungen, welchen eben nur die Gleichung $y = ax + b$ oder $\frac{y}{b} + \frac{x}{e} = +1$ in Bezug auf ein rechtwinkliges System zu Grunde gelegt worden ist, auch in Bezug auf ein schiefwinkliges System sich dieselbe Form der Resultate ergeben würde, nur daß man für a und b andere Werte hätte.

§. 42. Um aus der Gleichung $y = ax + b$ die Polargleichung der Geraden abzuleiten, wenn man den Anfangspunkt des rechtwinkligen Systems als Pol und die Abscissenaxe als Polaraxe annimmt, hat man nach §. 7. zu substituieren

$$x = r \cdot \cos \omega \quad \text{und } y = r \cdot \sin \omega$$

Das $a = \text{tg}\, \alpha$ und das e bleiben dieselben, und b ist gleich $-e \cdot \text{tg}\, \alpha$. Man erhält daher aus $y = ax + b$ die Polargleichung der Geraden

$$r = \frac{e \cdot \sin \alpha}{\sin (\alpha - \omega)}$$

Auch diese Gleichung ergiebt sich unmittelbar aus dem Dreiecke APE (Fig. 30.).

Dritter Abschnitt.

Linien des zweiten Grades oder die Kegelschnitte.

A. Der Kreis.

§. 43. Die Gleichung des Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt O die rechtwinkligen Coordinaten $y = q$ und $x = p$ hat, und dessen Radius r ist. (Fig. 31.)

Für jeden Punkt $P_{(xy)}$ der Peripherie ergiebt sich nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$(\mathbf{y} - \mathbf{q})^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 = \mathbf{r}^2$$

oder $$y = q \pm \sqrt{r^2 - (x - p)^2}$$

Zur Diskussion dieser Gleichung untersuche man, welchen Wert y annimmt für 1) $x = p$, 2) $x = p \pm r$, 3) $x < p + r$, 4) $x > p - r$, 5) $x > p + r$, 6) $x < p - r$. In den beiden letzten Fällen 5) und 6) wird y imaginär, d. h. es giebt keinen Punkt dieser Linie, für welchen x größer als $(p + r)$ oder kleiner als $(p - r)$ wäre. Ferner entwickle man aus obiger allgemeinen Gleichung des Kreises $x = p \pm \sqrt{r^2 - (y - q)^2}$ und bestimme, für welche Werte von y das zugehörige x zweiwertig oder einwertig oder imaginär wird. — Ob die ganze Peripherie des Kreises in der ersten Region liegt, oder ob der Kreis mit der x Axe oder mit der y Axe einen oder zwei Punkte gemeinsam hat, ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Für einen etwaigen gemeinsamen Punkt der Peripherie mit der x Axe ist $y = 0$ und daher $x = p \pm \sqrt{r^2 - q^2}$. Je nachdem nun q kleiner oder gleich oder größer als r ist, hat der Kreis entweder zwei oder einen oder keinen Punkt mit der x Axe gemeinsam. Für gemeinsame Punkte des Kreises und der y Axe ist $x = 0$ und daher $y = q \pm \sqrt{r^2 - p^2}$, und man hat in der y Axe zwei oder einen oder keinen Punkt des Kreises, je nachdem $r > p$ oder $r = p$ oder $r < p$ ist.

Obige Gleichung gilt für jeden Kreis, in welcher Region der Mittelpunkt auch liegen möge; die Mittelpunkts-Coordinaten p und q mögen positiv oder negativ (oder auch gleich Null) und ebenso wie r in absoluter Hinsicht beliebig groß sein, jene Gleichung kann immer nur einem Kreise angehören.

Liegt der Anfangspunkt A^1 des Coordinatensystems in der Peripherie und geht die positive Abscissenaxe durch den Mittelpunkt O parallel zur früheren x Axe, so wird $p = r$ und $q = 0$, und es geht die obige Gleichung über in die Scheitelgleichung

$$y = \pm \sqrt{2rx - x^2}$$

und wenn die negative Abscissenaxe durch den Mittelpunkt des Kreises geht, mithin die Abscisse p des Kreismittelpunkts gleich $-r$ ist,

$$y = \pm \sqrt{-2rx - x^2}$$

welche Gleichung nur dann reelle Werte für y giebt, wenn x negativ und in absoluter Hinsicht höchstens gleich 2r ist.

Die allgemeine Gleichung $(y - q)^2 + (x - p)^2 = r^2$ geht für $p = q = 0$ über in die Mittelpunktsgleichung des Kreises

$$\mathbf{y^2 + x^2 = r^2}$$

oder $$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

oder auch $$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$$

§. 44. Die allgemeine Form einer Gleichung vom 2. Grade mit zwei Variabeln ist

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

Ist $B = O$ und $A = C$, so läßt sich dieselbe auf die speciellere Form bringen

$$\mathbf{y^2 + x^2 + dy + ex + f = 0}$$

oder $$(y + \tfrac{1}{2}d)^2 + (x + \tfrac{1}{2}e)^2 = \tfrac{1}{4}d^2 + \tfrac{1}{4}e^2 - f$$

und dieses ist nach §. 43. die Gleichung eines Kreises, dessen Radius gleich $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4}$ ist, und dessen Mittelpunkt die Abscisse $-\frac{1}{2}e$ und die Ordinate $-\frac{1}{2}d$ hat.

Ist $\frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{4}e^2 - f$ negativ, so hat obige Gleichung gar keine geometrische Bedeutung. Ist $\frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{4}e^2 - f = 0$, so muß auf der linken Seite der Gleichung jedes der beiden zu summierenden Quadrate gleich Null werden, und die Gleichung genügt nur dem Punkte, für welchen $y = -\frac{1}{2}d$ und $x = -\frac{1}{2}e$ ist.

§. 45. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch drei gegebene Punkte $P'_{(x_1 y_1)}$, $P''_{(x_2 y_2)}$ und $P'''_{(x_3 y_3)}$ geht.

In der Formel $(y-q)^2 + (x-p)^2 = r^2$ sind die Coordinaten p und q des Mittelpunkts und der Radius r des gesuchten Kreises zu bestimmen. Die Bedingungsgleichungen hiezu sind, da die gegebenen Punkte in der Peripherie liegen sollen,

$$(y_1-q)^2 + (x_1-p)^2 = r^2$$
$$(y_2-q)^2 + (x_2-p)^2 = r^2$$
$$(y_3-q)^2 + (x_3-p)^2 = r^2$$

Dieses giebt, wenn man zunächst r^2 eliminiert, für p und q zwei Gleichungen des ersten Grades und hieraus:

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{(y_1-y_3)(y_1^2-y_2^2+x_1^2-x_2^2)-(y_1-y_2)(y_1^2-y_3^2+x_1^2-x_3^2)}{(y_1-y_3)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)(x_1-x_3)}$$

$$\text{und } q = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x_1-x_3)(y_1^2-y_2^2+x_1^2-x_2^2)-(x_1-x_2)(y_1^2-y_3^2+x_1^2-x_3^2)}{(x_1-x_3)(y_1-y_2)-(x_1-x_2)(y_1-y_3)}$$

oder auf eine symmetrischere Form gebracht:

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{(y_1-y_2)(y_3^2+x_3^2)+(y_2-y_3)(y_1^2+x_1^2)+(y_3-y_1)(y_2^2+x_2^2)}{(y_1-y_2)\,x_3+(y_2-y_3)\,x_1+(y_3-y_1)\,x_2}$$

$$\text{und } q = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x_1-x_2)(x_3^2+y_3^2)+(x_2-x_3)(x_1^2+y_1^2)+(x_3-x_1)(x_2^2+y_2^2)}{(x_1-x_2)\,y_3+(x_2-x_3)\,y_1+(x_3-x_1)\,y_2}$$

und dann auch $r = \sqrt{(y_1-q)^2 + (x_1-p)^2}$

Die Nenner in den Werten für p und q sind in absoluter Hinsicht gleich groß, haben aber entgegengesetzte Vorzeichen.

Da die Werte für p und q nur eindeutig sind, und auch in dem Werte für r als absolute Länge des Radius nur das positive Vorzeichen vor der Wurzel brauchbar ist, so ergiebt sich hieraus der bekannte Satz, daß durch drei Punkte sich nur e i n Kreis legen läßt.

Wären nur zwei oder nur ein Punkt gegeben, so hätte man zwei oder eine Gleichung mit drei Unbekannten, woraus folgt, daß man durch zwei oder durch einen Punkt unendlich viele Kreise legen kann.

Lägen P′, P″ und P‴ in e i n e r Geraden (S. §. 23.), wäre z. B. $y_1 = y_2 = y_3$, so würde sowohl p als auch q und somit auch r gleich Unendlich, also k e i n Kreis möglich sein.

Wären P′, P″ und P‴ gleich weit vom Anfangspunkt entfernt, so wäre $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$, daher $p = q = 0$, und man hätte die Mittelpunktsgleichung $y^2 + x^2 = r^2$.

§. 46. Den geometrischen Ort für die Spitzen C derjenigen Dreiecke zu bestimmen, welche die gemeinsame Grundlinie AB = 2c und den gegebenen Winkel C an der Spitze haben.

Nimmt man AB (Fig. 32.) als x Axe und die Mitte M von AB als Anfangspunkt an, so ist in jedem Dreieck ABC, welches die gestellten Bedingungen erfüllt, die Gleichung für die Seite AC nach §. 17.

$$y = \mathrm{tg}\, A \cdot x + MN = \mathrm{tg}\, A \cdot x + c \cdot \mathrm{tg}\, A = \mathrm{tg}\, A\, (x + c) \quad . \quad . \quad 1)$$

und für die Seite BC, welche die x Axe nicht unter dem Dreieckswinkel B, sondern unter (180 — B) durchschneidet,

$$y = -\,\mathrm{tg}\, B \cdot x + MN' = -\,\mathrm{tg}\, B\, (x - c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Es ist aber für den Dreieckswinkel C, dessen Scheitelwinkel nach §. 26. der Winkel zwischen den positiven Richtungen der beiden Seiten AC und BC ist,

$$\mathrm{tg}\, C = \mathrm{tg}\, (180 - A - B) = -\,\mathrm{tg}\, (A + B) = \frac{\mathrm{tg}\, A + \mathrm{tg}\, B}{\mathrm{tg}\, A \cdot \mathrm{tg}\, B - 1}$$

und substituiert man hierin die Werte von tg A und tg B aus den Gleichungen 1) und 2), so erhält man

$$\mathrm{tg}\, C = \frac{2\, c\, y}{y^2 + x^2 - c}$$

$$\text{oder} \quad y^2 + x^2 - 2\, c \cdot \mathrm{ctg}\, C \cdot y - c^2 = 0$$

Dieses ist nach §. 44. die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Abscisse 0 und die Ordinate $c \cdot \mathrm{ctg}\, C$ hat, und dessen Radius gleich $c \cdot \mathrm{cosec}\, C$ ist.

(Vergl. die planimetrische Konstruktion vermittelst des Sehnen-Tangenten-Winkels.)

Es ist aber nur der Bogen ACB dieses Kreises der gesuchte geometrische Ort, da für den übrigen Teil der Peripherie die Ordinaten y negativ sind, wodurch der obige Wert von tg C das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt, mithin zu dem Supplementwinkel des gegebenen Winkels C gehört. (Vergl. §. 26.)

Hieraus ließe sich der bekannte planimetrische Satz folgern, daß in jedem Sehnenviereck die gegenüberliegenden Winkel Supplementwinkel sind.

§. 47. Den geometrischen Ort eines Punktes P zu bestimmen, dessen Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B ein gegebenes konstantes Verhältnis m : n zu einander haben.

