Festschrift

zur 50jährigen Jubelfeier des Gymnasiums zu Lauenburg i. P.

als höherer Lehranstalt

am 30. September 1910.

Zweiter Teil.

Die Fundamente für eine elementare Einleitung in die Differential- und Integralrechnung

von Professor C. Frenzel.

Mit 19 Figuren im Text und auf einer Tafel.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig 1910

Vorwort.

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος ἐξίτω!

In der vorliegenden Abhandlung, die einen Beitrag zur praktischen Durchführung der Kleinschen Reformvorschläge liefern soll, habe ich die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung für den Unterricht in der Gymnasialprima nach folgenden neuen Gesichtspunkten bearbeitet:

1. Zum Begriff des Differentialquotienten gelangt man im Unterricht auf zwei ganz verschiedenen, scheinbar weit voneinander abliegenden Wegen: In der Mechanik bei der Definition der Begriffe „Geschwindigkeit" und „Beschleunigung", in der Koordinatengeometrie bei der Behandlung des „Tangentenproblems". Beide Wege führen zu demselben Ziel, daher sind die Abschnitte I und II nicht nacheinander, sondern nebeneinander durchzunehmen.

2. In der Differentialrechnung kommt, entsprechend der berechtigten Forderung von Höfler in seiner „Didaktik des mathematischen Unterrichts", nur der Begriff des Differentialquotienten zur Anwendung; von dem kaum definierbaren Begriff des Differentials habe ich keinen Gebrauch gemacht, und das Symbol dx und dy hat nirgends eine selbstständige Bedeutung.

3. Auch in der Integralrechnung habe ich diese Forderung streng durchgeführt; dadurch glaube ich die noch vielfach vorhandene Ansicht, daß „die Schwierigkeiten einer schulgemäßen Darstellung der Grundzüge der Integralrechnung noch nicht genügend gehoben werden können", widerlegt zu haben.

Lauenburg i. P. den 11. August 1910.

C. Frenzel.

Benutzte Literatur.

Höfler, Didaktik des mathematischen Unterrichts; Leipzig und Berlin, 1910.

Tannery, Notions de mathématiques; Paris, 1903.

Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik; Leipzig, 1905.

Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung; Leipzig, 1908.

Kowalewski, Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen; Leipzig, 1910.

I. Der Differentialquotient in der Mechanik.

§ 1. Die gleichförmige Bewegung.

Die Bewegung eines Körpers heißt **gleichförmig**, wenn der Körper in gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken zurücklegt. Bezeichnet man die Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden Körpers mit c (entsprechend den Wörtern celeritas und constans), so ist der im Verlaufe von t Sekunden zurückgelegte Weg

(1) $$\boldsymbol{s = c \cdot t},$$

wo s und c die Benennung „Meter" besitzen. Hieraus ergibt sich:

(2) $$c = \frac{s}{t} \text{ m/sec (d. h. Meter pro Sekunde).}$$

Wir wollen dieser Gleichung noch eine andere Form geben. Wir nehmen an, ein Körper bewege sich gleichförmig auf einer gradlinigen oder krummlinigen Bahn, und rechnen die Zeit von irgendwelchem Augenblicke an, in dem sich der Körper etwa in A befinden möge (Fig. 1). Wir drücken dies kurz aus, indem wir sagen: Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der Körper am Orte A. Nehmen wir ferner an, der Körper befinde sich nach Verlauf von t Sekunden, oder kürzer zur Zeit t am Orte B und zur Zeit t' (wo $t' > t$ sei) am Orte C, und bezeichnen wir den von dem Körper in t Sekunden zurückgelegten Weg mit s, den in t' Sekunden zurückgelegten Weg mit s', so ist

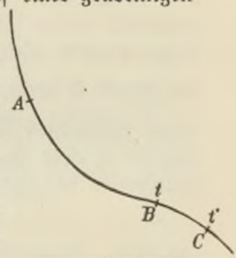


Fig. 1.

$$s = c \cdot t \text{ und } s' = c \cdot t',$$

also

$$s' - s = c \cdot (t' - t),$$

woraus sich ergibt:

(3) $$c = \frac{s' - s}{t' - t} \text{ m/sec},$$

d. h. in Worten:

Die Maßzahl der Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung ist gleich dem Quotienten aus den Maßzahlen irgendeiner von dem sich bewegenden Körper zurückgelegten Wegstrecke und der Zeit, in der diese zurückgelegt wird.

§ 2. Die Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung.

Eine ungleichförmige Bewegung findet statt, wenn ein Körper in gleichen Zeiten ungleiche Wegstrecken zurücklegt. Bei einer solchen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit des Körpers von Augenblick zu Augenblick; es kann daher nur von der Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblick die Rede sein, und die Gleichung (2) ist zur Definition dieser augenblicklichen Geschwindigkeit nicht mehr brauchbar. Doch kann man der Definitionsgleichung (3) eine solche Form geben, daß sie auch für die Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung gültig bleibt.

Wir nehmen wieder an, ein sich ungleichförmig bewegender Körper befinde sich, wie in Fig. 1 zur Zeit $t = 0$ in A, zur Zeit t in B und zur Zeit t' (wo $t' > t$) in C; ferner sei der Weg von A bis B gleich s, der von A bis C gleich s'. Dann braucht der Körper zum Zurücklegen des Weges $BC = s' - s$ die Zeit von $(t' - t)$ Sekunden, und die Geschwindigkeit des Körpers wäre bei einer gleichförmigen Bewegung innerhalb dieser $(t' - t)$ Sekunden stets gleich $\frac{s' - s}{t' - t}$ m/sec. Bei einer ungleichförmigen Bewegung ändert sich aber die Geschwindigkeit des Körpers auf dem Wege von B bis C von Augenblick zu Augenblick, es kann daher auch nur von der augenblicklichen Geschwindigkeit des Körpers in irgendeinem zwischen B und C gelegenen Punkte die Rede sein. Je kürzer jedoch das Zeitintervall $t' - t$ ist, um so kürzer ist auch der Weg $s' - s$, und um so mehr können wir annehmen, daß die Geschwindigkeit innerhalb dieses sehr kurzen Zeitintervalls und auf diesem sehr kurzen Wege dieselbe bleibt. Wenn daher der Punkt C immer näher an den Punkt B heranrückt, so nähert sich der Quotient $\frac{s' - s}{t' - t}$ immer mehr einem bestimmten Grenzwerte, der die Geschwindigkeit des Körpers im Punkte B oder zur Zeit t angibt. Für den Grenzwert eines solchen Quotienten hat man die Bezeichnung

lim (limes)

eingeführt. Somit läßt sich, wenn man ferner die veränderliche Geschwindigkeit eines Körpers bei ungleichmäßiger Bewegung mit v (entsprechend den Wörtern velocitas und variabilis) bezeichnet, für die Geschwindigkeit eines Körpers bei ungleichförmiger Bewegung die Definition aufstellen:

Unter der Geschwindigkeit eines Körpers bei ungleichförmiger Bewegung zur Zeit t versteht man den Grenzwert

(4) $$\boldsymbol{v = \lim \frac{s' - s}{t' - t}} \text{ für } t' = t\,.$$

Man gibt dieser Definition oft noch eine andere Form, indem man eine verschwindend kleine Größe, d. h. eine Größe, die sich immer mehr der Grenze 0 nähert, ohne sie bereits erreicht zu haben, mit dem Funktionszeichen $\triangle$ versieht. Für die verschwindend klein anzunehmende

Wegstrecke $s' - s$ wählt man daher die Bezeichnung $\triangle s$ und für den verschwindend kurzen Zeitraum $t' - t$, den der Körper zum Durchlaufen dieser Wegstrecke braucht, die Bezeichnung $\triangle t$; dann ist

$$(5) \qquad \boldsymbol{v} = \mathbf{lim}\, \frac{\triangle s}{\triangle t} \text{ für } \triangle t = 0 \text{ oder kürzer: } \boldsymbol{v} = \mathbf{lim}_{\triangle t = 0} \frac{\triangle s}{\triangle t} \cdot$$

Auf den ersten Blick hat es den Anschein, als ob sich nach dieser Definition für die Geschwindigkeit eines Körpers zur Zeit t bei einer ungleichförmigen Bewegung ein Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$ ergeben würde, ein Ausdruck, der bekanntlich einen ganz unbestimmten Wert besitzt oder der jeden beliebigen Wert annehmen kann. Dies ist jedoch durchaus nicht der Fall. Zwar würde das Verhältnis des Grenzwertes von $\triangle s$ zu dem von $\triangle t$, die beide gleich 0 sind, einen solchen ganz unbestimmten Wert besitzen; doch ist v nicht als das Verhältnis der beiden Grenzwerte von $\triangle s$ und $\triangle t$, sondern als der Grenzwert des Verhältnisses $\triangle s : \triangle t$ definiert, und dieser Grenzwert läßt sich, wie wir sogleich an zwei Beispielen zeigen wollen, bei jedem einzelnen Bewegungsvorgange genau bestimmen.

§ 3. Beispiele für eine ungleichförmige Bewegung.

1. Beispiel: Das einfachste Beispiel einer ungleichförmigen Bewegung ist der freie Fall, bei dem zwischen s und t stets die Beziehung besteht:

$$(6) \qquad s = \frac{1}{2} g t^2,$$

wo g eine unbenannte Zahl bezeichnet, die nahezu den Wert 9,8 besitzt. Während nach Gleichung (1) bei einer gleichförmigen Bewegung s eine lineare Funktion von t ist, ist für die Bewegung beim freien Fall s eine quadratische Funktion von t*). Wir wollen die Gleichung (1) die Zeitweggleichung für die gleichförmige Bewegung und die Gleichung (6) die Zeitweggleichung für den freien Fall nennen.

Mit t wird eine beliebige ganze oder gebrochene Anzahl von Sekunden bezeichnet. Zur Zeit t', wobei $t' > t$ angenommen werden möge, ist

$$s' = \frac{1}{2} g t'^2,$$

also

$$\frac{s' - s}{t' - t} = \frac{g}{2} \cdot \frac{t'^2 - t^2}{t' - t}.$$

Würde man, um zu dem Grenzwerte $\lim \frac{s' - s}{t' - t}$ für $t' = t$ zu gelangen, auf der rechten Seite dieser Gleichung $t' = t$ setzen, so würde man für diesen Grenzwert den ganz unbestimmten Ausdruck $\frac{g}{2} \cdot \frac{0}{0}$ er-

*) Die folgende Entwicklung läßt sich auch leicht für die allgemeine quadratische Funktion $s = at^2 + bt + c$ durchführen, wo a, b und c irgendwelche konstante, d. h. von t unabhängige Werte bezeichnen.

halten. Man würde aber hierbei den Fehler begehen, daß man das Verhältnis der Grenzwerte von Zähler und Nenner zu bestimmen sucht, anstatt den Grenzwert des Verhältnisses, oder mit anderen Worten:

An dem Quotienten $\frac{t'^2 - t^2}{t' - t}$ läßt sich die Gleichsetzung von t' und t noch nicht vollziehen, er **verträgt** sie noch nicht.

Gibt man jedoch der rechten Seite der obigen Gleichung die Form

$$\frac{g}{2} \cdot \frac{(t' + t)(t' - t)}{t' - t} = \frac{g}{2} \cdot (t' + t),$$

so erhält man:

$$\frac{s' - s}{t' - t} = \frac{g}{2} \cdot (t' + t).$$

Diese Gleichung gilt noch für ganz beliebige Werte von t' und t, doch an diesem Werte des Quotienten $\frac{s' - s}{t' - t}$ kann man die Gleichsetzung von t' und t vornehmen, ohne zu einem Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$ zu gelangen; es ergibt sich auf diese Weise:

$$v = \lim_{t' = t} \frac{s' - s}{t' - t} = g\,t, \tag{7}$$

und durch diese Gleichung $\boldsymbol{v = g \cdot t}$ ist die augenblickliche Geschwindigkeit des frei fallenden Körpers zur Zeit t bestimmt.

2. Beispiel: Wir nehmen ferner an, ein Körper bewege sich auf einer geradlinigen oder krummlinigen Bahn nach dem Zeitweggesetz

$$s = 2t^3 \tag{8}$$

und er befinde sich zur Zeit $t = 0$ wieder im Punkte A (Fig. 1). Da für $t = 0$ auch $s = 0$ ist, so sind die von dem Körper durchlaufenen Wegstrecken s vom Punkte A aus zu messen. Ist der Körper nach Verlauf von t Sekunden oder kurz zur Zeit t im Punkte B und zur Zeit t' $(t' > t)$ im Punkte C angelangt, so ist

$$s = 2t^3 \text{ und } s' = 2t'^3,$$

also

$$\frac{s' - s}{t' - t} = 2 \cdot \frac{t'^3 - t^3}{t' - t} = 2 \cdot \frac{(t' - t) \cdot (t'^2 + t't + t^2)}{t' - t} = 2 \cdot (t'^2 + t't + t^2),$$

mithin erhält

$$\lim \frac{s' - s}{t' - t} \text{ für } t' = t \text{ den Wert } 6t^2,$$

d. h. es ist

$$\lim_{t' = t} \frac{s' - s}{t' - t} = 6t^2. \tag{9}$$

§ 4. Die gleichmäßig und die ungleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Die beiden im vorigen Paragraphen behandelten Beispiele unterscheiden sich in einem wesentlichen Punkte voneinander. Im ersten

Beispiele, in dem wir der Einfachheit halber $g = 10$ annehmen wollen, hat nach Verlauf von

$$t = 1, 2, 3, 4, \ldots \text{ Sekunden}$$

der sich bewegende Körper die Geschwindigkeit von

$$v = 10, 20, 30, 40, \ldots \text{ m/sec}$$

erreicht; die Geschwindigkeitszunahme ist also während gleicher Zeitteilchen stets dieselbe und beträgt in jeder Sekunde 10 m/sec.

Im zweiten Beispiele beträgt die Geschwindigkeit am Ende der

1., 2., 3., 4., ... Sekunde
6, 24, 54, 96, ... m/sec;

die Geschwindigkeitszunahme während gleicher Zeitteilchen wächst also von Sekunde zu Sekunde. Man nennt solche Bewegungen, bei denen die Geschwindigkeit von Augenblick zu Augenblick immer größer wird, beschleunigte Bewegungen; wird hingegen die Geschwindigkeit von Augenblick zu Augenblick immer kleiner, so nennt man die Bewegung eine verzögerte. Ist, wie im 1. Beispiele, die Geschwindigkeitszunahme während jeder Sekunde dieselbe, so heißt die Bewegung eine gleichmäßig beschleunigte, ändert sich, wie im 2. Beispiele, die Geschwindigkeitszunahme von Sekunde zu Sekunde, so nennt man die Bewegung eine ungleichmäßig beschleunigte, bzw. verzögerte.

§. 5. Die Beschleunigung bei einer ungleichförmigen Bewegung.

1. Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung: Bei einer solchen ist die Geschwindigkeitszunahme während jeder Sekunde stets gleich groß. Man nennt diese Geschwindigkeitszunahme die Beschleunigung des sich bewegenden Körpers; ist die Bewegung eine gleichmäßig verzögerte, so hat die Beschleunigung einen negativen Wert. Somit gelangt man zu folgender

1. Definition: Unter der Beschleunigung eines Körpers bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung versteht man die Zunahme der Geschwindigkeit während einer Sekunde.

Wir wollen dieser Definition noch eine andere Form geben. Der sich bewegende Körper befinde sich (vgl. Fig. 1) zur Zeit $t = 0$ wieder im Punkte A, zur Zeit t im Punkte B und zur Zeit t' im Punkte C; ferner habe er in B die Geschwindigkeit v m/sec und in C die Geschwindigkeit v' m/sec erlangt. Dann beträgt die Geschwindigkeitszunahme auf dem Wege BC, d. h. innerhalb des Zeitraumes von $(t' - t)$ Sekunden $(v' - v)$ m/sec, mithin ist, da die Geschwindigkeit in jeder einzelnen Sekunde um den gleichen Betrag wächst, der Geschwindigkeitszuwachs, d. h. die Beschleunigung a (acceleratio)

$$a = \frac{v' - v}{t' - t} \text{ m/sec.}$$

Somit ergibt sich die

2. Definition: Unter der Beschleunigung eines Körpers bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung versteht man das Verhältnis der Größe der Geschwindigkeitszunahme zur Dauer der Zeit, während deren diese Geschwindigkeitszunahme erfolgt ist.

Aus beiden Definitionen geht hervor, daß für den freien Fall die Beschleunigung den konstanten Wert von $a = 9{,}8$ m/sec besitzt.

2. Die ungleichmäßig beschleunigte Bewegung: Für eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung, z. B. für die im 2. Beispiele des § 3 behandelte Bewegung nach dem Zeitweggesetze $s = 2t^3$ sind beide Definitionen für die Beschleunigung unbrauchbar; doch läßt sich die zweite Definition derartig erweitern, daß sie auch auf eine solche Bewegung anwendbar ist. Bei einer ungleichmäßig beschleunigten Bewegung auf dem Wege von B bis C ändert sich nicht nur die Geschwindigkeit v, sondern auch die Beschleunigung a von Augenblick zu Augenblick. Um den Wert der Beschleunigung in einem bestimmten Augenblicke oder zur Zeit t zu bestimmen, nehmen wir wie oben an, der Körper besitze in B zur Zeit t die Geschwindigkeit v und in C zur Zeit t' die Geschwindigkeit v'. Dann ist wieder der Geschwindigkeitszuwachs während dieser $(t' - t)$ Sekunden oder auf dem Wege BC gleich $(v' - v)$ m/sec. Nähert sich nun der Punkt C immer mehr dem Punkte B, wird also das Zeitintervall von $(t' - t)$ Sekunden immer kleiner, so nähert sich auch der Quotient $\frac{v' - v}{t' - t}$, der bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung einen konstanten Wert besaß, einem von der Zeit t abhängigen Grenzwerte, der die Beschleunigung des Körpers zur Zeit t angibt. Somit können wir folgende Definition aufstellen:

Unter der Beschleunigung eines Körpers bei ungleichmäßig beschleunigter Bewegung zur Zeit t versteht man den Grenzwert

$$a = \lim \frac{v' - v}{t' - t} \text{ für } t' = t \tag{10}$$

oder kürzer:

$$a = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

So ist z. B. für das 2. Beispiel im § 3

$$v = 6t^2 \text{ und } v' = 6t'^2,$$

also

$$\frac{v' - v}{t' - t} = 6 \cdot \frac{t'^2 - t^2}{t' - t} = 6 \cdot \frac{(t' - t)(t' + t)}{t' - t} = 6 \cdot (t' + t),$$

und zwar ist diese Gleichung noch für ganz beliebige Werte von t und t' gültig. Bei dem Grenzübergange, der nur an dem zuletzt erhaltenen Ausdruck vorgenommen werden kann, erhält man:

$$a = \lim_{t' = t} \frac{v' - v}{t' - t} = 12\,t \text{ m/sec.}$$

§ 6. Der Differentialquotient.

Bei einer ungleichförmigen Bewegung ist nicht nur s, sondern auch v eine Funktion von t, und im allgemeinen ist auch die Beschleunigung a von t abhängig. Für das im vorhergehenden Paragraphen behandelte 2. Zeitweggesetz haben diese Funktionen die Form

$$s = 2t^3, \quad v = 6t^2 \text{ und } a = 12t.$$

Für andere Zeitweggesetze würden diese Funktionen andere Formen besitzen, und wir wollen allgemein für diese Funktionen einstweilen die Beziehungen einführen:

(11) $$s = f(t),\ v = \varphi(t) \text{ und } a = \psi(t), \text{ wo}$$

(12) $$v = \lim \frac{\triangle s}{\triangle t} \text{ und } a = \lim \frac{\triangle v}{\triangle t} \text{ für } \triangle t = 0$$

ist. Unter s ist wie bisher (vgl. Fig. 1) die Wegstrecke AB zu verstehen, die der Körper während eines Zeitraums von t Sekunden zurücklegt, $\triangle s$ ist die Wegstrecke BC, $\triangle t$ die zum Durchlaufen dieser Wegstrecke erforderliche Zeit und $\triangle v$ die Geschwindigkeitszunahme, die der Körper beim Durchlaufen dieser kleinen Wegstrecke erfährt, d. h. es ist

$$\triangle s = f(t + \triangle t) - f(t)$$
$$\triangle v = \varphi(t + \triangle t) - \varphi(t)$$

und somit

(13) $$\left.\begin{cases} v = \lim \dfrac{\triangle s}{\triangle t} = \lim \dfrac{f(t + \triangle t) - f(t)}{\triangle t} \\[2ex] a = \lim \dfrac{\triangle v}{\triangle t} = \lim \dfrac{\varphi(t + \triangle t) - \varphi(t)}{\triangle t} \end{cases}\right\} \text{ für } \triangle t = 0.$$

Man nennt diese Grenzwerte der Quotienten $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ und $\frac{\triangle v}{\triangle t}$ die **Differentialquotienten** der Funktionen $s = f(t)$ und $v = \varphi(t)$ und bezeichnet sie mit

(14) $$v = \frac{ds}{dt} \text{ und } a = \frac{dv}{dt}.$$

Hierbei ist jedoch mit allem Nachdruck darauf hinzuweisen, daß die Zeichen dt, ds und dv keine selbständige Bedeutung haben, und daß sie keine eigentlichen Größen sind, die einen bestimmten, wenn auch noch so kleinen Wert besitzen. Vielmehr sind die Symbole $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ nur als abgekürzte Schreibweisen für die Grenzwerte $\lim \frac{\triangle s}{\triangle t}$ und $\lim \frac{\triangle v}{\triangle t}$ für $\triangle t = 0$ aufzufassen.

Hiernach können wir für den Differentialquotienten einer beliebigen Funktion $y = f(x)$ folgende **Definition** aufstellen:

Unter dem Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$ versteht man den Grenzwert

(15) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

§ 7. Die Ableitungen einer Funktion.

Von den im vorigen Paragraphen mit $f(t)$, $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ bezeichneten Funktionen von t ist die Funktion $\varphi(t)$ der Differentialquotient der Funktion $f(t)$ und die Funktion $\psi(t)$ der Differentialquotient der Funktion $\varphi(t)$; die Funktion $\psi(t)$ entsteht also aus der Funktion $\varphi(t)$ auf gleiche Weise wie die Funktion $\varphi(t)$ aus der ursprünglichen Funktion $f(t)$. Um die Entstehungsweise der beiden neuen Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ aus der ursprünglichen Funktion $f(t)$ auch durch die Schreibweise kenntlich zu machen, wählt man für die Funktion $\varphi(t)$ auch die Bezeichnung $f'(t)$ [gelesen: f gestrichen t] und für die Funktion $\psi(t)$ die Bezeichnung $\varphi'(t)$ oder $f''(t)$ [gelesen: f zweigestrichen t]. Man nennt diese beiden Funktionen $\varphi(t)$ oder $f'(t)$ und $\psi(t)$ oder $f''(t)$ die **1. bzw. 2. Ableitung der Funktion $f(t)$**. Ist demnach, wenn wir von den Begriffen aus der Mechanik abstrahieren wollen, $y = f(x)$ eine beliebige Funktion von x, so ist die erste Ableitung dieser Funktion, nämlich $f'(x)$ identisch mit dem durch Gleichung (15) definierten Differentialquotienten der Funktion $f(x)$ und die zweite Ableitung $f''(x)$ identisch mit dem Differentialquotienten der Funktion $f'(x)$. Ist z. B.

$$y = f(x) = 2x^3, \tag{1}$$

so ist nach § 6

$$f'(x) = 6x^2 \text{ und } f''(x) = 12x.$$

Nehmen wir ferner an, es sei

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{2}$$

so wird

$$\begin{aligned} f(x + \triangle x) &= a \cdot (x + \triangle x)^3 + b \cdot (x + \triangle x)^2 + c \cdot (x + \triangle x) + d \\ &= (ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c) \cdot \triangle x \\ &\qquad + (3ax + b) \cdot \overline{\triangle x}^2 + a \cdot \overline{\triangle x}^3, \end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = (3ax^2 + 2bx + c) + (3ax + b) \cdot \triangle x + a \cdot \overline{\triangle x}^2 .$$

Hieraus ergibt sich:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

und ebenso:

$$f''(x) = 6ax + 2b = 2 \cdot (3ax + b).$$

Weitere Beispiele zur Bestimmung der Ableitungen neuer Funktionen ergeben sich in großer Anzahl aus den §§ 11 u. 16.

II. Der Differentialquotient in der Koordinatengeometrie.

§ 8. Die graphische Darstellung von Funktionen.

Ist y eine Funktion von x, für die wir die allgemeine Form $y = f(x)$ annehmen wollen, so entsprechen jedem beliebig angenommenen reellen Werte von x ein oder mehrere ganz bestimmte Werte von y. Zieht man nur solche Werte von x in Betracht, für die auch y einen reellen Wert besitzt, so kann man sich x und y als Koordinaten eines veränderlichen Punktes vorstellen, und alle Punkte, deren Koordinaten der Gleichung $y = f(x)$ Genüge leisten, liegen auf einer gewissen geraden oder krummen Linie. Man sagt, $y = f(x)$ sei die Gleichung dieser Linie.

1. Beispiel: Es sei

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{6}x - 2 \text{ oder } 6y = 3x^2 + 5x - 12.$$

Nimmt man für x der Reihe nach die Werte

$$x = 0;\quad 1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\quad \ldots.$$

an, so ergeben sich für y die entsprechenden Werte

$$y = -2;\quad -0{,}67;\quad 1{,}67;\quad 5;\quad 9{,}33;\quad \ldots.$$

Setzt man ferner

$$x = -\tfrac{1}{2};\quad -1;\quad -2;\quad -3;\quad -4;\quad -5;\quad \ldots.,$$

so wird

$$y = -2{,}29;\quad -2{,}33;\quad -1{,}67;\quad 0;\quad 2{,}67;\quad 6{,}33;\ldots..$$

Bestimmt man nun die Lage dieser Punkte (vgl. Fig. 2 der Figurentafel), so erkennt man, daß sie alle auf einer gewissen Kurve liegen, die man erhält, wenn man die einzelnen Punkte durch einen fortlaufenden Linienzug miteinander verbindet. Diese Kurve schneidet offenbar die Abszissenachse in zwei Punkten, von denen bisher nur der eine Punkt mit der Abszisse $x = -3$ bekannt ist; ferner zeigt der bisher erkennbare Verlauf der Kurve, daß diese zwischen den Abszissen $x = -\frac{1}{2}$ und $x = -2$ einen sog. Kulminationspunkt besitzt, d. h. einen Punkt, in dem die Kurve vom Fallen zum Steigen oder umgekehrt übergeht. Um die Lage des zweiten Schnittpunktes der Kurve mit der x-Achse zu bestimmen, setzen wir in der Kurvengleichung $y = 0$; dann erhalten wir die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 5x - 12 = 0,$$

deren Wurzeln $x = -3$ und $x = \frac{4}{3}$ sind. Der zweite Schnittpunkt der Kurve mit der Abszissenachse hat also die Abszisse $x = 1{,}33$. Um endlich die Lage des Kulminationspunktes der Kurve zu bestimmen, formen wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die Kurvengleichung folgendermaßen um:

$$6y = 3x^2 + 5x - 12 = 3 \cdot (x^2 + \tfrac{5}{3}x - 4) = 3 \cdot [(x + \tfrac{5}{6})^2 - (\tfrac{13}{6})^2]$$

oder

$$y = \tfrac{1}{2} \cdot [(x + \tfrac{5}{6})^2 - (\tfrac{13}{6})^2].$$

Es erhält also y den kleinsten Wert oder y wird ein Minimum für $x = -\frac{5}{6} = -0{,}83$, der zugehörige Wert von y ist $y = -\frac{169}{72} = -2{,}35$. Mithin hat der Kulminationspunkt der Kurve die Koordinaten

$$x = -0{,}83 \text{ und } y = -2{,}35.$$

Nunmehr ist man in der Lage, die Kurve genau zeichnen zu können; man erhält eine Parabel.

2. Beispiel: Es sei

$$10y^2 = 60 + 13x - 5x^2 \quad \text{(vgl. Fig. 3 der Figurentafel).}$$

Man bestimmt zunächst wie in dem vorigen Beispiele die Koordinaten einer genügenden Anzahl von Kurvenpunkten. Der eine Schnittpunkt der Kurve mit der x-Achse hat die Abszisse $x = 5$, die Abszisse des anderen Schnittpunktes erhält man durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$60 + 13x - 5x^2 = 0,$$

und es ergibt sich außer $x = 5$ noch $x = -\frac{12}{5} = -2{,}4$. Für alle Werte von x, die größer als 5 und kleiner als $-2{,}4$ sind, wird y imaginär. Solchen Werten von x entsprechen also keine konstruierbaren Kurvenpunkte. Zur Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve mit der Ordinatenachse setzt man $x = 0$; dann wird $y = \sqrt{6} = \pm 2{,}45$. Endlich ergibt sich die Lage der Kulminationspunkte der Kurve aus der folgenden Umformung der Kurvengleichung:

$$10y^2 = -5 \cdot (x^2 - \tfrac{13}{5}x - 12) = -5 \cdot [(x - \tfrac{13}{10})^2 - (\tfrac{37}{10})^2],$$

also

$$y^2 = \tfrac{1}{2} \cdot [(\tfrac{37}{10})^2 - (x - \tfrac{13}{10})^2].$$

Daher wird y^2 ein Maximum für $x = 1{,}3$, und für diesen Wert von x ist $y = \frac{37}{20} \cdot \sqrt{2} = \pm 2{,}62$. Die Kurve ist eine Ellipse.

