Zu der

am Dienstage, den 6ten October, Vormittag von 9—12 und Nachmittag von 2—5 Uhr und am Mittwoch, den 7ten October, Vormittag von 9—12 Uhr

stattfindenden öffentlichen

Schulprüfung

im Saale des Königl. Gymnasiums

ladet ehrerbietigst ein

der Direktor **Cörber.**

Inhalt:

1. Ueber die Methode der kleinsten Quadrate von **F. A. Clemens,** Oberlehrer des Gymnasiums.
2. Jahresbericht über das Königl. Gymnasium zu Tilsit für das Schuljahr Michaeli $18\frac{39}{40}$.

Tilsit, 1840.

Gedruckt bei H. A. I. Reyländer.

Ueber

die Methode der kleinsten Quadrate.

Schon Lambert war dem wichtigen Problem, aus einer bestimmten Reihe von Beobachtungen die wahrscheinlichsten Resultate abzuleiten, in seinen „Beiträgen zur Mathematik“ 1765 sehr nahe. Die dasselbe lösende Methode der kleinsten Quadrate verdankt ihren Namen und ihre erste Veröffentlichung Legendre in seinem Werke: Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des comêtes etc. 1806, ihre Begründung und Erweiterung Gauß, der sie schon seit 1795 gekannt und benutzt hat, in seiner Theoria motus corporum coelestium 1809. etc., und nicht minder Laplace in seinem Werke: Théorie analytique des probabilités. Trois éd. 1820. Während dieser Koryphäe der französischen Mathematiker seinen Beweis aus der Annahme einer sehr großen Anzahl von Beobachtungen ableitet, geht jener große Geometer vom Princip des arithmetischen Mittels aus. Die Giltigkeit desselben leuchtet jedoch nicht von vorne herein ein; darum folge hier der Versuch einer Begründung der Methode der kleinsten Quadrate auf einem andern Wege, auf dem sich zugleich die Richtigkeit jenes Princips ergeben wird. Diesem mögen aber die Hauptgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die wegen ihrer praktischen Anwendung in allen Lebensverhältnissen selbst in den verbreitetesten Lehrbüchern der Mathematik ungern vermisst werden, zur Belehrung der Jugend und zum leichteren Verständniss des Nachfolgenden vorangehen. Die Gelegenheitsschrift erfüllt so ihre zwiefache Bestimmung.

§. 1.

Ein Ereigniss, das möglicherweise eintreten kann, aber nicht bestimmt eintritt, ist ein wahrscheinliches. Der Grad der Wahrscheinlichkeit hangt ab: 1. von der Zahl der Fälle, in denen das Ereigniss wirklich eintritt, d. h. der glücklichen Fälle; 2. von der Zahl aller möglichen Fälle, d. h. der Fälle, welche das Ereigniss möglicherweise herbeiführen können. Mit dem Steigen der möglichen Fälle, bei unveränderter Anzahl der günstigen, fällt der Werth der Wahrscheinlichkeit; mit dem Wachsen der dem Ereigniss günstigen Fälle, bei unveränderter Anzahl der möglichen, nimmt er zu. Daher kann man die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses mathematisch in der Form eines Bruches darstellen, dessen Zähler die günstigen, dessen Nenner die möglichen Fälle angibt, so dass allgemein $w = \frac{g}{m}$ ist. Die Wahrscheinlichkeit z. B., mit einem sechsseitigen Würfel eine bestimmte Zahl zu werfen, ist $= \frac{1}{6}$. Hiemit ist nicht gesagt, wie man leicht glauben könnte, dass unter m Fällen das Ereigniss in der That g mal eintrifft, sondern nur, dass bei vielen wiederholten Versuchen — das Durchmachen der m möglichen Fälle wird ein Versuch genannt — dasselbe Ereigniss unter m Fällen im Mittel g mal eintreten wird. Findet kein günstiger Fall statt, ist also $g = o$, so wird $w = \frac{o}{m} = o$, d. h. das Eintreffen des Ereignisses ist unmöglich. Die Null ist demnach das Symbol der Unmöglichkeit. Ist die Anzahl der möglichen Fälle der der glücklichen gleich, oder $g = m$, so wird $w = 1$, d. h. das Ereigniss tritt nothwendig ein. Die Einheit ist also der Repräsentant der Gewissheit, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, zwischen o und 1 liegend, immer ein positiver ächter Bruch sein muss. Die Ergänzung zur Gewissheit, die Wahrscheinlichkeit des Nichteintretens desselben Ereignisses, die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, ist natürlich $= 1 - w = 1 - \frac{g}{m} = \frac{m-g}{m}$, also auch ein Bruch, dessen Zähler die Summe der unglücklichen Fälle, dessen Nenner die der möglichen Fälle enthält.

Anmerk. Im gemeinen Leben heißt ein Ereigniß für $w = \frac{1}{2}$ zweifelhaft, für $w > \frac{1}{2}$ wahrscheinlich, für $w < \frac{1}{2}$ unwahrscheinlich.

§. 2.

Bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses muß die Bedingung der Gleichartigkeit der Fälle, d. h. dass alle Fälle gleich möglich seien, oder dass der eine Fall sowohl von den günstigen als möglichen Fällen eben so oft eintreten könne, als jeder andere, durchaus erfüllt werden, soll die Rechnung nicht ganz falsche Resultate herbeiführen. Wollte man z. B. zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, mit zwei gemeinen Würfeln auf einen Wurf die Augenzahl 7 zu werfen, annehmen, dass überhaupt **11** Fälle möglich seien, indem die Summe der geworfenen Augen eine der Zahlen 2 bis 12 betrage, worunter ein Fall günstig sei, woraus die Wahrscheinlichkeit $w = \frac{1}{11}$ folgen würde: so würde diese Schlussweise, bei der die Gleichartigkeit der Fälle ganz übersehn ist, ein unrichtiges Resultat liefern. Bei jeder Lage des ersten Würfels kann nämlich der zweite 6 verschiedene Lagen annehmen; es sind demnach $6^2 = 36$ verschiedene Fälle gleich möglich, von denen einer den Wurf 2 und 12, zwei den Wurf 3 und 11, drei den Wurf 4 und 10, vier den Wurf 5 und 9, fünf den Wurf 6 und 8, sechs den Wurf 7 geben. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit 7 zu werfen $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, einen bestimmten Pasch zu werfen $= \frac{1}{36}$ u. s. f. — Fragt man, um ein zweites Beispiel zu geben, nach der Wahrscheinlichkeit, in zwei Würfen einer Münze, deren Seiten durch **B** und **S** unterschieden werden mögen, wenigstens einmal **B** zu werfen, so erhält man, da hier 4 Fälle gleich möglich sind:

1) **B** im ersten und **B** im zweiten Wurf
2) **B** „ „ „ **S** „ „ „
3) **S** „ „ „ **B** „ „ „
4) **S** „ „ „ **S** „ „ „

von denen 3 das Ereigniss herbeiführen, als Antwort $\frac{3}{4}$. Wollte man mit d'Alembert nur 3 Fälle annehmen: 1) **B** im ersten Wurf, wobei das Spiel endet; 2) **S** im ersten und **B** im zweiten Wurf; 3) **S** in beiden Würfen: so würde die Wahrscheinlichkeit nur $\frac{2}{3}$ betragen; ein falsches Resultat, weil jedem dieser Fälle eine gleiche Möglichkeit beigelegt wird, während die Wahrscheinlichkeit des ersten Falles $\frac{1}{2}$ und die der beiden letzten Fälle $\frac{1}{4}$ beträgt.

§. 3.

In Spielen kann die Wahrscheinlichkeit für ein Ereigniss durch Vernunftschlüsse mit Hilfe der Combinationslehre jedesmal geradezu gefunden werden; nicht so für veränderliche Naturphänomene, die wohl nach bestimmten, aber uns ganz unbekannten Gesetzen eintreten. Hier bleibt nichts anderes übrig, als durch zahlreiche Beobachtungen der Erfahrung die Zahl der möglichen und glücklichen Fälle abzufragen; durch zahlreiche Beobachtungen, damit der Einfluss der Zufälligkeit auf das einzelne Ereigniss verschwinde, und das Allgemeine, Gesetzmässige möglichst rein hervortrete. Man unterscheidet hiernach die Wahrscheinlichkeit aus Gründen (**a priori**) von der Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen (**a posteriori**). Um für diese zweite ein Beispiel geben zu können, folge ein Auszug aus der Sterblichkeitstafel, welche

Süßmilch nach vielen zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Ländern gemachten Beobachtungen entworfen:

Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.
0	1000	50	300
5	579	55	255
10	532	60	210
15	511	65	162
20	491	70	112
25	466	75	69
30	439	80	37
35	409	85	17
40	374	90	6
45	339	95	1

Diese Tafel zeigt nun an, daſſ von 1000 in einem und demselben Jahre Gebornen im 5ten Jahre noch 579, im 10ten nur 532 u. s. f. leben; allgemein, daſſ von n Menschen, von denen jeder t Jahre zählt, nach t^1 Jahren, wird die der Zeit t und $t + t^1$ in der Tafel entsprechende Anzahl Lebender beziehlich mit n_t und n_{t+t^1} bezeichnet, nur $n. \frac{n_{t+t^1}}{n_t}$ das Leben haben, weil $n_t : n_{t+t^1} = n : x$. die Wahrscheinlichkeit für einen jeden von n Menschen gleichen Alters t, noch t^1 Jahre zu leben, ist also $\frac{n_{t+t^1}}{n_t}$. Die Wahrscheinlichkeit z. B. für einen Neugebornen, 10 Jahre alt zu werden, ist $^{532}/_{1000} = 0, 532$; für einen Vierziger, noch 10 Jahre zu leben, $^{300}/_{374}$ nahe $= 0, 8$, also binnen 10 Jahren zu sterben $= 1 - 0, 8 = 0, 2$.

§. 4.

Bei **Wetten**, in denen von zwei Personen die eine A das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit w, die andere B das Geschehen eines andern oder das Nichtgeschehen desselben Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit w_1 behauptet, müssen, sollen sie auf Billigkeit beruhn, die Einsätze sich geradezu wie die Wahrscheinlichkeiten verhalten, welche A und B für ihre Behauptungen haben, d. h. $C : C_1 = w : w_1$ oder $Cw_1 = C_1\, w$ sein. Das Product $C_1\, w$ stellt die mathematische Hoffnung vor, welche A hat, C_1 zu gewinnen, und Cw_1 die der Person B. Wird nun ein Spiel nach dieser Voraussetzung angestellt, so wird das Resultat des oft wiederholten Spiels ein gleicher Gewinn und Verlust beider Partheien sein; und dieser Erfolg wird desto sicherer herbeigeführt, je größer die Anzahl der Wiederholungen des Spieles.

§. 5.

Oft ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass mehre Ereignisse gleichzeitig, oder bei wiederholten Versuchen nach einander eintreten, oder dass irgend eins von ihnen herbeigeführt wird. Sie heißt dann zusammengesetzt im Gegensatz zu der einfachen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehre von einander unabhängige Ereignisse gleichzeitig statt finden, ist dem Producte der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse gleich.

Sei in Beziehung auf das erste Ereigniß die Wahrscheinlichkeit $w_1 = \frac{g_1}{m_1}$, in Beziehung auf das zweite $w_2 = \frac{g_2}{m_2}$, so ist die Anzahl aller gleich möglichen Fälle in Bezug auf das Zusammentreffen beider Ereignisse $= m_1 . m_2$, indem jeder Fall der 1sten Classe mit jedem Fall der 2ten Classe zusammentreffen kann. Ebenso ist die Anzahl der dem Zusammentreffen beider Ereignisse gleichgünstigen Fälle $= g_1 . g_2$, die Wahrscheinlichkeit W also für das Zusammentreffen beider Ereignisse $= \frac{g_1\, g_2}{m_1\, m_2} = w_1 . w_2$. Für 3 Ereignisse findet man, das Zusammentreffen der beiden ersten Ereignisse als ein einziges Ereigniss betrachtend, auf dieselbe Weise $W = w_1\, w_2\, w_3$, wo w_3 die Wahrscheinlichkeit des 3ten Ereignisses. Allgemein für n Ereignisse $W = w_1\, w_2 \ldots . w_n$. Die Wahrscheinlichkeit z. B., in einem Wurfe zweier Würfel die Augen 1 und 2 zu erhalten, ist $1/_6 . 1/_6$. Wirft von 3 Personen A einen Würfel, B und C jeder 2 Würfel, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass A 1 Auge, B einen bestimmten Pasch und C 5 Augen werfe, $= 1/_6\ 1/_{36} . 4/_{36}$.

Obige Regel gilt indess nur, wenn die Ordnung, in der die Ereignisse eintreten, eine bestimmte ist. Sieht man von der Ordnung ab, so ist W noch mit 1. 2. 3. .... n zu multipliciren, weil n Ereignisse 1. 2. 3. .... n mal permutirt werden können. So ist im 1sten Beispiel für den

Fall, daſſ es gleichgiltig ſei, welcher Würfel 1 zeige, $W = 2.(1/_6)^2$; im 2ten Beiſpiel unter der Vorausſetzung, daſſ irgend eine Perſon 1, die andere einen beſtimmten Paſch, die 3te 5 Augen werfe, $W = 2.\ 3.\ 1/_{1944}$.