Teilt man die Gerade AB (Fig. 33.) im Punkte C so in zwei Teile, daß sich AC : CB oder a : b = m : n verhält, und nimmt A als Anfangspunkt und AB als x Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, so ist für jeden Punkt P des gesuchten Ortes

$$PA : PB = a : b$$

$$\text{oder} \quad \sqrt{x^2 + y^2} : \sqrt{(x - a - b)^2 + y^2} = a : b$$

$$\text{hieraus} \quad y^2 + x^2 - \frac{2\, a^2}{a - b} \cdot x + \frac{a^2\, (a + b)}{a - b} = 0$$

d. i. die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Abscisse $\frac{a^2}{a - b}$ und die Ordinate 0 hat, und dessen Radius gleich $\sqrt{\frac{a^4}{(a - b)^2} - \frac{a^2\, (a + b)}{a - b}} = \pm \frac{ab}{a - b}$ ist. Dieser Ausdruck giebt die absolute Länge des Radius an, und es ist daher das Vorzeichen + zu wählen, wenn $a > b$, dagegen das Vorzeichen —, wenn $a < b$. Für $a = b$ wäre der Radius unendlich groß und das in C errichtete Perpendikel der gesuchte geometrische Ort. (Vergl. Planimetrie §. 151.)

§. 48. Zur Bestimmung eines Dreiecks ABC ist die Grundlinie AB gegeben, ferner die Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, $AC^2 + BC^2 = q^2$, und endlich das Verhältnis der Summe aus Grundlinie und Höhe zu einem Segmente, $(AB + CD) : AD = m : n$. (Fig. 34.)

Nimmt man A als Anfangspunkt und AB als die positive xAxe eines rechtwinkligen Systems an, so ergiebt sich zur Bestimmung eines geometrischen Ortes für die Spitze C des verlangten Dreiecks

$$x^2 + y^2 = AC^2$$

$$\text{und} \quad (AB - x)^2 + y^2 = BC^2$$

Da aber nach der Bedingung $AC^2 + BC^2 = q^2$, so erhält man

$$y^2 + x^2 - AB \cdot x + \tfrac{1}{2}(AB^2 - q^2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

d. i. nach §. 44. die Gleichung eines Kreises mit den Mittelpunkts-Coordinaten $x = \frac{1}{2}AB$ und $y = 0$ und dem Radius $\frac{1}{2}\sqrt{2q^2 - AB^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}q\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$

Ferner hat man zur Bestimmung eines zweiten geometrischen Ortes für die Spitze C nach der Bedingung

$$(AB + y) : x = m : n$$

$$\text{oder} \quad y = \frac{m}{n}x - AB$$

$$\text{oder auch} \quad \frac{y}{-AB} + \frac{x}{\frac{n}{m}AB} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

d. i. die Gleichung der Geraden B^1E, welche die Ordinaten- und Abscissenaxe in den Entfernungen $-b = AB$ und $e = \frac{n}{m}AB$ durchschneidet.

Für den zweiten Schnittpunkt C^1 der beiden geometrischen Oerter 1) und 2) wäre y negativ und C^1 würde die Spitze eines Dreiecks ABC^1 sein, das mit dem vorigen in Grundlinie AB und in $AC^2 + BC^2 = q^2$ übereinstimmt, in welchem aber nicht die Summe aus Grundlinie und Höhe, sondern die Differenz derselben zu einem Segment das Verhältnis m : n hat.

§. 49. Die Mittelpunktsgleichung eines Kreises, $y^2 + x^2 = r^2$, **ferner die Gleichung einer Geraden,** $y = ax + b$, **sind gegeben; es sollen die Coordinaten ihrer gemeinschaftlichen Punkte bestimmt werden.**

Für einen gemeinschaftlichen Punkt $P_{(x_1 y_1)}$ hat man

$$y_1^2 + x_1^2 = r^2$$

$$\text{und} \quad y_1 = ax_1 + b$$

Die Elimination des y_1 giebt

$$x_1^2 + \frac{2ab\,x_1}{a^2 + 1} = \frac{r^2 - b^2}{a^2 + 1}$$

$$\text{und hieraus} \quad x_1 = \frac{-ab \pm \sqrt{r^2(a^2 + 1) - b^2}}{a^2 + 1}$$

$$\text{und somit} \quad y_1 = \frac{b \pm a\sqrt{r^2(a^2 + 1) - b^2}}{a^2 + 1}$$

Wenn also $r^2 (a^2 + 1) > b^2$, so hat man zwei Wertpaare für x_1 und y_1, und die Gerade ist Sekante des Kreises.

Wenn $r^2 (a^2 + 1) = b^2$, so hat jede der beiden Coordinaten x_1 und y_1 nur einen Wert, d. h. die Gerade ist Tangente für den Kreis.

Ist $r^2 (a^2 + 1) < b^2$, so wird sowohl x_1 als auch y_1 imaginär, d. h. Kreis und Gerade haben keinen gemeinschaftlichen Punkt.

Da $(a^2 + 1) = (tg^2\alpha + 1) = sec^2\alpha$, so würden diese Folgerungen auch aus der Zeichnung (Fig. 35.) sich ergeben.

§. 50. Beim Kreise wie auch bei jeder anderen krummen Linie oder Curve versteht man unter Tangential-Linie (Tangente) eine Gerade, die mit der Curve einen einzelnen Punkt gemeinschaftlich hat, und zwar so, daß die unmittelbar vor und nach diesem Berührungspunkte befindlichen Punkte der Geraden nicht auf verschiedenen Seiten, sondern auf einer und derselben Seite der Curve liegen.

Wenn in der analytischen Geometrie von der Länge einer Tangente (T) die Rede ist, so hat man darunter das Stück PT (Fig. 36.) der unendlichen Tangente zu verstehen, welches zwischen dem Berührungspunkte P und dem Schnittpunkte T in der xAxe liegt.

Die Gerade, welche im Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht (normal) steht, und zwar wieder vorzugsweise das Stück PN derselben zwischen dem Berührungspunkte P und dem Schnittpunkte N in der Abscissenaxe, heißt Normale (N).

Das Stück TQ der xAxe vom Schnittpunkt T der Tangente bis zum Fußpunkte Q der Berührungsordinate heißt Subtangente (St).

Das Stück QN der xAxe vom Fußpunkte Q der Berührungsordinate bis zum Schnittpunkte N der Normalen heißt Subnormale (Sn).

Bei der Subtangente und der Subnormalen hat man nicht nur die absolute Länge derselben, sondern stets auch ihr Vorzeichen zu berücksichtigen, ob nämlich die genannten Strecken von T nach Q und von Q nach N mit der positiven oder mit der negativen Richtung der xAxe zusammenfallen.

§. 51. Ein Kreis ist durch seine Mittelpunktsgleichung $y^2 + x^2 = r^2$ gegeben. Es sind für den bestimmten Punkt $P_{(x_1 y_1)}$ in der Peripherie desselben (T), (St), (N) **und** (Sn) **zu berechnen.** (Fig. 37.)

1) Die Gleichung einer Secante, welche durch den bestimmten Punkt $P'_{(x_1 y_1)}$ und durch irgend einen anderen Punkt $P''_{(x_2 y_2)}$ der Peripherie geht, ist nach §. 23.

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

Denkt man sich nun diese Secante um den Punkt P' so weit gedreht, daß P'' mit P' zusammenfällt, mithin $x_2 = x_1$ und $y_2 = y_1$ wird, so führt der Quotient $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ auf den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Da aber P' und P'' in der Peripherie des Kreises liegen, so hat man auch die algebraischen Gleichungen

$$y_1^2 + x_1^2 = r^2$$

und $$y_2^2 + x_2^2 = r^2$$

Hieraus ergiebt sich $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$

und daher die Gleichung jener Secante

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1)$$

und setzt man nun $x_2 = x_1$ und $y_2 = y_1$, so erhält man die Gleichung der Tangente im Berührungspunkte $(x_1 y_1)$:

$$(\mathbf{y} - \mathbf{y_1} = -\frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{y_1}}(\mathbf{x} - \mathbf{x_1})$$

oder $$\mathbf{y_1 y + x_1 x = r^2}$$

oder auch $$\frac{y}{\left(\frac{r^2}{y_1}\right)} + \frac{x}{\left(\frac{r^2}{x_1}\right)} = 1$$

(Vergl. die 2. Form dieser Tangentialgleichung mit der Mittelpunktsgleichung §. 43.)

2) Aus dieser Gleichung der Tangente ergiebt sich nach §. 28. die Gleichung der Normalen im Berührungspunkte $(x_1 y_1)$

$$y - y_1 = +\frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$$

oder $$\mathbf{y_1 = \frac{y_1}{x_1} x}$$

Diese Gleichung drückt nach §. 16. den bekannten Satz aus, daß die Normale beim Kreise immer durch den Mittelpunkt desselben (hier Anfangspunkt des Coordinatensystems) gehen muß; die Punkte N und O fallen zusammen.

Die Richtungskonstante der Tangentengleichung ist $-\frac{y_1}{x_1}$. Sind daher x_1 und y_1 beide positiv, d. h. liegt der Berührungspunkt in der ersten Region, so ist die Tangente des Neigungswinkels der Tangente zur positiven Richtung der xAxe negativ, mithin Winkel P^1TX oder $\angle T > 90^0$. Für die Berührungspunkte in der zweiten Region ist x_1 negativ und y_1 positiv, daher $-\frac{y_1}{x_1}$ oder $\tan T$ positiv, folglich $\angle T$ spitz. Für Berührungspunkte in der dritten Region ist $\angle T$ wieder stumpf und in der vierten Region wieder spitz.

3) Die Länge der Tangente P^1T kann nun auf analytischem Wege nach §. 22. bestimmt werden, indem man zunächst die Abscisse des Punktes T, dessen Ordinate Null ist, aus der Tangentengleichung $y_1 y + x_1 x = r^2$ berechnet, mithin $OT = \frac{r^2}{x_1}$, u. s. w.

Man findet P^1T auch aus dem rechtwinkligen Dreiecke P^1QT:

$$P^1T = \frac{y_1}{\sin T} = y_1 \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 T} = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2} = y_1 \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2}}$$

und da $y_1^2 + x_1^2 = r^2$, so ist die Tangente P^1T oder

$$(\mathbf{T}) = \pm \frac{\mathbf{y_1}}{\mathbf{x_1}} \cdot \mathbf{r}$$

in welchem Ausdruck das Vorzeichen immer so zu wählen ist, daß derselbe positiv wird.

Auch aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke OQP^1 und OP^1T ließe sich dieses Resultat erzielen.

4) Der Weg von T über O nach Q ist $-TO+OQ$, also $=-\frac{r^2}{x_1}+x_1=\frac{-r^2+x_1^2}{x_1}$ $=-\frac{y_1^2}{x_1}$. Es ist daher die Subtangente TQ oder

$$(\mathbf{St})=-\frac{\mathbf{y_1}^2}{\mathbf{x_1}}$$

für positive x also negativ und für negative Abscissen positiv.

5) Nach der Gleichung der Normalen sind die Coordinaten des Punktes N beide gleich Null und daher nach §. 22. (oder auch unmittelbar nach dem Pythagoräischen Lehrsatz) $NP^1=\sqrt{x_1^2+x_1^2}$ $=r^2$, mithin ist die Normale für jedes positive oder negative x_1

$$(\mathbf{N})=+\mathbf{r}$$

6) Die Subnormale QN endlich ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatz $\sqrt{(N)^2-y_1^2}$ $=\sqrt{r^2-y_1^2}=\sqrt{x_1^2}$ oder der Weg von Q über O nach N ist $-QO+ON=-x_1+0$, mithin

$$(\mathbf{Sn})=\mp\mathbf{x_1}$$

jenachdem x_1 positiv oder negativ ist.

§. 52. Ist der Kreis durch eine der Scheitelgleichungen $y^2=\mp 2rx-x^2$ (§. 43.) gegeben, so erhält man durch ähnliche Betrachtungen oder durch Coordinaten-Transformation, jenachdem der Anfangspunkt des neuen Systems um $+r$ oder um $-r$ vom Mittelpunkt entfernt ist, die Tangentialgleichung

$$y-y_1=-\frac{x_1\pm r}{y_1}(x-x_1)$$

oder $$y_1y=\mp 2r\cdot\frac{x_1+x}{2}-x_1x$$

Ist allgemein der Kreis durch die Gleichung $(y-q)^2+(x-p)^2=r^2$ gegeben, so ist die Gleichung der Tangente im Berührungspunkte $(x_1 y_1)$

$$(y_1-q)(y-q)+(x_1-p)(x-p)=r^2$$

Vergl. die Formen dieser Tangentialgleichungen mit den zugehörigen Kreisgleichungen.