3. Beispiel: Es sei

$$2y = x^3 - 1{,}9x^2 - 1{,}9x + 1 \quad \text{(vgl. Fig. 4 der Figurentafel).}$$

Die Bestimmung der Koordinaten einzelner Kurvenpunkte erfolgt in der bisherigen Weise, indem man der Reihe nach

$$x = \ldots. -2;\quad -1{,}5;\quad -1;\quad 0;\quad 1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\ \ldots.$$

setzt und die zugehörigen Werte von y berechnet; man erhält

$$y = \ldots. -5{,}4;\ -1{,}9;\ 0;\ 0{,}5;\ -0{,}9;\ -1{,}2;\ 2{,}6;\ 13{,}5\ \ldots.$$

Die Abszissen der Punkte, in denen die Kurve der x-Achse schneidet, ergeben sich durch Auflösung der reziproken Gleichung

$$x^3 - 1{,}9x^2 - 1{,}9x + 1 = 0$$

oder

$$10x^3 - 19x^2 - 19x + 10 = 0,$$

der man auch die Form geben kann:

$$(x + 1) \cdot (10x^2 - 29x + 10) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$x_1 = -1;\ x_2 = 2{,}5 \text{ und } x_3 = 0{,}4.$$

Obwohl man aus den bisher bestimmten Kurvenpunkten den Verlauf der Kurve im allgemeinen erkennen kann, ist zur genauen Zeichnung der Kurve noch die Bestimmung der Lage ihrer Kulminationspunkte erforderlich. Für das vorliegende Beispiel läßt sich diese Bestimmung nicht mehr wie in den Beispielen (1) und (2) durch eine einfache Umformung der Kurvengleichung ausführen. Doch gelangen wir zur Bestimmung der Koordinaten dieser Kulminationspunkte auf geometrischem Wege, indem wir beachten, daß in diesen Punkten die an die Kurve gelegte Tangente der Abszissenachse parallel sein muß. Wir sind somit vor die Aufgabe gestellt, die Gleichung der an die Kurve $y = f(x)$ in einem beliebigen Kurvenpunkte gelegten Tangente zu bestimmen. Bevor wir jedoch an die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe herangehen, wollen wir an einigen besonders wichtigen Beispielen die einzuschlagende Methode erläutern.

§ 9. Die Gleichungen der Kreis-, Parabel-, Ellipsen- und Hyperbeltangente.

a) Die Gleichung der Kreistangente.

Es sei

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{1}$$

die allgemeine Kreisgleichung, ξ und η seien die festen Koordinaten eines beliebig angenommenen Punktes P auf der Kreislinie; es soll die Gleichung der an den Kreis in diesem Punkte gelegten Tangente aufgestellt werden.

Wir nehmen zunächst auf der Kreislinie außer dem Punkte P noch einen beliebigen zweiten Punkt P' an (vgl. Fig. 5) und bezeichnen seine Koordinaten mit ξ', η'. Dann lautet die Gleichung der durch die beiden Punkte P und P' gelegten Sekante UV:

$$y - \eta = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} \cdot (x - \xi); \tag{2}$$

der Quotient $\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$ ist die sog. Richtungskonstante der Sekante, d. h.

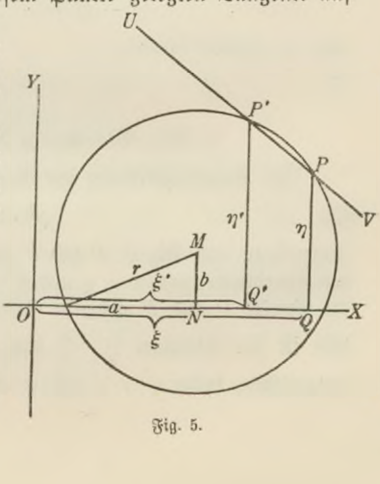


Fig. 5.

die Tangente des Winkels, den die Sekante mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Die Sekante UV geht in die Tangente im Punkte P über, wenn sie sich um den fest mit dem Kreise verbundenen Punkt P herumdreht, so daß sich der andere Schnittpunkt P' auf der Kreislinie immer mehr dem Punkte P nähert und schließlich mit ihm zusammenfällt. Wir werden also aus der Sekantengleichung (2) die Gleichung der Kreistangente im Punkte P erhalten, wenn wir in ihr $\xi' = \xi$ und demzufolge auch $\eta' = \eta$ setzen. Doch *verträgt* geradeso wie in den beiden Beispielen des § 3 der Quotient $\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$ noch nicht die Prozedur dieser Gleichsetzung, da derselbe dann den völlig unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ erhalten würde. Es läßt sich aber mit Zuhilfenahme der Kreisgleichung der Wert dieses Quotienten so umformen, daß man an ihm diese Prozedur vornehmen kann. Da nämlich die beiden Punkte P und P' auf der Kreislinie liegen, so genügen ihre Koordinaten der Kreisgleichung (1), d. h. es ist

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 = r^2$$

und

$$(\xi' - a)^2 + (\eta' - b)^2 = r^2;$$

durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$(\xi + \xi' - 2a) \cdot (\xi - \xi') + (\eta + \eta' - 2b) \cdot (\eta - \eta') = 0,$$

es ist also

$$\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} = -\frac{\xi + \xi' - 2a}{\eta + \eta' - 2b},$$

so daß die Gleichung (2) nunmehr die Form annimmt:

$$y - \eta = -\frac{\xi + \xi' - 2a}{\eta + \eta' - 2b} \cdot (x - \xi). \tag{3}$$

Auch diese Form der Gleichung der Sekante gilt ebenso wie die Gleichung (2) für g a n z b e l i e b i g e Wertepaare von ξ, η und ξ', η', doch kann man in dieser Gleichung den Grenzübergang $\xi' = \xi$ und $\eta' = \eta$ vollziehen und man erhält so als Gleichung der Kreistangente im Punkte P:

$$y - \eta = -\frac{\xi - a}{\eta - b} \cdot (x - \xi),$$

oder in anderer Form:

$$(\xi - a) \cdot (x - a) + (\eta - b) \cdot (y - b) = r^2. \tag{4}$$

b) Die Gleichung der Parabeltangente.

Die Scheitelgleichung der Parabel sei

$$y^2 = 2px, \tag{5}$$

ferner seien (vgl. Fig. 6) P und P' zwei b e l i e b i g e Punkte der Parabel mit den Koordinatenpaaren ξ, η und ξ', η'. Dann hat die Gleichung der durch die Punkte P und P' gehende Sekante wie vorhin die Form (2). Auch hier ist der Quotient $\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$ oder $\frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi}$ wieder einer Umformung zu unterziehen, bevor $\xi' = \xi$ und $\eta' = \eta$ gesetzt wird. Man erhält aus

$\eta^2 = 2p\xi$ und $\eta'^2 = 2p\xi'$:

$$\frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} = \frac{2p}{\eta' + \eta};$$

die umgeformte Gleichung der Sekante lautet somit

$$y - \eta = \frac{2p}{\eta' + \eta} \cdot (x - \xi).$$

Hieraus ergibt sich, wenn man $\eta' = \eta$ setzt, als Gleichung der Tangente im Punkte P:

$$y - \eta = \frac{p}{\eta} \cdot (x - \xi),$$

der man auch die Form geben kann:

$$\eta y = p \cdot (x + \xi). \tag{6}$$

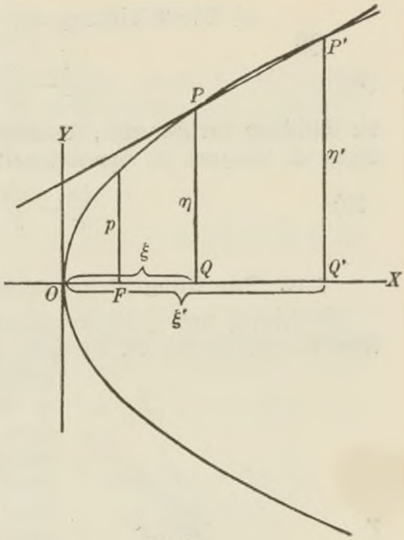


Fig. 6.

c) Die Gleichung der Ellipsentangente.

Es handelt sich im wesentlichen wieder nur darum, den Quotienten $\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$ mit Hilfe der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

auf eine Form zu bringen, die es gestattet, $\xi' = \xi$ und also auch $\eta' = \eta$ zu setzen. Nun ist nach (7)

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2$$

und auch

$$b^2\xi'^2 + a^2\eta'^2 = a^2b^2,$$

also

$$b^2 \cdot (\xi^2 - \xi'^2) + a^2 \cdot (\eta^2 - \eta'^2) = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\xi + \xi'}{\eta + \eta'},$$

so daß die umgeformte Sekantengleichung lautet:

$$y - \eta = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\xi + \xi'}{\eta + \eta'} \cdot (x - \xi).$$

In dieser Gleichung kann man wieder $\xi' = \xi$ und $\eta' = \eta$ setzen und erhält so die Tangentengleichung:

$$y - \eta = - \frac{b^2\xi}{a^2\eta} \cdot (x - \xi)$$

oder in einfacherer Gestalt:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1. \tag{8}$$

d) Die Gleichung der Hyperbeltangente.

Ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

die Gleichung der Hyperbel, so erhält man ebenso wie in c) als Gleichung der Tangente im Hyperbelpunkte ξ, η:

$$\frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1. \tag{10}$$

§ 10. Das Tangentenproblem für die Kurve $y = f(x)$.

Es seien ξ und η die Koordinaten eines beliebig angenommenen Kurvenpunktes P. Um die Gleichung der in diesem Punkte an die Kurve gelegten Tangente PT (vgl. Fig. 7) zu bestimmen, gehen wir von der Gleichung der Sekante aus, die diesen Punkt mit einem zweiten beliebig angenommenen Kurvenpunkte P' verbindet, dessen Koordinaten mit ξ', η' bezeichnet werden mögen. Die Gleichung dieser Sekante UV lautet:

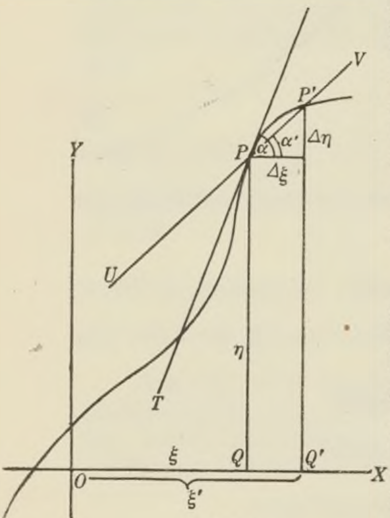


Fig. 7.

$$y - \eta = \frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} \cdot (x - \xi). \tag{11}$$

Die Sekante UV wird zur Tangente PT, wenn wir sie um den fest mit der Kurve verbundenen Punkt P herumdrehen, so daß sich der Punkt P' auf der Kurve immer mehr dem Punkte P nähert und schließlich mit ihm zusammenfällt. Nehmen wir nun zunächst an, der Punkt P' befinde sich in unmittelbarer Nähe des Punktes P und bezeichnen wir wie früher (§ 2) die Werte von $\xi' - \xi$ und $\eta' - \eta$ mit $\triangle \xi$ und $\triangle \eta$, so nimmt die vorige Gleichung der Sekante UV die Form an:

$$y - \eta = \frac{\triangle \eta}{\triangle \xi} \cdot (x - \xi);$$

hierbei ist der Wert von $\triangle \xi$ zwar klein, doch sonst ganz nach Willkür anzunehmen, und der zugehörige Wert von $\triangle \eta$ bestimmt sich aus der Kurvengleichung $y = f(x)$. Nähert sich nun der Punkt P' auf der Kurve immer mehr dem Punkte P, geht also die Sekante UV in die Tangente PT über, so nähert sich auch der Quotient $\frac{\triangle \eta}{\triangle \xi}$ immer mehr einem bestimmten Grenzwerte, den wir wieder mit $\lim\limits_{\triangle \xi = 0} \frac{\triangle \eta}{\triangle \xi}$ bezeichnen wollen. Dann lautet die Gleichung der Tangente PT:

(12) $$y - \eta = \lim_{\Delta\xi = 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} \cdot (x - \xi).$$

Die **Richtungskonstante** der Tangente PT, d. h. die trigonometrische Tangente des Winkels α, den die Kurventangente im Punkte P mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, hat also den Wert

(13) $$\mathrm{tg}\,\alpha = \lim_{\Delta\xi = 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} = f'(\xi),$$

und die Gleichung der Tangente PT nimmt daher die endgültige Form an:

(14) $$y - \eta = f'(\xi) \cdot (x - \xi).$$

Wie aus den Paragraphen 6 und 7 hervorgeht, erhält man den Wert von $f'(\xi)$ auf folgende Weise: Man bestimmt zunächst den Differentialquotienten oder die erste Ableitung der gegebenen Funktion $y = f(x)$ und erhält so eine neue Funktion von x, nämlich $\frac{dy}{dx}$, in der man $x = \xi$ zu setzen hat.

Beispiel: Es soll die Gleichung der Tangente an die Kurve

$$2y = x^3 - 1{,}9x^2 - 1{,}9x + 1 \text{ (vgl. § 8, 3. Beispiel)}$$

im Kurvenpunkte mit der Abszisse $\xi = 2$ aufgestellt werden.

Es ist

$$y = f(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (x^3 - 1{,}9x^2 - 1{,}9x + 1),$$

also nach § 7

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (3x^2 - 3{,}8x - 1{,}9),$$

$$f'(\xi) = \tfrac{1}{20} \cdot (30\xi^2 - 38\xi - 19).$$

Die Gleichung der Kurventangente im Punkte ξ, η lautet daher:

$$y - \eta = \tfrac{1}{20} \cdot (30\xi^2 - 38\xi - 19) \cdot (x - \xi)$$

oder

$$20y = (30\xi^2 - 38\xi - 19) \cdot x - (20\xi^3 - 19\xi^2 - 10).$$

Die Richtungskonstante dieser Tangente hat den Wert

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \tfrac{1}{20} \cdot (30\xi^2 - 38\xi - 19).$$

In den Kulminationspunkten der Kurve ist $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, also ergeben sich die Abszissen dieser Punkte durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$30\xi^2 - 38\xi - 19 = 0,$$

deren Wurzeln

$$\xi = \frac{19 \pm 7\sqrt{19}}{30}, \text{ d. h. } \xi_1 = 1{,}65 \text{ und } \xi_2 = -0{,}38$$

sind; die zugehörigen Werte von η sind $\eta_1 = -1{,}41$ und $\eta_2 = 0{,}70$. Ferner ist nach der Kurvengleichung für $x = 2$, $y = -1{,}2$; also nimmt die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkte $\xi = 2$, $\eta = -1{,}2$ die Form an:

$$20y = 25x - 74 \text{ oder}$$

$$\frac{x}{2{,}96} + \frac{y}{-3{,}7} = 1,$$

d. h. es ist OM oder $m = 2{,}96$ und ON oder $n = -3{,}7$, wo M und N die Schnittpunkte der Tangente mit der Abszissen- bzw. Ordinatenachse bezeichnen. Mit Hilfe der Werte für die Koordinaten der Kulminationspunkte, der im § 8 angegebenen Werte einiger anderen Kurvenpunkte und der Werte von m und n kann man nunmehr eine genaue Zeichnung der Kurve und der Tangente anfertigen. (Vgl. Fig. 4).