2. Die in 1. bewieſene Regel gilt auch, wenn man nach der Wahrſcheinlichkeit fragt, daſſ mehre Ereigniſſe, bei mehrmaliger Wiederholung einer und derſelben Handlung, unmittelbar nach einander eintreten werden, wie leicht zu erweiſen. Die Wahrſcheinlichkeit z. B., mit einem Würfel nach einander in einer beſtimmten Reihenfolge 1, 2 oder 1, 2, 3 zu werfen, iſt $(1/_6)^2$, $(1/_6)^3$. Iſt die Aufeinanderfolge gleichgiltig, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit $2.\ (1/_6)^2$, $2.\ 3.\ (1/_6)^3$. — Hieraus folgt auch, daſſ die Wahrſcheinlichkeit, mit der die $n$malige Wiederholung deſſelben Ereigniſſes, deſſen einfache Wahrſcheinlichkeit w_1, erwartet werden kann, $w_1{}^n$ beträgt, alſo ſtets abnimmt, ſo daſſ die häufige Wiederholung eines ſelbſt ſehr wahrſcheinlichen Ereigniſſes höchſt unwahrſcheinlich wird. Sei z. B. eine Begebenheit durch 10maliges Wiedererzählen bekannt geworden und die Zuverläßigkeit jedes Erzählers, d. h. die Wahrſcheinlichkeit, daſſ er die Wahrheit ſage und ſich auch nicht irre, betrage 0, 8; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit der ſo verbreiteten Thatſache $0,8^{10} = 0,106$, alſo die Glaubwürdigkeit derſelben ſo gering, daſſ man mehr denn 8 gegen 1 wetten kann, ſie ſei nicht wahr. Selten indeſſ wird die Zuverläßigkeit des Erzählers, die ſich aus ſeiner Wahrheitsliebe und Sicherheit in der Auffaſſung der Begebenheit zuſammenſetzt, die angenommene Größe haben; denn der Verdacht der Täuſchung und Uebertreibung wird um ſo ſtärker, je ungewöhnlicher die Begebenheit und je thätiger die Phantaſie des Beobachters. In der Geſchichte verdienen dieſe Umſtände genaue Berückſichtigung. Viele ſicher angenommene Facta namentlich einer Zeit, die um viele Jahrhunderte zurückliegt, würden, unterwürfe man ſie einer Prüfung der Art, in die Claſſe der zweifelhaften und ſogar unwahrſcheinlichen zu werfen ſein.

3. Die Wahrſcheinlichkeit, daß irgend eins von zwei oder mehren Ereigniſſen bei einem einmaligen Verſuch herbeigeführt werde, iſt gleich der Summe der Wahrſcheinlichkeiten der einzelnen Ereigniſſe.

Sei die Anzahl aller möglichen Fälle M, die dem Ereigniſſ günſtigen Fälle beziehlich $g_1, g_2, g_3, \ldots$ und die Wahrſcheinlichkeiten $w_1, w_2, w_3, \ldots$, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines der Ereigniſſe $= \frac{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots}{M}$

$= \frac{g_1}{M} + \frac{g_2}{M} + \frac{g_3}{M} + \ldots = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$ Die Wahrscheinlichkeit z. B., bei einem einmaligen Wurfe mit 2 Würfeln entweder 7 oder 8 oder 9 Augen zu werfen, ist $= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, daß von 2 Personen, von denen die eine z. B. 20 Jahre, die andere 30 Jahre zählt, nach 10 Jahren irgend eine am Leben sei ist $= \frac{n_{30}}{n_{20}}\left(1 - \frac{n_{40}}{n_{30}}\right) + \frac{n_{40}}{n_{30}}\left(1 - \frac{n_{30}}{n_{20}}\right)$.

§. 6.

Nach den im Vorhergehenden aufgestellten Regeln werden die in der 3ten Abtheilung der Beispielsammlung von M. Hirsch enthaltenen Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung leicht gelöst werden. Diesen mögen sich noch folgende anschließen:

1. Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit der man bei einmaligem Hineingreifen in eine mit n gleichen Kugeln gefüllte Urne eine gerade oder ungerade Anzahl erwarten darf.

Die Summe der Combinationen ohne Wiederholung für n Elemente in jeder geraden Classe gibt die Anzahl der Fälle, in denen eine gerade Anzahl von Kugeln gezogen werden kann; die Summe der Combinationen jeder ungeraden Classe die Menge der Fälle, in denen eine ungerade Anzahl erwartet werden darf; die Summe beider Fälle alle nur möglichen Fälle; also ist:

$$\text{für den ersten Fall } W = \frac{\frac{n(n-1)}{1.\,2.} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.} + \ldots}{n + n\frac{(n-1)}{1.\,2.} + n\frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.} + \ldots}$$

$$= \frac{(1+1)^n + (1-1)^n - 1}{(1+1)^n - 1} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1};$$

$$\text{für den 2ten Fall } W = \frac{n + n\frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.} + \ldots}{n + n\frac{(n-1)}{1.\,2.} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.} + \ldots}$$

$$= \frac{(1+1)^n - (1-1)^n}{2^n - 1} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl zu greifen ist also immer größer.

2. Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass von zwei Ereignissen A und B, von denen eins nothwendig statt finden muss — von zwei sich ausschließenden Ereignissen — bei n mal angestellten Versuchen A wenigstens einmal zum Vorschein komme.

Wenn w_1 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von A bei einmaligem Versuche, also die Wahrscheinlichkeit für $B = 1 - w_1 = w_2$, so ist die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Versuche A nicht zu erhalten, wohl aber im zweiten nach §. 5 $= w_1 \,.\, w_2$, also die Wahrscheinlichkeit, daß A in 2 Versuchen wenigstens einmal erscheine, $= w_1 + w_1\, w_2$. So weiter schließend findet man diese Wahrscheinlichkeit für 3 Versuche $= w_1 + w_1\, w_2 + w_1\, w_2^2$

$$\text{und für } n \text{ Versuche } = w_1 + w_1\, w_2 + w_1\, w_2^2 + \ldots + w_1\, w_2^{n-1}$$
$$= w_1 \left\{ 1 + w_2 + w_2^2 + \ldots + w_2^{n-1} \right\}$$
$$= w_1 . \frac{1 - w_2^n}{1 - w_2} = 1 - w_2^n, \text{ weil } 1 - w_1 = w_2 \text{ ist.}$$

Dasselbe Resultat gibt auch die einfache Ueberlegung, dass die Wahrscheinlichkeit, A werde in n Versuchen nicht ein mal eintreten, w_2^n, also die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $1 - w_2^n$ ist. Die Wahrscheinlichkeit z. B., beim 2maligen Wurfe einer Münze wenigstens einmal die Bildseite zu erhalten, ist $= 1 - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

3. Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass von zwei sich ausschließenden Ereignissen bei n Versuchen das Ereigniss P mit der Wahrscheinlichkeit w_1 und das Ereigniss N mit der Wahrscheinlichkeit w_2 bezüglich $(n-k)$ mal und k mal hinter einander eintreten; oder die gleiche Wahrscheinlichkeit, dass bei einmaligem Versuche P $(n-k)$ mal und N $k$mal zum Vorschein komme.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Versuchen P $(n-k)$mal und N $k$mal in einer bestimmten Ordnung eintrete, ist nach §. 5 $w_1^{n-k} . w_2^k$. Aber n Elemente, unter denen $n-k$ gleich P und k gleich N sind, geben $\frac{1.2.3.\ldots\ldots n}{1.2.\ldots n-k.\, 1.2.\ldots k}$ $= \frac{n\,(n-1)\ldots.(n-k+1)}{1.\,2.\,3.\ldots k}$ Permutationen; sieht man demnach von der Ordnung ab, in der die Ereignisse P und N auf einander folgen, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,k}.\ w_1^{\,n-k}.\ w_2^{\,k}$. Setzt man in diesen allgemeinen Ausdruck für k der Reihe nach 0, 1, 2 . . . n, so erhält man die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Fälle, in denen nur der Unterschied zwischen der Anzahl der beiden Ereignisse, aber nicht die Aufeinanderfolge berücksichtigt ist: $w_1^{\,n}$, $n w_1^{\,n-1} w_2$, $\frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2}\, w_1^{\,n-2}.\ w_2^{\,2}, \ldots w_2^{\,n}$. Dieselben Glieder gibt auch die Entwicklung der binomischen Reihe von $(w_1 + w_2)^n$, und ihre Summe muss $= 1$ sein, weil $(w_1 + w_2)^n$, $= 1$ ist.

Für $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ wird $1 = \frac{1}{2^n} + n.\ \frac{1}{2^n} + \frac{n\,(n-1)}{1.\,2}.\ \frac{1}{2^n} + \ldots\ldots + n.\ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}$; d. h. die Wahrscheinlichkeit, in n Versuchen entweder nur P oder N nach einander zu erhalten, oder $(n-1)$ mal P und einmal N und umgekehrt, oder $(n-2)$ mal P und 2 mal N und umgekehrt u. s. f.; oder aber die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem einmaligen Versuch P oder N nmal, oder P $(n-1)$ mal und N einmal und umgekehrt, oder P $(n-2)$ mal und umgekehrt u. s. f. auftreten werde, ist beziehlich $\frac{1}{2}$, $n\ \frac{1}{2^n}$, $\frac{n\,(n-1)}{1.\,2}.\ \frac{1}{2^n}$ u. s. f. Man sieht, dass die Wahrscheinlichkeit, beide Ereignisse in gleicher Anzahl zu erhalten, am größten ist, weil in diesem Falle der mittlere Binomialcoefficient das Maximum erreicht, während die Wahrscheinlichkeit für eine ungleiche Anzahl mit dem Wachsen des Unterschiedes zwischen der Anzahl der beiden Ereignisse immer abnimmt, bis sie für dieselbe Anzahl eines und desselben Ereignisses am kleinsten wird. Seien z. B. in einer Urne 100 weiße und 100 schwarze Kugeln von gleicher Größe, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem einmaligen Zuge zu erhalten:

	50 w. u. 50 schw. Kugeln	$= \frac{100,\,99\,\ldots\,51}{1.\,2,\,3\,\ldots\,50}.\ \frac{1}{2^{100}}$	$= 0{,}0796$	
	51 w. u. 49 schw.	„		
oder	49 w. u. 51 schw.	„	$= 0{,}0780$	
	52 w. u. 48 schw.	„		
oder	48 w. u. 52 schw.	„	$= 0{,}0735$	
	53 w. u. 47 schw.	„		
oder	47 w. u. 53 schw.	„	$= 0{,}0666$	u. s. f.

Um die Wahrscheinlichkeit

zu finden, dass der Unterschied zwischen der Anzahl der weißen und schwarzen Kugeln in bestimmten Grenzen bleibe, darf man nur nach §. 5. 3 die innerhalb dieser Grenzen liegenden Wahrscheinlichkeiten summiren. Für die Grenze 4 z. B. erhält man die Wahrscheinlichkeit = 0, 5159. Mit dem Wachsen der Grenzen steigt auch die Wahrscheinlichkeit.

Anmerk. Zum Studium der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Mortalität, Wittwenpensionen, Renten und Tontinen u. s. w. ist das schätzbare Lehrbuch des bekannten Physikers Ludwig Moser: die Gesetze der Lebensdauer ꝛc. Berlin, 1839. zu empfehlen.

§. 7.

Gehen wir nun zur Lösung der uns vorgesetzten Aufgabe über. In den dem Calcül unterworfenen Naturwissenschaften machen die aus Beobachtungen oder Messungen gezogenen Resultate die Grundlage aus, worauf man die Gesetze der Naturerscheinungen gründet. Je richtiger jene Beobachtungen, desto zuverläßiger sind diese Gesetze. Es liegt jedoch in der Natur der Sache, dass diese Resultate, wie überhaupt jedes Menschenwerk, nie eine absolute Genauigkeit haben können, stets mit Fehlern behaftet sind, so genau auch die Versuche angestellt werden mögen. Theils sind die Fehler, aus der Unvollkommenheit in dem Bau und der Aufstellung der Messinstrumente entspringend, constant; theils sind sie, aus der Beschränktheit unseres Geistes und unserer Sinne und aus vielen andern schädlichen Einflüssen hervorgehend, zufällig. Mit der Präcision der Messapparate, welche die Technik seit einigen Decennien bis ins Unglaubliche gesteigert hat, mit der Geschicklichkeit und dem Scharfsinn des Beobachters, der die Fehler seines Instruments zu umgehn weiß, durch Elimination der constanten Fehler z. B. der Excentricität, des Collimationsfehlers u. s. w. wird die Größe der Beobachtungsfehler sich vermindern — darum ist es Pflicht eines jeden Beobachters, der sich noch nicht eine gewisse Autorität erworben, eine genaue Beschreibung seiner angewandten Instrumente und der Beobachtungsweise den Resultaten seiner Beobachtungen anzufügen —; aber niemals werden die zufälligen Fehler schwinden, das Resultat der Messung wird nie das wahre sein. Die begrenzte Schärfe unsrer Sinne, so sehr ihr auch die Technik zu Hilfe kommt, die fehlerhafte Wahrnehmung nach Raum und Zeit, die bei verschiedenen Beobachtern verschieden ausfällt, der Mangel oder auch die zu große Gespanntheit unsrer Aufmerksamkeit, die beständigen Fluctuationen der Wärme, welche die heterogenen Theile des Instruments in jedem Augenblick verändern, die Verbiegungen, Krümmungen und Pressungen der einzelnen Theile des Messapparats in Folge ihres eignen Gewichts und der äußern sie bewegenden Kraft — krümmt sich doch die stärkste Kanone, in der Mitte unterstützt, gibt doch die festeste Mauer dem Druck der Hand nach, wie man sich mit Hilfe des Fühlhebels und empfindlicher Wasserwaagen überzeugt — und unzählige andere Ursachen sind lauter Fehlerquellen, welche die Resultate der Beobachtungen bald etwas größer, bald etwas kleiner machen, als sie der Wahrheit gemäß sein sollten. Die in der Größe veränderlichen Fehler der Resultate treten bald positiv, bald negativ auf. Indess werden sie nie zu einer bedeutenden Größe anwachsen; denn es ist, wie Ueberlegung und Erfahrung lehren, wahrscheinlicher, einen kleineren Fehler zu begehn, als einen größern, so dass die Wahrscheinlichkeit, das Maximum des Fehlers zu begehn, sehr klein ist. Nun ist der Fehler im Resultate der einzelnen Messung durch unzählige Fehlerquellen erzeugt; man kann ihn demnach als einen secundären, aus einer unendlich großen Anzahl unendlich kleiner primärer Fehler zusammengesetzt sich vorstellen, von denen jeder mit großer Annäherung als gleich groß angenommen werden und ebenso leicht positiv wie negativ sein kann.