§. 53. Von einem bestimmten Punkte $P_{(mn)}$ außerhalb eines gegebenen Kreises, $y^2+x^2=r^2$, eine Tangente an denselben zu legen; die Coordinaten des Berührungspunktes $P^1_{(x_1y_1)}$ und die Tangentenlänge PP^1 sind zu bestimmen. (Fig. 38.)

1) Die Gleichung der Tangente im Berührungspunkte $P_{(x_1y_1)}$ ist nach §. 51.

$$y_1y+x_1x=r^2$$

und da der Punkt $P_{(mn)}$ in derselben liegen soll, so hat man die algebraische Gleichung

$$y_1n+x_1m=r^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 1)$$

Da aber $P^1_{(x_1y_1)}$ ein Punkt in der Peripherie des gegebenen Kreises ist, hat man auch eine zweite algebraische Gleichung

$$y_1^2+x_1^2=r^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 2)$$

Durch Elimination des y_1 aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$x_1 = \frac{mr^2 \pm nr\sqrt{m^2 + n^2 - r^2}}{m^2 + n^2}$$

und denn $$y_1 = \frac{nr^2 \mp mr\sqrt{m^2 + n^2 - r^2}}{m^2 + n^2}$$

Die doppelten Vorzeichen vor der Wurzel zeigen, daß zwei Tangenten von $P_{(mn)}$ aus an den Kreis gelegt werden können.

2) Soll der Berührungspunkt $(x_1 y_1)$ durch Konstruktion bestimmt werden, ohne daß man nötig hätte, die Coordinaten desselben zu berechnen, so kann man auch in Gleichung 1) die Berührungs-Coordinaten x_1 und y_1 durch variable (laufende) Coordinaten ersetzen, in Folge dessen die Gleichung selbst nach §. 34. einen geometrischen Ort für den gesuchten Berührungspunkt $(x_1 y_1)$ bedeutet. Es ist aber alsdann

$$ny + mx = r^2 \quad \text{oder} \quad \frac{n}{r^2}\,y + \frac{m}{r^2}\,x = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

die Gleichung einer Geraden MN, welche von den Coordinatenaxen die Stücke $ON = \frac{r^2}{n}$ und $OM = \frac{r^2}{m}$ abschneidet und demgemäß zu konstruieren ist. Die Gleichung 3) ist die Gleichung der Berührungssehne $P'P''$, d. i. der Polaren des Pols $P_{(mn)}$. (Planim. §. 160.)

Da $OM = \frac{r^2}{m}$ unabhängig von der Ordinate n des Punkts P ist, so ergiebt sich hieraus der Satz, daß für jeden beliebigen Punkt des Perpendikels PQ die Polare durch einen und denselben Punkt M geht. (Planim. §. 163.)

Ferner läßt $OM = \frac{r^2}{m}$ erkennen, daß, wenn QO bis zum Schnittpunkt A^1 in der Peripherie verlängert wird, Q und M, A und A^1 vier harmonische Punkte sind. Ebenso ergiebt sich aus $ON = \frac{r^2}{n}$, daß BB^1 durch die Punkte Q^1 und N harmonisch geteilt ist. (Planim. §. 159.)

3) Man kann auch beide Gleichungen 1) und 2) von einander subtrahieren und dann in der erhaltenen Gleichung die Berührungs-Coordinaten x_1 und y_1 durch laufende Coordinaten ersetzen. Hiedurch erhält man einen neuen geometrischen Ort für denselben Punkt $(x_1 y_1)$

$$y^2 - yn + x^2 - xm = 0$$

oder $$(y - \tfrac{1}{2}\,n)^2 + (x - \tfrac{1}{2}\,m)^2 = (\tfrac{1}{2}\,m)^2 + (\tfrac{1}{2}\,n)^2 = (\tfrac{1}{2}\,OP)^2$$

d. i. nach §. 43. die Gleichung des Kreises mit dem Durchmesser OP, und dieses erinnert an die bekannte planimetrische Lösung dieser Aufgabe.

4) Die Strecke PP′ erhält man entweder analytisch nach §. 22. oder einfacher aus den rechtwinkligen Dreiecken OPQ und OPP′ vermittelst des Pythagoräischen Lehrsatzes

$$PP' = \sqrt{m^2 + n^2 - r^2}$$

Wäre der Mittelpunkt O nicht der Anfangspunkt des Coordinatensystems, sondern bezögen sich die Coordinaten m und n des Punktes P auf ein System, für welches der Mittelpunkt O die Coordinaten p und q hat, so ist

$$PP' = \sqrt{(m - p)^2 + (n - q)^2 - r^2}$$

§. 54. Gegeben sind die Gleichungen zweier Kreise in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der eine Kreismittelpunkt und dessen xAxe die Centrallinie c beider Kreise ist. Es sollen die gemeinschaftlichen Punkte der Kreise durch ihre Coordinaten bestimmt werden.

Gegeben $y^2 + x^2 = r^2$ und $y^2 + (x - c)^2 = r_1^2$

Für den gemeinschaftlichen Punkt $(x_1 y_1)$ ergiebt sich

$$y_1^2 + x_1^2 = r^2$$

und $$y_1^2 + (x_1 - c)^2 = r_1^2$$

und hieraus erhält man durch Subtraktion

$$x_1 = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2}{2c}$$

und alsdann $y_1 = \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(c + r + r_1)(c + r - r_1)(c - r + r_1)(-c + r + r_1)}$

(Vergl. Planim. §. 175.3).

Man hat daher zwei reelle Werte für y_1, d. h. zwei gemeinschaftliche Punkte beider Kreise, wenn die Summe je zweier von den drei Größen c, r und r_1 größer ist als die dritte, wenn also $r + r_1 > c > \pm (r - r_1)$, insofern dann jeder Factor des Radicanden positiv sein muß. Die Abscisse x_1 ist aber eine und dieselbe für beide Werte von y_1, woraus sich ergiebt, daß die gemeinschaftliche Sehne zweier sich schneidender Kreise auf der Centrallinie senkrecht steht.

Ist die Summe zweier von jenen drei Größen, c, r und r_1 gleich der dritten, wenn also $c = r + r_1$ oder $c = \pm (r - r_1)$, so ergiebt sich nur der eine Wert $y_1 = 0$; die Kreise haben nur einen gemeinschaftlichen Punkt, und der in der Centrallinie liegende Berührungspunkt hat die Abscisse $x_1 = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2}{2c}$.

Ist die Summe aus zwei von jenen drei Größen kleiner als die dritte, wenn also $r + r_1 < c$ oder $c < \pm (r - r_1)$, so wird die Wurzel imaginär; die Kreise haben keinen Punkt gemeinschaftlich.

§. 55. Die Gleichung für die gemeinschaftliche Sehne oder Sekante zweier sich schneidender Kreise herzuleiten.

Gegeben $$(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$$

und $$(y - q)^2 + (x - p)^2 = r_1^2$$

Die Subtraktion dieser beiden Gleichungen von einander giebt nach §. 34. einen dritten geometrischen Ort für die gemeinschaftlichen Punkte beider Kreise:

$$2y(b - q) + 2x(a - p) = (b^2 - q^2) + (a^2 - p^2) - (r^2 - r_1^2)$$

oder $$y = -\frac{a - p}{b - q}x + \frac{(b^2 - q^2) + (a^2 - p^2) - (r^2 - r_1^2)}{2(b - q)} \quad . \; . \; 1)$$

Die Centrallinie der beiden Kreise mit den Mittelpunkten (a, b) und (p, q) hat die Gleichung $y - b = \frac{b - q}{a - p}(x - a)$, und somit geht auch hieraus nach §. 27. hervor, daß die obige gerade Linie 1) senkrecht zur Centrallinie ist.

Für zwei sich berührende Kreise muß die Linie 1) die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte beider Kreise sein.

§. 56. Wenn nun auch die beiden gegebenen Kreise keinen gemeinschaftlichen Punkt haben, so hat doch immer die Gerade, welche in der durch Gleichung 1) des vorigen Paragraphen ausgedrückten Beziehung zu den beiden Kreisen steht, den Namen Chordale (Potenzlinie). (Planim. §. 139.)

Die Gleichung der Chordalen ist durch Subtraktion der beiden Kreisgleichungen entstanden, daher muß auch für jeden Punkt ($x_1 y_1$) dieser Chordalen

$$\{(y_1-b)^2 + (x_1-a)^2 - r^2\} - \{(y_1-q)^2 + (x_1-p)^2 - r_1^2\} = 0 \text{ sein.}$$

Nun ist aber der Minuend dieser Differenz nach §. $53{,}_4$ das Quadrat über der Tangente an den Kreis mit den Mittelpunkts-Coordinaten a und b und dem Radius r, und der Subtrahend das Quadrat über der Tangente des Kreises, dessen Radius r, und dessen Mittelpunkts-Coordinaten p und q sind. Daher ist die Chordale zweier Kreise der geometrische Ort für alle diejenigen Punkte, von welchen aus man immer **gleiche** Tangenten an die beiden Kreise legen kann. Es müssen daher auch die Halbierungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise in der Chordalen der Kreise liegen; und hieraus ergiebt sich eine einfache planimetrische Konstruktion der Chordalen zweier Kreise. (Planim. §. 142.)

Ferner ergiebt sich auch (nach §. 34.) für drei Kreise, daß die Chordalen je zweier dieser Kreise sich in **einem** Punkte schneiden müssen.

Prof. Dr. Ellinger.