III. Die Differentialquotienten der einfachen Funktionen.

§ 11. Der Differentialquotient algebraischer Funktionen.

Es sollen der Reihe nach die Differentialquotienten folgender Funktionen ermittelt werden:

(1) $$y = x^n,$$

wo n zunächst als absolute ganze Zahl vorausgesetzt werden möge. Läßt man x in $x + \triangle x$ übergehen und bezeichnet man den entsprechenden Zuwachs von y mit $\triangle y$, so wird

$$y + \triangle y + (x + \triangle x)^n,$$

es ist also nach dem binomischen Lehrsatze

$$y + \triangle y = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \triangle x + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \overline{\triangle x}^2 + \cdots + \overline{\triangle x}^n,$$

mithin

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = n \cdot x^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot n^{n-2} \cdot \triangle x + \cdots + \overline{\triangle x}^{n-1}.$$

Es wird also für $\triangle x = 0$

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}.$$

Daß diese Formel auch für negative ganzzahlige und für gebrochene Werte des Exponenten n gültig bleibt, geht aus den folgenden Beispielen 2, 4 und 7 hervor.

(2) $$y = \frac{1}{x}.$$

Da $y + \triangle y = \dfrac{1}{x + \triangle x}$ ist, so wird

$$\triangle y = \frac{1}{x + \triangle x} - \frac{1}{x} = -\frac{\triangle x}{x(x + \triangle x)},$$

also

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{1}{x \cdot (x + \triangle x)}.$$

Mithin ergibt sich:

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

In gleicher Weise erhält man aus

(3) $$y = \frac{1}{x^2}:$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{2x + \triangle x}{x^2 \cdot (x + \triangle x)^2}, \text{ also } \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3},$$

und allgemein aus

(4) $$y = \frac{1}{x^n}:$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \triangle x + \cdots \cdot \overline{\triangle x}^{n-1}}{x^n (x + x \triangle x)^n},$$

d. h.

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

(5) $$y = ax^2 - bx + c,$$

wo a, b und c von x unabhängige oder konstante Zahlen bezeichnen. Man erhält zunächst:

$$y + \triangle y = a \cdot (a + \triangle x)^2 - b \cdot (x + \triangle x) + c$$
$$= (ax^2 - bx + c) + (2ax - b) \cdot \triangle x = a \cdot \overline{\triangle x}^2$$

und somit

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = (2ax - b) + a \cdot \triangle x.$$

Mithin wird

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 2ax - b.$$

Nun ist aber $2ax$ der Differentialquotient von ax^2 und b der Differentialquotient von bx. Somit ergeben sich folgende Regeln:

1. Satz: Der Differentialquotient eines Aggregats ist gleich dem Aggregat der Differentialquotienten der einzelnen Glieder.

2. Satz: Der Differentialquotient des Produkts aus einem konstanten Faktor und einer Funktion von x ist gleich dem Produkt aus diesem konstanten Faktor und dem Differentialquotienten der Funktion.

3. Satz: Der Differentialquotient einer Konstanten hat den Wert 0.

(6) $$y = \sqrt{x}.$$

Quadriert man beide Seiten, so erhält man:

$$y^2 = x,$$

und hieraus folgt, wenn x um $\triangle x$ und y um $\triangle y$ wächst:

$$(y + \triangle y)^2 = x + \triangle x$$

oder

$$y^2 + 2y \cdot \triangle y + \overline{\triangle y}^2 = x + \triangle x;$$

mithin wird

$$2y \cdot \triangle y + \overline{\triangle y}^2 = \triangle x \quad \text{oder} \quad (2y + \triangle y) \cdot \triangle y = \triangle x$$

und somit

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{2y + \triangle y}.$$

Wird nun $\triangle x$ immer kleiner und schließlich gleich 0, so gilt dasselbe auch von $\triangle y$; man erhält demnach:

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ist allgemein

$$(7) \qquad y = \sqrt[n]{x},$$

so ergibt sich in gleicher Weise:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot y^{n-2} \cdot \triangle y + \cdots + \overline{\triangle y}^{n-1}};$$

folglich wird, wenn man wieder $\triangle x = 0$ und daher auch $\triangle y = 0$ setzt:

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{x}}{x}.$$

§ 12. Der Differentialquotient von Produkten und Quotienten.

Es sei

$$(8) \qquad y = u \cdot v,$$

wo $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ bekannte Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x sind.

Läßt man x in $x + \triangle x$ übergehen und nimmt man an, daß alsdann u in $u + \triangle u$, v in $v + \triangle v$ und schließlich y in $y + \triangle y$ übergeht, so wird

$$\triangle u = \varphi(x + \triangle x) - \varphi(x), \quad \triangle v = \psi(x + \triangle x) - \psi(x),$$

ferner

$$\begin{aligned} y + \triangle y &= (u + \triangle u) \cdot (v + \triangle v) \\ &= uv + u \cdot \triangle v + v \cdot \triangle u + \triangle u \cdot \triangle v, \end{aligned}$$

mithin

$$\triangle y = u \cdot \triangle v + v \cdot \triangle u + \triangle u \cdot \triangle v;$$

es ist daher

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = u \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x} + v \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle u}{\triangle x} \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x} \cdot \triangle x.$$

Setzt man nun $\triangle x = 0$, so ergibt sich hieraus:

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

Es sei ferner

$$(9) \qquad y = \frac{u}{v},$$

wo wieder $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ bekannte Funktionen von x darstellen. Man erhält in derselben Weise wie vorhin:

$$\triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v} - \frac{u}{v} = \frac{v \triangle u - u \triangle v}{v \cdot (v + \triangle v)}$$

mithin:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} - u \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x}}{v \cdot \left(v + \frac{\triangle v}{\triangle x} \cdot \triangle x\right)}.$$

Geht man nun wieder zur Grenze über, indem man $\triangle x = 0$ setzt, so entstehen ans den Quotienten $\frac{\triangle u}{\triangle x}$ und $\frac{\triangle v}{\triangle x}$ die Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dv}{dx}$, die ganz bestimmte Funktionen von x darstellen, und man erhält somit als Wert den gesuchten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

§ 13. Das Gradmaß und das Bogenmaß eines Winkels.

In der elementaren Mathematik legt man bei der Bestimmung der Größe eines Winkels das **Gradmaß** zugrunde, d. h. man gibt die Größe eines Winkel nach Graden und Bruchteilen des Grades an. Man kann sich aber, wie dies im folgenden stets geschehen soll, bei der Bestimmung der Größe eines Winkels noch eines anderen Maßes, des sog. **Bogenmaßes** bedienen.

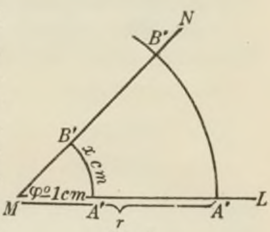


Fig. 8.

Es sei LMN ein beliebiger Winkel (vgl. Fig. 8) und φ die **Anzahl der Grade**, die dieser Winkel mißt, also $\sphericalangle LMN = \varphi^0$. Ist der Winkel in Graden, Minuten und Sekunden angegeben, so hat man die Minuten und Sekunden in Dezimalteile des Grades zu verwandeln; so z. B. ist der Winkel $49^0\ 9'\ 17'' = 49^0{,}1547$, also $\varphi = 49{,}1547$. Beschreibt man mit einem **beliebigen Radius** r um den Scheitelpunkt M einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B schneidet, desgl. mit dem Radius von 1 cm einen Kreisbogen, der die Winkelschenkel in den Punkten A' und B' schneidet, und bezeichnet man die Länge der Kreisbögen von A bis B und von A' bis B' mit $\widehat{AB}$ bzw. $\widehat{A'B'}$, so verhält sich

$$\widehat{AB} : MA = \widehat{A'B'} : MA'.$$

Nimmt man an, daß

$$\widehat{A'B'} = x \,\mathrm{cm}$$

sei, so hat das Längenverhältnis $\widehat{A'B'} : MA'$ den Wert x, wo x eine unbenannte Zahl darstellt, die von der Wahl der Längeneinheit unabhängig ist; denn auch das Längenverhältnis $\widehat{AB} : MA$ hat denselben Wert. Durch die unbenannte Zahl x ist die Größe des Winkels LMN ebenso eindeutig bestimmt, wie durch die Anzahl der Grade, welche dieser Winkel mißt. Man nennt diese Zahl x das Bogenmaß des Winkels. Hiernach kann man folgende Definition aufstellen:

Beschreibt man um den Scheitelpunkt eines gegebenen Winkels mit einem **beliebigen** Radius r einen Kreisbogen und bezeichnet man die Länge des zwischen den Schenkeln dieses Winkels liegenden Kreisbogens mit b, so versteht man unter dem Bogenmaße des Winkels diejenige unbenannte Zahl x, die den Wert des Verhältnisses $b : r$ angibt.

Es ist nun leicht, vom Gradmaß eines Winkels zum Bogenmaß überzugehen und umgekehrt. Ist der betreffende Winkel nach Gradmaß gleich φ^0, nach Bogenmaß gleich x so ist bekanntlich der zu diesem Zentriwinkel gehörige Bogen eines Kreises mit dem Radius r

$$b = \frac{r\pi\varphi}{180},$$

also

$$x = \frac{b}{r} = \frac{\pi\varphi}{180} = 49{,}1547 : \frac{180}{\pi}.$$

Man erhält somit das Bogenmaß eines in Graden angegebenen Winkels, indem man die Anzahl der Grade durch die Zahl

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}29578$$

dividiert. Für das obige Beispiel ergibt sich $x = 0{,}8579$.

Einfacher vollzieht man diese Umformung des Gradmaßes in Bogenmaß, indem man sich der folgenden Tabelle bedient:

$1^0 = 0{,}017453$	$4^0 = 0{,}069813$	$7^0 = 0{,}122173$
$2^0 = 0{,}034907$	$5^0 = 0{,}087266$	$8^0 = 0{,}139626$
$3^0 = 0{,}052360$	$6^0 = 0{,}104720$	$9^0 = 0{,}157080.$

Selbstverständlich hat man vorher die Minuten und Sekunden des Winkels in Dezimalteile des Grades zu verwandeln.

§ 14. Die graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen.

Bestimmt man die Größe eines Winkels nach Bogenmaß, so lassen sich die trigonometrischen Funktionen desselben auch graphisch darstellen. Wir behandeln als Beispiel die Funktion $y = \sin x$.

Nach der am Schluß des vorigen Paragraphen angegebenen Tabelle ist für die Winkel

$$0^0;\ 10^0;\ 20^0;\ 30^0;\ 50^0;\ 70^0;\ 90^0;\ 110^0;\ \ldots$$

das Bogenmaß

$$x = 0;\ 0{,}17;\ 0{,}35;\ 0{,}52;\ 0{,}87;\ 1{,}22;\ 1{,}57;\ 1{,}92;\ \ldots$$

und der Wert von $\sin x$ oder

$$y = 0;\ 0{,}17;\ 0{,}34;\ 0{,}5;\ 0{,}77;\ 0{,}94;\ 1;\ 0{,}94;\ \ldots$$

Bestimmt man die diesen Koordinaten x, y entsprechenden Punkte und verbindet sie durch einen fortlaufenden Linienzug, so erhält man die in Fig. 9 der Figurentafel dargestellte Sinuskurve. Diese besitzt Kulminationspunkte für diejenigen Werte von x, die den Winkeln

$$90^0;\quad 270^0;\quad 450^0;\ldots$$

entsprechen, d. h. für

$$x = 1{,}57;\quad 4{,}71;\quad 7{,}85;\ \ldots;$$

für alle diese Werte von x ist $y = \pm 1$.

§ 15. Die Bestimmung des Grenzwertes von $\frac{\sin \triangle x}{\triangle x}$ für $\triangle x = 0$.

Es sei (Fig. 10) LMN oder x ein beliebiger in Bogenmaß ausgedrückter spitzer Winkel. Fällt man von einem beliebigen Punkte B des einen Schenkels MN das Lot BC auf den anderen Schenkel ML, so ist

$$\sin x = \frac{BC}{MB}.$$

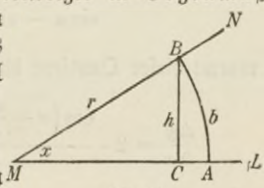


Fig. 10.

Beschreibt man mit dem Radius MB um den Punkt M einen Kreisbogen, der den Winkelschenkel ML im Punkte A schneidet, und bezeichnet man die Länge des Radius mit r, die des Kreisbogens AB mit b und endlich die des Lotes BC mit h, so ist

$$\sin x = \frac{h}{r} = \frac{h}{b} \cdot x,$$

mithin

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{h}{b},$$

d. h. der Wert des Quotienten $\frac{\sin x}{x}$ stimmt für jede beliebige Größe des nach Bogenmaß gemessenen Winkels x mit dem Werte des Längenquotienten $\frac{h}{b}$ überein. Also ist dies auch der Fall, wenn die unbenannte Zahl x einen sehr kleinen Wert annimmt. Bezeichnet man einen solchen sehr kleinen, im übrigen aber willkürlichen Wert von x mit $\triangle x$ und die entsprechenden Längen von b und h mit $\triangle b$ und $\triangle h$, so wird

$$\frac{\sin \triangle x}{\triangle x} = \frac{\triangle h}{\triangle b}.$$

Nun ergibt sich aber aus der unmittelbaren Anschauung, daß sich der Quotient $\frac{\triangle h}{\triangle b}$ für einen sehr kleinen Wert von $\triangle x$ immer mehr dem Grenzwerte 1 nähert, also ist auch

(10)
$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Zu demselben Ergebnis führt auch die graphische Darstellung der Funktion $\sin x$.

§ 16. Der Differentialquotient der trigonometrischen Funktionen.

Es sei

(11)
$$y = \sin x.$$

Ist x ein beliebiger, in Bogenmaß angegebener Winkel und bezeichnet Δx einen beliebig kleinen Zuwachs von x, Δy den entsprechenden Zuwachs von y, so ist

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x), \text{ also}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Nach der Formel

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

nimmt dieser Quotient die Form an:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Nähert sich nun Δx und somit auch $\frac{\Delta x}{2}$ immer mehr der Null, so nähert sich nach dem vorigen Paragraphen der Quotient $\sin\frac{\Delta x}{2} : \frac{\Delta x}{2}$ immer mehr dem Grenzwerte 1, während der andere Faktor $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ in $\cos x$ übergeht, es wird also

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

(12)
$$y = \cos x.$$

In derselben Weise wie vorhin erhält man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}.$$

Da nun

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ist, so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \cdot \frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

und somit

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ d. h. } \frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

(13) $$y = \operatorname{tg} x.$$

Da $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist, so besitzt diese Funktion die Form

$$\operatorname{tg} x = \frac{u}{v} \text{ wo } u = \sin x \text{ und } v = \cos x \text{ ist.}$$

Nun ist aber nach (11) und (12)

$$\frac{du}{dx} = \cos x \text{ und } \frac{dv}{dx} = -\sin x,$$

also wird nach § 12, Nr. (9)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

d. h.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(14) $$y = \operatorname{ctg} x.$$

Es ist $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Setzt man $u = \cos x$ und $v = \sin x$, so erhält man auf gleiche Weise wie in Nr. (13)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§ 17. Umkehrungsformeln.