§. 8.

Unter dieser Voraussetzung erzeugt sich der Fehler im Resultate einer Beobachtung durch Summation unendlich kleiner positiver und negativer primärer Fehler ebenso, wie man beim Hineingreifen in eine Urne, in der eine gleiche Anzahl schwarzer uud weißer gleich großer Kugeln sich befindet, eine Differenz zwischen den gezogenen schwarzen und weißen Kugeln erhält. S. §. 6. 3. Hieraus geht gleichfalls hervor, dass die Wahrscheinlichkeit, keinen Fehler zu begehn, am größten ist, weil diesem Fall der mittelste Binomialcoefficient, der größte unter allen, entspricht; ferner dass die Wahrscheinlichkeit mit der Größe der Fehler abnimmt und für positive und negative Fehler von gleicher Größe gleich ist. Es findet demnach zwischen der Größe des Fehlers und der Wahrscheinlichkeit seines Verkommens eine Beziehung statt, oder die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines Fehlers ist Function von seiner Größe. Um diese durch eine Formel allgemein ausdrücken zu können, wollen wir die Fehler auf einer geraden Linie, als Abscissenlinie, uns abgeschnitten denken, die positiven auf der einen, die negativen auf der andern Seite, und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten als rechtwinklige Ordinaten ziehn. Die Verbindung der Endpunkte der Ordinaten gibt eine Curve, die am Anfangspunkte der Abscissen am weitesten von der Abscissenlinie absteht und auf beiden Seiten derselben sich gleichmäßig nähert. Der Abscisse (dem Fehler) $= 0$ entspricht als Ordinate (Wahrscheinlichkeit) der mittelste Binomialcoefficient

$\frac{2m\,(2m-1)\,\ldots\ldots\,(m+2)\,(m+1)}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\,(m-1)\,m}$, wo wir in §. 6. 3. für n, 2m setzen, um den mittleren Binomialcoefficient darstellen zu können. Er sei $=$ a; alsdann entspricht, wird der primäre Fehler als Einheit angenommen,

der Abscisse ± 1 die Ordinate $\frac{2m\,(m-1)}{1.\,2.\,3}\,\frac{\ldots\,(m+2)}{\ldots\,(m-1)} = a.\ \frac{m}{m+1}$

" " ± 2 " " $a.\ \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m+2}$

" " ± 3 " " $a.\ \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m+2}\cdot\frac{m-2}{m+3}$

allgem. " $\pm\, x-1$ " $y = a.\ \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m+2}\ \ldots\ \frac{m-x+2}{m+x-1}$

" $\pm\, x$ " " $y_1 = a.\ \frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m+2}\ \ldots\ \frac{m-x+2}{m+x-1}\cdot\frac{m-x+1}{m+x}$

Hieraus folgt $$y_1 = y.\ \frac{m-x+1}{m+x}$$

$$\text{und } y_1 - y = -y\left\{1 - \frac{m-x+1}{m+x}\right\}$$
$$= -y.\ \frac{2x-1}{m+x}.$$

Nun ist bekanntlich $y_1 - y = \frac{dy}{dx}\,(x_1 - x)$; also in unserm Falle

$$\frac{dy}{dx} = -\,y.\ \frac{2x-1}{m+x}.$$

Aber 1, die Einheit des primären Fehlers, verschwindet gegen 2x, und ebenso x gegen m, welches unendlich groß vorausgesetzt wurde; daher verwandelt sich jene Gleichung in die einfachere

$$\frac{dy}{dx} = -\,y.\ \frac{2x}{m}$$

oder in $$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{m}.\ 2x\,dx.$$

Durch Integration erhält man

$$\log.\,y = -\frac{x^2}{m} + C,$$

und da für $x = 0$ $y = a$ wird, also $C = \log. a$ ist,

$$\log. \frac{y}{a} = -\frac{x^2}{m},$$

woraus

$$y = a.\, e^{-\frac{x^2}{m}}$$

folgt, wo e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist. Diese Gleichung gibt also allgemein die Wahrscheinlichkeit an, einen bestimmten Fehler zu begehn. Nach §. 6. 3 ist aber die Summe sämmtlicher Ordinaten, die man durch Quadratur der Curve erhält, $= 1$, d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a.\, e^{-\frac{x^2}{m}} dx = 1,$$

und für $\frac{1}{\sqrt{m}} = h$ und $hx = x_1$ ist $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{m}} dx = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{h}$, weil bekanntlich $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1 = \sqrt{\pi}$ ist; folglich $1 = a. \frac{\sqrt{\pi}}{h}$,

woraus $a = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ folgt. Die Gleichung der Curve ist demnach

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.\ e^{-h^2 x^2}.$$

§. 9.

Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß der Fehler einer Beobachtung bestimmte Grenzen nicht überschreite, darf man nur die Curve zwischen diesen Grenzen quadriren. Höchst wichtig ist hiebei die Kenntniß des wahrscheinlichsten Fehlers, d. h. des Fehlers, von dem man mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen kann, daß er bei einer Beobachtungsreihe von den übrigen Fehlern überschritten, wie nicht erreicht werde. Die Größe desselben werde zunächst ermittelt. Quadrit man die Curve also, daß die Fläche der Curve von o bis x gleich der von x bis ∞, so ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, der Fehler einer Messung werde in diesen oder in jenen Raumtheil fallen; der wahrscheinlichste Fehler wird demnach dasjenige x sein, zu welchem die Halbirungsordinate gehört. Nun ist $ydx = a.\, e^{-h^2x^2}dx$ das Differential der Curve, also

$$\int_0^x e^{-h^2x^2}dx = \int_x^\infty e^{-h^2x^2}dx$$

und weil $$\int_x^\infty Xdx = \int_0^\infty Xdx - \int_0^x Xdx$$

so ist $$2\int_0^x e^{-h^2x^2}dx = \int_0^\infty e^{-h^2x^2}dx$$

oder, $hx = x_1$ gesetzt,

$$2\int_0^{x_1} e^{-x_1^2}dx_1 = \int_0^\infty e^{-x_1^2}dx_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

oder $$\int_0^{x_1} e^{-x_1^2}dx_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Die Entwicklung des Integrals durch eine Reihe gibt, weil $e^{-x_1^2} = 1 - x_1^2 + \frac{x_1^4}{1.\,2} - \frac{x_1^6}{1.\,2.\,3} + \ldots$ ist,

$$x_1 - \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^5}{1.\,2.\,5} - \frac{x_1^7}{1.\,2.\,3.\,7} + \ldots = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Durch Versuche findet man, da die Gleichung transcendent ist, $x_1 = 0{,}47694$, also der wahrscheinlichsten Fehler $W = \frac{0{,}47694}{h}$.

§. 10.

Noch bleibt die Bestimmung der Constante h übrig. Zu dem Ende sei Σx die Summe sämmtlicher den n gemachten Beobachtungen anhaftender Fehler ohne Rücksicht aufs Zeichen und $\frac{\Sigma x}{n} = M$ bezeichne den mittleren Fehler; alsdann ist unter Voraussetzung einer unendlich großen Beobachtungsreihe

$$M = \frac{2\int_0^\infty \frac{h}{\sqrt{\pi}} . e^{-h^2 x^2} x dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} . e^{-h^2 x^2} dx}$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2 x^2} x dx$$

da der Nenner nach §. 8 $= 1$ ist, oder

$$M = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2 x^2} . 2h^2 x dx = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

weil $\int e^{-h^2 x^2} 2h^2 x dx = - e^{-h^2 x^2}$ und zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \infty$ genommen $= 1$ ist. Es ergibt sich also $h = \frac{1}{M\sqrt{\pi}}$ und nach §. 9

$$W = 0{,}47694.\ M.\ \sqrt{\pi}$$
$$= 0{,}84536.\ M.$$

Ebenso kann man h unter derselben Voraussetzung aus $M_1{}^2 = \frac{\Sigma x^2}{n}$ ableiten, wo Σx^2 die Summe der Quadrate sämmtlicher Fehler und n wieder die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet. Es ist dann

$$M_1^{\ 2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} x^2\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} x^2\, dx$$

$$= \frac{h}{h^3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} x_1^{\ 2} dx_1$$

wo $x_1 = hx$; aber

$$\int e^{-x_1^2} x_1^{\ 2} dx_1 = -\tfrac{1}{2} e^{-x_1^2} x_1 + \tfrac{1}{2} \int e^{-x_1^2} dx_1$$

weil $\quad d\left(e^{-x_1^2} x_1\right) = e^{-x_1^2} dx_1 - 2\, e^{-x_1^2} x_1^{\ 2} dx_1$

also $\quad e^{-x_1^2} x_1^{\ 2} dx_1 = -\tfrac{1}{2}\, d\left(e^{-x_1^2} x_1\right) + \tfrac{1}{2}\, e^{-x_1^2} dx_1$ ist;

folglich, da das erste Glied $-\tfrac{1}{2}\, e^{-x_1^2} x_1 = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{x_1}{1 + x_1^{\ 2} + \frac{x_1^{\ 4}}{1.\,2} + \ldots}$

zwischen den angenommenen Grenzen verschwindet,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} x_1^{\ 2} dx_1 = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1$$

$$= \frac{h}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx$$

also $$M_1^{\ 2} = \frac{1}{2h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{2h^2}$$

da der zweite Factor $= 1$ ist, und $h = \frac{1}{M_1 \sqrt{2}}$. Hieraus ergibt sich

$$W = 0{,}47694 \,.\, M_1 \,.\, \sqrt{2}$$
$$= 0{,}67450 \,.\, M_1 \,.$$

Beide Resultate für h müssen unter den gemachten Voraussetzungen übereinstimmen; jedoch nicht genau, ist die Anzahl der Beobachtungen begrenzt. Für zwei Beobachtungsreihen lässt das kleinere W auf eine bessere Beobachtung schließen.

§. 11.

Werden nun bei n Beobachtungen der Reihe nach die Fehler $v, v_1, v_2 \ldots . v_{n-1}$ gemacht, so ist nach §. 5 und §. 8 die Wahrscheinlichkeit, dass bei den einzelnen Beobachtungen diese Fehler wirklich begangen sind,

$$= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \cdot e^{-h^2\left(v^2 + v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2} + \ldots + v_{n-1}^{\ 2}\right)}.$$

Damit diese Wahrscheinlichkeit ein Maximum werde, muss offenbar $v^2 + v_1^{\ 2} + \ldots + v_{n-1}$ d. i. die Summe der Quadrate der Fehler ein Minimum werden. Diese Folgerung führt auf ein Verfahren, welches in den beobachtenden Wissenschaften von der größten Wichtigkeit ist. Entsprechen nämlich den n Beobachtungen über ein Ereigniss die linearen Gleichungen:

$$
\begin{array}{ll}
1) & X_0 = a + bx + cy + \ldots . \\
2) & X_1 = a_1 + b_1\, x + c_1\, y + \ldots \\
3) & X_2 = a_2 + b_2\, x + c_2\, y + \ldots \\
 & \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\
n) & X_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}\, x + c_{n-1}\, y + \ldots
\end{array}
$$

in denen die beobachteten Werthe $X_0, X_1, X_2 \ldots$ Funktionen der unbekannten Constanten $x, y \ldots$ und $a, a_1 \ldots b, b_1 \ldots$ bekannte Variabeln sind;

so würde man nach der Eliminationsmethode die Constanten finden, wenn ihre Anzahl gleich n wäre. Die beobachteten Werthe sind aber, wie wir wissen, mit Fehlern behaftet, folglich auch die aus ihnen abgeleiteten Constanten. Um richtigere Resultate zu gewinnen, müssen die Beobachtungen mit gleicher Genauigkeit, vervielfältigt werden, so dass ihre Anzahl die der unbekannten Constanten übertrifft. Wie findet man aber letztere für diesen Fall, da sie einzeln von allen Beobachtungen abhangen? Dies lehrt ein Verfahren, welches, auf dem oben aufgestellten Prinzip beruhend, die Methode der kleinsten Quadrate genannt wird, indem es die Anzahl der Gleichungen auf die Anzahl der Unbekannten reducirt. Sei nämlich

der 1ste Beobachtungsfehler $v = -X_0 + a + bx + cy + \dots$

" 2te " " $v_1 = -X_1 + a_1 + b_1 x + c_1 y + \dots$

" 3te " " $v_2 = -X_2 + a_2 + b_2 x + c_2 y + \dots$

. . . .