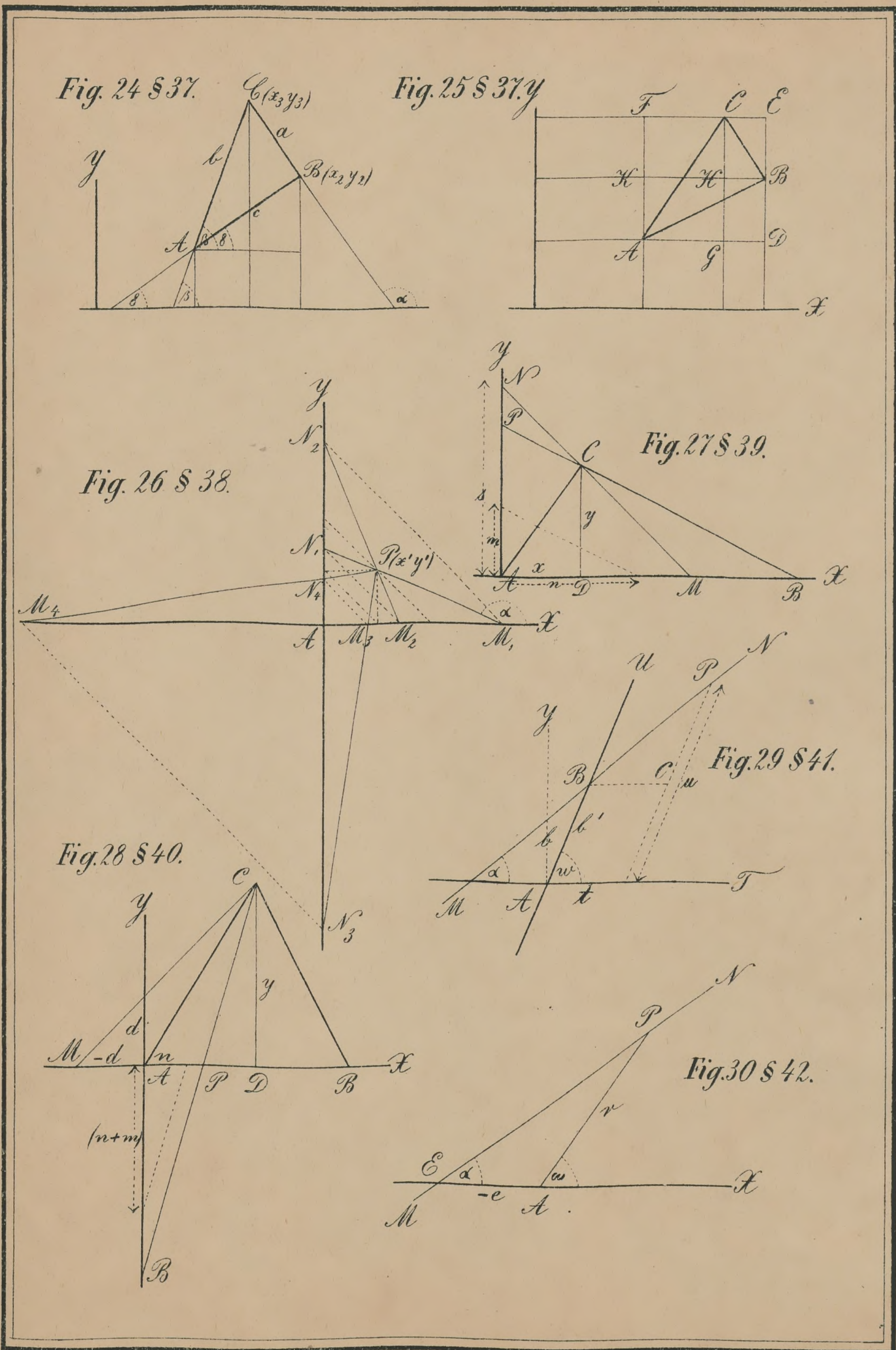

Fig. 24 § 37. Fig. 25 § 37. Fig. 26 § 38. Fig. 27 § 39. Fig. 28 § 40. Fig. 29 § 41. Fig. 30 § 42.

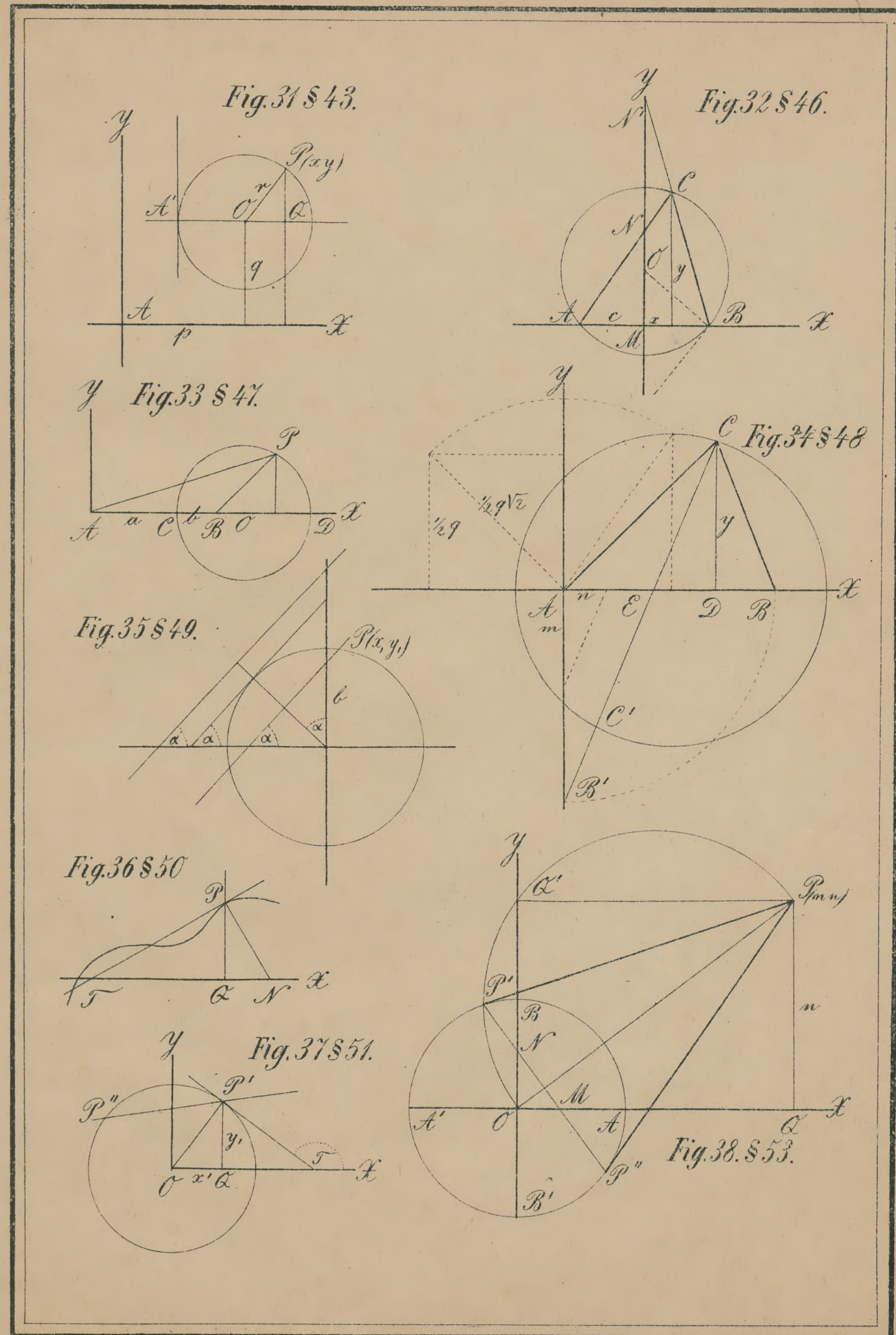

Fig. 31 § 43. Fig. 32 § 46. Fig. 33 § 47. Fig. 34 § 48. Fig. 35 § 49. Fig. 36 § 50. Fig. 37 § 51. Fig. 38. § 53.

Schulnachrichten.

A. Lehrverfassung.

Prima. Ordinarius: Professor Dr. Ellinger.

Religion, 2 St. w. Kirchengeschichte bis zur Reformation. Lektüre des Ev. Johannis; Wiederholung früherer Pensen. — **Deutsch,** 3 St. w. Litteraturgeschichte: Klassische Periode bis Goethe, Lektüre: Gellert: Das Los in der Lotterie, Lessing: Nathan, Minna von Barnhelm, Laokoon; Disponierübungen, freie Vorträge, Aufsätze: 1) Wem Gott will rechte Gunst erweisen, den schickt er in die weite Welt. 2) Die Herrschaft des Menschen und seine Ohnmacht gegenüber der Natur. 3) Wodurch reizt uns das Alte, wodurch das Neue? 4) Wer gar zu viel bedenkt, wird wenig leisten. 5) Nicht in die ferne Zeit verliere Dich, den Augenblick ergreife, der ist Dein. 6) Hat Schiller recht, wenn er sagt: „Es gab schön're Zeiten als die unsern, das ist nicht zu streiten.“? 7) Was gelten soll muß wirken und muß dienen. 8) Ueber die Mittel des bildenden Künstlers und des Dichters (nach Lessings Laokoon). 9) Eine Gunst ist die Notwendigkeit. 10) Zufrieden laßt uns sein nur mit des Glückes Gaben, mit dem nie was wir sind, mit dem nur, was wir haben. (Ab.-A.) — **Latein,** 3 St. w. Lektüre: Livius I, Cicero de imp. Cn. Pompeji, Vergil. II u. III. Wiederholung der Grammatik und Metrik. Wortbildungslehre nach Schultz §. 178—188 u. 202—203. — **Französisch,** 4 St. w. Lektüre von Voltaire: Mérope und Molière; Misanthrope sowie der Abschnitte von Lacretelle, Guizot, Delavigne, de Vigny, Lamartine aus Herrig u. Burguy: La France littéraire. Schwierigere Gebiete der Grammatik, namentlich Wortbildung; freie Vorträge, Uebung des Briefstils in Extemporalien, Exercitien nach deutschem Originaltext, Aufsätze: 1) A. A force de forger on devient forgeron, B. Le prince Eugène. 2) L'ancienne Germanie. 3) Les anciens Germains. 4) Quel mélange de peuples romains et germains s'est fait aux quatrième et cinquième siecles? 5) Les Ostrogoths. 6) Contenu de Mérope par Voltaire. 7) Vie d'Alaric. 8) Origine de la vie monastique. 9) Saint Benoît et les Bénédictins. 10) Henri IV et Grégoire VII (Ab.-A.). 11) Plus on aime quelqu'un, moins il faut q'uon le flatte: A ne rien abandonner le pur amour éclate. 12) La seconde guerre punique. — **Englisch,** 3 St. w. Lektüre: Herrig: Gray, Wordsworth, Southey, Coleridge, Tennyson, Macaulay, Shakespere: King Lear a. 1. Wiederholung der Grammatik nach Baskerville Engl. gramm., Exercitien, Extemp., freie Vorträge, Aufsätze: 1) England under Cromwell. 2) Francis I of France. 3) Alaric, king of the Visigoths. 4) Charles XII of Sweden. 5) Napoleon's expedition to Russia.

6) The first act of King Lear. 7) The merits of the Great Elector. 8) The battle of Waterloo. — **Geschichte,** 2 St. w. Geschichte des Mittelalters bis zum Zeitalter der Reformation. — **Geographie,** 1 St. w. Die Kulturpflanzen und Tiere, die Hauptprodukte der außereuropäischen Erdteile und ihr Austausch im Weltverkehr. — **Naturwissenschaften,** 6 St. w. a. Physik, 3 St. Mechanik und Lehre vom Lichte. b. Chemie, 3 St. Schluß der Lehre von den Metallen. Wiederholung beider Gebiete mit zahlreichen Uebungsaufgaben. — **Mathematik,** 5 St. w. Wiederholung der Planimetrie, analytische Geometrie, combinatorische Operationen und die unbestimmten Coefficienten; der binomische Lehrsatz für beliebige Exponenten. — **Zeichnen,** 3 St. w. Freihandzeichnen nach Gypsen und großen Vorlagen aux deux crayons, architektonisches Reißen, Plan- und Maschinenzeichnen. Perspektivisches Zeichnen in 1 St. — **Gesang,** 1 St. w. comb. mit II—IV. Lieder, Motetten, Psalmen für gemischten Chor. — **Litauisch** (fakultat.), comb. einzelne Schüler der I bis III, 2 St. w. Einübung der Grammatik nach Voelkel: Lit. Elementarbuch, Lektüre von Rhesas Aisopas für die geübteren.

Secunda. Ordinarius: Oberlehrer Mogk.