In dem vorhergehenden Paragraphen war eine Funktion $y = f(x)$ gegeben und es wurde gezeigt, wie ihr Differentialquotient bestimmt wird. Auch dieser ist im allgemeinen wieder eine Funktion von x, die wir mit $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$ bezeichnen wollen. In den Anwendungen kommt nun auch oft der umgekehrte Fall vor, daß der Differentialquotient einer unbekannten Funktion $f(x)$, also die Funktion $\varphi(x)$ gegeben ist, und es handelt sich darum, aus dieser Funktion $\varphi(x)$ eine andere Funktion $f(x)$ zu bestimmen, deren Differentialquotient gleich $\varphi(x)$ ist.

Es seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei Funktionen, die denselben Differentialquotienten $\varphi(x)$ besitzen; dann ist

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x) \text{ und } \frac{dF(x)}{dx} = \varphi(x), \text{ also}$$

$$\frac{d[f(x) - F(x)]}{dx} = 0.$$

Da somit der Differentialquotient der Funktion $f(x) - F(x)$ für alle Werte von x gleich 0 ist, so ist nach dem 3. Satze im § 11 diese Funktion eine Konstante. Bezeichnen wir die letztere mit K, so ergibt sich

$$f(x) = F(x) + \mathfrak{K},$$

d. h. in Worten:

4. Satz: Ist $F(x)$ irgendeine Funktion, deren Differentialquotient gleich $\varphi(x)$ ist, so hat jede andere Funktion $f(x)$, die für jeden Wert von x denselben Differentialquotienten besitzt, die Form

$$\boldsymbol{f(x) = F(x) + \mathfrak{K}}.$$

Aus den in den Paragraphen 11 und 16 ermittelten Werten der Differentialquotienten der einfachsten Funktionen ergeben sich demnach folgende wichtige Umkehrungsformeln:

Hat der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ den Wert

(1) $\frac{dy}{dx} = c$, so hat die Funktion $f(x)$ die Form $f(x) = c \cdot x + \mathfrak{K}$;

(2) $\frac{dy}{dx} = cx$, „ „ „ „ „ „ „ $f(x) = \frac{c}{2} \cdot x^2 + \mathfrak{K}$;

(3) $\frac{dy}{dx} = x^n$, „ „ „ „ „ „ „ $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathfrak{K}$;

(4) $\frac{dy}{dx} = \sqrt[n]{x}$, „ „ „ „ „ „ „ $f(x) = \frac{n}{n+1} \cdot x\sqrt[n]{x} + \mathfrak{K}$;

(5) $\frac{dy}{dx} = \cos x$, „ „ „ „ „ „ $f(x) = \sin x + \mathfrak{K}$ und

(6) $\frac{dy}{dx} = \sin x$, „ „ „ „ „ „ $f(x) = -\cos x + \mathfrak{K}$.

IV. Anwendungen auf die Mechanik.

§ 18. Der freie Fall.

Die Bewegung beim freien Fall eines Körpers ist eine gleichmäßig beschleunigte, und zwar hat erfahrungsgemäß die Beschleunigung den konstanten Wert $g = 9{,}8$. Es ist also

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{1}$$

und somit nach § 17, Nr. (1)

$$v = g \cdot t + C,$$

wo C eine Konstante bezeichnet. Nehmen wir an, daß die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers gleich 0 sei, so ergibt sich aus der letzten Gleichung für C der Wert 0, d. h. es ist

$$v = g \cdot t. \tag{2}$$

Da wir dieser Gleichung auch die Form geben können:

$$\frac{ds}{dt} = g \cdot t,$$

so folgt aus ihr nach § 17, Nr. (2), daß

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 + C'$$

ist, wo C' eine neue Konstante bezeichnet. Rechnen wir den vom Körper durchlaufenen Weg von dem Zeitpunkte an, wo $t = 0$ ist, so wird für $t = 0$ auch $s = 0$; somit hat auch die Konstante C' den Wert 0 und es wird

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2. \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) stellen die beiden Galileischen Fallgesetze dar.

§ 19. Die harmonische Bewegung.

Beim freien Fall bewegt sich der Körper oder der diesen darstellende materielle Punkt auf einer geraden Linie, und zwar hat in jedem Punkte des zurückgelegten Weges die Beschleunigung des materiellen Punktes einen konstanten Wert.

Unter einer **harmonischen Bewegung** versteht man einen Bewegungsvorgang, bei dem ein materieller Punkt P sich ebenfalls auf einer geraden Linie $X'X$ bewegt, aber in der Weise, daß er auf dieser Geraden fortwährend hin und her schwingt, und daß seine Beschleunigung in einer beliebigen Lage P dem Abstande dieses Punktes von einem festen Punkte O, der Gleichgewichtslage des materiellen Punktes, proportional ist. Bezeichnet man den Abstand des beweglichen Punktes P von dem festen Punkte O mit s (vgl. Fig. 11), so ist die harmonische Bewegung durch die Gleichung charakterisiert:

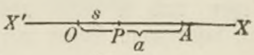


Fig. 11.

$$\frac{dv}{dt} = \pm k^2 s,$$

wo k^2 eine positive Konstante bezeichnet. Da die Beschleunigung für wachsende Werte von s immer kleiner, für abnehmende Werte von s hingegen größer wird, so haben wir das negative Vorzeichen zu wählen, so daß

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 s \tag{4}$$

ist. Sowohl s als auch v sind Funktionen von t, also besteht unsere Aufgabe darin, die **Zeitweggleichung** für die harmonische Bewegung zu ermitteln, d. h. s als Funktion von t darzustellen.

Nun ist

$$v = \frac{ds}{dt},$$

also in Verbindung mit (4)

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = -k^2 s \cdot \frac{ds}{dt},$$

d. h. nach § 11, Nr. (1)

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{d(v^2)}{dt} = -\tfrac{1}{2} k^2 \frac{d(s^2)}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{d(v^2)}{dt} = -k^2 \cdot \frac{d(s^2)}{dt}.$$

Da somit die beiden Funktionen v^2 und $-k^2 s^2$ denselben Differentialquotienten besitzen, so ist nach dem 4. Lehrsatze im § 17

(5) $$v^2 = -k^2 s^2 + c^2,$$

wo die neue Konstante offenbar einen positiven Wert haben muß und deshalb mit c^2 bezeichnet worden ist.

Da $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so läßt sich die Gleichung (5) auch in der Form schreiben:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - k^2 s^2$$

oder

(6) $$\frac{ds}{dt} = k \cdot \sqrt{\frac{c^2}{k^2} - s^2},$$

und es handelt sich nur noch darum, diejenige Funktion von t zu bestimmen, die dieser Gleichung Genüge leistet.

Nun ist offenbar s eine periodische Funktion von t, und außerdem geht aus Gleichung (6) hervor, daß der absolute Wert von s stets kleiner als der des konstanten Quotienten $\frac{c}{k}$ ist. Wir können daher

$$\text{entweder } s = \frac{c}{k} \cdot \sin\varphi \quad \text{oder } s = \frac{c}{k} \cdot \cos\varphi$$

setzen, und es bleibt uns dann nur noch übrig, φ als Funktion von t zu bestimmen. Setzen wir etwa

(7) $$s = \frac{c}{k} \cdot \cos\varphi,$$

so nimmt die Gleichung (6) die Form an:

$$-\frac{c}{k} \sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \pm c \cdot \sin\varphi,$$

und somit ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm k.$$

Folglich besitzt nach § 17 Nr. (1) die noch zu bestimmende Funktion φ die Form

$$\varphi = \pm (kt + C),$$

so daß die Gleichung (7) übergeht in

(8) $$s = \frac{c}{k} \cdot \cos(kt + C),$$

wo c und C noch zu bestimmende Konstanten sind.

Die Bestimmung dieser Konstanten geschieht auf folgende Weise:

Der materielle Punkt P schwingt in geradliniger Bahn um die Gleichgewichtslage O hin und her. Wir nehmen an, daß er zu Anfang der Bewegung die größte Entfernung a von O besitzt, daß also zur Zeit $t = 0$ $s = a$ ist. Dann ergibt sich aus Gleichung (8):

$$s = \frac{c}{k} \cdot \cos C \quad \text{oder } \frac{c}{k} = \frac{a}{\cos C},$$

mithin wird

(9) $$a = \frac{a}{\cos C} \cdot \cos(kt + C),$$

wo nur noch die Konstante C zu bestimmen ist. Zu dem Zwecke ziehen wir die Geschwindigkeit des materiellen Punktes in Betracht. Aus Gleichung (9) erhält man:

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{ak}{\cos C} \cdot \sin(kt + C).$$

Nun ist für $t = 0$ auch $v = 0$, also muß

$$\sin C = 0, \text{ d. h. } C = n\pi$$

sein, wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl mit Einschluß von 0 ist. Demnach wird

$$\cos C = \pm 1, \quad \cos(kt + C) = \pm \cos kt$$

und die Gleichung (9) erhält nunmehr die einfachere Form:

$$s = \pm a \cdot \cos kt.$$

Jetzt ist es noch in unser Belieben gestellt, anzunehmen, ob sich der materielle Punkt zur Zeit $t = 0$ auf der rechten oder auf der linken Seite der Gleichgewichtslage befindet. Nehmen wir das erstere an, so gilt das positive Vorzeichen und man erhält somit schließlich:

(10) $$\boldsymbol{s = a \cdot \cos kt}$$

als das Zeitweggesetz für die harmonische Bewegung.

§ 20. Die Pendelbewegung.

Außer den beiden bisher untersuchten freien Bewegungsvorgängen wollen wir noch eine gezwungene Bewegung betrachten, d. h. eine solche, bei der der materielle Punkt genötigt ist, eine vorgeschriebene Bahn zu beschreiben. Bewegt sich ein nur der Schwerkraft unterworfener materieller Punkt P auf einem Kreisbogen, so daß er von einem festen Punkte O, dem Mittelpunkte des Kreises, immer dieselbe Entfernung $OP = l$ besitzt (vgl. Fig. 12), so führt er eine sog. Pendelbewegung aus. C sei die Gleichgewichtslage, A und B seien die äußersten Lagen auf beiden Seiten von C, die der materielle Punkt bei der Bewegung annimmt. Die Strecke $OP = l$ heißt die Pendellänge, die von A und P auf die Strecke OC gefällten Lote AD und PE mögen mit a bzw. s, die Winkel AOC und POC mit α bzw. φ bezeichnet werden. Die auf den materiellen Punkt P wirkende Kraft hat die Größe mg und ist vertikal nach unten gerichtet. Zerlegt man diese Kraft in zwei Komponenten PF und PG, von denen die erste in der Verlängerung

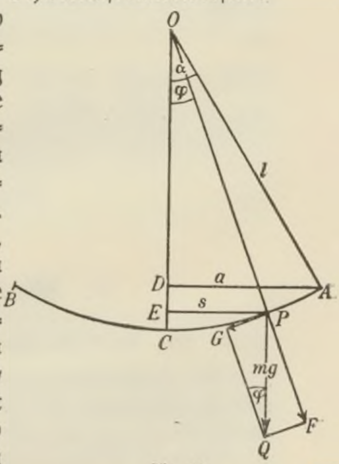


Fig. 12.

von OP, die zweite in der Richtung der Tangente des Kreisbogens liegt, so wird die Bewegung des Pendels nur durch diese zweite Komponente bewirkt, die den Wert besitzt:

$$PG = mg \cdot \sin\varphi = \frac{mg}{l} \cdot s;$$

die Beschleunigung des materiellen Punktes P in der Richtung der Tangente ist daher gleich $\frac{g}{l} \cdot s$.

Für beliebig große Werte des Ausschlagswinkels α läßt sich das Zeitweggesetz bei der Pendelbewegung nur mit Hilfe der höheren Mathematik bestimmen. Bei der praktischen Benutzung des Pendels kommen jedoch nur so kleine Ausschlagswinkel in Betracht, daß der Bogen AB als geradlinige Strecke angesehen werden kann, und es ist daher geradeso wie bei der harmonischen Bewegung die Beschleunigung des materiellen Punktes P zur Zeit t:

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 s, \quad \text{wo } k = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ ist}.$$

Wie im vorigen Paragraphen ergibt sich hieraus für die Pendelbewegung das Zeitweggesetz:

$$s = a \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right), \tag{11}$$

wobei angenommen ist, daß der materielle Punkt P zur Zeit $t = 0$ sich in A befindet und den größten Abstand a von der Gleichgewichtslage auf der rechten Seite besitzt.

Da für $\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t = \pi$, d. h. für $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ $s = -a$ wird, so ist der materielle Punkt P nach Verlauf von $\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ Sekunden nach B gelangt, und hat seinen größten Abstand a von der Gleichgewichtslage auf der linken Seite erreicht. Somit beträgt die Zeit, die der materielle Punkt P braucht, um den Weg AB zurückzulegen, $\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ Sekunden, oder mit anderen Worten:

Die Dauer einer einfachen Pendelschwingung hat den Wert

$$\boldsymbol{T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}} \text{ Sekunden}. \tag{12}$$

V. Maxima und Minima.

§ 21. Die Bestimmung der extremen Werte einer Funktion.

Die Funktion $y = f(x)$ besitzt für den Wert $x = x_0$ ein Maximum oder ein Minimum oder kurz einen extremen Wert $y_0 = f(x_0)$, wenn sowohl für $x = x_0 + \varepsilon$ als auch für $x = x_0 - \varepsilon$ $f(x)$ entweder größer oder kleiner ist als $f(x_0)$, wo ε eine beliebig kleine absolute Zahl bezeichnet.

Der Wert $x_0 = f(x_0)$ ist ein **Maximum**, wenn sowohl $f(x_0 + \varepsilon)$ als auch $f(x_0 - \varepsilon)$ kleiner ist als $f(x_0)$, hingegen ein **Minimum**, wenn jeder dieser beiden Werte größer ist als $f(x_0)$. Stellt man die Funktion $y = f(x)$ graphisch durch eine Kurve dar, so entspricht einem extremen Werte der Funktion ein Kulminationspunkt der Kurve, in welchem diese entweder vom Steigen zum Fallen (Maximum) oder vom Fallen zum Steigen (Minimum) übergeht. Nach § 10 sind die Abszissen der Kulminationspunkte die Wurzeln der Gleichung

$$f'(x) = 0;$$

demnach besteht der

Satz: Eine Funktion $y = f(x)$ kann nur für solche Werte der unabhängig Veränderlichen x einen extremen Wert besitzen, für welche die erste Abteilung $f'(x) = 0$ ist.

