

Biblioteka  
U. M. K.  
Toruń  
Czyt. Of.

62906

D. II.

MARIAN GROTOWSKI

# WYKŁADY FIZYKI

113

2

TOM II

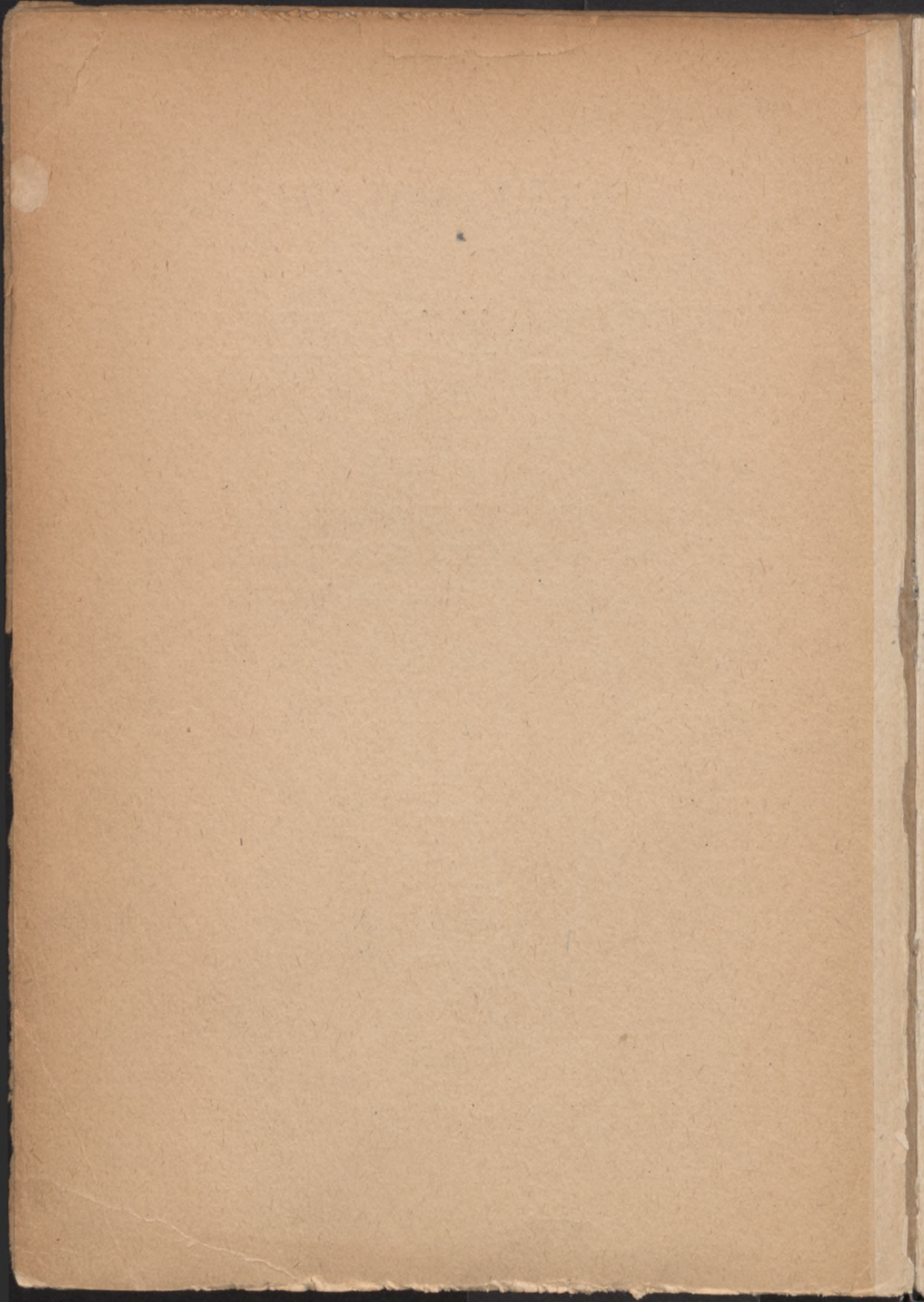
ROZCHODZENIE SIĘ ODKSZTAŁCEŃ  
W ŚRODOWISKACH SPRĘŻYSTYCH.  
ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM



KSIĘGARNIA ŁÓDZKA WYDAWNICZA »CZYTAJ«  
ŁÓDŹ

1950

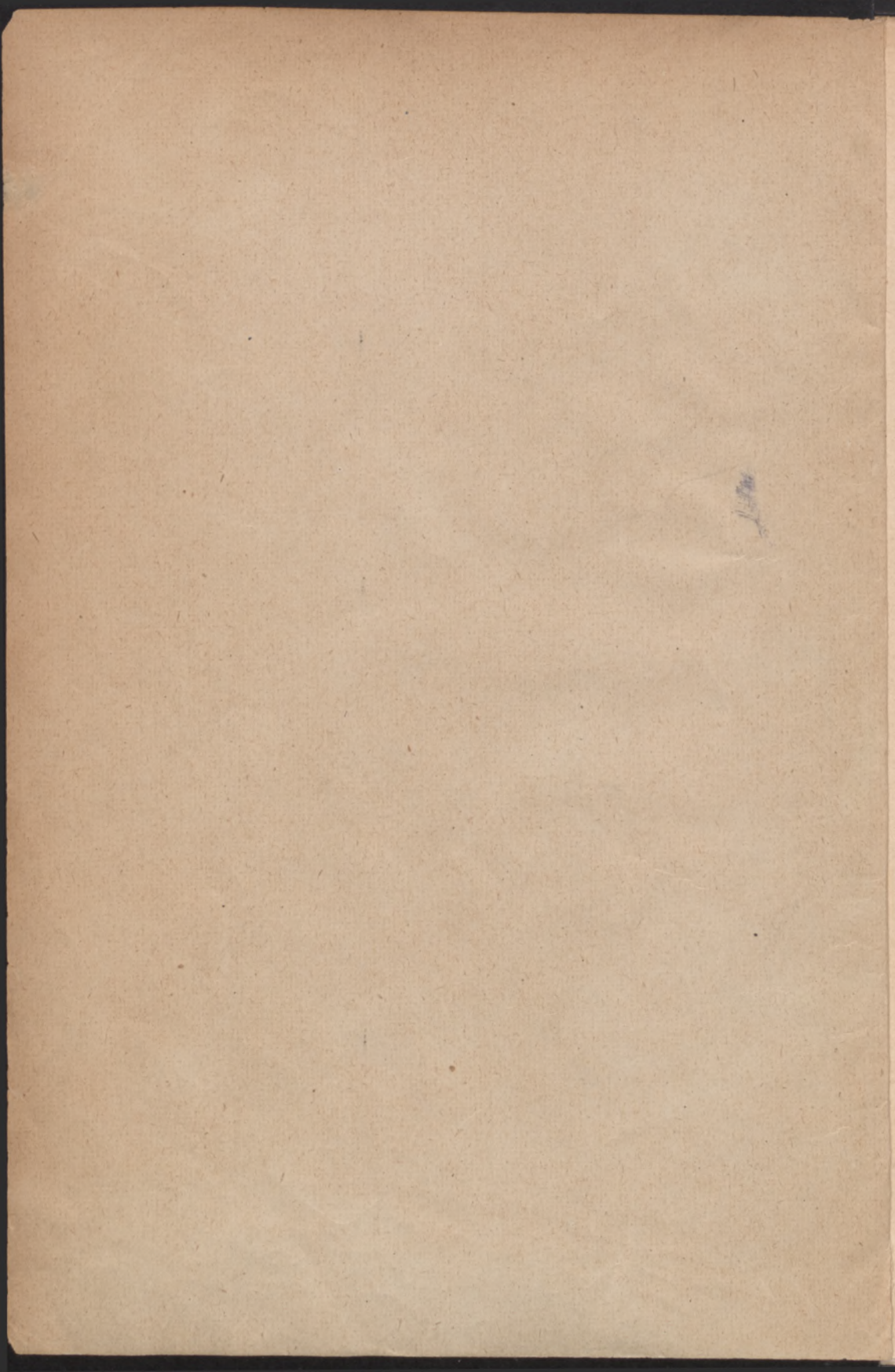




*2am 133*

WYKŁADY FIZYKI





MARIAN GROTOWSKI

# WYKŁADY FIZYKI

TOM II

ROZCHODZENIE SIĘ ODKSZTAŁCEŃ  
W ŚRODOWISKACH SPRĘŻYSTYCH.  
ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM



KSIĘGARNIA ŁÓDZKA WYDAWNICZA »CZYTAJ«  
ŁÓDŹ

1950





62906

II  
conf. et

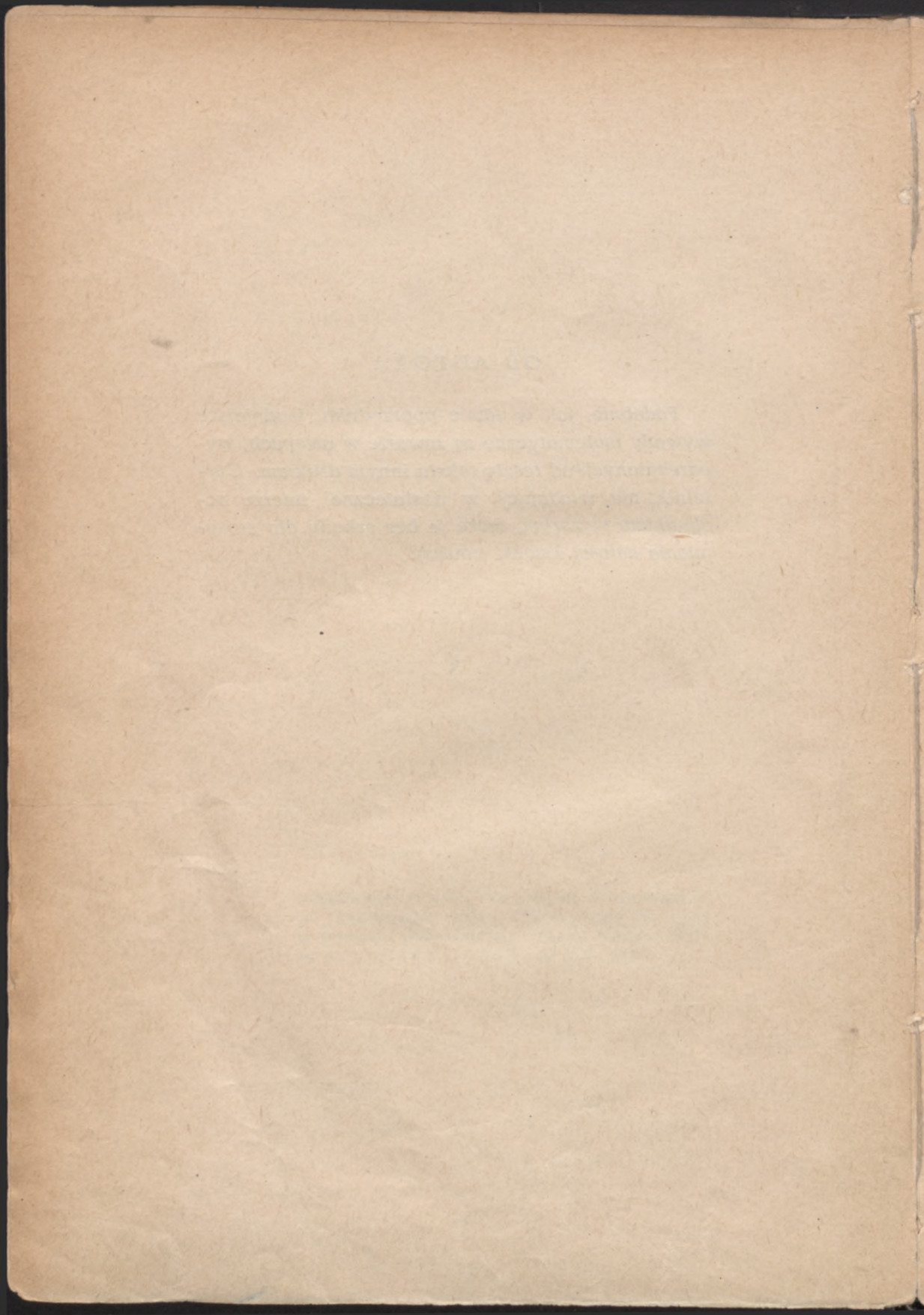
DRUKOWANO W NAKŁADZIE 3000 EGZ. W FORMACIE B5  
NA PAPIERZE DRUKOWYM TYNOWANYM V KL. — 80 G.  
W DRUKARNI WYDAWNICTWA "PRASA WOJSKOWA"  
W JELENIEJ GÓRZE NR ZAM. 808/48. F

E.1192/51

## OD AUTORA.

*Podobnie, jak w tomie poprzednim, trudniejsze wywody matematyczne są zawarte w ustępach, wyodrębnionych od reszty tekstu innym drukiem. Czytelnik, nie władający w dostatecznej mierze rachunkiem wyższym, może je bez szkody dla zrozumienia całości książki opuścić.*





## SPIS RZECZY

Od autora . . . . . Str.  
V

### ROZCHODZENIE SIĘ ODKSZTAŁCEŃ W ŚRODOWISKACH SPRĘŻYSTYCH. DRGANIA CIAŁ SPRĘŻYSTYCH

Rozdział I. — Rozchodzenie się odkształceń w środowiskach sprężystych . . . . . 1—105

1. — Odkształcenia w nieograniczonym środowisku sprężystym (1). 2. — Prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych (8). 3. — Pomiar prędkości rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w środowisku nieograniczonym (17). 4. — Energia przenoszona przez fale odkształcenia (29). 5. — Interferencja. — Składanie drgań o tej samej częstotliwości (44). 6. — Fale stojące (49). 7. — Składanie drgań o niejednakowym okresie. — Wzór Fouriera (53). 8. — Dudnienia (60). 9. — Składanie drgań, zachodzących w kierunkach prostopadłych (63). 10. — Zasada Huygensa-Fresnela (69). 11. — Uginanie się fal sprężystych (71). 12. — Odbijanie się fal (76). 13. — Załamywanie się fal (89). 14. — Zjawisko Dopplera-Fizeau (95). 15. — Zaburzenia, rozchodzące się z prędkością większą, niż prędkość głosu (100).

Rozdział II. — Drgania ciał sprężystych. Źródła dźwięku . . . . . 107—166

1. — Drgania struny (107). 2. — Drgania prętów i sztab (118). 3. — Drgania błon i płyt (128). 4. — Tłumienie drgań. — Drgania wymuszone (podniecane). — Rezonans (133). 5. — Sprężenie (148). 6. — Drgania ograniczonych mas gazu (154).

### ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM

Rozdział III. — Pole elektryczne . . . . . 167—284

1. — Doświadczenia podstawowe (167). 2. — Prawo Coulomba (178). 3. — Pole elektryczne (186). 4. — Indukcja elektryczna. — Twierdzenie Gaussa (198). 5. — Założenia



## VIII

teorii Faradaya-Maxwella (213). 6.— Rozmieszczenie naboju na powierzchni przewodnika. — Pojemność elektryczna (216). 7.— Pojemność kondensatorów (227). 8.— Energia elektryczna (239). 9.— Przyrządy do mierzenia różnic potencjałów i nabożów (246). 10.— Stała dielektryczna. — Polaryzacja dielektryczna (257). 11.— Przewodnictwo dielektryków. — Pozostałość dielektryczna (269). 12.— Piroelektryczność i piezoelektryczność (273). 13.— Pole elektryczne Ziemi (278).

### Rozdział IV. — Pole magnetyczne magnesów . . . 285—362

1.— Podstawowe własności magnesów (285). 2.— Pole magnetyczne magnesu (292). 3.— Wpływ rodzaju środowiska na własności pola (311). 4.— Wektor indukcji magnetycznej i strumień indukcji magnetycznej (316). 5.— Ciała dia i paramagnetyczne (321). 6.— Ciała ferromagnetyczne (333). 7.— Pole magnetyczne ziemi (353).

### Rozdział V. — Prąd elektryczny stały . . . 363—416

1.— Prąd elektryczny. — Prawo Ohma (363). 2.— Prawo Joule'a. — Siła elektrobodźcza (371). 3.— Rozgałęzienie prądu. — Prawa Kirchhoffa (374). 4.— Wyznaczanie oporów. — Opór właściwy (384). 5.— Prąd w przewodniku o niejednakowej temperaturze. — Zjawisko Thomsona (395). 6.— Obwód złożony z przewodników niejednorodnych. — Termoelektryczność (401). 7.— Zjawisko Peltiera (412).

### Rozdział VI. — Prąd elektryczny w elektrolitach. — Ogniwa galwaniczne . . . 417—455

1.— Elektroliza. — Prawa Faradaya (417). 2.— Teoria dysocjacji elektrolitycznej (423). 3.— Prędkość jonów. — Liczby Hittorfa (425). 4.— Przewodnictwo elektrolitów (429). 5.— Polaryzacja elektrolityczna. — Teoria Nernsta (436). 6.— Elektrody rtęciowe. — Elektrometr kapilarny (447). 7.— Termodynamiczna teoria ogniów (449).

### Rozdział VII. — Pole magnetyczne prądu. . . 456—527

1.— Działanie prądu na magnes i magnesu na przewodnik prądu. Założenie Ampère'a (456). 2.— Pole magnetyczne prądu (460). 2-a.— Wektor elektryczny i wektor magnetyczny (482). 3.— Siły, działające na przewodnik prądu, umieszczony w polu magnetycznym. Prawo Biota i Savarta (485). 4.— Ruch przewodnika z prądem w polu magne-



tycznym (496). 5.—Galwanometry i elektrodynamometry (502). 6.—Obwód magnetyczny. Elektromagnesy (516). 7.—Zjawiska galwanomagnetyczne i termomagnetyczne (523).

Rozdział VIII — Indukcja elektromagnetyczna . 528—582

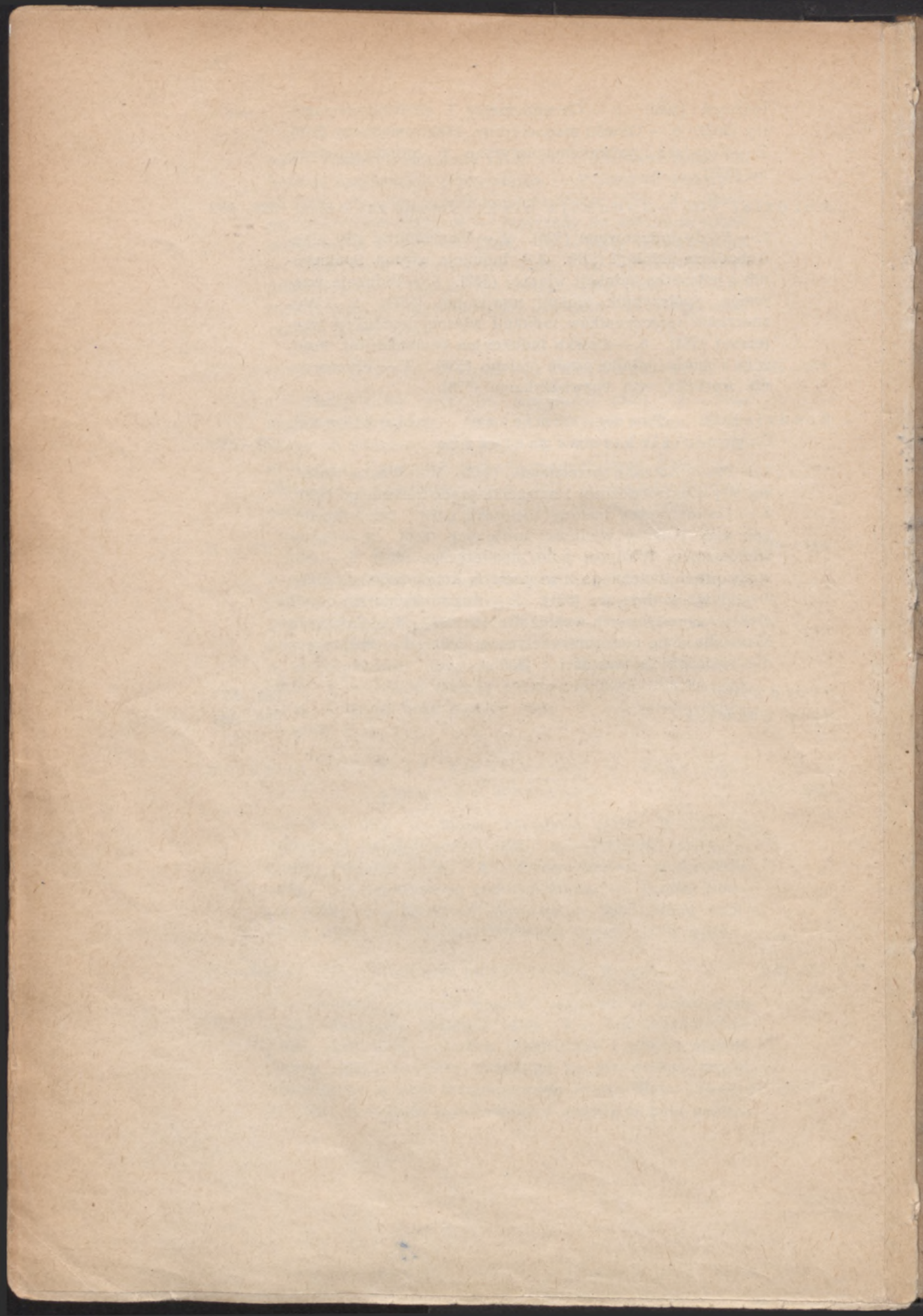
1.—Prądy indukowane (528). 2.—Elementarne siły elektrobodźcze indukcji (536). 3.—Indukcja własna. Spółczynnik i jednostka indukcji własnej (542). 4.—Indukcja wzajemna. Spółczynnik indukcji wzajemnej (551). 5.—Wyznaczanie współczynników indukcji własnej i indukcji wzajemnej (555). 6.—Cewka indukcyjna (Ruhmkorffa). Prądnicą i motor (silnik) prądu stałego (559). 7.—Wyznaczenie wartości oma bezwzględnego (578).

Rozdział IX. — Prądy zmienne (przemienne).  
Drgania elektromagnetyczne . . . . . 583—660

1.—Prądy zmienne (przemienne) (583). 2.—Pomiar zmiennej siły elektrobodźczej i natężenia prądu zmiennego (590). 3.—Geometryczne metody rachunku (595). 3-a.—Rachunek przy pomocy wielkości urojonych (600). 4.—Prądy wielofazowe. Wirujące pole magnetyczne (603). 5.—Obwody prądu zmiennego z włączonym kondensatorem (611). 6.—Obwody drgające (621). 7.—Rozchodzenie się drgań elektromagnetycznych wzdłuż drutów (631). 8.—Założenie Maxwella. Fale elektromagnetyczne (648). 9.—Bezpośrednie wyznaczenie wartości  $c$  (656).

Skorowidz . . . . .	661—677
Spis nazwisk . . . . .	679—696







**ROZCHODZENIE SIĘ ODKSZTAŁCEŃ W ŚRODOWISKACH  
SPRĘŻYSTYCH  
DRGANIA CIAŁ SPRĘŻYSTYCH**

**ROZDZIAŁ I**

**ROZCHODZENIE SIĘ ODKSZTAŁCEŃ W ŚRODOWISKACH  
SPRĘŻYSTYCH.**

**1. — ODKSZTAŁCENIA W NIEOGRANICZONYM ŚRODOWISKU  
SPRĘŻYSTYM.**

Działanie odkształcające sił zewnętrznych w wyjątkowych tylko przypadkach — ciał doskonale niesprężystych — ogranicza się do tego elementu objętości ciała, na który siły te działają bezpośrednio. Zazwyczaj działanie to powoduje, jak wiemy, powstanie sił sprężystości, naruszających istniejącą poprzednio równowagę sił, z jakimi wzajemnie działały na siebie elementy sąsiednie, co z kolei wywołuje odkształcenie tych elementów i wzbudza siły, odkształcające dalej położone elementy objętości ciała. W ten sposób odkształceniu ulegają stopniowo wszystkie elementy danego ciała, dopóki siły sprężystości, wywołane przez zmianę wzajemnego położenia tych elementów, nie zrównoważą działania sił zewnętrznych. W przypadkach takich, jak te, które rozpatrywaliśmy w rozdziale V i VI tomu pierwszego, gdy badane ciała były na ogół rozmiarów niewielkich i gdy siły działające miały wartość stałą, czas dojścia do tego stanu równowagi był dostatecznie mały, aby można było uważać w chwili pomiaru odkształcenie każdego elementu ciała za mające wartość stałą, nie zmieniającą się z czasem. Inaczej jednak sprawa się przedstawia, gdy siły odkształcające są siłami chwilowymi lub zmiennymi lub wreszcie, gdy odkształcane środowisko jest nieograniczone.

Przypuścmy, że w nieograniczonym środowisku płynnym (ciekłym lub gazowym) umieściliśmy wydrążoną kulę rozcią-



gliwą, której objętość zwiększymy nagle, wtlaczając do niej znacznie większą masę powietrza. Warstwa płynu bezpośrednio stykająca się z kulą dozna nagłego uderzenia i zostanie odprchnięta ku warstwie dalszej, co spowoduje nagły wzrost jej gęstości i wobec skończonej ściśliwości płynów odpowiedni wzrost ciśnienia. Wtedy warstwa sąsiednia, która uprzednio doznawała jednakowych ciśnień od obu stykających się z nią warstw, zewnętrznej i wewnętrznej, będzie poddana pewnej nadwyżce ciśnienia ze strony warstwy wewnętrznej, przesunie się zatem w stronę warstwy zewnętrznej, w której z kolei wywoła wzrost gęstości i ciśnienia. Zaburzenie, które początkowo ujawniało się jedynie w warstwie płynu, bezpośrednio przylegającej do kuli, stopniowo będzie się rozchodziło coraz dalej, tworząc falę zgęszczenia. Prędkość rozchodzenia się tej fali, zależna od własności fizycznych środowiska, będzie miała w środowiskach jednorodnych i równokierunkowych we wszystkich kierunkach jednakową wartość. Elementy zatem objętości środowiska, do których w danej chwili dojdzie odkształcenie (tzw. czoło fali), będą leżały tym razem na powierzchni kulistej.

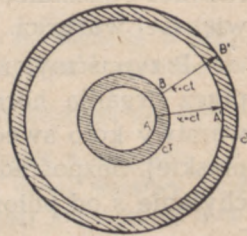
Gdyby jednak źródłem zaburzeń była nie kula, lecz nieograniczenie długi walec, którego promień uległby nagłemu zwiększeniu, jednakowemu na całej długości walca, warstwa, do której w danej chwili doszłoby zaburzenie, tworzyłaby powierzchnię cylindryczną, spłosiową do danego walca; kierunek rozchodzenia się zaburzenia wyznaczałyby w tym przypadku proste, prostopadłe do osi walca. Gdyby zaś zaburzenia były wywołane przez nagłe przesunięcie się w kierunku normalnej nieograniczenie rozciąglej płaszczyzny, fala zgęszczenia byłaby falą płaską, kierunek zaś rozchodzenia się zaburzeń byłby zgodny z kierunkiem normalnej do danej płaszczyzny.

Przebieg zjawiska nie ulegnie zmianie, gdy ciała, będące źródłem zaburzeń, zmniejszą swoją objętość (lub gdy płaszczyzna przesunie się w stronę przeciwną), gdy więc w warstwach bezpośrednio do nich przylegających nastąpi rozrzedzenie i spadek ciśnienia. Fala rozrzedzenia, która wtedy powstanie, będzie, podobnie jak fala zgęszczenia, stopniowo



przechodziła do coraz to dalszych warstw środowiska, przy czym, podobnie jak poprzednio, przesunięcia w warstwach zachodzą wzdłuż prostych, wyznaczających kierunek rozchodzenia się zaburzeń: w fali zgęszczenia w kierunku zgodnym z tym kierunkiem, w fali rozrzedzenia — w kierunku przeciwnym. Falę, powodującą przesunięcia leżące na prostych, wyznaczających kierunek rozchodzenia się zaburzeń, nazywamy podłużną; fale więc zgęszczenia i rozrzedzenia są falami podłużnymi.

Jakkolwiek nagła będzie zmiana objętości źródła zaburzeń (lub mówiąc ogólniej przesuwanie się jego powierzchni), czas, w ciągu którego zmiana ta będzie zachodziła, nie będzie nigdy równy zeru, wobec czego, zanim to przesunięcie osiągnie wartość ostateczną, zaburzenie, wywołane w chwili rozpoczęcia się ruchu powierzchni źródła, przejdzie z warstwy bezpośrednio stykającej się ze źródłem do warstwy dalszej. Oznaczmy przez  $T$  czas trwania ruchu powierzchni źródła i założmy, że zmiany gęstości i ciśnienia są dostatecznie małe, abyśmy mogli pominąć wpływ ich na własności fizyczne środowiska i przyjmując, że prędkość rozchodzenia się zaburzeń zachowuje bez względu na odkształcenia, jakich doznały warstwy, w których zaburzenia się rozchodzą, stałą wartość  $c$ . Wtedy droga, jaką zaburzenie przejdzie w przeciągu czasu  $T$ , wyniesie  $cT$ , tyle więc wynosić będzie grubość warstwy  $AB$ , w której gęstość i ciśnienie posiadają wartości różne od normalnych. Po upływie czasu  $t$  zaburzenie z powierzchni  $B$  (rys. 1) dojdzie do powierzchni  $B'$ , odległej od  $B$  w kierunku rozchodzenia się zaburzeń o  $ct$ , z powierzchni zaś  $A$  przesunie się na tę samą odległość do  $A'$ ; w przypadku zatem, w którym obowiązuje przyjęte przez nas założenie, grubość warstwy, w której zaburzenie jest umiejscowione, pozostaje podczas jego rozchodzenia się bez zmiany. Długość  $cT$ , równą grubości warstwy odkształcanej w ciągu czasu  $T$ , nazywamy długością fali danego zaburzenia.



rys. 1



Falom tym towarzyszą zmiany energii odkształcanych elementów środowiska. Zmiany te, zależne w danym środowisku od wartości i rodzaju odkształceń, przesuwały się razem z nimi z tą samą, co i one, prędkością do coraz to dalszych warstw środowiska.

Założmy, że odkształcenia, które przyjmujemy, jak była o tym mowa wyżej, za bardzo małe, zachodzą w sposób odwracalny; wtedy praca, wykonana przez źródło zaburzeń na przylegającej do niego bezpośrednio warstwie, równa jest pracy, wykonywanej przez tę warstwę podczas zanikania w niej odkształcenia na sąsiedniej z kolei odkształcanej warstwie. Energia zatem, udzielona środowisku przez źródło zaburzeń, jest w tym przypadku przenoszona bez zmian kolejno przez wszystkie odkształcane warstwy. Gdy mamy do czynienia z falami płaskimi, rozchodzącymi się w środowisku jednorodnym, masy warstw objętych odkształceniem są zawsze te same, wielkość więc wywołanych przez tę samą pracę odkształceń musi również pozostawać bez zmiany; każda przeto warstwa środowiska będzie podlegała identycznym odkształceniom.

Jeżeli zatem w warstwie bezpośrednio przylegającej do źródła zaburzeń odkształcenia zachodzić będą okresowo, osiągając co  $T$  sek pewną największą wartość  $\theta_0$ , każda warstwa środowiska, do której dojdą fale odkształcenia, podlegać będzie również odkształceniu o tym samym okresie i o tej samej największej wartości.

Przypuśćmy, że te okresowe odkształcenia są wywołane przez drgania harmonijne proste elementów objętości danej warstwy koło swego położenia równowagi, tak że w warstwie płaskiej, bezpośrednio stykającej się ze źródłem zaburzeń, odchylenie  $s$  od położenia równowagi równe jest w chwili  $t$

$$s = s_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

gdzie  $s_0$  największa wartość odchylenia t.zn. amplituda lub obszerność drgania (por. tom I, str. 50). W warstwie płaskiej odległej o  $x$  od danej warstwy, gdzie  $x$  mierzone jest w kierunku rozchodzenia się fal, odkształcenia będą, w myśl tego, coś-



my mówili wyżej, spowodowane również przez drgania harmonijne proste punktów tej warstwy — drgania o tym samym okresie i tej samej amplitudzie  $s_0$ ; fazy jednak tych drgań nie będą identyczne z fazami drgań w warstwie, stykającej się ze źródłem. Zaburzenie bowiem na przebyciu drogi  $x$  cm zużyje czas  $\frac{x}{c}$  sek, gdzie  $c$  — prędkość rozchodzenia się zaburzeń, wobec czego w chwili  $t$  do danej warstwy dojdzie to zaburzenie, które było w warstwie stykającej się ze źródłem w chwili o  $\frac{x}{c}$  sek wcześniejszej, a więc w chwili  $t_1 = t - \frac{x}{c}$ . W warstwie  $x$  mamy zatem w chwili  $t$  odchylenie od położenia równowagi

$$s_x = s_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

lub 
$$s_x = s_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) = s_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (1)$$

Wzór ten jest często nazywany równaniem promienia. We wzorze tym długość fali  $\lambda$  oznacza, tak jak poprzednio, grubość warstwy (mierzoną w kierunku rozchodzenia się zaburzeń), w której umiejscowione jest odkształcenie, wzbudzone przez źródło w ciągu czasu  $T$ .

Wywody powyższe stosują się jedynie do fal płaskich. W przypadku fal kulistych różnica fazy w punkcie odległym o  $r$  od środka drgającej kuli, będącej źródłem zaburzeń, jest mniejsza od  $2\pi \frac{r}{\lambda}$ ;

w odległości  $r$  od źródła, znacznej w porównaniu z długością fali, zjawisko zachodzi tak, jak gdyby odległość danej warstwy była o ćwierć długości fali mniejsza od  $r$  tak, że między punktem  $A_1$ , leżącym w pobliżu źródła w odległości  $r_1$ , i punktem  $A_2$ , leżącym w znacznej od źródła odległości  $r_2$ , różnica faz wynosi nie  $\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$ ,

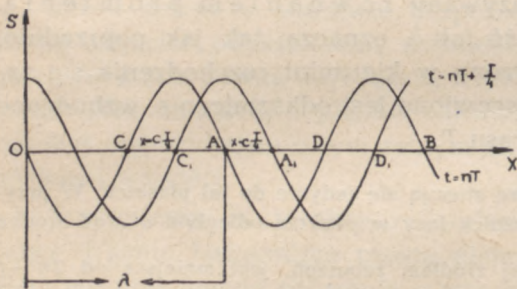
lecz  $\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} - \frac{\pi}{2}$ . Odkształcenia w tym przypadku nie są w kolejnych warstwach identyczne, jak to można stwierdzić na następującym prostym przykładzie. Podzielmy środowisko na płaskie równoległe warstwy i przesunmy cząstki tych warstw w tej samej chwili na tę samą odległość w kierunku do warstw prostopadłym; odkształ-



cenie będzie wszędzie miało wartość zero; podzielmy teraz srodo-wisko na spółośrodkowe warstwy kuliste i znów nadajmy cząstkom tych warstw to samo przesunięcie w kierunku promieni: w srodku kuli rozrzedzenie będzie miało wartość bardzo wielką, zmniejszającą się stopniowo w miarę wzrostu promienia warstwy.

Ze wzoru (1) wynika, że punkty materialne, leżące w płaszczynach równoległych do płaszczyny zaburzeń i odległych od niej o  $x = \lambda, 2\lambda, 3\lambda \dots n\lambda$ , są zawsze w tej samej, co i ona, fazie drgania; podobnie będą miały zawsze jednakową fazę drgania punkty dwu jakichkolwiek płaszczyn równoległych, leżących we wzajemnej odległości, równej  $\lambda, 2\lambda, 3\lambda \dots n\lambda$ . Tak na przykład warstwy, mające zawsze fazę drgania, przeciwną fazie źródła, będą, zgodnie ze wzorem (1), odległe od płaszczyny zaburzeń o  $\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2} \dots (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ , a więc jedna od drugiej będzie się znajdowała w tej samej odległości  $\lambda$ .

Odkładając na osi odciętych odległości od źródła zaburzeń rozpatrywanych warstw elementarnych, na osi rzędnych odchylenia ich srodków masy od położenia równowagi, otrzymamy po  $n$  drganiach rozkład odchyleń wzdłuż prostej  $Ox$  taki, jak na rys. 2. W punktach  $A, B \dots$  odległych o  $x = 2\lambda \dots n\lambda$  od punktu  $O$ , fazy zaburzeń będą zawsze



rys. 2

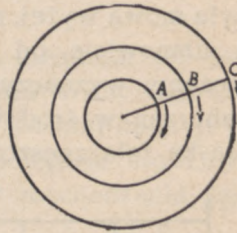
zgodne z fazą źródła zaburzeń w  $O$ , w punktach zaś  $C, D, \dots$  odległych o  $\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2} \dots (2n+1)\frac{\lambda}{2}$  zawsze przeciwne.

Fazy zaburzeń, które poprzednio były w punktach  $C, D, \dots$  przesuną się w ciągu czasu  $\frac{T}{4}$  do warstw  $C_1, D_1, \dots$  odległych od nich o  $x = c \cdot \frac{T}{4}$ . Tak że rozkład odchyleń, odpowiadający



chwili  $t = nT + \frac{T}{4}$  otrzymamy, przesuwając krzywą bez zmiany jej kształtu w kierunku dodatnich  $x$ -ów o długość  $c \cdot \frac{T}{4}$ .

W płynach, posiadających jedynie sprężystość objętości, siły sprężyste powstają wyłącznie przy zmianach gęstości, wobec czego zaburzenia, rozchodzące się w środowiskach płynnych, posiadają zawsze cechy fal podłużnych. Inaczej jest w środowisku stałym, w którym siły sprężystości występują przy każdej zmianie wzajemnego położenia jego części, nawet takiej, której nie towarzyszy żadna zmiana gęstości. Wyodrębnijmy w takim środowisku kulisty element objętości i skróćmy go nagle dookoła jednej z jego średnic. Powstające przy tym odkształceniu siły sprężystości spowodują, że przylegająca do odkształcanej kuli warstwa  $B$  środowiska (rys. 3), na którą poprzednio warstwy sąsiednie działały siłami wzajemnie się równoważącymi, poddana będzie działaniu sił większych ze strony warstwy wewnętrznej, wobec czego cząstki jej przesuną się w tym samym kierunku, co punkty  $A$  odkształcanego elementu kulistego; to zaś spowoduje przesunięcie się w tym samym kierunku warstwy  $C$ . Odkształcenie więc i w tym przypadku będzie się stopniowo rozchodziło, powodując odchylenie od poprzedniego położenia równowagi coraz to dalszych warstw środowiska. Prędkość rozchodzenia się tej fali skręcenia jest, podobnie jak fali podłużnej, zależna od własności fizycznych środowiska, w nieograniczonym więc jednorodnym i równokierunkowym środowisku stałym będzie miała we wszystkich jego punktach tę samą wartość. W przykładzie przez nas rozpatrywanym fala skręcenia będzie falą kulistą, kierunkiem zaś jej rozchodzenia będą promienie kuli, stanowiącej źródło zaburzeń. W przypadku zaś, gdy odkształcenie powstaje przez rozciąganie nieograniczenie długiego cylindra lub przesuwanie elementów płaszczyzny w kierunku do tej płaszczyzny równoległym, otrzymujemy odpowiednio falę cylindryczną lub płą-



rys. 3

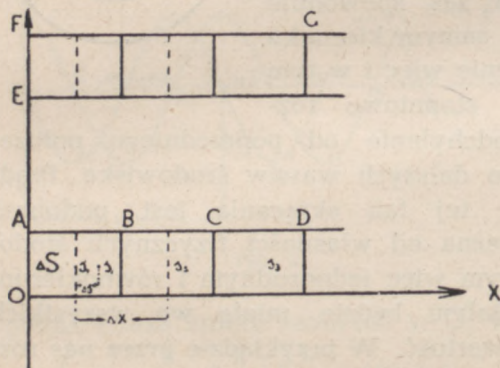


ską. Jakikolwiek jednak będzie kształt fali odkształcenia, kierunek przesunięcia cząstek warstw odkształcanych będzie zawsze prostopadły do kierunku rozchodzenia się zaburzeń. Tego rodzaju fale nazywamy **falami poprzecznymi**.

Zakładając, podobnie jak to czyniliśmy w przypadku fal podłużnych, że i tym razem odkształcenia środowiska nie zmieniają w znaczniejszym stopniu jego własności fizycznych, możemy, stosując analogiczne do poprzedniego rozumowanie, stwierdzić, że grubość warstwy odkształcanej nie ulega podczas rozchodzenia się zaburzeń zmianie, pozostając stale równa  $\lambda = cT$ , gdzie  $\lambda$ ,  $c$  i  $T$  będą miały te same, co poprzednio znaczenie.

## 2. — PRĘDKOŚĆ ROZCHODZENIA SIĘ ZABURZEŃ SPRĘŻYSTYCH.

Z tych trzech wielkości, charakteryzujących dane zaburzenie, prędkość rozchodzenia się zaburzeń  $c$  jest, jak o tym już była mowa wyżej, zależna od własności fizycznych środowiska, a mianowicie, od jego sprężystości i gęstości. Zależność tę możemy wyznaczyć, rozpatrując dokładniej rozchodzenie się zaburzeń w środowisku. Przypuśćmy, że falą zaburzeń jest płaska fala zgęszczenia. Wyodrębnijmy w kierunku rozchodzenia się tej fali  $Ox$



rys. 4

nieograniczenie długi cienki walec o przekroju  $\Delta S$  i podzielmy go płaszczyznami prostopadłymi do  $Ox$  na dostatecznie małe elementy objętości, abyśmy mogli przyjąć, że w chwili przechodzenia zaburzenia przez dany element odchylenie

wszystkich jego punktów od położenia równowagi ma wartość jednakową, równą odchyleniu jego środka masy  $s$ . Dalej założmy, podobnie jak to czyniliśmy w ustępie poprzednim, że zgęszczenie, spowodowane przesunięciem się punktów



materialnych, stanowiących warstwę  $AB$ , o  $s_1 s'_1 = \Delta s$  jest tak małe, że wzrost ciśnienia jest do zgęszczenia proporcjonalny, że więc mamy

$$\Delta p = -e \frac{\Delta V}{V}, \quad (a)$$

gdzie  $e$  jest odpowiednim współczynnikiem sprężystości, lub z uwagi, że

$$V = \Delta S \cdot \Delta x \text{ i } \Delta V = \Delta S (\Delta x - \Delta s) - \Delta S \Delta x = -\Delta S \cdot \Delta s,$$

$$\Delta p = e \frac{\Delta s}{\Delta x}. \quad (b)$$

Siła zatem, jaką na skutek tego zgęszczenia element  $AB$  działa na element  $BC$ , będzie równa

$$f = \Delta p \cdot \Delta S = e \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \Delta S. \quad (c)$$

Pod działaniem tej siły punkty materialne elementu  $BC$  po upływie  $\Delta t$  sek odchylią się od swych położeń równowagi na odległość  $\Delta s$  równą tej, na jaką o  $\Delta t$  sek wcześniej odchyliły się punkty elementu  $AB$ . Wobec tego, że odległość środków masy tych elementów wynosi  $\Delta x$ , prędkość rozchodzenia się zaburzenia będzie równa  $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Czas  $\Delta t$  możemy wyznaczyć ze związku między impulsem, działającym na element  $BC$ , i nabytą przezeń ilością ruchu, zakładając, że czas  $\Delta t$  jest dostatecznie krótki, abyśmy mogli uważać wartość siły  $f$  za stałą,

$$f \cdot \Delta t = \rho \cdot \Delta S \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (d)$$

gdzie  $\rho$  — gęstość środowiska,  $\rho \cdot \Delta S \cdot \Delta x$  — masa danego elementu,  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  nabyta przez punkty materialne elementu  $BC$  przeciętna prędkość ruchu. Podstawiając do (d) wartość siły ze wzoru (c), będziemy mieli

$$e \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t = \rho \cdot \Delta S \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t},$$



skąd

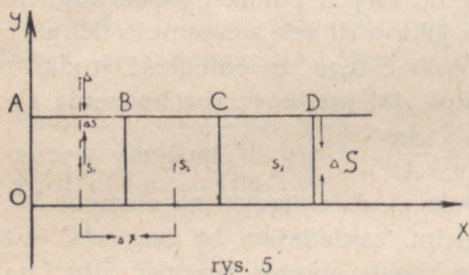
$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} = \frac{e}{\rho}$$

i ostatecznie

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{e}{\rho}}, \quad (2)$$

Z taką samą prędkością zaburzenia będą się rozchodziły w całej masie środowiska; zaburzenie bowiem będzie, w myśl założenia, dochodziło jednocześnie do wszystkich punktów warstwy płaskiej, prostopadłej do kierunku rozchodzenia się zaburzeń; prędkość więc  $c$  będzie miała tę samą wartość w walcu  $AD$ , co w jakimkolwiek innym do niego równoległym walcu  $FG$ .

W podobny sposób można wyznaczyć prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych. Przyjmijmy, że, tak jak poprzednio, mamy do czynienia z falą płaską, rozchodzącą się w kierunku  $Ox$  i że  $AD$  jest wyodrębnionym z nieograniczonego środowiska walcem, rozbitym płaszczyznami prostopadłymi do  $Ox$  na dostatecznie małe elementy objętości  $AB, BC \dots$  (rys. 5).



rys. 5

Środki mas tych elementów znajdujące się początkowo w tej samej odległości od osi  $Ox$ , przesuwać się będą na skutek doznawanych odkształceń w kierunku do  $Ox$  prostopadłym. Niech w pewnej chwili, gdy środek masy elementu  $BC$  znajduje się jeszcze w położeniu równowagi, odchylenie środka masy elementu  $AB$  wyniesie  $s_1, s'_1 = \Delta s$ .

Zakładając w dalszym ciągu, że odkształcenia są dostatecznie małe, możemy uważać napięcie, wzbudzone przez zmianę wzajemnego położenia elementów  $AB$  i  $BC$ , za równe  $p = e_1 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x}$ , gdzie  $e_1$  oznacza współczynnik sprężystości danego odkształcenia;

skąd na siłę, wywieraną na element  $BC$ , otrzymamy wartość

$$f = e_1 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \Delta S.$$



Jeżeli prędkość rozchodzenia się odkształceń równa jest  $c$ , to po upływie czasu  $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$  na tę samą odległość  $\Delta s$  przesunie się w kierunku  $Oy$  środek masy  $s_2$  elementu  $BC$ . Oznaczając przeciętną ilość ruchu, nabytą przez  $s_2$  pod działaniem impulsu  $f \cdot \Delta t$ , przez  $\rho \cdot \Delta S \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$  otrzymamy związek następujący:

$$f \cdot \Delta t = e_1 \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \Delta t \cdot \Delta S = \rho \Delta S \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

i

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} = \frac{e_1}{\rho},$$

skąd ostatecznie

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{e_1}{\rho}}. \quad (2a)$$

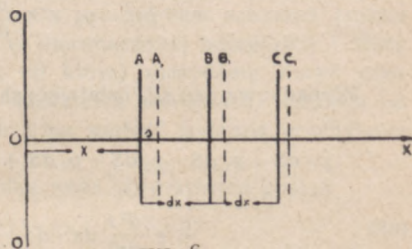
Otrzymane wzory (2) i (2a) możemy uogólnić na falę dowolnego kształtu a to z uwagi, że w dostatecznie wielkiej odległości od źródła część przynajmniej takiej fali możemy z wystarczającym przybliżeniem uważać za falę płaską i co za tym idzie stosować do niej wzór (2) lub (2a), i że, zgodnie z poczynionymi przez nas założeniami co do rodzaju odkształceń, prędkość rozchodzenia się zaburzeń ma we wszystkich punktach środowiska wartość jednakową.

Przyjmijmy tak, jak wyżej, kierunek rozchodzenia się w środowisku nieograniczonym podłużnej fali płaskiej za oś  $Ox$  i oznaczmy przez  $s$  odchylenie, jakiego w danej chwili doznaje elementarna warstwa o przekroju  $dS$ , znajdująca się w odległości  $x$  od źródła zaburzeń. W warstwie sąsiedniej  $B$ , odległej o  $x+dx$  od płaszczyzny  $OO$  (rys. 6), odchylenie w tej samej chwili wynosić będzie

$$s - \frac{ds}{dx} \cdot dx;$$

odległość zatem dwu tych warstw, początkowo równa  $dx$ , na skutek zachodzącego odkształcenia stała się

$$dx + s - \frac{ds}{dx} dx - s - dx - \frac{ds}{dx} dx;$$



rys. 6



objętość elementu  $AB$  środowiska uległa więc zmianie o

$$dV = -dS \frac{ds}{dx} dx.$$

Odształcenie objętościowe  $\theta$  otrzymamy ze wzoru

$$\theta = \frac{dV}{V} = - \frac{dS \frac{ds}{dx} \cdot dx}{dS \cdot dx} = - \frac{ds}{dx}.$$

Odształcenie więc ma wartość taką, jaką by miało, gdyby warstwa  $A$  pozostała w położeniu poprzednim, warstwa zaś  $B$  przesunęła się w kierunku odwrotnym do istotnego przesunięcia o  $\frac{ds}{dx} dx$ .

Zmiana ciśnienia, działającego na powierzchnię  $B$  elementu  $BC$  wyniesie, zgodnie z założeniem proporcjonalności między ciśnieniem i odształceniem,

$$-e \frac{\Delta V}{V} = -e\theta = e \frac{ds}{dx},$$

gdzie  $e$  jest tak, jak wyżej, współczynnikiem sprężystości. Oznaczając przez  $p_0$  wartość ciśnienia przed odształceniem, otrzymamy na ciśnienie, działające w danej chwili na powierzchnię  $B$  elementu  $BC$ , wzór

$$p_1 = p_0 + e \frac{ds}{dx}. \quad (\text{a})$$

Z drugiej strony odchylenie od położenia równowagi warstwy  $C$ , odległej od  $B$  o  $dx$  różnić się będzie od odchylenia warstwy  $B$  o

$$\frac{d}{dx} \left( s - \frac{ds}{dx} dx \right) dx = \left( \frac{ds}{dx} - \frac{d^2s}{dx^2} dx \right) dx;$$

ciśnienie zatem, działające na tę warstwę, będzie równe

$$p_2 = p_0 + e \frac{ds}{dx} - e \frac{d^2s}{dx^2} dx.$$

Wypadkowa zaś sił, działających na element  $BC$ , wyniesie

$$\begin{aligned} p \cdot dS - p_1 dS - p_2 dS &= p_0 dS + e \frac{ds}{dx} dS - p_0 dS - e \frac{ds}{dx} dS + \\ &+ e \frac{d^2s}{dx^2} dx \cdot dS = e \frac{d^2s}{dx^2} \cdot dx \cdot dS. \end{aligned}$$



Pod działaniem tej wypadkowej cząstki warstwy nabędą przyspieszeń, wobec czego będziemy mieli

$$p \cdot dS = e \frac{d^2 s}{dx^2} dx \cdot dS = \rho \cdot dS dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

i ostatecznie,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{e}{\rho} \cdot \frac{d^2 s}{dx^2}. \quad (3)$$

Równanie (3), które, jak to można bez wielkiego trudu sprawdzić, obowiązuje również w przypadku odkształceń postaci, wyraża rozchodzenie się sprężystych fal płaskich. Równaniu temu czyni zadość następująca wartość  $s$ :

$$s = f(ct + x) + F(ct - x), \quad (4)$$

gdzie  $f$  i  $F$  są dowolnymi funkcjami,  $c$  zaś równe jest  $\sqrt{\frac{e}{\rho}}$ . Istotnie, biorąc pochodne  $s$  względem  $t$  przy stałym  $x$ , a następnie względem  $x$  przy stałym  $t$ , otrzymujemy, używając przyjętego znakowania dla tych tzw. pochodnych cząstkowych,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = cf'(ct + x) + cF'(ct - x) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 f''(ct + x) + c^2 F''(ct - x)$$

oraz

$$\frac{\partial s}{\partial x} = f'(ct + x) - F'(ct - x) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = f''(ct + x) + F''(ct - x),$$

skąd po podstawieniu do równania (3) otrzymujemy tożsamość

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \{ f''(ct + x) + F''(ct - x) \} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

W przypadku przez nas rozpatrywanym odkształcenia, rozchodzące się w kierunku dodatniej osi  $x$ -ów, a które dotychczas uważaliśmy za powstające dzięki przesunięciu się (w prawo lub w lewo) nieograniczonej płaszczyzny  $OO$ , możemy równie dobrze wyobrazić sobie, jako powstające w warstwach, leżących po stronie ujemnych  $x$ -ów i dochodzących w chwili  $t = 0$  do warstwy  $OO$ , która przy takim ujęciu zagadnienia przestaje być dla nas źródłem zaburzeń (źródło to jest umieszczone tym razem w nieoznaczonej odległości) i służy jedynie do wyznaczenia chwili, od której zaczynamy liczyć czas. W tej właśnie chwili  $t = 0$  we wszystkich warstwach, leżących od  $OO$  na prawo, a więc dla których  $x$  ma wartość dodatnią, wychylenie  $s$  jest równe zeru.