Religion, 2 St. w. Heilsgeschichte des A. T. verbunden mit der Lektüre wichtiger Abschnitte aus den Psalmen, Hiob und den Propheten. Wiederholung von Kirchenliedern. — **Deutsch,** 3 St. w. Lektüre: Schillers Maria Stuart, die Piccolomini, Jungfrau von Orleans, Goethes Götz von Berlichingen. Disponierübungen, Vorträge im Anschluß an die Lektüre, Aufsätze: 1) a. Was bewundern wir an den alten Römern? b. Inhaltsangabe von Wallensteins Lager. 2) a. Man lebt nur einmal in der Welt. b. Die Zunge, das wohlthätigste und verderblichste Glied des Menschen. 3) Charakter Sir Paulets in Maria Stuart. 4) Burleigh und Talbot in Maria Stuart. 5) Ueber das Lesen. 6) Max Piccolomini in Schillers Wallenstein. 7) Geschichte der Johanna d'Arc nach Schiller. 8) a. Der Sänger nach Goethe. b. Die Vorboten des Winters. 9) Woran erinnert und wozu ermahnt uns das neue Jahr? 10) Das Leben am Hofe des Bischofs von Bamberg. — **Latein,** 4 St. w. Curtius V und VI. Ovid. Metam XIV. 155—309, 436—633, 772—851, XV 1—57, 745—879. Syntax nach Schultz §. 236—239. Wiederholung der übrigen Teile der Grammatik, 14tägige Exercitien, Extemporalien. — **Französisch,** 4 St. w. Lektüre: Ploetz, lect. chois., sect. IV, V, IX, X: Mélesville: le bourgmestre de Sardam. Syntax nach Ploetz, Sprechübungen, wöchentliche Exercitien und Extemporalien. Einzelne freie Arbeiten der Oberabteilung. — **Englisch,** 3 St. w. Lektüre ausgewählter Stücke aus Plates Blossoms, Grammatik nach Plates Lehrgang II, Sprechübungen, Exercitien, Extemporalien, einzelne freie Arbeiten der Obersecundaner. — **Geschichte,** 2 St. w. Griechische Geschichte bis zum Tode Alexanders des Großen; Repetition der römischen und preußischen Geschichte. — **Geographie,** 1 St. w. Europa außer Deutschland, Repetition der übrigen Erdteile und Deutschlands. — **Naturwissenschaften,** 6 St. w. a. Im S.: Zoologie, 2 St. w. Genauere Beschreibung des menschlichen Körpers in anatomischer und physiologischer Beziehung mit mikroskopischen Demonstrationen, Wiederholung des ganzen Gebiets und der Botanik. b. Im W.: 2 St. w. Geologie und Wiederholung der Mineralogie mit Benutzung der Anstaltssammlungen. c. Physik, 2 St. w. Lehre vom Licht, von der Wärme, aus der Elektricitätslehre. d. Chemie, 2 St. w. Von den Nichtmetallen, zum Teil mit Experimenten; vielfache Uebungsaufgaben. — **Mathematik,** 5 St. w. Erweiterung der früheren Abschnitte aus der

Planimetrie, Chordale, Transversalen, harmonische Teilungen; die Anwendung der Algebra auf Planimetrie, Gleichungen des 1. und 2. Grades und ihre Anwendung auf Aufgaben aus dem praktischen Leben. — **Zeichnen,** 2 St. w. Freihandzeichnen nach großen Vorlagen in Kreide und Blei, Projektionszeichnungen. — **Gesang,** 1 St. w., s. Prima. — **Litauisch,** 2 St. w., s. Prima.

Tertia A. Ordinarius: Oberlehrer Voelkel.

Religion, 2 St. w. Lektüre der Apostelgeschichte, Erklärung des 3. Artikels und des 4. und 5. Hauptstücks nach Weiß; Reformationsgeschichte, Wiederholen und Erlernen von Kirchenliedern. — **Deutsch,** 3 St. w. Lektüre ausgewählter prosaischer und poetischer Stücke aus Hopf und Paulsiek, Goethes Hermann und Dorothea; Memorieren von Gedichten, Aufsätze. — **Latein,** 5 St. w. Caesar bell. Gall. I, Phaedrus I u. II, Memorierübungen, Syntax nach Schultz §. 239—291. Wiederholung der Etymologie und Kasuslehre im Anschluß an die deutschen Stücke in Ellendt: p, 127—192. 14tägige Exercitien, Extemporalien. — **Französisch,** 4 St. w. Lektüre von Voltaire: Histoire de Charles XII, V und VI. Die gesamte Formenlehre und das Wichtigste aus der Syntax, im Anschluß an die Uebersetzungsstücke 21—48 aus Ploetz, Syntax. Sprechübungen im Anschluß an Ploetz pet. vocab. 87—107 und die Lehmannschen Anschauungsbilder; Diktate, Exercitien, Extemporalien. — **Englisch,** 4. St. w. Lektüre von W. Scott, Tales of a grandfather, ed. Schaub. XVII—XXI. Einübung der Grammatik nach Plate I, 32—66; Diktate, Exercitien. Extemporalien. — **Geschichte,** 2 St. w. Geschichte des preußisch-brandenburgischen Staates bis 1815, die Hauptereignisse der neuesten Zeit. — **Geographie,** 2 St. w. Physische und politische Geographie der preußischen Monarchie. — **Naturkunde,** 2 St. w. Im S.: Mineralogie. Im W.: Die Grundzüge der Physik. — **Mathematik,** 6 St. w. Wiederholung der früheren Pensa aus der Planimetrie, namentlich an Konstruktionsaufgaben und Uebungssätzen; Verhältnisse der Linien und Flächenräume. Begründung der Gesetze für die 3 ersten Rechenstufen mit Ausnahme der Logarithmen. Gleichungen des 1. Grades und ihre Anwendung auf praktische Aufgaben. — **Zeichnen,** 2 St. w. Freihandzeichnen nach ausgeführten Ornamenten, Linearzeichnen. — **Gesang,** 1 St. w., s. Prima. — **Litauisch,** 2 St. w., s. Prima.

Tertia B. Ordinarius: ord. Lehrer Dr. Siemering.

Religion, 2 St. w. Lektüre des Ev. Matthäi. Erklärung des 1. und 2. Artikels nach Weiß. Vermittelung des Verständnisses des christlichen Kirchenjahres und des evangelischen Gottesdienstes. Wiederholen und Erlernen von Kirchenliedern. — **Deutsch,** 3 St. w. Lektüre aus Hopf und Paulsiek, das Wichtigste aus der Satzlehre und Metrik, orthographische und Disponierübungen, 3wöchentliche Aufsätze, Memorieren von Gedichten. — **Latein,** 5 St. w. Lektüre: Nepos: Cimon, Lysander, Alcibiades, Thrasybulus, Conon., Iphicrates, Chabrias, Timotheus. Grammatik nach Schultz §. 189—235 und Repetition der Formenlehre, dazu Ellendt Uebungsstücke p. 58—104. 14tägige Exercitien, Extemporalien. — **Französisch,** 4 St. w. Lektüre von Rollin: Hommes illustres. Erlernen der unregelmäßigen verba und Einüben der ersten 20 Lektionen aus Ploetz: Syntax. Memorieren von Ploetz pet. vocab. 45—80, wöchentliche Exercitien, Extemporalien, Diktate. — **Englisch,** 4 St. w. Plates Lehrgang I, lect 1—37, Diktate, Exercitien. — **Geschichte,** 2 St. w. Deutsche Geschichte bis 1648. — **Geographie,** 2 St. w. Politische und physische Geographie von Deutschland, Dänemark, Belgien, Holland, Schweiz. — **Naturbeschreibung,** 2 St. w. I. S. Botanik: Einübung des Linnéschen Systems, vom innern Bau der Pflanzen. Im W. Zoologie: Von den Urtieren bis zu den Gliedertieren; Wiederholungen. — **Mathematik,** 6 St. w. a. Praktisches Rechnen, 1 St. b. Algebra, 2 St. Buchstabenrechnung mit ganzen und gebrochenen Zahlen, Lehre von den Potenzen, Gleichungen des ersten Grades mit 1 Unbekannten. c. Geometrie, 3 St. Wiederholung der früheren Pensa, Lehre von den Vierecken, vom Kreise, von der Berechnung der Flächen, zahlreiche Uebungsaufgaben. — **Zeichnen,** 2 St. w. Freihandzeichnen nach Wandtafeln von Hertle und Jacobsthal, Linearzeichnen. — **Gesang,** 1 St. w., s. Prima.

Quarta A. und B. Ordinarius von A: ord. Lehrer Knaake, von B: ord. Lehrer Duvinage.

Religion, 2 St. w. Einführung in die heilige Schrift, verbunden mit der Lektüre ausgewählter Abschnitte des A. T. Erklärung des 1. und 3. Hauptstückes und der Sonntagsevangelien, Erlernen von Kirchenliedern. — **Deutsch,** 3 St. w. Lektüre von Hopf und Paulsiek mit Erklärung und Wiedergabe des Inhalts, Lehre von den Präpositionen, Konjunktionen, der Interpunktion, Satzlehre, Deklamationsübungen, 14tägige Aufsätze, abwechselnd mit Diktaten; Einübung der neuen Orthographie. — **Latein,** 6 St. w. Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre, unregelmäßige verba, einige Syntaktische Regeln, Lektüre: Ellendt II, 1—44, Eutrop. in A: IV—VI, in B: VI—VIII; wöchentlich abwechselnd Exercitien und Extemporalien. — **Französisch,** 5 St. w. Ploetz, Elementargr. 61—112 und einige zusammenhängende Lesestücke, Memorieren von Ploetz: pet. vocab. 20—50, Exercitien, Diktate, Extemporalien. — **Geschichte,** 2 St. w. Kurze Uebersicht der orientalischen Geschichte, die griechische bis zum Tode Alexanders des Großen, römische bis zur Kaiserzeit. — **Geographie,** 2 St. w. Europa außer Deutschland, Dänemark, Holland, Belgien, Schweiz; Repetition des Pensums der Quinta. — **Naturbeschreibung,** 2 St. w. Im S. Botanik: genauere Beschreibung der wichtigsten Pflanzen des Linnéschen Systems. Im W. Zoologie: von den Reptilien, Amphibien und Fischen, Wiederholung der Rückgrattiere und der Abschnitte von den Säugetieren und Vögeln. — **Mathematik,** 6 St. w. a. Geometrie: Sätze von den Linien, Winkeln, Dreiecken, einschließlich der Kongruenzsätze, leichte Konstruktionsaufgaben. b. Rechnen: Wiederholung der Rechnung mit gewöhnlichen und Decimalbrüchen, Rechnungen des gewöhnlichen Lebens, die Anfänge der Buchstabenrechnung. — **Zeichnen,** 2 St. w., nach Vorzeichnung des Lehrers an der Wandtafel. — **Schreiben,** 2 St. w., nach Vorschriften. — **Gesang,** 1 St. w., s. Prima.

Quinta A. und B. Ordinarius von A: ord. Lehrer Berent, von B: ord. Lehrer Polenz.

Religion, 2 St. w. Biblische Erzählungen des N. T. Erlernen der 5 Hauptstücke mit der Lutherschen Erklärung, Wiederholen und Erlernen von Kirchenliedern und Sprüchen. — **Deutsch,** 4 St. w. Lektüre von Hopf und Paulsiek; die starke und schwache Deklination und Konjugation, die Lehre vom erweiterten und zusammengezogenen Satze; Einübung der neuen Orthographie, Deklamationsübungen, wöchentliche Diktate, Aufsätze. — **Latein,** 6 St. w. Wiederholung des Pensums der Sexta, verba anomala und defectiva, praep., conjunct., acc. c. infin., abl. absol; verbunden mit Uebersetzen aus Ellendt I, 42—66, wöchentlich Exercitien, abwechselnd mit Extemporalien. — **Französisch,** 5 St. w. Leseübungen, Deklination, Zahlwörter, Hilfszeitwörter und regelmäßige Konjugation im Anschluß an Ploetz Elementargrammatik Lekt. 1—72. Memorieren von Ploetz pet. vocab. 1—20. Diktate, Exercitien, Extemporalien. — **Geschichte** und **Geographie,** 3 St. w. a. Geschichte: Biographische Bilder aus der persischen, griechischen und römischen Geschichte. b. Geographie: Asien, Afrika, Amerika und Australien nach Daniel §. 36—70. — **Naturbeschreibung,** 2 St. w. Im S. Botanik: Einüben des Linnéschen Systems und Bestimmen der Pflanzen nach demselben. Im W. Zoologie: Wiederholung der Abschnitte von den Säugetieren, die Vögel. — **Rechnen,** 4 St. w. Bruchrechnung, einfache und zusammengesetzte Regel de tri, Schlußrechnungen, Uebung im Kopfrechnen. — **Zeichnen,** 2 St. w. Einfache krummlinige Ornamente nach Vorzeichnung des Lehrers an der Wandtafel. — **Schreiben,** 2 St. w., nach Vorschrift an der Wandtafel. — **Gesang,** 1 St. w. Die Durtonleitern, Choralmelodieen und zweistimmige Gesänge.

Sexta. Ordinarius im S. ord. Lehrer Kohrt, im W. wissensch. Hilfslehrer Schulz.