Es sei z. B.

$$y = f(x) = \tfrac{1}{100} \cdot (3x^4 - 8x^3 - 66x^2 + 144x - 50),$$

d. h.
$$100y = 3x^4 - 8x^3 - 66x^2 + 144x - 50.$$

Die Kurve, die dieser Gleichung entspricht, ist in Fig. 13 der Figurentafel durch die voll ausgezogene Linie dargestellt. Nach § 11 ist nun

$$f'(x) = \tfrac{3}{25} \cdot (x^3 - 2x^2 - 11x + 12);$$

wir erhalten also diejenigen Werte von x, für die $f'(x) = 0$ ist, indem wir auch die Funktion

$$y' = \tfrac{3}{25} \cdot (x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$$

graphisch durch eine Kurve darstellen und die Punkte bestimmen, in denen diese Kurve die x-Achse schneidet. In der Figur ist diese Kurve, die wir kurz als die y'-Kurve bezeichnen wollen, als eine gestrichelte Linie gezeichnet; sie schneidet die x-Achse in den Punkten

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = 4$$

und die zugehörigen Werte von y sind

$$y_1 = -6{,}17, \quad y_2 = 0{,}23 \quad \text{und} \quad y_3 = -2{,}74.$$

Die Punkte P_1, P_2 und P_3, deren Koordinaten diese Werte besitzen, stellen daher die Kulminationspunkte der y-Kurve dar, oder mit anderen Worten:

Die Funktion $y = f(x)$ besitzt für $x = x_1$, x_2 und x_3 die extremen Werte y_1, y_2 und y_3.

§ 22. Das Kriterium für das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums.

Es ist noch zu entscheiden, ob für die der Gleichung $f'(x) = 0$ genügenden Werte von x die Funktion $y = f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum besitzt. Sind $x = \xi$ und $y = \eta$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes der y-Kurve, so wird nach Gleichung (13) in § 10 der Winkel α, den die in diesem Punkte an die Kurve gelegte Tangente mit der positiven Richtung der x=Achse bildet, durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(\xi)$$

bestimmt. Dieser Winkel ist ein spitzer, solange $f'(\xi)$ positiv, ein stumpfer, solange $f'(\xi)$ negativ ist, oder mit anderen Worten:

Die y=Kurve steigt für wachsende Werte von x, solange die y'=Kurve oberhalb, sie fällt, solange die y'=Kurve unterhalb der Abszissenachse verläuft. Die Funktion $y = f(x)$ besitzt für diejenigen Werte $x = \xi$ ein Maximum, für welche die y'=Kurve die x=Achse fallend, ein Minimum, wenn sie dieselbe steigend schneidet.

Um ferner zu entscheiden, ob für einen solchen Wert $x = \xi$ der erste oder zweite Fall eintritt, ziehen wir noch die zweite Ableitung der Funktion $y = f(x)$, nämlich

$$y'' = f''(x) = \tfrac{3}{25} \cdot (3x^2 - 4x - 11)$$

in Betracht. Die dieser Funktion entsprechenden Kurve, die y''=Kurve, ist in der Figur durch eine strichpunktierte Linie dargestellt. Da die Funktion $y'' = f''(x)$ aus der Funktion $y' = f'(x)$ in derselben Weise hervorgeht, wie die Funktion $y' = f'(x)$ aus der ursprünglichen Funktion $y = f(x)$, so steigt die y'=Kurve für wachsende Werte von x, solange die y''=Kurve unterhalb der Abszissenachse verläuft. Die y'=Kurve schneidet daher die x=Achse fallend, wenn in diesem Schnittpunkte $x = \xi$ $f''(\xi)$ negativ ist, steigend, wenn $f''(\xi)$ positiv ist. Somit sind wir zu folgendem Ergebnis gelangt:

Lehrsatz: Die Funktion $y = f(x)$ besitzt einen extremen Wert für diejenigen Werte ξ von x, die der Gleichung $f'(\xi) = 0$ Genüge leisten. Dieser extreme Wert ist ein Maximum, wenn $f''(\xi)$ negativ, hingegen ein Minimum, wenn $f''(\xi)$ positiv ist.

Der besondere Fall, daß für eine der Wurzeln der Gleichung $f'(\xi) = 0$ und gleichzeitig $f''(\xi) = 0$ ist, wird im folgenden Paragraphen erörtert werden.

Für das im vorigen Paragraphen behandelte Beispiel hat ξ einen der Werte

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = 4;$$

da die zugehörigen Werte von $y'' = f''(\xi)$

$$y_1' = 3{,}36, \quad y_2'' = -1{,}44 \quad \text{und} \quad y_3'' = 2{,}52$$

sind, so besitzt die Funktion $y = f(x)$ für $x = x_2$ ein Maximum, hingegen für $x = x_1$ und $x = x_3$ Minima, was auch durch die Figur bestätigt wird. Gleichzeitig ist aus der Figur ersichtlich, daß die Begriffe „Maximum" und „Minimum" relativ aufzufassen sind und sich nur auf den Verlauf der Kurve in der unmittelbaren Nähe der Kulminationspunkte beziehen. So ist in dem obigen Beispiele das für $x = x_2$ eintretende Maximum erheblich kleiner als die absoluten Werte der für $x = x_1$ und $x = x_2$ vorhandenen Minima.

§ 23. Die Wendepunkte einer Kurve.

Wir wollen noch als zweites Beispiel die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{100} \cdot (3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x - 25)$$

oder
$$100y = 3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x - 25$$

untersuchen und zunächst ihre extremen Werte bestimmen. Diese ergeben sich durch Auflösung der Gleichung

$$y' \text{ oder } f'(x) = \frac{3}{25} \cdot (x^3 - x^2 - 8x + 12) = 0.$$

Die den Gleichungen $y = f(x)$ und $y' = f'(x)$ entsprechenden Kurven sind in Fig. 14 der Figurentafel durch die voll ausgezogene und durch die gestrichelte Linie dargestellt. Aus der Zeichnung der y'-Kurve ersieht man, daß diese die x-Achse im Punkte $x = -3$ schneidet und im Punkte $x = 2$ berührt; es sind also $x_1 = -3$ und $x_1 = 2$ Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, so daß man der Funktion $y' = f'(x)$ auch die Form geben kann

$$y' = \frac{3}{25} \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 3).$$

Um zu untersuchen, ob für diese Wurzelwerte x_1 und x_2 ein Maximum oder ein Minimum der Funktion $y = f(x)$ eintritt, haben wir noch die Funktion

$$y'' = f''(x) = \frac{3}{25} \cdot (3x^2 - 2x - 8)$$

in Betracht zu ziehen. Die Funktion $y = f(x)$ besitzt für $x = x_1$ oder $x = x_2$ ein Maximum oder ein Minimum, wenn für den betreffenden Wert von x die zweite Ableitung $f''(x)$ einen negativen bzw. positiven Wert erhält. Nun ist für $x = x_1$ $y'' = 3$, also tritt für diesen Wert von x ein Minimum der Funktion $y = f(x)$ ein, das den Wert $y_1 = -5{,}38$ besitzt. Hingegen ist für $x = x_2$ $y'' = 0$, so daß die Funktion $y = f(x)$ für diesen Wert von x überhaupt keinen extremen Wert besitzt; vielmehr ist, wie auch aus der Figur hervorgeht, die y-Kurve in der Umgebung dieses Punktes stetig im Steigen (oder im Fallen) begriffen. Man nennt einen solchen Punkt einen Wendepunkt der Kurve.

Ist P ein Kulminationspunkt der Kurve $y = f(x)$ und sind P' und P'' zwei dem Punkte P benachbarte Kurvenpunkte zu beiden Seiten des Punktes P, so ist die Kurventangente in P der x-Achse parallel, und die Tangenten in P' und P'' liegen auf derselben Seite der Kurve. Ist hingegen P ein Wendepunkt der Kurve, so liegen die Tangenten in den Nachbarpunkten P' und P'' auf verschiedenen Seiten der Kurve oder die Kurventangente im Punkte P geht, während dieser Punkt den Wendepunkt überschreitet, von der einen Seite der Kurve auf die andere Seite über. Man nennt daher die Tangente im Punkte P eine Wendetangente der Kurve. Wir sind somit zu folgender Erweiterung des im vorigen Paragraphen aufgestellten Lehrsatzes gelangt:

Lehrsatz: Die Funktion $y = f(x)$ besitzt für diejenigen Werte von x, für welche $f'(x) = 0$ ist, einen extremen Wert; dieser Wert ist ein **Maximum**, wenn für ihn $f''(x)$ negativ, ein **Minimum**, wenn für ihn $f''(x)$ positiv ist. Ist aber für einen solchen Wert von x auch gleichzeitig $f''(x) = 0$, so ist weder ein Maximum noch ein Minimum der Funktion $y = f(x)$ vorhanden, und für die Kurve $y = f(x)$ ist ein solcher Punkt ein **Wendepunkt**.

Die Abszissen der Wendepunkte einer Kurve sind die Wurzeln der Gleichung $f''(x) = 0$. Wenn für einen solchen Wert von x auch gleichzeitig $f'(x) = 0$ ist, so ist die Wendetangente der x-Achse parallel; wenn aber für einen Wert von x, der der Gleichung $f''(x) = 0$ genügt, $f'(x) \gtrless 0$ ist, so ist die Wendetangente gegen die x-Achse geneigt. Einen Wendepunkt der ersten Art besitzt die in Fig. 14 dargestellte Kurve für $x = 2$, $y = 0{,}87$, einen Wendepunkt der zweiten Art für $x = -\frac{4}{3}$, $y = -2{,}83$; die in Fig. 13 dargestellte Kurve besitzt nur Wendepunkte der zweiten Art, und zwar für $x = 2{,}694$, $y = -1{,}395$ und für $x = -1{,}361$, $y = -3{,}378$.

VI. Das Integral.

§ 24. Die Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegments.

Die Gleichung einer Parabel sei

(1) $$y = m \cdot x^2,$$

wo $m = \frac{1}{2p}$ ist, wenn p den halben Parameter der Parabel bezeichnet. Der Scheitelpunkt der Parabel (vgl. Fig. 15) sei O und A sei ein beliebiger Punkt der Parabel, dessen Abszisse OB mit a und dessen Ordinate AB mit b bezeichnet werden möge. Wir stellen uns die Aufgabe, den Inhalt der von dem Parabelbogen OA, der Abszisse OB und der Ordinate AB begrenzten Fläche, den wir mit F bezeichnen wollen, zu berechnen.

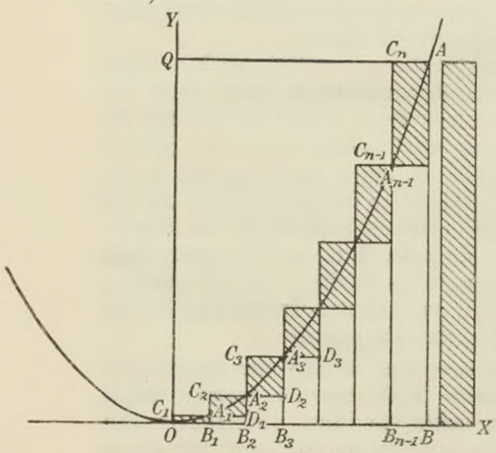


Fig. 15.

Wir teilen die Abszisse OB in n gleiche Teile, wo n eine beliebige absolute ganze Zahl bedeutet (in der Figur ist $n = 7$ angenommen worden), und errichten auf der x-Achse in den Teilpunkten B_1, B_2, B_3, ... B_{n-1} Lote, welche die Parabel in den Punkten A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1} schneiden mögen. Ferner ziehen wir durch diese Punkte zur x-Achse Parallelen, welche die beiderseits benachbarten Lote bzw. ihre Verlängerungen in den Punkten C_1 und D_1, C_2 und D_2, ... C_{n-1} und D_{n-1} schneiden. Auf diese Weise entstehen zwei Gruppen von Rechtecken: die $(n-1)$ Rechtecke der ersten Gruppe, nämlich

$$A_1B_1B_2D_1,\ A_2B_2B_3D_2,\ \ldots\ A_{n-1}B_{n-1}BD_{n-1}$$

sind der Fläche ABO einbeschrieben, die n Rechtecke der zweiten Gruppe, nämlich

$$A_1B_1OC_1,\ A_2B_2B_1C_2,\ \ldots\ ABB_{n-1}C_n$$

sind dieser Fläche umbeschrieben. Der Inhalt der Fläche ABO ist offenbar größer als die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke der ersten Gruppe, aber kleiner als die der zweiten Gruppe. Bezeichnen wir nun den $n$ten Teil der Strecke OB, d. h. jede der n Teilstrecken OB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... $B_{n-1}B$ mit $\triangle x$, so daß

(2) $$\triangle x = \frac{a}{n}$$

ist, so sind die Abszissen der Punkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_{n-1},\ A$$

bzw. gleich

$$\triangle x,\ 2\cdot\triangle x,\ 3\cdot\triangle x,\ \ldots\ (n-1)\cdot\triangle x,\ n\cdot\triangle x = a;$$

hingegen haben die Ordinaten dieser Punkte bzw. die Werte

$$m\cdot(\triangle x)^2,\ 4m\cdot(\triangle x)^2,\ 9m\cdot(\triangle x)^2,\ \ldots (n-1)^2\cdot m\cdot(\triangle x)^2,$$
$$n^2\cdot m\cdot(\triangle x)^2 = ma^2.$$

Die Flächeninhalte der $(n-1)$ einbeschriebenen Rechtecke sind daher der Reihe nach

$$m\cdot(\triangle x)^3,\ 4m\cdot(\triangle x)^3,\ 9m\cdot(\triangle x)^3,\ \ldots\ (n-1)^2m\cdot(\triangle x)^3$$

und die der n umbeschriebenen Rechtecke

$$m\cdot(\triangle x)^3,\ 4m\cdot(\triangle x)^3,\ 9m\cdot(\triangle x)^3,\ \ldots\ n^2m\cdot(\triangle x)^3;$$

folglich ist die Summe der Flächeninhalte aller einbeschriebenen Rechtecke gleich

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)\cdot m\cdot(\triangle x)^3$$
$$=\frac{n(n-1(2n-1)}{6}\cdot m\cdot(\triangle x)^3 = \frac{m}{6}\cdot n^3\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdot(\triangle x)^3$$
$$=\frac{m}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdot a^3$$

und die Summe der Flächeninhalte aller umbeschriebenen Rechtecke gleich

$$(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\cdot m\cdot(\triangle x)^3$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot m\cdot(\triangle x)^3 = \frac{m}{6}\cdot n^3\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot(\triangle x)^3$$
$$=\frac{m}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot a^3.$$

Die zweite Summe ist um den Betrag

$$n^2 m \cdot (\triangle x)^3 = ma^2 \cdot \triangle x = b \cdot \triangle x$$

größer als die erste Summe, was auch unmittelbar aus der Figur hervorgeht. Läßt man nun die absolute ganze Zahl n über alle Grenzen wachsen oder nähert sich $\triangle x$ immer mehr dem Grenzwerte 0, so nähert sich der Unterschied der obigen beiden Summen ebenfalls immer mehr dem Grenzwerte 0, und beide Summen ergeben für den Inhalt der Fläche ABO den gemeinsamen Wert

$$F = \frac{m}{3} \cdot a^3 = \frac{ab}{3}.$$

Fällt man von A aus auf die Ordinatenachse das Lot AQ, so ergibt sich hieraus für den Flächeninhalt des Parabelsegments AOQ der Wert $\frac{2}{3}\,ab$.