W tym szczególnym przypadku wzór (4) przybiera postać

$$s = F(ct - x). \quad (4a)$$



Istotnie przypuśćmy, że w chwili  $t = 0$ , odkształcenie było umiejscowione w warstwie o grubości  $x_0$ , zawartej między płaszczyzną OO i płaszczyzną równoległą do niej i przecinającą oś Ox w punkcie  $-x_0$ ; wszystkie zaś inne warstwy były w położeniu równowagi. Wtedy zarówno

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = cF'(-x), \quad (4b)$$

$$\text{jak i} \quad \Theta = -\frac{\partial s}{\partial x} = F'(-x) \quad (4c)$$

mają wartość różną od zera jedynie dla wartości  $x$  zawartych między 0 i  $-x_0$ . Jest to możliwe tylko wtedy, gdy  $F'(ct-x)$  jest różne od zera jedynie dla wartości argumentu, zawartego w granicach

$$0 \geq ct - x \geq -x_0.$$

Po upływie zatem  $t$  sek temu warunkowi czynić będą zadość wartości  $x$  zawarte w granicach wyrażonych wzorami

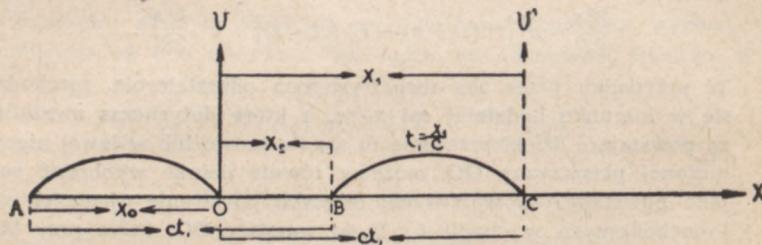
$$ct - x' = 0; \quad x' = ct$$

$$ct - x'' = -x_0; \quad x'' = ct + x_0.$$

Grubość zatem odkształcanej warstwy

$$x'' - x' = ct + x_0 - ct = x_0$$

pozostanie taka sama, jak poprzednio; warstwy skrajne, odgraniczające warstwy odkształcane od pozostałych części środowiska, przesuną się w kierunku dodatnim  $x$ -ów o  $ct$ ,  $c$  zatem, równe  $\sqrt{\frac{e}{\rho}}$ , jest prędkością rozchodzenia się zaburzeń. Niech krzywa AO (rys. 7) odtwarza



rys. 7

zależność prędkości cząstek od położenia w odkształcanej warstwie w chwili  $t = 0$ , krzywa zaś BC w chwili  $t_1 = \frac{x_1}{c}$ . Równanie krzywej AO ma, jak wiemy postać

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = cF'(-x), \quad (a)$$



równanie zaś krzywej  $BC$

$$v = c F' (ct_1 - x). \quad (b)$$

Przenieśmy początek współrzędnych do punktu  $C$ ; nowe współrzędne  $x'$  będą związane z poprzednim i wzorem

$$x = x' + x_1 = x' + ct_1,$$

Wobec czego zamiast równania (b) możemy napisać

$$v = c F' (ct_1 - x' - ct_1) = c F' (-x'),$$

otrzymując tę samą co poprzednio zależność  $v$  od odległości, w jakiej dana cząstka materialna znajduje się od warstwy, odgraniczającej odkształcaną część środowiska.

Podobnie stwierdzimy, że zmiany, jakim ulega  $v$  w czasie  $T$ , w ciągu którego odkształcenie przechodzi przez daną warstwę, będą również w obu warstwach identyczne. Niech prędkości cząstek danej warstwy, równe zero w chwili  $t = 0$ , w ciągu czasu  $T$  ulegają zmianom przedstawionym krzywą  $OA$ . Równanie tej krzywej otrzymamy, podstawiając do wzoru (4a) współrzędną danej warstwy  $x = 0$  i wyznacząc

$$\frac{\partial s}{\partial t}, \quad v = c F' (ct). \quad (c)$$

Po upływie  $t = \frac{x_1}{c}$  sek zaburzenie dojdzie do warstwy, odległej o  $x_1 = ct$  od warstwy rozpatrywanej uprzednio. Równanie krzywej  $BC$  będzie w tej warstwie miało postać

$$v = c F' (ct - x_1). \quad (d)$$

Przenieśmy początek współrzędnych do punktu  $C$ , odległego o  $t = \frac{x_1}{c}$  od  $O$ . Związek między nowymi współrzędnymi  $t'$  i dawnymi  $t$  wyraża wzór

$$t = t' + \frac{x_1}{c},$$

skąd po podstawieniu do równania (d) otrzymujemy

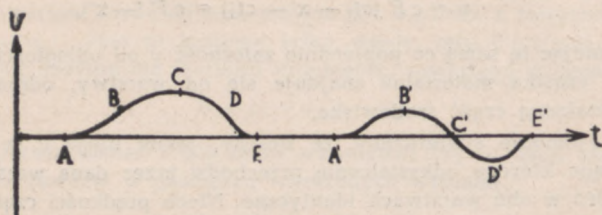
$$v = c F' (ct' + x_1 - x_1) = c F' (ct'),$$

taką samą więc zależność prędkości  $v$  od chwili nadejścia zaburzenia, jak w warstwie początkowej.

W falach kulistych będziemy mogli również przyjąć, że granice zaburzenia, wyznaczające warstwę odkształcenia, przesuwiają się ze stałą prędkością, tak że grubość warstwy, podlegającej w danej chwili



odkształceniu, będzie miała zawsze wartość tę samą, rozmieszczenie jednak zaburzeń wewnątrz warstwy lub innymi słowy kształt krzywej, wyrażającej zależność odkształcenia od odległości danego punktu od granic warstwy, ulegać może na ogół daleko idącym zmianom. Nigdy jednak nie ulegnie zmianie znak odkształcenia — zgęszczenie pozostanie zawsze zgęszczeniem, rozrzedzenie — rozrzedzeniem, za to znak prędkości może się zmieniać: tak na przykład niech zaburzenie będzie tego rodzaju, że w pobliżu źródła cząstka odchyła się od położenia równowagi z prędkością coraz bardziej wzrastającą (rys. 8),



rys. 8

następnie malejącą i wreszcie stającą się równą zero, wtedy cząstka znajdująca się znacznie dalej będzie poruszała się i w przeciwnym kierunku, przybliżając się w pewnych chwilach do źródła zaburzeń i wykonując pewnego rodzaju wachania. Czas jednak zużyty na przejście przez wszystkie możliwe wartości prędkości będzie w obu warstwach ten sam;  $AE = A'E'$ .

Wyprowadzone wyżej wzory (2) i (2a) stosują się również do prędkości rozchodzenia się głosu, źródłem bowiem odczuwanych przez nas wrażeń głosowych są zaburzenia sprężyste dochodzące do naszych narządów słuchu. Zaburzenia te jednak muszą wtedy czynić zadość pewnym dodatkowym warunkom. W przypadku zaburzeń nieokresowych warunki te sprowadzają się do tego, aby energia fali zaburzenia była większa od pewnej wartości, którą nazywamy progiem słyszenia, w przypadku zaś zaburzeń okresowych dochodzi jeszcze jeden warunek, aby częstość zmian zawarta była w pewnych granicach (mniej więcej od 20 do 20000 drgań na sekundę). Doznawane przez nas wrażenia nazywamy w pierwszym przypadku hałasem, trzaskiem, szmerem, w drugim dźwiękiem (por. ust. 7). (Według Rzewkina i Masłowa (1928 r.) górna granica słyszenia wynosi dla dzieci 19700 drgań na sekundę, dla osób starszych 17100 drgań na sekundę). Jest rzeczą oczywistą, że



stosowanie wzorów (2) i (2a) do zaburzeń głosowych jest podane tym samym ograniczeniem, jakim poddaliśmy wyżej udowodnienie tych wzorów.

### 3. — POMIAR PRĘDKOŚCI ROZCHODZENIA SIĘ ZABURZEŃ SPRĘŻYSTYCH W ŚRODOWISKU NIEOGRANICZONYM.

Przy pomiarach prędkości rozchodzenia się zaburzeń warunków nieograniczonego danego środowiska nie jest, ściśle biorąc, nigdy spełniony. Nawet wtedy, gdy badane zaburzenie rozchodzi się w otaczającej nas atmosferze lub w wielkich masach wody oceanicznej, ukształtowanie powierzchni ziemi czy też dna oceanu wpływa, niewątpliwie, na przebieg zjawiska. W tych jednak przypadkach wprowadzenie do rachunku odpowiednich poprawek albo wykonanie pomiaru w warunkach, które by wpływ powierzchni ograniczających środowisko możliwie zmniejszyły, jest rzeczą stosunkowo łatwą, tak, że wyniki tych pomiarów uważamy zazwyczaj za odpowiadające warunkowi nieograniczonego środowiska.

Przy obliczaniu prędkości rozchodzenia się zaburzeń ze wzoru (2) lub (2a) musimy wziąć pod uwagę, że odkształcenia, z jakimi mamy w tym przypadku do czynienia, zachodzą na ogół bardzo szybko, bez wymiany ciepła z otoczeniem, przemiany zatem, zachodzące w środowisku, są przemianami adiabatycznymi. Gdy badanym środowiskiem jest gaz doskonały, spółczynnik  $e$  wzoru (2) równy jest, jak to bezpośrednio wynika z zestawienia wzoru (a) ust. 2 i wzoru (9d) str. 363 tomu I,  $kp$ , gdzie  $k$  oznacza stosunek  $c_p$  do  $c_v$ . Mamy zatem

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}. \quad (5)$$

Jest to tak zwany wzór Laplace'a (1816 r.), o którym była już mowa poprzednio (t. I, str. 370).

Oznaczając przez  $\rho_0$  gęstość gazu pod tym samym ciśnieniem  $p$  w temperaturze  $0^\circ \text{C}$ , na prędkość rozchodzenia się głosu w gazie o temperaturze  $t^\circ \text{C}$  otrzymujemy wzór

$$c_t = \sqrt{\frac{kp(1+\alpha t)}{\rho_0}} = c_0 \cdot \sqrt{1+\alpha t}. \quad (5a)$$





Oznaczmy przez  $e_t = \frac{1}{\gamma_t}$  współczynnik sprężystości objętościowej przy zgęszczaniu izotermicznym, a więc takim, jakie było rozpatrywane w tomie I-ym na str. 206 i 257, przez  $e_Q = \frac{1}{\gamma_Q}$  — przy zgęszczaniu adiabatycznym.

Wzór (2) możemy przepisać w postaci

$$c = \sqrt{\frac{e_Q}{\rho}},$$

lub oznaczając  $\frac{e_Q}{e_t} = b$

$$c = \sqrt{\frac{be_t}{\rho}},$$

Reech udowodnił, że  $b = \frac{c_p}{c_v} = k$ , gdzie  $c_p$  oznacza ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem,  $c_v$  — w stałej objętości; mamy zatem, wprowadzając  $\gamma_t = \frac{1}{e_t}$ ,

$$c = \sqrt{\frac{k}{\gamma_t \cdot \rho}}. \quad (5b)$$

Dla gazów doskonałych  $\gamma_t = \frac{1}{p}$  (por. tom I, str. 267); podstawiając tę wartość, otrzymujemy wzór Laplace'a.

Dla powietrza, o temperaturze  $0^{\circ}$  C, pod ciśnieniem I Atm, które w tych warunkach możemy z dużym przybliżeniem uważać za gaz doskonały, otrzymujemy po podstawieniu  $p = 1013260$  dyn/cm<sup>2</sup>,  $k = 1,4$ ;  $\rho = 0,001293$  g/cm<sup>3</sup>, na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych

$$c_0 = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 1013260}{0,001293}} = 331,3 \text{ m/sek}. \quad (5c)$$

Wzory (5) i (5a) były wielokrotnie sprawdzane doświadczalnie. Bardzo prostą metodę, używaną zazwyczaj przy pomiarach w otwartej przestrzeni, można ująć w następujący schemat. Niech źródło zaburzeń znajduje się w punkcie  $O_1$ , obserwator zaś w  $O_2$ . Mierząc czas, jaki upłynął od chwili  $t_0$  wywołania za-



burzeń w  $O_1$  (na skutek wybuchu lub wystrzału) do chwili  $t_1$ , w której zaburzenie doszło do obserwatora w  $O_2$ , i znając odległość  $O_1O_2 = l$ , prędkość  $c$  znajdujemy ze wzoru

$$c = \frac{l}{t_1 - t_0} = \frac{l}{t}. \quad (a)$$

Dla wyrugowania wpływu, jaki mógłby wywrzeć ruch powietrza na prędkość rozchodzenia się zaburzeń, sygnały wysła się jednocześnie z punktów  $O_1$  i  $O_2$  i za  $t$  we wzorze (a) bierze się średnią arytmetyczną czasu  $t'$ , zużytego przez fale na przebycie drogi  $O_1O_2$ , i czasu  $t''$ , w ciągu którego zaburzenie z  $O_2$  przechodzi do  $O_1$ .

Gdy prędkość wiatru  $w$  jest znacznie mniejsza od prędkości głosu  $c$ , prędkości rozchodzenia się zaburzeń w kierunku  $O_1O_2$  i  $O_2O_1$  możemy w prosty sposób wyznaczyć, zakładając, że prędkość mierzona jest sumą geometryczną prędkości  $w$  i  $c$ . W kierunku  $O_1O_2$  prędkość  $c_1$  wyrazi się wzorem

$$c_1 = c + w \cos \alpha, \quad (b)$$

gdzie  $\alpha$  kąt, jaki kierunek wiatru tworzy z kierunkiem  $O_1O_2$  (rys. 9); prędkość zaś w kierunku przeciwnym

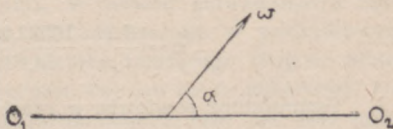
$$c_2 = c - w \cos \alpha, \quad (b)$$

stąd mamy

$$t' = \frac{l}{c_1} = \frac{l}{c + w \cos \alpha} \quad \text{i} \quad t'' = \frac{l}{c_2} = \frac{l}{c - w \cos \alpha}$$

$$\frac{t' + t''}{2} = \frac{lc - lw \cos \alpha + lc + lw \cos \alpha}{2(c^2 - w^2 \cos^2 \alpha)} = \frac{l}{c} = t$$

Ten prosty rachunek nie wystarcza, gdy prędkość wiatru nie ma wartości stałej; w najprostszym jednak stosunkowo przypadku, gdy prędkość zmienia się z wysokością i gradient jej ma wartość stałą, można, jak to wykazali Angerer i R. Ladenburg (1921 r.), stosując wzory bardziej złożone, otrzymać wyniki zgodne z danymi pomiaru.



rys. 9



Prędkość nie ma jednak, jak to pierwszy stwierdził Rinck (1872 r.), nawet w przypadku całkowicie nieruchomego środowiska, na całej długości drogi  $O_1O_2$  wartości niezmiennej. W pobliżu źródła zaburzeń prędkość ma wartość o wiele nieraz większą od wyznaczonej przez wzory (5) i (5a); dopiero w pewnej odległości od źródła, tym większej, im silniejsze było zaburzenie, można uważać stosowanie tych wzorów za usprawiedliwione. Pomiar zatem należy wykonywać nie między dwoma źródłami zaburzeń  $O_1$  i  $O_2$ , lecz między punktami  $O'_1$  i  $O'_2$ , leżącymi w takiej od nich odległości, w jakiej zaburzenia środowiska czynią zadość warunkom, przyjętym przy wyprowadzaniu wzoru (4).

We wspomnianych wyżej doświadczeniach Angerera i Ladenburga, gdzie zaburzenie było wywoływane przez wybuch 200 kg ciała eksplodującego, prędkość rozchodzenia się w bezpośrednim sąsiedztwie miejsca wybuchu przekraczała wielokrotnie wartość normalną; prędkość ta w miarę oddalania się od źródła zaburzeń szybko malała, tak że mniej więcej w odległości 200 m przybierała wartość stałą. Do podobnych wniosków doszedł Reid (1930 r.) mierząc prędkość rozchodzenia się zaburzeń okresowych o częstości bardzo wielkiej, przekraczającej znacznie granice słyszenia.

Jeżeli jednak droga  $O_1O_2$  jest dostatecznie długa, błąd, spowodowany przez nieuwzględnienie zmienności  $c$ , jest procentowo niewielki. Tym się tłumaczy zaskakująco zgodny z teoretyczną wartością  $c$  (wzór 5b) wynik, otrzymany w słynnym doświadczeniu, wykonanym w 1822 r. pod Paryżem przez Arago, Bouvarda, Humboldta, Gay-Lussac'a, Mathieu i Prony'ego, którzy znaleźli na  $c$  w powietrzu o temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$  wartość 331,5 m/sek.

Odległość między punktami obserwacyjnymi wynosiła  $l = 18622,27$  m. Czas, zużyty przez zaburzenie na przebycie tej drogi, wynosił przeciętnie: w jedną stronę 54,84 sek, w drugą 54,43 sek, stąd średnia arytmetyczna  $t = 54,63$  sek. Prędkość głosu była zatem równa

$$c = \frac{l}{t} = \frac{18622,27}{54,63} = 340,87 \text{ m/sek.}$$

Temperatura powietrza w czasie pomiaru wynosiła  $16^{\circ}\text{C}$ . Wobec tego

$$c_0 = \frac{c}{\sqrt{1 + \alpha t^0}} = \frac{340,87}{\sqrt{1 + 0,00366 \cdot 16}} = 331,5 \text{ m/sek.}$$



Według Angerera i Ladenburga, którzy poddali pomiar ten krytycznemu rozbirowi, otrzymana na podstawie tych danych prędkość jest nieco mniejsza, równa 330,5 m/sek.

W doświadczeniu tym we wzorze (a) za czas  $t$  przyjmowano czas, jaki upłynął od chwili zobaczenia przez obserwatora, umieszczonego w końcowym punkcie drogi, błysku, towarzyszącego wybuchowi, do chwili, w której do niego doszedł huk wybuchu. Ten sposób pomiaru czasu nie pozwala jednak osiągnąć dokładności większej od 0,1 sek. Jedynie więc w przypadkach takich stosunkowo długich przeciągów czasu, jak w danym doświadczeniu, można na tego rodzaju pomiarze przestać.

Regnault wskazał (1868 r.), że można osiągnąć znacznie większą dokładność (dochodzącą ostatnio do 0,001 sek), używając przyrządów, które automatycznie notują czas wybuchu i czas dojścia fali odkształcenia do obserwatora.

Regnault posługiwał się następującym urządzeniem. Trzy obok siebie znajdujące się ostrza dotykały powierzchni zacierzonego walca, obracającego się ze znaną prędkością ruchem jednostajnym. Jedno z tych ostrzy  $A$  było przymocowane do jarzma elektromagnesu, drugie — połączone z kamertonem o znanej częstości drgań, trzecie — z wahadłem sekundowym. Wystrzał lub wybuch przerywał obwód prądu, wzbudzającego elektromagnes, wobec czego ostrze  $A$  przestawało dotykać walca, tak że linia kreślona przez to ostrze na walcu nagłe w chwili wybuchu się urywała; gdy zaburzenie dochodziło do punktu końcowego drogi, działało na płytkę sprężystą, która, wyginając się, zamykała z powrotem obwód i wprowadzała znów ostrze  $A$  w zetknięcie z powierzchnią walca. Czas, w którego ciągu ostrze  $A$  nie dotykało walca, mógł być bez trudu wyznaczony z obliczenia ilości kresów, jakie na walcu nakreśliło ostrze, połączone z wahadłem, oraz fal, nakreślonych przez drgający kamerton. We wspomnianych wyżej pomiarach Angerera i Ladenburga światło, odbite od lusterka galwanometru, padało na nawiniętą na obracającym się jednostajnym ruchem walcu błonę fotograficzną, kreśląc na niej, przy stałym odchyleniu galwanometru, linię prostą; na błonę padało również światło od zwierciadła umieszczonego na jednej z gałęzi drgającego kamertonu, kreśląc na błonie linię sinusoidalną. W obwód galwanometru były włączone dwa mikrofony (p. ust. 4), umieszczone w początkowym i końcowym punkcie mierzonego odcinka, mającego długość mniej więcej 1000 m; fale zaburzenia, padając kolejno na te mikrofony, powodowały gwałtowne wychylenia galwanometru, czas zaś, jaki upłynął między tymi dwoma wychyleniami, wyznaczano z ilości drgań, które kamerton wykonał w ciągu tego czasu.



Od opisanej wyżej metody tzw. sygnałowej różni się nieco metoda, opracowana (1854 r.) przez Bosscha. Wyobraźmy sobie dwa zasilane tym samym prądem dzwonki elektryczne, które są jednocześnie uderzane przez młotki dziesięć np. razy na sekundę. Początkowo dzwonki znajdują się w tej samej odległości od obserwatora, tak że słyszy on jednocześnie uderzenia obu młotków; stopniowo jednak jeden z dzwonek odsuwany jest na coraz to większą odległość, wobec czego dźwięk jego dochodzi do obserwatora później, niż dźwięk dzwonka nieruchomego. Dopiero, gdy opóźnienie wyniesie, jak w naszym przykładzie  $\frac{1}{10}$  sek, odległość zatem dzwonek  $d = 0,1c$ , słyszy on znowu obydwa uderzenia jednocześnie; podobna zgodność uderzeń powtarza się przy różnicy odległości  $0,2c$ ,  $0,3c$  itd. Mierząc zatem odległości  $d$ , można wyznaczyć  $c$ . W ten właśnie sposób wielkość tę wyznaczył (1877 r.) Szatmari, otrzymując, jako przeciętną, z bardzo jednak nieraz różniących się pomiarów,  $c = 331, 57$  m/sek.

Częściej jednak mierzy się prędkość rozchodzenia się nie w otwartej przestrzeni, lecz w rurze, zawierającej badany gaz. Ta metoda, zapoczątkowana przez Regnaulta (1866 r.), pozwala wykonywać pomiary w różnych gazach, nie tylko w powietrzu, w różnych temperaturach i pod różnymi ciśnieniami, nie czyni jednak zadość podstawowemu warunkowi — nieograniczonosci środowiska. Zgęszczeniom i rozrzedzeniom, które w środowisku gazowym nieograniczonym, o przewodnictwie niewielkim, można było uważać za adiabatyczne, w elementach objętości gazu, stykających się bezpośrednio ze ścianami rury, towarzyszy niewątpliwie dość szybkie wyrównywanie temperatury, co powoduje zmniejszanie się współczynnika  $k$  we wzorze (5) (por. tom I, str. 364), a więc i zmniejszenie prędkości  $c$ . Do tego dochodzi jeszcze większy, niż w środowisku nieograniczonym, wpływ tarcia wewnętrznego, który również powoduje zmniejszanie się wartości  $c$ . Zakłóceń tych można uniknąć, biorąc rury dostatecznie szerokie — według Regnaulta wystarczy używać rur o średnicy 1,1 m — lub wprowadzając do wyników odpowiednie poprawki.



Uwzględniając jedynie wpływ tarcia wewnętrznego, Helmholtz (1863 r.) dał na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w gazie, znajdującym się w rurze o promieniu  $r$ , wzór następujący

$$c_r = c_\infty \left( 1 - \frac{\eta}{2r\sqrt{\pi\nu}} \right), \quad (5c)$$

gdzie  $c_\infty$  oznacza prędkość w nieograniczonym środowisku,  $\eta$  — współczynnik tarcia wewnętrznego gazów,  $\nu$  — częstość drgań danego zaburzenia. Biorąc pod uwagę również wymianę ciepła ze ścianami rury, Kirchhoff zastąpił we wzorze tym współczynnik  $\eta$  dość złożoną funkcją  $\gamma$  tarcia wewnętrznego, gęstości gazu, jego ciepła właściwego i wreszcie przewodnictwa cieplnego. Kładąc  $\gamma = 0,65$  dla powietrza w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ , otrzymamy wzór Helmholtza — Kirchhoffa w postaci

$$c_r = c_\infty \left( 1 - \frac{0,65}{2r\sqrt{\pi\nu}} \right). \quad (5d)$$

Wzór ten niewątpliwie nie jest dokładny i czyni zadość danym doświadczenia jedynie w pewnych granicach temperatur. Według Bussa (1930 r.) i Rechela (1931 r.) może on być używany przy pomiarach w temperaturach bliskich  $0^\circ\text{C}$ ; według Kaye'a i Sherrata (1933 r.) można go stosować również w granicach od  $18^\circ\text{C}$  do  $100^\circ\text{C}$ . W temperaturach jednak wyższych, gdy zależność  $\gamma$  od temperatury wyraża się wzorem, jaki rozwijając teorię Kirchhoffa wyprowadzili Cornish i Eastman (1929 r.), rozbieżności przekraczają granice błędu doświadczenia. Vance (1932 r.) z pomiarów prędkości drgań o wielkiej częstości wyprowadził wniosek, że wystarczy uzupełnić wzór Kirchhoffa dodatkowym wyrazem  $\frac{k}{2r\sqrt{\nu}}$ , gdzie  $k = 0,174$ , aby otrzymać wystarczającą zgodność z doświadczeniem w szerokich granicach częstości drgań. W rurach o małym promieniu, rzędu I mm, odgrywa również rolę, jak to wykazał Schulze (1904 r.), i materiał, z którego rura jest zrobiona.

Zestawiając otrzymane przez różnych badaczy wyniki (przy uwzględnieniu jednak tylko najważniejszych pomiarów, wykonanych w 19 i 20 stuleciu), otrzymujemy na przeciętną prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w suchym powietrzu o temperaturze  $0^\circ\text{C}$  pod ciśnieniem jednej atmosfery wartość

$$331,45 \text{ m/sek}, \quad (6)$$

bardzo mało różniącą się od teoretycznej.



Dla innych gazów odstępstwa od wartości teoretycznej, wyznaczone w warunkach, w których gaz można było uważać za doskonały, są na ogół nieco większe. Tak np. dla tlenu o temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$  powinno być według wzoru Laplace'a  $c = 314,8$  m/sek, Dulong zaś, mierząc prędkość rozchodzenia się w rurze napełnionej tlenem, otrzymał (1829 r.)  $c = 317,2$ .

Według Kaye'a i Sherrata (1933 r.) w temperaturze  $18^{\circ}\text{C}$   $c$  w wodorze wynosi 1301 m/sek, w bezwodniku węgla -- 265,8 m/sek.

Założenie o niezależności  $c$  od częstości drgań znalazło częściowo przynajmniej — dla większych częstości — potwierdzenie w doświadczeniu.

Pierce w pomiarach, obejmujących bardzo obszerny zakres częstości od 1000 do 1500 000 drgań na sekundę, stwierdził (1925 r.), że w tych granicach prędkość  $c$  w powietrzu zmienia się nie więcej, niż o 0,3%. Przy częstościach drgań, powyżej 100 000 drgań na sekundę, wielokrotnie przewyższających granice słyszenia, stąd często nazywanych ultradźwiękami, zmiana  $c$  wyraża się wartościami, wynoszącymi co najwyżej 0,04%.

Według Pielemeira (1930 r.), w tlenie o temperaturze  $20^{\circ}\text{C}$  prędkość rozchodzenia się drgań o częstości 1215000 drgań na sekundę wynosi 317,1 m/sek, o częstości 655000 drgań na sekundę — 317,4 m/sek, różniąc się zatem przy podwojeniu częstości, nie więcej, niż o 0,1%. Do tych samych wniosków prowadzą pomiary Pan Tcheng Kao, który na prędkość fal ultradźwięków w powietrzu otrzymał (1931 r.) wartość 331,85 m/sek, a więc w granicach błędu doświadczenia równą przeciętnej wartości otrzymanej dla fal głosowych. Według Roy'a i Rose'go, którzy mierzyli (1935 r.) prędkość  $c$  w wodorze, prędkość ta jest niezależna od częstości drgań przynajmniej do częstości rzędu 1 000 000 drgań na sekundę.

Tak jednak jest tylko w przypadkach rozchodzenia się drgań w środowiskach nieograniczonych lub w rurach o średnicy znacznej w porównaniu z długością fali; w rurach o średnicy niewielkiej prędkość jest na ogół funkcją częstości. Tak np. w powietrzu, znajdującym się w rurze szklanej o średnicy 0,935 cm, prędkość przy częstości drgań 256 na sek wynosi 320,6 m/sek, przy częstości 512 drgań na sek — 323,6 m/sek, przy częstości 1023 drgań na sek — 325 m/sek (Low, 1894 r.).



Zależność prędkości  $c$  od temperatury, wyrażona wzorem (5a), sprawdza się, rzecz prosta, w tych tylko granicach, w jakich środowisko możemy uważać za gaz doskonały. Pod ciśnieniem 1 Atm w temperaturach bliskich  $0^{\circ}\text{C}$  otrzymujemy, przyjmując  $\alpha = 0,00366$ , z przybliżonego wzoru

$$c = c_0 \sqrt{1 + \alpha t} \doteq c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha t\right)$$

na wzrost  $\Delta c$  prędkości przy wzroście temperatury o  $1^{\circ}\text{C}$

$$\Delta c = 0,00183 c_0; \quad (7)$$

dla powietrza zatem

$$\Delta c = 0,00183 \cdot 331,3 \doteq 0,61 \frac{\text{m}}{\text{sek stop}}$$

Z pomiarów  $c$ , wykonanych przez Witkowskiego (1899 r.), Stevensa (1902 r.) i następnie przez Schillinga i Partingtona (1928 r.), wynika, że zmiana  $c$  jest większa w temperaturach niskich, mniejsza w wysokich. Tak na przykład w temperaturach między  $-140^{\circ}\text{C}$  i  $-103,5^{\circ}\text{C}$  zmiana prędkości w powietrzu, odniesiona do  $1^{\circ}\text{C}$  przyrostu temperatury, wynosi, według Witkowskiego, około 0,93 m/sekstop, w temperaturach zaś powyżej  $1100^{\circ}\text{C}$  równa jest, według Shillinga i Partingtona, mniej więcej 0,24 m/sekstop.

Zestawiając pomiary Witkowskiego oraz Shillinga i Partingtona otrzymujemy dla powietrza pod ciśnieniem 1 Atm

temperatura:	$-181^{\circ}\text{C}$	$-140^{\circ}\text{C}$	$-103,5^{\circ}\text{C}$	$-35^{\circ}\text{C}$	$-10^{\circ}\text{C}$	$0^{\circ}\text{C}$
prędkość w m/sek	185	226	260	300	325,1	331,3
temperatura:	$100^{\circ}\text{C}$	$300^{\circ}\text{C}$	$500^{\circ}\text{C}$	$700^{\circ}\text{C}$	$900^{\circ}\text{C}$	$1100^{\circ}\text{C}$
prędkość w m/sek	387,2	478,9	551,1	612,5	680,8	734,4
temperatura:	$1300^{\circ}\text{C}$					
prędkość w m/sek	783,2					

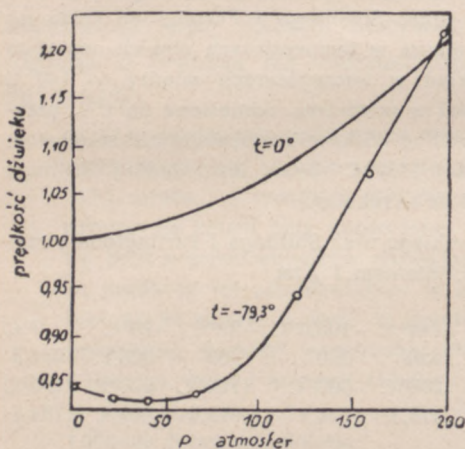
Od tych danych niewiele odbiegają wyniki pomiarów Dixona, Campbella i Parkera (1921 r.), którzy znaleźli na  $c$  w powietrzu o temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$  331,8 m/sek, o temperaturze zaś  $700^{\circ}\text{C}$  — 621,6 m/sek. Himsted i Widder (1921 r.) otrzymali na wartość stosunku prędkości głosu w powietrzu o temperaturze —  $78,73^{\circ}\text{C}$  i o temperaturze —  $20^{\circ}\text{C}$  wartość — 0,8147, podczas gdy ze wzoru Laplace'a otrzymuje się 0,8142.



W niższych temperaturach zależność od ciśnienia jest wyraźniejsza (rys. 10). Przy wzroście ciśnienia prędkość w danej temperaturze, jak to zdaje się wynikać z pomiarów Witkowskiego (1899 r.) i Kocha (1908 r.), początkowo maleje, a następnie wzrasta (rys. 11). Temu minimum prędkości odpowiadają w różnych temperaturach różne ciśnienia.

W przypadku środowiska ciekłego wzór (2) przybierze postać następującą:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\gamma \rho}}, \quad (8)$$



rys. 11

gdzie  $\gamma$  jest współczynnikiem ściśliwości danej cieczy (por. tom I, str. 206). Po podstawieniu

$$\gamma = \frac{0,0000481}{1013260} \text{ cm}^2/\text{dyn}$$

$$\text{ i } \rho = 0,9982303 \text{ g/cm}^3$$

mamy dla wody chemicznie czystej w temperaturze 20°

$$c = 1452 \text{ m/sek.}$$

I w tym przypadku współczynnik  $\gamma$  wzoru (8) nie jest tym współczynnikiem ściśliwości, o którym była mowa w tomie I na str. 243, lecz współczynnikiem ściśliwości adiabatycznej. Dla wody w temperaturach bliskich 0° C różnice tych dwu współczynników można bez znaczącego błędu pominąć, dla innych jednak cieczy przy obliczaniu  $c$  ze wzoru (8) należy wprowadzić odpowiednią poprawkę (por. wzór 5b).



Z pomiarów, w których był uwzględniony zasadniczy warunek nieograniczoności środowiska, należy wymienić przede wszystkim pomiar Sturma i Colladona (1827 r.), którzy mierzyli prędkość rozchodzenia się głosu dzwonu w wodzie jeziora Genewskiego. Na prędkość  $c$  w temperaturze  $8,1^{\circ}\text{C}$  otrzymali onj wartość  $1435\text{ m/sek}$ . Marti (1919 r.), wykonując pomiary na otwartym morzu, otrzymał  $c = 1503,5\text{ m/sek}$  dla wody o gęstości  $1,0245\text{ g/cm}^3$  i temperaturze  $14,5^{\circ}\text{C}$ .

Podobnie jednak jak w przypadku gazów i z tych samych powodów, zazwyczaj  $c$  wyznacza się z pomiarów w cieczy, zawartej w rurze, lub też przy użyciu metod pośrednich. Sądząc z danych, otrzymanych przez Boyle'a R. W. i Taylora G. B. (1927 r.), prędkość rozchodzenia się drgań w środowisku ciekłym nie zależy, przynajmniej w pewnych granicach, od częstości drgań.

Badacze ci otrzymali przy częstości, zmienianej w granicach od 40 000 do 600 000 drgań na sekundę, w wodzie o temperaturze  $18,5^{\circ}\text{C}$   $c$  równe  $1480\text{ m/sek}$ . Wartość ta niewiele się różni od otrzymanej przez Dörsinga (1908 r.) dla wody destylowanej o temperaturze  $19^{\circ}\text{C}$  wartości  $1461\text{ m/sek}$ , jak również od wyniku Sturma i Colladona, gdy przyjmiemy za Woodem (1923 r.), że ze wzrostem temperatury o  $1^{\circ}\text{C}$  (w granicach od  $6^{\circ}$  do  $17^{\circ}\text{C}$ ) prędkość wzrasta o  $3,3\text{ m/sek}$ , lub za Stephensonem (1923 r.), że wzrost ten (w granicach od  $0^{\circ}$  do  $20^{\circ}\text{C}$ ) wynosi  $2,8\text{ m/sek}$ .

Bardzo zbliżoną wartość  $c$  równą  $1484,2$  otrzymali Hubbard i Loomis (1928 r.) dla częstości 500 000 drgań na sekundę.

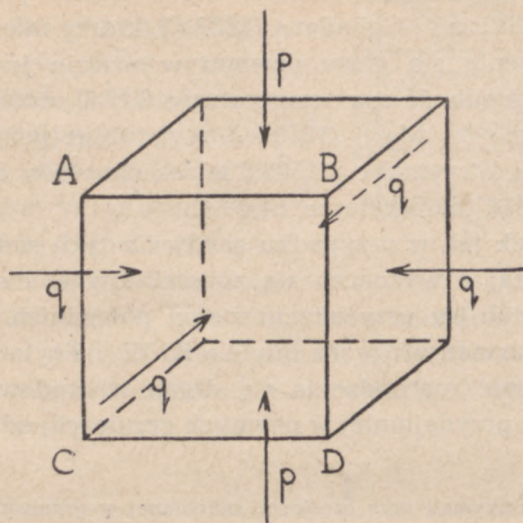
W oleju rycynowym  $c$  równe jest  $1430\text{ m/sek}$  (Boyle i Taylor), w rtęci  $1451\text{ m/sek}$  (Hubbard i Loomis).

Przy pomiarach w środowisku stałym warunek nieograniczoności środowiska nigdy na ogół nie jest spełniony: najczęściej mierzy się prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w sztabach z badanego materiału. Gdy fala zaburzenia jest falą podłużną, wtedy współczynnikiem sprężystości  $e$  we wzorze (2) jest moduł Younga (współczynnik sprężystości przy wydłużaniu, por. tom I, str. 201), tak że na prędkość  $c$  otrzymujemy wzór

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (9)$$



W ten sposób wyznaczona wartość  $c$  nie jest jednak bynajmniej równa prędkości  $c_{\infty}$  w środowisku nieograniczonym. Istotnie, w środowisku nieograniczonym nie może pod działaniem ciśnień odkształcających zachodzić tak, jak w sztabie,



rys. 12

zmiana wymiarów, prostopadłych do kierunku działającego ciśnienia (por. tom I, str. 203); elementy bowiem sąsiednie przeciwdziałają tej zmianie, działając na element odkształcany ciśnieniem bocznym  $q$ . Oznaczmy długość boku  $AB$  (rys. 12), prostopadłego do kierunku działania ciśnienia odkształcającego przez  $l_0$ , zmianę zaś jej przez  $\Delta l_0$ . Z warunku niezmienności wymiarów poprzecznych

$$-\Delta l_0 = \frac{l_0}{E} (-q + \sigma q + \sigma p) = 0$$

otrzymujemy  $(1 - \sigma)q = \sigma p$ ,

$$\frac{q}{p} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad \text{i} \quad q = \frac{\sigma}{1 - \sigma} p. \quad (9a)$$

Zmiana zaś długości boku  $AC$ , równoległego do kierunku działania ciśnienia,

$$-\Delta l_0 = \frac{l_0}{E} (-p + \sigma q + \sigma q).$$

Otrzymujemy zatem na skrócenie w kierunku działającego ciśnienia

$$\begin{aligned} \frac{-\Delta l_0}{l_0} &= -\frac{1}{E} p + \frac{1}{E} 2\sigma q = -\frac{p}{E} \left( 1 - \frac{2\sigma^2}{1 - \sigma} \right) = \\ &= -\frac{p}{E} \frac{1 - \sigma - 2\sigma^2}{1 - \sigma} = -\frac{p}{E} \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma}. \end{aligned}$$



Związek więc między ciśnieniem i odkształceniem wyrazi się wzorem

$$p = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\Delta l_0}{l_0} = E' \cdot \frac{\Delta l_0}{l_0} \quad (9b)$$

Tę więc wartość  $E'$  spólczynnika sprężystości należałoby podstawić do wzoru (9) zamiast  $E$ , aby otrzymać prędkość  $c_\infty$ . Zazwyczaj jednak poprawki tej się nie uwzględnia i w tablicach najczęściej podawana jest wartość  $c$ . W cieczy  $q = p$ ,  $\sigma$  zatem równa jest 0,5.

Na prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych otrzymujemy wzór

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\sigma)\rho}} \quad (10)$$

gdzie  $\mu$  jest spólczynnikiem sztywności (por. tom I, str. 210).

#### 4. — ENERGIA PRZENOSZONA PRZEZ FALE ODKSZTAŁCENIA.

Falom odkształceń, rozchodzącym się w danym środowisku, towarzyszą, jak o tym była wyżej mowa (ust. 1), zmiany energii elementów objętości środowiska, podlegających danym odkształceniom. Zmiany te, zależne w danym środowisku od wartości i rodzaju odkształceń, przesuwiają się razem z nimi z tą samą, co i one, prędkością do dalszych warstw środowiska.

Przypuśćmy, że środowisko jest siedliskiem płaskich fal sinusoidalnych. Wyodrębnijmy w nim walec o podstawie  $1 \text{ cm}^2$  i długości, mierzonej w kierunku rozchodzenia się zaburzeń, równej długości fali  $\lambda$ . Po upływie  $T$  sek odkształcenia, którym podlegały w pewnej chwili elementy objętości walca, przesuną się bez zmiany (por. ust. 1) do elementów walca sąsiedniego o tej samej długości. Przez powierzchnię, rozdzielającą te dwa walce, przejdzie zatem w ciągu tego czasu energia potrzebna do odkształcenia elementów walca drugiego, energia, która zgodnie z założeniem odwracalności zjawisk, zachodzących w danym środowisku, równa jest energii, o którą na skutek doznanych odkształceń wzrosła uprzednio energia walca pierwszego. Ten przyrost energii, który w myśl założenia, przechodzi bez straty od jednego elementu do drugiego, składa się na ogół z dwóch części: energii ruchu i energii potencjalnej, których suma posiada w każdej chwili tę samą stałą wartość.



Gdy dany element przechodzi przez swe położenie równowagi, zmiana jego energii, równa wykonanej na nim pracy, wyraża się we wzroście jego energii ruchu, która wtedy ma wartość największą; w położeniach najbardziej oddalonych od położenia równowagi, gdy prędkość ruchu elementu równa jest zeru, energia odkształcenia równa jest zmianie energii potencjalnej.

Niech  $v_0$  będzie amplitudą prędkości elementu cylindrycznego o podstawie  $1 \text{ cm}^2$  i o wysokości  $\Delta x$  dostatecznie małej, abyśmy mogli uważać w każdej chwili odchylenia i prędkości jego punktów za równe odchyleniu i prędkości jego środka masy. Największa wartość jego energii ruchu równa, zgodnie z tym, cośmy mówili wyżej, przyrostowi energii, nabytej na skutek odkształcenia, wyrazi się wzorem

$$\Delta U = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \cdot \Delta x$$

lub z uwagi, że

$$v_0 = \frac{2\pi s_0}{T}$$

(por. tom I, str. 54)

$$\Delta U = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} \rho \cdot \Delta x.$$

W rozpatrywanym przez nas przypadku fali płaskiej amplituda drgań  $s_0$  i, co za tym idzie, i amplituda prędkości  $v_0$  mają we wszystkich elementach wartość jednakową (por. ust. I), wobec czego wzrost energii walca będzie równy

$$U_\lambda = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} \rho \Sigma \Delta x = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} \cdot \rho \cdot \lambda. \quad (11)$$

Taka też ilość energii przejdzie w ciągu  $T$  sek przez dowolny przekrój  $1 \text{ cm}^2$ , prostopadły do kierunku rozchodzenia się zaburzeń. Ilość ta jest niezależna od odległości danego przekroju od źródła zaburzeń, fale płaskie przenoszą bowiem przez wszystkie jednostki przekroju stale tę samą ilość energii.



Najczęściej jednak oblicza się przyrost energii, przypadający nie na  $\lambda$  cm<sup>3</sup>, lecz na 1 cm<sup>3</sup> środowiska, tzw. gęstość energii, oraz ilość energii, przechodzącej przez jednostkę przekroju nie w ciągu  $T$  sek, lecz 1 sek, tzw. natężenie danego zaburzenia, często nazywane też natężeniem akustycznym (gr. akuejn-slyszec). Dzieląc  $U_\lambda$  przez  $\lambda$ , otrzymujemy na gęstość energii

$$U_1 = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} \cdot \rho, \quad (11a)$$

dzieląc zaś przez  $T$ , znajdujemy na wartość natężenia

$$I = \frac{U_\lambda}{T} = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^3} \rho \lambda = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} c \rho = 2\pi^2 v^2 s_0^2 c \rho = \frac{1}{2} \rho c v_0^2, \quad (12)$$

gdzie  $v = \frac{1}{T}$  jest częstotnością drgań.

W przypadku więc fal płaskich natężenie, mające w całym objęty przez odkształcenie środowisku wartość stałą, jest proporcjonalne do kwadratu częstotliwości drgań i kwadratu ich amplitudy. Wymiarem natężenia jest

$$[I] = M T^{-3}$$

i zazwyczaj używaną jednostką  $\frac{\text{erg}}{\text{sek cm}^2}$ . Obecnie jednak można coraz częściej spotkać się z inną jej jednostką

$$\frac{\text{mikrowatt}}{\text{cm}^2} = 10 \frac{\text{erg}}{\text{sek cm}^2}$$

Według Wiena (1903) najmniejsza wartość natężenia o częstotliwości 50 drgań na sekundę, przy której słyszymy jeszcze głos (próg słyszenia) wynosi  $3,2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{erg}}{\text{sek cm}^2}$ . Tej wartości odpowiada w powietrzu o temperaturze 0° C pod ciśnieniem 1 Atm ( $c = 33130$  cm/sek,  $\rho = 0,001293$  g/cm<sup>3</sup>) amplituda drgań, którą możemy obliczyć ze wzoru (12)

$$s_0 = \sqrt{\frac{I}{2\pi^2 v^2 c \rho}} = \sqrt{\frac{3,2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot (3,14)^2 \cdot 2500 \cdot 33130 \cdot 0,001293}} \doteq 1,22 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$



Na zmianę ciśnienia, wywołaną w środowisku przez rozchodzące się odkształcenie, mamy

$$\Delta p = -e \frac{ds}{dx}$$

lub z uwagi, że

$$s = s_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

a więc

$$\frac{ds}{dx} = -s_0 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\Delta p = e \frac{2\pi s_0}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Ciśnienie zmienia się przeto również okresowo w ciągu tego samego czasu  $T$ , pozostając zawsze w tej samej fazie, co prędkość  $v$ . Największą wartość  $\Delta p_m$  otrzymamy, kładąc

$$\Delta p_m = e \cdot \frac{2\pi s_0}{\lambda}. \quad (a)$$

W danym przypadku

$$e = kp_0 = 1,4 \cdot 1013260 \text{ dyn/cm}^2 \doteq 1,4 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

$$\lambda = cT \doteq 33000 \cdot \frac{1}{50} = 660 \text{ cm}.$$

Podstawiając te liczby oraz wyżej wyznaczoną wartość  $s_0$  do wzoru (a) otrzymujemy

$$\Delta p_m = \frac{1,4 \cdot 10^6 \cdot 6,28 \cdot 1,22 \cdot 10^{-5}}{660} \doteq 0,16 \text{ dyn/cm}^2.$$

Taka więc zmiana ciśnienia działa jeszcze na nasz organ słuchu. Amerykańscy fizycy (Fletcher i Wegel, 1922 oraz Kranz, 1923) znaleźli, że próg słyszenia może mieć u różnych ludzi bardzo różniące się wartości, stosunek ich może sięgać 1 : 1000.

W przypadku fal kulistych zjawisko staje się o wiele bardziej złożone. Dopiero w znacznej — w porównaniu z długością fali — odległości od źródła zaburzeń odkształcane warstwy przekazują całą otrzymaną energię warstwom dalej położonym. Poczynając od tej odległości, natężenie, wobec wzrostu powierzchni warstw odkształcanych, zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu promienia danej warstwy. Przyjmując, że i w tym przypadku obowiązuje wzór (12), dochodzimy do wniosku, że tym razem amplituda odchyień nie zachowa-



wuje wartości stałej, lecz zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do promienia, gdyż wszystkie pozostałe wielkości wzoru (12) zachowują w całym środowisku wartości niezienne.

W pobliżu źródła zaburzeń natężenie zmniejsza się o wiele szybciej, tak że drobna jedynie część energii drgań źródła przechodzi do warstw położonych dalej; część ta jest tym mniejsza, im większa jest długość fali, tym w większej bowiem odległości od źródła ustala się prawidłowe przenoszenie energii z jednej warstwy do drugiej.

Stąd wynika, że w tych samych pozostałych warunkach energia przenoszona z najbliższego otoczenia źródła do danego środowiska jest tym mniejsza, im większa jest w danym środowisku prędkość rozchodzenia się zaburzeń.

Doświadczalne sprawdzenie wyżej przytoczonych twierdzeń nastęrcza na ogół duże trudności. Nawet przy pomiarach w środowiskach bardzo rozległych, jak np. w powietrzu atmosferycznym lub w wielkich zbiornikach wody, wpływ ukształtowania terenu jest w tym przypadku o wiele większy, niż przy pomiarach prędkości. Toteż otrzymane w tych warunkach wyniki wymagają zawsze pewnych poprawek, niełatwych zresztą do obliczenia. Ze wzoru (12) wynika, że do wyznaczenia wartości wystarczy zmierzyć amplitudę  $s_0$  lub prędkość  $v_0$  drgającego elementu środowiska. Pomiar amplitudy  $s_0$  jest na ogół bardzo trudny, wychylenia bowiem są zazwyczaj bardzo małe. W dodatku, ponieważ nie można bezpośrednio obserwować ruchu cząstek środowiska, trzeba wprowadzać do środowiska obce ciała o możliwie małej masie, które by były wprawiane w ruch przez drgania środowiska. Do tego celu przy pomiarach w powietrzu mogą służyć, jak to wykazał Gellhoff (1920 r.), rozpylane kropelki oliwy o promieniu mniej więcej  $10^{-4}$  cm. Kropelki te są wdmuchiwane pod niewielkim ciśnieniem do badanego środowiska w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się głosu. Odchylenia, jakich doznają w swym ruchu pod działaniem fal głosowych, a które można obserwować przy pomocy silnego ultramikroskopu, pozwalają zdać sobie sprawę z amplitudy drgania cząstek środowiska.



Według Königa (1891 r.) amplitudy odchyień tego rodzaju kropli różnią się od amplitud cząstek środowiska zaledwie o 1%, gdy częstość drgań wynosi 2000 drgań na sekundę; przy częstościach większych rozbieżność wzrasta. Wywody Königa są jednak oparte na założeniach, bardzo upraszczających dane zjawisko, tak że nie wiadomo, czy wnioski jego są istotnie zgodne z rzeczywistością.

Do wyznaczenia amplitudy prędkości  $v_0$  służy tzw. tarcza Rayleigha (1882 r.). Jest to niewielka okrągła płytką zawieszona pionowo na sprężystej nici.



rys. 13

Płytką taką wprowadzoną do strumienia poruszającego się płynu ukośnie do jego prędkości, zakłóca symetrię rozmieszczenia linii prądu, co znów powoduje niejednakowy rozkład ciśnienia na jej powierzchni. Powstająca wskutek tego para sił — w przypadku, przedstawionym na rys. 13, o momencie skierowanym za płaszczyznę rysunku — obraca płytkę dookoła osi pionowej, dążąc do ustalenia jej prostopadle do kierunku prędkości i przywrócenia w ten sposób symetrii linii prądu przed i za płytką (rys. 14).

Przy zmianie kierunku prądu rozkład linii prądu zmianie nie ulega, wobec czego płytką jest obracana stale w tym samym kierunku, równie więc dobrze w prądzie o stałym kierunku prędkości, jak i o zmieniającym się okresowo. Momentowi tej pary sił przeciwdziałają moment sił sprężystości, proporcjonalny do kąta  $\alpha$  obrotu płytki.



rys. 14

W położeniu równowagi będziemy mieli równość

$$M = D\alpha$$

gdzie  $D$  — moment kierujący sił sprężystości,  $M$  zaś moment pary sił proporcjonalny do  $v_0^2$ .



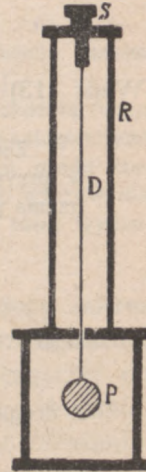
Według Königa, który opracował (1891 r.) teorię płytki Rayleigha

$$M = \frac{2}{3} \rho v_0^2 r^3 \sin 2\alpha, \quad (a)$$

gdzie  $r$  — promień płytki,  $\alpha$  — kąt, jaki płytka tworzy z kierunkiem rozchodzenia się zaburzeń. Wzór ten obowiązuje jednak dopóty tylko, dopóki  $r$  jest mniejsze od  $\frac{\lambda}{2\pi}$ .

Z pomiarów wykonanych przez Żernowa (1908 r.) wynika, że wzór Königa dobrze na ogół odpowiada danym doświadczalnym. Do tego samego wniosku prowadzą i pomiary późniejsze (Malletta i Daltona, 1925 r. oraz Barnes'a i Westa, 1927 r.).

Z różnych dość licznych przyrządów mierniczych, w których płytka Rayleigha jest stosowana, podamy jedynie przyrząd używany przez E. Meyera (1926 r.). Płytkę  $P$  o średnicy 5 mm i grubości 0,05 mm zawieszona jest na cienkim drucie  $D$  o długości 10 cm. Odpowiednia śruba umieszczona ponad rurą, w której znajduje się drut, pozwala ustawiać płytkę w dowolnym kierunku. Płytkę znajduje się jakby w skrzyneczce otwartej z przodu i z tyłu, z boku zaś zabezpieczonej przez cienką gazę (rys. 15).



rys. 15

Powyższa metoda jest jedyną, przy której pomocy można w nieograniczonym płynie wyznaczyć natężenie akustyczne, nie znając ani częstotliwości odkształcenia ani jego zmienności w czasie. W pomiarach jednak natężenia fal podłużnych, z jakimi najczęściej w praktyce mamy do czynienia, wyznacza się nie  $v_0$ , lecz ciśnienie, wzbudzone w danym elemencie przez zachodzące w nim odkształcenie. Znając bowiem tę wielkość, będziemy mogli również wyznaczyć natężenie. Istotnie, niech  $\theta$  oznacza względną zmianę objętości danego elementu środowiska o przekroju  $1 \text{ cm}^2$  i długości  $\Delta x \text{ cm}$ ,  $P$  zaś największą wartość nadwyżki ciśnienia ponad jego wartość normalną w środowisku nie odkształconym. Praca, potrzebna do wykonania tego odkształcenia, wyniesie

$$lU = \frac{1}{2} P \cdot \Delta V = \frac{1}{2} P \cdot \theta \cdot \Delta x, \quad (b)$$

gdzie  $\Delta V$  oznacza zmianę objętości. Praca ta, zgodnie z naszym założeniem o odwracalności zachodzących w środowisku



przemian, równa jest wzrostowi energii, nabytemu przez element na skutek odkształcenia; na jednostkę więc objętości przypadając będzie wzrost energii

$$U_1 = \frac{1}{2} P \cdot \theta = \frac{1}{2} \frac{P^2}{e \cdot s_0} = \frac{1}{2} \frac{P^2}{c^2 \rho}.$$

W jednostkę czasu przez powierzchnię  $1 \text{ cm}^2$ , prostopadłą do kierunku rozchodzenia się zaburzeń, przejdzie energia, zawarta w walcu o przekroju  $1 \text{ cm}^2$  i wysokości  $c \text{ cm}$ . Natężenie zatem wyrazi się wzorem

$$I = U_1 \cdot c = \frac{1}{2} \frac{P^2}{c \rho}. \quad (13)$$

Wzór (13) obowiązuje również i w przypadku fal kulistych.