. . . .

. . . .

" nte " " $v_{n-1} = -X_{n-1} + a_{n-1} + b_{n-1} x + c_{n-1} y + \dots$

so muss nach dem obigen Princip $v^2 + v_1^2 + \dots + v^2_{n-1}$ ein Minimum werden. Dies ist bekanntlich der Fall, wenn $2\,v\,dv + 2v_1\,dv_1 + \dots + 2v_{n-1}\,dv_{n-1} = 0$, also $v dv = 0$, $v_1\,dv_1 = 0$ u. s. f. ist. Nun ist

$$dv = b dx + c dy + \dots$$
$$dv_1 = b_1\,dx + c_1\,dy + \dots$$
$$\vdots$$
$$dv_{n-1} = b_{n-1}\,dx + c_{n-1}\,dy + \dots$$

$$\text{also } 0 = dx \left\{ \begin{array}{l} (-X_0 + a)\,b + b^2 x + bcy + \dots \\ + (-X_1 + a_1)\,b_1 + b_1^2 x + b_1\,c_1\,y + \dots \\ \quad \vdots \\ + (-X_{n-1} + a_{n-1})\,b_{n-1} + b^2_{n-1} x + b_{n-1}\,c_{n-1}\,y + \dots \end{array} \right\}$$

$$+ dy \left\{ \begin{array}{l} (-X_0 + a)\, c + b\, c\, x + c^2\, y + \ldots \\ + (-X_1 + a_1)\, c_1 + b_1\, c_1\, x + c_1{}^2\, y + \ldots \\ \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ + (X_{n-1} + a_{n-1})\, c_{n-1} + b_{n-1}\, c_{n-1}\, x + c^2_{n-1}\, y + \ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

oder, wenn man $(-X_0 + a)\, b + (-X_1 + a_1)\, b_1 + \ldots$ mit $\Sigma\,(-X + a)\, b$ und so analog die übrigen Summen bezeichnet,

$$o = dx \{ \Sigma\,(-X + a)\, b + x \quad b^2 + y\, \Sigma\, bc + \ldots \}$$
$$+ dy \{ \Sigma\,(-X + a)\, c + x \,\Sigma\, bc + y\, \Sigma\, c^2 + \ldots \} + \ldots$$

Für diese Bedingung muss auch statt finden:

$$1.\ o = \Sigma\,(-X + a)\, b + x\, \Sigma\, b^2 + y\ \Sigma\, bc$$
$$2.\ o = \Sigma\,(-X + a)\, c + x\, \Sigma\, bc + y\ \Sigma\, c^2$$

Man übersieht leicht, dass man für 3 Unbekannte auf folgende 3 Gleichungen stoßen werde:

$$1.\ o = \Sigma\,(-X + a)\, b + x\, \Sigma\, b^2 + y\, \Sigma\, bc + z\, \Sigma\, b\, d$$
$$2.\ o = \Sigma\,(-X + a)\, c + x\, \Sigma\, bc + y\, \Sigma\, c^2 + z\, \Sigma\, c\, d$$
$$3.\ o = \Sigma\,(-X + a)\, d + x\, \Sigma\, bd + y\, \Sigma\, cd + z\, \Sigma\, d^2 \text{ u. s. f.}$$

Für eine Unbekannte, den häufigsten Fall, ist $b = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, . ., alle übrige Bekannte $= o$, also $o = \Sigma - X + n\, x$ und $x = \frac{\Sigma X}{n}$. Dies ist das arithmetische Mittel oder nach Gauß das plausibelste Resultat aller Beobachtungen.

Beispiel 1. Seien x und y 2 Körper, die auf einer schlechten Wage auf 4 verschiedene Weisen gewägt werden, so dass die 1ste Wägung 13 ℔. $= x + y$

" 2te	"	25 ℔. $= 3x - 2y$
" 3te	"	30 ℔. $= 2x + 3y$
" 4te	"	6 ℔. $= x - y$

gibt; alsdann reduciren sich diese Gleichungen auf:

$$1,\ 0 = -13 - 75 - 60 - 6 + x\,(1 + 9 + 4 + 1) + y\ (1 - 6 + 6 - 1)$$
$$2,\ 0 = -13 + 50 - 90 + 6 + x\,(1 - 6 + 6 + 1) + y\ (1 + 4 + 9 + 1)$$

woraus man als die wahrscheinlichsten Werthe $x = 10^4/_{15}$ ℔. und $y = 3^2/_{15}$ ℔. erhält.

Beispiel 2. In der folgenden Tafel sind mehre der vorzüglichsten Messungen des Secundenpendels in verschiedenen Breiten enthalten:

Ort.	Breite.	Länge des Secundenpendels in Metern.
Malouinische Inseln	— 51°31',7	0,9941295
Port Jackson . . .	— 53 51,6	0,9925879
Ascension	— 7 55,8	0,9911949
Insel Rawak . . .	— 0 1,6	0,9909584
Sierra Leona . . .	+ 8 29,5	0,9910964
Jamaika.	+ 17 56,1	0,9914739
New York	+ 40 42,7	0,9931689
Paris	+ 48 50,2	0,9938583
Dünkirchen	+ 51 2,2	0,9945307
London	+ 51 31,1	0,9941236
Clifton	+ 53 27,7	0,9943018
Portsoy	+ 51 51,0	0,9946911
Unst	+ 60 45,5	0,9949393
Hammerfest . . .	+ 70 40,1	0,9955409
Grönland	+ 74 32,3	0,9957484
Spitzbergen . . .	+ 79 50,0	0,9960359

Bezeichnen wir nun die Länge des Secundenpendels eines Ortes von der Breite φ mit 1, so gilt, wie die Mechanik nachweist, die Gleichung $1 = x + y \operatorname{Sin.}^2 \varphi$, in der für $\varphi = o$ $x = 1$ die Länge des Secundenpendels am Aequator und für $\varphi = 90^o$ $y = 1 - x$ den Unterschied der Pendellänge am Pole und Aequator vorstellt. Die Beobachtungen geben also 16 Gleichungen, die sich nach der Methode der kleinsten Quadrate auf 2 zurückführen lassen, aus denen sich $x = 0,^m\, 9910256$ und $y = 0,^m\, 0050719$ ergibt, so dass die Gleichung $1 = 0,^m\, 9910256 + 0,^m\, 0050719 \operatorname{Sin.}^2 \varphi$ die größte Wahrscheinlichkeit für sich hat. Aus derselben kann nun die Pendellänge jedes Ortes, dessen Polhöhe bekannt ist abgeleitet werden.

§. 12.

Nicht immer sind die Gleichungen, wie in den obigen Beispielen, linear; sie lassen sich aber leicht auf solche zurückführen. Man darf nur aus so vielen Gleichungen, als Unbekannte vorkommen, die Näherungswerthe für letztere berechnen, zu diesen die unbekannten Correctionen hinzufügen und die so verbesserten Werthe in die Gleichungen einführen. Da nun die den ersten Grad übersteigenden Potenzen der unbe=

kannten Correctionen wegen ihrer Kleinheit vernachläßigt werden können, so wird man wieder einfache Gleichungen erhalten, aus denen die unbekannten Correctionen nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können. Seien z. B. die Näherungswerthe von x und y, x_1 und y_1, und die Correctionen ξ und v; so wird die Gleichung $X_0 = a + b\,x^n + cy^m + \ldots$ sich verwandeln in $X_0 = a + b\,(x_1^{\,n} + n\,x_1^{\,n-1}\xi) + c\,(y_1^{\,m} + my_1^{\,m-1}v) + \ldots$ oder, wenn man die bekannten Glieder zusammen zieht, in $X_0' = A + B\,\xi + C\,v + \ldots$ Und so findet man analog $X_1 = A_0 + B_1\,\xi + C_1\,v + \ldots$ und s. f. Sollten die verbesserten Werthe für x, y . . noch nicht die gewünschte Genauigkeit haben, so kann das ganze Verfahren noch einmal wiederholt werden.

§. 13.

Anders gestalten sich die Gleichungen für **periodische** Erscheinungen, d. h. für solche Erscheinungen, deren mannigfache Abwechslungen nach einer bestimmten Zeit wiederkehren, eine Periode befolgen, wie da sind die Längen und Rectascensionen eines Planeten, der tägliche und jährliche Gang des mittleren Barometer- und Thermometerstandes, der Declination der Magnetnadel u. s. w. Das Gesetz einer solchen periodischen Erscheinung stellt nach **Bessel** allgemein die Gleichung

$$X_t = x_0 + x_1\,\mathrm{Cos.}\frac{2\pi}{n}\cdot t + y_1\,\mathrm{Sin.}\frac{2\pi}{n}\cdot t + x_2\,\mathrm{Cos.}\frac{2\pi}{n}\cdot 2t + y_2\,\mathrm{Sin.}\frac{2\pi}{n}\cdot 2t + \ldots$$

vor, wo X_t den Werth, welcher dem Zeittheil t der Periode entspricht, n die Anzahl der Beobachtungen, aus welchen die Periode besteht, bezeichnet, und $x_0, x_1 \ldots y_0, y_1 \ldots$ die aus den Beobachtungen zu bestimmenden Constanten sind. Werden also die gleichen Zeitintervalle der Periode nach astronomischem Gebrauch der Reihe nach mit 0, 1, 2, 3 . . bezeichnet, so ist die Beobachtung auszudrücken:

im Zeittheil 0 durch $X_0 = x_0 + x_1 \qquad + x_2 \qquad + \ldots$

„ „ 1 „ $X_1 = x_0 + x_1\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{n} + y_1\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{n} + x_2\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{n}.2 + y_2\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{n}.2 + \ldots$

„ „ 2 „ $X_2 = x_0 + x_1\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{n}.2 + y_1\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{n}.2 + x_2\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{n}.4 + y_2\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{n}.4 + \ldots$

„ „ (n—1) „ $X_{n-1} = x_0 + x_1\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{n}(n-1) + y_1\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{n}.(n-1) + x_2\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{n}.2\,(n-1) + y_2\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{n}\,2\,(n-1) + \ldots$

Um nach der Methode der kleinsten Quadrate die Constanten zu ermitteln, seien wieder v_1 v_1, v_2, v_3 . . . die Fehler der einzelnen Beobachtungen, und $\frac{2\pi}{n} = \varphi$; alsdann ist:

$$\begin{aligned}
v &= -X_0 + x_0 + x_1 + x_2 + \ldots \\
v_1 &= -X_1 + x_0 + x_1 \operatorname{Cos} \varphi + y_1 \operatorname{Sin} \varphi + x_2 \operatorname{Cos} 2\varphi + y_2 \operatorname{Sin} 2\varphi + \ldots \\
v_2 &= -X_2 + x_0 + x_1 \operatorname{Cos} 2\varphi + y_1 \operatorname{Sin} 2\varphi + x_2 \operatorname{Cos} 4\varphi + y_2 \operatorname{Sin} 4\varphi + \ldots \\
&\;\;\vdots \\
v_{n-1} &= -X_{n-1} + x_0 + x_1 \operatorname{Cos} (n-1)\varphi + y_1 \operatorname{Sin} (n-1)\varphi + x_2 \operatorname{Cos} 2(n-1)\varphi \\
&\qquad + y_2 \operatorname{Sin} 2(n-1)\varphi + \ldots
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
dv &= dx_0 + dx_1 + dx_2 + \ldots \\
dv_1 &= dx_0 + dx_1 \operatorname{Cos} \varphi + dy_1 \operatorname{Sin} \varphi + dx_2 \operatorname{Cos} 2\varphi + dy_2 \operatorname{Sin} 2\varphi + \ldots \\
dv_2 &= dx_0 + dx_1 \operatorname{Cos} 2\varphi + dy_1 \operatorname{Sin} 2\varphi + dx_2 \operatorname{Cos} 4\varphi + dy_2 \operatorname{Sin} 4\varphi + \ldots \\
&\;\;\vdots \\
dv_{(n-1)} &= dx_0 + dx_1 \operatorname{Cos} (n-1)\varphi + dy_1 \operatorname{Sin} (n-1)\varphi + dx_2 \operatorname{Cos} 2(n-1)\varphi \\
&\qquad + dy_2 \operatorname{Sin} 2(n-1)\varphi + \ldots
\end{aligned}$$