Religion, 3 St. w. Biblische Erzählungen des A. T. Erlernen der beiden ersten Hauptstücke mit der Lutherschen Erklärung und einigen dazu gehörigen Sprüchen und Kirchenliedern. — **Deutsch,** 4 St. w. Lektüre aus Hopf und Paulsiek, die Redeteile, der einfache und erweiterte Satz, die wichtigsten Regeln der neuen Orthographie, Diktate, kleine Aufsätze. — **Latein,** 8 St. w. Deklination von sum, Pronom., Zahlwörter, die regelmäßigen Konjugationen ohne Deponens, Comparation nach Schultz. Ellendt, Lesebuch I, 1—41 mit Ausschluß der Stücke über die Depon., wöchentlich Exercitien oder Extemporalien. — **Geschichte,** 1 St. w. Die schönsten Sagen des griechischen Altertums. — **Geographie,** 2 St. w. Die Grundbegriffe der mathemat. Geographie, Uebung im Kartenlesen und den hauptsächlichsten Erscheinungsformen des horizontalen und vertikalen Baues der Erdoberfläche. — **Naturbeschreibung,** 1 St. w. Im S. Botanik, im W. Zoologie: Die Grundzüge erläutert an den bekanntesten Pflanzen und Tieren. — **Rechnen,** 5 St. w. Die 4 Species mit unbenannten ganzen Zahlen und Decimalbrüchen, das Dekadische Zahlensystem und die Decimalmaße, Resolvieren, Reducieren, einfache Regel de tri, Vorübungen zur Bruchrechnung. — **Zeichnen,** 2 St. w. Geradlinige Flächenfiguren nach Vorzeichnung des Lehrers an der Wandtafel. — **Gesang,** 1 St. w. Notenschreiben, Tonleiter, Akkord, leichte Choralmelodieen und Volkslieder.

Turnen, 5 St. w. Im S. auf dem städtischen Turnplatze die 4 oberen Klassen in 12, die 5 unteren in 16 Riegen, jede der beiden Abteilungen 2 St. w. Im W. in der städtischen, später in der Gymnasial-Turnhalle die 4 oberen Klassen in 8 Riegen, zwei mal wöchentlich in je 1 St.; die unteren Klassen in 2 Abteilungen zu je 7 Riegen, jede Abteilung 1 St. w. Außerdem 1 St. w. für die Vorturner und freiwilligen Turner.

Vorbereitungsschule.

1. Klasse. Ordinarius: Lehrer Preuß.

Religion, 3 St. w. Die wichtigsten Erzählungen des N. T. Die 10 Gebote mit der Lutherschen Erklärung, Erlernen einiger Sprüche und Lieder. — **Deutsch,** 10 St. w. Lektüre von Paulsiek, Uebung im Wiedergeben des Gelesenen, Wort- und Sacherklärung gelernter Gedichte, die Anfänge der Satzlehre, die wichtigsten Redeteile, Flexion der Hauptwörter, Eigenschafts- und Zeitwörter, die wesentlichsten Regeln der neuen Orthographie, wöchentliche Diktate und tägliche Abschriften. — **Rechnen,** 4 St. w. Die 4 Species mit benannten Zahlen, Resolvieren und Reducieren. — **Schreiben,** 4 St. w. Uebung in deutscher und lateinischer Schrift. — **Anschauungs-Uebungen,** 2 St. w. Fortgesetzte Berichtigung der Aussprache, Uebung der Anschauung mit besonderer Berücksichtigung der Naturb. und Geographie. — **Gesang,** 1 St. w. Gehörübungen, leichte Choräle und Volkslieder.

2. Klasse. Ordinarius: Lehrer Lehmann.

Religion, 2 St. w. Die wichtigsten Erzählungen des A. T. Die 10 Gebote ohne Erklärung, einige leichte Sprüche und Lieder. — **Deutsch,** 8 St. w. 1. Abteilung: Lektüre von Paulsiek, 2. Abt.: Häster's Fibel. Uebung im Erkennen der Haupt- und Fürwörter, der Eigenschafts- und Zeitwörter, orthographische Uebungen durch Abschrift von Druckschrift, wöchentliche Diktate, Erlernen kleinerer Gedichte. — **Rechnen,** 4 St. w. Die 4 Species mit größeren Zahlen. — **Schreiben,** 4 St. w. Uebung in deutscher und lateinischer Schrift. — **Anschauungs-Uebungen,** 1 St. w. Berichtigung der Aussprache, Erweiterung der Vorstellungen durch sinnliche Anschauung mit Benutzung der Winkelmannschen Bilder.

3. Klasse. Ordinarius: Lehrer Lehmann.

Religion, 2 St. w. Einführung in eine kleine Zahl ausgewählter biblischer Erzählungen. **Lesen und Schreiben,** 9 St. w. Lautieren und Lesen nach der Wandtafel und in Häster's Fibel, Einübung der deutschen Schrift. — **Rechnen,** 4 St. w. Zählen und Einüben der Zahlenreihen von 1—100; die 3 ersten Species in diesem Zahlenraume.

Die Aufgaben für die diesjährige Abiturientenprüfung waren:

a) Deutsch:

Zufrieden laßt uns sein nur mit des Glückes Gaben, mit dem nie was wir sind, mit dem nur was wir haben.

b) Französisch:

Henri IV et Grégoire VII.

c) Englisch:

Ein Exercitium.

d) Naturwissenschaften:

1) Um wieviel wird der halbjährige Tag am Nordpole durch die Wirkung der Refraktion (= 36′ am Horizonte) und des scheinbaren Sonnendurchmessers = 32′ verlängert? Schiefe der Ekliptik = 23^0 27′ 15″, Dauer des Jahres 365, 2422 t. Die Bewegung der Sonne in der Ekliptik ist als gleichförmig vorauszusetzen.

2) Das Manometer einer Locomotive zeigt einen Druck von 6 kg pro Quadratcentimeter. Die Locomotive fährt mit diesem Druck 7,5 Kilometer weit; ihre beiden Cylinder mit Abrechnung der Kolbenstärke sind 0,6 m lang und haben einen Querschnitt von 0,1 Quadratmeter, die Treibräder einen Umfang von 6 m; wieviel mechanische Arbeit hat die Locomotive geleistet und wieviel Wasser ist durch die Cylinder verbraucht, wenn das Gewicht von 1 Kubikmeter Wasserdampf bei jener Spannung 1,1468 Kgr. beträgt?

3) Man hat ein Quecksilber, welches 3 % Zinn und 5 % Blei enthält. Man will 10 Kg. salpetersaures Quecksilberoxydul darstellen. Wieviel Quecksilber und wieviel 30 procentige Salpetersäure sind anzuwenden?

c) Mathematik:

$(x-2y)^2 = 7 + y^2$
$x^2 - 2y^2 = 16 - 5xy$
$x^2 - 4xy + 3y^2 = 7$
$x^2 + 5xy - 2y^2 = 16$
$2x^2 + xy + y^2 = 23$
$2x^2 + 10xy - 4y^2 = 32$
$9xy - 5y^2 = 9$

1) Zwei Zahlen sind so zu bestimmen, daß das Quadrat der Differenz zwischen der ersten und dem doppelten der zweiten Zahl um das Quadrat der zweiten Zahl größer ist als 7, zugleich aber der Unterschied zwischen dem Quadrate der ersten und dem doppelten Quadrate der zweiten Zahl um das 5fache Produkt beider Zahlen kleiner ist als 16.

2) Zur Konstruktion eines Sehnenvierecks sind außer der Peripherie des umbeschriebenen Kreises die Schwerpunkte der beiden Dreiecke gegeben, in welche das Viereck durch eine seiner Diagonalen zerlegt wird.

3) Von einem Orte P. aus erscheinen die Längen zweier an einem geradlinigen Wege liegenden Gebäude AB und CD, deren wirkliche Längen p und q bekannt sind, unter den Winkeln α und β, der Zwischenraum zwischen beiden Häusern unter dem Winkel γ. Wie groß ist dieser Zwischenraum?

Specieller Fall: $p = 112{,}5$, $q = 87{,}5$ | $\alpha = 23^0\ 41'\ 30''$, $\beta = 17^0\ 50'\ 15''$, $\gamma = 38^0\ 25'\ 10''$

4) In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem sind die Gleichungen zweier Kurven gegeben:

$$y^2 - 2y - 3x = 0$$
$$x^2 - 3x - 2y = 0.$$

Form, Lage und Schnittpunkte derselben sind zu bestimmen.

B. Lehrmittel.

Für die Lehrer- und Schüler-Bibliothek wurden angeschafft: Jahrgang 1880 von: Centralblatt für die gesamte Unterrichts-Verwaltung, Zeitschrift für das Gymnasialwesen, Magazin für die Litteratur des Auslandes, Zeitschrift des statistischen Büreaus, Altpreußische Monatsschrift, Pädagogisches Archiv, Zarncke: litterar. Centralblatt, Herrig: Archiv, Crelle: mathem. Journal, Centralorgan für die Interessen des Realschulwesens. Theile: Polyglotten-Bibel. Fischer: Kirchenlieder-Lexikon. Bernhardt: Vulfila. Simrock: Die Edda. Gude: Erläuterungen deutscher Dichtungen. Büchmann: Geflügelte Worte. Sanders: Deutsche Litteraturgeschichte. Hensel: Die Familie Mendelssohn. Willmanns: Kommentar zur preußischen Schulorthographie. Riemann: Gesammelte mathematische Werke. Suphan: Herder's Werke Bd. 20. Hillebrand: Geschichte Frankreichs. Schwebel: Deutsche Kaisergeschichten. Petsch: Unser Fritz und der eiserne Prinz. Zöllner: Der schwarze Erdteil. Burmann: Im schwarzen Weltteil. Feierabend: Die schweizerische

Alpenwelt. Müller: Die jungen Elefantenjäger. Hartmann: Die Völker Afrikas. Stein: Der Talisman. Ebers: Die Schwestern. Dahn: Odhins Trost. Wiechert: Heinrich von Plauen. Freytag: Aus einer kleinen Stadt. Mehrere Jugendschriften von Ferd. Schmidt, Fr. Hoffmann, Gerstäcker, Hoecker. Hallberger: illustrated magazine, Jahrg. 1880. W. Scott: Guy Mannering, Ivanhoe, Rob Roy, The Antiquary, The Heart of Mid-Lothian, The Fortunes of Nigel, The fair Maid of Perth, Woodstock, Bulwer: Pelham, Ernst Maltravers, Alice, Paul Clifford. Zippel und Bollmann: Atlas ausländischer Kulturpflanzen. Chavanne: Karte von Afrika. Broellow und Straube: Schulwandkarte vom nördlichen Sternhimmel. Menge: Einführung in die antike Kunst. Winckelmann: Anschauungsbilder.

Die naturwissenschaftlichen Sammlungen wurden vermehrt durch: ein Interferenz-Prisma, eine Loupe, eine Cylinderlinse, einen Satz Gewichte, ein Dutzend Reagierkelche, 100 Reagiergläser, eine pneumatische Wanne von verzinntem Eisenblech, 6 Woulfsche Flaschen, 12 Gasentbindungsflaschen, verschiedene Glasröhren. Ferner erhielt die Anstalt: Durch von dem Königl. Provinz.-Schul-Kollegium angeordneten Doubletten-Austausch mit dem Königl. Friedr.-Kollegium in Königsberg, den Königl. Gymnasien zu Hohenstein und Lyck: Goedeke: Elf Bücher Deutscher Dichtung, Cicero ed. Orellius. Bergk: Poetae lyrici Graeci, Lehrs: De Aristarchi studiis homericis; an Geschenken: von dem Königl. Ministerium: E. aus 'm Weerth: Denkmäler des Mittelalters in den Rheinlanden, Bd. 4 u. 5. Wiedemann: Poggendorfs Annalen, Jahrg. 1880, Groeber: Zeitschrift für romanische Philologie, Jahrgang 1880; durch das Königl. Prov.-Schul-Kollegium: Napp: Die Argentinische Republik und ein Exemplar des Katalogs der vorjährigen Berliner Ausstellung prähistorischer und anthropologischer Funde Deutschlands. Von Herrn Oberlehrer Mogk: Zeitschriften für die Altertumswissenschaft, Jahrg. 14—15, und für das Gymnasialwesen, Jahrgang 10—12; von Herrn Buscke: ein Spirituspräparat von Schlangen; von Herrn Dr. Kleffel: eine Sammlung amerikanischer Mineralien, wofür der Unterzeichnete im Namen der Anstalt seinen ergebensten Dank ausspricht.