Zestawiając ten wzór ze wzorem (12), obowiązującym jedynie w przypadku fal płaskich, znajdujemy następujące związki między trzema podstawowymi w tym przypadku wielkościami  $s_0$ ,  $v_0$ , i  $P$ :

$$\frac{1}{2} \frac{P^2}{c \rho} = 2\pi^2 v^2 s_0^2 \cdot c \rho,$$

$$\text{skąd} \quad \frac{P}{s_0} = 2\pi v \cdot c \rho. \quad (14)$$

Z drugiej zaś strony

$$\frac{1}{2} \frac{P^2}{c \rho} = \frac{1}{2} c \rho \cdot v_0^2,$$

$$\text{skąd} \quad \frac{P}{v_0} = c \rho. \quad (15)$$

Wielkość  $c \cdot \rho$ , wyznaczająca stosunek między nadwyżką ciśnienia i amplitudą prędkości ruchu cząstek elementu, nosi często nazwę oporu akustycznego danego środowiska; im opór jest większy, tym większa musi być nadwyżka ciśnienia, aby amplituda prędkości ruchu cząstek osiągnęła wymaganą wartość. Wielkość  $2\pi v \cdot c \rho$ , zależną nie tylko od rodzaju środowiska, lecz również i od częstości drgań, i wyznaczającą stosunek między nadwyżką ciśnienia i amplitudą drgań, nazywamy za Hahnemannem i Hechtem (1916 r.), twardością akustyczną.

Podstawiając  $c = \sqrt{\frac{e}{\rho}}$  otrzymujemy na opór akustyczny często używany wzór  $\sqrt{e \rho}$ .



Wzór (15) jest pod wielu względami analogiczny do prawa Ohma w elektryczności, tym się też tłumaczy nazwa oporu akustycznego dla stosunku  $P$  i  $v$ . Analogia, całkowicie zresztą formalna, między zjawiskami akustycznymi i elektrycznymi, nieraz bardzo użyteczna przy badaniu przypadków bardziej złożonych, sięga dalej. Tak np. ze wzoru (15) wynika, że natężenie 1 fali płaskiej możemy wyrazić wzorem

$$I = \frac{1}{2} P v_0, \quad (16)$$

gdzie  $P$  i  $v_0$  są największymi wartościami ciśnienia i prędkości, analogicznym do wzoru na moc prądu elektrycznego

$$U = (V_1 - V_2) \cdot i$$

gdzie  $V_1 - V_2$  oznacza różnicę potencjału na końcach danego przewodnika,  $i$  — natężenie prądu (por. rozdz. V, ust. 1).

W falach płaskich związek między ciśnieniem i prędkością ruchu odkształczanych elementów wyraża się więc wzorami analogicznymi do wzorów wiążących różnicę potencjału z natężeniem prądu stałego. Falom kulistym odpowiadają wzory, analogiczne do wzorów dla prądów zmiennych. Wzorów tych jednak nie będziemy tutaj wyprowadzali.

Metody oparte na pomiarze ciśnienia mają węższy zakres stosowania, jakkolwiek pod względem czułości przewyższają na ogół metodę Rayleigha. Sprowadzają się najczęściej do umieszczenia w badanej przestrzeni błony lub płyty i do zmierzenia wywieranego przez odkształcane środowisko ciśnienia. Wzorem tego rodzaju metody jest metoda Wiena (1889 r.), w której ciśnienie wywierane na napiętą błonę (manometr błonowy) jest wyznaczane z wychylenia się błony z położenia równowagi. Stosunek jednak wychylenia do działającego ciśnienia jest w tym przypadku dla każdej częstości drgań inny, tak że wyznaczenie z odchylenia błony wartości działającego ciśnienia możliwe jest dopiero wtedy, gdy znamy częstość drgania i odpowiadający jej czynnik proporcjonalności między ciśnieniem i wychyleniem. Jedynie w przypadku, gdy częstość mierzonego drgania jest o wiele wyższa od częstości drgań własnych błony (patrz rozdz. II ust. 4), odchylenie wywołane przez dane ciśnienie zachowuje przy wszystkich częstościach drgań wartość tę samą. Wtedy jednak czułość przyrządu znacznie się zmniejsza.



Odchylenie błony czy płyty od położenia równowagi można wyznaczyć albo metodą optyczną, mierząc np. przesunięcie się podziałki skali, odbitej w lusterku umieszczonym na błonie (por. tom I, str. 322), albo też o wiele dokładniej, metodą elektryczną, mierząc zmiany natężenia prądu lub siły elektrodźwicznej w związanym w ten lub inny sposób z płytką obwodzie elektrycznym.

W tym ostatnim przypadku przyrządy można sprowadzić do dwóch zasadniczych typów: 1. przyrządy, w których działania fal odkształcenia zmieniają warunki przepływu prądu w danym obwodzie; pomiary przy użyciu tych przyrządów nie dają bezpośredniego związku między natężeniem akustycznym i zmianą energii elektrycznej; 2. przyrządy, przekształcające energię akustyczną w inne postacie energii. Do przyrządów pierwszego typu należą wszelkiego rodzaju mikrofony (gr. fonos — głos), z których niewątpliwie najważniejszy jest mikrofon węglowy (Hughes, 1878 r.). Składa się on zazwyczaj z dwóch nie stykających się bezpośrednio płytek węglowych, z których jedna cieńsza wystawiona jest na działanie fal odkształcenia; przestrzeń między płytkami wypełniona jest luźno stykającymi się z nimi i między sobą kulkami węglowymi lub też miałem węglowym. Mikrofon włączony jest w obwód prądu, przy czym elektrodami są płytki węglowe. Pod działaniem ciśnienia zmienia się opór mikrofonu, a więc przy stałym natężeniu przepływającego przez mikrofon prądu — różnica potencjałów na płytkach, przy stałej zaś sile elektrodźwicznej w obwodzie — natężenie prądu.

Niech  $R$  oznacza początkowy opór mikrofonu,  $r_0$  amplitudę zmiany oporu, spowodowanej przez ciśnienie akustyczne sinusoidalne o częstotliwości drgań  $\nu$ ,  $E$  — siłę elektrodźwiczną w obwodzie, natężenie prądu  $i$  wyrazi się wtedy wzorem

$$i = \frac{E}{R + r_0 \sin 2\pi \nu t}.$$

Znając związek między ciśnieniem i zmianą oporu mikrofonu, można ze zmierzonego natężenia prądu wyznaczyć ciśnienie i natężenie akustyczne. Związek ten nie jest bynajmniej prosty. Przede wszystkim wartość oporu, koło której waha się w ciągu pomiaru wartość  $r$ , zazwyczaj nie jest równa oporowi  $R$ , jaki mikrofon posiada wtedy, gdy nie podlega ciśnieniu fal akustycznych, lecz jest od niego większa; następnie w miarę dłuższego działania mikrofonu stosunek  $\frac{r_0}{R}$  zmienia się okresowo, przy czym różnica największej i najmniejszej jego wartości może być dość znaczna (według Schuberta, 1927 r., dla częstotliwości 800 drgań na sekundę może zmniejszać się do połowy). Poza tym czułość mikrofonu, której miarą jest zmiana oporu, przypada-



dająca na jednostkę ciśnienia akustycznego, zależy nie tylko od częstotliwości drgań, lecz również od natężenia. Ta ostatnia zależność, wyrażająca się szybkim stosunkowo wzrostem czułości przy wzroście natężenia sprawia, że dźwięki złożone (patrz. ust. 7) nie są przez mikrofon dokładnie odtwarzane, tony bowiem o mniejszym natężeniu powodują nieproporcjonalnie mniejsze zmiany oporu mikrofonu. Zjawisko to jest tym wyraźniejsze, im w większej odległości od mikrofonu znajduje się źródło dźwięku. Teoria mikrofonu węglowego, mimo licznych prac, z których najobszerniejsze i najgruntowniejsze są, jak się zdaje, prace Holma (1922 r., 1927 r.), tak jakby nie istnieje.

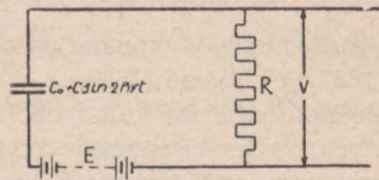
Toteż mikrofon węglowy, który, ze względu na prostotę swej budowy nie prędko chyba będzie przy przenoszeniu głosu na odległość zastąpiony przez inny przyrząd, w pomiarach natężenia musiał ustąpić miejsca mikrofonowi-kondensatorowemu — (Wente, 1917 i 1922 r.). Mikrofon ten jest kondensatorem (patrz. rozdz. III ust. 6), którego jedną zbroję tworzy silnie napięta cienka (o grubości 0,05 — 0,07 mm) płytka stalowa, znajdująca się w niewielkiej (około 0,02 mm) odległości od drugiej normalnej zbroi. Kondensator ten połączony jest ze źródłem stałej siły elektrobodźczej; ciśnienie akustyczne, zmieniając odległość zbroi kondensatora, zmienia jego pojemność, tak że dla tonów o częstotliwości  $\nu$  będziemy mieli

$$C_1 = C_0 + C \sin 2\pi \nu t.$$

Ta zmiana pojemności powodować będzie zmianę nabożów na zbrojach kondensatora o stałym potencjale, co znów wywoła przepływanie przez obwód prądu elektryzowania i rozbrajania; na końcach oporu  $R$  otrzymamy w ten sposób zmienną różnicę potencjałów  $V = i \cdot R$  gdzie  $i$  — natężenie chwilowe przepływającego prądu.

I w tym przypadku musi być, oczywiście, uprzednio wyznaczona zależność między ciśnieniem akustycznym i amplitudą  $C$  zmiany pojemności, posiadającą dla różnych częstotliwości różną na ogół wartość.

W drugim typie przyrządów, w których energia akustyczna przetwarza się w inną postać energii, wielkością mierzoną jest, ściśle biorąc, prędkość  $v$  ruchu cząstek środowiska. Najprostszym przyrządem tego typu jest zwykły telefon elektromagnetyczny (Bell, 1876 r.), w którym fale głosowe padają na cienką blaszkę żelazną, umieszczoną przed biegunem elektromagnesu. Drgania płytki indukują w obwodzie prądy; siła elektrobodźcza indukowana zależy nie od wartości wychylenia blaszki, lecz od prędkości jej ruchu. Pomiar jednak natężenia akustycznego takim przyrządem nastęczałby wiele



rys. 16



trudności. W praktyce używany jest mikrofon wstęgowy Gerlacha i Schottky'ego (1924 r.). Pomiedzy biegunami magnesu umieszczona jest — włączona w obwód prądu — wstążka metalowa (zazwyczaj glinowa) o szerokości paru milimetrów i grubości około 3 $\mu$ . Fale głosowe, padając na tę nienapiętą wstążkę, wprawiają ją w ruch o tej samej częstości drgań, co powoduje powstanie w obwodzie siły elektrobodźczej indukowanej również o tej samej częstości. Możemy jednak i tego przyrządu użyć do pomiaru amplitudy ciśnienia akustycznego, włączając w obwód wstęgi siłę elektrobodźczą zmienną o częstości równej częstości danej fali i o tak dobranej fazie i natężeniu, aby działająca na wstęgę siła elektromagnetyczna (por. rozdz. VII, ust. 3) była równa i przeciwnie skierowana do siły, spowodowanej przez ciśnienie akustyczne. Wstęga wtedy będzie w spoczynku. Ten piękny i prosty sposób, pozwalający z dużą dokładnością zmierzyć ciśnienie akustyczne, można jednak stosować tylko w przypadku drgań niezłożonych.

W pomiarach ciśnienia akustycznego można też posługiwać się tzw. piezoelektrycznymi własnościami ciał takich, jak kwarc, turmalin, sól Seignette'a (p. rozdz. III ust. 12).

Na zmianach temperatury, towarzyszących odkształceniom środowiska oparte są metody pomiaru, użyte po raz pierwszy przez Neuschelera (1911 r.), a następnie wielokrotnie stosowane i ulepszone. Gdy w przestrzeni, podlegającej odkształceniom sprężystym, umieścimy ogrzany przewodnik z prądem, który służy nam za termometr oporowy, jego normalne ostygnięcie będzie zakłócone przez adiabatyczne zmiany ciśnienia oraz przez zmianę krążących koło niego prądów unoszenia, wywołaną przez ruch drgający cząstek środowiska. W pewnych przypadkach (fale stojące, p. ust. 6) można każde z tych działań wyodrębnić. Teorię tego typu przyrządów dał v. Hippel (1924 i 1925 r.).

Pomiary, wykonane na otwartym powietrzu, przez Allarda (1882 r.) i Wiena (1889 r.), ustaliły bezspornie, że zmniejszenie się natężenia fal kulistych (lub mało różniących się od kulistych) zachodzi znacznie szybciej, niżby to wynikało z wyżej przytoczonych rozważań teoretycznych. Ta niezgodność ma swe źródło niewątpliwie w tym, że warunki, w jakich istotnie zachodzą obserwowane odkształcenia sprężyste, częściowo tylko czynią zadość przyjętym przez nas przy wyprowadzeniu wzoru (12) założeniom. Ani bowiem odkształcenia nie są całkowicie adiabatyczne, ani też środowisko nie jest płynem doskonałym; przechodzenie ciepła z odkształcanego elementu objętości do elementów sąsiednich czy to w postaci energii promieniowania czy też bezpośrednio przez przewodzenie, za-



miana na skutek tarcia wewnętrznego części energii ruchu na energię cieplną powodują stopniowo zmniejszanie się energii akustycznej, przekazywanej kolejno przez odkształcane warstwy.

Z dostatecznym przybliżeniem można przyjąć, że w przypadku fal kulistych natężenie wyraża się wzorem

$$I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot e^{-b(r_2 - r_1)} \quad (17a)$$

gdzie  $I_1$  natężenie w takiej odległości  $r_1$  od źródła, w której rozchodzenie się energii możemy uważać za prawidłowe (p. wyżej, str. 33),  $r_1$  i  $r_2$  — odległości w kierunku promienia miejsca pomiaru od źródła,  $b$  — współczynnik pochłaniania (absorbpcji), zależny jedynie od rodzaju środowiska i od częstości drgań, na ogół tym większy, im częstość drgań jest większa. Oznaczając  $I_1 \cdot r_1^2$  przez  $I$  możemy wtedy, gdy  $r_2$  jest dostatecznie wielkie, wzór (17a) przepisać w postaci

$$I_r = I \cdot \frac{1}{r^2} \cdot e^{-br} \quad (17)$$

Z badań Stokesa (1845 r.) nad promieniowaniem ogrzanego powietrza oraz ze wspomnianych wyżej prac Helmholtza i Kirchhoffa (p. str. 23) wynika, że współczynnik  $b$  można wyrazić następującym wzorem

$$b = \frac{2\pi^2 v^2}{c^3 \rho} \left( \frac{4}{3} \eta + \frac{k-1}{c_p} \cdot k_p \right), \quad (18)$$

gdzie  $\eta$  jest współczynnikiem tarcia wewnętrznego,  $k$  — stosunkiem  $\frac{c_p}{c_v}$  i  $k_p$  współczynnikiem przewodnictwa cieplnego. Uwzględniając jedynie wpływ tarcia wewnętrznego, otrzymujemy wzór prostszy (Aigner 1922)

$$b = \frac{8\pi^2 v^2}{3c^3 \rho} \eta, \quad (18a)$$

z którego dla powietrza o temperaturze  $0^0\text{C}$  i prężności 760 mm rt. otrzymujemy po podstawieniu  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  g/cmsek;  $\rho = 1,3 \cdot 10^{-3}$  g/cm<sup>3</sup>  $c = 3,3 \cdot 10^4$  cm/sek

$$b_p = 1,01 \cdot 10^{-13} v^2;$$

dla wody zaś, kładąc  $\eta = 17 \cdot 10^{-2}$  g/cmsek,  $c = 14 \cdot 10^4$  cm/sek,

$$b_w = 1,6 \cdot 10^{-16} v^2.$$

Dla tej samej przeto częstości drgań współczynnik  $b$  ma w wodzie wartość mniej więcej 1000 razy mniejszą, niż w powietrzu. Zmniejszenie więc natężenia, jakie na skutek pochłaniania zachodzi w powietrzu w odległości  $r$ , w wodzie zachodzi dopiero w odległości 1000 razy większej.



Z pomiarów Neklepajewa (1911 r.) nad pochłanianiem drgań o bardzo wielkiej częstości (od 130 000 do 400 000 drgań na sekundę) wynika, że w powietrzu w miarę zmniejszania się długości fali zanikanie energii akustycznej szybko wzrasta (prawie 10 razy szybciej przy trzykrotnym zmniejszeniu długości fali). P. Lebediew, ekstrapolując dane Neklepajewa, obliczył długości dróg, na jakich natężenie spada do 0,01 początkowej wartości. Oto wyniki jego obliczeń, które podajemy za Lübckem („Handbuch der Physik“, 1927 r.).

długość fali w mm	0,8	0,4	0,2	0,1
długość danego odcinka w cm	40	10	2,5	0,6

Przy długości zatem fali  $10^{-2}$  cm, której w powietrzu odpowiada częstość 3 000 000 drgań na sekundę, energia akustyczna jest pochłonięta już w najbliższym sąsiedztwie źródła. Ten wniosek potwierdziły (1925 r.) pomiary Pierce'a z falami o częstości zbliżonej do tej granicznej wartości.

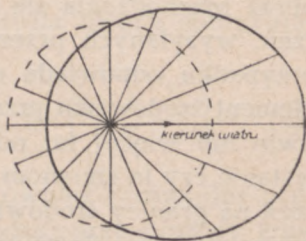
W tym wzrastaniu pochłaniania w miarę zmniejszania się długości fal szukać, być może, należy wyjaśnienia niewielkiej donośności grzmotu, nie przekraczającej zazwyczaj 15 km. Według Schmidta (1912 r. i 1914 r.), największą energię posiadają w grzmocie fale długie o częstości 5 do 2 drgań na sekundę, a więc leżące poniżej granicy słyszenia; fale akustyczne w ścisłym tego słowa znaczeniu, mają energię o wiele mniejszą. Te właśnie fale, jak to wykazał Schrödinger (1917 r.), są pochłaniane silniej. Do podobnego wniosku prowadzą również pomiary Rittera (1925 r.).

Należy jednak zaznaczyć, że próg słyszenia nie posiada tej samej wartości dla wszystkich częstości drgań. Maximum czułości, której miarą jest odwrotność najmniejszej wartości energii akustycznej, jaka jeszcze może wywołać wrażenie głosu, odpowiada drganiom o częstości od 2000 do 3000 drgań na sekundę. (Według Riesza, 1928 r., drganiom o częstości 2500 drgań na sekundę). Czułość ta jest wielokrotnie większa od czułości odpowiadającej drganiom o częstości niższej. Według pomiarów Wiena, zresztą dość spornych, jest ona 1 000 000 razy większa, niż przy częstości 100 drgań na sekundę. (Na podstawie jednak nowszych danych (Fletcher i Wegel, 1922) można, jak się zdaje sądzić, że stosunek ten nie jest tak wielki). Z tym należy się liczyć w sygnalizacji akustycznej (np. przy użyciu syren alarmowych), dobierając zależnie od odległości, na jaką sygnał ma być słyszany, taką częstość drgania, która



by dała najlepsze warunki słyszenia. Według Allarda, który szczegółowo zbadał (1882 r.) to zagadnienie, przy odległości 10 km najoszczędniejszym (o ile chodzi o energię, dostarczaną przez źródło) byłby sygnał o częstości 1020 drgań na sekundę, przy odległości 100 km — o częstości dwa razy mniejszej.

Nazwijmy zasięgiem fali odkształcenia tę największą odległość, w której możemy jeszcze zmierzyć natężenie akustyczne. W środowisku jednorodnym, odkształcanym przez punktowe (lub kuliste) źródło zaburzeń, zasięg jest we wszystkich kierunkach jednakowy; punkty o tym samym natężeniu leżą na powierzchni kulistej. Tak mniej więcej zachodzi zjawisko w spokojnym powietrzu. Podczas wiatru zasięg wzrasta w kierunku wiatru, wobec czego przecięcie płaszczyzną przechodzącą przez źródło zaburzeń i kierunek wiatru, powierzchni, na której leżą punkty o jednakowym natężeniu, daje elipsę, wydłużoną w kierunku wiatru. (rys. 17).



rys. 17

Zasięg zależy również od ciśnienia: w miarę wzrostu ciśnienia wzrasta i zasięg, przechodząc jednak, jak się zdaje, przez minimum pod ciśnieniem od 100 do 300 mm rt. Pochłanianie zwiększa się przy wzroście zawartości dwutlenku węgla w powietrzu. Podobnie działa mgła i dym. Wtedy jednak nie mamy już ściśle biorąc do czynienia ze środowiskiem jednorodnym.

O własnościach akustycznych cieczy można wnioskować jedynie z nielicznych pomiarów rozchodzenia się zaburzeń w wodzie. Wyniki tych pomiarów, wykonywanych zazwyczaj w zbiornikach wody o niewielkiej głębokości (jeziorach, rzekach, płytkich morzach), powinny czynić zadość wzorom obowiązującym w przypadku fal cylindrycznych; zmiana przeto natężenia akustycznego powinna wyrażać się wzorem

$$I_r = \frac{I_0}{r} e^{-br} \quad (19)$$

Doświadczenia jednak Colladona i Sturma (1827 r.) oraz Lukasa (1872 r.) prowadzą raczej do wniosku, sformułowanego (1920 r.) przez



Barkhausena i Lichtego, którzy poparli go pomiarami, wykonanymi na Morzu Bałtyckim, że zmiana natężenia jest wywołana jedynie przez pochłanianie, tak, że mamy

$$I_r = I_0 e^{-br} \quad (19a)$$

przy czym współczynnik  $b$  ma większą znacznie wartość, niż to można przewidywać na podstawie rozważań teoretycznych.

##### 5. — INTERFERENCJA. — SKŁADANIE DRGAŃ O TEJ SAMEJ CZĘSTOŚCI.

Z licznych zastrzeżeń, jakimi zmuszeni byliśmy opatrzyć wywody ustępów poprzednich, wynika, że prosty stosunkowo obraz rozchodzenia się w nieograniczonym środowisku zaburzeń, wysyłanych przez jedno źródło, w wyjątkowym tylko przypadku odpowiada rzeczywistości. Zazwyczaj przez dany element środowiska przechodzi w danej chwili nie jedna, lecz dwie lub więcej fal odkształceń, zawdzięczających swe powstanie czy to zmianom, jakich doznaje rozchodzenie się zaburzeń na granicy środowiska, czy też istnieniu w danym środowisku większej ilości źródeł zaburzeń. Zgodnie z poczynionymi przez nas w ust. I założeniami, przejścia tych poszczególnych zaburzeń przez dany element środowiska nie powodują żadnych dostrzegalnych zmian własności fizycznych środowiska. Analogicznie więc możemy przyjąć, że w przypadku wielu zaburzeń, przechodzących przez dany element, każde z nich rozchodzi się tak, jak gdyby innych zaburzeń nie było. Wobec czego zaburzenie, którego siedliskiem staje się wtedy dany element objętości, jest zaburzeniem wypadkowym, sumą geometryczną (lub w szczególnym niżej rozpatrywanym przypadku algebraiczną) poszczególnych zaburzeń składowych. To założenie, postawione przez Huygensa w 1678 r., prowadzi do wniosków, na ogół zgodnych z doświadczeniem jedynie w przypadku zaburzeń niewielkich (niewielkich odchyłeń od położenia równowagi lub niewielkich zmian ciśnienia), zawodzi jednak całkowicie, gdy zaburzenia są znaczne (wtedy jednak nie można również stosować i podstawowego założenia ust. I). Stąd nazwa zasady zachowania małych odchyleń, jaką często nadaje się temu założeniu Huygensa.



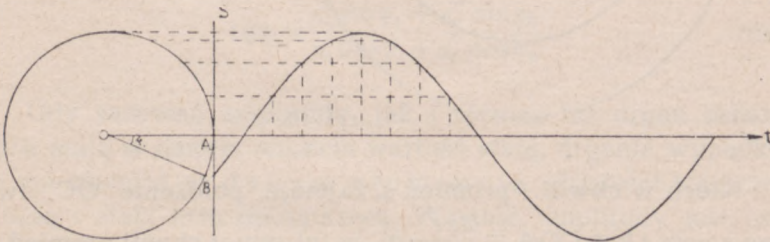
Zacznijmy od rozpatrzenia prostego przypadku, gdy w danym elemencie środowiska spotykają się dwie lub więcej fal okresowych, powodujących odchylenie cząstek od położenia równowagi wzdłuż tej samej prostej, która dla fal podłużnych będzie prostą, wyznaczającą kierunki rozchodzenia się fal, dla fal poprzecznych — prostą prostopadłą do tych kierunków. Wtedy, przy zachowaniu warunków, jakimi wyżej ograniczyliśmy rozpatrywane przez nas zjawiska, odchylenie wypadkowe będzie sumą algebraiczną odchyień składowych. Tego rodzaju zjawiska noszą nazwę zjawiska interferencji.

Gdy odchylenia są spowodowane przez drgania harmonijne proste o tym samym okresie, lecz różnej amplitudzie i różnej fazie początkowej, będziemy mieli dla dwóch spotykających się fal

$$s = s' + s'' = s_0' \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \varphi_1 \right) + s_0'' \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \varphi_2 \right). \quad (20)$$

Drgania wypadkowe będą wtedy również harmonijne proste, jak to można bezpośrednio udowodnić przy pomocy konstrukcji danej przez Fresnela. Opiszmy koła o promieniach  $s_0'$  i  $s_0''$  i wykreślmy sinusoidy, posługując się regułą, podaną na str. 55 tomu I-go.

Otrzymamy w ten sposób dwie krzywe o tych samych okresach, lecz różnych amplitudach i fazach początkowych,

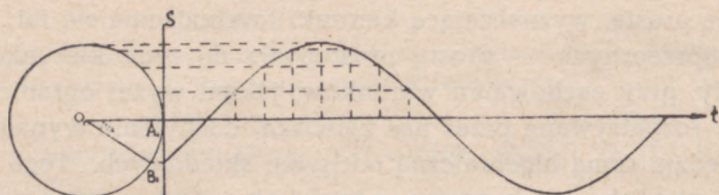


rys. 18a

przy czym  $\sphericalangle AOB = \varphi_1$ ,  $\sphericalangle A_1O_1B_1 = \varphi_2$ . Każdorazowe odchylenie od położenia równowagi, spowodowane przez jedno z tych drgań jest równe rzutowi na oś  $s$  promieni kół  $OB = s_0'$ , lub

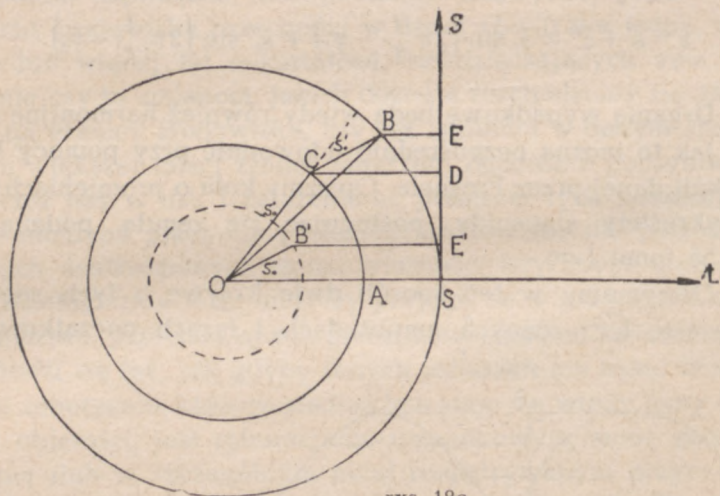


$O_1 B_1 = s''_0$ , obracających się ruchem jednostajnym z prędkością kątową  $\frac{2\pi}{T}$ . Odchylenie zatem wypadkowe równe, w myśl



rys. 18b

założenia, sumie tych rzutów, otrzymamy, rzutując na oś  $s$ , sumę geometryczną promieni  $s'_0$  i  $s''_0$  w położeniu, jakie w danej chwili zajmują.



rys. 18c

Niech w chwili  $t$  promień  $s'_0$  zajmuje położenie  $OC$ , tworząc z osią  $t$  kąt  $COA = \frac{2\pi t}{T} - \varphi_1$ , w tej samej chwili promień  $s''_0$  tworzy z osią  $t$  kąt  $\frac{2\pi t}{T} - \varphi_2$ , z promieniem więc  $s'_0$  kąt

$$\frac{2\pi t}{T} - \varphi_2 - \left( \frac{2\pi t}{T} - \varphi_1 \right) = \varphi_1 - \varphi_2.$$



OdlóŜmy z punktu  $C$  odcinek  $CB$  równy  $s_0''$  i tworzący z promieniem  $OC$  kąt  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Rzut prostej  $OB$ , będącej sumą geometryczną tych dwu odcinków, jest równy odchyleniu wypadkowemu, jak to bezpośrednio wynika z rysunku, gdzie  $SD = s'$ ,  $DE = s''$ . Kąt  $OCB$  równy  $\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)$  zachowuje stale tę samą wartość, przy obrocie zatem prostej  $OC$  prosta  $CB$  obraca się razem z nią tak, jak gdyby była z nią sztywnie związana; koniec przeto wypadkowej  $OB$  opisuje okrąg koła  $OS$  w ciągu tego samego czasu  $T$ . Drganie wypadkowe  $s$  wyrazi się wzorem

$$s = OB \cdot \sin BOS = s_0 \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right). \quad (20a)$$

Z  $\Delta OCB$  znajdujemy

$$s_0^2 = s_0'^2 + s_0''^2 + 2s_0' s_0'' \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (20b)$$

oraz

$$\frac{s_0'}{\sin (\varphi - \varphi_2)} = \frac{s_0''}{\sin (\varphi_1 - \varphi)} \text{ lub } s_0' \sin (\varphi_1 - \varphi) = s_0'' \sin (\varphi - \varphi_2).$$

Otwierając nawiasy otrzymujemy

$$s_0' \sin \varphi_1 \cos \varphi - s_0' \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi = s_0'' \sin \varphi \cdot \cos \varphi_2 - s_0'' \cos \varphi \cdot \sin \varphi_2,$$

skąd

$$s_0' \sin \varphi_1 - s_0' \cos \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi = s_0'' \cos \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi - s_0'' \sin \varphi_2$$

i ostatecznie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{s_0' \sin \varphi_1 + s_0'' \sin \varphi_2}{s_0' \cos \varphi_1 + s_0'' \cos \varphi_2}. \quad (20c)$$

Gdy zarówno amplitudy, jak i różnica faz drgań składowych mają w danym punkcie wartość stałą, drganie wypadkowe ma również w danym elemencie objętości stałą amplitudę i stałą fazę początkową. Wartość amplitudy jest najmniejsza, gdy  $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi$ , gdzie  $n = 0, 1, 2, \dots$ , gdy przeto jedno z drgań składowych jest w stosunku do drugiego opóźnione o połowę okresu drgania, a więc gdy fazy drgań są przeciwnie. Mamy wtedy

$$s_0^2 = (s_0' - s_0'')^2, \text{ skąd } s_0 = s_0' - s_0'';$$



gdy  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2n\pi$ , gdzie tak, jak poprzednio,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , a więc gdy fazy drgań są zgodne

$$s_0 = s_0' + s_0''.$$

Jeżeli falami składowymi są fale płaskie, rozchodzące się w tym samym kierunku, lecz z pewną stałą różnicą faz początkowych, drganie wypadkowe ma we wszystkich punktach środowiska tę samą obszerność drgań i stałą różnicę faz względem każdego z drgań składowych. Takie dwie fale rozchodząc się więc będą jak jedna fala, której równaniem promienia w punkcie, odległym o  $x$  od źródła zaburzeń będzie

$$s_x = s_0 \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} - \varphi \right), \quad (21)$$

gdzie  $s$  i  $\varphi$  wyznaczają wzory (20b) i (20c). Twierdzenie to możemy uogólnić na dowolną ilość fal płaskich o tym samym okresie, dodając odpowiednio po dwie fale składowe, a następnie dodając ich wypadkowe.

Mamy wtedy ostatecznie

$$s_0 \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right) = \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \varphi_i \right).$$

Otwierając nawiasy i przyrównując współczynniki wyrazów, zawierających  $\sin \frac{2\pi t}{T}$  i  $\cos \frac{2\pi t}{T}$ ,

otrzymamy 
$$s_0 \sin \varphi = \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \varphi_i,$$

$$s_0 \cos \varphi = \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \cos \varphi_i,$$

skąd 
$$s_0^2 = \left( \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \varphi_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \cos \varphi_i \right)^2 \quad (21a)$$

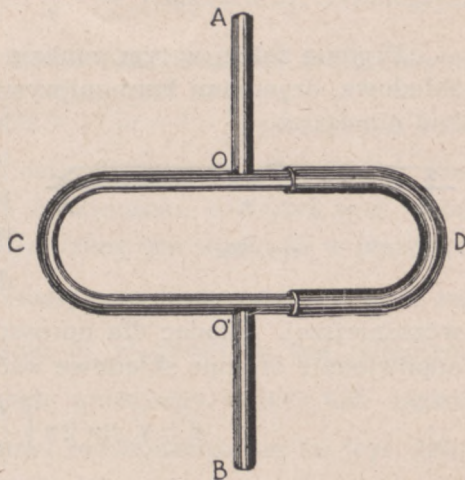
i 
$$\sin \varphi = \frac{1}{s_0} \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \varphi_i \quad (21b)$$

lub 
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \cos \varphi_i} \quad (21c)$$



Stąd wynika, że i odwrotnie każdą falę, powodującą powstawanie drgań harmonijnych prostych, możemy uważać za wypadkową dwu lub więcej fal składowych o tym samym okresie drgania, różniących się amplitudą oraz fazą początkową.

Do wykazania zjawiska interferencji, zachodzącego w tym przypadku, służyć może prosty przyrząd Quinckego, wyobrażony schematycznie na rys. 19. Źródło dźwięku, umieszczone w pobliżu otworu *A*, wprawia w drganie otaczające powietrze. Zaburzenie, od punktu *O* rozchodzi się dwiema drogami, wzdłuż rury *C* i rury *D*, której długość może być przez wsuwanie i wysuwanie (tak jak w puźonach) odpowiednio zmieniana. W punkcie *O'* obie te fale spotykają się, rozchodząc się dalej jak jedna fala o amplitudzie i fazie, wyznaczonej przez różnicę faz, jakiej nabyły przebywając drogi niejednakowe. Różnica między fazą w punkcie *O* i punkcie *O'* dla fali, która przeszła drogą *OCO'* będzie równa  $2\pi \frac{x_c}{\lambda}$ , dla fali, która przeszła drogą *ODO'* —  $2\pi \frac{x_d}{\lambda}$ , różnica zatem ich faz w chwili interferencji  $2\pi \frac{x_c}{\lambda} - 2\pi \frac{x_d}{\lambda}$ .



rys. 19

Z tą różnicą faz będą się one przesuwają wzdłuż rury *O'B* do ucha obserwatora. Zmieniając odpowiednio długość rury *D*, otrzymamy kolejno różnice faz równe  $0, \pi, 2\pi, \dots$ , którym odpowiadać będą amplitudy drgań wypadkowych  $2s_0', 0, 2s_0', \dots$ ; będą zatem zachodziły kolejne wzmocnienia i zanikania dźwięku.

## 6. — FALE STOJĄCE.

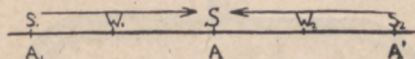
Zastosujmy otrzymane wyniki do rozpatrzenia ważnego przypadku interferencji dwu ciągów fal płaskich sinusoidalnych o tym samym okresie drgania, rozchodzących się w kierunkach przeciwnych, przy czym założmy, że obszerności drgań są w obu falach jednakowe, tak że  $s_0' = s_0''$ . Wybierzmy taki



punkt  $S$ , do którego w danej chwili drgania dochodzą w tej samej fazie. Jest rzeczą oczywistą, że drgania zawsze będą miały w tym punkcie fazy zgodne, na drgania przeto wypadkowe otrzymujemy ze wzorów (20), w których  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ,

$$s = 2s'_0 \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right). \quad (22)$$

Drgania zatem w tym punkcie będą, podobnie jak drgania składowe, drganiami harmonijnymi prostymi. W punkcie, odległym o  $x$  od  $S$  w kierunku



rys. 20a

rozchodzenia się fali pierwszej, faza drgania będzie w chwili  $t$  taka, jaka odpowiada fazy w  $S$  w chwili o  $\frac{x}{c}$

wcześniej. Kładąc dla uproszczenia  $\varphi = 0$ , otrzymamy na odpowiednie drganie składowe wzór

$$s' = s'_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

faza drgania drugiego będzie w tym samym punkcie odpowiadała chwili o  $\frac{x}{c}$  późniejszej, dla tego więc drgania składowego otrzymamy

$$s'' = s'_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right),$$

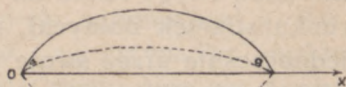
stąd drganie wypadkowe

$$s_x = s' + s'' = 2s'_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}. \quad (22a)$$

Drgania więc tego punktu są również drganiami harmonijnymi prostymi o tej samej częstotliwości drgań i o amplitudzie równej  $2s'_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ ; w punkcie  $W_2$ , zatem, odległym od  $S$  o  $\frac{\lambda}{4}$ , obszerność drgań jest stale równa zero: drgania składowe posiadają stale fazy przeciwne; różnica ich faz, równa  $\frac{4\pi x}{\lambda}$ , posiada w tym



punkcie wartość  $\pi$ . Podobnie rzecz się będzie miała w punkcie  $W_1$ , odległym od  $S$  o  $\frac{\lambda}{4}$  w kierunku rozchodzenia się fali drugiej, jak również we wszystkich punktach, odległych od  $S$  w jedną i drugą stronę o nieparzystą liczbę ćwiartek fali, dla których więc  $x = \pm (2n+1) \frac{\lambda}{4}$ . W punktach  $S_1, S_2$  odległych od  $S$  o  $\frac{\lambda}{2}$ , amplituda będzie równa  $-2s_0$ , co znaczy, że jakkolwiek w tych punktach w chwilach  $t = (2n+1) \frac{T}{4}$  odchylenia będą podobnie, jak w punkcie  $S$ , osiągały tę samą wartość  $2s'_0$ , kierunek ich będzie przeciwny do kierunku odchyień w  $S$ . Snując dalej te rozważania, stwierdzimy bez trudu, że w punktach odległych od  $S$  o  $2n \cdot \frac{\lambda}{2}$ , odchylenia będą miały zawsze ten sam kierunek, co w punkcie  $S$ , w punktach zaś odległych o  $(2n+1) \frac{\lambda}{2}$  zawsze kierunek przeciwny. Niech  $OX$  będzie prostą, na której leżą kierunki rozchodzenia się fal (rys. 20b); odkładajmy w kierunku osi rzędnych odchylenia od położenia równowagi środków masy elementów objętości środowiska. Odchylenie wypadkowe w chwili  $(2n+1) \frac{T}{4}$  odtworzy wtedy sinusoida pełna, odchylenie w chwili  $o \frac{T}{2}$  późniejszej — sinusoida przerywana. Wszystkie elementy objętości przechodzić będą jednocześnie przez położenie równowagi, wobec czego w chwili, zawartej między  $(2n+1) \frac{T}{4}$  i  $(2n+3) \frac{T}{4}$ , odchylenia elementów będzie wyobrażała krzywa  $aa$ . Zjawisko zatem zachodzi tak, jak gdyby fala wcale się nie przesuwała. Z tego też powodu nazywamy otrzymaną w tym przypadku falę wypadkową falą stojącą; punkty o największej amplitudzie  $s_0 = 2s'_0$  noszą nazwę strzałek fali stojącej, punkty o am-

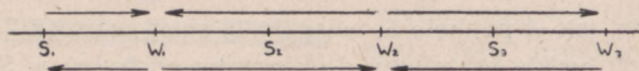


rys. 20b



plitudzie 0 — węzłów w fali stojącej. Prędkości cząstek, zawartych między węzłami (np.  $W_1$  i  $W_2$ ) mają zawsze kierunek przeciwny do prędkości cząstek, zawartych w warstwie sąsiedniej (np.  $W_2$   $W_3$ ).

Przypuścimy, że rozpatrywana przez nas fala jest falą podłużną; wtedy zgodnie z tym, o czym była mowa wyżej, w pewnej dowolnej zresztą chwili  $t$  kierunek ruchu cząstek środowiska będzie np. taki, jaki wskazują górne strzałki na rys. 21. Gdy cząstki, poruszające się w ten sposób, osiągną



rys. 21

największe odchylenie od położenia równowagi, koło węzłów  $W_1, W_3 \dots$  powstaną zgęszczenia, powodujące w tych miejscach wzrost ciśnienia ponad wartość normalną, koło węzłów zaś  $W_2, W_4$  (nie oznaczonego na rysunku) — rozrzedzenia, którym towarzyszy spadek ciśnienia. Cząstki następnie zmieniają kierunek swego ruchu na odwrotny (poruszają się będą w kierunku strzałek dolnych), w pewnej chwili przejdą wszystkie jednocześnie przez swoje położenie równowagi, tak że środowisko wróci do swego stanu normalnego i, poruszając się dalej w tym samym kierunku, wytworzą zgęszczenia w węzłach  $W_2, W_4$  — rozrzedzenia w węzłach  $W_1, W_3$ . Największe zatem zmiany ciśnienia zachodzić będą w węzłach, najmniejsze — w danych warunkach równe zero — w strzałkach. Uogólniając wyżej wprowadzoną terminologię, możemy punkty  $W_1, W_2, W_3, W_4$  nazwać strzałkami ciśnień, punkty zaś  $S_1, S_2, S_3, S_4$  — węzłami ciśnień. Węzły ciśnień są zatem przesunięte względem węzłów odchyżeń o ćwierć długości fali.

Zmiana ciśnienia jest, jak o tym była mowa w ust. 2, proporcjonalna do  $\frac{ds}{dx}$ , gdzie  $x$  oznacza odległość, mierzoną w kierunku rozchodzenia się fal. Ze wzoru (22a) otrzymujemy

$$\Delta p = -e \frac{ds}{dx} = e \frac{4\pi}{\lambda} s'_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$



W punktach więc, w których  $x = 2 \frac{\lambda}{4}, 4 \cdot \frac{\lambda}{4}, 6 \cdot \frac{\lambda}{4} \dots$  a więc ogólnie  $2n \cdot \frac{\lambda}{4}$ ,  $\Delta p$  jest stale równe zero, w punktach zaś, w których  $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4} \lambda \dots$  ogólnie  $(2n+1) \frac{\lambda}{4}$ ,

$$\Delta p = e \frac{4\pi}{\lambda} s_0' \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad (22b)$$

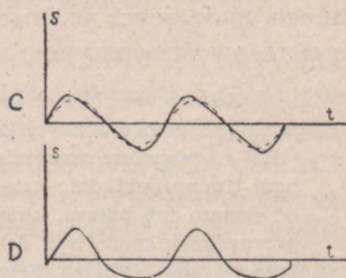
osiągając w chwilach  $t = (2n+1) \frac{T}{4}$  wartości największe  $\pm e \cdot \frac{4\pi s_0}{\lambda}$ .

Należy zaznaczyć, że wszystkie te wywoły dotyczą interferencji fal o równych amplitudach. Gdy amplitudy są nierówne, falę o amplitudzie większej  $s_0' > s_0''$  możemy uważać za wypadkową dwu fal (p. wyżej) o amplitudach, równych odpowiednio  $s_0''$  i  $s_0' - s_0''$ . Składowa o amplitudzie  $s_0''$  wytworzy z falą, poruszającą się w kierunku przeciwnym, falę stojącą, na którą nakładać się będzie fala o amplitudzie  $s_0' - s_0''$ , przesuwaną się w kierunku tej fali, której jest składową. Podobnie, jak poprzednio, i tym razem będziemy mieli elementy objętości o największej i najmniejszej amplitudzie drgania, rozmieszczone w odległościach  $\frac{\lambda}{4}$  jeden od drugiego. Wartość amplitudy największej wynosić będzie  $s_0' + s_0''$ , najmniejszej  $s_0' - s_0''$ , tak że, ściśle biorąc, nie będzie w tym przypadku węzłów i strzałek takich, jak w fali stojącej. Cząstki drgające nie będą przechodziły jednocześnie przez położenie równowagi.

#### 7. SKŁADANIE DRGAŃ O NIEJEDNAKOWYM OKRESIE. — WZÓR FOURIERA.

Gdy fale, spotykające się w danym elemencie objętości, powodują drgania harmonijne proste, o częstości niejednakowej, drganie wypadkowe nie jest już na ogół drganiem harmonijnym prostym.

W przypadku np. dwu fal o okresach drgań, będących w stosunku wzajemnym takim, jak 2 : 1 (rys. 22), zależność odchylenia od czasu odtwarza, krzywa C, gdy różnica faz drgań

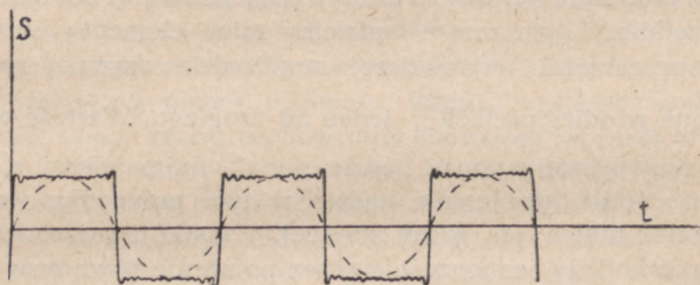


rys. 22



składowych równa jest zeru, i krzywa  $D$ , gdy różnica faz wynosi  $\frac{\pi}{4}$ . Żadna z tych krzywych nie jest sinusoidą. Wrażenie słuchowe, jakie otrzymujemy tym razem — o ile rzecz prosta, częstotści drgań leżą w granicach słyszenia — nazywamy dźwiękiem, w ściślejszym tego słowa znaczeniu, w odróżnieniu od tonu, wywołanego przez drgania harmonijne proste. Wrażenie to, jak wykazał Helmholtz, i jak to potwierdzili Cosens i Hartridge (1922 r.), nie zależy bynajmniej od różnicy faz tonów składowych, tak że drgania, odtworzone przez krzywe  $C$  i  $D$ , odpowiadają temu samemu dźwiękowi.

W miarę zwiększania się ilości drgań składowych, a więc ilości różnych fal, spotykających się w danym elemencie objętości, odchylenie wypadkowe może, pozostając jednak ciągle okresowym, jeszcze bardziej różnić się od drgania harmonijnego prostego. Tak np. krzywa rys. 23, odtwarzająca drganie,



rys. 23

złożone z piętnastu drgań składowych harmonijnych prostych, o tej samej fazie początkowej, o okresach zaś drgania i amplitudach, malejących w stosunku  $1 : 3 : 5 : 7 : 9 \dots$ , jedynie swoją okresowością przypomina sinusoidę.

Zaburzenie, będące wypadkową bardzo wielu drgań harmonijnych prostych o różnych amplitudach, często, jak to wykazał Stumpf (1926 r.), wywiera wrażenie nie dźwięku, lecz szmeru lub hałasu. Na ogół trudno dokładnie ustalić, jakie fizyczne cechy odróżniają dźwięk od szmeru lub hałasu, którego okresowość i barwa (p. niżej) w wielu przypadkach może być dokładnie wyznaczona. Według Weissa i Sołowskiiego (1920 r.) hałas cechuje zmienna okresowość i zmienna amplituda drgań.



Jeżeli spotykające się w danym elemencie objętości fale są falami płaskimi, rozchodzącymi się w tym samym kierunku, drgania wypadkowe wszystkich elementów środowiska są identyczne (por. ust. I). Wtedy wystarczy na wykresach rys. 22 i 23 zastąpić zmienną  $t$  przez  $x$  — odległość od pewnego wybranego przez nas dowolnie punktu — aby krzywe te odtwarzały dla danej chwili  $t$  odchylenie od położenia równowagi środków masy elementów, leżących na prostej, wyznaczającej kierunek rozchodzenia się fali.

Z rozważań tych wynika, że i odwrotnie, każdą okresową falę zaburzeń można uważać za wypadkową odpowiednio dobranych fal sinusoidalnych o różnych okresach drgania i amplitudach, stanowiących tzw. widmo danego zaburzenia. Ten wniosek udowodnił (1807 r. i 1822 r.) Fourier stwierdzając, że każdą dowolną funkcję argumentu  $t$ , zmieniającą się w sposób ciągły w granicach od  $t_1 = 0$  do  $t_2 = T$  i przybierającą okresowo, co  $T$  sek, wartość tę samą, można przedstawić wzorem

$$s = f(t) = s_0 + s_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + s_2 \sin(2\omega t - \varphi_2) + s_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + \dots \quad (23)$$

gdzie  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ; a  $s_0, s_1, s_2, \dots$  są współczynnikami stałymi; w szczególnych przypadkach niektóre z tych współczynników mogą być równe zeru.

Wielkość  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  jest zazwyczaj nazywana częstością kołową; jest to prędkość kątowna, z jaką obraca się wektor, łączący środek koła z punktem, poruszającym się po kole o promieniu  $s$  ruchem jednostajnym z prędkością  $\frac{2\pi s}{T}$  (tom I str. 49).

Każde więc okresowe odchylenie może być rozpatrywane, jako suma mniejszej lub większej ilości drgań harmonijnych prostych, o różnych na ogół amplitudach i o częstościach drgań, wzrastających w stosunku takim, jak stosunki liczb całkowitych 1 : 2 : 3 : 4 : 5 . . . Wrażenie dźwięku, wywołane przez takie drganie złożone, jest, zgodnie z tym, cośmy mówili wyżej, zależne jedynie od amplitud i częstości drgań tonów składowych, niezależne zaś całkowicie od różnicy ich faz. Ton skła-

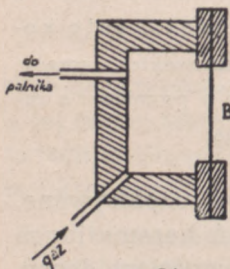


dowy o największym okresie drgania, równym okresowi drgania złożonego, nazywamy tonem zasadniczym, tony zaś o okresach mniejszych, a więc o częstościach większych — wyższymi harmonijnymi; one to warunkują tzw. barwę dźwięku, odróżniającą dźwięki o tej samej amplitudzie i tej samej częstości drgań tonu zasadniczego. Nazw tych, początkowo używanych jedynie w nauce o głosie, obecnie coraz częściej używamy i w tych przypadkach, gdy drgania leżą poza granicami słyszenia.

W przypadku fal głosowych często jednak ważniejszą jest rzeczą zbadanie nie odchyłeń od położenia równowagi, lecz wahań ciśnienia, spowodowanych przez rozchodzące się w środowisku fale odkształceń. Z twierdzenia Fouriera wynika, że te wahania złożone można również uważać za sumę wahań harmonijnych prostych, tak że mamy

$$p - F(t) = p_0 + p_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + p_2 \sin(2\omega t - \varphi_2) + p_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + \dots \quad (23a)$$

Do badań czy to drgania cząstek środowiska, czy też wahania ciśnienia w środowisku używa się tych samych metod, jakie służą do wyznaczenia natężenia akustycznego i o których była mowa wyżej w ust. 4. Podobnie więc, jak tam, przyrządy, służące do tego celu, można podzielić na takie, które odtwarzają wychylenia cząstek, i takie, które odtwarzają wahania ciśnienia. W częstszym użyciu są przyrządy tego drugiego typu, tak że mówiąc o obrazie dźwięku, mamy zazwyczaj na myśli obrazy, otrzymane przy pomocy przyrządów, odtwarzających zmiany ciśnienia.



rys. 24

W przyrządach tego typu zasadniczą częścią jest, podobnie jak w manometrze błonowym Wiena, napięta błona, którą zmienne ciśnienie akustyczne pobudza do drgań wymuszonych (p. rozdz. II, ust. 4). W manometrze Königa (1872 r.) drgania te powodują zmianę ciśnienia gazu, doprowadzanego do palnika (rys. 24), wobec czego płomień skraca się i wydłuża



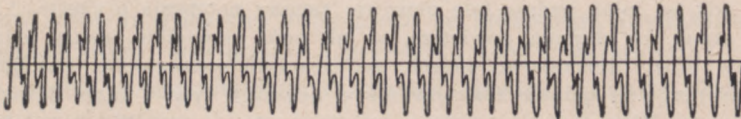
Gdy światło płomienia pada na wirujące zwierciadło, obrazy odbite, odpowiadające kolejnym stanom płomienia, układają się jeden za drugim w szereg taki, jak na rys. 25, stanowiącym obraz dźwięku, będącego sumą dwóch tonów o stosunku częstości, równym stosunkowi 1 : 2.



rys. 25

Nichols i Merrit ulepszyli (1898 r.) następnie przyrząd Königa i zastąpili subiektywną obserwację obrazów odbitych przez fotografowanie drgań płomienia. Marbe i Déguisne uprościli (1906 r. i lata późniejsze) jeszcze bardziej pomiar, przesuwając nad płomieniem wstęgę papieru, na której płomień przy każdym drgnięciu osadzał pierścieni sadzy; z wielkości tych pierścieni i ich odległości wzajemnej można wnioskować o rodzaju dźwięku.

Ta metoda jednak coraz bardziej ustępuje miejsca metodom, za których pierwowzór można uważać fonautograf Scotta (1859 r.) (gr. fonos — dźwięk, autos sam). W przyrządzie Scotta ostrze, przymocowane do błony, dotyka przy jej wychyleniu z położenia równowagi poczernionego walca, poruszającego się ruchem śrubowym w kierunku swej osi geometrycznej, i kreśli na nim linię odtwarzającą zmiany ciśnienia akustycznego. Tytułem przykładu podajemy tutaj krzywą, wykreśloną



rys. 26

sposobem analogicznym i odtwarzającą dźwięk złożony z tonów  $\nu$  i  $3\nu$  (rysunek ten bierzemy z „Handbuch der Physik“ Müller - Pouilleta).

Edison pokrył (1877 r.) obracający się walec cienką warstwą staliu, na której ostrze przymocowane do płytki mikrowej lub metalowej wyciskało zagłębienia, o głębokości zależnej od wychylenia płytki. Tego rodzaju fonografy były później wielokrotnie udoskonalane, przy czym mechaniczne sposoby zapisywania dźwięku zostały zastąpione przez elektryczne.



Do odtwarzania obrazu dźwięku mogą służyć po niewielkich i nieistotnych zmianach wszystkie prawie przyrządy, których się używa do wyznaczania wielkości akustycznych i o jakich była mowa w ust. 4. I w tym przypadku przewaga jest po stronie przyrządów, wyznaczających ciśnienie.