also, weil $v dv + v_1 dv_1 + \ldots + v_{n-1}\, d\, v_{n-1} = 0$ ist,

$$dx_0 \left\{ \begin{array}{l}
-X_0 + x_0 + x^1 + x_2 + \ldots . \\
-X_1 + x_0 + x_1 \operatorname{Cos} \varphi + y_1 \operatorname{Sin} \varphi + x_2 \operatorname{Cos} 2\varphi + y_2 \operatorname{Sin} 2\varphi + \ldots . \\
-X_2 + x_0 + x_1 \operatorname{Cos} 2\varphi + y_1 \operatorname{Sin} 2\varphi + x_2 \operatorname{Cos} 4\varphi + y_2 \operatorname{Sin} 4\varphi + \ldots . \\
\quad\vdots \\
-X_{n-1} + x_0 + x_1 \operatorname{Cos} (n-1)\varphi + y_1 \operatorname{Sin} (n-1)\varphi + x_2 \operatorname{Cos} 2(n-1)\varphi \\
\qquad + y_2 \operatorname{Sin} 2(n-1)\varphi + \ldots
\end{array} \right\} +$$

$$
+\,dx_1 \left(\begin{array}{l}
- X_0 + x_0 + x_1 \\
\qquad + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots \\
- X_1 \,\mathrm{Cos}\,\varphi + x_0 \,\mathrm{Cos}\,\varphi + x_1 \,\mathrm{Cos}^2\varphi + y_1 \,\mathrm{Sin}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\varphi \\
\qquad + x_2 \,\mathrm{Cos}\,2\varphi \,\mathrm{Cos}\,\varphi + y_2 \,\mathrm{Sin}\,2\varphi \,\mathrm{Cos}\,\varphi + \ldots \\
- X_2 \,\mathrm{Cos}\,2\varphi + x_0 \,\mathrm{Cos}\,2\varphi + x_1 \,\mathrm{Cos}^2 2\varphi + y_1 \,\mathrm{Sin}\,2\varphi \,\mathrm{Cos}\,2\varphi \\
\qquad + x_2 \,\mathrm{Cos}\,4\varphi \,\mathrm{Cos}\,2\varphi + y_2 \,\mathrm{Sin}\,4\varphi \,\mathrm{Cos}\,2\varphi + \ldots \\
\vdots \\
- X_{n-1} \,\mathrm{Cos}\,(n-1)\varphi + x_0 \,\mathrm{Cos}(n-1)\varphi + x_1 \,\mathrm{Cos}^2(n-1)\varphi + y_1 \,\mathrm{Sin}\,(n-1)\varphi \,\mathrm{Cos}(n-1)\varphi \\
\qquad + x_2 \,\mathrm{Cos}\,2\,(n-1)\varphi \,\mathrm{Cos}\,(n-1)\varphi + y_2 \,\mathrm{Sin}\,2\,(n-1)\varphi \,\mathrm{Cos}\,(n-1\;\varphi + \ldots
\end{array}\right)
$$

$$
+\,dx_2 \left(\begin{array}{l}
- X_0 + x_0 + x_1 \\
\qquad + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots \\
- X_1 \,\mathrm{Cos}\,2\varphi + x_0 \,\mathrm{Cos}\,2\varphi + x_1 \,\mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,2\varphi + y_1 \,\mathrm{Sin}\,2\varphi \,\mathrm{Cos}\,2\varphi \\
\qquad + x_2 \,\mathrm{Cos}^2 2\varphi - y_2 \,\mathrm{Sin}\,2\varphi \,\mathrm{Cos}\,2\varphi + \ldots \\
- X_2 \,\mathrm{Cos}\,4\varphi + x_0 \,\mathrm{Cos}\,4\varphi + x_1 \,\mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,4\varphi + y_1 \,\mathrm{Sin}\,2\varphi \,\mathrm{Cos}\,4\varphi \\
\qquad + x_2 \,\mathrm{Cos}^2 4\varphi + y_2 \,\mathrm{Sin}\,4\varphi \,\mathrm{Cos}\,4\varphi + \ldots \\
\vdots \\
- X_{n-1} \,\mathrm{Cos}\,2\,(n-1)\varphi + x_0 \,\mathrm{Cos}\,2\,(n-1)\varphi + x_1 \,\mathrm{Cos}\,(n-1)\varphi \,\mathrm{Cos}\,2\,(n-1)\varphi \\
\qquad + y_1 \,\mathrm{Sin}\,(n-1)\varphi \,\mathrm{Cos}\,2\,(n-1)\varphi + x_2 \,\mathrm{Cos}^2 2\,(n-1)\varphi \\
\qquad + y_2 \,\mathrm{Sin}\,2\,(n-1)\varphi \,\mathrm{Cos}\,2\,(n-1)\varphi + \ldots
\end{array}\right)
$$

$$
+ \;.\;.\;.\;.\;.
$$

$$
+\,dy_1 \left(\begin{array}{l}
- X_1 \,\mathrm{Sin}\,\varphi + x_0 \,\mathrm{Sin}\,\varphi + x_1 \,\mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Sin}\,\varphi + y_1 \,\mathrm{Sin}^2\varphi \\
\qquad + x_2 \,\mathrm{Cos}\,2\varphi \,\mathrm{Sin}\,\varphi + y_2 \,\mathrm{Sin}\,2\varphi \,\mathrm{Sin}\,\varphi + \ldots \\
- X_2 \,\mathrm{Sin}\,2\varphi + x_0 \,\mathrm{Sin}\,2\varphi + x_1 \,\mathrm{Cos}\,2\varphi \,\mathrm{Sin}\,2\varphi + y_1 \,\mathrm{Sin}^2 2\varphi \\
\qquad + x_2 \,\mathrm{Cos}\,4\varphi \,\mathrm{Sin}\,2\varphi + y_2 \,\mathrm{Sin}\,4\varphi \,\mathrm{Sin}\,2\varphi + \ldots \\
\vdots \\
- X_{n-1} \,\mathrm{Sin}\,(n-1)\varphi + x_0 \,\mathrm{Sin}\,(n-1)\varphi + x_1 \,\mathrm{Cos}\,(n-1)\varphi \,\mathrm{Sin}\,(n-1)\varphi + y_1 \,\mathrm{Sin}^2(n-1)\varphi \\
\qquad + x_2 \,\mathrm{Cos}2\,(n-1)\varphi \,\mathrm{Sin}\,(n-1)\varphi + y_2 \,\mathrm{Sin}\,2\,(n-1)\varphi \,\mathrm{Sin}\,(n-1)\varphi + \ldots
\end{array}\right)
$$

$$+ dy_2 \left\{ \begin{array}{l} - X_1 \sin 2\varphi + x_0 \sin 2\varphi + x_1 \cos\varphi \sin 2\varphi + y_1 \sin\varphi \sin 2\varphi \\ \qquad + x_2 \cos 2\varphi \sin 2\varphi + y_2 \sin^2 2\varphi + \ldots \\ - X_2 \sin 4\varphi + x_0 \sin 4\varphi + x_1 \cos 2\varphi \sin 4\varphi + y_1 \sin 2\varphi \sin 4\varphi \\ \qquad + x_2 \cos 4\varphi \sin 4\varphi + y_2 \sin^2 4\varphi + \ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ - X_{n-1} \sin 2(n-1)\varphi + x_0 \sin 2(n-1)\varphi + x_1 \cos(n-1)\varphi \sin 2(n-1)\varphi \\ \qquad + y_1 \sin(n-1)\varphi \sin 2(n-1)\varphi + x_2 \cos 2(n-1)\varphi \sin 2(n-1)\varphi \\ \qquad + y_2 \sin^2 2(n-1)\varphi + \ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Setzt man $-X_0 - X_1 - X_2 - \ldots - X_{n-1} = \Sigma - X$

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos(n-1)\varphi = \Sigma \cos t\varphi$$

und bezeichnet so analog die übrigen Summen, so erhält man folgende Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma - X + n\,x_0 + x_1 \Sigma \cos t\varphi + y_1 \Sigma \sin t\varphi + x_2 \Sigma \cos 2t\varphi + y_2 \Sigma \sin 2t\varphi + \ldots = 0$$

$$\Sigma - X \cos t\varphi + x_0 \Sigma \cos t\varphi + x_1 \Sigma \cos^2 t\varphi + y_1 \Sigma \sin t\varphi \cos t\varphi + x_2 \Sigma \cos 2t\varphi \cos t\varphi + y_2 \Sigma \sin 2t\varphi \cos t\varphi + \ldots = 0$$

$$\Sigma - X \cos 2t\varphi + x_0 \Sigma \cos 2t\varphi + x_1 \Sigma \cos t\varphi \cos 2t\varphi + y_1 \Sigma \sin t\varphi \cos 2t\varphi + x_2 \Sigma \cos^2 2t\varphi + y_2 \Sigma \sin 2t\varphi \cos 2t\varphi + \ldots = 0$$

u. s. f.; ferner:

$$\Sigma - X \sin t\varphi + x_0 \Sigma \sin t\varphi + x_1 \Sigma \cos t\varphi \sin t\varphi + y_1 \Sigma \sin^2 t\varphi + x_2 \Sigma \cos 2t\varphi \sin t\varphi + y_2 \Sigma \sin 2t\varphi \sin t\varphi + \ldots = 0$$

$$\Sigma - X \sin 2t\varphi + x_0 \Sigma \sin 2t\varphi + x_1 \Sigma \cos t\varphi \sin 2t\varphi + y_1 \Sigma \sin t\varphi \sin 2t\varphi + x_2 \Sigma \cos 2t\varphi \sin 2t\varphi + y_2 \Sigma \sin^2 2t\varphi + \ldots = 0$$

u. s. f.

Diese lassen sich aber sehr vereinfachen, da $\Sigma \cos^2 = \frac{n}{2}$, ebenso $\Sigma \sin^2 = \frac{n}{2}$, alle übrige Coefficienten der Constanten $= 0$ sind. Es genüge hier der Nachweis für $\Sigma \cos\varphi$ und $\Sigma \cos^2 t\varphi$.

1) Wird $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi = S$ gesetzt,

$$\text{so ist } S\,2\sin\varphi = \left\{\begin{array}{l} 2\cos\varphi\sin\varphi \\ +2\cos 2\varphi\sin\varphi \\ +2\cos 3\varphi\sin\varphi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +2\cos(n-1)\varphi\sin\varphi \\ +2\cos n\varphi\sin\varphi \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \sin 2\varphi \\ +\sin 3\varphi - \sin\varphi \\ +\sin 4\varphi - \sin 2\varphi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +\sin n\varphi - \sin(n-2)\varphi \\ +\sin(n+1)\varphi - \sin(n-1)\varphi \end{array}\right\}$$

$$= \sin(n+1)\varphi + \sin n\varphi - \sin\varphi$$

also $S = \dfrac{\sin(n+1)\varphi + \sin n\varphi - \sin\varphi}{2\sin\varphi}$. Nun ist für unsern Fall $n\varphi = 2\pi$, folglich offenbar $\Sigma\cos t\varphi = 0$, und allgemein $\Sigma\cos p\,t\varphi = 0$.

2) Ist $\Sigma\cos^2 t\varphi = 1 + \cos^2\varphi + \cos^2 2\varphi + \ldots + \cos^2(n-1)\varphi$ so ist auch $2\Sigma\cos^2 t\varphi = 2 + 2\cos^2\varphi + 2\cos^2 2\varphi + \ldots + 2\cos^2(n-1)\varphi$

$$\begin{array}{rl} = & +1 \;\; +1 \\ & +1 \;\; +\cos 2\varphi \\ & +1 \;\; +\cos 4\varphi \\ & \;\cdot \qquad \cdot \\ & \;\cdot \qquad \cdot \\ & +1 \;\; +\cos 2(n-1)\varphi \\ = & n \end{array}$$

da der trigonometrische Theil nach 1) verschwindet, also $\Sigma\cos^2 t\varphi = \dfrac{n}{2}$. Hiernach verwandeln sich obige Bedingungsgleichungen in:

I $0 = \Sigma - X + n\,x_0$, woraus $x_0 = \dfrac{\Sigma X}{n}$ folgt;

$0 = \Sigma - X\cos t\varphi + \dfrac{n}{2}\cdot x_1$, woraus $x_1 = \dfrac{2}{n}\cdot\Sigma X\cos t\varphi$ folgt;

$0 = \Sigma - X\cos 2t\varphi + \dfrac{n}{2}\cdot x_2$, „ $x_2 = \dfrac{2}{n}\cdot\Sigma X\cos 2t\varphi$ „

allgemein II. $0 = \Sigma - X \,\mathrm{Cos}\, p\, t\, \varphi + \frac{n}{2} \cdot x_p$. woraus $x_p = \frac{2}{n} \cdot \Sigma X \,\mathrm{Cos}\, p\, t\, \varphi$ folgt;

$$0 = \Sigma - X \,\mathrm{Sin}\, t\, \varphi + \frac{n}{2} \cdot y_1, \quad ″ \quad y_1 = \frac{2}{n} \cdot \Sigma X \,\mathrm{Sin}\, t\, \varphi \quad ″$$

$$0 = \Sigma - X \,\mathrm{Sin}\, 2\, t\, \varphi + \frac{n}{2} \cdot y_2, \quad ″ \quad y_2 = \frac{2}{n} \cdot \Sigma X \,\mathrm{Sin}\, 2\, t\, \varphi \quad ″$$

allgemein III. $0 = \Sigma - X \,\mathrm{Sin}\, p\, t\, \varphi + \frac{n}{2} \cdot y_p, \quad ″ \quad y_p = \frac{2}{n} \cdot \Sigma X \,\mathrm{Sin}\, p\, t\, \varphi \quad ″$