C. Wichtigere Verordnungen der Behörden.

6. April 1880: Das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium übersendet ein Exemplar des Werkes über die Argentinische Republik von R. Kapp.

23. April: Anträge auf Teilung der Secunda können erst dann mit Aussicht auf Erfolg gestellt werden, wenn die Schülerzahl der Klasse sich dauernd auf der jetzigen Höhe hält oder dieselbe noch übersteigt.

27. April: Dem Oberlehrer Mogk wird ein zweiwöchentlicher Urlaub im Anschluß an die Sommerferien erteilt.

8. Mai: Der Herr Minister der geistl. und Unterrichts-Angelegenheiten übersendet den 4. u. 5. Band von E. aus 'm Weerth: Denkmäler des Mittelalters in den Rheinlanden.

14. Mai: Die Elementarlehrer sind berechtigt und verpflichtet, der Königlichen allgemeinen Wittwen-Verpflegungs-Anstalt beizutreten, wenn sie in unmittelbarem Staatsdienst angestellt sind.

6. Juni: Die der Anstalt durch den Doubletten-Austausch zugewiesenen, sowie die von ihr abzugebenden Werke werden bezeichnet.

15. Juni: P.-S.-K. übersendet ein Exemplar des Neuabdrucks der Verordnung über die Ergänzung der Offiziere des Friedensstandes zum dienstlichen Gebrauche.

2. Juli: Der Schulamts-Kandidat Schulz ist vorläufig als Vertreter des beurlaubten ordentl. Lehrers Kohrt zu engagieren.

10. Juli: Die Aufmerksamkeit auf die Handschrift der Schüler wird den Direktoren von neuem empfohlen.

21. Juli: Den Lehrern Thiel und Preuß ist eine pensionsberechtigte Zulage von 100 und 150 M. bewilligt.

16. August: Der Schulamts-Kandidat Schulz wird vom 1. Oktober als cand. prob. und Hilfslehrer der Anstalt zugewiesen.

25. August: Die Kaiser Wilhelm-Stiftung wird den Lehrern zur Förderung empfohlen.

2. September: Der Direktor wird von dem Königl. Pr.-S.-K. beauftragt dem ordentl. Lehrer Kohrt vor seinem Scheiden aus dem Amte die warme Anerkennung seiner Amtsführung seitens der Behörde auszusprechen.

3. September: Die Direktoren werden aufgefordert, ein Exemplar der Ersatz-Ordnung vom 28. September 1875 anzuschaffen.

15. September: Der bisherige 1te Hilfslehrer Duvinage wird am 1. Oktober als 5ter ordentl. Lehrer angestellt.

18. September: Behufs anderweitiger Normierung der Gehälter wird den 6 ordentl. Lehrern eine Gehaltserhöhung, dem 1ten von 150, den andern von je 300 M. bewilligt.

1. Oktober: P.-S.-K. übersendet den dritten Geschäftsbericht des Preußischen Beamten-Vereins für das Jahr 1879, sowie die Druckschrift „Der Preußische Beamten-Verein, seine Ziele und Einrichtungen".

11. Oktober: Die beantragte Beschäftigung des Hilfslehrers Schulz als zweiter Turnlehrer wird genehmigt.

23. Oktober: Zum 1. Dezember fut. ist von dem Direktor darüber zu berichten, wie viele ungetaufte Kinder in der Schule vorhanden und ob sie sämtlich dem Religionsunterrichte in dem Bekenntnisse ihrer Eltern zugewiesen sind.

6. November: Das P.-S.-K. übersendet einen Auszug aus einem Erlaß des evangelischen Ober-Kirchenrats über die Revision des Religionsunterrichts in höheren Lehranstalten durch den Herrn Generalsuperintendenten zur Mitteilung an die Religionslehrer.

8. November: P.-S.-K. macht auf den Prospekt der neuen Schülerzeitung „Vega" aufmerksam.

10. November: Die zum Zwecke der Gründung der König Wilhelm-Stiftung für hilfsbedürftige erwachsene Beamtentöchter unternommenen Sammlungen haben einen so günstigen Verlauf genommen, daß die Gründung einer dauernden Stiftung gesichert erscheint.

7. Dezember: Die nach einem Semester von Untersecunda nach Obersecunda versetzten Schüler dürfen nicht das Freiwilligen-Zeugnis erhalten.

24. Dezember: Der bisherige 2te Hilfslehrer Polenz wird am 1. Januar 1881 als 6ter ordentlicher Lehrer angestellt.

31. Januar 1881: Der Direktor wird, da die städtische Turnhalle zur Einrichtung eines Reconvalescenten-Lazaretts für die Mannschaften des Dragoner-Regiments hergegeben ist, aufgefordert,

zu der einstweiligen Mitbenutzung der Gymnasial-Turnhalle seitens der Realschüler die geeigneten Schritte zu thun.

11. Februar: Das zur einstweiligen Mitbenutzung der Gymnasial-Turnhalle getroffene Arrangement wird genehmigt.

D. Chronik.

Das Schuljahr 1880/81, das am 5. April begann, brachte der Anstalt eine wesentliche Aenderung in ihrem Lehrer-Personal. Am 1. Oktober nämlich wurde der 5te ordentliche Lehrer Herr Kohrt, nachdem er 40 Jahre hindurch an der Schule mit Hingebung und Erfolg gewirkt, auch am 11. November 1878 bereits sein 50jähriges Amtsjubiläum gefeiert hatte, auf seinen Antrag pensioniert. Am Schlusse des Sommerhalbjahrs sprach der Unterzeichnete nach der Morgenandacht dem Scheidenden den Dank der Schule aus, der seitens der hohen vorgesetzten Behörde ihm bereits vorher in einem Anerkennungsschreiben mit herzlichen Wünschen für sein ferneres Wohl zu teil geworden war. Seine Vertretung übernahm zunächst der Schulamts-Kandidat Herr Schulz*, ein ehemaliger Schüler der Anstalt, für ein Vierteljahr, worauf mit Beginn des Winterhalbjahrs der bisherige wissenschaftliche Hilfslehrer Herr Duvinage in die 5te, der zweite Hilfslehrer Herr Polenz aber zuerst provisorisch, dann vom 1. Januar 1881 ab definitiv in die inzwischen neu gegründete 6te ordentliche Lehrerstelle einrückte, während Herr Schulz vom 1. Oktober ab als alleiniger Hilfs- und zugleich zweiter Turnlehrer berufen wurde. — Das Geburtsfest Sr. Majestät des Kaisers wurde im laufenden Schuljahre in gewohnter Weise feierlich begangen, ebenso der 2. September. Außerdem waren noch der 1. Dezember wegen der Volkszählung und der Fastnachtstag schulfrei, auch mußten im August 2 Nachmittagsstunden der Hitze wegen ausfallen. Die vorjährige Schillerprämie, als Hauptprämie dieses Mal in 3 vollständigen Exemplaren des Dichters bestehend, erhielten der Unterprimaner Oskar Müller, der Obersecundaner Karl Mietke und der Obertertianer Theodor Schade. Der Gesundheitszustand der Schüler war bis auf vielfache Hals- und Brustaffektionen in den Wintermonaten ein im ganzen wohl befriedigender, doch hatte die Schule wieder den Verlust zweier lieber Schüler zu beklagen, des Quartaners Ernst Rauchfuß nämlich, der am 31. Dezember in Tilsit an der Diphteritis und des Untersecundaners Eugen Zerrath, der am 7. Januar in An-Rokaiten, seiner Heimat, in die er sich zur Feier des Weihnachtsfestes begeben, am Typhus starb. Von dem in der Stadt während der Monate Januar und Februar herrschenden Typhus, durch den besonders die hiesige Garnison betroffen wurde, so daß die städtische Turnhalle zu einem Reconvalescenten-Lazarett für dieselbe eingerichtet werden und die Realschule während dieser Zeit auf Anordnung der hohen Behörde zu ihren Turnübungen die Gymnasial-Turnhalle mitbenutzen mußte, blieben die Schüler der Anstalt zum Glück verschont. Von den Lehrern waren die Herren Oberlehrer Mogk auf 2 Wochen zu einer Badereise und der ordentliche Lehrer Kohrt auf 3 Monate beurlaubt, außerdem wurden die Herren Oberlehrer Voelkel 5, Thomas 2, der Vorschullehrer Lehmann 6 Tage durch Krankheit ihrer Amtsthätigkeit entzogen. — Die Ferien des letzten Schuljahres fielen zu Ostern 1880 auf die Zeit vom 20. März bis 5. April, die Pfingstferien dauerten der Direktoren-Konferenz wegen

* Gustav Schulz, geboren zu Insterburg den 5ten September 1856, verließ Ostern 1875 mit dem Zeugnis der Reife die hiesige Realschule, studierte dann in Königsberg Mathematik und Physik und absolvierte am 17. Juli 1880 daselbst die Prüfung pro fac. docendi.

vom 15. bis 24. Mai, die Sommerferien vom 3. Juli bis 2. August, die Michaelisferien vom 2. bis 14. Oktober, die Weihnachtsferien vom 18. Dezember bis 6. Januar. — Die Gesamtzahl der Schüler betrug beim Beginne des Sommerhalbjahres: 408, und zwar in I 23, II 43, III A 43, III B 57, IV A 35, IV B 33, V A 30, V B 33, VI 48, in der Vorbereitungsschule: I 22, II 25, III 16; am Anfange des Winterhalbjahres: 396, darunter in I 23, II 42, III A 37, III B 52, IV A 32, IV B 32, V A 26, V B 32, VI 51, in der Vorbereitungsschule: I 27, II 25, III 17; darunter 133 Auswärtige, 7 Ausländer, 373 evangelische, 7 katholische, 16 israelitische Schüler.

Von den Kapitalien des Unterstützungsfonds für arme Schüler wurden infolge ungewöhnlich zahlreicher Gesuche um Freischule, denen seitens der Schule nicht nachgegeben werden konnte, da die vorhandenen Freistellen besetzt waren, 300 M. aufgenommen, die neben den Zinsen bis auf 88,50 M. zur Schulgeldzahlung für 14 Schüler verwendet wurden, so daß der Fond gegenwärtig noch aus 1634,12 M. besteht; das Vermögen der Wittwen- und Waisenkasse der Lehrer beträgt 2641,5 M.

E. Abiturienten-Prüfung.

Bei der am 9. März unter dem Vorsitz des Geheimen Regierungs- und Provinzial-Schulrats Herrn Dr. Schrader abgehaltenen Maturitätsprüfung erhielten folgende Abiturienten das Zeugnis der Reife:

Nro.	Namen.	Geburtsort.	Stand und Wohnort des Vaters.	Alter.	Dauer des Aufenthalts in Prima	Dauer des Aufenthalts auf der Anstalt	Erwählter Beruf.	Prädikat.
188	Eduard Behrendt	Gr. Friedr.-Graben	verst. Grundbes. in Gr. Friedr.-Graben	$19^3/_4$	2	10	Steuerfach	genügend.
189	Ernst Berg	Pomauden	Gutsbesitzer in Pomauden	$19^3/_4$	2	2	Landwirtschaft	genügend.
190	Max Glück	Tilsit	Landger.-Secr. in Tilsit	$21^1/_2$	2	9	Stud. der neueren Sprachen	gut.
191	Richard Marcuse	Karthaus	Sanitätsrat in Tilsit.	18	2	9	unbestimmt	gut.
192	Oskar Müller	Insterburg	verst. Klempnermeister	$21^1/_4$	2	3	unbestimmt	genügend.
193	Otto Preikschat	Stolbeck	verst. Gerbermeister	$19^1/_4$	2	$9^1/_2$	Stud. der neueren Sprachen	gut.
194	Paul Putzien	Jogauden	Gutsbesitzer in Jogauden	20	2	$10^1/_2$	Stud. d. Mathem. u. Naturw.	vorzügl.
195	Albert Rosenfeld	Brantischken	Gutsbesitzer in Brantischken	$21^3/_4$	3	10	Landwirtschaft	gut.
196	Oskar Sternkopf	Tilsit	verst. Former	$19^1/_4$	2	$10^1/_2$	Baufach	genügend.