Do odtworzenia wychylenia służyć może strunowy fonograf Einthovena i Hooggerwerfa (1924 r.), w którym fale głosowe wprawiają w drganie wymuszone nitkę kwarcową, napiętą między dwoma mikroskopami. Otrzymana przy ich pomocy fotografia różnych położzeń drgającej nitki pozwala odtworzyć obraz ruchu cząstek powietrza, w tych tylko jednak granicach częstości, w jakich zachodzi stałość stosunku między amplitudami drgań powietrza i struny; drgania składowe, o częstości wyższej lub niższej od tych granic, zależnych od długości, napięcia i masy nitki, są odtwarzane na mikro-fotografii na ogół w skalach różnych, co, rzecz prosta, znacznie ogranicza zakres stosowania tego przyrządu.

Do tego samego typu należy, jak można wnioskować na podstawie badań E. Meyera (1929 r.), katodofon zbudowany przez Massolle'a, Vogta i Engla (1924 r. i lata późniejsze). Przyrząd ten, którego działania nie jest jeszcze dostatecznie wyjaśnione, składa się z zaostromej katody, pokrytej tlenkiem jakiejś ziemi alkalicznej i ogrzewanej prądem elektrycznym; katoda ta umieszczona jest naprzeciwko anody, stanowiącej podziurkowane dno lejka. Anoda i katoda włączone są do obwodu elektrycznego o stałej sile elektrobodźczej. Zjonizowanie powietrza między anodą i katodą, spowodowane przez ogrzewanie katody, umożliwia przepływ prądu elektrycznego, o mniej więcej stałym natężeniu. Natężenie ulega zmianie, gdy na lejek padają fale głosowe; zmiany natężenia o częstości tej samej, co drgania powietrza, są na ogół niewielkie, mogą jednak w prosty stosunkowo sposób być znacznie wzmocnione. Katodofon znalazł swe główne zastosowanie w pewnych typach filmu dźwiękowego. Wzmocnione zmiany natężenia prądu w obwodzie katodofonu powodują drgania natężenia światła w odpowiednio zbudowanej lampie, te zaś drgania z kolei ujawniają się w słabszym lub silniejszym zaczernieniu obrazu wąskiej szczeliny, przez którą światło lampy pada na przesuwaną przed nią błonę fotograficzną. Jeżeli teraz między oświetloną szczeliną i komórką fotoelektryczną przesuwac się będzie zaczernioną w ten sposób błonę, zmiany natężenia przechodzącego przez błonę światła spowodują zmiany natężenia prądu elektrycznego w obwodzie komórki, te zaś znów po odpowiednim wzmocnieniu wywołają drgania płytki sprężystej i w ten sposób z powrotem wzbudzą w powietrzu te drgania akustyczne, jakie wywołało zaczernienie błony.

Ta „odwracalność”, pozwalająca wzbudzić z powrotem drgania środowiska, których obraz otrzymany został przy pomocy danego

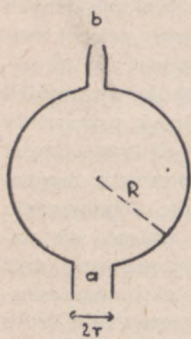


przyrządu, że jest właściwa większości omawianych tutaj i w ust. 4 przyrządów. Najdawniej znanym przyrządem tego rodzaju jest gramofon, stanowiący jak gdyby odwrócenie fonografu. Ostrze, umocowane na sprężystej płytce lub błonie, poruszając się po wyżłobieniach walca lub tarczy „nagranej” tzn. poddanej poprzednio działaniu danych fal głosowych, wprawia płytkę lub błonę w drgania mniej więcej analogiczne do tych, jakie wytworzyły odkształcenia walca czy tarczy. Ważne ulepszenie do tej metody odtwarzania dźwięków wprowadził Poulson (1900 r.). Prądy mikrofonu (p. ust. 4) przepływają przez mały elektromagnes, przed którym przesuwają się długi drut stalowy. Części drutu, znajdujące się w danej chwili przed elektromagnesem, magnetyzują się tym silniej, im większe jest natężenie prądu. Odpowiednio więc do zmian natężenia prądu w elektromagnecie zmienia się namagnesowanie części drutu. Jeżeli teraz tak namagnesowany drut przesuwać będziemy z tą samą prędkością przed elektromagnesem, włączonym w obwód telefonu, niejednostajne namagnesowanie drutu powodować będzie powstawanie prądów indukowanych o natężeniu, zależnym od namagnesowania danej części drutu, i wzbudzać odpowiednio drgania płytki telefonu.

Tony składowe danego dźwięku, o ile, rzecz prosta, częstota drgań nie przekracza granic słyszenia, można przynajmniej częściowo wyznaczać bezpośrednio uchem. Istotnie, jak to pierwszy stwierdził Ohm, a następnie potwierdził Helmholtz, każdy złożony ruch okresowy cząstek środowiska, działający na ucho, jest przez nie rozkładany na drgania harmonijne proste, wywołujące, jak o tym wyżej była mowa, wrażenie tonu. W ten sposób wprawne ucho może ze złożonego dźwięku wyodrębnić kilka lub nawet kilkanaście tonów składowych. Na tej drodze przeprowadzona analiza dźwięku często jednak okazuje się niewystarczająca, a mianowicie wtedy, gdy ilość tonów składowych jest znaczna, oraz gdy chodzi nam o wyznaczenie ich natężeń. Jak bowiem wykazują pomiary, odczuwane przez nas natężenie tonu, wchodzącego w skład dźwięku, jest zawsze mniejsze od natężenia tego samego tonu (o tym samym, obiektywnie biorąc, natężeniu), który słyszymy oddzielnie. Najczęściej przeto do analizy dźwięków służą tzw. rezonatory, tj. ciała, których drgania wtedy tylko przybierają znaczną wartość, gdy pobudzająca je fala posiada oznaczoną częstotliwość, zależną od rozmiarów, kształtu i materiału rezonatora (p. rozdz. II ust. 4). Rozporządzając odpowiednio dobranym układem takich rezonatorów, można obserwując na



nich działanie danego dźwięku stwierdzić, które z nich w tych warunkach drgają, i stąd wyznaczyć tony składowe. Jest rzeczą oczywistą, że tego rodzaju metoda może być przy niewielkich zmianach w budowie przyrządu używana i przy badaniu dźwięków w szerszym tego słowa znaczeniu tzn. znajdujących się poza granicą słyszenia. W badaniach głosowych często stosowany jest powietrzny rezonator Helmholtza, gdzie ciałem drgającym jest powietrze zawarte w kuli zapatrzonej w dwa otwory: mniejszy (b), który przystawia się do ucha, i większy (a), na drugim końcu tej samej średnicy, przez który powietrze rezonatora łączy się z zewnętrznym środowiskiem drgającym (rys. 27).



rys. 27

Częstość tzw. drgań własnych rezonatora (p. rozdz. II ust. 4) jest, według Helmholtza, równa

$$\nu = c \sqrt{\frac{3r}{8\pi^2 R^3}}, \quad (24)$$

gdzie  $R$  — promień kuli,  $r$  — promień otworu (a).

Zanalizować dźwięk, innymi słowy, znaleźć jego widmo, można również na podstawie krzywej, będącej jego obrazem (p. wyżej). Metod jednak, których się w tym celu używa, rozpatrywać tutaj nie będziemy.

#### 8. — DUDNIENIA.

Rozpatrzmy nieco bardziej szczegółowo przypadek interferencji dwu drgań harmonijnych prostych, o mało różniących się częstościach. Przypuśćmy np. że drgania te posiadają amplitudy jednakowe, częstości zaś równe odpowiednio 499 i 500 drganiom na sekundę. Przypuśćmy dalej, że w pewnej chwili  $t$ , którą przyjmujemy za początkową, drgania interferujące posiadają w danym elemencie środowiska tę samą fazę, odchylenia zaś przez nie wywołane wartość największą. Amplituda drgania wypadkowego będzie wtedy jak wiemy, (ust. 5), po prostu sumą arytmetyczną amplitud składowych. Ta zgodność faz drgań składowych nie będzie jednak stała, drgania bowiem posiadają,



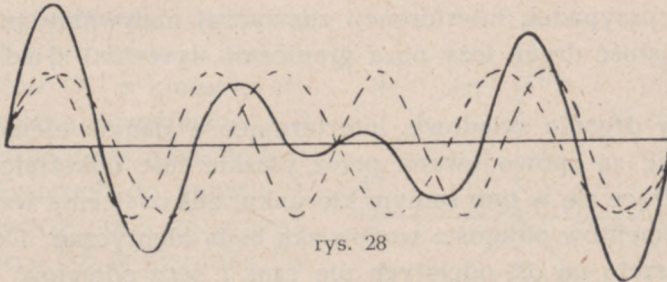
w myśl założenia, częstotści różne. Różnica faz będzie stopniowo wzrastała, tak że po upływie 0,5 sek drgania będą w fazach przeciwnych. Istotnie faza drgania o okresie 500 drgań na sekundę różnić się będzie w chwili  $t + \frac{1}{2}$  od fazy w chwili  $t$  o

$$\varphi_1 = \frac{2\pi(t + \frac{1}{2})}{T} - \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{500}} = 500\pi,$$

faza zaś drgania o okresie 499 drgań na sekundę o

$$\varphi_2 = 499\pi,$$

$\varphi_1 - \varphi_2$  jest zatem wtedy równe  $\pi$ . Po upływie więc 0,5 sek amplituda drgania wypadkowego spadnie w przypadku równości amplitud drgań składowych do wartości zera. Fazy staną się znów zgodzie po upływie 1 sek, wtedy bowiem  $\varphi_1 - \varphi_2$  będzie równe  $2\pi$ . W ciągu 1 sek amplituda drgania wypadkowego zmieniać się będzie od wartości  $2s_0$ , gdzie  $s_0$  amplituda drgań składowych, do wartości zero, przechodząc przez maximum i minimum raz na sekundę (maximum początkowego nie bierzemy pod uwagę).



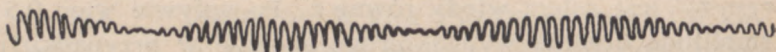
Gdyby częstotści drgań składowych były równe odpowiednio 500 i 498, amplituda drgania wypadkowego przechodziłaby, jak to łatwo można sprawdzić, przez maximum i minimum dwa razy na sekundę. Oznaczając więc przez  $\nu_1$  i  $\nu_2$  częstotści drgań składowych, na częstotść zmian amplitudy drgania wypadkowego otrzymujemy wzór

$$\nu = \nu_1 - \nu_2. \quad (25)$$

Tak np. w przypadku, gdy  $\nu_1 = 400$ ,  $\nu_2 = 300$ ,  $\nu = 100$ ; odchylenie wypadkowe przechodzi okresowo przez wartości, utworzone na krzywej rys. 28.



Krzywą, odtwarzającą tego rodzaju drgania wypadkowe, można otrzymać w prosty sposób, biorąc dwa kamertony (widełki strojowe), o niewiele różniących się częstościach drgań. Do pręta jednego z nich, drgającego w płaszczyźnie poziomej, przymocowana jest zaczerniona płytka szklana. Nad nią umieszczony jest również poziomo drugi kamerton, zaopatrzony w ostrze, dotykające płytki. Wprawiamy oba kamertony w drgania i przesuwamy powoli górny kamerton równoległe do płytki. Przy stosunku częstości 24:25 otrzymujemy krzywą taką, jak na rys. 29, którą podajemy za Chwolsonem. Należy jednak zaznaczyć, że w tym przypadku największe wychylenia krzywej otrzymujemy wtedy, gdy fazy prętów kamertonu są przeciwne.



rys. 29

Tym wahaniom wypadkowej amplitudy towarzyszą wahania natężenia, powodujące w przypadku, gdy częstości drgań nie przekraczają granicy słyszenia, wrażenie dudnienia, znikające stopniowo w miarę wzrostu  $\nu$  (gdy  $\nu$ , jak to wynika z niepewnych zresztą pomiarów, jest większe od 400). Stąd też ten przypadek interferencji zazwyczaj nazywamy (nawet gdy częstość drgań leży poza granicami słyszenia) dudnieniem.

Gdy drgania składowe, interferujące w danym elemencie objętości, są spowodowane przez płaskie fale odkształcenia, rozchodzące się w tym samym kierunku, odkształcenia wszystkich elementów objętości środowiska będą identyczne. Odkładając przeto na osi odciętych nie czas  $t$ , lecz odległość  $x$  od pewnej, dowolnie zresztą wybranej płaszczyzny, prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fal, na osi rzędnych odpowiednie odchylenia warstw odkształcanych w chwili  $t = t_1$ , otrzymamy w przypadkach interferowania fal o częstości 400 i 300 drgań na sekundę krzywą identyczną do krzywej rys. 28. W środowisku, w którym, jakśmy to założyli, prędkość rozchodzenia się zaburzeń nie zależy od częstości drgań, zaburzenia o największej i najmniejszej amplitudzie będą się przesuwały z tą samą prędkością  $c$ , co każde z zaburzeń składowych, po upływie zatem  $t$  sek przesuną się na odległość  $c \cdot t$ .



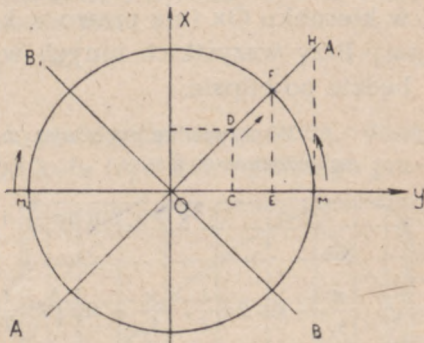
## 9. — SKŁADANIE DRGAŃ, ZACHODZĄCYCH W KIERUNKACH PROSTOPADŁYCH.

W przypadku, gdy kierunki drgań składowych harmonijnych prostych nie leżą na tej samej prostej, zjawisko interferencji nie zachodzi: jakkolwiek byłaby różnica amplitud i faz drgań składowych, odchylenie wypadkowe nigdy nie będzie miało wartości zero.

W najprostszym przypadku dwu drgań o tej samej amplitudzie i tej samej częstotliwości drgania, zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych, ruch wypadkowy będzie ruchem po kole, gdy różnica faz drgań składowych wynosić będzie  $\frac{\pi}{2}$  lub  $\frac{3}{2}\pi$ , albo ruchem wzdłuż prostych, tworzących kąt  $45^\circ$  z kierunkami drgań  $x$  i  $y$ , gdy różnica faz równa jest zeru lub  $\pi$ . Istotnie, ze wzorów

$$x = s_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{i} \quad y = s_0 \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right),$$

gdzie  $\varphi$  jest różnicą faz drgań składowych, wynika, że gdy  $\varphi$  równe jest zeru, punkt drgający po przejściu przez położenie równowagi przesunie się w ciągu czasu  $t$  sek na odległość  $OC$  w kierunku  $Oy$  i na równą jej odległość  $CD$  w kierunku  $Ox$ , przechodząc w ten sposób do punktu  $D$ ; po upływie zaś  $2t$  sek przesunie się o  $OE$  w kierunku  $Oy$  i  $EF$  w kierunku  $Ox$  i dojdzie do punktu  $F$ . Z podobieństwa trójkątów  $OCD$  i  $OEF$  wynika, że punkty  $O$ ,  $D$  i  $F$  leżą na prostej  $OA$  tworzącej z osią  $y$  kąt  $\alpha$ , którego styczna równa jest  $DC : OC = FE : OE = 1$ , a więc który równy jest  $45^\circ$ . Punkt drgający przesuwać się będzie zatem wzdłuż prostej  $AA_1$ ; odległość jego od położenia równowagi będzie w chwili  $t$  równa



rys. 30

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = s_0 \sqrt{2} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$



Ruch punktu będzie więc ruchem drgającym harmonijnym prostym, o tej samej częstotliwości drgań, co częstotliwości drgań składowych, i o amplitudzie  $\sqrt{2} = 1,41$  razy większej.

Gdy  $\varphi$  wzrośnie do  $\frac{\pi}{2}$ , w chwili  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = OM$ . Będziemy mieli do czynienia z przypadkiem, rozpatrzonym już w tomie I na str. 53. Ruch wypadkowy będzie okresowym ruchem kołowym, o okresie równym okresowi drgań składowych; kierunek ruchu będzie przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara. Gdy  $\varphi$  stanie się równe  $\pi$ , punkt drgający w chwili  $t = 0$  będzie podobnie, jak w przypadku pierwszym, przechodził przez położenie równowagi, przesuując się jednak tym razem w kierunku ujemnych  $y$ -ów. Drgania punktu zachodzą wzdłuż prostej  $BB_1$  z tą samą, co poprzednio, amplitudą i z tą samą, co poprzednio, częstotliwością. I wreszcie, gdy  $\varphi$  stanie się równe  $\frac{3}{2}\pi$ , otrzymamy znów ruch po kole o promieniu równym  $s_0$ , lecz o kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, w chwili bowiem  $t = 0$  punkt znajdować się będzie w położeniu  $M_1$  i stąd będzie się przesuwał ku górze w kierunku  $Ox$  i na prawo w kierunku  $Oy$ .

Przy wszystkich innych wartościach  $\varphi$  punkt poruszać się będzie po elipsie.

W przypadku ogólniejszym, gdy amplitudy drgań składowych nie są jednakowe, mamy

$$x = s_x \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{i} \quad y = s_y \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right)$$

lub

$$\frac{x}{s_x} = \sin 2\pi \frac{t}{T}; \quad \frac{y}{s_y} = \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right) = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \varphi + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin \varphi.$$

Rugując z tych równań  $\sin \frac{2\pi t}{T}$  i  $\cos \frac{2\pi t}{T}$ , otrzymujemy

$$\frac{x^2}{s_x^2} \cos^2 \varphi + \frac{y^2}{s_y^2} - \frac{2xy}{s_x \cdot s_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{s_x^2} \sin^2 \varphi,$$

skąd po uproszczeniu mamy

$$\frac{x^2}{s_x^2} + \frac{y^2}{s_y^2} - \frac{2xy}{s_x \cdot s_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (26)$$



Jest to równanie elipsy, której środek znajduje się w punkcie  $O$ , przyczem wobec tego, że największą wartością  $x$  może być  $s_x$ , największą wartością  $y$  —  $s_y$ , elipsa ta jest wpisana do prostokąta o bokach równych odpowiednio  $s_x$  i  $s_y$ . Gdy  $\varphi = 0$  lub  $\pi$ , równanie to przybiera kształt

$$\left(\frac{x}{s_x} \mp \frac{y}{s_y}\right)^2 = 0,$$

gdzie znak  $-$  odpowiada  $\varphi = 0$ , znak  $+$  odpowiada  $\varphi = \pi$ . W pierwszym przypadku mamy

$$x = \frac{s_x}{s_y} y, \quad (26a)$$

równanie prostej leżącej w ćwierci koła, zawartej między dodatnimi kierunkami osi  $Ox$  i  $Oy$ , w drugim

$$x = -\frac{s_x}{s_y} y, \quad (26b)$$

równanie prostej, leżącej w ćwierci koła, zawartej między dodatnim kierunkiem osi  $Ox$  i ujemnym osi  $Oy$ .

Gdy  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  lub  $\frac{3}{2}\pi$ , mamy

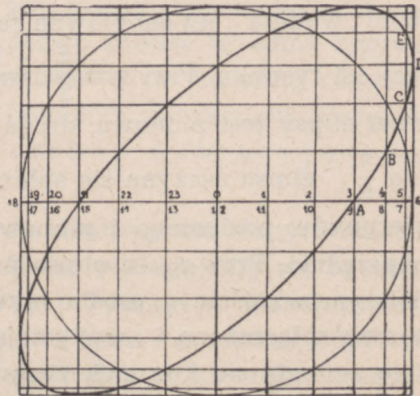
$$\frac{x^2}{s_x^2} + \frac{y^2}{s_y^2} = 1, \quad (26c)$$

równanie elipsy, której osie są osiami  $Ox$  i  $Oy$ . Gdy  $s_x = s_y = s_0$ , równanie to przechodzi w równanie koła

$$x^2 + y^2 = s_0^2 \quad (26d)$$

o promieniu równym  $s_0$ .

Tory te możemy wykreślić, posługując się metodą, daną przez Lissajous (1857 r.). Obwód koła (rys. 31), opisanego promieniem równym amplitudzie  $s_0$ , dzielimy na pewną ilość równych części, tym większą, im dokładniej chcemy wykonać nasz rysunek i im mniejsza jest różnica faz drgań składowych; na naszym rysunku obwód podzielony jest na dwadzieścia cztery części. Przez otrzymane w ten sposób punkty podziału prowadzimy pionowe



rys. 31



i poziome linie, równoległe do pionowej i poziomej średnicy koła. Przecięcia tych prostych ze średnicami wyznaczają nam położenia, jakie punkt drgający wzdłuż danej średnicy zajmowałby po upływie  $0, \frac{1}{24}T, \frac{2}{24}T \dots$  od chwili rozpoczęcia ruchu. Przypuśćmy np. że drganie w kierunku poziomym wyprzedza drganie w kierunku pionowym, tak że w chwili  $t = 0$ , położenie punktu drgającego wyznacza np. punkt  $A$ , innymi słowy, że jedno z drgań wyprzedza drugie o  $\frac{1}{8}T$  lub że różnica faz wynosi  $\frac{\pi}{4}$ . Po upływie  $\frac{1}{24}T$  punkt drgający przesunie się o jedną podziałkę ku górze i o jedną podziałkę w prawo, zajmie więc położenie  $B$ ; po upływie  $\frac{2}{24}T$  przesuwając się w ten sam sposób znajdzie się w  $C$ , po upływie zaś  $\frac{3}{24}T$  w  $D$ , osiągając największe możliwe wychylenie w kierunku poziomym; w następną zatem  $\frac{1}{24}$  część okresu odchylenie jego poziome zmniejszy się o jedną podziałkę, odchylenie zaś pionowe o jedną podziałkę wzrośnie: punkt drgający przejdzie do  $E$ . W ten sposób znajdując kolejne położenia punktu i łącząc je następnie linią krzywą, wykreślimy tor punktu, który, jak o tym wyżej była mowa, będzie elipsą.

W miarę wzrastania różnicy faz elipsa staje się coraz bardziej „wydęta“, jej osi główne zbliżają się do pionowej i poziomej osi rysunku. Przy  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  „wydęcie“ jest największe, jedna z osi elipsy jest pionowa, druga — pozioma. Gdy  $\varphi$  przekracza  $\frac{\pi}{2}$ , elipsa zaczyna się spłaszczać, osi jej odchylają się od kierunków poziomego i pionowego w przeciwną stronę, niż poprzednio. Przy  $\varphi = \pi$  elipsa przechodzi w linię prostą. Przy dalszym wzroście  $\varphi$  prosta przechodzi w elipsę, początkowo bardzo spłaszczoną i „wydymającą się“ stopniowo. Jednocześnie zmienia się kierunek ruchu punktu drgającego. Dopóki  $\varphi \leq \pi$  punkt porusza się po elipsie w kierunku przeciwnym

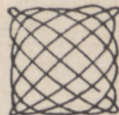


kierunkowi ruchu wskazówek zegarka (elipsa prawa), gdy  $\varphi \geq \pi$ , w kierunku zgodnym z kierunkiem tego ruchu (elipsa lewa).

Gdy częstości drgań składowych nie są jednakowe, zjawisko staje się o wiele bardziej złożone. Tak np. w przypadku, gdy częstości drgań (o równych amplitudach) są w stosunku

takim jak 5:6, tor punktu drgającego (przy różnicy faz  $\frac{\pi}{2}$ )

przedstawia krzywa rys. 32. Systematyczne badania tego rodzaju drgań złożonych przeprowadził Lissajous (1855 i 1857 r.), stąd też nazwa krzywych lub figur Lissajous, jaką zazwyczaj oznaczamy otrzymane w ten sposób krzywe.



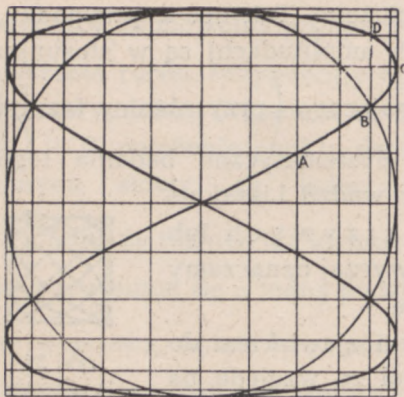
rys. 32

Lissajous posługiwał się tym zjawiskiem do badania drgań strun, co na ogół ze względu na wielką szybkość ich ruchu nastęcza duże trudności doświadczalne. Badana struna, napięta pionowo, była obserwowana przez poziomy mikroskop, przymocowany do jednego z prętów również poziomego kamertonu, który mógł drgać w płaszczyźnie pionowej. Gdy kamerton jest w spoczynku, obraz w mikroskopie oświetlonej silnie części drgającej struny opisuje linię poziomą; gdy struna jest w spoczynku, a drga kamerton i wraz z nim mikroskop, obraz oświetlonej części struny opisuje linię pionową; gdy wreszcie drga i struna i kamerton, obraz opisuje jedną z krzywych Lissajous. Gdy stosunek częstości drgań jest równy stosunkowi liczb całkowitych, obraz opisuje okresowo zawsze tę samą krzywą, z której kształtu możemy wnioskować o stosunku częstości drgań kamertonu i struny. Helmholtz udoskonalił następnie (1863 r.) ten tak zwany mikroskop wibracyjny (łac. vibrare — drgać).

Przy wykreślaniu krzywych Lissajous dla różnych stosunków częstości drgań i różnych faz posługujemy się tą samą metodą, o jakiej była mowa wyżej. Tym razem jednak przesunięciem o  $n$  podziałek w kierunku jednej ze średnic odpowiadać będzie przesunięcie o  $m$  podziałek w kierunku średnicy drugiej, zależnie od stosunku częstości drgań. Tak np. w przy-



padku, gdy  $n : m = 1 : 2$ , różnica zaś faz równa jest zeru, punkt drgający znajdzie się po upływie  $\frac{1}{16} T$ , gdzie  $T$  okres drgania

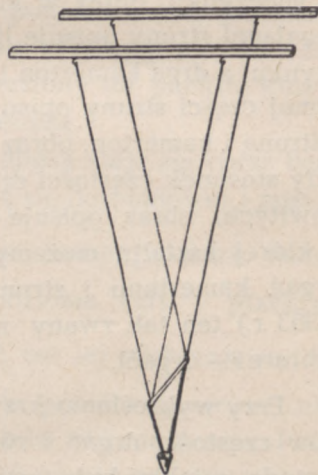


rys. 33

o mniejszej częstości, w punkcie A (rys. 33), odchylając się w kierunku poziomym o dwie podziałki, w kierunku pionowym o 1 podziałkę, po upływie następnych  $\frac{1}{16} T$  — w punkcie B, dalej w punkcie C i D opisując w ten sposób krzywą, taką, jak na rysunku.

Prosty sposób otrzymywania krzywych Lissajous dał Abendroth. Poziomy drążek wisi na

dwóch parach sznurków, przechodzących przez wycięte w drążku wąskie otwory (rys. 34). Drążek ten można przesuwając wyżej lub niżej, zwiększając lub zmniejszając w ten sposób długość znajdujących się nad nim sznurków. Na dolnych końcach sznurków wisi lejek, wypełniony piaskiem. Górna część przyrządu może wahać się swobodnie w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez drążek, przy czym okres jej wahań wyznaczony jest przez pionową odległość drążka od punktów zawieszenia sznurków. Dolna część przyrządu może, niezależnie zupełnie od górnej, wahać się w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wahań części górnej, okres jej wahań jest wyznaczony przez pionową odległość lejka od drążka. Gdy wprawimy w ruch wahadłowy górną i dolną część przyrządu, koniec lejka wykonywać będzie wahań złożone; tor jego ruchu narysują wysypujący się z niego piasek. Krzywą, otrzymaną w ten sposób, przy stosunku pionowych odle-



rys. 34

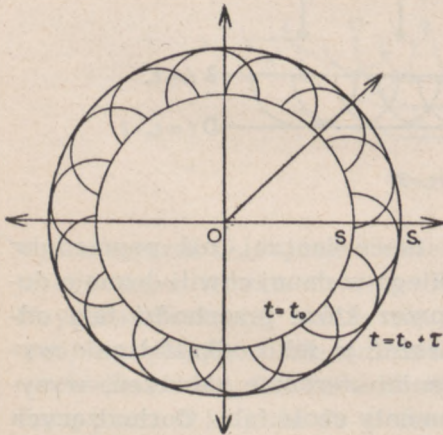


głości drążka i lejka od odpowiednich punktów zawieszenia równym  $16:9$  i przy różnicy faz  $\frac{\pi}{6}$ , wyobraża krzywa rysunku 35.

10. — ZASADA HUYGENSA-FRESNELA.

Z dotychczasowych naszych rozważań, dotyczących rozchodzenia się fal odkształcenia wynika, że element objętości  $A$  środowiska, do którego w danej chwili odkształcenie dochodzi, przekazuje je w chwili następnej elementom sąsiednim, leżącym w kierunku rozchodzenia się fali, tak że dla tych części środowiska element  $A$  staje się jak gdyby samodzielnym źródłem zaburzeń. To rozumowanie, dotyczące, rzecz prosta, wszystkich elemen-

tów objętości, przez które w danej chwili przechodzi fala odkształcenia i których miejscem geometrycznym jest czoło fali (p. ust. 1), jest punktem wyjścia twierdzenia, sformułowanego



rys. 36



rys. 35

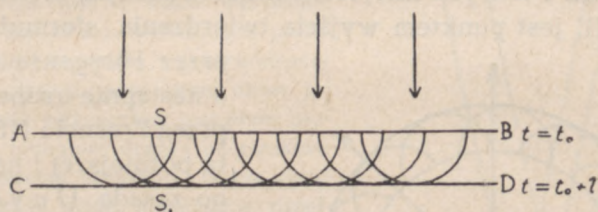
przez Huygensa (1690 r.), a następnie uzupełnionego przez Fresnela (1816 r. i lata późniejsze) i nazywanego zasadą Huygensa-Fresnela.

Przypuśćmy, że źródłem zaburzeń jest kula lub punkt materialny, wobec czego czoło fali tworzy w chwili  $t_0$  powierzchnię kulistą (rys. 36). Każdy z punktów tej powierzchni możemy, zgod-



- nie z założeniem Huygensa, uważać za samodzielne źródło zaburzeń, różniące się jednak od źródła istotnie tym, że zaburzenia, przezeń wysyłane, rozchodzą się tylko w kierunku pierwotnego rozchodzenia się fali, że więc, zgodnie z resztą z istotnie obserwowanym przebiegiem zjawiska, fala powrotna nie istnieje. W ciągu więc czasu  $\tau$  zaburzenia wysyłane przez każdy z elementów  $S$ , dojdą do punktów, leżących na powierzchniach półkul, opisanych ze środka tych elementów, promieniem  $r = c \cdot \tau$ . Te tak zwane fale cząstkowe będą w punktach, leżących wewnątrz warstwy  $SS_1$ , w chwili  $t = t_0 + \tau$  interferowały. Tym razem interferencji będą, ściśle biorąc, podlegały zgęszczenia i rozrzedzenia środowiska.

W wyniku interferencji odkształcenia w warstwie będą, według Fresnela, w danej chwili równe zeru, tak że wartość od zera różną zachowają jedynie w punktach powierzchni  $S_1$ , stycznej do powierzchni fal cząstkowych, gdyż w tych punktach fale cząstkowe się nie spotykają. Po upływie zatem  $\tau$  sek czoło fali przesunie się istotnie o  $c \cdot \tau$  cm. Podobnie rozchodzić się będzie fala płaska; w tym przypadku powierzchnią styczną do powierzchni fal cząstkowych (obwiednią tych fal) będzie płaszczyzna (rys. 37). Opierając się na zasadzie



rys. 37

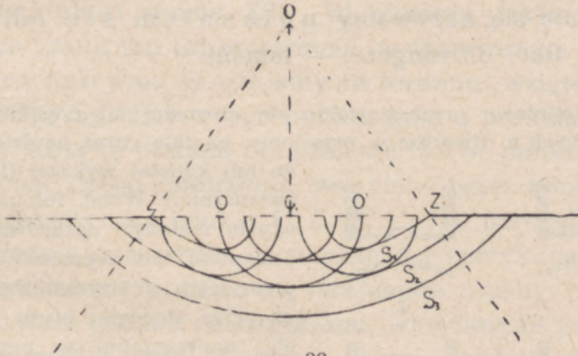
Huygensa-Fresnela, możemy, nieco inaczej, niż poprzednio, rozpatrywać odkształcenie, jakiego w danej chwili doznaje dowolny element środowiska, przez które przechodzi fala odkształcenia, a mianowicie, uważać je jako odkształcenie wypadkowe, spowodowane przez interferencję zaburzeń, wysyłanych przez poszczególne elementy czoła fali i dochodzących jednocześnie do rozważanego elementu.



Poprzestajemy tutaj na tym prostym i bardzo zresztą niewystarczającym wyprowadzeniu zasady Huygensa-Fresnela, która przy głębszej analizie nasuwa niejedną trudność. Do nieco bardziej szczegółowego rozpatrzenia tej zasady i wynikających z niej wniosków powrócimy przy omawianiu zjawisk świetlnych.

#### 11. — UGINANIE SIĘ FAL SPRĘŻYSTYCH.

Ten sposób pojmowania rozchodzenia się fal sprężystych pozwoli nam zdać sobie sprawę ze zjawisk, zachodzących wtedy, gdy rozchodzenie się fal napotyka w pewnym miejscu na przeszkodę, zakłócającą dalszy bieg fali. Niech przeszkodą tą będzie np. zaopatrzona w otwór przesłona nieprzezroczysta, tzn. taka, która nie przenosi dochodzących do niej zaburzeń do warstw leżących poza nią. Zaburzenia powstające w środowisku będą wtedy przenoszone do tej jego części, która znajduje się poza przesłoną, jedynie przez otwór w przesłonie. Niech  $O$  będzie punktowym (lub kulistym) źródłem zaburzeń, znajdującym się w jednakowej odległości od obu brzegów przesłony  $ZZ$  (rys. 38). W pewnej chwili  $t$  zaburzenie



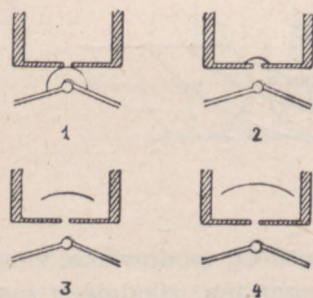
rys. 38

wysłane przez  $O$ , dojdzie do elementu  $O_1$  środowiska, znajdującego się w środku otworu. Element ten, zgodnie z zasadą Huygensa-Fresnela, stanie się samodzielnym źródłem zaburzeń, wysyłającym fale odkształceń w kierunku pierwotnego rozchodzenia się, tak że w chwili  $t + t_1$ , gdy zaburzenie wysłane przez  $O$  dojdzie do elementów  $O'$  i elementy te ze swej strony staną się nowymi źródłami zaburzeń, zaburzenie, wycho-



dzące z  $O_1$  zdąży dojść do elementów, znajdujących się poza płaszczyzną  $ZZ$  i leżących na powierzchni półkuli, opisanych z  $O_1$ , jak ze środka, promieniem równym  $c\tau_1$ . Podobnie w chwili  $t + \tau_1 + \tau_2$ , gdy zaburzenia wychodzące z  $O$  dojdą do skrajnych punktów otworu  $ZZ$ , fale cząstkowe, wysłane przez  $O_1$  i  $O'$ , będą tworzyły półkule o promieniach, równych odpowiednio  $c(\tau_1 + \tau_2)$  i  $c\tau_2$ . Odległości wszystkich punktów obwiedni tych fal od punktu  $O$  będą jednakowe i równe  $c(t + \tau_1 + \tau_2)$ ; fala zatem przechodząca przez otwór będzie częścią fali kulistej, wychodzącej z punktu  $O$ . Z biegiem czasu promienie fal cząstkowych będą stopniowo wzrastały, obwiednia ich będzie się odsuwała od otworu, przyjmując położenie  $S_2, S_3 \dots$ . Fala odkształcenia będzie dochodziła do coraz to dalej położonych za przesłoną elementów środowiska, ogarniając swoim działaniem nawet te elementy, które leżą poza granicami stożka  $ZOZ$ , a więc do których zaburzenie, wysyłane przez źródło, nie mogłoby dojść, gdyby, tak jak to przyjmowaliśmy uprzednio, rozchodziło się wzdłuż linii prostych, wychodzących promienisto ze źródła zaburzeń. To odstępstwo od prostoliniowego rozchodzenia się nazywamy uginaniem się fali lub dyfrakcją (łac. *diffrangere* — łamać).

Stopniowe przekształcanie się obwiedni fal cząstkowych, wychodzących z otworów w przesłonie, na falę coraz bardziej zbliżoną



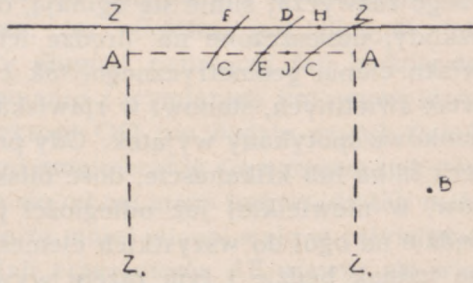
rys. 39

do fali kulistej wykazał (1899 r.) doświadczalnie Wood, fotografując przy użyciu metody, opracowanej przez Toeplera, falę zgęszczenia wysyłaną przez iskrę elektryczną i przechodzącą przez niewielki otwór w przesłonie, umieszczonej w pewnej odległości od iskiernika. Rys. 39, będące schematycznym odtworzeniem fotografii Wooda, wykazują dostatecznie wyraźnie zachodzące w tym przypadku zjawisko.

Uginanie to jest tym wyraźniejsze, im większa jest długość fali danego odkształcenia. Załóżmy dla uproszczenia, że fala odkształceń jest nie tylko falą płaską, lecz że w dodatku



odkształcenia rozchodzą się w jednej tylko płaszczyźnie, przechodzącej przez źródło zaburzeń. Powierzchnia falowa staje się wtedy linią falową. Jest to niewątpliwie przypadek fikcyjny, którego odpowiednik możemy jednak z pewnym przybliżeniem znaleźć w zjawiskach rzeczywistych, np. wtedy, gdy fale rozchodzą się po powierzchni wody. Przypuśćmy, że w danej chwili czoło fali zgęszczenia doszło do punktów otworu ZZ, wyprzedzające je zaś o  $\frac{\lambda}{2}$  czoło



rys. 40

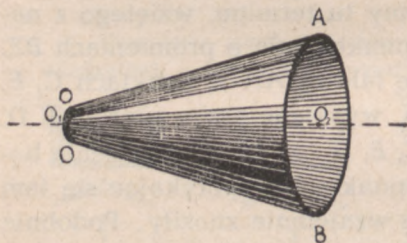
fali rozrzedzenia zajęło położenie AA poza otworem. W tym przypadku prawo prostoliniowego rozchodzenia się zaburzeń wymagałoby, aby zaburzenie dochodziło tylko do punktów, zawartych w przestrzeni, ograniczonej przez proste ZZ<sub>1</sub>. Wybierzmy jakiś punkt B, leżący poza granicami tej przestrzeni, w tak zwanym cieniu geometrycznym, że użyjemy tu terminu, wziętego z nauki o świetle. Opiszmy z tego punktu koła o promieniach BZ, BD, BF . . . Koła te przetną linię falową AA w punktach C, E, G . . . , wobec czego zaburzenia, wysyłane przez punkty Z, D, F . . . fali zgęszczenia i punkty C, E, G . . . fali rozrzedzenia będą jednocześnie dochodziły do punktu B i spotykając się tam w fazach przeciwnych, będą się wzajemnie znosiły. Podobnie rzecz się będzie miała z zaburzeniami, wysyłanymi przez punkty, leżące między tymi punktami, zawsze bowiem dla jakiegokolwiek punktu H fali zgęszczenia będziemy mogli znaleźć punkt J fali rozrzedzenia, znajdujący się w tej samej, co H, odległości od B. Nie ulegną zniesieniu jedynie zaburzenia, wysyłane przez część CA fali; odkształcenie wypadkowe w punkcie B będzie tym większe, im większa będzie część CA. Jak łatwo się o tym przekonać, będzie ona wzrastała wraz z długością fali i razem z nią malała. W miarę więc, jak  $\lambda$  zbliżać się będzie do zera, odstępstwo od prostoliniowego rozchodzenia



się zaburzeń stawać się będzie coraz mniejsze. W przypadku granicznym  $\lambda = 0$  uginania nie będzie zupełnie.

Fale głosowe, w ściślejszym tego słowa znaczeniu, posiadają dość znaczną stosunkowo długość — w powietrzu zawartą w granicach od mniej więcej 1600 cm do 1,6 cm — wobec czego zazwyczaj silnie się uginają, obchodząc jak gdyby przeszkody, umieszczone na drodze ich rozchodzenia się. Zjawisko cienia geometrycznego, tak charakterystyczne dla zjawisk świetlnych, stanowi w zjawiskach głosowych rzadko stosunkowo spotykany wyjątek. Gdy przesłona posiada nie jeden, lecz kilka lub kilkanaście, dość blisko rozmieszczonych otworów, w niewielkiej już odległości poza nimi głos dochodzić będzie na ogół do wszystkich elementów środowiska. Przesłona jednak będzie i tym razem wywierała pewien wpływ na rozchodzenie się fali, rozkład bowiem energii akustycznej w przestrzeni leżącej poza przesłoną będzie inny, niż w przypadku fali niezakłóconej, przy czym zmiany będą tym większe, im mniejsza jest długość danej fali.

W prostym przypadku rury, lejkowato rozszerzonej (rys.



rys. 41

41), używanej często do wzmacniania odbioru fal głosowych (mniejszy otwór przystawiany jest do ucha lub do przyrządu mierniczego), sinusoidalna fala płaska, dochodząca do szerszego otworu AB, wysyła do punktu, leżącego na osi  $O_1 O_2$  rury, zaburzenia o zgodnych mniej więcej fazach, jeżeli tylko odległości skrajnych elementów AB

od punktu  $O_1$  nie przekraczają odległości  $O_1 O_2$  więcej, niż o  $\frac{\lambda}{2}$ .

W tym przeto przypadku natężenie w punkcie  $O_1$  będzie największe. W punktach, leżących również w wąskim otworze, lecz z boku od osi, natężenie będzie na ogół mniejsze, zgodność bowiem faz będzie mniejsza, niż w  $O_1$ ; może się nawet zdarzyć, że natężenie to spadnie do zera, jeżeli odległość danego punktu od otworu będzie taka, że za-



burzenia, wysyłane przez elementy jednej połowy fali zawartej w otworze powierzchni, będą zawsze miały, dochodząc do danego punktu, fazę przeciwną do zaburzeń, wysyłanych przez elementy drugiej połowy. Rachunek, którego tu nie będziemy przytaczali, doprowadza do wniosku, że przy tych samych rozmiarach otworu, odległość od osi punktu o natężeniu zerowym jest tym większa, im większa jest długość fali. W przypadku zatem, gdy długość padającej fali będzie dostatecznie wielka w porównaniu z wymiarami liniowymi otworu  $AB$ , żaden punkt przekroju  $OO$  nie będzie czynił zadość temu warunkowi, co więcej zmniejszanie się natężenia akustycznego w miarę oddalania się od osi może być wtedy tak małe, że będzie można uważać je za mniej więcej stałe w całym przekroju  $OO$ ; ograniczenie fali przez otwór  $AB$  ujawni się więc tym razem jedynie we wzmacnieniu natężenia w przekroju  $OO$ .

W tych przypadkach, gdy zależy, aby fale biegły prostoliniowo, a więc aby uginanie było możliwie małe, używa się fal o częstości znacznie większej od częstości fal głosowych, w ściślejszym tego słowa znaczeniu. Te ultradźwięki, o których wspominaliśmy już wyżej, są zazwyczaj wytwarzane w sposób, wskazany przez Langevina (1915 r.), a mianowicie przez umieszczenie w drgającym obwodzie elektrycznym płytki kwarcowej. Płytką tą, poddawana okresowym zmianom napięcia elektrycznego, kurczy się i wydłuża, stanowiąc źródło drgań akustycznych o częstości równej częstości drgań elektrycznych obwodu. Na tej drodze można otrzymać wielkie częstości, sięgające 3000000 drgań na sek, o których mowa była wyżej. W praktyce, gdy chodzi o przyrządy, służące do zglębiania morza i wykrywania nierówności dna morskiego (p. ust. 12), częstości używane są o wiele niższe, około 50000 drgań na sek, czemu odpowiada w wodzie długość fali około 3 cm, pochłanianie bowiem energii akustycznej jest w przypadku fal krótszych zbyt duże (p. ust. 4).

Te wnioski, oparte na zastosowaniu zasady Huygensa-Fresnela do zjawisk akustycznych a których teoretyczne uzasadnienie dał Rayleigh (1880 r. i lata późniejsze) zostały niejednokrotnie potwierdzone przez doświadczenie.

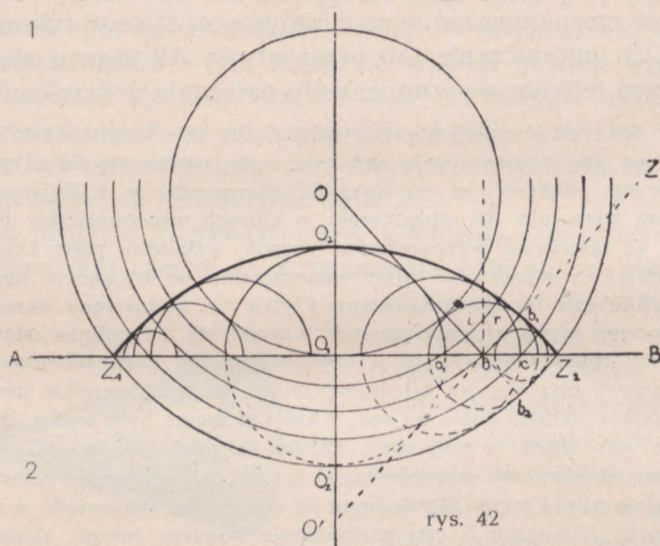
Istnienie cienia geometrycznego w przypadku fali, wzbudzonej przez wybuch w wodzie, a której długość jest na ogół niewielka, stwierdził (1882 r.) Le Conte. Stevard i Stilles dokładnie zbadali (1914 r.) uginanie przy przechodzeniu przez szczelinę, otrzymując wyniki, zgodne na ogół z wywodami teoretycznymi. Altberg, pracując



z bardzo krótkimi falami (około 0,8 mm), wysyłanymi przez rozbrojenia iskrowe, stwierdził (1907 r.) w przestrzeni poza siatką, utworzoną z szeregu równoległych drążków, istnienie maximów i minimów ciśnienia, rozmieszczonych w oznaczonych odległościach, zależnie od długości fali, a więc zjawisko analogiczne do wyżej pokrótce omówionego zjawiska, zachodzącego w lejkowatej rurze. Podobnie Humby otrzymał (1927 r.) zjawiska akustyczne, analogiczne do znanych z optyki zjawisk dyfrakcji, używając drgań o częstotliwości 4000 drgań na sekundę.

## 12. — ODBIJANIE SIĘ FAL.

Gdy fala odkształcenia dochodzi do powierzchni, rozgraniczającej dwa środowiska o różnych własnościach fizycznych, część tylko przenoszonej przez nią energii przechodzi do środowiska



wiska drugiego, pozostała energia wraca z powrotem do środowiska pierwszego, powodując w nim powstanie fali odbitej.

Przypuśćmy, odkładając rozpatrzenie ogólniejszego przypadku do ustępu następnego, że środowisko 2 jest środowiskiem nie przenoszącym dalej fali, że więc cała energia zostaje odbita z powrotem do środowiska 1. Taki przypadek zachodzi wtedy, gdy gęstość i sprężystość środowiska 2 są albo bardzo wielkie albo znikomo małe w porównaniu z gęstością i sprężystością środowiska 1. Założmy poza tym, że powierzchnia rozdziału AB jest powierzchnią płaską (rys. 42), o rozmiarach tak



wielkich w porównaniu z długością fali, że możemy całkowicie pominąć uginanie, zachodzące na granicy tej powierzchni.

Oznaczmy opory akustyczne (p. ust. 4) środowisk 1 i 2 odpowiednio przez  $r_1$  i  $r_2$ , gdzie  $r_1 = c_1 \rho_1 = \sqrt{e_1 \rho_1}$  i  $r_2 = c_2 \rho_2 = \sqrt{e_2 \rho_2}$ , i stosunek ich  $\frac{r_1}{r_2}$  przez  $q$ . Rozważania teoretyczne Poissona (1819 r.)

Rayleigha (1880 r.), Drudego (1890 r.) i in. prowadzą do wniosku, że w przypadku prostopadłego padania fali płaskiej na powierzchnię rozdziału  $AB$ , stosunek natężenia fali odbitej  $I_o$  do natężenia fali padającej  $I_p$  można, pomijając wpływ tarcia wewnętrznego środowiska, wyrazić wzorem

$$I_o = I_p \left( \frac{q-1}{q+1} \right)^2, \quad (27)$$

wartość więc  $I_o$  przybliży się nieograniczenie do wartości  $I_p$ , gdy  $q$  albo dąży do zera, gdy więc  $r_1 = c_1 \rho_1$  jest bardzo małe w porównaniu z  $r_2$  albo gdy  $q$  dąży do  $\infty$ , a więc gdy  $r_1$  jest w porównaniu z  $r_2$  bardzo wielkie. Jeżeli badanymi środowiskami są np. powietrze i woda, przy czym fala przechodzi z powietrza do wody, mamy  $r_1 = 33130 \cdot 0.001293 = 42,84$  g/cm<sup>2</sup>sek,  $r_2 = 142400 \cdot 1$  g/cm<sup>2</sup>sek, stąd  $q = 0,0003$ , a zatem  $I_o = 0,9988 I_p$ ; przy rozchodzeniu się fal w kierunku odwrotnym — z wody do powietrza

$$q = \frac{142400}{42,84} = 3300, \text{ stąd } I_o = \left( \frac{3299}{3301} \right)^2 I_p = (0,9994)^2 I_p = 0,9998 I_p.$$

Zarówno więc w pierwszym, jak i w drugim przypadku prawie cała energia ulega odbiciu. Tę zależność energii odbitej od oporu akustycznego potwierdziły doświadczenia Boyle'a i Taylora (1926).

Gdy fala odkształcenia, wychodząca z punktu  $O$ , będącego źródłem zaburzeń, dochodzi do punktów  $a, b, c \dots$  (rys. 42) powierzchni  $AB$  rozdziału środowisk 1 i 2, punkty te, zgodnie z zasadą Huygensa-Fresnela, stają się jak gdyby samodzielnymi źródłami zaburzeń; wysyłane przez nie fale cząstkowe będą jednak tym razem rozchodziły się nie w kierunku rozchodzenia się fali padającej, lecz w kierunku przeciwnym, tak że fala odkształcenia znów powróci do środowiska 1.

Fala ta będzie podobnie, jak i fala padająca, falą kulistą, której środek znajdować się będzie w punkcie  $O'$ , leżącym na prostopadłej  $OO_1$ , opuszczonej z  $O$  na powierzchnię  $AB$ , w tej samej od powierzchni odległości, co źródło zaburzeń (rys. 42).



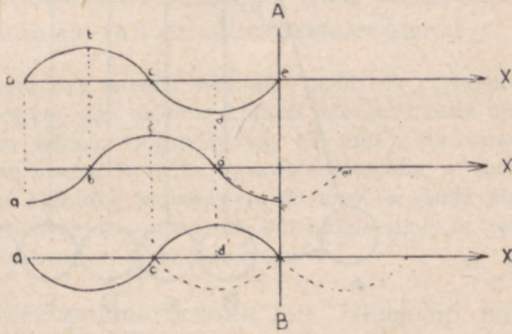
Istotnie, gdyby środowisko było jednorodne, a więc, gdyby powierzchnia rozdziału nie było, w przeciągu czasu, jaki upłynął od chwili, gdy fala doszła do punktu  $O_1$ , do chwili, gdy fala doszła do punktów  $Z_2Z_1$ , fala przesunęłaby się do punktu  $O'_2$ , promień więc fali cząstkowej wyniósłby  $O_1O'_2$ , w kierunku zaś dowolnego promienia  $Ob$ , promień fali wysłanej z punktu  $b$  byłby równy  $bb_2$ . Ponieważ prędkość rozchodzenia się ma po odbiciu tę samą, co poprzednio wartość, gdyż fala odbita rozchodzi się w tym samym, co padająca, środowisku, promienie odbitych fal cząstkowych będą odpowiednio równe  $O_1O'_2$  i  $bb_2$ . Odległość zatem punktu  $O_2$  obwiedni od punktu  $O'$  będzie równa  $O'O_1 + O_1O_2 = OO_1 + O_1O'_2 = R$ , gdzie  $R$  — promień kuli, opisanej z  $O$  i przechodzącej przez punkt  $O'_2$ ; podobnie z równości trójkątów  $O_1Ob$  i  $O_1O'b$  i z przyjętego założenia, że  $OO_1 = O_1O'$  wynika, że  $Ob_2 = O'b_2 = R$ , gdzie  $R$  promień tej samej, co poprzednio kuli. Wszystkie więc punkty obwiedni odbitych fal cząstkowych znajdować się będą stale w jednakowej odległości od punktu  $O'$ , który będzie jej środkiem geometrycznym. Fala odbita rozchodzić się będzie tak, jak gdyby źródłem zaburzeń był punkt  $O'$ . Punkt ten nazywamy obrazem punktu  $O$ . Prosta  $Ob_2$ , wyznaczająca kierunek rozchodzenia się fal padających w punkcie  $b$ , tworzy z prostą  $O'b_1$  (normalną) do powierzchni  $AB$  w tym punkcie kąt ten sam, co prosta  $O'b_1$ , wyznaczająca kierunek fal odbitych, jak to bezpośrednio wynika z równości trójkątów  $OO_1b$  i  $O'O_1b$ . Nazywając pierwszy z tych kątów kątem padania, drugi — kątem odbicia, możemy powiedzieć, że kąt padania równy jest kątowi odbicia.

Podobnie rozumując, udowodnilibyśmy bez trudu, że fala płaska po odbiciu od powierzchni  $AB$  pozostanie płaską i że kąt odbicia będzie i tym razem równy kątowi padania. Możnaby stąd wnioskować, że fala odbita jest po prostu jak gdyby przedłużeniem fali padającej i że odbicie zmienia jedynie kierunek jej rozchodzenia się. Taki wniosek jest słuszny tylko w przypadku, gdy środowisko odbijające jest o wiele rzadsze od środowiska, z którego fale wychodzą. Wtedy istotnie, faza odchylenia przy odbiciu żadnej zmianie nie ulega; wychylenia cząstek środowiska z położenia równowagi zachowu-



ją w fali odbitej ten sam znak, jaki by miały, gdyby powierzchni odbijającej  $AB$  nie było i gdyby fala swobodnie rozchodziła się dalej.