Diese Gleichungen I, II, III geben also für jedes n die wahrscheinlichsten Constanten. Die Berechnung derselben wird man jedoch nur so lange fortsetzen dürfen, bis die Summe Σ der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu dem Grade der Verkleinerung herabsinkt, die jedenfalls genügt; sie ergibt sich einfach aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \Sigma = \left(X_0^{\,2} + X_1^{\,2} + \ldots + X^2_{n-1}\right) &- n\, x_0^{\,2} \\ - \frac{n}{2}\left(x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + y_3^{\,2} + \ldots\right) & \\ - \frac{n}{2}\left(y_1^{\,2} + y_2^{\,2} + y_3^{\,2} + \ldots\right) & \end{aligned}$$

Sind die erforderlichen Constanten berechnet, so lässt sich die oben aufgestellte Gleichung der periodischen Erscheinung für die Rechnung bequemer umformen, indem man

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 \,\mathrm{Sin}\, v_1 \\ x_2 &= u_2 \,\mathrm{Sin}\, v_2 \\ &\;\;\vdots \\ y_1 &= u_1 \,\mathrm{Cos}\, v_1 \\ y_2 &= u_2 \,\mathrm{Cos}\, v_2 \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$

setzt; man erhält alsdann als allgemeinen Ausdruck des Gesetzes der periodischen Erscheinung $X_t = x_0 + u_1 \,\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{n}.\, t + v_1\right) + u_2 \,\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{n}.\, 2\, t + v_2\right) + \ldots$

Soll z. B. der mittlere Stand des Barometers oder Thermometers in den zwölf

Monaten des Jahres aus den Beobachtungen genauer abgeleitet werden, so ist, da $n = 12$,

1) $x_0 = \frac{1}{12} (X_0 + X_1 + \ldots + X_{11})$

2) $x_1 = \frac{1}{6} (X_0 + X_1 \operatorname{Cos} 30^0 + X_2 \operatorname{Cos} 2.\,30^0 + \ldots + X_{11} \operatorname{Cos} 11.\,30^0)$
$= \frac{1}{6} [(X_0 - X_6) + \frac{1}{2} (X_2 - X_4 - X_8 + X_{10}) + (X_1 - X_5 - X_7 + X_{11}) \operatorname{Sin} 60^0]$

3) $x_2 = \frac{1}{6} (X_0 + X_1 \operatorname{Cos} 2.\,30^0 + X_2 \operatorname{Cos} 4.\,30^0 + \ldots + X_{11} \operatorname{Cos} 22.\,30^0)$
$= \frac{1}{6} [(X_0 - X_3 + X_6 - X_9) + \frac{1}{2} (X_1 - X_2 - X_4 + X_5 + X_7 - X_8 - X_{10} + X_{11})]$

4) $y_1 = \frac{1}{6} (X_1 \operatorname{Sin} 30^0 + X_2 \operatorname{Sin} 2.\,30^0 + \ldots + X_1 \operatorname{Sin} 11.\,30^0)$
$= \frac{1}{6} [(X_3 - X_9) + \frac{1}{2} (X_1 + X_5 - X_7 - X_{11}) + (X_2 + X_4 - X_8 - X_{10}) \operatorname{Sin} 60^0]$

5) $y_2 = \frac{1}{6} (X_1 \operatorname{Sin} 2.\,30^0 + X_2 \operatorname{Sin} 4.\,30^0 + \ldots + X_{11} \operatorname{Sin} 22.\,30^0)$
$= \frac{1}{6} [(X_1 + X_2 - X_4 - X_5 + X_7 + X_8 - X_{10} - X_{11}) \operatorname{Sin} 60^0]$

Mehr Constanten zu berechnen ist überflüssig; daher der aus den Beobachtungen abgeleitete Werth $X_t = x_0 + u_1 \operatorname{Sin} (30^0\, t + v_1) + u_2 \operatorname{Sin} (60^0.\, t + v_2)$. Beispiels halben sind hiernach aus den am Orte T beobachteten mittleren Barometerständen jedes Monats letztere berechnet und in nachfolgender Tafel enthalten:

Monate.	Mittlerer Barometerstand. Beobachtet.	Mittlerer Barometerstand. Berechnet.	Fehler.
0	337''',2	337''',916	+ 0,716
1	337,2	337,258	+ 0,058
2	336,2	336,596	+ 0,396
3	337,3	336,410	— 0,890
4	336,2	336,715	+ 0,515
5	337,4	337,176	— 0,224
6	336,9	337,533	+ 0,633
7	338,3	337,622	— 0,678
8	337,6	337,694	+ 0,094
9	338,1	337,840	— 0,260
10	336,7	338,085	+ 1,385
11	340,0	338,223	— 1,777

Diese Differenzen gestatten zugleich ein Urtheil über die Beobachtungsweise und über die Beobachtungsmittel. Schon aus diesem Grunde wäre es wünschenswerth, daß jeder Beobachter meteorologischer Erscheinungen die empirisch gefundenen Werthe der Rechnung unterwürfe.

§. 14.

Sobald aus den beobachteten Werthen der periodischen Erscheinung die Gleichung $X_t = x_0 + u_1 \operatorname{Sin}\left(\frac{2\pi}{n}.\ t + v_1\right) + u_2 \operatorname{Sin}\left(\frac{2\pi}{n}.\ 2\,t + v_2\right) + \ldots$ abgeleitet ist, kann aus derselben auch die Zeit des eintretenden Maximums und Minimums berechnet werden. Man darf nur die Gleichung in Bezug auf t differentiiren und den ersten Differentialquotienten $= 0$ setzen, wodurch man erhält

$$0 = u_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{n}.\ t + v_1\right) + 2u_2 \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{n}.\ 2\ t + v_2\right)$$

oder $\frac{2\pi}{n}.\ t = \varphi$ gesetzt

$$\begin{aligned} 0 &= u_1 \operatorname{Cos}(\varphi + v_1) + 2\,u_2 \operatorname{Cos}(2\,\varphi + v_2) \\ &= u_1 \left\{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos} v_1 - \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin} v_1\right\} + 2u_2 \left\{\operatorname{Cos} 2\,\varphi \operatorname{Cos} v_2 - \operatorname{Sin} 2\,\varphi \operatorname{Sin} v_2\right\}. \end{aligned}$$

Nun ist $\operatorname{Cos} 2\varphi = 2\operatorname{Cos}^2\varphi - 1$, $\operatorname{Sin} 2\varphi = 2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi$ und $\operatorname{Sin}\varphi = \sqrt{(1 - \operatorname{Cos}^2\varphi)}$; also, diese Werthe in obige Gleichung und $\operatorname{Cos}\varphi = x$ gesetzt,

$$\begin{aligned} 0 = u_1 \operatorname{Cos} v_1 . x - u_1 \operatorname{Sin} v_1 . \sqrt{(1 - x^2)} + 4\,u_2 \operatorname{Cos} v_2 . x^2 - 2\,u_2 \operatorname{Cos} v_2 \\ - 4\,u_2 \operatorname{Sin} v_2 . x \sqrt{(1 - x^2)} \end{aligned}$$

oder nach Wegschaffung der Wurzelgrößen und gehöriger Reduction

$$\begin{aligned} 0 = x^4 + \frac{u_1}{2u_2} \operatorname{Cos}(v_1 - v_2).\ x^3 - \left(1 - \frac{u_1^2}{16u_2}\right) x^2 \\ - \frac{u_1}{4\,u_2} \left\{2 \operatorname{Sin} v_1 \operatorname{Sin} v_2 + \operatorname{Cos} v_1 \operatorname{Cos} v_2\right\} x + \tfrac{1}{4} \operatorname{Cos}^2 v_2 - \frac{u_1^2}{16u_2^2}. \operatorname{Sin}^2 v_1. \end{aligned}$$

Diese biquadratische Gleichung, nach den bekannten Methoden gelöst, gibt 4 Werthe für $x = \operatorname{Cos}\frac{2\pi}{n}.\ t$, aus denen die Zeit t hervorgeht; und diese Werthe für t, in die Gleichung X_t gesetzt, lassen die ihnen entsprechenden Maxima und Minima finden.

Zur Bestimmung der Zeit des eintretenden mittleren Werthes darf nur $u_1 \operatorname{Sin}(\varphi + v_1) + u_2 \operatorname{Sin}(2\,\varphi + v_2) = 0$ gesetzt werden. Nach gehöriger Substitution und Reduction gelangt man wieder zu der biquadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = x^4 + \frac{u_1}{u_2} \operatorname{Cos}(v_1 - v_2)\ x^3 - \left(1 - \frac{u_1^2}{4u_2^2}\right) x^2 \\ - \frac{u_1}{2u_2} \left\{2 \operatorname{Cos} v_1 \operatorname{Cos} v_2 + \operatorname{Sin} v_1 \operatorname{Sin} v_2\right\} x + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}^2 u_2 - \frac{u_1^2}{4\,u_2^2}. \operatorname{Cos}^2 v_1. \end{aligned}$$

So erhält man die 4 Tageszeiten, in denen z. B. der Barometerstand beobachtet werden muss, damit man zum wahren mittleren barometrischen Werthe des Tages gelange.

Oekonomische Rücksichten gebieten, die Abhandlung hier abzubrechen.

Schulnachrichten.

A. Allgemeine Lehrverfassung.

Uebersicht des im verflossenen Schul-Jahre, Michaeli 18$\frac{39}{40}$, ertheilten Unterrichts.

1. Prima. Ordinarius: Oberlehrer Heydenreich.

1) Religion, 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
Christliche Moral nach Niemeyers Religionsbuche für die obern Classen der Gymnasien nebst Lectüre ausgewählter Stellen aus dem griechischen Testamente.

2) Hebräisch, 2 St. wöchentl., für künftige Theologen und Philologen. Oberlehrer Lentz.
Lectüre des 1sten bis 41sten Psalmes, ferner des Amos und einiger Abschnitte aus dem ersten Buche Samuelis. Befestigung in der Gramatik. (Gesenius).

3) Griechisch, 6 St. wöchentl. Oberlehrer Lentz.
Homers Odyssee lib. XIII — XXIV, ferner Xenophon's Cyropaedie lib. I und II, und am Schlusse mit den geübteren Schülern Platons Kriton und Eutyphon; nebst Extemporalien, Exercitien und grammatischen Uebungen (Buttmann). Privatlectüre: auserlesene Stücke von Lucian.

4) Latein, 8 St. wöchentl. Director Görber.
Des Horaz Oden 1tes und 2tes Buch, einige der Sermonen und Episteln, mit beständiger Berücksichtigung der lateinischen Metra. Cicero de oratore lib. 1 und II. Privatlectüre aus Livius. Freie Ausarbeitungen, Extemporalien und Grammatik (Zumpt).

5) Französisch, 2 St. wöchentl. Oberlehrer Schneider.
Befestigung in der irregulären Formlehre und in der Syntax (Mozin), nebst Extemporalien und Exercitien. Lectüre aus Voltaire's Charles XII.

6) Deutsch, 2 St. wöchentl. Oberlehrer Heydenreich.
Lectüre der lyrischen Dichter des 18ten Jahrhunderts nebst Beurtheilung der monatlichen freien Ausarbeitungen. Außerdem Uebungen im mündlichem Vortrage und Versuche in feierlichen Reden. Privatlectüre: Schiller's Dramen, Lessings antiquarische und philosophische Abhandlungen.

7) Philosophische Propädeutik, 1 St. wöchentl. Oberlehrer Heydenreich.

8) Mathematik, 4 St. wöchentl. Oberlehrer Heydenreich.
Stereometrie. Reihen, Combinationen und binomischer Lehrsatz. Lehrbücher und Hilfsmittel: Matthias Leitfaden, Meyer Hirsch Beispielsammlung und Vega's logarithmisches Handbuch. Wöchentlich häusliche Aufgaben aus der Geometrie und Arithmetik.

9) Naturwissenschaften, 2 St. wöchentl. Oberlehrer Heydenreich.
Elektricität und Elektromagnetismus. Naturbeschreibung und Wiederholung der Optik.

10) Geschichte und Geographie, 3 St. wöchentl. Oberlehrer Schneider.
Die Geschichte der Deutschen von 1519 ab, mit Einschaltung der Geschichte der übrigen europäischen Staaten (Ellendt). Privatim: Wiederholung der griechischen und römischen Geschichte und der älteren und neueren Geographie (Mannert und Cannabich).

11) Singen, 2 St. wöchentl.— Cantor Collin —; combinirt mit mehreren Schülern aus allen Classen. Uebungen in vierstimmigem Gesange.

Summa der wöchentlichen Lehrstunden: 32 und 2 Singstunden.

II. Secunda. Ordinarius: Oberlehrer Lentz.

1) Religion, 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
Allgemeine Religionsgeschichte (Niemeyer). Lektüre im griechischen neuen Testament.

2) Hebräisch, 2 St. wöchentl. für künftige Theologen und Philologen. Oberlehrer Lentz.
Elementarunterricht (Gesenius Lesebuch und Grammatik).