Glück, Marcuse, Preikschat, Putzien, Rosenfeld, Sternkopf wurden von der mündlichen Prüfung dispensiert.

Tabellarische Uebersicht über die Verteilung der Lektionen unter die Lehrer
im Sommerhalbjahr 1880.

№	Namen der Lehrer.	Ordin.	I	II	IIIa	IIIb	IVa	IVb	Va	Vb	VI	Vorbereitungsschule I	Vorbereitungsschule II	Vorbereitungsschule III	Summe.
1.	**Koch,** Direktor.		3 Deutsch 3 Engl.	4 Franz. 3 Engl.		4 Engl.									17.
2.	Professor **Dr. Ellinger,** 1. Oberlehrer.	I	5 Math.	5 Math.	6 Math. 2 Phys. 5 Turnen		1 Gesang				1 Naturb				25.
3.	**Mogk,** 2. Oberlehrer.	II	3 Latein	3 Deutsch 4 Latein	3 Deutsch 5 Latein										18.
4.	**Voelkel,** 3. Oberlehrer.	IIIa	2 Relig. 4 Franz. 2 Litauisch in I—IIIa.	2 Relig.	2 Relig. 4 Franz. 4 Engl.	2 Relig.									22.
5.	**Thomas,** 4. Oberlehrer.		3 Gesch. u. Geogr.		4 Gesch. u. Geogr.	4 Franz. 4 Gesch. u. Geogr.	4 Gesch. u. Geogr.				2 Geogr.				21.
6.	Oberlehrer **Krueger,** 1. ord. Lehrer.		3 Physik 3 Chemie	2 Naturb 2 Phys. 2 Chem.		2 Naturb	2 Naturb 6 Math.								22.
7.	**Dr. Siemering,** 2. ord. Lehrer.	IIIb				3 Deutsch 5 Latein	5 Franz.				8 Latein 1 Gesch.				22.
8.	**Berent,** 3. ordentl. Lehrer.	Va				6 Math.		6 Math. 2 Naturb	4 Rechn. 2 Naturb	2 Naturb					22.
9.	**Knaake,** 4. ord. Lehrer.	IVa		3 Gesch. u. Geogr.			2 Relig. 3 Deutsch 6 Latein	4 Gesch. u. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.	1 Gesch.					22.
10.	**Kohrt,** 5. ordentl. Lehrer.	VI							2 Relig. 1 Gesang	2 Relig. 4 Rechn. 2 Turnen	3 Relig. 5 Rechn. 4 Deutsch 1 Gesang				24.
11.	**Duvinage,** 1. wissensch. Hilfslehrer.	IVb						2 Relig. 5 Franz. 6 Latein	5 Franz.	5 Franz.					23.
12.	**Polenz,** 2. wissensch. Hilfslehrer.	Vb						3 Deutsch	4 Deutsch 6 Latein	4 Deutsch 6 Latein 2 Geogr.					25.
13.	**Thiel,** technischer Lehrer.		3 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichnen 2 Schreiben		2 Zeichnen 2 Schreiben		2 Zeichn. 3 Schrb.				22.
14.	**Preuss,** 1. Lehrer der Vorschule.	V. I										3 Relig. 2 Ansch.= Ueb. 4 Deutsch 4 Schrb. 6 Lesen 4 Rechn. 1 Gesang	4 Rechn.		28.
15.	**Lehmann,** 2. Lehrer der Vorschule.	V. II u. III											2 Relig. 1 Ansch.= Ueb. 2 Deutsch 6 Lesen 4 Schrb.	2 Relig. 5 Lesen 4 Schrb. 4 Rechn.	30.

Tabellarische Uebersicht über die Verteilung der Lektionen unter die Lehrer im Winterhalbjahr 1880/81.

№	Namen der Lehrer.	Ordin.	I	II	IIIa	IIIb	IVa	IVb	Va	Vb	VI	Vorbereitungsschule I	Vorbereitungsschule II	Vorbereitungsschule III	Summe.
1.	**Koch,** Direktor.		2 Deutsch 3 Engl.	4 Franz. 3 Engl.		4 Engl.									17.
2.	Professor **Dr. Ellinger,** 1. Oberlehrer.	I	5 Math.	5 Math. 5 Turnen	6 Math. 2 Physik			1 Gesang			1 Naturb				25.
3.	**Mogk,** 2. Oberlehrer.	II	3 Latein	3 Deutsch 4 Latein	3 Deutsch 5 Latein										18.
4.	**Voelkel,** 3. Oberlehrer.	IIIa	2 Relig. 4 Franz.	2 Relig. 2 Litauisch in I—IIIa.	2 Relig. 4 Franz. 4 Engl.	2 Relig.									22.
5.	**Thomas,** 4. Oberlehrer.		3 Gesch. u. Geogr.		4 Gesch. u. Geogr.	4 Franz. 4 Gesch. u. Geogr.	4 Gesch. u. Geogr.				2 Geogr.				21.
6.	Oberlehrer **Krueger,** 1. ord. Lehrer.		3 Physik 3 Chemie	2 Naturb 2 Physik 2 Chemie		2 Naturb	2 Naturb 6 Math.								22.
7.	**Dr. Siemering,** 2. ord. Lehrer.	IIIb				3 Deutsch 5 Latein	5 Franz.				8 Latein 1 Gesch.				22.
8.	**Berent,** 3. ordentl. Lehrer.	Va				6 Math.		2 Rechn. 2 Naturb	4 Deutsch 4 Rechn. 2 Naturb	2 Naturb					22.
9.	**Knaake,** 4. ord. Lehrer.	IVa		3 Gesch. u. Geogr.			2 Relig. 3 Deutsch 6 Latein	4 Gesch. u. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.	1 Gesch.					22.
10.	**Duvinage,** 5. ord. Lehrer.	IVb						2 Relig. 3 Deutsch 5 Franz.	2 Relig. 5 Franz.	2 Relig.	3 Relig.				22.
11.	**Polenz,** 6. ordentl. Lehrer.	Vb						6 Latein	6 Latein	4 Deutsch 6 Latein 2 Geogr.					24.
12.	**Schulz,** wissensch. Hilfslehrer.	VI						4 Geom.		4 Rechn. 5 Franz. 1 Gesang 2 Turnen	4 Deutsch 5 Rechn. 1 Gesang				26.
13.	**Thiel,** technischer Lehrer.		3 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichnen 2 Schreiben		2 Zeichnen 2 Schreiben		2 Zeichn. 3 Schrb.				22.
14.	**Preuss,** 1. Lehrer der Vorschule.	V. I										3 Relig. 2 Ansch.=Ueb. 4 Deutsch 4 Schrb. 6 Lesen 4 Rechn. 1 Gesang	4 Rechn.		28.
15.	**Lehmann,** 2. Lehrer der Vorschule.	V. II u. III											2 Relig. 1 Ansch.=Ueb. 2 Deutsch 6 Lesen 4 Schrb.	2 Relig. 5 Lesen 4 Schrb. 4 Rechn.	30.

Ordnung der öffentlichen Prüfung

in der Aula der Realschule

Donnerstag, den 7. April, vormittags von 9 Uhr an.

Choral. Gebet.

Vorbereitungsschule um 9 Uhr.

3. Klasse: **Lesen** . . . . Lehmann.
Hans Fasbinder: Was gehn den Spitz die Gänse an! von R. Reinik.

2. Klasse: **Anschauungs-Uebungen** . . . . Lehmann.
Karl Mack: Die Schnecke von R. Reinik.

1. Klasse: **Rechnen** . . . . Preuß.
Fritz Berent: „Das kann ich nicht" von Kreibohm.

Gesang.

Sexta.

Religion . . . . Duvinage. **Latein** . . . . Siemering.
Ernst Stangenberg: Des Knaben Berglied von Uhland.

Quinta B und A.

B. **Rechnen** . . . . Schulz.
Oskar Gaßner: Meister Tancho von Wolfg. Müller.

A. **Naturbeschreibung** . Berent.
Walter Balzereit: Der Läufer von Glarus von A. Stöber.

Quarta B und A.

B. **Französisch** . . . . Duvinage.
Emil Kraft: Harras, der kühne Springer von Th. Körner.
Otto Franz: Le pot au lait par Lafontaine.

A. **Geographie** . . . . Thomas.
Paul Gaßner: Andreas Hofer von Jul. Mosen.
Hugo Lascheit: Le lion de Florence par Millevoye.

Choral.

Freitag, den 8. April, vormittags von 9 Uhr an.

Choral. Gebet.

Tertia B.

Mathematik . . . . . Berent. **Deutsch** . . . . Siemering.

Tertia A.

Physik . . . . . . Ellinger. **Geschichte** . . . . . . Thomas.

Secunda.

Geographie . . . . . Knaake. **Englisch** . . . . Koch.

15.

2.

Prima.

e . . . . Krüger. **Latein** . . . . Mogk.

Versuche der Schüler im Gesange und Vortrage.

Gesang: „Singet dem Herrn", Motette von Kuntze.
„Liederfreiheit", comp. von Marschner.

Vorträge:

Fritz Krickendt	in III B:	„Mann und Jüngling" aus „Otto der Schütz" von Kinkel.	
Arthur Richter	„ „	Mon village par Gensoul.	
Paul Manleitner	„ „	The spring journey by Heber.	
William Kayser . . .	„ III A:	Wachtmeister	
Julius Steppat	„ „	Erster Jäger	Schiller:
Kurt Immisch	„ „	Trompeter	Wallensteins Lager.
Otto Endom	„ „	Zweiter Jäger	Sc. 6.
Oskar Mantey	„ „	Le gladiateur romain par Chênedollé.	
Theodor Schade	„ „	A psalm of life by Longfellow.	
Georg Grunewald . . .	„ „	Phaedrus II, 5.	
Arthur Tiktin	in II:	Just	Lessing:
Richard Dombrowski . . .	„ „	Wirt	Minna von Barnhelm.
Theodor Erzberger . . .	„ „	v. Tellheim	a I, Sc. 1—3.
Oskar Gerhardt	„ „	Le cinq mai 1821 par Béranger.	
Johannes Voelkel . . .	„ „	The chameleon by J. Merrik.	
Franz Peterssohn . . .	„ „	Ovid. Met. XV. v. 745—778.	
Eugen Müller	„ I:	Plus on aime quelqu'un, moins il faut qu'on le flatte (c. A.).	

Gesang: An den Sonnenschein, von Schumann.
Deutsche Hymne, comp. von Radecke.
„Vor Dir, o Ewiger", Hymne von Schulz.

Abschiedsworte des Abiturienten Paul Putzien.

Schlußwort des Direktors und Entlassung der Abiturienten.

Choral.

Die Zeichnungen
des letzten Schuljahres werden nebst den Probeschriften an den Vormittagen der beiden Prüfungstage im Zeichensaal zur Ansicht ausliegen.

Sonnabend den 9. April wird das laufende Schuljahr mit der Austeilung der vierteljährlichen Zeugnisse geschlossen. Der neue Kursus beginnt Montag den 25. April, Morgens 8 Uhr. Zur Aufnahme neuer Schüler, die ein Impfattest und einen Taufschein einzureichen haben, wird der Unterzeichnete in den Vormittagsstunden des 21—23. April bereit [illegible]

[illegible] Koch.

30.