Niech  $ax$  będzie kierunkiem rozchodzenia się fali płaskiej, prostopadle do powierzchni rozdziału  $AB$  (rys. 43) i niech krzywa  $abcd$ , o której dla uproszczenia zakładamy, że jest sinusoidą, odtwarza wychylenia cząstek w chwili, gdy zaburzenia dochodzą do  $AB$ . Gdyby powierzchni rozdziału nie było, w przeciągu następnego ćwierci okresu fala przesunęłaby się



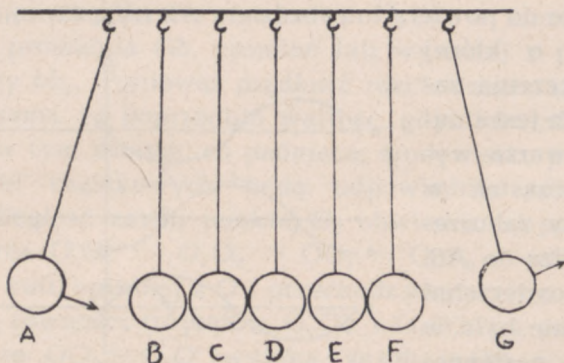
rys. 43

o ćwierć swej długości i cząstki, leżące poza  $AB$ , doznałyby odchyień, przedstawionych przez krzywą  $ee'$ . Na skutek odbicia odchyień tych doznają cząstki, leżące po stronie ujemnych  $x$ -ów na krzywej  $cd$ , znak jednak wychyleń pozostaje bez zmiany: i krzywa  $ed$  leży, podobnie jak  $ee'$ , poniżej osi  $ax$  (na rys. amplitudy fali odbitej i padającej są jednakowe; odbicie jest zatem całkowite). Po upływie połowy okresu fala odbita dojdzie do punktu  $c$ , po upływie całego okresu do  $a$ . W przypadku zatem fali podłużnej cząstki środowiska poruszać się będą w tym samym kierunku, w jakim by się poruszały, gdyby odbicia nie było; zgęszczenia więc odbijają się będą jako rozrzedzenia, rozrzedzenia jako zgęszczenia, fazy więc zmiany objętości (a co za tym idzie i ciśnienia) znak swój zmieniają.

Modelem, który pomoże nam wyjaśnić sobie, przynajmniej do pewnego stopnia, zachodzące w tym przypadku zjawiska, jest przykład Mariotte'a (tom I, str. 167). Gdy zderzające się kule mają jednakową masę, wtedy kula  $A$  spadając z pewnej wysokości i uderzając kulę  $B$ , odda jej całą swą energię ruchu i zatrzyma się, to samo zajdzie z kulą  $B$ , która odda nabytą energię kuli  $C$  itd., dopiero ostatnia kula  $G$ , stykająca się z powietrzem, będzie się dalej poruszała.



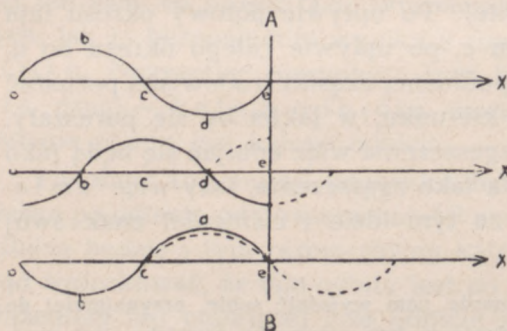
Wyobraźmy sobie, że kule te połączone są doskonałymi sprężynami; kula G poruszając się w kierunku wskazanym na rys. strzałką, pociągnie za sobą kulę F, ta zaś z kolei kulę E itd. Działanie to dojdzie, rzecz prosta, do kuli A wprawiając ją w ruch o tym samym, co



rys. 44

poprzednio kierunku. Zjawisko zachodzi tak, jak gdyby z chwilą uderzenia ostatniej kuli G powstawał impuls, działający na kule w tym samym kierunku, co impuls początkowy. Jednocześnie po odbiciu zmienia się charakter wzajemnego działania kul; kule nie podlegają już uderzeniom, lecz ciągnięciom.

Gdy środowisko drugie jest gęstsze, wtedy przy odbiciu kierunek odchylenia zmienia się na przeciwny, tak że



rys. 45

zachodzi jak gdyby strata połowy fali. Niech jak poprzednio, sinusoidalna fala płaska pada prostopadłe na powierzchnię rozdziału AB. Fala odbita będzie po upływie  $\frac{T}{4}$  sek od chwili dojścia fali zaburzeń do AB przedstawiona przez krzywą ed, leżącą nie po tej samej stronie osi  $ax$ , co przedłużenie fali padającej, lecz po przeciwnej. W przypadku fali podłużnej zgięczenie odbijać się będzie jako zgię-

stawiona przez krzywą ed, leżącą nie po tej samej stronie osi  $ax$ , co przedłużenie fali padającej, lecz po przeciwnej. W przypadku fali podłużnej zgięczenie odbijać się będzie jako zgię-

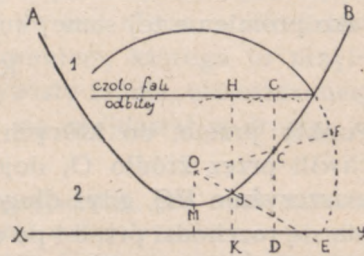


szczenie, rozrzedzenie — jako rozrzedzenie, fazy zatem zmiany objętości zachowują znak poprzedni. W przypadku fal poprzecznych mamy analogicznie (p. ust. 13): odbicie od środowiska akustycznie gęstszego zmienia fazę odchylenia na przeciwną, odkształcenie jednak zachowuje znak poprzedni; przy odbiciu zaś od środowiska rzadszego znak odchylenia zmianie nie ulega, zmienia się za to znak odkształcenia.

Na wybranym przez nas modelu będziemy mieli do czynienia ze zjawiskiem analogicznym, gdy ostatnia kula  $G$  uderzy będzie np. w doskonale sprężystą ścianę. Odbijając się od niej z tą samą prędkością w przeciwną stronę, kula ta wprawi ostatecznie w ruch kulę  $A$ , odbijając ją w kierunku przeciwnym do tego, w jakim poprzednio kula ta spadała. Wzajemne działanie kul będzie miało w tym przypadku ten sam charakter, co przed odbiciem.

Odbicie może również zmienić kształt fali. Niech np. powierzchnia rozdziału będzie częścią powierzchni paraboloidu obrotowego, tzn. powierzchni, utworzonej przez obrót paraboli

koło jej własnej osi; przecięcie tej powierzchni płaszczyzną rysunku, przechodzącą przez oś, będzie parabolą (rys. 46). Przypuśćmy, że źródło zaburzeń, o znikomo małych rozmiarach w porównaniu z rozmiarami powierzchni odbijającej, znajduje się w punkcie  $O$  — ognisku paraboli. Gdyby powierzchni  $AB$



rys. 46

nie było, fala kulista, wychodząca z  $O$ , doszłaby po upływie pewnego czasu do punktów  $F, E, \dots$ ; spotyka ona jednak powierzchnię odbijającą w punktach  $C, I, \dots$ , które wysyłają fale cząstkowe z powrotem do środowiska pierwszego. Obwiednią tych fal będzie tym razem płaszczyzna, której przecięciem z płaszczyzną rysunku jest linia prosta. Istotnie, niech  $XY$  będzie kierownicą paraboli  $AB$  tzn. taką prostą, od której każdy z punktów paraboli znajduje się w tej samej odległości, co od ogniska, tak że mamy

$$OI = IK; \quad OC = CD, \quad (a)$$



Niech  $IH$  i  $CG$  wyznaczają kierunki, w jakich rozchodzi się fala po odbiciu. Proste te będą tworzyły z normalnymi do paraboli w punktach  $I$  i  $C$  kąty równe tym, jaki tworzą z normalnymi kierunki rozchodzenia się fali padającej  $OI$  i  $OC$ , możemy bowiem uważać bardzo małe elementy powierzchni w punktach  $I$  i  $C$  za elementy płaskie i stosować do nich wyżej udowodnione twierdzenie o równości kątów padania i odbicia. W czasie, w ciągu którego fala przesunęłaby się w środowisku jednorodnym na odległość  $IE$  i  $CF$ , po odbiciu przesunie się w kierunkach  $IH$  i  $CG$  na odległości

$$IH = IE \text{ i } CG = CF. \quad (b)$$

Przedłużmy te proste do przecięcia z kierownicą w punktach  $K$  i  $D$ . Ze wzorów (a) i (b) wynika od razu, że

$$KH = KI + IH = OE \text{ oraz } DG = DC + CG = OF$$

i z uwagi, że  $OE = OF$ ,

jako promienie tej samej kuli,

$$KH = DG.$$

Punkty przeto, do których zaburzenie, wysyłane w pewnej chwili przez źródło  $O$ , dojdzie jednocześnie, będą leżały na płaszczyźnie  $HG$ , gdyż długości dróg, wzdłuż których zaburzenie się rozchodzi przed i po odbiciu, mają bez względu na położenie elementu odbijającego wartości te same.

Fala więc odbita jest falą płaską, rozchodzącą się w kierunku osi paraboloidu. Gdyby fala padająca była falą płaską, fala odbita byłaby falą kulistą, której środek znajdowałby się w ognisku  $O$  paraboli. Do tego punktu wszystkie zaburzenia, odbijane przez poszczególne elementy powierzchni odbijającej, dochodziłyby w tej samej fazie, wzajemnie się wzmacniając, wobec czego natężenie akustyczne byłoby w tym punkcie największe. Po dojściu zaś do tego punktu zaburzenia rozchodziłyby się dalej, tworząc w dalszym ciągu falę kulistą, tym razem o stopniowo zwiększającym się promieniu, której środkiem byłby punkt  $O$ . Punkt ten jest więc, podobnie, jak punkt  $O'$  w poprzednio rozpatrywanym przypadku, obrazem źródła



zaburzeń, znajdującego się w nieskończoności. Pomiedzy jednak tym przypadkiem a poprzednim zachodzi ta zasadnicza różnica, że przy odbiciu od powierzchni płaskiej fale przez punkt  $O'$  nie przechodzą, lecz rozchodzą się tak, jak gdyby wychodziły z tego punktu. Z tego też powodu punkty takie, jak punkt  $O'$  noszą nazwę urojonych obrazów akustycznych, punkty zaś takie, jak  $O$  — rzeczywistych obrazów akustycznych źródła.

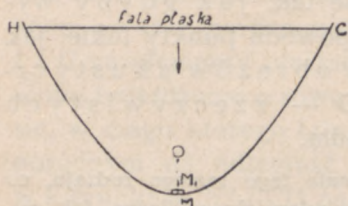
Fala odbita powoduje odkształcenia tego samego rodzaju, co fala padająca; fala podłużna odbija się więc jako podłużna, fala poprzeczna — jako poprzeczna. Wyjątek stanowi, jak to wykazali Drude (1890 r.) i Berger (1915 r.), odbijanie się fali podłużnej, rozchodzącej się w środowisku stałym, od innego środowiska stałego. Wtedy, gdy kąt padania jest dostatecznie duży, fala odbita składa się z fali podłużnej i poprzecznej.

W przypadku, gdy powierzchnię odbijającą tworzy powierzchnia elipsoidu obrotowego, powstałego przez obrót elipsy dokoła jednej z jej osi głównych, gdy przeto przekrojem tej powierzchni przez płaszczyznę rysunku jest elipsa, stwierdzimy, posługując się podobnym rozumowaniem, którego tu przytaczać nie będziemy, że obraz rzeczywisty źródła, umieszczonego w jednym z ognisk elipsy, będzie się znajdował w drugim jej ognisku.

We wszystkich tego rodzaju przypadkach, gdy źródło zaburzeń okresowych możemy uważać za punkt materialny, obraz rzeczywisty źródła nie jest, ściśle biorąc, punktem. Natężenie posiada maximum wartości na pewnej skończonej powierzchni, otaczającej punkt  $O$ ; rozmiary tej powierzchni, wyznaczające wielkość tego obrazu dyfrakcyjnego, jak nazywamy taki obraz w odróżnieniu od obrazu, który byśmy otrzymali, gdyby zaburzenia głosowe nie doznawały uginania, są na ogół tym większe, im większy jest stosunek długości fali padającej do wielkości powierzchni odbijającej. W przypadku najogólniejszym otrzymamy rozkład natężeń podobny do rozkładu w rurze lejkowatej, o którym była mowa w ustępie poprzednim; punkt  $O$  i bezpośrednio otaczający go obszar będzie miejscem geometrycznym największego natężenia; w miarę wzrastania odległości od  $O$  natężenie będzie malało, dochodząc wreszcie na pewnym obszarze do wartości zero, aby przy dalszym wzrastaniu odległości znów się zwiększyć, przechodząc przez nowe maximum, znacznie jednak mniejsze, niż panujące w punkcie  $O$ , potem znów będzie malało itd.



Warunkiem jednak koniecznym takiego prawidłowego odbijania jest, aby powierzchnia odbijająca była dostatecznie gładka tzn. aby nie było na niej znaczących występow lub rys. Istotnie, wróćmy do rozpatrywanego



rys 47

wyżej przykładu powierzchni parabolicznej i przypuśćmy, że element tej powierzchni  $M$ , leżący na osi paraboli, jest wzniesiony ponad powierzchnię paraboloidu na wysokość  $h$  (rys. 47). Zaburzenia rozchodzące się w postaci sinusoidalnej fali płaskiej  $HG$ , odbijają się wtedy nie od punktu  $M$ , lecz od  $M_1$  i dochodzą po odbiciu do punktu  $O$  wcześniej o  $\tau = \frac{2h}{c}$  sek, niż zaburzenia,

które jednocześnie wyszły z czoła fali w położeniu  $HG$ , lecz zostały odbite od innych punktów powierzchni, wobec czego drgania, odbite od punktu  $M_1$ , spotykając się w punkcie  $O$  z drganiami, odbitymi od innych punktów powierzchni, nie będą miały tej samej, co i one fazy. Gdy  $h$  będzie równe  $\frac{\lambda}{4}$ ,

$\tau$  stanie się równe  $\frac{T}{2}$  sek, zaburzenie odbite od  $M_1$  będzie miało w punkcie  $O$  fazę przeciwną do faz zaburzeń, odbitych od innych punktów, zamiast więc wzmacniania będziemy mieli wzajemne osłabianie się drgań odbitych. Jeżeli jednak  $h$  będzie wszędzie mniejsze od  $\frac{\lambda}{4}$ , wtedy odbicie zachowa na ogół swój charakter prawidłowy, jakkolwiek bowiem fazy fal odbitych nie będą w punkcie  $O$  całkowicie zgodne, to jednak nie będą się również znosiły, punkt  $O$  pozostanie więc nadal miejscem o natężeniu największym.

Tego rodzaju powierzchnię, która poza tym, zgodnie z przyjętym przez nas założeniem, nie będzie przenosiła do środowiska poza nią leżącego dochodzących do niej zaburzeń, nazywamy zwierciadłem doskonałym. Dla fal głosowych, w ścisłym tego słowa znaczeniu, zwierciadłem takim może być powierzchnia, którą skądinąd skłonni jesteśmy uwa-



zać za chropowatą: tak np. dla częstości 20000 drgań na sekundę za zwierciadło doskonałe możemy uważać w powietrzu powierzchnię, w której wysokość występów lub głębokość rys nie przekracza 4 mm, dla częstości 20 drgań na sekundę  $h$ , dochodzące do 4 m, pozwala jeszcze na odbicie prawidłowe; wtedy jednak rozmiary zwierciadła muszą być bardzo wielkie, aby można było pominąć wpływ uginania, zachodzącego na granicy danej powierzchni i rozumować tak, jak gdyby zaburzenia rozchodziły się prostoliniowo.

Tym się między innymi tłumaczy zjawisko tzw. echa harmonijnego, gdy dźwięk, dochodzący do nas po odbiciu od ściany np., posiada inną barwę, niż dźwięk wysyłany. Tony składowe o częstości niższej, dla których ściana jest dostatecznie gładka, aby być zwierciadłem doskonałym, odbijają się od niej prawidłowo, tony zaś wyższe są przez ścianę rozpraszane w różnych kierunkach.

Zmiana, jakiej doznaje barwa dźwięku, dochodzącego po odbiciu do naszego ucha, zależy jednak od wielu czynników, których wpływ trudno nieraz z góry ustalić. Niewątpliwie znaczną rolę odgrywa również niejednakowe pochłanianie przez powierzchnię odbijającą tonów o różnej częstości. Tak np. powierzchnie ciał porowatych pochłaniają o wiele silniej tony wysokie, niż niskie, tak że dźwięk po odbiciu jest „czystszy”, niż dźwięk padający. Przeciwnie własności wykazują powierzchnie gładkie. W salach o takich powierzchniach ścian tony wysokie, będące zazwyczaj składowymi wszelkich szmerów i hałasów, odbijają się prawie bez straty energii, co nieraz jest rzeczą bardzo niedogodną.

Echo harmonijne jest szczególnym przypadkiem echa zwykłego, gdy głos dochodzący do nas bezpośrednio ze źródła zaburzeń i głos odbity słyszymy oddzielnie. Aby tak było, musi głos odbity przychodzić do naszego ucha co najmniej o  $1/10$  sek później, niż głos idący bezpośrednio ze źródła. W najprostszym przypadku, gdy obserwator znajduje się w bezpośrednim sąsiedztwie źródła, ściana odbijająca powinna znajdować się w odległości przynajmniej 17 m, jeżeli dany głos trwa nieograniczenie krótko. Jest to jednak dolna granica, rzadko bowiem mamy do czynienia z takim bardzo krótkotrwałym zaburzeniem. Gdy chcemy np. usłyszeć echo jakiegoś wypowiedzianego przez nas wyrazu jednosylabowego,



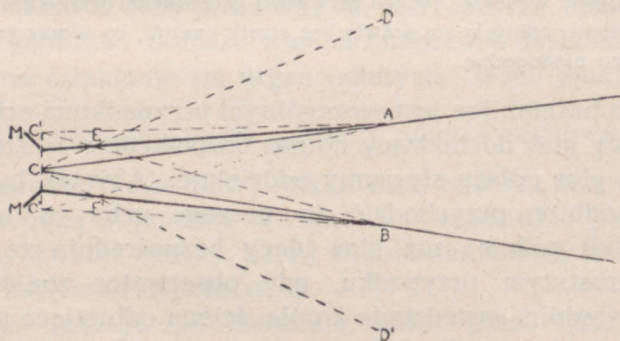
którego wymawianie trwa mniej więcej 0,2 sek, musimy umieścić się w odległości co najmniej 34 m od powierzchni odbijającej, aby bezpośrednio po wypowiedzeniu tej sylaby usłyszeć jej powtórzenie; gdy wyraz jest dwusylabowy, odległość musi być odpowiednio większa.

W otwartej przestrzeni odległość ta w nocy oraz w zimie będzie odpowiednio mniejsza.

W odległościach mniejszych głos odbity dochodzi do nas w chwili, gdy słyszymy jeszcze głos ze źródła. Mamy wtedy do czynienia z tzw. pogłosem, który często utrudnia dokładne słyszenie.

Odpowiednie zakrzywienie powierzchni odbijającej może spowodować ciekawe zjawiska akustyczne. Dźwięki, które ledwo słycać w bezpośrednim sąsiedztwie źródła (np. cykanie zegarka), rozbrzmiewają donośnie w innym odległym punkcie, gdzie powstaje rzeczywisty obraz akustyczny źródła. Tego rodzaju własności, wynikające z ukształtowania powierzchni odbijających, posiadają np. sala kariatyd w Luwrze paryskim, katedra św. Pawła w Londynie, baptysterium w Pizie, zakryście katedr w Lublinie i w Wilnie.

Odbijaniem się fal głosowych można objaśnić działanie tzw. tub, tj. rur stożkowatych, służących do zwiększania doniosłości



rys. 48

głosu. Niech  $MAB$  (rys. 48) będzie tą rurą i niech  $C$ , jak to przyjmiemy dla uproszczenia, będzie źródłem głosu. Gdyby tuby nie było, w stożku  $ACB$  skupiona byłaby jedynie ta część energii fali odkształcenia, jaka



przypada na kąt bryłowy  $ACB$ , na skutek jednak odbicia od ścian rury energia z rury wychodząca jest o wiele większa. Istotnie, wybierzmy na ścianie rury punkty  $E$  i  $E'$  takie, że proste  $CE$  i  $EB$  oraz  $CE'$  i  $E'A$  tworzą z normalną do ściany rury kąty jednakowe; zaburzenia, idące w kierunku  $CD$  i  $CD'$ , po odbiciu w punktach  $E$  i  $E'$  pójdą w kierunku  $EB$  i  $E'A$ , a więc wyjdą z tuby tak, jak gdyby wysyłającym je źródłem był nie punkt  $C$ , lecz  $C'$ . Energia zatem wychodząca z rury, będzie energią przenoszoną nie przez część  $AB$  fali odkształcenia, lecz przez część  $DD'$ . Do tego dojdzie jeszcze energia fal odbitych w punktach leżących bliżej punktu  $C$ , niż punkt  $E$ ; fale te doznają jednak odbić wielokrotnych, co, oczywiście, zmniejsza ich energię.

Na odbijaniu się fal oparta jest również metoda badania dna morskiego, o której wspominaliśmy już wyżej. Polega ona na mierzeniu czasu, jaki upłynął od chwili wystąpienia sygnału do chwili odbioru fali odbitej i na wyznaczaniu stąd odległości powierzchni odbijającej od obserwatora. Aby odbicie zachodziło według praw możliwie mało odbiegających od prawa prostoliniowego rozchodzenia się zaburzeń, nawet wtedy, gdy powierzchnia odbijająca jest niewielka, używa się w tych pomiarach fal ultra krótkich (p. ust. 11).

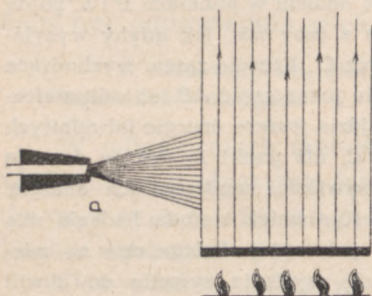
Gdy powierzchnie odbijające rozmieszczone są w odstępach prawidłowych, fale odbite, dochodząc do ucha w jednakowych i niewielkich odstępach czasu, mogą wywołać wrażenie dźwięku o częstości, niezależnej od częstości drgań wysyłanych przez źródło, lecz wyznaczonej przez wzajemną odległość powierzchni odbijających oraz przez ich odległość od źródła i od obserwatora. Te tony odbicia, odkryte przez Oppela (1857 r.), zazwyczaj nie mają stałej częstości, lecz szybko stają się coraz niższe.

Zjawisko to można zaobserwować, idąc wąską ulicą między murami; odgłos kroków staje się wtedy szczególnie dźwięczny.

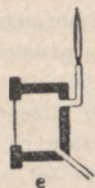
Z przykładów odbicia, przytoczonych przez nas wyżej, nie należy wyprowadzać wniosku, że odbicie tylko wtedy zachodzi wyraźnie, gdy środowiskiem odbijającym jest ciało stałe. Tak bowiem bynajmniej nie jest. Jak to już wyżej mówiliśmy, odbicie zachodzi zawsze na powierzchni rozgraniczającej dwa różniące się fizycznie środowiska, a więc i wtedy, gdy obydwa środowiska są płynne. Dowodem może być piękne doświadczenie Tyndalla (1889 r.).



Fale zaburzeń, wychodzące z poziomej rury *a* w kierunku czułego płomienia *e* (por. ust. 7), powodują jego skracanie się i wydłużanie. Gdy między rurą i płomieniem znajduje się słup

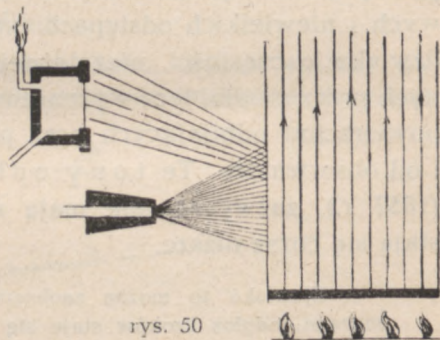


rys. 49



powietrza, ogrzewanego przez szeroki palnik (rys. 49, gdzie zjawisko to jest schematycznie przedstawione), wtedy wskutek odbicia fal od powierzchni tego słupa zaburzenia nie dochodzą do płomienia, który pali się zupełnie spokojnie. Je-

żeli jednak płomień umieścimy po tej samej stronie co źródło zaburzeń (rys. 50), fale odbite znów powodować będą skracanie się i wydłużanie płomienia. Tutaj, prawdopodobnie, należy szukać przynajmniej częściowego wyjaśnienia faktu, że głos w powietrzu zupełnie czystym przy słonecznej pogodzie rozchodzi się nieraz na znacznie mniejszą odległość, niż przy pogodzie dżdżystej i chmurnej. Bowiem pionowe słupy ogrzanego powietrza, podnoszące się z silniej nagrzaných części powierzchni ziemi, odbijają znaczną część energii dochodzących do nich fal głosowych.



rys. 50

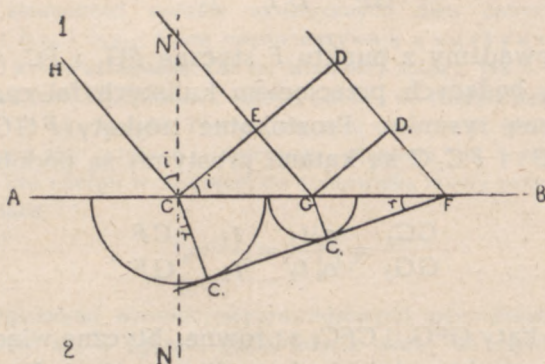
Według przytaczanej już niejednokrotnie pracy v. Angerera i Ladenburga niejednorodności fizycznej powietrza, spowodowanej czy to niejednakowym ogrzaniem jego warstw czy to niejednakową prędkością wiatru na różnych wysokościach, należy przypisać potężne nieraz echo, jakie słyszy się czasami po wystrzale (p. ust. 13).

Jaką rolę odgrywają w tym zjawisku obłoki, nie jest rzeczą wyjaśnioną; poglądy na tę sprawę różnych badaczy są często biegunowo przeciwne.



## 13. — ZAŁAMANIE SIĘ FAL.

Zazwyczaj jednak powierzchnia odbijająca jest zwierciadłem niedoskonałym, tak że część energii padającej przechodzi do środowiska drugiego. Przypuśćmy dla uproszczenia wywodów, że fala odkształcenia jest falą płaską  $CD$  (rys. 51) i załóż-



rys. 51

my, że prędkość rozchodzenia się zaburzeń jest w drugim środowisku mniejsza, niż w pierwszym, że więc  $c_1 > c_2$ . Środowisko drugie nazwać będziemy wtedy akustycznie gęstszym. Niech w pewnej chwili czoło fali dojdzie w punkcie  $C$  do powierzchni rozdziału. Fale cząstkowe, wysyłane z tego punktu, będą częściowo rozchodziły się z powrotem w środowisku pierwszym, tworząc w nim stopniowo falę odbitą, o natężeniu mniejszym, niż fala padająca, częściowo zaś rozchodzić się będą w środowisku drugim.

Przez czas, w ciągu którego fala cząstkowa, wychodząca z punktu  $D$  w chwili, gdy punkt  $C$  czoła znajduje się na powierzchni  $AB$ , dojdzie do punktu  $F$  powierzchni rozdziału, fala cząstkowa, wysłana przez  $C$ ; utworzy półkulę o promieniu  $CC_1$  tyle razy mniejszym od promienia  $DF$ , ile razy prędkość  $c_2$  jest mniejsza od  $c_1$ . Podobnie fala cząstkowa, którą zaczyna wysyłać punkt  $G$ , gdy fala padająca przesunie się do położenia  $GD_1$ , utworzy w środowisku drugim przez czas, w ciągu którego zaburzenie z  $D$ , przesunie się do  $F$ , półkulę o promieniu  $GG_1$  będącym do  $D_1F$  w stosunku takim, jak  $c_2$  do  $c_1$ .



Oznaczmy przez  $t_1$  czas, w ciągu którego zaburzenie przechodzi z  $D$  do  $F$ , przez  $t_2$  — czas przejścia z  $D_1$  do  $F$ , wobec czego  $DF = c_1 t_1$  i  $D_1F = c_1 t_2$ . Z podobieństwa prostokątnych trójkątów o bokach równoległych  $CDF$  i  $GD_1F$  wynika, że

$$\frac{CF}{GF} = \frac{DF}{D_1F} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Przeprowadźmy z punktu  $F$  styczne  $FG_1$  i  $FC_1$  do półkuli  $GG_1$  i  $CC_1$ , będących przecięciem kulistych fal cząstkowych z płaszczyzną rysunku. Prostokątne trójkąty  $FGG_1$  i  $FCC_1$  (kąty  $FG_1G$  i  $FC_1C$  są kątami prostymi) są podobne, mamy bowiem

$$\frac{CC_1}{GG_1} = \frac{c_2 t_1}{c_2 t_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{CF}{GF},$$

wobec tego kąty  $GFG_1$  i  $CFC_1$  są równe. Styczne więc  $FG_1$  i  $FC_1$  leżą na tej samej prostej, skąd wynika, że obwiednia fal cząstkowych w drugim środowisku jest płaszczyzną. Fala płaska po przejściu do środowiska drugiego pozostaje płaską, zmienia się jedynie kierunek jej rozchodzenia się. Niech  $HC$  oznacza kierunek rozchodzenia się zaburzeń w środowisku pierwszym. Kąt  $HCN$  będzie wtedy kątem padania  $i$ . W środowisku drugim kierunek rozchodzenia się wyznacza prosta  $CC_1$ , tworząca z normalną  $NN$  do powierzchni kąt  $r$ . Z trójkąta  $CC_1F$  mamy

$$CC_1 = c_2 t_1 = CF \sin r,$$

z trójkąta  $CDF$

$$DF = c_1 t_1 = CF \sin i.$$

Dzieląc  $DF$  przez  $CC_1$ , otrzymujemy

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin i}{\sin r} = n_{1,2}. \quad (28)$$

Te zmiany kierunku rozchodzenia się zaburzeń przy przejściu fali z jednego środowiska do drugiego nazywamy załamaniem się fali, kąt  $r$  — kątem załamania, stosunek



zaś  $\frac{c_1}{c_2} = n_{1,2}$  prędkości rozchodzenia się zaburzeń w środowisku, z którego fala wychodzi, do prędkości w środowisku, do którego fala wchodzi, współczynnikiem załamania się fali w dwu danych środowiskach.

Od tego współczynnika załamania należy odróżniać wielkość  $q$ , równą stosunkowi oporów akustycznych dwu danych środowisk (ust. 12)  $c_1 \rho_1$  i  $c_2 \rho_2$ , którą często nazywają akustycznym współczynnikiem załamania. Od tej wielkości zależy, jak o tym była wyżej mowa (ust. 12), stosunek energii odbitej do energii padającej; w założeniu, że kąt padania równy jest zeru oraz że w środowiskach nie występują siły tarcia wewnętrzne, stosunek ten wyraża wzór (27) ust. 12. Dla energii wchodzącej do środowiska mamy przy tych samych założeniach

$$I_w = I_p \cdot \frac{4q}{(q+1)^2}. \quad (29)$$

Z analogicznymi wzorami, wyprowadzonymi przez Fresnela (1831 r.), spotykamy się w optyce, gdzie jednak mamy do czynienia z jedną tylko wielkością — współczynnikiem załamania się fali  $n$ .

Gdy powierzchnia łamiąca nie jest płaszczyzną, zjawisko staje się o wiele bardziej złożone. Odkładając bardziej szczegółowe rozpatrzenie tych przypadków do rozdziałów, traktujących o zjawiskach optycznych, poprzestajemy tutaj na zaznaczeniu, że i tym razem powstają po załamaniu rzeczywiste lub urojone obrazy źródła zaburzeń, mające cechy takie same, jak te, o których była mowa w ust. 12.

Ze wzoru (28) wynika, że przy przejściu ze środowiska akustycznie rzadszego do akustycznie gęstszego kierunek rozchodzenia się zaburzeń przybliży się do normalnej, kąt  $i$  jest większy od kąta  $r$ . Tak np. zachodzi zjawisko przy przejściu fali z wody do powietrza, mniej więcej cztery razy akustycznie gęstszego. Gdybyśmy więc umieścili w wodzie worek gumowy kształtu dwuwypukłej soczewki, o dostatecznie wielkich rozmiarach w porównaniu z długością fali (patrz ust. 12), i napełnili go powietrzem, soczewka byłaby w tych warunkach soczewką zbierającą.

Jeżeli zaburzenie przechodzi ze środowiska gęstszego do rzadszego, kierunek rozchodzenia się zaburzeń tworzy po załamaniu kąt większy od kąta padania. W przypadku szczegól-

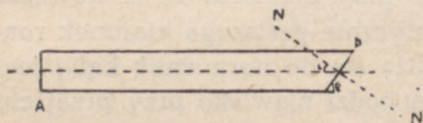


nym, gdy kąt padania staje się równy  $i_g = \arcsin \frac{c_1}{c_2}$ , kąt załamania  $r$  dochodzi do wartości  $90^\circ$ . Ponieważ kąt  $r$  przekroczyć tej wartości nie może, przy dalszym wzroście kąta padania ponad wartość kąta granicznego  $i_g$  cała energia ulega odbiciu. Zachodzące w tym przypadku zjawisko nazywamy całkowitym wewnętrznym odbiciem.

Aby otrzymać w powietrzu soczewkę zbierającą, należy wypełnić ją ciałem, w którym prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych jest mniejsza, niż w powietrzu, a więc np. dwutlenkiem węgla ( $c = 270$  m/sek w temperaturze  $0^\circ$  C) lub opiłkami kauczukowymi (wartość  $c$  zawarta jest w granicach od 30 do 70 m/sek) tak, jak to zrobił Hesechus (1890 r.), który w ten sposób otrzymał, zgodnie z przewidywaniem, rzeczywisty obraz źródła drgań, utworzony przez fale załamane.

Kauczuk jest jedynym ciałem stałym, które może być w tym celu użyte. We wszystkich innych ciałach stałych prędkość rozchodzenia się jest o wiele większa, niż w powietrzu, dochodząc w stali np. do wartości około 5120 m/sek. Z gazów wyróżnia się wodór, w którym  $c$  wynosi według Sturma (1904 r.) — 1258 m/sek.

Prawa załamania się fal dźwiękowych sprawdzał doświadczalnie Hajech (1857 r.). Rura, wypełniona badanym środowiskiem, była z jednej strony zamknięta błoną, prostopadłą do osi, z drugiej zaś błoną tworzącą kąt  $\varphi$  z osią rury (rys. 52).



rys. 52

Rura umieszczona była w ten sposób, że stanowiła jakby przedłużenie rury drugiej, na której końcu znajdowało się źródło zaburzeń (w doświadczeniu Hajecha — dzwonek). Falę zaburzeń, wychodzącą z tej drugiej rury, można było zatem uważać za falę płaską. Fala ta, padając prostopadle na błonę A, nie załamывała się i w rurze pomiarowej rozchodziła się w kierunku poprzednim. Załamywanie następowało dopiero na błonie CD, przy czym kąt padania  $i$  był, oczywiście, równy  $90 - \varphi$ . Pomiar polegał na wyznaczeniu kierunku ( $i$  kąta, jaki kieru-



nek ten tworzył z normalną do błony), w którym dźwięk sły-  
chać było najsilniej. Podajemy za Wüllnerem wyniki niektó-  
rych pomiarów Hajecha:

środowisko wypełniające rurę	kąt padania $i$	kąt załamania $r$	
		obserw.	obl.
wodór	35° 50'	8°	8° 50'
"	25°	7°	6° 22'
gaz świetlny	35° 50'	25° 40'	26° 50'
dwutlenek węgla	35° 50'	49° 50'	48° 19'
"	23°	33° 20'	32° 33'
woda studzienna	35° 50'	7° 40'	7° 58'
"	25°	5° 40'	5° 27'

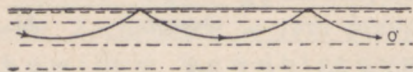
Wobec znacznych trudności, z jakimi związane jest do-  
świadczalne wyznaczenie kąta załamania  $r$ , oraz z uwagi, że pra-  
wa załamania obowiązują jedynie w przypadku, gdy, jak o tym  
już niejednokrotnie była mowa, powierzchnia łamiąca ma bar-  
dzo znaczne rozmiary w porównaniu z długością fali, należy  
wyniki te uważać za potwierdzające z dostateczną ścisłością  
założenia teoretyczne.

W podobny sposób badał załamanie fal głosowych Neyreneuff  
(1894 r.). Załamanie przez powierzchnię zakrzywioną wyznaczali  
Perrot i Dussaud (1895 r.) oraz Sondhauss, który używał soczewki,  
wypełnionej dwutlenkiem węgla. Schellbach i Boehm wyznaczali  
(1879 r.) kąt załamania, nie oddzielając ciała łamiącego błoną od  
środowiska, z którego fale wychodziły. Wszystkie te pomiary na  
ogół potwierdzają ustalone wyżej prawa załamania.

Zmianą w kierunku rozchodzenia się zaburzeń sprężystych przy  
zmianie własności fizycznych środowiska można objaśnić fakt, że  
w zimie zasięg sygnałów podwodnych jest większy, niż w lecie. W zi-  
mie bowiem temperatura wody na ogół wzrasta z głębokością, tym  
samym wraz z głębokością wzrasta prędkość rozchodzenia się głosu:  
głębsze warstwy wody są akustycznie rzadsze od warstw powierzch-  
niowych. Zaburzenia zatem, idące w kierunku powierzchni wody,  
rozchodzą się wzdłuż linii krzywych, zwróconych wypukłością do  
dna rzeki; trafiając na powierzchnię, odbijają się od niej prawie  
całkowicie (por. ust. 12) i po odbiciu dochodzą, znów wzdłuż linii



krzywej, do punktu O, który może leżeć poza bezpośrednim zasięgiem zaburzenia (rys. 53). W lecie natomiast rozkład temperatury w wodzie jest odwrotny: warstwy dolne są akustycznie gęstsze, wobec czego kierunki rozchodzenia się zaburzeń leżą na krzywych,



rys. 53

zwróconych w stronę dna wklęsłością. Zaburzenia dochodzą w ten sposób nie do powierzchni, lecz do dna i jedynie bardzo niewielki ułamek ich energii ulega odbiciu.

Temu też należy, prawdopodobnie, przypisać, że zaburzenia o wielkiej energii (takie np. jak wybuchy prochowni, wulkanów itp.) można słyszeć w nienormalnie wielkiej odległości: kanonadę pod Verdun, w czasie pierwszej Wielkiej Wojny (1914 — 1918), słyszeć było można, według Branda (1917 r.), jeszcze w odległości 350 km od pola bitwy; wybuch wulkanu Mont Pelée na Martynice w 1902 roku słyszeć było w odległej o 1550 km Wenezueli (Lacroix, 1904 r.).

Ten tzw. zewnętrzny obszar słyszenia jest często, choć nie zawsze, oddzielony od obszaru, do którego dochodzą bezpośrednio zaburzenia ze źródła, obszarem ciszy, w którym zaburzenie się nie ujawnia. Prędkość pozorną zaburzeń, dochodzących do obszaru zewnętrznego, wyznaczona z odległości miejsca obserwacji od miejsca zaburzeń i z czasu, który upłynął od chwili wysłania zaburzenia do chwili obserwacji, jest zazwyczaj o wiele mniejsza od prędkości zaburzeń, dochodzących bezpośrednio; tak np. według Humphreysa (1924 r.), fala sprężysta, wzbudzona przez wybuch wulkanu Krakatoa (27 sierpnia 1883 r.), obiegła ziemię sześciokrotnie z prędkością przeciętną 315 m/sek. Maurain, obserwując wybuch wywołany dla celów doświadczalnych w Courbières 15 maja 1924 r., znalazł, że prędkość rozchodzenia się fali wybuchu, jest w miejscach odległych od ogniska mniejsza od normalnej. Do podobnego wniosku prowadzą również ogłoszone w 1930 roku przez Whipple'a pomiary prędkości fali wybuchu, spowodowanej przez spadek w Syberii 30 czerwca 1908 roku wielkiego meteoru; prędkość tej fali wynosiła przeciętnie 318 m/sek.

Zjawisko to można objaśnić, zakładając, że zaburzenia, dochodzące do obszaru zewnętrznego, przechodzą dłuższą drogę, zakrzywioną na skutek załamania w wysokich warstwach atmosfery i krzywizną swą zwróconą ku ziemi, dokładnego jednak wyjaśnienia tego zjawiska, jak dotychczas, nie ma, niewiele bowiem wiemy o własnościach fizycznych atmosfery na znaczniejszych wysokościach.

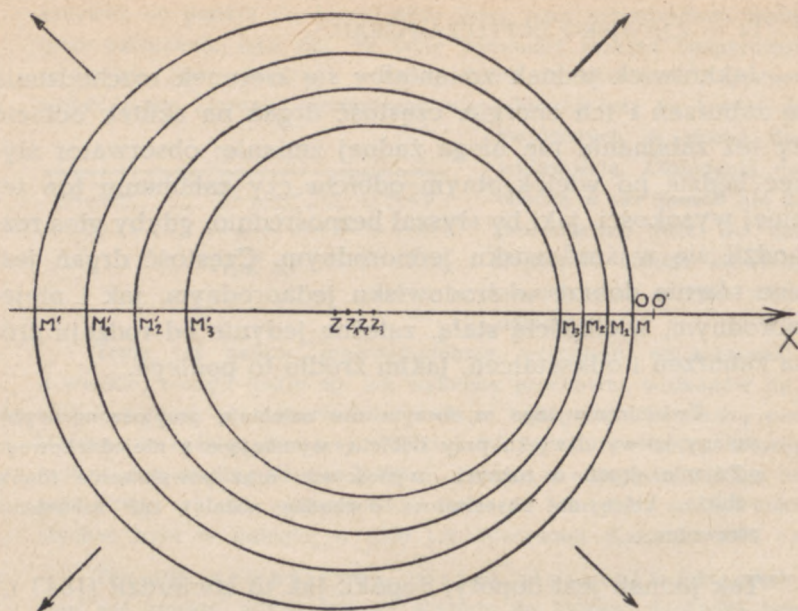


Jakkolwiek jednak zmieniałby się kierunek rozchodzenia się zaburzeń i ich energia, częstość drgań na skutek odbicia czy też załamania nie ulega żadnej zmianie: obserwator słyszeć będzie po wielokrotnym odbiciu czy załamaniu ton tej samej wysokości, jaki by słyszał bezpośrednio, gdyby głos rozchodził się w środowisku jednorodnym. Częstość drgań jest więc równie dobrze w środowisku jednorodnym, jak i niejednorodnym, wielkością stałą, zależną jedynie od rodzaju źródła zaburzeń i odkształceń, jakim źródło to podlega.

Twierdzenia tego w niczym nie osłabiają przytoczone wyżej zmiany barwy dźwięku przy odbiciu, wynikające z niejednakowego odbijania drgań o różnych częstościach, oraz powstawanie tonów odbicia, które do obserwatora dochodzą później, niż zaburzenie pierwotne.

Tak jednak jest dopóty, dopóki, jak to stwierdził (1843 r.) Doppler i niezależnie od niego (1848 r.) Fizeau na podstawie badań zjawisk optycznych, zarówno źródło zaburzeń  $Z$ , jak i obserwator  $O$ , znajdują się w spoczynku względem środowiska, w którym zaburzenia się rozchodzą. Istotnie, przypuśćmy, że źródło, które w chwili  $t=0$  znajduje się w punkcie  $Z$ , porusza się ruchem jednostajnym z prędkością  $v_z$  w kierunku prostej  $ZOX$ , na której znajduje się również obserwator (rys. 54). Zaburzenie, które źródło w tej chwili wysyła, znajdzie się, o ile środowisko jest jednorodne, po upływie czasu  $t_1$  na powierzchni kuli o promieniu  $ZM=r=ct_1$ . Po upływie  $T$  sek, gdy źródło wysyłać będzie zaburzenie o tej samej fazie, co w chwili  $t=0$ , położenie źródła na prostej  $OX$  wyznaczy punkt odległy od  $Z$  o  $ZZ_1 = v_z T$ . Wobec czego wysłane przez nie wtedy zaburzenie znajdzie się w chwili  $t=t_1$  na powierzchni kuli opisanej z  $Z_1$  promieniem  $Z_1M_1=r_1=c(t_1-T)$ . Po upływie dalszych  $T$  sek źródło przejdzie do punktu  $Z_2$ , odległego od  $Z$  o  $2v_z T$ ; wysłane przez niego zaburzenie o tej samej fazie, co wysłane poprzednio w chwilach  $t=0$  i  $t=T$  zaburzenia, znajdzie się w chwili  $t=t_1$  na powierzchni kuli, opisanej z  $Z_2$  promieniem  $Z_2M_2=r_2=c(t-2T)$ . Odległości zatem punk-





rys. 54

tów  $M, M_1, M_2, \dots$  prostej  $ZOX$ , w których zaburzenia stałe posiadają tę samą fazę, będą odpowiednio równe

$$\begin{aligned} MM_1 &= ZM - ZM_1 = ZM - ZZ_1 - Z_1M_1 = \\ &= ct_1 - v_z T - ct_1 + cT = (c - v_z)T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1M_2 &= Z_1M_1 - Z_1M_2 = Z_1M_1 - Z_1Z_2 - Z_2M_2 = \\ &= ct_1 - cT - v_z T - ct_1 + c \cdot 2T = (c - v_z)T, \end{aligned}$$

stąd

$$MM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = \dots = (c - v_z)T.$$

Odległości te, zgodnie z określeniem podanym w ust. 1, wyznaczają długość fali  $\lambda_1$ . Mamy więc

$$\lambda_1 = (c - v_z)T \quad (30a)$$



lub oznaczając przez  $\lambda$  długość fali w wypadku, gdy źródło jest w spoczynku, i biorąc pod uwagę, że  $\lambda = cT$ ,

$$\lambda_1 = \lambda \frac{c - v_z}{c}. \quad (30b)$$

Jeżeli więc do obserwatora, znajdującego się, zgodnie z założeniem, na prostej ZO, np. w punkcie  $M$ , dojdzie w chwili  $t = t_1$  pewna faza zaburzeń, to ta sama faza dochodzić będzie do niego następnie w odstępach czasu  $T' = \frac{\lambda_1}{c}$ , takiego bowiem czasu wymagać będą zaburzenia na przejście drogi  $M_1M, M_2M$  itd. W punkcie  $O$  zatem okres powrotu tych samych faz zaburzenia, równy okresowi zachodzących w tym punkcie drgań, będzie równy

$$T' = \frac{\lambda_1}{c} = T \frac{c - v_z}{c}. \quad (30c)$$

Gdy obserwator znajduje się po przeciwnej stronie źródła, np. w którymś z punktów  $M', M'_1, \dots$ , analogiczne rozumowanie doprowadzi nas do wniosku, że wtedy okres drgań, zachodzących w danym punkcie, będzie większy od  $T$

$$T' = T \frac{c + v_z}{c}, \quad (30d)$$

częstość drgań zatem się zmniejszy. Uważając prędkość źródła za dodatnią, gdy jest skierowana ku obserwatorowi, innymi słowy kierunek prostej ZO za dodatni kierunek osi  $x$ -ów, obydwie przypadki możemy objąć jednym wzorem (30c).

Przypuśćmy teraz, że porusza się również i obserwator. Uważajmy i tym razem prędkość jego ruchu jednostajnego  $v_0$  za dodatnią, gdy kierunek jej zgodny jest z kierunkiem ZO. Niech  $T''$  oznacza czas, jaki upłynął od chwili  $t = t_1$ , gdy do obserwatora doszło zaburzenie  $M$ , do chwili  $t = t_1 + T''$ , gdy doszło do niego zaburzenie  $M_1$ . W ciągu tego czasu obserwator przesunął się do punktu  $O'$  odległego o  $v_0 \cdot T''$  od punktu  $O$ . Zaburzenie  $M_1$  przeszło zatem drogę nie  $M_1M$ , lecz  $M_1O' = M_1M + MO'$ . Ponieważ prędkość rozchodzenia się zaburzeń



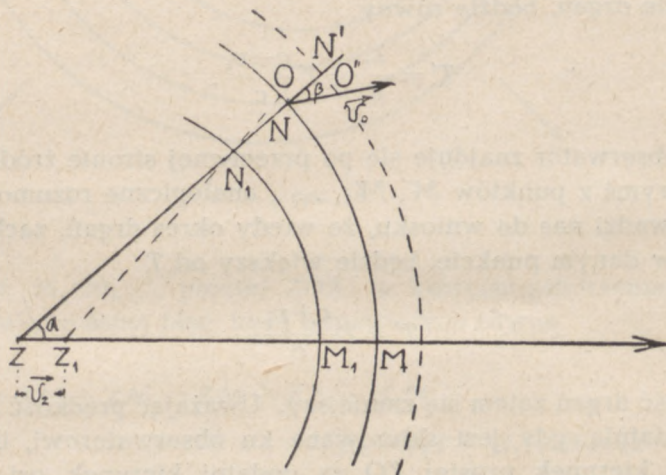
pozostaje taka sama, jak w przypadku, gdy źródło i obserwator są w spoczynku (p. ust. 15), droga ta jest równa  $cT''$ , mamy więc

$$cT'' = M_1 M + MO' = (c - v_z)T + v_0 T'',$$

stąd  $(c - v_0)T'' = (c - v_z)T$  i ostatecznie  $T'' = T \frac{c - v_z}{c - v_0}$ . (31)

Gdy więc  $v_z = 0$ , obserwator, oddalając się od źródła, słyszy ton niższy, niż wtedy, gdy jest w spoczynku.

Gdy wreszcie obserwator zajmuje względem źródła położenie dowolne, gdy np. znajduje się na prostej  $ZO$ , tworzącej z kierunkiem prędkości źródła  $\vec{v}_z$  kąt  $\alpha$ , prędkość zaś jego tworzy z kierunkiem  $ZO$  kąt  $\beta$  (rys. 55), do wzoru (31) należy zamiast wartości  $v_z$  i  $v_0$  wstawić



rys. 55

wartości ich składowych w kierunku  $ZO$ . Niech w chwili  $t = t_1$  do obserwatora, o którym założymy chwilowo, że jest w spoczynku, dojdzie z  $Z$  fala zaburzeń o oznaczonej fazie; zaburzenie o tej samej fazie, wysłane przez źródło z położenia  $Z_1$ , będzie w tej samej chwili leżało na powierzchni kuli, opisaney z  $Z_1$  promieniem  $Z_1 M_1$  i przecinającej prostą  $ZO$  w punkcie  $N_1$ . Gdy obserwator znajduje się w dostatecznie wielkiej odległości  $r$  od źródła, możemy odległość  $ZZ_1$  uważać za małą w porównaniu z  $r$ , innymi słowy, kąt  $ZN_1 Z_1$ , jaki tworzą ze sobą kierunki rozchodzenia się tych fal w punkcie  $N_1$ , za prawie równy zeru, a więc przyjmując, że zaburzenie wysłane z  $Z_1$  roz-



chodzi się w kierunku  $N_1 N$  tak, jak gdyby źródło przesuwano się nie wzdłuż prostej  $ZX$ , lecz wzdłuż prostej  $ZO$  z prędkością  $v_z \cos \alpha$ . Otrzymamy wtedy analogicznie do wzoru (30a)

$$N_1 N = \lambda_2 = (c - v_z \cos \alpha) T, \quad (31a)$$

skąd

$$T_1' = \frac{\lambda_2}{c} = T \frac{c - v_z \cos \alpha}{c}. \quad (31b)$$

W przypadku więc, gdy prosta  $ZO$  tworzy z kierunkiem prędkości  $v_z$  kąt prosty, okres drgań, dochodzących do obserwatora, pozostaje bez zmiany.

Niech teraz obserwator porusza się z prędkością  $v_0$ , tworzącą kąt  $\beta$  z kierunkiem  $ZO$ . Oznaczmy przez  $T_1''$  czas, jaki upłynie od chwili  $t = t_1$ , gdy do obserwatora dochodzi zaburzenie, wysłane z  $Z$ , do chwili, gdy dochodzi do niego zaburzenie o tej samej fazie, wysłane z  $Z_1$ . W ciągu tego czasu obserwator przesunie się na odległość  $v_0 T_1''$  do punktu  $O'$  i znajdzie się na powierzchni kuli, opisanej z  $Z$  promieniem  $ZN'$ . Przyjmując, tak jak uprzednio, że kierunki rozchodzenia się fal z  $Z$  i  $Z_1$  są zgodne, znajdujemy, że odległość, przebyta w ciągu czasu  $T''$  przez zaburzenie, wysłane z  $Z_1$ , równa jest

$$cT_1'' = N_1 N' = N_1 N + NN' = (c - v_z \cos \alpha) T + v_0 \cos \beta T_1'',$$

skąd

$$T_1'' = T \frac{c - v_z \cos \alpha}{c - v_0 \cos \beta}. \quad (31c)$$

Gdy  $\alpha = \beta = 90^\circ$ , a więc, gdy zarówno obserwator, jak i źródło przesuwają się w kierunku prostopadłym do łączącej ich prostej, częstość drgań, dochodzących do obserwatora, pozostaje bez zmiany. Częstość nie ulega zmianie również i wtedy, gdy  $v_z \cos \alpha = v_0 \cos \beta$ .

Zmiana częstości drgań zależy zatem, jak to wynika z wyżej wprowadzonych wzorów, nie od prędkości obserwatora względem źródła (czy też źródła względem obserwatora), lecz od prędkości obserwatora i źródła względem środowiska. Istotnie, na prędkość względną mieliśmy wzór (tom I, str. 38)

$$v_w = v_z - v_0$$

$$\text{i } v_z = v_w + v_0 \text{ lub } v_0 = v_z - v_w.$$

Po podstawieniu do wzoru (31) otrzymujemy

$$T'' = T \frac{c - v_w - v_0}{c - v_0} = T \frac{c - v_z}{c - v_z + v_w},$$



skąd bezpośrednio wynika, że zmiana okresu zależy również i od wartości czy to  $v_0$  czy też  $v_z$ . Jedynie wtedy, gdy  $v_w = 0$ , a więc gdy źródło i obserwator poruszają się w tym samym kierunku, z tą samą prędkością,  $T''$  nie zależy ani od  $v_z$  ani od  $v_0$ . W przypadku granicznym, gdy  $v_0 = c$ , okres drgania, dochodzącego do obserwatora, stanie się nieskończenie wielki, obserwator bowiem porusza się z tą samą prędkością, co dane zaburzenie, które stale mu towarzyszy w tej samej fazie.