§ 25. Allgemeine Darstellung des Inhalts der von einer beliebigen Kurve begrenzten Fläche.

Es sei

$$y = f(x) \tag{1}$$

die Gleichung einer beliebig gestalteten Kurve in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte O; A_0 und A seien irgend zwei Punkte der Kurve (vgl. Fig. 16), die Koordinaten von A_0 mögen mit x_0 und y_0, die von A mit x und y bezeichnet werden. Es handelt sich darum, den Inhalt der von der Kurve $A_0 A$, den Ordinaten y_0 und y und der Abszissenachse begrenzten Fläche ABB_0A_0 zu bestimmen, wo B und B_0 die Fußpunkte der von den Punkten A und A_0 auf die Abszissenachse gefällten Lote bezeichnen. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Kurve zwischen den Punkten A_0 und A oberhalb der Abszissenachse liegt und daß sie für wachsende Werte von x in stetem Steigen begriffen ist.

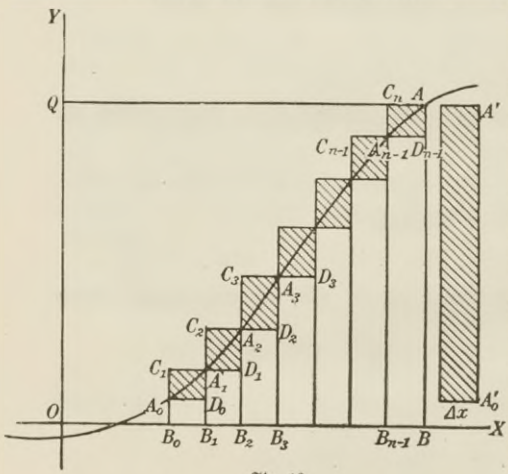


Fig. 16.

Wir teilen nun wieder die Strecke $B_0 B$ in n gleiche Teile, deren jeden wir mit $\triangle x$ bezeichnen; die Teilpunkte seien $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{n-1}$. Ferner errichten wir in diesen Punkten auf der Abszissenachse Lote, nennen die Schnittpunkte dieser Lote mit der Kurve $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ und ziehen durch diese Punkte zur Abszissenachse die Parallelen, welche die benachbarten Lote bzw. deren Verlängerungen in den Punkten C_1 und D_1, C_2 und D_2, ... C_{n-1} und D_{n-1} schneiden mögen; endlich sei D_0 der Schnittpunkt der durch A_0 zur x-Achse gezogenen Parallele mit der Ordinate des Punktes A_1. Auf diese Weise wird das Flächenstück A_0B_0BA wieder in zwei Summen von Rechtecken eingeschlossen, in die Summe der n einbeschriebenen Rechtecke

$$A_0B_0B_1D_0,\ A_1B_1B_2D_1,\ A_2B_2B_3D_2,\ \ldots.\ A_{n-1}B_{n-1}BD_{n-1}$$

und in die der n umbeschriebenen Rechtecke

$$A_1B_1B_0C_1,\ A_2B_2B_1C_2,\ A_3B_3B_2C_3,\ \ldots\ ABB_{n-1}C_n,$$

und wir wollen zunächst die Flächeninhalte dieser Rechtecke und ihre Summen berechnen.

Bezeichnen wir die Abszissen der Punkte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots.\ A_{n-1}$$

mit

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_{x-1},$$

so haben die Flächeninhalte der einbeschriebenen Rechtecke der Reihe nach die Werte

$$f(x_0)\cdot\triangle x,\ f(x_1)\cdot\triangle x,\ f(x_2)\cdot\triangle x,\ \ldots.\ f(x_{n-1})\cdot\triangle x$$

und die der umbeschriebenen Rechtecke die Werte

$$f(x_1)\cdot\triangle x,\ f(x_2)\cdot\triangle x,\ f(x_3)\cdot\triangle x,\ \ldots.\ f(x)\cdot\triangle x.$$

Bezeichnen wir ferner die Summen der Flächeninhalte aller einbeschriebenen und aller umbeschriebenen Rechtecke mit F' bzw. F'', so ist

$$F' = [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}] \cdot \triangle x$$

und

$$F'' = [f(x_1) + f(_2) + f(x_3) + \cdots + f(x)] \cdot \triangle x.$$

Der Unterschied bei der Summe ist gleich

$$[f(x) - f(x_0)] \cdot \triangle x \text{ oder gleich } (AB - A_0B_0) \cdot \triangle x,$$

d. h. gleich der Summe der in der Figur schraffierten kleinen Rechtecke oder dem daneben gezeichneten Rechtecke, dessen lange Seite $A'A'_0 = AB - A_0B_0$ und dessen kurze Seite gleich $\triangle x$ ist. Läßt man nun die absolute ganze Zahl n immer größer werden, nähert sich also die Strecke $\triangle x$ immer mehr dem Grenzwerte 0, so nähert sich auch der Flächeninhalt dieses Rechtecks immer mehr der Grenze 0, da die Maßzahl der Strecke $A'A'_0$ einen bestimmten Wert besitzt. Beide Flächensummen F' und F'' nähern sich also für $\lim \triangle x = 0$ demselben Grenzwerte F, dem Inhalte der Fläche A_0B_0BA. Die obigen Ausdrücke für F' und F'' werden einander gleich, wenn man zu dem ersten noch das Glied $f(x)\cdot\triangle x$ oder das Rechteck $ABB_{n-1}C_n$ und zu dem zweiten noch das Glied $f(x_0)\cdot\triangle x$ oder das Rechteck $A_0B_0B_1D_0$ hinzufügt. Da sich die Flächeninhalte dieser beiden Rechtecke mit $\triangle x$ der Grenze 0 nähern, so ergibt sich für den Inhalt F des Flächenstückes A_0B_0BA der Wert

$$F = \lim_{\triangle x = 0} [f(x_0) \cdot \triangle x + f(x_1) \cdot \triangle x + f(x_2) \cdot \triangle x + \ldots + f(x) \cdot \triangle x],$$

wofür man unter Benutzung eines Summenzeichens die kürzere Bezeichnungsweise

$$(2) \qquad F = \lim_{\triangle x = 0} \mathop{\mathrm{S}}_{x_0}^{x} f(x) \cdot \triangle x$$

eingeführt hat.

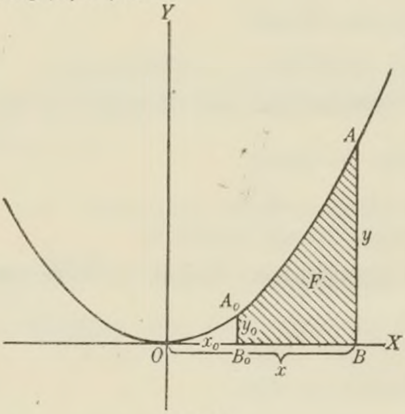


Fig. 17.

Beispiel: Es soll der Inhalt der von der Parabel $y = mx^2$, den Ordinaten zweier beliebigen Kurvenpunkte A_0, A und der Abszissenachse begrenzten Fläche berechnet werden. (Vgl. Fig. 17.)

Die Koordinaten der beiden Kurvenpunkte A_0 und A seien x_0, y_0 und x, y, und es werde $x > x_0$ angenommen. In dem Ausdruck (2) haben wir statt der allgemeinen Funktion $f(x)$ die besondere Funktion mx^2 und für x der Reihe nach die Werte

$$x_0,\ x_1 = x_0 + \triangle x,\ x_2 = x_0 + 2 \cdot \triangle x,\ \ldots .\ x = x_0 + n \cdot \triangle x$$

zu setzen. Es wird dann

$$F = \lim_{\triangle x = 0} \mathop{\mathrm{S}}_{x_0}^{x} mx^2 \cdot \triangle x$$

$$= \lim_{\triangle x = 0} m \cdot (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2) \cdot \triangle x$$

$$= \lim_{\triangle x = 0} m \cdot [x_0^2 + (x_0 + \triangle x)^2 + (x_0 + 2 \cdot \triangle x)^2 + \cdots + (x_0 + n \cdot \triangle x)^2] \cdot \triangle x,$$

wo in der eckigen Klammer $(n + 1)$ Summanden stehen. Nach wiederholter Anwendung der Formel für $(a + b)^2$ ergibt sich:

$$F = m \cdot \lim_{\triangle x = 0} [(n + 1) x_0^2 \cdot \triangle x + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) x_0 \cdot \overline{\triangle x}^2 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \cdot \overline{\triangle x}^3]$$

$$= m \cdot \lim_{\triangle x = 0} \left[(n+1) x_0^2 \cdot \triangle x + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} x_0 \cdot \overline{\triangle x}^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \overline{\triangle x}^3\right]$$

$$= m \cdot \lim_{\triangle x = 0} \left[(n+1) x_0^2 \cdot \triangle x + \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_0 \cdot (n \triangle x)^2 + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot (n \triangle x)^3\right],$$

oder da $n \cdot \triangle x = x - x_0$ ist

$$F = m \cdot \lim_{\Delta x=0} \Big[x_0^2 \cdot \triangle x + x_0^2 \cdot (x - x_0) + \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) x_0 \cdot (x - x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big(2 + \frac{1}{n}\Big) \cdot (x - x_0)^3 \Big].$$

Dieser Ausdruck gestattet es, den Grenzübergang zu vollziehen; setzt man in ihm sowohl $\triangle x$ als auch $\frac{1}{n}$ gleich 0, so erhält man:

$$F = m \cdot [x_0^2 \cdot (x - x_0) + x_0 \cdot (x - x_0)^2 + \tfrac{1}{3} \cdot (x - x_0)^3]$$
$$= \frac{m}{3}(x - x_0) \cdot [3 x_0^2 + 3 x_0 (x - x_0) + (x - x_0)^2]$$
$$= \frac{m}{3}(x - x_0) \cdot (x^2 + x\, x_0 + x_0^2),$$

d. h.

$$F = \frac{m}{3} \cdot (x^3 - x^3),$$

ein Wert, der auch durch eine einfache geometrische Betrachtung aus dem im vorigen Paragraphen gewonnenen Ergebnis abgeleitet werden kann.

§ 26. Das Integral.

Ebenso wie früher für den Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ die neue Bezeichnungsweise $\frac{dy}{dx}$ und der Name „Differentialquotient" eingeführt wurde, so hat man für den aus einer Summe hervorgegangenen Grenzwert

$$\lim_{\Delta=0} \mathop{\mathrm{S}}_{x_0}^{x} f(x) \triangle x \text{ die kürzere Bezeichnungsweise} \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

eingeführt, wo das Zeichen $\int$ ein langgestrecktes Summenzeichen S darstellt. Man nennt diesen Ausdruck das **Integral** der Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen x_0 und x. Nach § 25 bedeutet das Wort „Integral" nichts anderes als den **Grenzwert** der „Gesamtheit" einer Anzahl von Flächenstücken von der Breite $\triangle x$ für $\lim \triangle x = 0$.

Auch hier ist wie im § 6 nachdrücklich darauf hinzuweisen, daß der Ausdruck $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\, dx$ nur ein Symbol für den obigen Grenzwert darstellt, ebenso wie das Zeichen $\frac{dy}{dx}$ nur eine abgekürzte Schreibweise für $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ ist. **Der Faktor bzw. der Divisor dx hat weder in der Schreibweise des Integrals noch in der des Differentialquotienten eine selbständige Bedeutung.**

Fassen wir das Ergebnis dieses und des vorhergehenden Paragraphen kurz zusammen, so gelangen wir für das Integral zu folgender

1. Definition: Unter dem Integral einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ zwischen den Grenzen x_0 und x, das

in ausführlicher Schreibweise mit $\lim\limits_{\Delta x = 0} \mathop{S}\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$

„ abgekürzter „ „ $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$

bezeichnet wird, versteht man den Grenzwert der Summe

$f(x_0)\cdot\triangle x + f(x_0 + \triangle x)\cdot\triangle x + f(x_0 + 2\cdot\triangle x)\cdot\triangle x + \cdots + f(x)\cdot\triangle x,$

wo $x = x_0 + n\cdot\triangle x$ ist, für $\lim\triangle x = 0$ und für einen über alle Grenzen wachsenden Wert der absoluten ganzen Zahl n.

Der Wert dieses Integrals wird geometrisch durch den Inhalt der von der Kurve $y = f(x)$, den zu den Abszissen x_0 und x gehörigen Ordinaten y_0 und y und der Abszissenachse begrenzten Fläche dargestellt.

§ 27. Zusammenhang zwischen dem Differentialquotienten und dem Integral.

Das in den Paragraphen 25 und 26 dargestellte Verfahren, den Inhalt der von einer Kurve, den Ordinaten zweier beliebiger Kurvenpunkte und der Abszissenachse begrenzten Fläche oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Integral einer gegebenen Funktion zwischen vorgeschriebenen Grenzen zu berechnen, ist nur in wenigen Fällen auf ebenso einfache Weise wie in dem im § 25 behandelten Beispiele ausführbar. Ein anderer Weg zur Lösung dieser Aufgabe und damit eine zweite Definition und eine viel einfachere Berechnung des Integrals ergibt sich aus dem Zusammenhange zwischen dem Differentialquotienten und dem Integral.

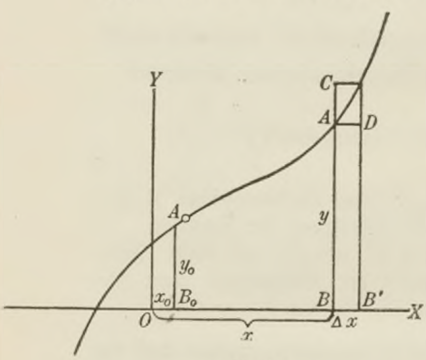


Fig. 18.

Es sei (vgl. Fig. 18)

(1) $$y = f(x)$$

die Gleichung einer beliebigen Kurve, A_0 und A seien zwei beliebige Kurvenpunkte mit den Koordinaten x_0, y_0 und x, y und F sei der Inhalt der von dem Kurvenstück $A_0\,A$, den beiden Ordinaten A_0B_0, AB und der Abszissenachse begrenzten Fläche A_0B_0BA. Wir wollen die Maßzahl der Abszisse x_0 als eine beliebig angenommene Zahl, die der Abszisse x als eine veränderliche Zahl ansehen, die alle möglichen reellen Werte annehmen kann; dann ist F eine Funktion von x, die wir mit $\varphi(x)$ bezeichnen wollen und die für $x = x_0$ den Wert 0 besitzt.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß der in Betracht kommende Teil der Kurve oberhalb der Abszissenachse liegt und daß die Kurve für wachsende Werte von x in stetem Steigen begriffen ist, so wird auch der Wert der Funktion $\varphi(x)$ für zunehmende Werte von x immer größer. Wir stellen uns nun die Aufgabe, den Wert des Differentialquotienten der Funktion $F = \varphi(x)$ für einen beliebigen Wert von x zu bestimmen.