3) Griechisch, 6 St. wöchentl. Oberlehrer Lentz.
Homers Ilias lib. I — XII und Plutarch's Philopömen und Flaminius, nebst Extemporalien, Exercitien und Grammatik (Buttmann).
4) Latein, 8 St. wöchentl.
a) 6 St. Oberlehrer Lentz.
Livius lib. XXXI., XXXII. und XXXIII. nebst Extemporalien, Exercitien und Grammatik (Zumpt). Privatlectüre aus Justin.
b) 2 St. Director Cörber.
Virgil's Aeneis lib. X — XII. incl.
5) Französisch, 2 St wöchentl. Oberlehrer Schneider.
Einübung der regelmäßigen Formlehre, darauf die unregelmäßige und das Wichtigste der Syntax (Mozin), nebst Extemporalien und Exercitien. Lectüre aus Voltaire's Charles XII.
6) Deutsch, 3 St. wöchentl. Oberlehrer Heydenreich.
Theils mündliche Vorträge über gelesene classische Schriften, theils Lectüre mehrer epischer Werke des 18ten Jahrhunderts, theils Litteraturgeschichte des 18ten Jahrhunderts. Lehrbücher: Heydenreich's Geschichte der Poesie und Herlings Grundregeln des Styls. Monatliche freie Ausarbeitungen.
7) Mathematik, 4 St. wöchentl. Oberlehrer Heydenreich.
Die Lehrer von den Potenzen und Gleichungen des 2ten Grades. Stereometrie (Matthias Leitfaden und Meyer Hirsch). Wöchentlich häusliche Aufgaben aus der Proportionslehre und Planimetrie.
8) Naturwissenschaften, 2 St. wöchentl. Oberlehrer Heydenreich.
Gleichgewicht und Bewegung fester und flüssiger Körper. Wärme.
9) Geschichte und Geographie, 3 St. wöchentl. Oberlehrer Schneider.
Geschichte der Griechen mit Anknüpfung der Geschichte anderer Völker der alten Welt (Ellendt), nebst der alten Geographie (Mannert). Privatim: Wiederholung der neuern Geographie (Cannabich).
10) Singen, 1 St. wöchentl. — Cantor Collin —; combinirt mit mehreren Schülern verschiedener Classen.

Summa der wöchentlichen Lehrstunden: 32 und 1 Singstunde.

III. Ober Tertia. Ordinarius: Dr. Wichert.

1) Religion, 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
Jüdische Religionsgeschichte, verbunden mit jüdischer Archäologie, und christliche Religionsgeschichte und Erläuterung des christlichen Kirchenjahres. Außerdem Wiederholung und Erklärung der Hauptstücke.

2) Griechisch, 6 St. wöchentl. Dr. Wichert.
Aus Xenophon's Anabasis lib. I. und II, desgleichen aus Homers Odyssee lib. I und II. Privatim: von Xenophon's Anabasis das letzte Buch. Exercitien und grammatische Uebungen mit vorzüglicher Berücksichtigung der Syntax (Buttmann).

3) Latein, 8 St. wöchentl.
a. 6 St. Dr. Wichert.
Jul. Cäsar de bello civili lib. I. und II. Exercitien und Grammatik mit besonderer Berücksichtigung des §. 76 — §. 83 in Zumpt's Grammatik.
b. 2 St. Dr. Zeyss.
Aus Ovid's Metamorphosen ausgewählte Abschnitte; dabei Prosodik und Metrik.

4) Französisch, 2 St. wöchentl. Dr. Zeyss.
Elementarunterricht. Die regelmäßige Formlehre und Anfang der irregulären (Mozin und Heckert's Lesebuch).

5) Deutsch, 3 St. wöchentl. Dr. Wichert.
Sprachlehre mit besonderer Berücksichtigung der Syntax und des Periodenbaues. Lectüre, schriftliche Aufsätze, Declamationsübungen und mündliche Vorträge über geschichtliche Gegenstände.

6) Mathematik, 4 St. wöchentl. Oberlehrer Heydenreich.
Proportionslehre und Gleichungen des 1sten Grades, nebst Rechnungen des gemeinen Lebens. Aus der Planimetrie die Lehre vom Kreise (Tellkampf's Vorschule der Mathematik).

7) Naturwissenschaften, 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
Mineralogie und Botanik.

8) Geschichte und Geographie, 3 St. wöchentl. Dr. Wichert.
Geschichte des Mittelalters (Schmidt's Leitfaden) und Geschichte von Preußen (Heinel) — nicht ganz vollendet —. Geographie von Europa mit besonderer Berücksichtigung des preußischen Staates (Cannabich).

9) Singen, 1 St. wöchentl. Cantor Collin; combinirt mit mehreren Schülern aus andern Classen.

10) Zeichnen, 2 St. wöchentl. Zeichnen- und Schreiblehrer Keßler.

Summa der wöchentlichen Lehrstunden: 32 und 1 Singstunde.

IV. Unter-Tertia. Ordinarius: Dr. Zeyß.

1) Religion, 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
Bibellectüre des alten und neuen Testaments mit einer kurzen Einleitung in die Bibel. Die wichtigsten Bibelstellen und die Hauptstücke wurden auswendig gelernt.

2) Griechisch, 6 St. wöchentl. Dr. Zeyß.
Aus dem 2ten Cursus des Jacobschen Lesebuches die Aesopischen Fabeln und die Abschnitte aus der Mythologie und der Länderkunde. Exercitien und grammatische Uebungen mit vorzüglicher Berücksichtigung der irregulären Formenlehre (Buttmann).

3) Latein, 9 St. wöchentl. Dr. Zeyß.
Lektüre aus Cornelius Nepos und aus Ovid's Metamorphosen nebst grammatischen Uebungen (fortgesetzte Einübung der unregelmäßigen Verba) mit vorzüglicher Berücksichtigung des §. 69 bis 75 in Zumpt's Grammatik. Exercitien und Extemporalien.

4) Deutsch, 2 St. wöchentl. Dr. Zeyß.
Etymologie und das Wichtigste der Satzlehre. Synonymik. Deklamationen und Uebungen in mündlichen und schriftlichen Erzählungen und im Briefstyle.

5) Mathematik, 4 St. wöchentl. Oberlehrer Clemens.
Planimetrie mit Ausschluß der Aehnlichkeit der Figuren. Potenzen, Decimalbrüche, Wurzeln. Wiederholung und Erweiterung der Proportionslehre, Repartitions- und Kettenrechnung — einfache und zusammengesetzte — und Gleichungen mit einer unbekannten Größe (Meyer Hirsch Beispielsammlung, Matthias Leitfaden.). Häusliche Aufgaben.

6) Naturwissenschaften, 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
Zoologie und Anthropologie.

7) Geschichte und Geographie, 3 St. wöchentl. Dr. Zeyss.
Griechische und Macedonische Geschichte in Verbindung mit der alten Geographie dieser Länder (Schmidts Grundriß der alten Geschichte.). Neuere Geographie der außereuropäischen Länder (Cannabich).
8) Singen, 1 St. wöchentl.; combinirt mit mehrern Schülern aus Quarta. Cantor Collin.
9) Zeichnen, 2 St. wöchentl. Zeichnen- und Schreiblehrer Kessler.
10) Schreiben, 2 St. wöchentl. Zeichnen- und Schreiblehrer Kessler.

Summa der wöchentlichen Lehrstunden: 32 und 1 Singstunde.

V. Quarta. Ordinarius: Oberlehrer Schneider.

1) Religion, 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
Die christliche Glaubens- und Sittenlehre nach dem Weißeschen Religionsbüchlein. Passende Bibelsprüche und Liederverse, so wie auch die Hauptstücke wurden auswendig gelernt und erklärt.
2) Griechisch, 6 St. wöchentl. Dr. Wichert.
Elementarunterricht, die regelmäßige Formenlehre und die Verba auf $\mu\iota$ (Buttmann). Lektüre aus dem ersten Cursus des Jacobschen Lesebuches.
3) Latein, 6 St. wöchentl. Oberlehrer Schneider.
Aus dem 2ten Bande des Jacobschen Elementarbuches die Abschnitte A und B der ersten Abtheilung, nebst grammatischen Uebungen (Schulzens Schulgrammatik). Einübung der unregelmäßigen Verba. Zu dem Uebersetzen aus dem Deutschen in das Lateinische wurde Schulzens Anleitung zum Uebersetzen — 2ter Cursus — benutzt.
4) Deutsch, 3 St. wöchentl. Oberlehrer Schneider.
Vervollständigung der orthographischen und grammatischen Regeln. Versuche im schriftlichen und mündlichen Beschreiben und Erzählen. Deklamationsübungen, außerdem Lesen im Hüllstettschen Lesebuche — 2ter Theil. —
5) Mathematik, 6 St. wöchentl. Oberlehrer Clemens.
Anschauung geometrischer Formen. Congruenz der Dreiecke, Parallellinien, Parallelogramme. Die 4 Species mit ganzen und gebrochnen Zahlen, Buchstabenrechnung, Proportionen und deren Anwendung auf die regula de tri, quinque. etc. Repartitions- und Kettenrechnung.

6) Naturwissenschaften, 2 St. wöchentl. Oberlehrer Clemens.
Das Wichtigste aus der Physik und Naturbeschreibung. Erweiterung des in Quinta und Sexta Vorgetragenen.

7) Geschichte und Geographie, 6 St. wöchentl. Oberlehrer Schneider.
Alte Geschichte, griechische bis 479 v. Ch. und römische bis 264 v. Ch. in Verbindung mit der Geographie dieser Länder (Schmidts Grundriß der alten Geschichte). Aus der neueren Geographie: Uebersicht von Europa.

8) Singen, 1 St. wöchentl.; combinirt mit mehrern Schülern aus Untertertia. Cantor Collin.

9) Zeichnen, 2 St. wöchentl. Schreib- und Zeichnenlehrer Kessler.

10) Schreiben, 2 St. wöchentl. Schreib- und Zeichnenlehrer Kessler.

Summa der wöchentlichen Lehrstunden: 32 und 1 Singstunde.

VI. Quinta. Ordinarius: der Oberlehrer Clemens.

1) Religion. 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
Biblische Geschichte des neuen Testaments (Kohlrauschens Biblische Geschichte). Bibelsprüche nebst den 5 Hauptstücken wurden auswendig gelernt und erklärt

2) Latein, 6 St. wöchentl. Oberlehrer Clemens.
Aus dem ersten Bande des Jacobschen Elementarbuches: Grundstriche der römischen Geschichte. Aus Schulzens Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Lateinsche wurde nach kurzer Wiederholung des in Sexta durchgegangenen Pensums zum ersten Anhange über die unregelmäßige Deklination und zum 2ten Cursus fortgeschritten unter beständiger Einübung der anomalischen Conjugation und Declination und der grammatischen Regeln (Schulzens Schulgrammatik).

3) Deutsch, 4 St. wöchentl. Oberlehrer Clemens.
Der erweiterte und zusammengesetzte Satz. Aus Hüllstett's Lesebuch — 1 Bd. 2te Abthlg. — wurden leichte Parabeln, Beschreibungen und Lieder gelesen. Befestigung in der Orthographie. Uebungen in mündlichen und schriftlichen Erzählungen und im Deklamiren.

4) Geometrie und Rechnen, 6 St. wöchentl.
 a. 4 St. Bruchrechnung und einfache Regel de tri mit Anwendung auf die verschiedenen Maaße. Kopf- und Tafelrechnen abwechselnd. Lehrer Gisevius.
 b. 2 St. Anschauung geometrischer Formen. Oberlehrer Clemens.

5) Naturwissenschaften, 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
 Das Wichtigste aus der Naturgeschichte.

6) Geschichte und Geographie, 4 St. wöchentl.
 a. Geschichte, 2 St. Oberlehrer Clemens.
 Preußische Geschichte (Heinels Auszug).
 b. Geographie, 2 St. Oberlehrer Schneider.
 Europa mit besonderer Berücksichtigung des preuß. Staates (Cannabich).

7) Singen, 2 St. wöchentl.; combinirt mit Sexta. Cantor Collin.
 Notenkenntniß. Uebungen im Treffen der Töne. Choralmelodien.

8) Zeichnen, 2 St. wöchentl. Schreib- und Zeichnenlehrer Kessler.

9) Schreiben, 4 St. wöchentl. Schreib- und Zeichnenlehrer Kessler.

Summa der wöchentlichen Lehrstunden: 32.

VII. Sexta. Ordinarius: Pauperinspector Gisevius.

1) Religion, 2 St. wöchentl. Oberlehrer List.
 Biblische Geschichten des alten Testaments (Kohlrausch). Bibelsprüche und Liederverse, so wie auch der Dekalogus wurden auswendig gelernt und erklärt.

2) Latein, 6 St. wöchentl. Lehrer Gisevius.
 Elementar-Unterricht. Die regelmäßige Formenlehre, Deklination, Genusregeln, regelmäßige und unregelmäßige Comparation der Adjektiva, die Pronomina, und die 4 Conjugationen mit dem Deponens. (Schulzens Schulgrammatik). Zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische, wurde der erste Cursus aus Schulzens Aufgaben benutzt. Aus Jakobs lateinischem Lesebuche wurde aus dem ersten Bande der ersten Abtheilung übersetzt.