Zmianę wysokości tonu, wysyłanego przez poruszające się źródło, można z łatwością stwierdzić, słuchając gwizdka poruszającego się parowozu lub syreny okrętu, znajdującego się w ruchu. Nieruchomy obserwator słyszy ton wyższy, który w chwili, gdy parowóz mija obserwatora, nagle się obniża. Zależność wysokości tonu od prędkości  $v_z$  sprawdził w ten właśnie sposób Buys Ballot (1845 r.), o wiele jednak dokładniejsze pomiary wykonał (1875 r.) Vogel, otrzymując wyniki, potwierdzające wyprowadzone wyżej wzory. Gdy lokomotywa przybliżała się do obserwatora z prędkością 19,3 m/sek, ton obserwowany miał częstość 2118,2 drgań na sekundę, według zaś wzoru (30) częstość powinna była być równa 2111,8; przy oddalaniu się od obserwatora z prędkością 19,6 m/sek częstość spadała do 1878,1 drgań na sekundę, różniąc się od obliczonej mniej więcej o 0,5%. (Dane te podajemy za Chwolsonem).

#### 15. — ZABURZENIA ROZCHODZĄCE SIĘ Z PRĘDKOŚCIĄ WIĘKSZĄ, NIŻ PRĘDKOŚĆ GŁOSU.

W rozważaniach ustępów poprzednich przyjmowaliśmy, że odkształcenia, jakim podlega środowisko, są dostatecznie małe, aby nie zmieniać w wydatniejszy sposób jego własności fizycznych. Założenia te znajdowały na ogół potwierdzenie w doświadczeniu, okazywało się bowiem, że jakiegokolwiek byłoby źródło i energia zaburzeń, w pewnej mniejszej lub większej odległości od źródła można było bez obawy znacznieszego błędu uważać odkształcenia środowiska za bardzo małe i stosować do nich wzory, wyprowadzone na podstawie tego właśnie założenia.

Zgodność jednak między wywodami teoretycznymi i rzeczywistym przebiegiem zjawiska okaże się niewystarczającą,



gdy badane przez nas elementy środowiska znajdują się w pobliżu źródła, wysyłającego zaburzenia o znacznej energii, lub też gdy odkształcenia wywołane są przez ruch ciała, posuwającego się z prędkością równą lub większą od normalnej prędkości rozchodzenia się zaburzeń, którą tak, jak poprzednio, nazywać będziemy prędkością głosu.

Z pierwszym przypadkiem mamy do czynienia, gdy źródłem zaburzeń jest niezwykle nagle zmiana ciśnienia, zachodząca w pewnym ograniczonym obszarze środowiska; zmiana ta może być ujemną, jak np. przy zgnieciu naczynia, z którego usunięto powietrze, lub dodatnią, jak np. przy wybuchu (detonacji łac. *detonare* — grzmieć), w którego granicznym przypadku prędkość spalania się ciała wybuchowego jest tak wielka, że wzrost objętości ciała, zachodzący na skutek tego spalania, a co za tym idzie i wzrost ciśnienia na otaczające warstwy środowiska, dochodzi prawie natychmiastowo do swej wartości największej.

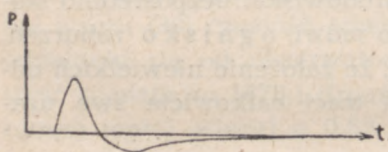
W tego rodzaju zaburzeniach, wywołujących wrażenie huk u lub trzask u, cząstki środowiska, bezpośrednio stanowiące źródło lub, jak się często mówi, ognisko zaburzeń, nabywają prędkości tak wielkich, że założenie niewielkich odchyień od położenia równowagi traci całkowicie swe uzasadnienie.

Do tej kategorii należy również zaliczyć trzaskanie z bicia. Szybki ruch końca sznura powoduje zgęszczenie powietrza przed sznurem i rozrzedzenie za sznurem. Według Lummera trzask spowodowany jest przez szybki ruch powietrza, dążącego do miejsc o zmniejszonym nagle ciśnieniu.

To znaczne przesunięcie się cząstek środowiska sprawia, że po pierwotnej fali odkształcenia — zgęszczenia, gdy zachodzi nagły wzrost ciśnienia, — rozrzedzenia, gdy ciśnienie nagle spada — tworzy się następnie koło ogniska fala o przeciwnym znaku odkształcenia i te dwie fale rozchodzą się, jako fale w y b u c h u (franc. *onde de détonation* lub przez zapożyczenie terminu z balistyki *onde de bouche*). Prędkość rozchodzenia się fali w pobliżu ogniska zazwyczaj znacznie przewyższa prędkość głosu, jak to stwierdził (1875 r.) pomiędzy innymi Mach, biorąc za źródło zaburzeń rozbrojenie iskrowe. Prędkość ta



na ogół wzrasta ze wzrostem energii zaburzenia. Becker umieszczając ciało wybuchowe w rurze, dzięki czemu fala odkształcenia rozchodziła się mniej więcej, jak fala płaska, otrzymał (1922 r.) na wartość prędkości rozchodzenia się 12000 m/sek. Na otwartym powietrzu prędkość ma zazwyczaj wartość znacznie mniejszą. Wolff używając 15000 kg ciała wybuchowego, znalazł (1899 r.), że w odległości 10 m od ogniska prędkość wynosiła mniej więcej 860 m/sek. Von Angerer i Ladenburg, używając znacznie mniejszej masy wybuchowej, (około 3 kg), znaleźli na prędkość rozchodzenia się w odległości 3 m od ogniska 1151 m/sek. Z zestawienia tych danych wynika, że prędkość  $c$ , zgodnie z tym, cośmy przyjmowali w ustępach poprzednich, bardzo szybko maleje wraz ze wzrostem odległości od ogniska. Istotnie, w doświadczeniu Wolffa w odległości 150 m prędkość fali wybuchu była prawie równa prędkości głosu, w doświadczeniu v. Angerera i Labenburga już w odległości 30 m od ogniska spadała do wartości normalnej. Jedno-



rys. 56

nocześnie zmieniał się również i charakter odkształcenia, które schematycznie odtwarza krzywa rys. 56, gdzie na osi odciętych odkładamy czas, na osi rzędnych — ciśnienie. Część krzywej, odtwarzająca zgęszczenie, w miarę rozchodzenia się fali staje

się bardziej stroma i węższa, czas więc przechodzenia zgęszczenia przez dany element objętości środowiska staje się ze wzrostem odległości od ogniska coraz krótszy, wzrasta za to nagłość zmiany ciśnienia. Część krzywej, odpowiadająca rozrzedzeniu, stopniowo się wydłuża i spłaszcza. Tym się tłumaczy niejednokrotnie stwierdzony fakt, że w pobliżu miejsca wybuchu działanie mechaniczne wywiera głównie fala zgęszczenia (szyby wtłaczane są do wnętrza mieszkań), w większej jednak odległości — fale rozrzedzenia (szyby wypadają na zewnątrz), jakkolwiek bowiem zmiany ciśnienia przez nią wywołane są znacznie mniejsze, to jednak czas jej działania jest wtedy znacznie dłuższy od czasu krótkotrwałego zgęszczenia.

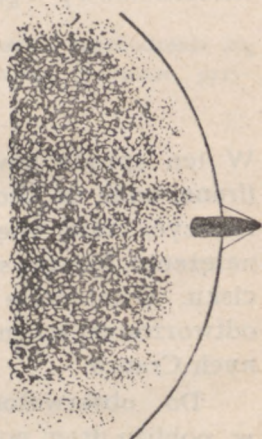


Działanie fali rozrzedzenia ujawnia się nieraz w niewielkiej już odległości od miejsca wybuchu (kilku lub kilkunastu metrów), jak to można było stwierdzić podczas bombardowania Warszawy w 1939 r.: w pokojach sąsiadujących z miejscem, w którym wybuchł pocisk, szyby wypadały na zewnątrz i zamknięte szafy się otwierały.

Villard rozpatrując dane otrzymane z obserwacji wybuchu w Courtines, stwierdza (1924 r.), że w widmie fali wybuchu długość fali, której odpowiada maximum energii, wzrasta z masą użytego środka wybuchowego.

Teorie fal wybuchu dali (1860 r.) Riemann oraz Earnshaw, uwzględniając w odpowiednich równaniach hydrodynamicznych, zmianę gęstości, jakiej doznaje środowisko na skutek zachodzących w nim odkształceń, później zaś (1921 r.) Becker, który doszedł do nieco odmiennych wyników, bardziej odpowiadających danym doświadczenia.

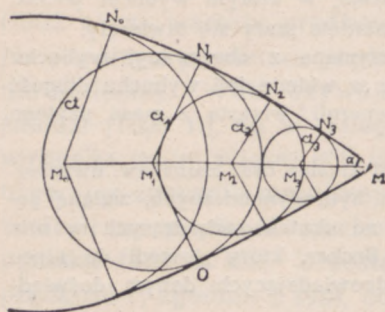
Przypuśćmy teraz, że fala wybuchu powoduje wyrzucenie pocisku, przy czym nadaje mu prędkość większą od prędkości głosu. W bezpośrednim sąsiedztwie ogniska pocisk, który stopniowo dochodzi do swej prędkości największej, porusza się zazwyczaj wolniej od fali wybuchu, w odległości nieco dalszej prędkość fali wybuchu staje się mniejsza, wobec czego pocisk zaczyna ją wyprzedzać, przebijając jak gdyby jej czoło. Tę właśnie chwilę wyobraża schematycznie rys. 57, odtworzony według zdjęć fotograficznych Cranza (1926 r.). Pocisk, poruszając się od tej chwili w środowisku, do którego nie doszła jeszcze fala wybuchu, zgęszcza przed sobą powietrze, za sobą zaś zostawia szereg rozłożonych na drodze swego ruchu wirów (por. rozdz. II, ust. 5). Każdy zatem punkt jego drogi staje się kolejno źródłem zaburzeń, rozchodzących się we wszystkie strony z prędkością mniej więcej normalną. Niech  $M_0M$  (rys. 58) będzie drogą, przebytą przez pocisk, którego ruch dla uproszczenia przyjmiemy na tym odcinku za jednostajny i prostoliniowy. Po upływie czasu  $t$ , w ciągu którego pocisk przejdzie drogę  $M_0M$ , zaburzenie, mające swe źródło w punkcie  $M_0$ , znajdzie się na powierzchni kuli, opisanej z  $M_0$  pro-



rys. 57



mieniem  $ct$ , przy czym, zgodnie z założeniem  $ct < vt$ , gdzie  $v$  — prędkość pocisku. Podobnie zaburzenie wysłane z  $M_1$



rys. 58

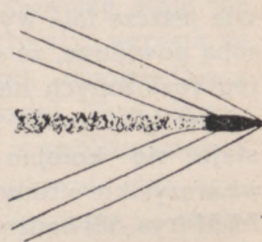
znajdzie się po upływie czasu  $t_1$ , w ciągu którego pocisk przejdzie drogę  $M_1M$ , w odległości  $c_1 \cdot t_1 < v \cdot t_1$  itd. Obwiednią tych wszystkich fal cząstkowych będzie zatem po upływie  $t$  sek, jakie upłynęły od chwili, gdy pocisk przechodził przez punkt  $M_0$ , powierzchnia styczna do kul  $M_0N_0, M_1N_1 \dots$ . Z podobieństwa trójkątów  $MM_3N_3, MM_2N_2 \dots$  wynika, że po-

wierzchnia  $N_0N_1 \dots$  jest powierzchnią stożka prostego. Kąt wierzchołkowy tego stożka  $2\alpha$  możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\sin \alpha = \frac{c}{v}.$$

W ten sposób powstająca fala jest tzw. falą pocisku (franc. onde de choc, onde balistique). Oprócz niej mogą się tworzyć, mniej więcej równoległe do niej, fale o mniejszym natężeniu, biorące swój początek na wystających częściach pocisku. Ostatecznie otrzymujemy obraz taki, jak na rys. 59, odtworzonym schematycznie również według zdjęć fotograficznych Cranza.

Do obserwatora, znajdującego się w pobliżu drogi pocisku, fala pocisku dochodzi przed falą wybuchu i to tym wcześniej, im większa odległość dzieli obserwatora od miejsca wybuchu. Według Bruhata zjawisko posiada przebieg następujący. W chwili, gdy fala pocisku dochodzi do obserwatora w  $O$  (rys 58), słyszy on silny huk (zazwyczaj, choć, jak stwierdza



rys. 59

Cermak, nie zawsze, wyraźniejszy i ostrzejszy od huku wybuchu); huk ten pozornie wychodzi z tego punktu drogi  $M_1$ , któ-



ry jest środkiem kuli, stycznej w danym punkcie do fali pocisku; dopiero później dochodzą do obserwatora zaburzenia wysyłane z punktu  $M_2, M_3, \dots$  składające się na gwizd pocisku, początkowo bardzo wysoki, później zaś zgodnie z zasadą Dopplera-Fizeau niższy.

Podczas bombardowania Warszawy w 1939 r. można było zauważyć, że przy strzelaniu z armat salwami lub też gdy pocisk dobiegał już ziemi, słychać było nie gwizd, lecz szelest, podobny do szelestu zboża lub wysokiej trawy, poruszanej przez silny wiatr. Zjawisko to szczególnie wyraźnie występowało na wąskich ulicach.

Stopniowo jednak prędkość pocisku maleje, fala pocisku odrywa się od pocisku i rozchodzi się z prędkością normalną. Wtedy odstęp czasu, jaki upływa od chwili, gdy obserwator słyszy falę pocisku, do chwili, gdy słyszy falę wybuchu, nie zmienia się już przy zmianie odległości obserwatora od ogniska wybuchu.

W podobny schemat możnaby ująć również i rozchodzenie się grzmotu i takiemu właśnie przebiegowi zjawiska przypisać, przynajmniej częściowo, „warkot” grzmotu.



Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



## ROZDZIAŁ II.

### DRGANIA CIAŁ SPRĘŻYSTYCH. ŹRÓDŁA DŹWIĘKU.

#### 1. — DRGANIA STRUNY.

Przy badaniu źródeł zaburzeń okresowych, o których była mowa w rozdziale poprzednim, często rozróżnia się tzw. źródła samodzielne, które raz wzbudzone, stają się na dłuższy lub krótszy przeciąg czasu źródłami dźwięku (w szerokim tego słowa znaczeniu), przy czym okres wysyłanych przez nie zaburzeń zależy przede wszystkim od ich własności geometrycznych i fizycznych, i tzw. źródła wtórne, które jedynie jakby odtwarzają lub dalej przekazują otrzymywane działania zewnętrzne, powtarzające się okresowo (np. pochodzące od innego źródła drgań). W pierwszym przypadku mówimy o drganiach własnych (swobodnych) źródła, w drugim — o jego drganiach wymuszonych (podniecanych).

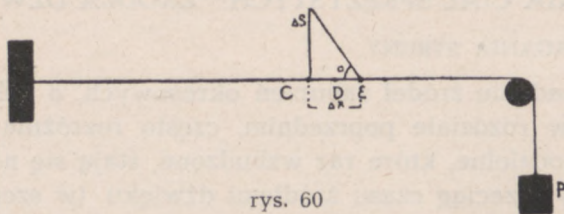
Nie wchodząc tutaj w rozważanie, czy podział ten — dogodny, gdy chodzi o klasyfikację przyrządów, z jakimi się ma do czynienia w badaniach akustycznych — jest dostatecznie ścisły, i odkładając do dalszych ustępów ustalenie związków, zachodzących między drganiami wymuszonymi i własnymi, zajmiemy się obecnie rozpatrzeniem swobodnych drgań ciał stałych.

Jeden z najprostszych przypadków tego rodzaju stanowi drganie struny tzn. ciała stałego, wydłużonego w kształt nici, o wymiarach poprzecznych bardzo małych w porównaniu z długością ciała.

Przypuśćmy, że mamy taką struną, do której obu końców przyłożone są siły  $P$  (rys. 60),  $C$  zaś niech będzie bardzo małym elementem jej długości, o którym założymy, że w chwili  $t=0$  został wychylony ze swego położenia równowagi i przesunięty



w kierunku prostopadłym do struny na niewielką odległość  $\Delta s$ . Przyjmijmy dalej, że struna jest całkowicie pozbawiona sprężystości tak, że ani zmiana jej kształtu, którą powoduje wychylenie elementu  $C$ , ani jej wydłużenie, które wychyleniu temu towarzyszy, nie wywołuje powstania w niej żadnych sił sprężystych, wobec czego jedyną siłą, którą działa element  $C$  na sąsiedni element  $E$ , przesuując go do góry, jest składowa, prostopadła do struny, napięcia, wzbudzonego przez siły ze-



rys. 60

wewnętrzne. Składowa ta w chwili, gdy środek masy elementu  $E$  znajduje się w położeniu równowagi, równa jest  $P \sin \alpha$  lub z uwagi, że kąt  $\alpha$  jest bardzo mały, i że  $\Delta s$  nieograniczenie mało różni się od łuku koła, opisanego ze środka masy elementu  $E$  promieniem równym  $\Delta x$ , odległości środków masy rozpatrywanych elementów,  $P \frac{\Delta s}{\Delta x}$ .

Podobnie więc, jak w przypadku, rozpatrywanym w ustępie drugim rozdziału I, napięcie, przeciwdziałające zmianie kształtu struny, jest proporcjonalne do obliczonej na jednostkę długości zmiany odchylenia od położenia równowagi. Stosując zatem to samo, co wtedy rozumowanie, i podstawiając  $P$  zamiast  $e$  oraz masę jednostki długości struny  $\delta$  zamiast  $\rho$ , znajdujemy, że odkształcenie wywołane w elemencie  $C$ , będzie się rozchodziło wzdłuż struny z prędkością

$$c = \sqrt{\frac{P}{\delta}} \quad (1)$$

lub, gdy, jak to często bywa, obciążenie struny jest wyrażone w jednostkach ciężarowych,

$$c = \sqrt{g \frac{P}{\delta}} \quad (1a)$$



Wzór ten, wyprowadzony (1779 r.) przez Eulera, poddali sprawdzeniu doświadczalnemu bracia W. i E. H. Weberowie (1825 r.).

Sznur spleciony z cienkich nitok bawełny, o bardzo małej sztywności, był jednym końcem przywiązany do śruby, drugim zaś nawinięty na blok i obciążony odpowiednim ciężarem. Nagłym uderzeniem sznura w punkcie, leżącym w pobliżu jednego z jego końców, powodowano powstanie poprzecznej fali odkształcenia, która po przebieżeniu całej długości sznura odbijała się od drugiego nieruchomego jego końca, przy czym kierunek odchylenia cząstek zmieniał się na przeciwny (por. rozdz. I, ust. 12), tak że góra np. odbijała się, jako dolina. Mierząc czas, jaki upłynął od chwili wysłania zaburzenia do chwili jego powrotu, i znając długość sznura, można wyznaczyć prędkość  $c$ . Weberowie stwierdzili, że prędkość rozchodzenia się fal jest wielkością stałą: przy podwojeniu, potrojeniu . . . długości drogi czas zużyty na jej przebycie przez falę, wzrastał dwukrotnie, trzykrotnie . . . , że dalej prędkość ta nie zależy od długości fali, zachowując tę samą wartość zarówno wtedy, gdy odkształcenie było wywołane przez krótkotrwałe i słabe potrącenie palcem, jak i wtedy, gdy wzbudzone je przez długie i silne uderzenie, i wreszcie, że otrzymane z pomiarów wartości  $c$  mało na ogół się różniły od obliczonych ze wzoru (1a). Tak np. w przypadku sznura o długości 1662,2 cm i masie 52,612 g, obciążonego 610,5 gc, znaleziono na czas przejścia odkształcenia tam i z powrotem  $\frac{46}{60}$  sek i stąd na prędkość

$$c_1 = \frac{60 \cdot 3324,4}{46} = 4336,2 \text{ cm/sek};$$

podczas gdy ze wzoru (1a) mamy

$$c = \sqrt{\frac{980,6 \cdot 610,5 \cdot 1662,2}{52,612}} = 4339 \text{ cm/sek},$$

różnica zatem nie przekracza 0,1%, leżąc całkowicie w granicach błędu doświadczenia. Wzór więc (1a) można uważać za potwierdzony doświadczalnie.



Opierając się na tych danych, rozpatrzmy, jakie drgania może wykonywać struna o długości  $l$ , napięta między dwoma nieruchomymi punktami  $A$  i  $B$ . W jakikolwiek sposób pobudzamy ją do drgania, choćby przez szarpanie palcem jakiegoś jej elementu  $O$ , wzbudzone zaburzenie rozchodzi się w obie strony i odbija się od nieruchomych punktów  $A$  i  $B$ , które wtedy stają się jak gdyby nowymi źródłami zaburzeń. Załóżmy, że zaburzenie, wywołane w  $O$ , jest dostatecznie małe, aby podlegać prawom ustalonym w rozdziale I oraz że przy odbiciu nie zachodzi strata energii (albo też, że straty na obu końcach są jednakowe). Wtedy, w przypadku najogólniejszym, na strunie powstanie układ fal stojących, wytworzony przez interferencję wychodzących z  $A$  i  $B$  fal składowych harmonijnych prostych, na jakie możemy zawsze rozłożyć falę odkształcenia struny. Każda z tych fal będzie miała, oczywiście, inną długość, wszystkie one jednak będą musiały czynić zadość warunkowi, aby punkty  $A$  i  $B$  były ich węzłami. Najdłuższą zatem falą, która może powstać na strunie, będzie taka, która będzie miała węzły tylko w tych dwóch punktach, a więc będzie miała długość równą  $2l$ . Częstość przeto drgań tonu zasadniczego o najmniejszej częstości drgań, otrzymamy ze wzoru

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{\delta}}, \quad (2)$$

gdzie  $P$ , jak poprzednio, oznacza siłę napinającą strunę.

Na okres drgania  $T_1$  otrzymujemy ze wzoru (2)

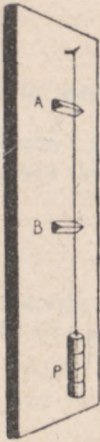
$$T_1 = \frac{2l}{c},$$

a więc okres drgania tonu zasadniczego równy jest przeciągowi czasu, jaki zaburzenie zużywa na przebycie drogi od jednego z punktów umocowania do drugiego i z powrotem.

Wzór (2) można sprawdzić przy pomocy tzw. sonometru (łac. sonare — brzmieć). Jest to pionowo wisząca deska, na której (w górnej jej części) umocowane są jednym ze swych końców badane struny. Struny te obciąża się zmiennymi ciężarami  $P$ . Pryzmaty  $A$  i  $B$



które można przesuwac wzdłuż deski, ograniczają badany odcinek struny AB. Gdy na desce jest napięta, jak to najczęściej bywa, jedna tylko struna, sonometr staje się *monochordem* (gr. monos — jeden tylko, chorde — struna). Przy użyciu tego właśnie przyrządu Mersenne, jeszcze przed wyprowadzeniem wzoru (2) przez Taylora, ustalili (1636 r.) zależność częstości drgań od obciążenia  $P$  oraz długości i gęstości liniowej drutu. Wzór (2) był później wielokrotnie sprawdzany, między innymi i przez wymienionych wyżej braci Weberów.



rys. 61

Warunkom granicznym czynią zadość również wszystkie tony o częstościach 2, 3, 4, 5...  $n$ -krotnie większych od częstości tonu zasadniczego. Tonowi o częstościach  $2\nu_1$ , odpowiada fala o długości  $l$ , a więc mająca oprócz węzłów w punktach A i B jeszcze jeden węzeł w punkcie środkowym C (rys. 62). Tonowi o częstości  $3\nu_1$ , odpowiada fala długości  $\frac{2}{3}l$ , ma-

jąca poza węzłami A i B jeszcze dwa węzły dodatkowe w D i E itd. Możemy zatem napisać

$$\nu_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{P}{\delta}} \quad (2a)$$

W strunie fala odkształcenia rozchodzi się tylko wzdłuż struny, pod względem więc formalnym zjawisko jest zupełnie analogiczne do rozchodzenia się fali płaskiej w środowisku nieograniczonym, gdzie wartość odchylenia od położenia równowagi również jest funkcją tylko dwóch zmiennych  $t$  i  $x$  — odległości danego elementu od dowolnie wybranego punktu lub płaszczyzny. Kładąc oś  $x$  wzdłuż struny, możemy analogicznie do wzoru (3) na str. 13 napisać

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

gdzie  $s$  zastąpiliśmy przez  $y$ .

Napiszmy, że

$$y = y_t \cdot y_x$$



rys. 62



gdzie  $y_t$  jest funkcją samego tylko czasu,  $y_x$  — samej tylko odległości;  $y_t$  posiada więc w danej chwili tę samą wartość we wszystkich punktach struny,  $y_x$  zaś w danym punkcie struny posiada w każdej chwili wartość stałą. Różniczkując mamy

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y_x \frac{dy_t}{dt} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = y_x \frac{d^2 y_t}{dt^2}$$

oraz

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y_t \frac{dy_x}{dx} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_t \frac{d^2 y_x}{dx^2}.$$

Podstawiając do równania (3) otrzymujemy

$$y_x \frac{d^2 y_t}{dt^2} = c^2 y_t \frac{d^2 y_x}{dx^2}$$

lub

$$\frac{1}{y_t} \frac{d^2 y_t}{dt^2} = \frac{c^2}{y_x} \frac{d^2 y_x}{dx^2}. \quad (3a)$$

Lewa strona równania (3a) nie zależy od  $x$ , prawa — od  $t$ , równanie zatem wtedy tylko może być spełnione, gdy zarówno prawa, jak i lewa jego strona są równe wielkości stałej. Oznaczmy ją przez  $-\frac{4\pi^2}{T_1^2}$ . Będziemy mieli

$$\frac{d^2 y_t}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_1^2} y_t \quad \text{i} \quad \frac{d^2 y_x}{dx^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{4\pi^2}{T_1^2} y_x. \quad (4)$$

Pierwszemu z równań (4) zadość czyni, jak to można łatwo sprawdzić, wartość  $y_t$ , wyrażona jednym z dwóch poniższych wzorów

$$y_t' = y_0^{(i)} \sin \frac{2\pi t}{T_1} \quad \text{lub} \quad y_t'' = y_0^{(i)} \cos \frac{2\pi t}{T_1}, \quad (5)$$

drugiemu zaś z równań (4) — wartość  $y_x$

$$y_x' = \sin \frac{2\pi x}{cT_1} \quad \text{i} \quad y_x'' = \cos \frac{2\pi x}{cT_1}. \quad (5a)$$

W przypadku przez nas rozpatrywanym struna nie jest wszakże nieograniczenie długa, lecz umocowana w punktach  $A$  i  $B$ ; w tych punktach wychylenie stale jest równe zero; dla  $x$  zatem równego



zeru lub 1 wartość  $y_x$  musi być równa zero. Temu warunkowi może uczynić zadość jedna tylko z wartości  $y_x$ , wyznaczonych przez wzór (5a), a mianowicie

$$y_x = \sin \frac{2\pi x}{cT_i} = \sin \frac{\pi \cdot 2x}{cT_i} = \sin h \cdot 2x \quad (6)$$

i to jedynie wtedy, gdy  $\frac{2l}{cT_i}$  jest równe  $n$ ,  $n$  zaś jest jakąkolwiek liczbą z szeregu liczb całkowitych 1, 2, 3, ... Stąd wynika, że częstości drgań składowych wyrażają się wzorem

$$\nu_i = \frac{1}{T_i} = \frac{nc}{2l} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{P}{\delta}} = n\nu_1 \quad (7)$$

Wartość czynnika  $cT_i = \lambda_i$  argumentu funkcji  $y_x$ , którą nazywamy funkcją własną równania (3), znajdujemy ze wzoru

$$\frac{2l}{cT_i} = \frac{2l}{\lambda_i} = n, \text{ stąd } \lambda_i = \frac{2l}{n}. \quad (7a)$$

Podstawiając na  $n$  kolejne liczby całkowite, otrzymamy tzw. wartości własne argumentu funkcji  $y_x$

$$h_1 = \frac{\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2l}; \quad h_2 = \frac{\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{2l}; \quad h_3 = \frac{\pi}{\lambda_3} = \frac{3\pi}{2l} \dots$$

Odchylenie  $y^{(i)}$ , czyniące zadość warunkom granicznym, wyrazi się wzorem

$$y^{(i)} = y_0^{(i)} \sin \left( \frac{\pi}{\lambda_i} \cdot 2x \right) \cdot \sin \frac{2\pi c}{\lambda_i} \cdot t \quad (8)$$

lub

$$y^{(i)} = y_0^{(i)} \sin \left( \frac{\pi}{\lambda_i} \cdot 2x \right) \cdot \cos \frac{2\pi c}{\lambda_i} \cdot t, \quad (8a)$$

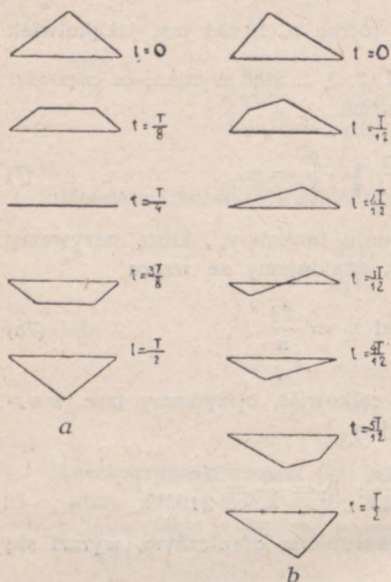
gdzie  $y_0^{(i)} \sin \left( \frac{\pi}{\lambda_i} \cdot 2x \right)$  jest amplitudą danego drgania harmonijnego prostego.

Rozwiązanie ogólne otrzymamy, sumując wzory (8) i (8a) po podstawieniu do nich wartości własnych i pisząc  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ ,

$$y = y_0' \sin \frac{\pi \cdot 2x}{2l} \sin \omega_1 t + y_0'' \sin \frac{2\pi \cdot 2x}{2l} \cdot \sin 2\omega_1 t + \\ + y_0''' \sin \frac{3\pi \cdot 2x}{2l} \sin 3\omega_1 t + \dots y_0^{(n)} \sin \frac{n\pi \cdot 2x}{2l} \sin n\omega_1 t + \dots \quad (8b)$$



Kształt fali złożonej zależy od położenia na strunie miejsca zaburzenia początkowego, to zn. miejsca, w którym struna została szarpnięta. Najprostszy stosunkowo obraz otrzymujemy, gdy punkt wzbudzony leży dokładnie pośrodku struny,



rys. 63a i b

wtedy wszystkie punkty struny przechodzą jednocześnie przez położenie równowagi i jednocześnie dochodzą do największych możliwie odchyżeń; gdy punkt wzbudzenia leży w odległości  $1/3$  od jednego z końców struny, zjawisko staje się bardziej zawiłe. Kolejne położenie struny w pierwszym i drugim przypadku odtwarzają rys. 63a, 63b wzięte z pracy Kalähnego (1927 r.), przy czym na rys. 63a są podane położenia struny co  $\frac{1}{8}$  okresu drgania jej tonu zasadniczego, na rys. 63b -- co  $\frac{1}{12}$ .

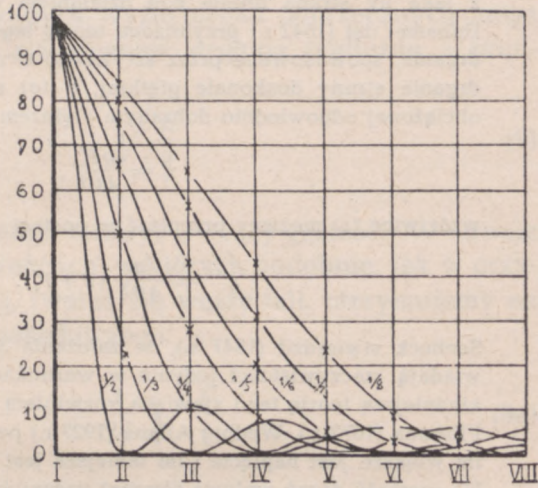
Od położenia na strunie miejsca szarpnięcia zależy również i barwa dźwięku, w którym znikają te wyższe tony harmonijne, jakie mają węzeł w punkcie szarpnięcia.

Drgania poszczególnych punktów struny nie są na ogół jednokowe, lecz zależą od odległości danego punktu zarówno od końców struny, jak i punktu szarpnięcia. Jasną jest bowiem rzeczą, że drganie punktu, w którym przypada węzeł  $n$ -tego tonu harmonijnego, różni się od drgania punktu, na który przypada strzałka tego tonu. Obraz drgania danego elementu struny można otrzymać albo przy pomocy mikroskopu wibracyjnego (p. str. 67) albo też, jak to zrobili Krigar-Mentzel i Raps, rzucając obraz danego elementu struny na błonę fotograficzną, nawiniętą na walec, poruszający się ruchem śrubowym.

Rozkładając drganie wypadkowe na szereg Fouriera i znając odchylenie od położenia równowagi poszczególnych ele-



mentów długości struny w chwili  $t=0$ , a więc w chwili jej wzbudzenia, można obliczyć, czego tu robić nie będziemy, odchylenie ich w dowolnej chwili  $t = t_1$  oraz stosunek wzajemny energii tonów struny. Obliczenia te dla pewnych położeń miejsca wzbudzenia wykonał Auerbach; wynik jego obliczeń graficznie odtwarza rys. 64, na którym rzymskie cyfry osi odciętych oznaczają częstotliwości tonów harmonicznych, równych (I) częstotliwości tonu zasadniczego i dwa (II), trzy (III) ... osiem (VIII) razy większych, rzędne zaś energie, odpowiadające tym tonom, i wreszcie ułamki przy krzywych stosunki odcinków, na jakie punkt wzbudzony dzieli umocowaną w dwóch punktach strunę. Z rysunku tego



rys. 64

wynika, że dźwięk najbogatszy w wyższe tony harmoniczne otrzymamy przy wzbudzeniu w punkcie leżącym w odległości  $\frac{1}{8} l$  od jednego z umocowanych punktów struny. Wnioski te znalazły na ogół potwierdzenie w doświadczeniach, wykonanych przez Krigar-Menzel'a i Rapsa (1893 r.) oraz Mortona i Vinycomba (1904 r.). Z góry można jednak przewidzieć, że zgodność wyników doświadczeń z wnioskami, opartymi na wyżej przytoczonych rozważaniach, nie może być doskonała. Żadne bowiem z dwóch podstawowych założeń: ani to, że punkty zamocowania są zupełnie nieruchome, ani też, że struna jest doskonale giętka, nie są nigdy w rzeczywistości spełnione. Z tego też powodu częstość tonu zasadniczego różni się zazwyczaj od obliczanej ze wzoru (2).



Wpływ sztywności ujawnia się, rzecz prosta, najbardziej w strunach metalowych. N. Savart, który pierwszy stwierdził (1842 r.), że ton drgającej struny metalowej jest wyższy od tonu, którego należałoby się spodziewać, stosując wzór (2), założył, na podstawie swych pomiarów, że częstość tonu obserwowanego można wyrazić wzorem

$$v''^2 = v_1^2 + v_0^2, \quad (a)$$

gdzie  $v_1$  jest częstością, obliczaną ze wzoru (2),  $v_0$  zaś częstością, z jaką by struna drgała pod działaniem własnej tylko sztywności. Duhamel dał (1842 r.) przybliżoną teorię tego zjawiska, przyjmując, że drganie, spowodowane przez sztywność struny, ma częstość taką, jak drganie struny doskonale giętkiej, o tej samej długości i gęstości, obciążonej odpowiednio dobranym ciężarem  $P'_0$ , tak że mamy

$$v_0^2 = \frac{g P'_0}{4 l^2 \delta},$$

wzór więc (a) możemy przepisać w postaci

$$v''^2 = \frac{g}{4 l^2 \delta} (P + P'_0). \quad (b)$$

Seebeck stwierdził (1847 r.), że założenia Savarta i Duhamela odpowiadają rzeczywistości jedynie w warunkach szczególnych i dał dokładniejszą teorię tego zjawiska, rozwiniętą następnie przez Rayleigha i Brauna (1872 r.). Według Allana (1927 r.) poprawka jest tym mniejsza, im większe jest napięcie i im mniejsza jest częstość danego tonu.

Na częstość drgań wpływa również rodzaj środowiska, w którym struna się znajduje i którego cząstki unosi w swym ruchu drgającym, co powoduje pozorny wzrost masy struny i obniżenie tonu zasadniczego. Laird znalazł (1898 r.), że częstości drgań tej samej struny wynoszą w powietrzu 70,8, w wodzie 70,1, w rtęci 43,0, w glicerynie od 15 do 22 drgań na sekundę. Próby Kolaceka (1879 r.) i Kalähnego (1915 r.) ujęcia tej zależności we wzory dały wyniki dodatnie jedynie w przypadku płynów o gęstości niewielkiej.

Drganie zarówno całej struny, jak i poszczególnych jej elementów oraz stosunek energii tonu zasadniczego do energii wyższych tonów harmonijnych zależą w wysokim stopniu od sposobu wzbudzenia drgań struny, a więc od tego, czy, jak to przyjmowaliśmy wyżej, struna została pobudzona do drgania przez szarpnięcie (cytra lub harfa) czy przez pociągnięcie smyczkiem (skrzypce) czy wreszcie przez uderzenie (fortepian). W tym ostatnim przypadku energia wyższych tonów harmonijnych może być w pewnych warunkach większa od energii tonu zasadniczego. Zagadnień tych rozpatrywać tu nie będziemy.



Poświęcono im wiele prac teoretycznych i doświadczalnych, że wymienimy tu prace Helmholtza, zebrane w podstawowym dla akustyki dziele „Die Lehre von der Tonempfindungen” (Nauka o wrażeniach dźwiękowych, 1862 r.), dalej W. Kaufmanna (1895 r.), Bartona i jego współpracowników (1909 r. i nast.), George’a (1925 r.) i ostatnio paru uczonych hinduskich Ramana i Banerji’ego (1929 r.) oraz Bhargavy i Gosha (1924 i 1925 r.).

Oprócz rozpatrywanych wyżej drgań poprzecznych mogą w strunie rozchodzić się również drgania podłużne z prędkością

$$c' = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9)$$

gdzie  $E$  — moduł Younga struny,  $\rho$  — jej gęstość. W strunie umocowanej na dwu końcach, w których podobnie, jak w przypadku fali poprzecznej, tworzą się węzły fali, otrzymujemy na częstość drgań tonu zasadniczego

$$\nu_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9a)$$

(znaczek 1 od łac. longitudinalis — podłużny).

Oznaczając przez  $q$  przekrój struny i podstawiając do wzoru (2)  $q\rho$  zamiast  $\delta$ , przepiszemy wzór (2) w postaci

$$\nu_t = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{q\rho}}$$

(znaczek  $t$  od łac. transversalis — poprzeczny). Stąd na stosunek  $\nu_t$  do  $\nu_1$  otrzymujemy

$$\frac{\nu_t}{\nu_1} = \sqrt{\frac{P}{qE}} \quad (10a)$$

Niech  $\Delta l$  oznacza wydłużenie struny, spowodowane przez obciążenie  $P$ . Mamy wtedy (tom I, str. 201)

$$\frac{P}{q} = p = E \frac{\Delta l}{l},$$



skąd ostatecznie

$$\frac{v_t}{v_1} = \sqrt{\frac{\Delta l}{l}}. \quad (10b)$$

Drgania podłużne mają zatem częstość taką, jaką by miały drgania poprzeczne przy takim obciążeniu  $P$ , któreby powodowało dwukrotne zwiększenie długości struny. Wzór ten potwierdziły pomiary Cagniard de la Toura.

W doświadczeniu Cagniard de la Toura długość struny wynosiła 1480 cm, stosunek zaś częstości drgań  $\frac{v_t}{v_1} = 0,0593$ . Stąd na wydłużenie struny  $\Delta l$  pod działaniem obciążenia  $P$  znajdujemy

$$\Delta l = l \left( \frac{v_t}{v_1} \right)^2 = 1480 \cdot (0,0593)^2 = 5,18 \text{ cm.}$$

Z bezpośredniego pomiaru Cagniard de la Tour otrzymał  $\Delta l = 5$  cm, a więc wartość, różniącą się mniej, niż o 4% od obliczonej.

## 2. — DRGANIA PRĘTÓW I SZTAB.

W ten sam sposób, jak w strunach, rozchodzić się będą drgania podłużne również w prętach lub sztabach, to zn. wydłużonych ciałach stałych, których wymiary poprzeczne są, podobnie jak w strunach, małe w porównaniu z długością ciała, lecz których współczynnik sztywności nie jest tak, jak w strunach, równy zero, gdzie zatem prędkość rozchodzenia się tego rodzaju zaburzeń jest, jak to wynika ze wzoru (9), niezależna od sztywności ciała. Drgania te, wzbudzone czy to przez pocieranie ciała w kierunku jego długości czy też przez uderzenie w kierunku osi ciała, rozchodzić się będą z prędkością

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Fale okresowego odkształcenia, odbijające się na końcu ciała, wytworzą ostatecznie tak, jak w strunie, fale stojące, w których rozmieszczenie węzłów i strzałek będzie zależało od sposobu umocowania drgającego pręta. Gdy jeden tylko



z końców pręta jest umocowany, drugi zaś swobodny, tonowi zasadniczemu odpowiadać będzie fala, której węzeł znajduje się w punkcie zamocowania, strzałka zaś — na końcu swobodnym (rys. 65a, na którym odcinki odłożone w kierunku prostopadłym do osi pręta  $O_x$ , odtwarzają odchylenia od położenia równowagi w chwili największego wychylenia). Długość tej fali równa jest więc  $4l$ , gdzie  $l$  — długość pręta. Stąd na częstość drgań otrzymamy

$$v_1' = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (11)$$

Warunkowi, aby węzeł był w  $O$ , strzałka na końcu pręta, czyni zadość również fala o długości  $\lambda = \frac{3}{4} l$  (rys. 65b), a więc o częstości

$$v_1'' = \frac{3}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

jak również fala o długości  $\frac{4}{5} l$  (rys. 65c), o częstości zatem

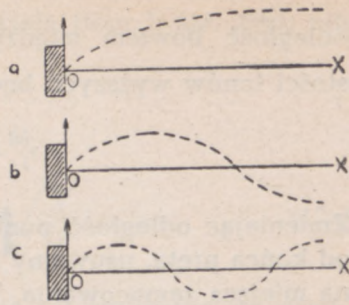
$$v_1''' = \frac{5}{4} l \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Mamy przeto ogólnie

$$v_1^{(n)} = \frac{(2n-1)}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (11a)$$

Gdy obydwie końce pręta są swobodne, tak że na końcach powstają strzałki fali stojącej, częstość drgań tonu zasadniczego otrzymamy ze wzoru

$$v_1' = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (12)$$



rys. 65



odległość bowiem między strzałkami  $l$  równa jest  $\frac{\lambda}{2}$ ; częstości tonów wyższych będą wtedy równe

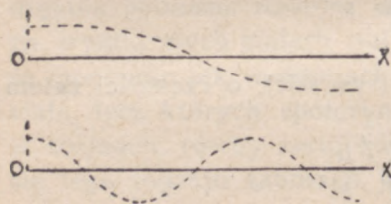
$$v_1^{(n)} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (12a)$$

Zmieniając odległość punktu zamocowania (lub zawieszenia) od końca pręta, usuwamy te tony, których węzeł nie przypada na miejsca zamocowania. Tak np. umocowując pręt pośrodku, uniemożliwiamy powstanie wszystkich tonów wyższych, których węzeł nie leży w środku; w tym więc przypadku znikają wszystkie drgania, dla których  $n$  jest parzyste. Częstoci kolejnych tonów harmonijnych wyrażają się wtedy wzorem

$$v_1^{(n)} = \frac{2n-1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (12b)$$

drgania więc zachodzą tak, jak w pręcie, umocowanym na jednym końcu i mającym długość dwa razy mniejszą. (rys. 66).

W pręcie, umocowanym na obydwu końcach, węzły fali stojącej tworzą się w punktach zamocowania; częstoci drgań składowych wyraża wtedy wzór (12a).



rys. 66

Gdy pręt pocierany jest (np. smyczkiem) nie w kierunku swej osi, lecz w kierunku, tworzącym z osią kąt większy od zera, wtedy poza drganiami podłużnymi powstają w pręcie jeszcze drgania, wzbudzone przez skręcenie, jakie zachodzi

na skutek pocierania. Zakładając, że i tym razem, jak we wszystkich przypadkach poprzednich, odkształcenie jest dostatecznie małe, aby podlegało prawom, omówionym w ust. 2—5 rozdz. V tomu I, znajdziemy, stosując rozumowanie analogiczne do tego, jakim posługiwaliśmy się w ust. 2 rozdz. I, że prędkość rozchodzenia się fal skręcenia w pręcie o przekroju kołowym równa jest

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (13)$$



gdzie  $\mu$  — współczynnik sztywności ciała (tom I, str. 209), lub z uwagi, że

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)},$$

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{2(1+\sigma)}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (13a)$$

Stosunek prędkości rozchodzenia się fal skręcenia do prędkości rozchodzenia się fal podłużnych jest wielkością stałą; w stałym przeto stosunku będą również dla danego pręta długości fal składowych oraz odpowiadające im częstości drgań. Tak np. na częstość tonu zasadniczego w pręcie, umocowanym na jednym końcu, otrzymamy

$$v_s = \frac{c_s}{\lambda} = \frac{1}{4l\sqrt{2(1+\sigma)}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (14)$$

fale skręcenia bowiem będą miały, podobnie jak fale podłużne, węzeł w punkcie zamocowania, strzałkę — na końcu swobodnym. Wzory wyprowadzone dla fal podłużnych będą zatem po uwzględnieniu stosunku prędkości  $c_s$  i  $c_l$  obowiązywały i w tym przypadku.

Ze wzorów (11) i (14) znajdujemy, że stosunek częstości drgań tonu zasadniczego, otrzymanego przy pocieraniu podłużnym pręta, do częstości drgań, wzbudzanych przy pocieraniu poprzecznym (gdy kierunek pocierania tworzy z osią pręta kąt  $90^\circ$ ) wynosi

$$\frac{v_l}{v_s} = \sqrt{2(1+\sigma)}, \quad (14a)$$

skąd można, jak to pierwszy wykazał (1825 r. i nast.) Savart, obliczyć współczynnik Poissona. W ten właśnie sposób wyznaczył (1844 r. i nast.), Wertheim  $\sigma$  dla paru metali, otrzymując wartości, niewiele różniące się od znalezionych przy użyciu innych metod.

Gdy pręty mają przekroje różne od kołowych, prędkość  $c_s$  zależna jest od stosunku ich wymiarów w różnych kierunkach. Schulze opierając się na teorii de Saint-Venanta (tom I, str. 215), wyznaczył



(1904 r.) prędkość rozchodzenia się fal skręcenia w tego rodzaju prętach, znajdując np. dla prętów o przekroju prostokątnym

$$c_s = A \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (14b)$$

gdzie  $a, b$  są długościami boków przekroju,  $A$  — funkcją ich stosunku  $\frac{a}{b}$ .

We wszystkich więc dotychczas rozpatrywanych przypadkach fal poprzecznych i podłużnych struny, fal podłużnych i fal skręcenia pręta lub sztaby, stosunek częstości drgań składowych można zawsze wyrazić szeregiem liczb całkowitych.

Też prosty stosunek przestaje obowiązywać, gdy poprzeczna fala zaburzeń jest wywołana przez zgięcie pręta lub sztaby, a więc innymi słowy przez odchylenie danej warstwy z położenia równowagi w kierunku prostopadłym do osi ciała.

Teoria rozchodzenia się tego rodzaju zaburzeń, które zazwyczaj mamy na myśli, gdy mówimy o drganiach poprzecznych ciał stałych, daje na częstość drgań składowych wzór

$$v_t^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \frac{K_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot B_p}{S \cdot \rho}}, \quad (15)$$

gdzie  $B_p$  jest momentem bezwładności przekroju sztaby (tom I, str. 218),  $S$  — polem przekroju,  $E$  — modułem Younga,  $\rho$  — gęstością danego ciała,  $K_n$  — liczbą, mającą różne znaczenia, zależnie od sposobu zamocowania sztaby oraz od rzędu  $n$  danego drgania. W przypadku pręta lub sztaby, umocowanych na jednym końcu, wartość  $K_n$  można, z dużym przybliżeniem, wyrazić szeregiem liczb

$$1,194 \frac{\pi}{2}; 2,989 \frac{\pi}{2}; 5 \frac{\pi}{2}; 7 \frac{\pi}{2} \dots (2n-1) \frac{\pi}{2}. \quad (15a)$$

Oznaczając częstość drgań tonu zasadniczego przez 1, na częstości względne tonów składowych otrzymamy

$$1; 6,27; 17,57; 34,37; 56,84 \dots \quad (15b)$$

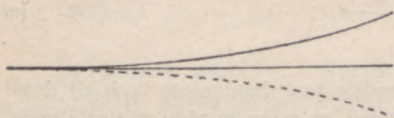


Obraz drgań najniższego tonu sztaby, w ten sposób zamocowanej, odtwarza schematycznie rys. 67. Częstość tonu zasadniczego zależy od kształtu przekroju pręta: dla pręta lub sztaby prostokątnych mamy podstawiając do wzoru (15)

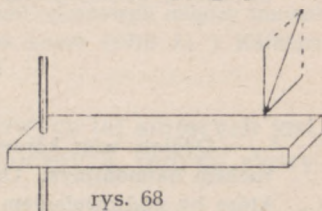
$$B_p = \frac{1}{12} ab^3 \quad (\text{tom I, str. 218}),$$

$$v_t' = \frac{1}{2\pi} \frac{K_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot ab^3}{12 ab \cdot \rho}} = \frac{1}{4\pi} \frac{K_1^2 b}{l^2 \sqrt{3}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (15c)$$

Ton zatem będzie wyższy, gdy odkształcenie zachodzić będzie w kierunku szerszego boku pręta lub sztaby, gdy więc



rys. 67



rys. 68

kierunek drgania będzie prostopadły do boku węższego. Jeżeli ciało pobudzimy do drgania przez uderzenie w kierunku prostopadłym do osi, lecz tworzącym z normalnymi do powierzchni bocznych kąt różny od zera (rys. 68), drganie wzbudzone będzie wypadkowym drgań składowych, z których każde będzie równoległe do jednego z boków pręta i będzie posiadało odpowiadającą temu kierunkowi częstość drgania. Końce drgających w ten sposób prętów będą opisywały krzywe, analogiczne do krzywych Lissajous, jak to można łatwo sprawdzić, obserwując silnie oświetlone wypolerowane końce drgających prętów.

Na tym oparta jest budowa tzw. kalejdo fonu (gr. kalos — piękny, ejdos — postać) Wheatstone'a.

Gdy różnica rozmiarów poprzecznych jest niewielka, koniec pręta drga tak, jak gdyby drgania składowe posiadały tę samą częstość drgań i zmieniającą się w sposób ciągle różnicę faz. Koniec pręta opisuje wtedy kolejno linię prostą, elipsę, koło, znów elipsę i linię prostą o kierunku prostopadłym do poprzedniego itd. (p. rozdz. I, ust. 9). Szczególnie wyraźnie można zjawisko to obserwować używając prętów o przekroju mało różniącym się od kołowego.



Dla prętów i sztab o przekroju kołowym otrzymujemy podstawiając  $B_p = \frac{\pi r^4}{4}$  (tom I, str. 218)

$$v'_t = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{K_1}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot \pi r^4}{4\pi r^2 \cdot \rho}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{K_1 r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (15d)$$

Wyprowadzenie wzoru (15) nastęrcza spore trudności matematyczne, dlatego też poprzestaniemy na dowodzie przybliżonym, podanym przez Wüllnera.

Ze wzoru (9) na str. 219 tomu I otrzymujemy następujący związek między strzałką zgięcia pręta, umocowanego w jednym końcu, i siłami sprężystości, wzbudzonymi przez zgięcie i działającymi na swobodny koniec pręta,

$$f = \frac{3E \cdot B_p}{l^3} \cdot s. \quad (a)$$

Odgięty więc koniec sztaby będzie pod działaniem tych sił drgał ruchem harmonijnym. Oznaczmy przez  $m$  masę punktu materialnego, która by pod działaniem tych samych sił wykonywała drgania o tym samym okresie. Będziemy mieli

$$f = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m \cdot s. \quad (b)$$

Masa ta będzie oczywiście proporcjonalna do masy pręta, równej  $S \cdot l \cdot \rho$  gdzie  $S$  — przekrój,  $l$  — długość pręta. Oznaczmy czynnik proporcjonalności przez  $\frac{3}{K^4}$ . Podstawiając tę wartość  $m$  do (b) i przyrównując (a) i (b), otrzymujemy

$$\frac{3E \cdot B_p}{l^3} \cdot s = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{3}{K^4} \cdot l \cdot S \cdot \rho \cdot s,$$

skąd

$$T = \frac{2\pi \cdot l^2}{K^2} \sqrt{\frac{S \cdot \rho}{E \cdot B_p}}$$

i ostatecznie

$$v' = \frac{1}{T} = \frac{K^2}{2\pi \cdot l^2} \sqrt{\frac{E \cdot B_p}{S \cdot \rho}},$$

gdzie  $K$ , jak to wyznaczył Seebeck, równe jest  $1,194 \frac{\pi}{2}$ .



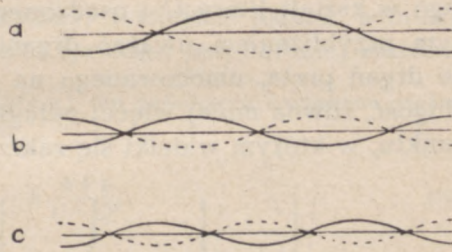
Oprócz tego drgania zasadniczego zgięcie sztaby wzbudza drgania o częstościach wyższych, przy których sztaba rozpada się jakby na poszczególne drgające części, oddzielone od siebie węzłami. Tym częstościom wyższym odpowiadają wartości  $K_n$  wyrażone wyżej szeregiem (15a). Wartości te można wyznaczyć, rozwiązując równanie ogólne, do którego doprowadzają nas rozważania analogiczne do tych, jakimi posługiwaliśmy się przy wyprowadzeniu równania drgania struny (ust. 1), i które tym razem ma kształt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

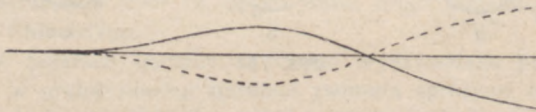
gdzie  $a = \sqrt{\frac{E \cdot B_p}{S \cdot \rho}}$

Teorię rozchodzenia się tych zaburzeń opracowali między innymi Poisson, Seebeck, Rayleigh, później zaś Lamb (1910 r.) i Kalähne (1913 r.).