Geben wir der Abszisse $OB = x$ einen beliebigen kleinen Zuwachs $BB' = \triangle x$, so wird auch der Flächeninhalt F einen kleinen Zuwachs erhalten, der in der Figur durch den schmalen Flächenstreifen $ABB'A'$ dargestellt wird und den wir mit $\triangle F$ bezeichnen wollen. Da nun das Flächenstück

$$A_0B_0BA = \varphi(x)$$

und

$$A_0B_0B'A' = \varphi(x + \triangle x)$$

ist, so ist das Flächenstück $ABB'A'$, d. h.

$$\triangle F = \varphi(x + \triangle x) - \varphi(x).$$

Die Größe dieses Flächenstückes ist zwischen die beiden Rechtecke $ABB'D$ und $CBB'A'$ eingeschlossen, von denen das erste den Flächeninhalt $f(x) \cdot \triangle x$ und das zweite den Inhalt $f(x + \triangle x) \cdot \triangle x$ besitzt. Es besteht daher unter der oben gemachten Annahme, daß y mit wachsenden Werten von x ebenfalls immer größer wird, die Ungleichheit

$$f(x) \cdot \triangle x < \triangle F < f(x + \triangle x) \cdot \triangle x$$

und somit

$$f(x) < \frac{\triangle F}{\triangle x} < f(x + \triangle x).$$

Für $\lim \triangle x = 0$ nehmen beide Größen, zwischen die der Quotient $\frac{\triangle F}{\triangle x}$ eingeschlossen ist, den gemeinsamen Wert $f(x)$ an, es ist also

$$(2) \qquad \lim_{\triangle x = 0} \frac{\triangle F}{\triangle x} = f(x) \text{ oder } \frac{dF}{dx} = f(x),$$

d. h. in Worten:

Der Differentialquotient der Funktion $F = \varphi(x)$, die den Inhalt des von der Ordinate y_0 bis zur Ordinate y reichenden Flächenstückes F angibt, ist gleich der Funktion $y = f(x)$ oder gleich der zur Abszisse x gehörigen Ordinate der Kurve.

Nach der ersten Definition wird der Wert des Integrals $\int\limits_x^{x_0} f(x)\,dx$ geometrisch durch diese Fläche F, analytisch also durch die Funktion $\varphi(x)$ dargestellt, und die Aufgabe, den Wert dieses Integrals zu berechnen, kommt nunmehr darauf hinaus, diejenige Funktion $\varphi(x)$ zu bestimmen, deren Differentialquotient gleich $f(x)$ ist, und die für $x = x_0$ den Wert 0 besitzt, oder mit anderen Worten:

(3) **Ist $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F = \varphi(x)$, so ist $\frac{dF}{dx} = f(x)$ und $\varphi(x_0) = 0$.**

Somit erhalten wir für den Begriff des Integrals die folgende

2. Definition: Unter dem Integral einer gegebenen Funktion $y=f(x)$ zwischen den Grenzen x_0 und x, das mit $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx$ bezeichnet wird, versteht man diejenige Funktion $\varphi(x)$, deren Differentialquotient gleich $f(x)$ ist und die für $x=x_0$ den Wert 0 besitzt.

Hieraus geht hervor, daß das Integrieren oder die Aufgabe, das Integral einer gegebenen Funktion zu bestimmen, eine Umkehrung des Differentiierens ist, genau in demselben Sinne, wie man die Subtraktion als Umkehrung der Addition, die Division als Umkehrung der Multiplikation und das Radizieren und Logarithmieren als Umkehrungen des Potenzierens bezeichnet.

§ 28. Das bestimmte und das unbestimmte Integral.

Die Aufgabe, das Integral einer gegebenen Funktion $f(x)$ zwischen zwei gegebenen Grenzen x_0 und x zu berechnen, zerfällt nach der zweiten Definition des Integrals in zwei Teile. Da es nämlich, wie sogleich gezeigt werden soll, unzählig viele Funktionen $\varphi(x)$ gibt, deren Differentialquotient gleich $f(x)$ ist, so haben wir

1. die Gesamtheit dieser Funktionen zu bestimmen und
2. aus dieser Gesamtheit diejenige Funktion $\varphi(x)$ auszuwählen, die für $x=x_0$ den Wert 0 besitzt.

Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ irgend zwei Funktionen von x, die denselben Differentialquotienten besitzen, dann ist nach § 17

$$\psi(x)=\varphi(x)+\mathfrak{K},$$

wo $\mathfrak{K}$ eine beliebige Konstante, d. h. einen ganz willkürlichen, von x unabhängigen Wert bezeichnet.

Ist also insbesondere $\varphi(x)$ diejenige Funktion, deren Differentialquotient gleich der gegebenen Funktion $f(x)$ ist und die für $x=x_0$ den Wert 0 besitzt, so hat die Gesamtheit aller Funktionen $\psi(x)$, deren Differentialquotient ebenfalls gleich $f(x)$ ist, die Form

$$\psi(x)=\varphi(x)+\mathfrak{K}.$$

Man nennt die Funktion $\psi(x)$ das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$ und die Funktion $\varphi(x)$ das bestimmte Integral dieser Funktion zwischen den Grenzen x_0 und x; das erste Integral wird mit $\int f(x)\,dx$ und das zweite wie bisher mit $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ bezeichnet.

Somit können wir die obige zweite Definition des Integrals folgendermaßen ergänzen:

3. Definition: Unter dem unbestimmten Integral $\int f(x)\,dx$ versteht man irgendeine mit einer willkürlichen additiven Konstante, der sog. Integrationskonstante, versehene Funktion $\psi(x)$, deren Differentialquotient gleich $f(x)$ ist; unter dem bestimmten Integral $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ diejenige Funktion $\varphi(x)$, deren Differentialquotient ebenfalls gleich $f(x)$ ist, die aber für $x = x_0$ den Wert 0 besitzt. Der Wert des bestimmten Integrals ergibt sich aus dem des unbestimmten Integrals mit Hilfe der Gleichung

$$\varphi(x) = \psi(x) - \psi(x_0).$$

§ 29. Integralformeln.

Die Werte der unbestimmten Integrale der einfachsten Funktionen ergeben sich aus den Umkehrungsformeln im § 17. Hiernach ist, wenn c eine gegebene Konstante, $\mathfrak{K}$ die beliebige Integrationskonstante bezeichnet:

(1) $$\int c \cdot dx = cx + \mathfrak{K}$$

(2) $$\int cx \cdot dx = \frac{c}{2} x^2 + \mathfrak{K}$$

(3) $$\int cx^n \cdot dx = \frac{c}{n+1} \cdot x^{n+1} + \mathfrak{K}$$

(4) $$\int \sqrt[n]{x} \cdot dx = \frac{n}{n+1} \cdot x \sqrt[n]{x} + \mathfrak{K}$$

(5) $$\int \cos x \cdot dx = \sin x + \mathfrak{K}$$

(6) $$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + \mathfrak{K}.$$

Bezeichnet man irgendeine der unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen mit $f(x)$, die entsprechende Funktion auf der rechten Seite, die noch eine willkürliche additive Konstante enthält, mit $\psi(x)$, so ergibt sich der Wert eines bestimmten Integrals von der Form (1) bis (6) zwischen den Grenzen x_0 und x aus der Gleichung

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \psi(x) - \psi(x_0).$$

§ 30. Beispiele.

Nehmen wir zum Schluß zunächst das im § 25 behandelte Beispiel wieder auf, so werden wir noch deutlicher als bisher erkennen, einen wie überaus großen Vorteil die Zurückführung des ursprünglichen Integralbegriffs auf den des Differentialquotienten gewährt.

1. Beispiel: Es soll der Inhalt der von der Parabel $y = mx^2$, den Ordinaten zweier beliebigen Kurvenpunkte A_0, A und der Abszissenachse begrenzten Fläche berechnet werden. (Vgl. Fig. 17.)

Der gesuchte Flächeninhalt $F = \varphi(x)$ ist gleich dem Werte des bestimmten Integrals

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} mx^2 \cdot dx.$$

Das unbestimmte Integral $\psi(x) = \int mx^2 \cdot dx$ hat nach der Integralformel (3) im § 29 den Wert $\frac{m}{3}x^3 + \mathfrak{K}$, also hat das bestimmte Integral $\varphi(x)$ den Wert $\psi(x) - \psi(x_0)$, d. h. es ist

$$F = \frac{m}{3} \cdot (x^3 - x_0{}^3).$$

2. Beispiel: Eine Kurve ist durch die Gleichung

$$10y = 12x + x^2 - x^3$$

gegeben. Man soll die Kurve zeichnen und den Inhalt der Fläche berechnen, die von der Kurve und der Abszissenachse begrenzt wird und die sich vom Koordinatenanfangspunkte bis zu der zur Abszisse $x = 3$ gehörigen Ordinate erstreckt.

Aus der Zeichnung der Kurve (vgl. Fig. 19 der Figurentafel) geht hervor, daß das zu berechnende schraffierte Flächenstück oberhalb der Abszissenachse liegt. Die Koordinaten der zu einer genauen Zeichnung erforderlichen Kulminationspunkte der Kurve sind nach § 10 zu bestimmen und besitzen die Werte

$$x = \frac{1 + \sqrt{37}}{3},$$

d. h. $x_1 = 2{,}36$; $y_1 = 2{,}07$; $x_2 = -1{,}69$; $y_2 = -1{,}26$.

Endlich ist der gesuchte Flächeninhalt

$$F = \int_0^3 f(x)\,dx, \text{ wo } f(x) = \tfrac{1}{10} \cdot (12x + x^2 - x^3)$$

ist. Das unbestimmte Integral

$$\psi(x) = \int f(x)\,dx$$

hat nach den Integralformeln (2) und (3) im § 29 den Wert

$$\tfrac{1}{10} \cdot \left(6x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + \mathfrak{K} = \frac{x^2}{120} \cdot (72 + 4x - 3x^2) + \mathfrak{K};$$

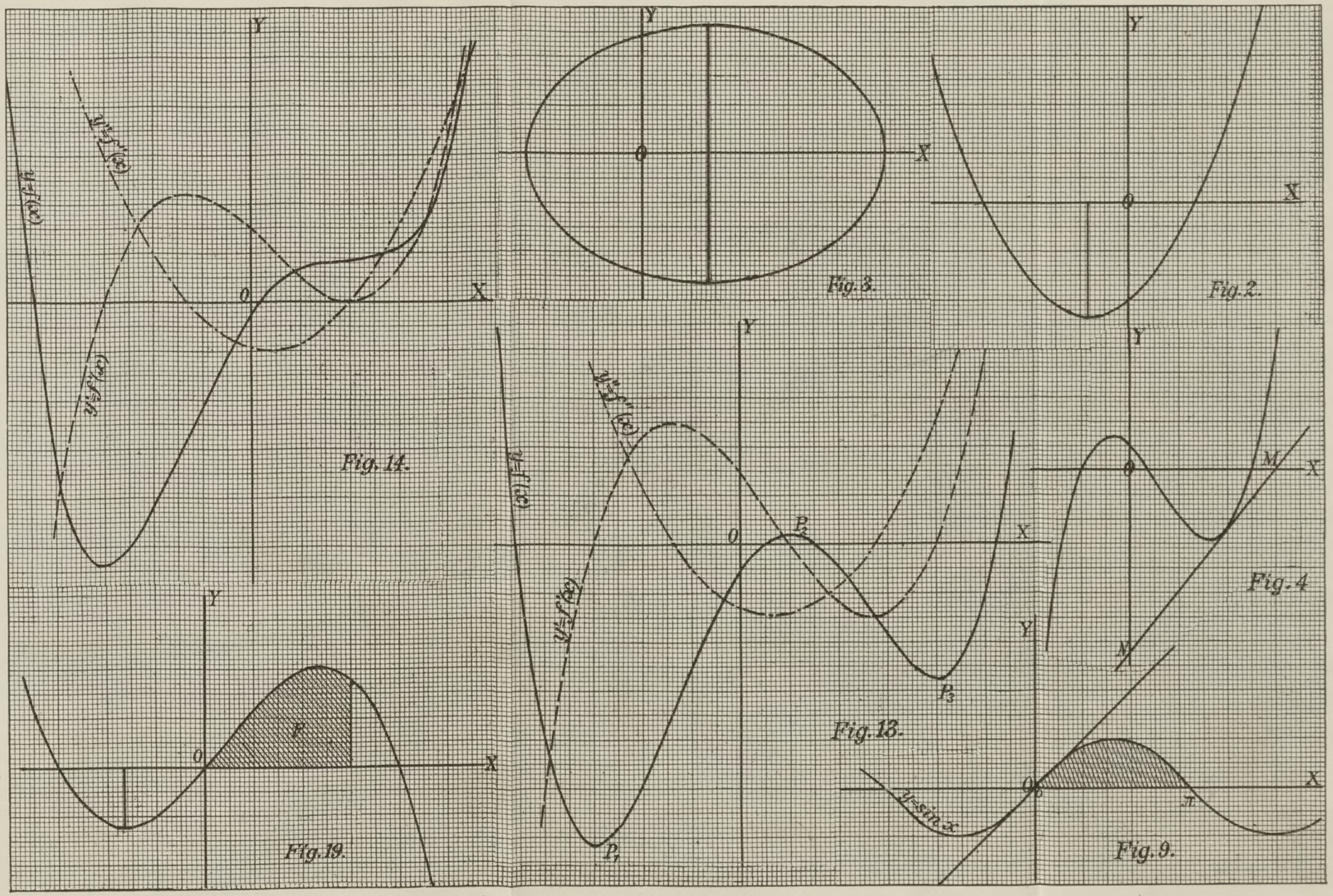
mithin ist das bestimmte Integral

$$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{x^2}{120} \cdot (72 + 4x - 3x^2)$$

und insbesondere

$$F = \int_0^3 f(x)\,dx = \tfrac{171}{40} = 4{,}275,$$

ein Wert, der durch die Figur mit großer Genauigkeit bestätigt wird.



Festschrift des Gymnasiums zu Lauenburg i. P. C. Frenzel: Die Fundamente für eine elementare Einleitung in die Differential- und Integralrechnung.

3. Beispiel: Man soll den Flächeninhalt eines von der Sinuskurve und der Abszissenachse begrenzten Segments berechnen.

Das in Betracht kommende Segment ist in Fig. 9 der Figurentafel schraffiert gezeichnet. Der Flächeninhalt dieses Segments ist

$$F = \int_0^\pi \sin x \cdot dx .$$

Nun hat nach der Integralformel (6) das unbestimmte Integral

$$\psi(x) = \int \sin x \cdot dx \text{ den Wert } -\cos x + \mathfrak{K},$$

also ist

$$\int_0^x \sin x \cdot dx = [-\cos x + \mathfrak{K}] - [-1 + \mathfrak{K}] = 1 - \cos x;$$

somit ergibt sich für den zu bestimmenden Flächeninhalt der Wert

$$F = \int_0^\pi \sin x \cdot dx = 2 .$$