3) Deutsch, 4 St. wöchentl. Lehrer Gisevius.
Der einfache Satz mit der Erweiterung. Lesen von Fabeln und poetischen Erzählungen im Hüllstettschen Lesebuche — 1r Bd. 1ste Abthlg. — Mündliches Nacherzählen des Gelesenen und Deklamationsübungen nebst wöchentlichen schriftlichen Uebungen.
4) Rechnen, 6 St. wöchentl. Lehrer Gisevius.
Die 4 Species in ganzen und benannten Zahlen, dabei Maaß- und Gewichtskunde. Anfänge der Bruchrechnung und Regel de tri. Kopf- und Tafelrechnen abwechselnd.
5) Naturwissenschaften, 2 St. wöchentl. Lehrer Gisevius.
Naturgeschichte.
6) Geschichte und Geographie, 4 St. wöchentl. Lehrer Gisevius.
Allgemeine Uebersicht der Geschichte nach Bredows 3 ersten Tabellen. Elementar-Geographie (Cannabich).
7) Singen, 2 St. wöchentl.; combinirt mit Quinta. Cantor Collin.
8) Zeichnen, 2 St. wöchentl. Zeichnen- und Schreiblehrer Kessler.
9) Schreiben, 4 St. wöchentl. Zeichnen- und Schreiblehrer Kessler.

Summa der wöchentlichen Lehrstunden: 32.

Den Unterricht im Turnen ertheilte der Oberlehrer Heydenreich in 4 wöchentlichen Stunden des Sommersemesters.

Auch wurde im Sommer wiederum Anweisung im Schwimmen unter gehöriger Aufsicht gegeben.

B. Höhere Verfügungen im Schuljahre Michaeli 18$\frac{39}{40}$.

1) Vom 1sten August 1839. Nachträgliche Mittheilung der von des Hochseligen Königs Majestät an das Königl. Staatsministerium erlassenen Cabinetsordre vom 24sten December 1836 „wegen der Dienstentlassung derjenigen Beamten, welche sich des Lasters der Trunkenheit schuldig machen," zur Kenntnissnahme und Nachachtung.

2) Vom 25sten September 1839. Auf Veranlassung des Königl. Ministeriums der Geistlichen- und Unterrichtsangelegenheiten wird das von dem Maler, Hofrath und Gallerieinspector W. Ternite zu Berlin und dem Professor C. O. Müller in Göttingen angekündigte Werk: „Wandgemälde aus Herculanum und Pompeji nach genauen Zeichnungen und Nachbildungen in farbigem Steindruck zur Anschaffung empfohlen.

3) Vom 7ten October 1839. Die Prüfungs- und Einschreibgebühren eines neu eintretenden Schülers werden in den 3 obern Classen auf 2 Thaler, in den 3 untern auf 1 Thaler festgesetzt. Die Prüfungs- und Entlassungsgebühren eines Abiturienten betragen 1 Ducaten und sind auch von denen zu entrichten, welche während der Prüfung zurücktreten oder in der Prüfung nicht bestehn.

4) Vom 6ten November 1839. Ueber die bisherige Einrichtung des Censurwesens bei dem Gymnasio wird Berichterstattung erfordert.

5) Vom 8ten Januar 1840. Der Aufsatz des Oberlehrers Dr. Deinhardt in Wittenberg „über die Berechtigung der philosophischen Propädeutik im Gymnasialunterrichte," welcher in dem Juni-Hefte der Centralbibliothek für Literatur, Statistik und Geschichte der Pädagogik und des Schulunterrichts im In- und Auslande vom Dr. Brzoska enthalten ist, wird zur besondern Beachtung empfohlen.

6) Vom 2ten März 1840. Von solchen Schulprogrammen, welche naturwissenschaftliche Gegenstände behandeln, sollen 2 Exemplare über die gewöhnliche Anzahl eingereicht werden.

7) Vom 10ten März 1840. Nach Anordnung Eines Königl. Unterrichts-Ministeriums soll von diesem Jahre ab ein gegenseitiger Austausch der Pro-

gramme mit denen der Königl. Würtenbergischen, der Großherzogl. Sachsen-Weimarschen und Eisenachschen, der Herzogl. Sachsen-Altenburgischen, und der Fürstl. Schwarzburg-Rudolstädtschen Gymnasien statt finden. Es sind daher künftig 208 Exemplare einzusenden, deren Zahl bei Behandlung naturwissenschaftlicher Gegenstände noch um 2 zu vermehren ist. Sollte von einem Gymnasio in einem Jahre gar kein Programm ausgegeben werden, so soll jedesmal mit Angabe der Behinderungsgründe davon Anzeige gemacht werden.

8) Vom 2ten Juli 1840. Der Inhalt zweier letztwilliger Dispositionen des Hochseligen Königs Majestät soll Lehrern und Schülern auf eine angemessene Weise mitgetheilt werden.

9) Vom 11ten Juli 1840. In Stelle des Sr. Majestät, dem jetzt regierenden Könige, abzuleistenden Diensteides werden die Geistlichen und Lehrer aller Kategorien auf den früher geleisteten Eid und auf die Bestimmungen der Cabinetsordre vom 11ten August 1832 verwiesen. Es soll darüber eine Verhandlung aufgenommen und diese von sämmtlichen bei der Anstalt fungirenden Lehrern vollzogen werden.

C. Chronik des Gymnasiums.

Das Schuljahr begann mit dem 28sten October 1839 und wird mit der öffentlichen Schulprüfung am 6ten und 7ten October c. und der darauf folgenden Versetzung geschlossen werden. Im Lehrer-Collegio sind im Laufe des Jahres keine Veränderungen vorgekommen und nur selten wurde die Wirksamkeit einzelner Lehrer durch nicht zu lange anhaltende Krankheit unterbrochen. Der Schulamtscandidat Herr Carl Heinrich Krauſs, der nach Beendigung seines Probejahres noch das ganze vorige Jahr hindurch aus Liebe zur Sache ohne alle Entschädigung den Unterricht in den Naturwissenschaften in den 3 untern Classen mit gutem Erfolge ertheilt hatte, gab mit Anfange des neuen Schuljahres sein Geschäft bei dem Gymnasio auf, weil er eine Anstellung in der hier neu errichteten Bürgerschule erhalten hat. Durch die Veränderung der Schülerzahl war aus den Jahren 1837 und 1838 bei der Schulgeldseinnahme ein Deficit von 442 Thlr. 4 Sgr. 2 Pf. entstanden. Dieser Betrag wurde auf gütige Verwendung des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums zu Königsberg durch einen außerordentlichen Zuschuß, welchen das hohe Ministerium der Geistlichen-, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten huldreichst aus Staatsfonds anwies, gedeckt. Außerdem erhielten durch die Gnade derselben hohen Behörde die beiden Gymnasiallehrer, Oberlehrer Clemens und Dr. Zeyss, jeder eine außerordentliche Unterstützung von 50 Thlrn.

D. Statistische Nachrichten.

Nach Aufnahme der neuen Schüler zu Anfange des neuen Schuljahres betrug die Schülerzahl 224. Von diesen waren

in	I . . .	19
=	II . . .	40
=	IIIa . .	33
=	IIIb . .	52
=	IV . .	28
=	V . .	33
=	VI . .	19

in Summa . . 224, also 10 weniger als im vergangenen Schuljahre. Von diesen gingen im Laufe und am Schlusse des Winter-Semesters 9 ab, so daß am Schlusse des Semesters noch 215 geblieben waren; zu diesen kamen zu Anfange des Sommer-Semesters 7 hinzu, also in Summa 222. Von diesen gehen mit dem Zeugnisse der Reife zur Universität:

1) August Eduard Schiewe, Sohn des Thierarztes zu Insterburg, 19 Jahr alt, um in Königsberg Theologie zu studiren;

2) Carl Wilhelm Alexander Hellwich, Sohn des Königl. Justizcommissarius in Tilsit, $19\frac{1}{2}$ Jahr alt, welcher in Königsberg die Rechte zu studiren gedenkt;

3) Otto August Sackersdorff, Sohn des Königl. Kreis-Cassen-Rendanten zu Insterburg, 20 Jahr alt, der sich in Königsberg dem Rechtsstudio zu widmen beabsichtigt;

4) Johann Eduard Heinrich Schlenther, Sohn des hiesigen Königl. Kreis-Landrathes, 19½ Jahr alt, um sich in Berlin dem Cameralfache zu widmen; und

5) Theodor Eduard Wollermann, Sohn des in Tilsit verstorbenen Land- und Stadtgerichts-Assessors, 19½ Jahr alt, um in Königsberg Medicin zu studiren.

Michaeli 1839 sind folgende Schüler der ersten Klasse mit dem Zeugnisse der Reife zur Academie entlassen worden:

1) Carl Julius Frank, 19 Jahr alt, Sohn des hier verstorbenen Schneidermeisters, der Philologie beflissen;

2) Gustav Adolph Hein, 20 Jahr alt, Sohn des Königl. Land- und Stadtgerichts-Directors in Memel, Jurist;

3) Ferdinand Albert Heydenreich, 20½ Jahr alt, Sohn des hiesigen Gymnasial-Oberlehrers, Theologe;

4) Heinrich Traugott Heydenreich, 18½ Jahr alt, Bruder des vorstehenden, Theologe;

5) Samuel Herrmann Büttner, 21½ Jahr alt, Sohn des verstorbenen Pfarrers in Wehlau, Theologe;

6) Carl Friedrich Sell, 20½ Jahr alt, Sohn des hiesigen Leinwebermeisters, Theologe;

7) August Bertram Clösser, 22 Jahr alt, Sohn des Lederfabrikanten in Wehlau, Jurist;

8) Johann Leopold Schneller, 23½ Jahr alt, Sohn des Pfarrers in Heinrichswalde bei Tilsit, Mediciner.

Die Bibliothek des Gymnasiums verdankt auch in dem verflossenen Schuljahre mehrere Werke der gütigen Fürsorge des hohen Unterrichtsministeriums, nehmlich:

1) Von F. W. Koch's Werke: „Die preußischen Universitäten" den ersten Band.

2) Das 5te und 6te Heft von Gerhard's griechischen Vasenbildern.

3) Von Dietrichs Flora regni Borussici des siebenten Bandes erste Abtheilung.

4) Die von Kortmann herausgegebene Wandkarte in 16 Blättern.

5) Die elfte und zwölfte Lieferung von Hegels Werken.
6) Corpus Grammaticorum latinorum tom. IV, fascic. I.
7) Der sechste Jahrgang des Rheinischen Museums für Philologie.

Ordnung der Prüfung.

Dienstag, den 6ten October. Vormittag von 9—12 Uhr.

Choralgesang der ersten Singclasse. Herr Cantor Collin.

Religion. Secunda. Herr Oberlehrer List.
Deutsch. Prima. Herr Oberlehrer Heydenreich.
Französisch. Ober-Tertia. Herr Dr. Zeyss.
Latein. Sexta. Herr Gisevius.
Geographie. Quinta. Herr Oberlehrer Schneider.
Griechisch. Quarta. Herr Dr. Wichert.
Naturkunde. Unter-Tertia. Herr Oberlehrer List.
Physik. Secunda. Herr Oberlehrer Heydenreich.
Hebräisch. Prima. Herr Oberlehrer Lentz.

Gesang der ersten Singclasse. Vierstimmige Lieder von Nägeli, Reichardt, Sörensen: Herr Cantor Collin.

Nachmittag von 2—5 Uhr.

Geschichte. Ober-Tertia. Herr Dr. Wichert.
Arithmetik. Quarta. Herr Oberlehrer Clemens.
Deutsch. Sexta. Herr Gisevius.
Geographie. Unter-Tertia. Herr Dr. Zeyss.
Deutsch. Quinta. Herr Oberlehrer Clemens.
Latein. Quarta. Herr Oberlehrer Schneider.
Geschichte. Sexta. Herr Gisevius.
Latein. Quinta. Herr Oberlehrer Clemens.
Geschichte. Prima. Herr Oberlehrer Schneider.

Gesang der ersten Singclasse: vierstimmige Lieder von Gläser, Sörensen, Rolle, Haydn. Herr Cantor Collin.

Mittwoch, den 7ten October. Vormittag von 9—12 Uhr.

Mathematik. Ober-Tertia. Herr Oberlehrer Heydenreich.

Latein. Unter-Tertia. Herr Dr. Zeyss.

Mathematik. Secunda. Herr Obenlehrer Heydenreich.

Griechisch. Ober-Tertia. Herr Dr. Wichert.

Latein. Secunda. Herr Oberlehrer Lentz.

Mathematik. Unter-Tertia. Herr Oberlehrer Clemens.

Griechisch. Prima. Herr Oberlehrer Lentz.

Latein. Prima. Der Director.

Entlassung der Abiturienten.

Der Abiturient Otto Sackersdorff spricht in einer deutschen Rede über die Worte Schillers: „Ob auch alles im ewigen Wechsel kreist, es bleibet im Wechsel ein ruhiger Geist;" und nimmt zugleich von der Schule Abschied.

Der Primaner Albert le Juge zeigt in seiner Rede, daß eine trübe Gegenwart durch die Hoffnung einer schönen Zukunft versüßt wird, und empfiehlt sich und seine Mitschüler dem Andenken seiner scheidenden Freunde.

Schlussgesang der ersten Singclasse: Fugirte Chöre von Hellwig, Rolle und Schulz. Herr Cantor Collin.

Die Schule wird Donnerstag, den 22sten October, wieder eröffnet. Die Vormittagsstunden der ersten Ferienwoche sind zur Prüfung und Aufnahme der neu ankommenden Schüler bestimmt.