Położenie węzłów i strzałek składowych fal stojących jest, oczywiście, zależne od warunków granicznych, innymi słowy, od sposobu umocowania pręta czy sztaby. Tak np. w pręcie o końcach swobodnych fala drgania zasadniczego posiada dwa węzły (rys. 69), znajdujące się, według Seebecka, w odległości 0,22421 od bliższego z dwóch końców swobodnych, na których tworzą się strzałki, i w odległości wzajemnej równej 0,55161; fala pierwszego tonu wyższego ( $n=2$ ) tworzy trzy węzły:



rys. 69



rys. 70

dwa w odległościach 0,13211 od końców swobodnych, trzeci — w połowie długości sztaby itd. W pręcie o jednym końcu swobodnym (rys. 70) jeden węzeł pierwszego tonu wyż-

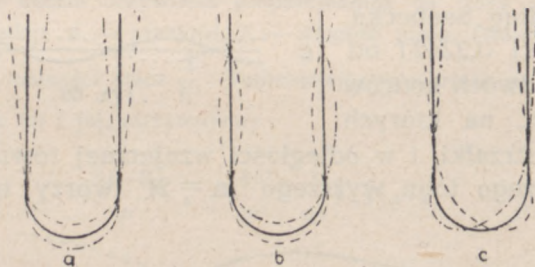


szego przypadku w miejscu zamocowania, drugi zaś na przekroju odległym o  $0,226l$  od końca swobodnego.

Położenie węzłów można wyznaczyć, jak to pierwszy wykazał (1787 r.) Chladni, posypując pręt lub sztabę suchym piaskiem; piasek, odrzucany przez drgające części ciała, zbiera się w węzłach, zaznaczając w ten sposób ich położenie. Pomiar, wykonany przy użyciu tej metody między innymi przez Strohlkego i Lissajous'a, dały wyniki, mało różniące się od otrzymanych ze wzorów.

W ten właśnie sposób F. Savart stwierdził, że podłużnym drganiom pręta lub sztaby towarzyszą zawsze drgania poprzeczne: piasek, którym był posypyany pręt pocierany podłużnie, zbierał się poza tymi miejscami, które odpowiadały węzłom fali podłużnej, jeszcze w punktach, odpowiadających węzłom fali poprzecznej. Energia drgań poprzecznych jest jednak wtedy o wiele mniejsza od energii drgań podłużnych.

Takie same mniej więcej położenie węzłów otrzymamy w zakrzywionym pręcie lub sztabie. W najważniejszym w praktyce przypadku widełek strojowych — kamertonu — tzn. pręta metalowego o przekroju prostokątnym, zgiętego w kształt litery *U* i osadzonego na nóżce, można z pewnym przybliżeniem uważać drganie widełek za analogiczne do drgań pręta, umocowanego na jednym końcu i mającego długość, równą mniej więcej odległości swobodnego końca od punktu, w którym widełki się zakrzywiają. Zgodnie z tym za-



rys. 71

łożeniem częstość drgań tonu zasadniczego wyraziłaby się wzorem (15c); gdzie *b* oznacza grubość prętów kamertonu, mierzoną w płaszczyźnie tych prętów, zazwyczaj bowiem za ton charakterystyczny kamertonu uważa się ton o drganiach, zachodzących w tej właśnie płaszczyźnie. Gdyby kamerton nie



miał nóżki, fala stojąca tonu zasadniczego miałaby kształt taki, jak na rys. 71a, fala zaś pierwszego tonu wyższego ( $n = 2$ ) taki, jak na rys. 71b, węzły jej byłyby oddalone od swobodnych końców mniej więcej o 0,2 połowy całkowitej długości widełek. Fale tonów wyższych posiadałyby odpowiednio większą ilość węzłów. Tego rodzaju obraz drgań kamertonu, podany przez Chladni'ego, może w pewnych przypadkach wystarczyć. Doświadczenia istotnie stwierdzają, że kamerton wykonywa drgania złożone o parzystej i nawet, jak się zdaje, nieparzystej liczbie węzłów (wyjątek stanowi drganie o trzech węzłach, wtedy bowiem środek masy kamertonu przesuwałby się silnie w jedną i drugą stronę, (rys. 71c), przy czym położenie węzłów mniej więcej odpowiada założeniom Chladni'ego: gdy np. pobudzimy kamerton do drgania, uderzając go lub pociągając smyczkiem w punkcie bliskim swobodnego końca, mniej więcej w węzle pierwszego tonu wyższego, otrzymamy czysty ton zasadniczy, gdy zaś punkt wzbudzenia leży blisko zakrzywionej części kamertonu, mniej więcej w węzle tonu zasadniczego, usłyszymy pierwszy ton wyższy, ściślejsze jednak pomiary wykazały, że w rzeczywistości zjawisko jest bardziej złożone.

Według Mercadiera (1874 r.) ton zasadniczy kamertonu można wyrazić wzorem empirycznym

$$v' = k \frac{b + \beta}{(l + L)^2}, \quad (16)$$

gdzie  $k$ ,  $\beta$  i  $L$  są wielkościami stałymi, mającymi u różnych badaczy różne wartości.

Według Mercadiera,  $\beta = 0$ ;  $k = 818270$ ,  $L = 3,8$  mm, według Auerbacha (1909 r.),  $k = 818000$ ,  $\beta = 0,5$  mm,  $L = 3,8$  mm. Z licznych prac poświęconych zagadnieniu drgań kamertonu wymienimy jedynie pracę Struykeny (1907 r.), dającą obraz drgań zupełnie odmienny od obrazu Chladni'ego.

W zegarach godziny są często wydzwaniane przez uderzenia młotka w grubą, płaską, spiralnie zwiniętą sprężynę, umocowaną na jednym końcu; wysokość tonu jest wtedy większa, niż w przypadku drutu prostego, zakrzywienie bowiem zwiększa siły, występujące przy odkształceniu.

W orkiestrach używane są ksylofony i celesty. Ksylofon (gr. ksylo — drewno) składa się z drewnianych płytek o tej samej najczęściej grubości i szerokości, lecz o różnej długości, przymocowanych

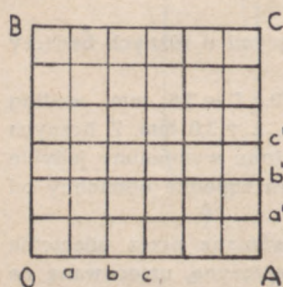


lub podpartych w punktach węzłowych tonu zasadniczego. W celestach źródłem drgań są drgania wydrążonych rur metalowych o cienkich ścianach. W pozytywkach twarde ostrza, umieszczone w odpowiednich odstępach na obracającym się walcu, odginają końce cienkich sztabek (stroików), o różnych długościach i wprawiają je w ten sposób w drganie.

### 3. — DRGANIA BŁON I PŁYT.

Struny i pręty uważaliśmy w ustępach poprzednich za ciała jednowymiarowe, punkty bowiem znajdujące się w tej samej odległości od dowolnie wybranego punktu osi ciała posiadają w każdej chwili tę samą fazę odkształcenia. Odpowiednikiem dwumiarowym strun i prętów są błony i płyty, przy czym błony, podobnie, jak struny, nie posiadają sztywności, wobec czego mogą drgać poprzecznie jedynie wtedy, gdy są poddane napięciu zewnętrznemu. Częstość drgań błony jest zatem tak, jak częstość drgań struny, funkcją sił zewnętrznych.

W przypadku jednorodnej, równomiernie napiętej błony kwadratowej możemy zdać sobie w przybliżeniu sprawę z przebiegu zjawiska, przyrównując drgania błony do drgań dwu układów strun, skrzyżowanych pod prostym kątem, i wyznaczając częstość drgań własnych błony z położenia na niej linii (nie punktów jak w strunie) węzłowych, łączących węzły poszczególnych fikcyjnych strun. Niech np. w jednakowych strunach, równoległych do boku  $OA$ , węzły w danych warunkach tworzą się w odległościach  $Oa, Ob, Oc \dots$  od boku  $OB$ , wtedy



rys. 72

linie węzłowe błony będą równoległe do tego boku w tych samych odległościach. Podobne węzły w strunach równoległych do  $OB$  spowodują powstanie linii węzłowych, równoległych do  $OA$  i leżących w odległości  $Aa', Ab' \dots$  od tego boku (rys. 72). Te dwa układy linii węzłowych podzielą błonę na tak drgające części, że drgania dwu części sąsiednich będą miały zawsze fazy przeciwne. W przypadku szczególnym,

gdy poza punktami brzeżnymi nie ma innych punktów węzłowych, liniami węzłowymi są boki  $OB, BC, CA$  i  $AO$ . Błona drga wtedy jak całość.



Weźmy za miarę napięcia  $P$  błony wartość siły, działającej na jednostkę długości jakiegokolwiek linii, przeprowadzonej na powierzchni błony (por. tom I, str. 255), i oznaczmy przez  $\delta'$  masę jednostki jej powierzchni. Uogólniając wzór (2a) otrzymamy

$$v_{n,m} = \frac{1}{2l} \sqrt{(n^2 + m^2) \frac{P}{\delta'}}, \quad (17)$$

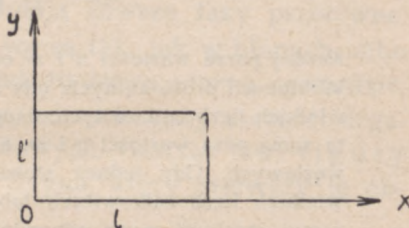
gdzie  $n$  i  $m$  są dowolnymi liczbami całkowitymi. Kładąc częstość tonu zasadniczego równą 1 ( $n=1, m=1$ ), otrzymujemy na zespół częstości drgań błony kwadratowej następujący szereg liczb

$$1 \quad 1,58 \quad 2 \quad 2,24 \quad 2,55 \quad 2,92 \quad 3,00$$

Przyjmijmy, że mamy do czynienia z równomiernie napiętą prostokątną błoną o długości boków  $l$  i  $l'$  i weźmy płaszczyznę tej błony za płaszczyznę  $yOx$  (rys. 73); poprzeczne drgania błony zachodzić będą wtedy w kierunku osi  $Oz$  (prostopadłej do płaszczyzny rysunku). Uogólniając na dwa wymiary równanie (3) napiszemy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \quad (18)$$

$$\text{gdzie } c = \sqrt{\frac{P}{\delta'}}.$$



rys. 73

We wszystkich punktach obwodu błony wychylenie równe jest zeru, z więc równe jest zeru dla  $x=0$  i  $x=l$  przy dowolnych znaczeniach  $y$  oraz dla  $y=0$  i  $y=l'$  przy dowolnych znaczeniach  $x$ . Tym warunkom oraz równaniu (18) czynią zadość wartości  $z$  wyrażone wzorem

$$z = A \sin \left( \frac{2\pi t}{T_{n,m}} + \varphi \right) \sin n\pi \frac{x}{l} \cdot \sin m\pi \frac{y}{l'}, \quad (18a)$$

które istotnie stają się równe zeru, gdy  $x=0$  lub  $l$  oraz gdy  $y=0$  lub  $l'$ , o ile tylko  $m$  i  $n$  oznaczają dowolne liczby całkowite. Poza tym z stają się równe zeru, 1) gdy przy dowolnej wartości  $y$  odcięta  $x$  równa jest  $\frac{pl}{n}$ , gdzie  $p = 1, 2, \dots, (n-1)$ , a więc w punktach linii prostych, równoległych do osi  $Oy$  i przecinających oś  $Ox$  w wyżej poda-



nych punktach, oraz 2) w punktach linii prostych, równoległych do osi  $Ox$  i przecinających oś  $Oy$  w punktach o rzędnych równych odpowiednio  $\frac{p'l'}{m}$ , gdzie  $p'=1, 2, \dots (m-1)$ .

Te proste stanowią linie węzłowe. Podstawiając (18a) do wzoru (18), znajdziemy

$$\frac{4\pi^2}{T_{n,m}^2} = c^2 \pi^2 \left( \frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{l'^2} \right),$$

skąd

$$v_{n,m} = \frac{1}{T_{n,m}} = \frac{c^2}{4} \sqrt{\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{l'^2}}$$

i ostatecznie

$$v_{n,m} = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{l'^2} \right) \frac{P}{\delta'}}. \quad (18b)$$

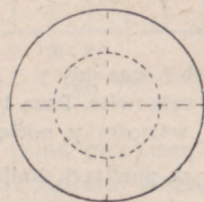
W błonie kwadratowej  $l = l'$  i

$$v_{n,m} = \frac{1}{2l} \sqrt{(n^2 + m^2) \frac{P}{\delta'}}.$$

Każdej parze wartości  $n$  i  $m$  odpowiada oznaczona częstość drgania. W błonach prostokątnych, gdy stosunek  $l$  do  $l'$  wyraża się stosunkiem wielkich liczb całkowitych, danej częstości drgania odpowiada zawsze ta sama para wartości  $n$  i  $m$ , a co za tym idzie i ten sam układ linii węzłowych. Gdy jednak stosunek ten równy jest stosunkowi niewielkich liczb całkowitych lub też, gdy błona jest kwadratowa, tej samej częstości mogą odpowiadać dwie różne pary wartości  $n$  i  $m$ . Tak np. przy  $l:l' = 1:2$  otrzymamy tę samą częstość drgania dla  $n=1$  i  $m=16$

$$\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{l'^2} = \frac{1}{l^2} \left( n^2 + \frac{m^2}{4} \right) = \frac{1}{l^2} \cdot 65 \text{ oraz dla } n=8 \text{ i } m=2.$$

Tych przypadków, dokładnie rozpatrzonych przez Kalähne'go (1913 r.), omawiać tutaj nie będziemy.



rys. 74

W błonie kołowej liniami węzłowymi są promienie błony lub też koła, mające swój środek w środku błony. Tak np. dla częstości drgań 3,501 razy większej od częstości tonu zasadniczego otrzymujemy, według Rayleigha, rozkład linii węzłowych mniej więcej taki, jak na rys. 74.

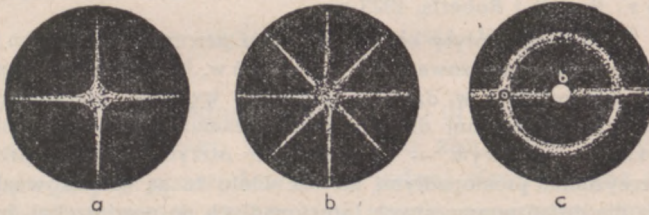


Savart sprawdzał doświadczalnie prawa drgań błony, naciągając na drewnianych ramach błony papierowe i pergaminowe. Drgania błon kwadratowych badali Bourget i Bernard (1860 r.), później, między innymi, Antolik (1890 r.) i Terada (1908 r.). Poza pracami teoretycznymi Poissona i Rayleigha należy wymienić pracę Mathieu (1868 r.), który badał drgania płyt eliptycznych.

W praktyce błony są używane najczęściej w przyrządach pomiarowych (rozdz. I, ust. 4) a to ze względu na znaczne zazwyczaj tłumienie ich drgań własnych (p. rozdz. II, ust. 4). Poza tym stanowią one zasadniczą część tzw. kotłów, w których naciągnięte błony zamykają otwór wydrążonych ciał o kształcie zbliżonym do półkuli, i bębnow, gdzie błona jest naciągnięta na dwu otwartych podstawach pustego wnętrza walca.

W płytach częstość poprzecznych drgań własnych jest wyznaczona przez współczynniki sprężystości płyty (moduł Younga i współczynnik Poissona lub współczynnik sztywności), następnie zaś przez kształt i sposób zamocowania płyty. I tym razem linie węzłowe dzielą płytę na oddzielnie drgające części; drgania sąsiednich części mają zawsze fazy przeciwne. W płytach kolistych linie węzłowe są tak, jak w błonach, albo promieniami albo też kołami, jak to łatwo można sprawdzić, posypując płytę piaskiem, który, zdmuchiwany z części drgających, zbiera się w liniach węzłowych, tworząc tzw. figury Chładni'ego (od nazwiska fizyka, który pierwszy je obserwował).

Promieniste linie węzłowe otrzymuje się, zamocowując płytkę w środku i uderzając lub pocierając smyczkiem jej brzeg. Gdy unieru-



rys. 75

chomimy (przytrzymując np. palcem) punkt obwodu, leżący na średnicy prostopadłej do średnicy w punkcie pocieranym, otrzymamy rozkład linii węzłowych taki, jak na rys. 75a; gdy unieruchomimy dwa punkty obwodu, leżące na wzajemnie prostopadłych średnicach



i pobudzimy płytkę do drgania w punkcie, leżącym między nimi, otrzymamy obraz taki, jak na rys. 75b. Dla otrzymania kołowych linii węzłowych płytkę należy pobudzać do drgania w punkcie środkowym. Rys. 75c odtwarza otrzymane linie węzłowe, gdy płytkę pociera się smyczkiem w punkcie (b), znajdującym się w wyciętej środkowej części płytki.

Z doświadczeń Chladni'ego, Savarta, Strehlkego, ostatnio zaś Southwella (1922 r.) wynika, że częstość drgań tonu zasadniczego płyty kolistej jest tym większa, im większą jest grubość płyty i mniejszy jej promień.

W często spotykanym przypadku płytki kolistej, umocowanej w środku, częstość drgań czterech tonów najniższych wyraża się według Southwella wzorem

$$v = \frac{d}{r^2} \sqrt{\frac{f_1 \cdot E}{\rho}}, \quad (19)$$

gdzie  $d$  oznacza grubość płytki,  $r$  jej promień,  $f_1$  zaś jest odpowiednio równe 5,156; 160,2; 134,9 i 5250.

Wnioski te są na ogół zgodne z teorią drgania płyty kolistej, opracowaną przez Kirchhoffa (1850 r.).

I w tym dziale nauki o drganiach ważną rolę odgrywają badania Rayleigha, omówione w jego „Teorii dźwięku” (Theory of Sound). Drgania płyt anizotropowych badał Voigt (1915 r.). Ważny w praktycznych zastosowaniach przypadek płyt kolistych, umocowanych na obwodzie, jest przedmiotem licznych badań, zarówno teoretycznych, jak i doświadczalnych (Schulze, 1907 r., Lamb, 1920 r., Carrington, 1925 r., Powell i Roberts, 1923 r.).

Teorię drgań płyty kolistej można z pewnym, niewielkim zresztą przybliżeniem zastosować do dzwonów. Promieniom węzłowym płyty odpowiadają w dzwonie południki węzłowe, otrzymane przez przecięcie powierzchni dzwonu płaszczyznami, przechodzącymi przez oś; kołom węzłowym — linie kołowe, otrzymane przez przecięcie płaszczyznami prostopadłymi do osi. Linie te są jednak węzłowymi tylko dla drgań poprzecznych (prostopadłych do powierzchni dzwonu), nie są zaś węzłowymi dla drgań podłużnych (stycznych do powierzchni dzwonu), towarzyszących zawsze drganiom poprzecznym. Najniższemu tonowi odpowiadają dwie węzłowe linie południkowe, przecinające się pod prostym kątem. Napelnienie naczynia o kształcie dzwonu (np. kielszka) wodą, obniża jego tony własne, masa bowiem drgająca jest wtedy zwiększona.



Większe jeszcze trudności przedstawia zbadanie drgań płyt kwadratowych lub prostokątnych. O różnorodności otrzymywanych tym razem linii węzłowych niech świadczy rysunek 76, odtwarzający linie węzłowe na płytce, umocowanej w środku, a której punkty *a* są nieruchome, punkt zaś *b* jest



rys. 76

pierwotnym źródłem zaburzeń. Wzrastającej złożoności otrzymywanych figur towarzyszy i tym razem wyższy ton drgania płytki.

Wheatstone dał (1833 r.) stosunkowo prosty sposób wykreślenia tych linii, zakładając, że w płytkach, podobnie, jak w błonach, tworzą się dwa wzajemnie prostopadłe układy linii węzłowych, rozdzielających części drgające w fazach przeciwnych. Drgania płytki otrzymujemy sumując te drgania składowe. Tej metody bliżej omawiać nie będziemy.

Teoria drgań płyt kwadratowych została stosunkowo niedawno (1909 r.) opracowana przez Ritza i następnie uogólniona na płyty innych kształtów przez Ellę Goldman (1918 r.). Doświadczalnie badali drgania takich płyt Savart, Wheatstone i Terada (1907 r.)

#### 4. — TŁUMIENIE DRGAŃ. — DRGANIA WYMUSZONE (PODNIĘCANE). — REZONANS.

Jakiegokolwiek jednak byłoby ciało drgające, drgania w nim wzbudzone stopniowo zanikają. To zanikanie energii ruchu drgającego jest spowodowane z jednej strony przez działanie sił rozpraszających układu (sił tarcia wewnętrznego), z drugiej zaś przez pobudzenie do drgania środowiska otaczającego ciało przez oddawanie energii na zewnątrz, przez jej promieniowanie.

Wpływ każdego z tych dwu czynników na tłumienie drgań jest zależny zarówno od rodzaju drgającego ciała, jak



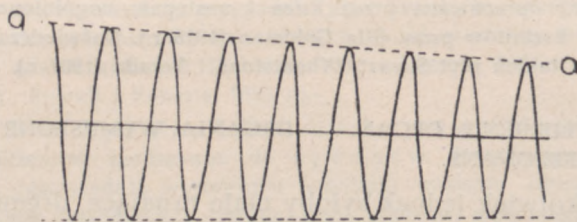
i od rodzaju środowiska. Tak np. struna lub kamerton promieniują niewielką na ogół część swej energii drgania, toteż dźwięki przez nie wydawane mają niewielkie natężenie; drgania ich zanikają głównie na skutek działania sił rozpraszających układu. Błony promieniują o wiele silniej, tym silniej, im gęstsze jest otaczające je środowisko, w wodzie np. silniej, niż w powietrzu — tak, że nieraz, szczególnie, gdy masa błony jest niewielka, tłumienie jest prawie całkowicie spowodowane przez promieniowanie.

Bez względu jednak na to, który z tych czynników przeważa, można zawsze z wystarczającym przybliżeniem przyjąć, że w niezmiennych warunkach stosunek wartości dwu kolejno po sobie następujących największych wychyleń w tę samą stronę posiada wartość stałą. Oznaczmy wartość tę przez  $k$ . Wtedy stosunek amplitud w chwili  $mT$  i  $(m+p)T$  wyrazi się wzorem

$$\frac{s_m}{s_{m+p}} = k^p. \quad (20)$$

O ile tłumienie jest niewielkie, okres tego rodzaju drgań tłumionych lub zanikających pozostaje mniej więcej taki sam, jak poprzednio, krzywa jednak wychyleń zmienia swój

$$K=1,03$$

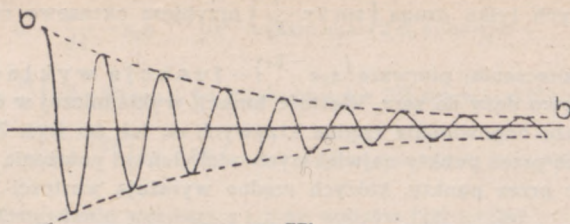


rys. 77a

kształt, chwile bowiem, w których odchylenie ma wartość największą, nie dzielą już na dwie równe części czasu, jaki upływa między jednym i drugim przejściem przez położenie równowagi. Te odstępstwa od nietłumionego drgania harmonijnego stają się w miarę wzrostu wartości  $k$  coraz wyraźniejsze (rys. 77, a, b, c).



$$k = 1.35$$



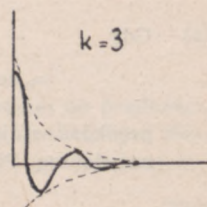
rys. 77b

Wprowadźmy zamiast stosunku  $k$  dwu kolejnych amplitud dekrement logarytmiczny, tzn. logarytm naturalny ich stosunku (tom I, str. 227) i przyjmijmy, że wobec stałego i stopniowego zmniejszania się energii ruchu drgającego amplitudy drgań również zmieniają się w sposób ciągły, tak że dekrement logarytmiczny można uważać za proporcjonalny do okresu drgań. Będziemy wtedy mieli

$$\Delta = I g \frac{s_m}{s_{m+1}} = \delta T, \quad (21)$$

dla stosunku zaś amplitud w chwilach  $mT$  i  $(m+p)T$ .

$$p \Delta = I g \frac{s_m}{s_{m+p}} = \delta \cdot p T. \quad (21a)$$



rys. 77c

Z zestawienia ze wzorem (20) wynika, że

$$\delta = \frac{1}{T} I g k, \quad (21b)$$

gdzie wielkość  $\delta$ , zależną również i od częstości drgań, dla każdego więc tonu harmonijnego mającą inną na ogół wartość, nazwiemy współczynnikiem tłumienia lub po prostu tłumieniem.

Związek między odchyleniami w chwilach  $mT$  i  $(m+p)T$  możemy teraz wyrazić wzorem

$$s_{m+p} = s_m e^{-\delta p T},$$

skąd na odchylenie od położenia równowagi w dowolnej chwili  $t$  otrzymamy pisząc  $T_0$  zamiast  $T$

$$s = s_0 e^{-\delta t} \sin 2\pi \frac{t}{T_0}, \quad (22)$$

gdzie  $s_0$  oznacza amplitudę w chwili  $t = 0$ , którą przyjęliśmy za początkową.



We wzorze (22) mamy do czynienia z iloczynem dwu funkcji czasu, z których tylko druga  $\left(\sin 2\pi \frac{t}{T_0}\right)$  przybiera okresowo co  $T_0$  sek te same znaczenia; pierwsza  $\left(s_0 e^{-\delta t}\right)$  — funkcja wykładnicza — stopniowo dąży do zera. Wartość funkcji wykładniczej w danej chwili  $t$  wyraża odpowiednia rzędna krzywych *aa* lub *bb* (rys. 77), przechodzących przez punkty największych odchyień od położenia równowagi, a więc przez punkty, których rzędne wyrażają wartości funkcji wykładniczej w chwilach  $t = 0, T_0, 2T_0, 3T_0 \dots$  lub  $t = \frac{1}{2} T_0, \frac{3}{2} T_0, \frac{5}{2} T_0 \dots$

Różniczkując wzór (22) otrzymamy na wartość prędkości drgań

$$v = \frac{ds}{dt} = s_0 e^{-\delta t} \left( \frac{2\pi}{T_0} \cos 2\pi \frac{t}{T_0} - \delta \sin 2\pi \frac{t}{T_0} \right)$$

lub, wprowadzając częstość kołową,

$$v = s_0 e^{-\delta t} (\omega_0 \cos \omega_0 t - \delta \sin \omega_0 t). \quad (22a)$$

Gdy

$$\omega_0 \cos \omega_0 t - \delta \sin \omega_0 t = 0, \text{ a więc } \operatorname{tg} \omega_0 t = \frac{\omega_0}{\delta}, \quad (a)$$

prędkość staje się równa zero, odchylenie zaś przybiera wartość największą. Pierwsze zatem maximum wychylenia nastąpi po upływie

$$t_1 = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} \quad (b)$$

sekund od chwili początkowej, w której odchylenie było równe zeru.

Ten odstęp czasu nie jest równy  $\frac{T_0}{4}$  gdyby bowiem tak było,

$$\operatorname{tg} \omega_0 t_1 = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$$

byłby równy nieskończoności, tłumienie więc  $\delta$  równe zeru. Odstępy jednak między kolejnymi przejściami przez położenie największego wychylenia są równe okresom między kolejnymi przejściami przez położenie równowagi a więc równe  $\frac{T_0}{2}$ , jak to wynika ze wzoru (22), Istotnie, drugie maximum odchylenia nastąpi w chwili

$$t_2 = \frac{1}{\omega_0} \left( \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} + \pi \right),$$

po upływie zatem

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T_0 \cdot \pi}{2\pi} = \frac{T_0}{2}$$

sekund od chwili pierwszego maximum.



Na wartość przyspieszenia otrzymujemy ze wzoru, 22a)

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = s_0 e^{-\delta t} \left\{ (\delta^2 - \omega_0^2) \sin \omega_0 t - 2\omega_0 \delta \cos \omega_0 t \right\} = \\ &= -s_0 e^{-\delta t} \left\{ (\omega_0^2 - \delta^2) \sin \omega_0 t + 2\omega_0 \delta \cos \omega_0 t + 2\delta^2 \sin \omega_0 t - 2\delta^2 \sin \omega_0 t \right\} = \\ &= -s_0 e^{-\delta t} \left\{ (\omega_0^2 + \delta^2) \sin \omega_0 t + 2\delta (\omega_0 \cos \omega_0 t - \delta \sin \omega_0 t) \right\} \end{aligned}$$

i po podstawieniu wartości  $s$  i  $v$  ze wzorów (22) i (22a)

$$a = -(\omega_0^2 + \delta^2) s - 2\delta v. \quad (22b)$$

Przyspieszenie jest przeto wynikiem działania dwu sił. Pierwsza jest proporcjonalna do odchylenia od położenia równowagi, działając więc sama powodowałaby drgania harmonijne proste o częstości kołowej  $\omega_1$ , związanej z  $\omega_0$  wzorem (por. tom I, str. 56, wzór 20)

$$C^2 s = \frac{4\pi^2}{T_1^2} s = \omega_1^2 s = (\omega_0^2 + \delta^2) s. \quad (a)$$

Na skutek jednak działania drugiej siły, proporcjonalnej do prędkości, a więc mającej cechy tarcia wewnętrznego (por. tom I, str. 286), częstość drgania wynosi nie  $\omega_1$ , lecz  $\omega_0$ . Ze wzoru (a) otrzymujemy

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 - \delta^2 \quad (22c)$$

lub po uwzględnieniu wzoru (21) i podstawieniu zamiast częstości kołowych odpowiednich okresów

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{4\pi^2}{T_1^2} - \frac{\Lambda^2}{T_0^2},$$

skąd

$$\frac{T_0^2}{4\pi^2 + \Lambda^2} = \frac{T_1^2}{4\pi^2}$$

i ostatecznie

$$T_0 = T_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}. \quad (23)$$

Tłumienie zwiększa więc okres drgania.

W najczęściej spotykanych w praktyce przypadkach zmiana ta nie jest wielka. Tak np., gdy  $k = 25$ , a więc innymi słowy, gdy każde maximum bez względu na znak odchylenia jest 5 razy mniejsze od poprzedniego, co odpowiada drganiom bardzo szybko zanikającym, stosunek  $T_0$  do  $T_1$  wynosi mniej więcej 1,1. Z dalszym jednak wzro-



stem tłumienia stosunek ten szybko wzrasta. Ze wzoru (a) wynika, że częstość kołowa  $\omega$  ma wartość rzeczywistą, gdy

$$C^2 - \delta^2 > 0,$$

gdy więc działanie sprężystości ciała przewyższa działanie tłumienia. W przypadku granicznym, gdy

$$C^2 - \delta^2 = 0$$

$\omega_0$  staje się równe zero,  $T_0$  wzrasta do nieskończoności a przeto i  $k$  staje się nieskończenie wielkie. Gdy

$$C^2 - \delta^2 < 0,$$

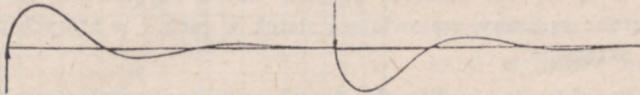
zaburzenia w układzie stają się aperiodycznymi.

Gdy na ciało prócz sił sprężystości i sił tłumienia działają jeszcze również okresowo się zmieniające siły zewnętrzne, odchylenia od położenia równowagi są wypadkowymi odchylen, spowodowanych przez drgania własne ciała, których częstość wyznaczają, jak o tym była wyżej mowa, własności fizyczne i geometryczne ciała, i odchylen, wywoływanych przez siły zewnętrzne i razem z nimi okresowo się zmieniających; te odchylenia stanowią tzw. drgania wymuszone (podniecane) ciała.

Dla uproszczenia weźmy pod uwagę te tylko chwile, w których działanie sił zewnętrznych posiada wartość największą, a więc sprowadźmy te siły do krótkotrwałych impulsów, powtarzających się w prawidłowych odstępach czasu. Przyjmijmy, że odstępów te są o wiele dłuższe od okresu zasadniczego drgania ciała (tym samym, rzecz prosta, i od okresu drgań wszystkich tonów wyższych). Pierwszy impuls, udzielony ciału początkowo nie drgającemu, spowoduje powstanie w nim jego drgań własnych, które, zgodnie z tym, cośmy wyżej mówili, będą prędzej lub wolniej zanikały. Jeżeli tłumienie jest duże, może się zdarzyć, że z chwilą drugiego impulsu odchylenia, spowodowane przez drgania własne ciała, będą dostatecznie małe, abyśmy mogli uważać ciało za niedrgające, a więc znajdujące się w takim samym stanie, jak przy impulsie pierwszym. Odchylenia więc od położenia równowagi o tej samej mniej więcej amplitudzie powtarzać się będą w odstępach czasu,

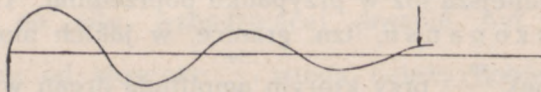


równych odstępom, oddzielającym kolejne impulsy (rys. 78, gdzie  $k = 25$ ). Jeżeli teraz przyjmiemy, że działanie sił zewnętrznych polega nie na pojedynczych impulsach, lecz że zmienia się okresowo np. sinusoidalnie, odchylane od położenia równowagi elementy masy ciała wykonywać będą drgania również sinusoidalne o amplitudzie, która przy pewnej wartości tłumienia może być całkowicie niezależna od stosunku częstości zmian siły działającej do częstości drgań własnych.



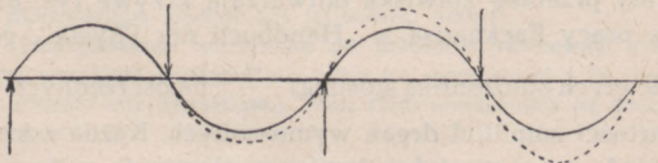
rys. 78

Gdy tłumienie maleje, zwiększa się na ogół wpływ drgań własnych ciała, kolejne bowiem impulsy, że wrócimy znów do założenia, jakim posługiwaliśmy się wyżej, mogą już nie dochodzić do ciała w chwilach, odpowiadających temu samemu stanowi jego ruchu (rys. 79, gdzie stosunek częstości impulsów i częstości drgań własnych ciała jest ten sam, co na rys. 78,  $k$  jednak równe jest 2).



rys. 79

Przy tłumieniu bardzo małym amplitudy drgań wymuszonych wtedy tylko mogą mieć znacniejszą wartość, gdy okres zmian siły zewnętrznej jest prawie lub dokładnie równy okresowi drgań własnych ciała, tylko wtedy bowiem kolejne impulsy będą stopniowo zwiększały amplitudę drgań, która może osiągnąć bardzo wielkie wartości, tym większe, im tu-



rys. 80



mienie jest mniejsze. Wzrastanie amplitudy ustaje dopiero wtedy, gdy energia dostarczona z zewnątrz stanie się równa energii, rozpraszanej w ciele i wypromieniowywanej przez ciało. W granicy, gdy tłumienia nie ma wcale, amplituda może dojść do wartości nieskończenie wielkiej. Taki przypadek w rzeczywistości nigdy nie zachodzi; może się jednak zdarzyć, że przy niewielkim tłumieniu obszerność drgań staje się dostatecznie duża, aby spowodować rozerwanie się ciała.

Tym się np. tłumaczy pękanie wałów okrętowych, na których osadzone są śruby, wprawiające statek w ruch, i w których powstają fale skręcenia.

To wzrastanie amplitudy drgań wymuszonych przy pewnej częstości zmian siły zewnętrznej nazywamy zjawiskiem rezonansu (oddźwięku).

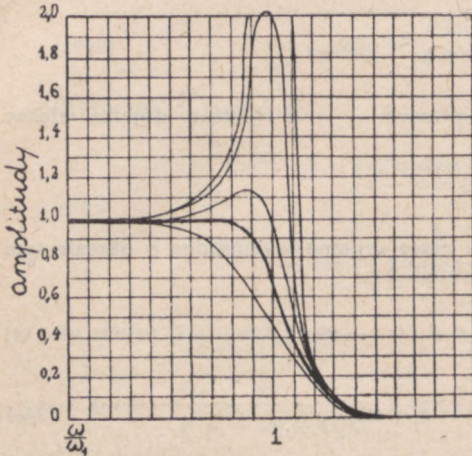
Gdy tłumienie nie jest znikomą małą, rezonans zachodzić może i przy częstości zmian  $\omega$  siły zewnętrznej, różniącej się nieco od częstości  $\omega_1$  drgań własnych; stany bowiem ruchu ciała, w jakich trafiają je impulsy, mniej różnić się będą od siebie, nawet przy niezupełnej zgodności okresów, niż w przypadku drgań nietłumionych zupełnie lub tłumionych nieznacznie. Amplituda drgań wymuszonych będzie miała jednak wtedy wartość mniejszą niż w przypadku poprzednim. Tzw. szerokość rezonansu, tzn. granice, w jakich może zmieniać się stosunek  $\frac{\omega_1}{\omega}$ , przy którym amplituda drgań wymuszonych osiąga znacznie większe wartości, wzrasta tedy ze wzrostem tłumienia, jednocześnie jednak rezonans staje się coraz mniej wyraźny.

Dalszy wzrost częstości  $\omega$  powoduje szybki spadek amplitudy drgań wymuszonych, impulsy bowiem zbyt są częste, aby mogły wywołać znaczniejsze odchylenie od stanu równowagi.

Cały przebieg zjawiska odtwarzają krzywe rys. 81, wziętego z pracy Backhausa w „Handbuch der Physik“, gdzie na osi odciętych odłożone są stosunki  $\frac{\omega}{\omega_1}$ , na osi rzędnych względne wartości amplitud drgań wymuszonych. Każda z krzywych odpowiada innej wartości tłumienia; tłumieniu znikomą małą-



mu odpowiada najwyższa krzywa, narysowana tylko częściowo; krzywe o rzędnych mniejszych od jedności odpowiadają tłumieniom, przy których rezonans nie zachodzi. Jeżeli więc chodzi o otrzymanie możliwie największej „czułości” tzn. możliwie największego odchylenia od położenia równowagi przy



rys. 81

danej wartości siły zewnętrznej, należy „nastroić” ciało drgające na okres zmian sił zewnętrznych i zmniejszyć w miarę możliwości tłumienie. Im tłumienie jest mniejsze, tym zgodność okresów  $\omega$  i  $\omega_1$  musi być większa, tym „ostrzejszy” jest rezonans.

Jeżeli jednak chodzi, jak w przyrządach pomiarowych (p. ust. 4, rozdz. I), aby stosunek wartości odchylenia od położenia równowagi do siły wzbudzającej drganie był możliwie mało zależny od stosunku  $\frac{\omega}{\omega_1}$ , wtedy należy dobrać ciała o częstości drgań własnych możliwie wielkiej w porównaniu z częstością zmian siły wzbudzającej i o znaczniejszym tłumieniu; długość bowiem prostoliniowej, równoległej do osi  $Ox$  części krzywej rezonansu będzie (aż do pewnej granicy) w miarę wzrostu tłumienia wzrastała. Czułość przyrządu będzie, oczywiście, tym razem mniejsza, niż poprzednio.

Przypuśćmy, że ciałem drgającym jest punkt materialny o masie równej jednostce i że siła zewnętrzna, wzbudzająca drgania, zmienia się sinusoidalnie, wartość zaś jej wynosi  $b \sin \omega t$ .

Przyspieszenie odchylenia od położenia równowagi jest tym razem wynikiem działania nie tylko sił sprężystości i sił tłumienia, lecz również siły zewnętrznej. Wzór (22b) przekształca się więc w następujący

$$a = -(\omega_0^2 + \delta^2)s - 2\delta v + b \sin \omega t$$



lub podstawiając  $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ ,  $v = \frac{ds}{dt}$ ,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + (\omega_0^2 + \delta^2) s = b \sin \omega t. \quad (24)$$

Odchylenie wypadkowe jest sumą odchyień, spowodowanych przez drgania własne ciała

$$s_1 = s_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t$$

o okresie  $\omega_0$ , związanym z okresem  $\omega_1$ , jaki by miały drgania własne nietyłumione, wzorem

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 - \delta^2,$$

i odchyień, spowodowanych przez drgania wymuszone o okresie tym samym, co zmiany sił wewnętrznych,

$$s_2 = s' \sin (\omega t - \alpha). \quad (a)$$

Mamy zatem

$$s = s_1 + s_2. \quad (24a)$$

Podstawmy  $s$  do równania (24). Będziemy mieli

$$\frac{d^2(s_1 + s_2)}{dt^2} + 2\delta \frac{d(s_1 + s_2)}{dt} + \omega_1^2 (s_1 + s_2) = b \sin \omega t.$$

Otwierając nawiasy i uwzględniając, że zgodnie ze wzorem (22b)

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} + 2\delta \frac{ds_1}{dt} + \omega_1^2 s_1 = 0,$$

znajdujemy, że

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} + 2\delta \frac{ds_2}{dt} + \omega_1^2 s_2 = b \sin \omega t.$$

Po podstawieniu  $s_2$  ze wzoru (a) i zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$-s' \omega^2 \sin (\omega t - \alpha) + 2\delta s' \omega \cos (\omega t - \alpha) + \omega_1^2 s' \sin (\omega t - \alpha) = b \sin \omega t$$

lub po otwarciu nawiasów

$$\begin{aligned} & -s' \omega^2 \sin \omega t \cos \alpha + s' \omega^2 \cos \omega t \sin \alpha + 2\delta s' \omega \cos \omega t \cos \alpha + \\ & + 2\delta s' \omega \sin \omega t \sin \alpha + \omega_1^2 s' \sin \omega t \cos \alpha - \omega_1^2 s' \cos \omega t \sin \alpha = b \sin \omega t. \end{aligned}$$



Równość ta musi być spełniona przy dowolnym znaczeniu  $t$  a więc zarówno przy  $t=0$ , jak i przy  $t = \frac{T}{4}$ . W pierwszym przypadku otrzymujemy

$$s' \omega^2 \sin \alpha + 2\delta s' \omega \cos \alpha - \omega_1^2 s' \sin \alpha = 0$$

lub 
$$-(\omega_1^2 - \omega^2) \sin \alpha + 2\delta \omega \cos \alpha = 0$$

i stąd 
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\delta \omega}{\omega_1^2 - \omega^2}; \quad (25)$$

w drugim — mamy

$$-s' \omega^2 \cos \alpha + 2\delta s' \omega \sin \alpha + \omega_1^2 s' \cos \alpha = b,$$

skąd

$$s' = \frac{b}{\omega_1^2 \cos \alpha + 2\delta \omega \sin \alpha - \omega^2 \cos \alpha}. \quad (26a)$$

Ze wzoru (25) wynika, że

$$\sin \alpha = \frac{2\delta \omega}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \quad \text{i} \quad \cos \alpha = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}. \quad (26b)$$

Podstawiając te wartości do wzoru (26a), znajdujemy

$$s' = \frac{b}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}. \quad (26c)$$

Amplituda drgań wymuszonych będzie miała wartość największą, gdy mianownik będzie przechodził przez minimum,

$$f = (\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2$$

$$\frac{df}{d\omega} = -4(\omega_1^2 - \omega_r^2) \omega_r + 8\delta^2 \omega_r = 0,$$

skąd 
$$\omega_r^2 = \omega_1^2 - 2\delta^2 \quad \text{lub} \quad \omega_r = \sqrt{\omega_1^2 - 2\delta^2}. \quad (27)$$

Częstość drgań wymuszonych  $\omega_r$ , przy której zachodzi rezonans amplitudy, nie jest zatem równa ani częstości drgań własnych nietłumionych ani też częstości  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta^2}$  drgań własnych tłumionych. Dopiero przy tłumieniu równym zeru otrzymujemy

$$\omega_r = \omega_1 = \omega_0.$$



Jest rzeczą oczywistą, że gdy  $2\delta^2 > \omega_1^2$ , nie może już być mowy o jakimkolwiek rezonansie. Największą wartość tłumienia, przy którym rezonans zachodzi, otrzymujemy z równości

$$\left(\frac{\delta}{\omega_1}\right)^2 = 0,5 \text{ lub } \frac{\delta}{\omega_1} = 0,707.$$

Podstawiając  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  i uwzględniając, że

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}} \text{ oraz że } \delta T_0 = \Lambda,$$

otrzymujemy  $\Lambda = l g k = 2\pi$  i stąd  $k = 534$ .

Oznaczmy stosunek  $\frac{\omega}{\omega_1}$  przez  $a$ , wielkość zaś  $\frac{\delta^2}{\omega_1^2}$  przez  $\psi$  — jest to tzw. stopień tłumienia. Wzory (26b) i (27) przybiorą wtedy postać

$$s' = \frac{b}{\sqrt{\omega_1^4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \omega_1^4 \cdot \frac{4\delta^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} = \frac{b}{\omega_1^2 \sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2\psi}}, \quad (26d)$$

$$\frac{\omega_r}{\omega_1} = a_r = \sqrt{1 - 2\psi}. \quad (27a)$$

Przyjmijmy, że  $k$  jest równe 1,9, dekrement więc logarytmiczny

$$\Lambda = l g k = \frac{\log k}{\log e} = 0,6$$

(symbolem  $\log$  oznaczamy logarytmy zwykłe). Uwzględniając, że  $\delta T_0 = \Lambda$  oraz że

$$T_0 = T_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2} = T_1 \sqrt{1 + \frac{0,6}{6,28}} = T_1 \cdot 1,004,$$

otrzymujemy

$$\delta T_1 \cdot 1,004 = \frac{\delta}{\omega_1} \cdot 2\pi \cdot 1,004 = \Lambda = 0,6,$$

skąd

$$\left(\frac{\delta_1}{\omega_1}\right)^2 = \psi = \left(\frac{0,6}{2\pi}\right)^2 = 0,01.$$

Stosunek częstości drgań rezonansu do drgań własnych ciała będzie w tym przypadku

$$\frac{\omega_r}{\omega_1} = a_r = \sqrt{1 - 0,02} = 0,99,$$

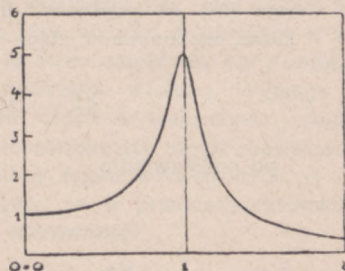


a więc prawie równy jedności (rys. 82). Stosunek amplitudy rezonansu do wartości amplitudy przy  $\omega = 0$  będzie, jak to wynika ze wzorów (26c) i (27a), równy

$$\frac{s'_r}{s'_0} = \frac{1}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}} = \frac{1}{0,198} \approx 5.$$

Wyznamy amplitudy dla dwóch stosunków częstości  $a'$  i  $a''$ , jednako odległych od  $a_r$ , np. dla  $a' = 0,5$  i  $a'' = 1,48$ . Amplituda  $s'_1$ , odpowiadająca stosunkowi  $a'$ , będzie mniej więcej 1,6 razy większa od amplitudy  $s'_2$ , odpowiadającej stosunkowi  $a''$ . Krzywa amplitud po przekroczeniu  $a_r$  jest bardziej stroma, niż przed przekroczeniem tej wartości.

Drgania wymuszone są podtrzymywane przez siły zewnętrzne, których praca w przypadku, gdy drgania się ustalą, wyrównuje straty spowodowane przez siły rozpraszające.



rys. 82

Praca sił zewnętrznych, wykonana w ciągu czasu  $dt$  wynosi

$$dW = f \cdot ds_2 = f \cdot \frac{ds_2}{dt} \cdot dt.$$

Podstawiając  $f = b \sin \omega t$ , jak to wynika ze wzoru (a),

$$\frac{ds_2}{dt} = \omega s' \cos(\omega t - \alpha), \quad (27c)$$

otrzymamy

$$dW = b \omega s' \sin \omega t \cos(\omega t - \alpha) dt,$$

skąd praca wykonana w ciągu jednego okresu

$$\begin{aligned} W &= b \omega s' \int_0^T \sin \omega t \cos(\omega t - \alpha) dt = \\ &= b \omega s' \int_0^T (\sin \omega t \cos \omega t \cos \alpha + \sin^2 \omega t \sin \alpha) dt = \frac{b \omega s'}{2} T \sin \alpha. \end{aligned} \quad (28)$$



Ze wzorów (26c) i (26b) mamy

$$s' = \frac{b}{2\delta\omega} \sin \alpha \quad \text{i} \quad \sin \alpha = \frac{2\delta\omega}{b} s'.$$

Podstawiając tę wartość  $\sin \alpha$  do wzoru (28), otrzymamy

$$l\bar{O} = \frac{b\omega s'}{2} T \cdot \frac{2\delta\omega}{b} s' = \delta\omega^2 s'^2 T. \quad (28a)$$

Niech teraz  $f_t$  oznacza siły tłumienia proporcjonalne, zgodnie ze wzorem (24) do prędkości drgań wymuszonych. Praca przeciwko tym siłom, wykonana w ciągu czasu  $dt$ , będzie równa

$$d|O_t = f_t \cdot ds_2 = f_t \cdot \frac{ds_2}{dt} \cdot dt$$

i po podstawieniu

$$f_t = 2\delta \cdot \frac{ds_2}{dt}$$

oraz wartości  $\frac{ds_2}{dt}$

$$d|O_t = 2\delta\omega^2 s'^2 \cos^2(\omega t - \alpha) dt,$$

stąd na pracę, rozproszoną w ciągu jednego okresu, otrzymujemy

$$l\bar{O}_t = 2\delta\omega^2 s'^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - \alpha) dt = 2\delta\omega^2 s'^2 \cdot \frac{T}{2} = \delta\omega^2 s'^2 T. \quad (29)$$

Stosunek energii rozproszonej do energii całkowitej drgań wymuszonych jest tym większy, im większe jest tłumienie. Oznaczmy przez  $v_m$  największą wartość prędkości ruchu drgającego

$$v_m = \omega s'.$$

Energia całkowita drgań wymuszonych jest, jak wiemy,

$$U_c = \frac{1}{2} \omega^2 s'^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 b^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}, \quad (30)$$

stąd na stosunek energii rozproszonej w ciągu jednego okresu drgania do energii całkowitej

$$\frac{U_t}{U_c} = \frac{\delta\omega^2 s'^2 T}{\frac{1}{2}\omega^2 s'^2} = 2\delta T; \quad (31)$$



im większe jest więc tłumienie, tym większy jest stosunek energii rozproszonej podczas jednego okresu drgania do energii całkowitej.

Energia całkowita drgań wymuszonych, a co za tym idzie, i energia rozproszona, znajdująca się do niej w stałym stosunku, osiąga wartość największą, gdy, jak to wynika ze wzoru (30)  $\omega_1 = \omega$ . Przy tej częstotliwości zachodzi rezonans energii, któremu odpowiada największa wartość pracy sił zewnętrznych, potrzebnej do wyrównania strat energii, spowodowanych przez tłumienie.

W przypadku granicznym, gdy tłumienie równe jest zeru, rezonans energii i rezonans amplitudy zachodzą przy tej samej częstotliwości drgań. Wtedy, wobec tego, że energia wcale nie jest rozpraszana, nie może ustalić się stan równowagi między energią dostarczaną z zewnątrz i energią rozpraszaną, tak że zarówno amplituda, jak i energia drgań może dojść do wartości nieskończenie wielkiej. Wymaga to jednak całkowitej zgodności okresów drgań wymuszonych i drgań własnych, o czym mogą nas przekonać następujące proste rozważania. Oznaczmy, jak wyżej, przez  $a$  stosunek drgań wymuszonych  $\omega$  do drgań własnych ciała  $\omega_1$  i przypuśćmy, że w granicach stosunków częstotliwości  $a_1$  i  $a_2$ , czyniących zadość nierówności

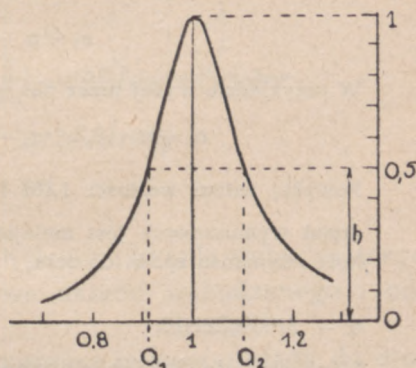
$$a_1 < a_r < a_2,$$

gdzie przez  $a_r$  rozumieć będziemy stosunek  $\omega$  do  $\omega_r$ , w przypadku rezonansu (a więc dla rezonansu energii  $a_r = 1$ ) energia drgań wymuszonych jest co najwyżej  $h$  razy mniejsza od energii rezonansu

$$U_r = \frac{b^2}{8\delta^2} = \frac{b^2}{\omega_1^2 \cdot 8\psi}, \quad (32)$$

gdzie  $\psi$  jest, jak poprzednio, stopniem tłumienia.

Różnica  $a_2 - a_1$  daje nam pojęcie o szybkości zmian energii w miarę, jak częstość drgań wymuszonych zbliża się i następnie oddala od częstości drgań własnych ciała. Z tego też względu jest ona miarą tzw. szerokości



rys. 83

rezonansu dla wysokości  $h$ . Zazwyczaj oblicza się ją dla  $h = \frac{1}{2}$ .

Wzór (31) przepisujemy w postaci

$$U = \frac{1}{2} \frac{b^2}{\left(\omega_1 \cdot \frac{1}{a} - \omega_1 a\right)^2 + 4\delta^2} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{\omega_1^2 \left\{ \left(\frac{1}{a} - a\right)^2 + 4\psi \right\}}$$



skąd

$$\frac{U}{U_r} = \frac{4\psi}{\left(\frac{1}{a} - a\right)^2 + 4\psi} = h = \frac{1}{2}$$

i

$$8\psi = \left(\frac{1}{a} - a\right)^2 + 4\psi = \frac{1}{a^2} - 2 + a^2 + 4\psi.$$

kładąc  $a^2 = z$ , otrzymujemy

$$\frac{1}{z} - 2 + z - 4\psi = 0$$

lub

$$z^2 - 2(2\psi + 1)z + 1 = 0.$$

A zatem

$$\begin{aligned} z &= 2\psi + 1 \pm \sqrt{(2\psi + 1)^2 - 1} = 2\psi + 1 \pm \sqrt{4\psi^2 + 4\psi} = \\ &= 2\psi + 1 \pm 2\sqrt{\psi} \sqrt{\psi + 1} = (\sqrt{\psi + 1} \pm \sqrt{\psi})^2. \end{aligned}$$

Biorąc tylko dodatnie wartości pierwiastka, mamy

$$\sqrt{z_2} = a_2 = \sqrt{\psi + 1} + \sqrt{\psi},$$

$$\sqrt{z_1} = a_1 = \sqrt{\psi + 1} - \sqrt{\psi}$$

i ostatecznie na szerokość rezonansu otrzymujemy

$$a_2 - a_1 = 2\sqrt{\psi}.$$

W przykładzie wyżej przez nas podanym  $k = 1,9$  i  $\psi = 0,01$

$$a_2 - a_1 = 0,2; \quad a_2 = 1,105; \quad a_1 = 0,905.$$

Powyżej zatem wartości 1,105 i poniżej 0,905 stosunku  $\frac{\omega}{\omega_1}$  energia drgań wymuszonych jest mniejsza od połowy  $U_r$ . Gdy  $\psi = 0$ , szerokość rezonansu spada do zera.

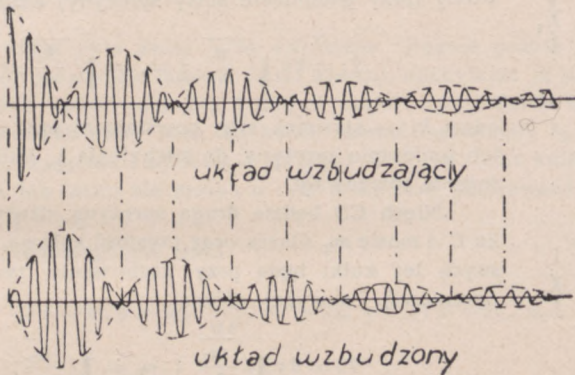
## 6. — SPRZĘŻENIE.

Wnioski, do jakich doprowadziły nas wyżej podane rozważania, dotyczą jednak tylko tych przypadków, gdy można całkowicie pominąć oddziaływanie układu, pobudzonego do drgań, na układ, wzbudzający drgania. To jednak nie zawsze jest możliwe, często wzajemne oddziaływanie jest dostatecznie silne, aby zmienić w znaczniejszym stopniu okres każdego z układów drgających, tworzących wtedy tzw. układ sprzężony.



Nie wchodząc w szczegółowe rozpatrywanie tego zagadnienia, którego teoria nastęrcza duże trudności, poprzestaniemy na stwierdzeniu, że drgania każdego z układów sprzężonych są sumą dwóch drgań składowych, tym bardziej różniących się od drgań własnych każdego układu, im silniejsze jest sprzężenie. Drgania te w ostatecznym wyniku powodują dudnienia, których częstość, jednakowa dla obu układów, wzrasta ze wzrostem sprzężenia. Dudnienia te są najwyraźniejsze, gdy częstości drgań własnych układów są wzajemnie równe, gdy więc układy sprzężone są „nastrojone” na ten sam ton.

Ogólny przebieg zjawiska w tym przypadku, (przy czym w chwili  $t=0$  jeden z układów sprzężonych jest w spoczynku), odtwarzają krzywe rys. 84 (tłumienie w obydwu układach jest



rys. 84

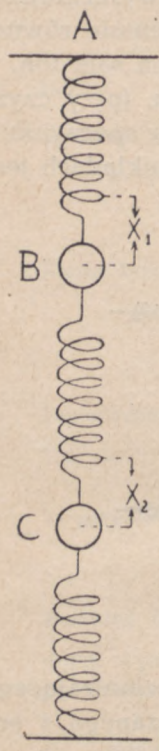
jednakowe). Największym odchyleniom układu wzbudzającego odpowiadają odchylenia zerowe układu wzbudzanego i odwrotnie.

Takie „przelewanie się” energii z jednego układu do drugiego można w prosty sposób wykazać, zawieszając na niezbyt ciężkiej ramie dwa wahadła jednakowej długości, obciążone dostatecznie wielkimi masami; wahadła te są sprzężone poziomą częścią ramy, na której wiszą. Gdy jedno z tych wahań odchyłimy od położenia równowagi i puścimy swobodnie, zacznie się ono wahać z malejącą stopniowo amplitudą i wreszcie na krótką chwilę się zatrzyma, aby znów zacząć się wa-



hać coraz silniej. Jednocześnie drugie wahadło będzie się wahało z coraz to większą obszernością, która dojdzie do wartości największej, gdy wahania wahadła pierwszego na chwilę ustaną.

W zjawiskach akustycznych, w ściślejszym tego słowa znaczeniu, zazwyczaj jeden z tonów sprzężenia jest o wiele słabiej tłumiony, niż drugi, tak że słyszymy ten tylko ton.



rys. 85

Niech  $AB$  (rys. 85) będzie sprężyną, dźwigającą kulkę o masie  $m$ . Kulka ta, wychylona z położenia równowagi i puszczona swobodnie będzie, jak wiemy (tom I, str. 90), drgała ruchem harmonijnym prostym, jeżeli tylko działanie sił ciężkości będzie dostatecznie małe w porównaniu z działaniem sił sprężystości.

Okres drgania i częstość kołowa kulki wyrażą się wtedy (przy pominięciu masy sprężyny) wzorami

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \quad \text{i} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad (d)$$

gdzie  $k_1$  — stosunek siły, powstającej przy rozciągnięciu lub zgniataniu sprężyny, do odchylenia  $x_1$  kulki  $B$  od położenia równowagi.

Niech  $CD$  będzie drugą sprężyną, dźwigającą kulkę  $C$  o masie  $m_2$ . Okres oraz częstość kołowa drgań własnych tej kulki będą przy zachowaniu tych samych ograniczeń, co wyżej, równe

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \quad \text{i} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad (e)$$

gdzie  $k_2$  ma znaczenie analogiczne do  $k_1$ .

Przymocujemy jedną z tych sprężyn w punkcie  $A$ , drugą w punkcie  $D$  i połączmy kulkę  $B$  z kulką  $C$  trzecią sprężyną  $BC$ , której własności sprężyste wyraża współczynnik  $k_{1,2}$ . Jeżeli teraz, przytrzymując kulkę  $C$  w położeniu równowagi wprowadzimy w ruch drgający kulkę  $B$ , kulka będzie, jak poprzednio, drgała ruchem harmonijnym prostym z innym jednak, niż poprzednio okresem wahanja; gdyż oprócz siły  $f_1 = -kx_1$  działać na nią będzie siła  $f_{1,2}$ , powstająca przy odkształcaniu sprężyny  $BC$ , działająca w tym samym, co  $f_1$  kierunku i równa  $-k_{1,2} x_1$ . Wypadkowa

$$f' = -(k_1 + k_{1,2}) x_1$$

będzie i tym razem proporcjonalna do wychyleńia z położenia równowagi.



Ze wzoru

$$f' = m_1 a = -m_1 \cdot \frac{4\pi^2}{T_{0,1}^2} x_1 = -m_1 \omega_{0,1}^2 \cdot x_1 = -(k_1 + k_{1,2}) x_1$$

otrzymujemy na okres i częstość drgań

$$T_{0,1} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1 + k_{1,2}}} \quad \text{i} \quad \omega_{0,1} = \sqrt{\frac{k_1 + k_{1,2}}{m_1}} \quad (g)$$

Jest to okres i częstość kołowa drgań własnych układu *AB* po sprzężeniu.

Analogicznie, dla drgań sprężyny *CD*, gdy kulka *B* jest nieruchoma, znajdujemy

$$T_{0,2} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2 + k_{1,2}}} \quad \text{i} \quad \omega_{0,2} = \sqrt{\frac{k_2 + k_{1,2}}{m_2}} \quad (h)$$

Jeżeli teraz obie kulki będą swobodne, drganie jednej z nich (np. kulki *B*) spowoduje drgania kulki drugiej, odchylając ją okresowo od położenia równowagi. Na kulkę *B* oprócz poprzednich sił  $f_1$  i  $f_{1,2}$ , wzbudzonych przez ruch tej kulki, działać będzie siła  $f_2$ , wzbudzona przez rozciąganie i zginięcie sprężyny *BC* przy ruchu kulki *C*. Siła ta będzie, jak łatwo się można o tym przekonać, skierowana przeciwnie do sił  $f_1$  i  $f_{1,2}$ .

Tym razem będziemy mieli

$$f = m_1 a = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_{1,2}) x_1 + k_{1,2} x_2$$

lub

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k_{1,2}}{m_1} x_1 = \frac{k_{1,2}}{m_1} x_2,$$

co z uwagi na wzór (g) możemy przepisać w postaci

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_{0,1}^2 x_1 = a_1^2 x_2, \quad (34)$$

gdzie przez  $a_1^2$  oznaczamy  $\frac{k_{1,2}}{m_1}$ .

Ruch kulki *C* wyznaczony będzie wzorem podobnym

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_{0,2}^2 x_2 = a_2^2 x_1, \quad (34a)$$

gdzie  $a_2^2$  jest równe  $\frac{k_{1,2}}{m_2}$ .



Założmy, że równaniom tym będzie czyniło zadość rozwiązanie typu

$$x = A \sin \omega t,$$

gdzie  $\omega$  będzie miała tę samą wartość w obu układach, amplituda zaś wartości na ogół różne tak, że będziemy mieli

$$x_1 = A_1 \sin \omega t \quad \text{i} \quad x_2 = A_2 \sin \omega t. \quad (\text{i})$$

Po podstawieniu tych wartości do równań (34) i (34a), otrzymamy

$$(\omega_{0,1}^2 - \omega^2) A_1 = a_1^2 A_2 \quad \text{i} \quad (\omega_{0,2}^2 - \omega^2) A_2 = a_2^2 A_1,$$

$$\text{skąd} \quad (\omega_{0,1}^2 - \omega^2)(\omega_{0,2}^2 - \omega^2) = a_1^2 a_2^2. \quad (\text{35})$$

Wzór ten możemy przepisać trochę inaczej, wprowadzając nową wielkość tzw. stopień sprzężenia, którego miarą jest iloczyn stosunków sił, z jakimi działają na siebie wzajemnie dwa sprzężone drgające układy, do sił, jakim podlega każdy z układów, gdy drugi układ jest w spoczynku.

Opierając się na wyprowadzonych wyżej wzorach, napiszemy

$$\frac{a_1^2 x_2}{(k_1 + k_{1,2}) x_1} \cdot \frac{a_2^2 x_1}{(k_2 + k_{1,2}) x_2} = \frac{a_1^2 a_2^2}{(k_1 + k_{1,2})(k_2 + k_{1,2})} = \frac{a_1^2 \cdot a_2^2}{\omega_{0,1}^2 \cdot \omega_{0,2}^2} \cdot m_1 m_2. \quad (\text{k})$$

Za stopień sprzężenia  $S$  przyjmuje się jednak zazwyczaj nie tę wartość, lecz jej pierwiastek kwadratowy, odniesiony do jednostki masy, mamy przeto

$$S = \frac{a_1 a_2}{\omega_{0,1} \cdot \omega_{0,2}}. \quad (\text{36})$$

Jest to wielkość o wymiarze równym jedności, jak to łatwo możemy

sprawdzić, podstawiając do (k)  $\frac{k_{1,2}}{m_1}$  i  $\frac{k_{1,2}}{m_2}$  zamiast  $a_1^2$  i  $a_2^2$ . Wartość

jej może się zmieniać w granicach od 0 do 1.

Równanie (35) przybiera zatem postać

$$\omega^4 - (\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2) \omega^2 + (1 - S^2) \omega_{0,1}^2 \omega_{0,2}^2 = 0, \quad (\text{37})$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2)^2}{4} - (1 - S^2) \omega_{0,1}^2 \omega_{0,2}^2} = \\ &= \frac{\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_{0,1}^2 - \omega_{0,2}^2)^2 + 4S^2 \omega_{0,1}^2 \omega_{0,2}^2}. \end{aligned} \quad (\text{38})$$



Ponieważ  $S$  nigdy nie jest większe od jedności, obie wartości  $\omega^2$  są dodatnie. Równaniom (34) i (34a) czynią więc zadość dwie częstości kołowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , które otrzymujemy, wyciągając pierwiastek kwadratowy z wielomianu (38), wyznaczającego  $\omega^2$ , przy czym uwzględniamy, rzecz prosta, tylko pierwiastek dodatni. Ogólne rozwiązanie wyrazi się przeto wzorem

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1' \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1'' \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2 &= A_2' \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2'' \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (39)$$

gdzie wartości tych amplitud oraz faz  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  będziemy mogli wyznaczyć z warunków początkowych.

Gdy obydwa układy są „nastrojone” na ten sam okres drgania, gdy

$$\omega_{c,1} = \omega_{o,2} = \omega_0,$$

ze wzoru (38) otrzymujemy

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm S \omega_0^2 = \omega_0^2 (1 \pm S),$$

$$\text{skąd} \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1+S} \quad \text{i} \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1-S}. \quad (40)$$

Gdy sprzężenie jest słabe (jak np. w przytoczonym wyżej doświadczeniu z wahadłami), częstości składowe, z których jedna jest zawsze większa, druga zaś mniejsza od  $\omega_0$ , mało się różnią od częstości  $\omega_0$  drgań własnych układu po sprzężeniu. Powodują one wtedy wyraźne dudnienia (rozdz. I, ust. 8) o częstości niewielkiej

$$\omega' = \omega_1 - \omega_2.$$

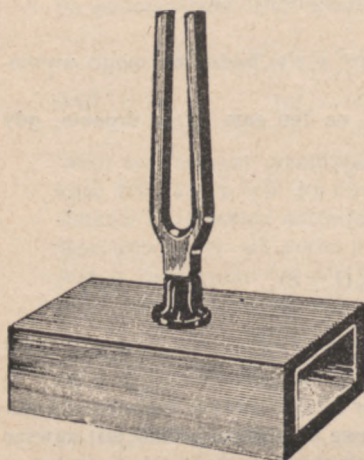
W naszym przykładzie taki przypadek zachodzi, gdy sprężyny  $AB$  i  $CD$  są zupełnie jednakowe, masy kulek równe, oraz gdy sprężyna  $BC$  jest zrobiona z cienkiego drutu, którego zwoje posiadają dość znaczny promień (tom I, str. 214). W miarę, jak sprzężenie wzrasta, dudnienie staje się coraz częstsze, zwiększa się bowiem różnica częstości  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Teorię drgań sprzężonych w przypadkach analogicznych do rozpatrywanego przez nas (dwu drgających punktów materialnych), lecz z uwzględnieniem tłumienia dał (1897 r.), na podstawie wcześniejszych prac Rayleigha, M. Wien, — doświadczalnie zagadnienie to badali między innymi Warburg (1869 r.) i König (1880 r.), w zastosowaniu zaś do drgań elektromagnetycznych Groszkowski (1930 r.). Ogólna teoria tych drgań, mimo licznych prac jej poświęconych (Helmholtz, Rayleigh, Courant i Hilbert, Schottky, następnie, 1927 r., Waetzmann i Schuster) jest dopiero w początkach, następcza bowiem bardzo duże trudności matematyczne.



## 7. — DRGANIA OGRANICZONYCH MAS GAZU.

Na prawach rezonansu i sprzężenia opiera się często używany w praktyce sposób zwiększenia promieniowania akustycznego. Dla osiągnięcia tego celu sprzęgamy dwa układy: jeden o tłumieniu (a więc i promieniowaniu) niewielkim, służący jako pierwotne źródło zaburzeń, drugi, silnie promieniujący energię i stanowiący źródło wtórne, wzbudzone przez układ



rys. 86

pierwszy. Najczęściej tym drugim układem jest ograniczona masa powietrza, jak np. powietrze, znajdujące się w pudełku rezonansowym kamertonu (rys. 86) lub skrzypiec. Energia promieniowania posiada wartość największą w przypadku rezonansu obu układów, wtedy jednak tłumienie w układzie pierwotnym również osiąga maksimum. Tak np. według R. Königa (1880 r.) widelki strojowe o częstości własnej 256 drgań na sekundę, umieszczone na pudełku rezonansowym, wysyłały

drzania, które mogły być jeszcze słyszane przez czas tym krótszy, im mniej różniły się częstości drgań własnych obu układów. Czas ten wynosił 80 sekund, gdy częstość drgań własnych rezonatora była równa 218,3 drgań na sekundę, spadał prawie do zera, gdy częstości się wyrównywały, i znów wzrastał, gdy częstość drgań własnych rezonatora przekraczała częstość drgań własnych kamertonu. Zgodnie z tym, co mówiliśmy wyżej, tego rodzaju sprzężenie musi zmienić częstość drgań własnych kamertonu przed sprzężeniem. Okazuje się jednak, że w tym przypadku zmiana ta nie jest wielka: największa jej wartość, jaką osiąga w pobliżu rezonansu, nie przekracza 0,01%.

Ten wynik pomiarów Königa jest całkowicie zgodny z wywodami teoretycznymi Wiena, o których wspominaliśmy w ustępie poprzednim; mamy tu bowiem do czynienia z układami, w których wpływ tłumienia jest o wiele większy od wpływu sprzężenia o wartości niewielkiej.



Częstość drgań własnych masy powietrza, zawartej w pudełku rezonansowym, możemy uzgodnić z częstością drgań własnych kamertonu, nadając pudełku odpowiednie rozmiary.

W prostym przypadku słupa gazu, zawartego w rurze cylindrycznej, dostatecznie długiej, o niewielkim przekroju, związek między częstością drgań własnych i wymiarami rury możemy wyznaczyć, posługując się rozumowaniem analogicznym do rozumowań ust. 1 i 2.

Tak więc, gdy gaz zawarty jest w rurze na obu końcach otwartej, z warunku, że ciśnienie w warstwach końcowych ma wartość stałą, taką samą, jak otaczające powietrze, wynika, że w rurze może powstać tylko taka fala stojąca, której węzły ciśnienia, a tym samym strzałki odchylenia cząstek od położenia równowagi (por. rozdz. I, ust. 6) znajdują się w warstwach końcowych słupa gazowego. Oznaczając przez  $l$  długość rury, na długość fali tonu zasadniczego otrzymujemy

$$\lambda_1 = 2l,$$

skąd częstość drgania

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2l}.$$

Wyższe tony muszą również czynić zadość warunkom granicznym, będziemy więc mieli ogólnie

$$\nu_n = \frac{nc}{2l} \quad (41)$$

gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$

Gdy rura jest na jednym końcu zamknięta, układ tworzących się w niej fal stojących musi mieć na końcu zamkniętym węzeł, na końcu otwartym — strzałkę odchylenia. Częstości drgań własnych takiego słupa gazowego będą zatem równe

$$\nu_n = \frac{(2n-1)}{4l} c. \quad (41a)$$

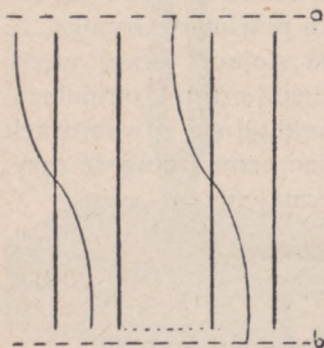
Wzory (41) i (41a) często są nazywane wzorami Bernoulli'ego.

Z góry jednak można przewidzieć, że te proste związki nie będą ściśle odtwarzały wyników doświadczenia, założenia bo-



wiem, na jakich oparliśmy ich wyprowadzenie, na ogół nie odpowiadają dokładnie warunkom, w jakich zachodzi badane zjawisko.

Przedewszystkim założenie, że fala rozchodząca się w gwie jest w każdym przypadku falą płaską, wtedy tylko można uważać za usprawiedliwione, gdy poprzeczny wymiar liniowy rury jest dostatecznie mały w porównaniu z długością fali danego tonu; wtedy jednak, jak o tym była mowa w ust. 3 rozdz. I, prędkość rozchodzenia się zaburzeń jest funkcją liniowych wymiarów rury. Po wtóre,



rys. 87

węzeł ciśnienia nie może leżeć dokładnie w końcowej warstwie słupa, jedynie bowiem zmienność ciśnienia może powodować powstawanie zaburzeń w otaczającym środowisku, a więc innymi słowy, promieniowanie akustyczne. Należy więc przyjąć, że węzeł ciśnienia (strzałka odchyłań) znajduje się nieco poza otwartym końcem rury, tak że w rurze na obu końcach otwartej mamy do czynienia

z falą stojącą, raczej taką, jak na prawym rysunku 87, nie zaś taką, jak na rysunku lewym. Ton zasadniczy jest przeto nieco niższy, jak gdyby rura miała długość nie  $l$ , lecz  $l + \Delta l$ . Według Helmholtza (1860 r.), ten pozorny przyrost długości rury można z dostatecznym przybliżeniem uważać za równy

$$\Delta l = \frac{\pi}{4} r = 0,7854 r, \quad (42)$$

gdzie  $r$  jest promieniem rury.

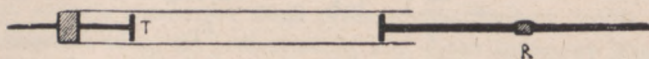
Gdy rura jest, jak to bywa zazwyczaj w piszczałkach, na jednym końcu zwężona, odległości płaszczyzn  $a$ ,  $b$  od cylindrycznej części rury przestają być równe; płaszczyzna, leżąca po stronie zwężenia, jest bardziej oddalona.

To przesunięcie strzałek na zewnątrz rury zostało potwierdzone w licznych doświadczeniach, wykonanych między innymi przez Wertheima (1851 r.), Blaikleya (1879 r.), Boehma (1910 r.) i Rätza



(1925 r.). Wartość  $\Delta l$ , wyznaczona przez tych badaczy, jest nieco mniejsza od podanej przez Helmholtza, wahając się w granicach od 0,66 r. (Wertheim) do 0,577 r. (Blaikley).

Jeżeli jednak słup gazu pobudzany jest do drgania w rurze o odpowiednio dobranym promieniu i przy tym tak, że promieniowanie jego jest niewielkie, stosowanie wzorów Bernoulliego nie pociągnie za sobą znaczniejszych błędów. Taki przypadek zachodzi w tzw. rurze Kundta (1868 r.). W przecie z dowolnego materiału o średnicy, nie przekraczającej jednego centymetra, umocowanym np. w środku (rys. 88) i pociera-



rys. 88

nym w kierunku swej osi wilgotną szmatką, powstają drgania podłużne, których częstość wyznacza wzór (12). Na jednym z końców pręta przymocowana jest lekka płytką korkowa, przenosząca drgania pręta na słup gazu, zawarty w rurze szklanej, o średnicy od 2 do 3 cm, nasuniętej na pręt. Długość słupa gazu można zmieniać, przesuwając tłoczek T. Jeżeli w rurze rozsypujemy równomiernie jakiś bardzo lekki proszek, np. widłaku (lycopodium), proszek ten będzie wprawiony w ruch przez drgania gazu. Ruch ten staje się najwidoczniejszy w przypadku rezonansu, gdy częstość drgań pręta równa jest częstości jednego z drgań własnych słupa gazowego. W rurze powstają wtedy wyraźne skupienia proszku w miejscach odpowiadających węzłom odchylenia; w strzałkach proszku nie ma prawie zupełnie. Wypełniając rurę kolejno dwoma różnymi gazami, otrzymujemy ze wzorów

$$c_1 = v\lambda_1 \quad \text{i} \quad c_2 = v\lambda_2, \quad (\text{a})$$

gdzie  $v$  — częstość drgań pręta,  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  — długości fal stojących, obliczone z odległości wzajemnej węzłów,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

skąd, znając  $c_1$ , możemy obliczyć  $c_2$ .



Metody tej używa się również do wyznaczenia prędkości rozchodzenia się zaburzeń w prętach. Niech  $l$  oznacza długość pręta, długość fali w pręcie jest (przy takim umocowaniu pręta, jak na rysunku) równa

$$\lambda_p = 2l,$$

skąd częstość drgań

$$\nu = \frac{c_p}{\lambda_p}.$$

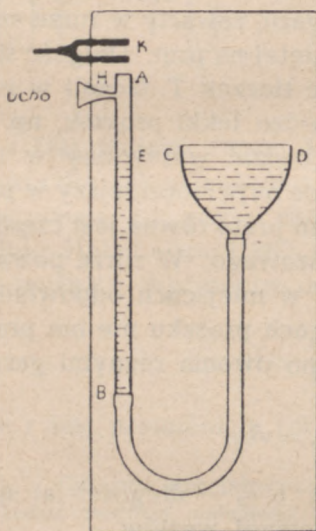
Zestawiając ze wzorem (a) otrzymujemy

$$c_1 = \frac{c_p}{\lambda_p} \lambda_1 \quad \text{lub} \quad c_p = \frac{c_1 \cdot \lambda_p}{\lambda_1}. \quad (b)$$

Teorię powstawania skupień i rozrzedzeń proszku w rurze Kundta dał König (1911 r.).

Od metody Kundta niewiele się różni metoda Quinckego (1866 r.). Rura AB połączona jest węzłem gumowym ze zbiornikiem CD w ten sposób, że możemy dowolnie regulować poziom wypełniającej ją częściowo wody. Słup powietrza AE, znajdujący się nad powierzchnią wody, pobudzany jest do drgania przez kamerton K. Przesuwając do góry lub na dół zbiornik CD i zmieniając w ten sposób długość słupa AE, otrzymujemy przy pewnym położeniu zbiornika rezonans kamertonu i słupa, co ujawnia się w wybitnym wzroście natężenia dźwięku, dochodzącego do nas przez rurkę H, przyłożoną do ucha. Przy dalszej zmianie poziomu wody natężenie to maleje, aby znów przy pewnym poziomie dojść do maximum. Różnica wysokości poziomów wody, przy których zachodzą maxima, równa jest połowie długości fali.

Metody Kundta użyli (1935 r.) Brandt i Freund (1935 r.) do wyznaczenia częstości drgań ultradźwięków, zastępując proszek widłaku cienką warstwą cieczy. Fale stojące, wzbudzone w tej warstewce przez drgania powietrza, ujawniają się tym razem nie w skupieniach i rozrzedzeniach proszku, lecz we wzroście i zmniejszeniu grubości warstewki,



rys. 89



której zakrzywiona powierzchnia wykazuje równomiernie rozłożone wzniesienia i zagłębienia. Gdy rurę oświetlimy lampą jednonitkową, ustawioną tak, aby nitka była prostopadła do długości rury, na ekranie umieszczonym pod rurą otrzymamy równoodległe obrazy nitki otrzymane przez załamanie światła w warstewce, która działa, jak szereg rozmieszczonych równomiernie wzdłuż rury soczewek cylindrycznych.

Do pomiaru długości fali w płynach służyć może również ultradźwiękowy interferometr Pierce'a (1925 r.). Źródło wysyłające bardzo krótkie fale, a więc rozchodzące się mniej więcej prostoliniowo, umieszczone jest w takiej odległości od powierzchni odbijającej, aby grubość zawartej między nim a powierzchnią odbijającą warstwy płynu stanowiła wielokrotność połowy długości fali. Wtedy fale padające i odbite tworzą stały układ fal stojących. Przy tego rodzaju rezonansie słupa płynu promieniowanie źródła staje się szczególnie silne; dla podtrzymania więc drgań konieczny jest większy przyływ energii z zewnątrz, niż w przypadku, gdy przesunięcie powierzchni odbijającej w tę lub inną stronę rezonans ten usunie. Dla wyznaczenia długości fali wystarczy wyznaczyć dwa sąsiednie położenia powierzchni odbijającej, przy których zachodzi rezonans.

Wywody powyższe ulegną niewielkiej na ogół zmianie, gdy rurę o przekroju kołowym zastąpimy rurą o przekroju prostokątnym, jeżeli tylko wymiary poprzeczne rury są tak, jak poprzednio, małe w porównaniu z długością fali. Dopiero w miarę wzrostu przekroju ujawnia się wpływ tych wymiarów na częstość drgań własnych, w pewnych zaś przypadkach na natężenie dźwięku (Savart). Ogólnie mówiąc, częstości drgań rur o wymiarach podobnych i podobnie pobudzanych do drgania (np. rury organowe) są w stosunku odwrotnym do ich wymiarów.

Drgania własne rur o zmiennym przekroju kołowym zachodzą mniej więcej według tych samych praw, co rur o przekroju stałym, o ile tylko, jak to udowodnił Rayleigh, zmiany przekroju są niewielkie. W przypadku zmian większych częstość drgań własnych zależy przy tej samej długości rury od stosunku długości węższej części do szerszej. (Cermak, 1924 r.). Ważny dla teorii przyrządów muzycznych przypadek rur stożkowych nie znalazł jak dotychczas, należytego rozwiązania.

Gdy gaz wypełnia objętość kulistą, energia wyższych tonów jest tak mała, że w praktyce często można ją pominąć:



drgania własne sprowadzają się wtedy do drgań tonu zasadniczego.

Rolę analogiczną do roli pudełka rezonansowego kamertonu odgrywają rury, wypełnione powietrzem, w takich instrumentach muzycznych, jak piszczałki, trąby itp. Zależnie od sposobu wzbudzania drgań rozróżniamy dwa typy tego rodzaju instrumentów: stroikowe (języczkowe) i fletowe. W instrumentach typu pierwszego pierwotnym źródłem drgań jest giętkie ciało stałe, wprawiane w ruch przez prąd wdmuchiwanego do rury powietrza i okresowo zamykające i otwierające jego dopływ.

W instrumentach takich, jak oboj lub fagot, stroikiem są dwie cienkie płytki (błony), umocowane po obu stronach rury w ten sposób, że w położeniu równowagi rurę całkowicie zamykają; podczas drgania płytek powstaje między nimi szczelina, okresowo zmieniająca swój przekrój, co powoduje znów okresowe zmiany ciśnienia w rurze. W trąbach takich, jak waltornia, puzon — stroikiem są napięte wargi trębacza. W innych instrumentach stroikami są zazwyczaj podłużne płytki metalowe, które drgając, zamykają całkowicie (klarnet, saksofon) lub częściowo dostęp powietrza do rury.

Uzgadniając częstości drgań własnych stroika z częstością jednego z tonów własnych rury, otrzymujemy rezonans.

Masa powietrza, zawarta w rurze, stanowi wraz ze stroikiem układ sprzężony, wobec czego częstość drgań tego układu nie jest równa częstościom drgań własnych czy to stroika czy też słupa powietrza. Gdy jednak tłumienie drgań stroika jest, podobnie jak w przypadku kamertonu, umieszczonego na pudełku rezonansowym, znacznie mniejsze, niż tłumienie drgań masy powietrza, instrument wydaje przy rezonansie ton mało różniący się od tonu własnego stroika. Stopień bowiem sprzężenia i w tym przypadku, jak i na ogół we wszystkich sprzężeniach akustycznych, w ścisłym tego słowa znaczeniu, ma wartość niewielką, nie przekraczającą, według Vogela, w żadnym przypadku 0,25. Teorię instrumentów stroikowych, jako układów sprzężonych, zapoczątkowaną przez Helmholtza, opracowali M. Wien i Vogel (1920 r.).

W przyrządach typu fletowego pierwotnym źródłem drgań są drgania warstewki powietrza, wdmuchiwanej przez szczelinę i uderzającej o umieszczoną naprzeciwko szczeliny krawędź



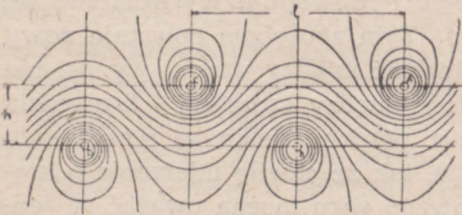
(rys. 90). Warstewka ta, poruszająca się z pewną prędkością względem szczeliny i nieruchomego powietrza, jest odgraniczona od środowiska, w którym się porusza, powierzchniami nieciągłości. Taka powierzchnia jest, jak wiemy, (tom I, str. 297), siedliskiem wirów, które przy statecznym wypływie gazu tworzą się, jak to na podstawie teorii Prandtla wykazał v. Kármán, w odstępach regularnych po obu stronach warstwy, przy czym w wirach znajdujących się po stronach przeciwnych, kierunku obrotu są również przeciwne. W tym układzie wirów stosunek odstepu  $h$  środków wirów o przeciwnych kierunkach obrotu do odległości wzajemnej  $l$  wirów o tym samym kierunku ma w przypadkach ruchu statecznego wartość stałą.



rys. 90

Stosunek ten obliczony na podstawie praw hydromechaniki wynosi, według v. Kármána i Rubacha (1912 r.) 0,283.

Pewne pojęcie o tego rodzaju zjawisku, zachodzącym w przypadku wąskiej, prostokątnej, dostatecznie długiej szczeliny daje nam schematyczny rysunek 91, odtwarzający przekrój warstwy wirowej płaszczyzną prostopadłą do szczeliny.



rys. 91

Przypuśćmy, że w pewnej chwili istnieją dwa wiry  $A$  i  $B$ . Gdy strumień powietrza, poruszając się z prędkością  $u$  względem szczeliny, oddali się na odległość  $\frac{l}{2}$  powstanie nowy

wir  $C$ , gdy odległość wzrośnie do  $l$  — wir  $D$ ; w ciągu więc tego czasu warstewka wykona jedno całkowite wahanie. Częstość wahań wyniesie

$$v = \frac{u}{l}. \quad (43a)$$



Tego rodzaju tony, powstające np. przy gwizdaniu „przez zęby“, noszą nazwę tonów szczelinowych.

Przy zwykłym gwizdaniu tony powstające są również tonami szczelinowymi, zjawisko jest jednak bardziej złożone z uwagi na działania rezonacyjne jamy ustnej, kołowy kształt szczeliny i drganie warg.

W piszczałkach fletowych warstewka, wychodząca ze szczeliny, uderza w przeciwległą krawędź i ulega rozszczepieniu na dwie oddzielne warstwy wirowe, postępujące wzdłuż boków krawędzi. Wiry te uwidocznił (1925 r.) Carrière, wdmuchując do piszczałki powietrze zmieszane z parą wodną nasyconą; para ta przy rozprężeniu tworzyła mgłę, którą łatwo można było obserwować (rys. 92).



rys. 92

Na rysunku 92 wzdłuż każdego z boków krawędzi postępują wiry o tym samym kierunku obrotu. W rzeczywistości, jak to stwierdził Carrière, tworzą się na każdej krawędzi również i wiry o kierunku przeciwnym, wobec czego wykształca się stopniowo na każdym boku całkowita warstwa wirowa. Wiry te są jednak tak małe, że można stwierdzić ich istnienie jedynie w wyjątkowo sprzyjających warunkach.

Za każdym razem, gdy wir wdmuchiwanego powietrza uderza o krawędź, powstaje fala zderzenia, która, dochodząc z prędkością głosu do szczeliny, powoduje wytworzenie się w pobliżu niej nowego wiru. Tym sposobem powstaje nowy układ wirów, w którym odległość między wirami wynosi nie  $l$ , lecz  $d$ , gdzie  $d$  — odległość między szczeliną i krawędzią (prędkość bowiem głosu jest bardzo wielka w porównaniu z prędkością ruchu powietrza, tak że chwilę uderzenia o krawędź i chwilę powstania nowego wiru można uważać za jednoczesne). Ten układ wirów, będący źródłem tzw. tonów krawędziowych (franc. sons d'arête lub sons de bouche), nakłada się na układ, odpowiadający tonom szczelinowym. Największe natężenie otrzymamy wtedy, gdy  $d$  będzie równe  $l$  lub  $2l, 3l \dots$

Ta w wielkim skrócie podana przez nas teoria została opracowana przez Krügera (1920 r.) na podstawie wspomnianych już wyżej prac



v. Kármána. Wyjaśnia ona z wystarczającą na ogół dokładnością wyniki wcześniejszych prac doświadczalnych Wachsmutha (1902 r. i nast.), Heusena (1900 r.), a zwłaszcza Gollera (1912 r.) oraz Rietha (1917) r.). Wykonane (1926 r.) ze szczególną starannością pomiary Bentona również ją potwierdzają.

Działanie masy powietrza, zawartej w rurze, ujawnia się przede wszystkim w zwiększeniu natężenia tonu krawędziowego, następnie zaś w ustaleniu wysokości tonu. Jak wynika bowiem z wyżej przytoczonych rozważań, wysokość tonu krawędziowego zależy od prędkości „wiatru” tzn. wdmuchiwanej warstewki powietrza a więc od powodującego jej ruch ciśnienia; ton zatem wydawany przez piszczałkę tego typu wtedy tylko miałby stałą wysokość, gdyby prędkość „wiatru” stale była jednakowa, co w praktyce trudno byłoby urzeczywistnić. Tę zależność udowodniły istotnie pomiary Schaefera (1918 r.) i Lutza (1921 r.), którzy stwierdzili, że dopiero wtedy, gdy ciśnienie „wiatru” odpowiada tonowi własnemu powietrza w rurze, ton piszczałki pozostaje stały w dość szerokich granicach ciśnienia.

Zależność wysokości tonu od ciśnienia ujawnia się również, lecz w znacznie mniejszym stopniu i w instrumentach stroikowych.

W zupełnie podobny sposób można wyjaśnić powstawanie tzw. tonów ciętych, zbadanych po raz pierwszy przez Strouhala (1878 r.). Tomy te, których przykładem są brzęczenia drutów telegraficznych, szum drzew, tony wydawane przez tzw. harfę eolską tzn. układ drutów o różnej odpowiednio dobranej długości, rozpiętych na sztywnej ramie, itd., powstają na skutek ruchu płynu (równie dobrze cieczy, jak i gazu) względem sztaby, pręta lub drutu.

Oznaczmy przez  $U$  prędkość drutu, pręta lub sztaby względem masy płynu, którą uważamy za nieruchomą, i przyjmijmy, że ciało to porusza się w kierunku prostopadłym do swej osi. Rysunek 91 będzie tym razem odtwarzał przecięcie warstwy wirowej płaszczyzną prostopadłą do osi poruszającego się ciała (w dostatecznej odległości od końców danego ciała),

Warstwa wirowa będzie poruszała się względem nieruchomej warstwy płynu z prędkością  $u$ , na ogół mniejszą od  $U$ . Gdy na skutek tej różnicy prędkości wir początkowo przylega-



jący do ciała oddali się od niego na odległość  $\frac{l}{2}$ , przy ciele powstanie wir nowy po przeciwnej stronie warstwy, przy wzroście odległości o  $l$  powstanie wir po tej samej stronie; w ciągu tego czasu warstewka, jak o tym była mowa wyżej, wykona jedno całkowite wahnięcie. Częstota zatem drgań warstewki będzie równa

$$\nu = \frac{U-u}{l}. \quad (43b)$$

Gdy ta częstota drgań jest zgodna z częstotą drgań własnych ciała, gdy więc mamy do czynienia z rezonansem, powstają silne drgania ciała i natężenie dźwięku może przybrać dość znaczną wartość.

Według v. Kármána stosunek  $\frac{u}{U}$ , jak również stosunek  $l$  do wymiarów ciała posiadają dla danego ciała wartość stałą, niezależną od rodzaju płynu. Tak np. dla drutu cylindrycznego stosunki  $\frac{u}{U} = a$  i  $\frac{l}{2r} = b$ , gdzie  $r$  — promień drutu, mają w powietrzu i wodzie wartości te same, które v. Kármán i Rubach wyznaczyli doświadczalnie. Przekształcając równanie (43b), otrzymamy

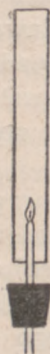
$$\nu = \frac{1-a}{b \cdot 2r} \cdot U = \frac{1-a}{b} \cdot \frac{U}{2r} = C \cdot \frac{U}{2r}. \quad (43c)$$

Według Kármána i Rubacha  $C$  w danym przypadku równo jest 0,20.

Wnioski te znalazły potwierdzenie w doświadczeniach Strouhala i Krügera (1914 i lata późniejsze) z wyjątkiem przypadków drutów bardzo cienkich. Wzór (43c) jeszcze przed pracami v. Kármána wyprowadził Rayleigh, przyjmując na  $C$  nieco odmienną wartość równą 0,185.

Szczególny przypadek drgań słupa gazu stanowi tzw. śpiewający płomień.

Zjawisko to, odkryte przez Higginsa (1777 r.) polega na drganiu powietrza, zawartego w otwartej rurze pionowej, do której, w dolnej jej części, wprowadzony jest płomień. Rodzaj palącego się gazu nie wpływa w niczym na wysokość tonu, nieco wyższą zazwyczaj od wysokości własnego tonu rury, wypelnio-



rys. 93



nej gazem jednorodnym o tej samej temperaturze. Dobierając rury odpowiedniej długości, można zbudować tzw. harmonijkę gazową, dającą tony o oznaczonym stosunku częstości.

Najbardziej, jak się zdaje, słuszne wyjaśnienie tego bardzo złożonego zjawiska dał Rayleigh, stwierdzając, że drgania są w tym przypadku podtrzymywane przez okresowy przyływ ciepła, przy czym podtrzymywanie zachodzi wtedy, gdy ciepło przychodzi w chwilach największego zgęszczenia, odpływa zaś w chwilach największego rozrzedzenia. Tym by się tłumaczył fakt, stwierdzony przez Sondhaussa (1860 r.), a ostatnio potwierdzony przez Richardsona, że rura „odpowiada” na pobudzenie wtedy tylko, gdy przewody, doprowadzające spalany gaz, mają dostateczną długość, aby powstała w nich fala stojąca.

Zmiana energii cieplnej w akustyczną zachodzi również i wtedy, gdy przez przewodnik przepływa zmienny prąd elektryczny. Ciepło, wywiązane w drucie i proporcjonalne do kwadratu natężenia prądu, możemy uważać za sumę dwu ilości ciepła: stałej i zmiennej, jak to wynika bezpośrednio ze wzoru

$$i_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{i_0^2}{2} - \frac{i_0^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Zmienna ilość ciepła powoduje zmienne ogrzewanie otaczającego powietrza, i co za tym idzie, okresową zmianę jego prężności. Obszerność tych zmian jest tym większa, im mniejsza jest objętość ogrzewanego gazu oraz im mniejsza jest pojemność cieplna przewodnika. Warunki te są spełnione, gdy przewodnikiem są cienkie paski (platynowe lub złote) lub druty o grubości możliwie małej (np. 1  $\mu$ ), zamknięte w niewielkiej puszcze. Drgania ciśnienia w puszcze są przekazywane na zewnątrz przez drgania błony, zamykającej całkowicie lub częściowo jeden z boków puszki, lub też bezpośrednio przez otwór w puszcze doprowadza do ucha. Znając natężenie prądu i wymiary puszki można, jak to wykazał (1922 r.) Wentz i jak to potwierdziły pomiary Trendelenburga (1923 r.), dokładnie obliczyć amplitudy drgań ciśnienia. Toteż tego rodzaju przyrząd, nazywany termofonem, może służyć do dokładnych bezwzględnych pomiarów amplitud, gdy chodzi o energie niewielkie.

Odrębną kategorię źródeł dźwięku stanowią przyrządy typu syreny, których pierwowzorem jest syrena Cagniard de la Toura. Jest to płyta kołowa, na której wzdłuż obwodu koła są



równomiernie rozmieszczone otwory. Gdy płytę wprawimy w ruch obrotowy koło osi, przechodzącej przez jej środek i prostopadłej do jej płaszczyzny, i gdy na którykolwiek z układów otworów skierujemy prąd powietrza, wydmuchiwany z niewielkiej rurki, też prostopadłej do płyty, okresowo powtarzające się nagłe przerywania prądu będą źródłem dźwięku. Wysokość dźwięku w tym przyrządzie zależy jedynie od ilości otworów i prędkości obrotu płyty, może więc być dowolnie zmieniana.

Do tej samej kategorii dźwięków należą dźwięki wydawane przez szybko obracające się ciała, jak np. dynamomaszyny, turbiny itp.



## ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM

### ROZDZIAŁ III

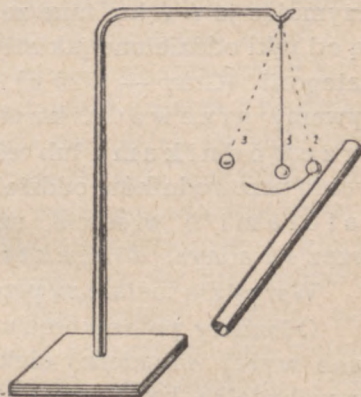
#### POLE ELEKTRYCZNE

##### I. — DOŚWIADCZENIA PODSTAWOWE.

Przybliżmy do lekkiej kuleczki (np. z rdzenia bżowego), zawieszanej na jedwabnej nitce, pałeczkę szklaną, którą potarliśmy uprzednio szmatką jedwabną. Kulka będzie przez pałeczkę przyciągnięta, jakiś czas pozostanie z nią w zetknięciu, następnie zaś będzie przez

nią odpychana (rys. 94). Dotknijmy kuleczkę palcem i przybliżmy do niej pałeczkę ebonitową, potartą sukniem lub futrem. Zjawisko będzie miało przebieg ten sam, co poprzednio; kuleczka początkowo przyciągana zetknie się z pałeczką, po czym będzie przez nią odpychana. Podobne działania stwierdzimy przybliżając do kuleczki inne ciała odpowiednio potarte. Ten charakterystyczny przebieg zjawiska, różny całko-

wicie od tych, jakie obserwujemy przy wszystkich innych wzajemnych działaniach ciał, jest dowodem nabycia przez pałeczkę na skutek potarcia nowych szczególnych własności. Własności te nazywamy elektrycznymi, pałeczkę zaś posiadającą te własności uważamy za naelektryzowaną.



rys. 94



Termin ten został, jak się zdaje, wprowadzony przez Gilberta (1540—1603 r.); źródłosłowem była tu grecka nazwa bursztynu — elektron — ciała, które służyło do pierwszych doświadczeń z tej dziedziny. Ta grecka nazwa powszechnie się przyjęła, jakkolwiek jeszcze w osiemnastym wieku Gilbertowski termin „siła elektryczna” (*vis electrica*) był w polskich podręcznikach tłumaczony na „siłę bursztynowania”.

Gilbertowi nie był, zdaje się, znany dokładny przebieg zjawiska w tej postaci, w jakiej podaliśmy go wyżej: działanie elektryczne polegało według niego na przyciąganiu lekkich ciał. Skąpy materiał obserwacyjny, który od czasu Talesa z Miletu (ok. 640—550 r. przed nar. Chr.) wzbogacił się jedynie ustaleniem przez Pliniusza Starszego (r. 79 po nar. Chr.) roli, jaką w tym zjawisku odgrywa tarcie, Gilbert uzupełnił odkryciem, że nie tylko bursztyń, lecz i inne ciała mogą po potarciu nabyć własności elektryczne. Zjawisko odpychania ciał, które było w zetknięciu z ciałami naelektryzowanymi, zauważył dopiero v. Guericke (1672 r.).

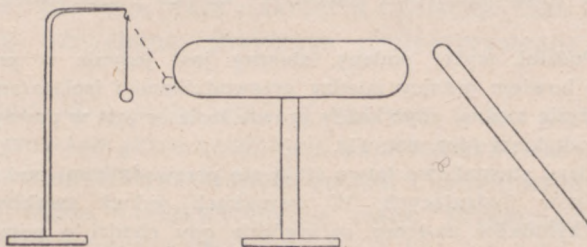
Powtarzając opisane wyżej doświadczenia z różnymi ciałami, stwierdzimy, że jakkolwiek wszystkie ciała można naelektryzować przez potarcie, to jednak sposób elektryzowania nie zawsze jest jednakowy. Pewne ciała możemy naelektryzować trzymając je w ręku, inne zaś elektryzują się tylko wtedy, gdy są od ręki oddzielone jakimś ciałem, należącym do poprzedniej kategorii (Gray — 1729 r.). Ciała tego ostatniego rodzaju nazywamy przewodnikami, ciała rodzaju pierwszego nieprzewodnikami lub też z uwagi na to, że przy elektryzowaniu przewodników oddzielają one przewodnik od ręki, izolatorami i wreszcie, używając terminu wprowadzonego przez Faradaya, dielektrykami.

Wszystkie metale są przewodnikami.

Odsuńmy po zetknięciu z ciałem naelektryzowanym opisane wyżej wahadełko elektryczne i przybliżmy je do innego wahadełka, które poprzednio nie stykało się z ciałem naelektryzowanym. Przebieg zjawiska będzie wtedy taki sam, jak przy przybliżaniu ciała naelektryzowanego. Kulczki będą się przyciągały, zetkną się ze sobą i następnie będą się odpychały. Opierając się na ustalonych wyżej cechach działań elektrycznych stwierdzamy, że kulka wahadełka, które uprzednio było wprowadzone w zetknięcie z naelektryzowaną pałeczką, została przez zetknięcie naelektryzowana.



To zetknięcie może nawet nie być bezpośrednie. Umieścimy wahadełko w pobliżu niewielkiego walca o zaokrąglonych podstawach (rys. 95) i dotknijmy walec naelektryzowaną pałeczką.



rys. 95

Przy takim układzie doświadczenia walec powinien mieć rozmiary niewielkie, pałeczka zaś musi być silnie naelektryzowana.

Wahadełko będzie i tym razem, jak to pierwszy stwierdził Gray (1727 r.) przyciągnięte, a następnie odepchnięte przez walec. Zbliżając do tego wahadełka inne, stwierdzimy, że kulka i tym razem została naelektryzowana. Walec zatem został naelektryzowany przez pałeczkę i następnie naelektryzował kulkę. Gdy jednak walec metalowy zastąpimy walcem z materiału izolacyjnego, elektryzacja pałeczki nie udzieli się wahadełku (Desaguliers, 1683 — 1744 r.); przybliżanie wahadełka do różnych części powierzchni takiego walca pozwoli nam stwierdzić, że tylko ta część walca została naelektryzowana, która była w bezpośrednim zetknięciu z pałeczką. W przewodniku więc elektryzacja jakiegokolwiek jego części udziela się i wszystkim częściom pozostałym, w izolatorze jest ona umiejscowiona w częściach elektryzowanych bezpośrednio. Tym się tłumaczy niemożność naelektryzowania przez potarcie przewodników trzymanyh w ręku. Elektryzacja pocieranej części przewodnika udziela się nie tylko wszystkim jego częściom pozostałym, lecz również naszemu ciału, które jest przewodnikiem, i przewodzącej ziemi, na której stoimy. Dopiero oddzielenie przewodnika od naszej ręki lub naszego ciała od ziemi izolatorem umożliwi elektryzację.



Do przewodników należą, jak o tym wyżej była mowa, wszystkie metale, poza tym węgiel, grafit, woda i roztwory wodne soli, bawełna, len; do izolatorów — bursztyn, kwarc, siarka, szkło, guma, porcelana, jedwab, parafina, oleje, lód w niskich temperaturach (około — 25° C) i wszystkie na ogół gazy.

Podział, wyżej podany, słuszny jest jedynie w przybliżeniu, ściśle bowiem granicy między przewodnikami i izolatorami przeprowadzić nie można, gdyż każdy prawie izolator jest w pewnym stopniu przewodnikiem (por. ust. 11).

Gazy stosunkowo łatwo stają się przewodnikami pod działaniem czynników jonizujących. W warunkach jednak zwykłych wpływ tych czynników możemy, szczególnie gdy chodzi o pomiary mniej dokładne, pominąć. Wyjątku nie stanowi, wbrew rozpowszechnionemu mniemaniu, wilgotne powietrze; przewodnik umieszczony w atmosferze pary wodnej nie traci swych własności elektrycznych, o ile tylko potrafimy zabezpieczyć izolujące podstawki, na których przewodnik spoczywa, przed utworzeniem się na nich warstewki wody.

Jeżeli naelektryzowaną pałeczką dotykać będziemy coraz to innych ciał, elektryzując je przez zetknięcie, działania elektryczne pałeczki będą stawały się coraz słabsze, aż wreszcie staną się dla nas niedostrzegalne.

Przyjmijmy za Coulombem (1785 r.), że działania elektryczne, które w tych samych pozostałych warunkach wywierają ciała naelektryzowane, są miarą wzbudzanych na nich przez tarcie nabożów elektrycznych lub ilości elektryczności i załóżmy, nie stawiając żadnych dodatkowych hipotez co do wprowadzonej w ten sposób wielkości, że wzrostowi naboju elektrycznego na danym ciele towarzyszy, w tych samych, rzecz prosta, warunkach pozostałych, wzrost działań elektrycznych danego ciała. Zmniejszenie więc działań elektrycznych pałeczki, o którym wyżej była mowa, spowodowane jest przez stopniowe zmniejszanie się jej naboju elektrycznego, przez jej rozbrajanie. Zmniejszeniu temu towarzyszy, jak wiemy, elektryzowanie się ciał, dotykanych przez pałeczkę, a więc powstawanie na nich nabożów elektrycznych. Najprostszym objaśnieniem tego faktu będzie przypuszczenie, że przy zetknięciu nabój ciała elektryzującego częściowo przechodzi na ciało elektryzowane, początkowo elektrycznie obojętne. Kulka, której dotykaliśmy naelektryzowaną pa-



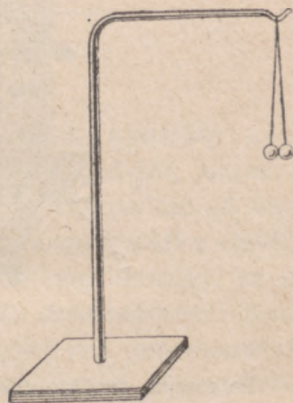
łeczką szklaną, byłaby zatem, w świetle tego rozumowania naelektryzowana nabojem, który przeszedł na nią ze szkła. Okazuje się, że kulkę tę, odpychaną, jak wiemy, przez naelektryzowaną pałeczkę szklaną, przyciąga pałeczka laku, naelektryzowana przez potarcie suknią lub futrem. Odwrotnie, kulkę naelektryzowaną przez zetknięcie z pałeczką laku i przez pałeczkę tę odpychaną, przyciąga naelektryzowana pałeczka szklana.

Weźmy dwa wahadełka, z których jedno niech będzie naelektryzowane przez zetknięcie z naelektryzowanym szkłem, drugie — z naelektryzowanym lakiem i przybliżajmy do nich po kolei różne naelektryzowane ciała. Przekonamy się, że każde z nich wywiera działanie albo takie, jak lak, albo takie, jak szkło: nie znajdziemy żadnego ciała, które by jednocześnie przyciągało lub jednocześnie odpychało obie kulki: jeżeli jedną z nich przyciąga, to drugą odpycha.

Z tego ważnego faktu, stwierdzonego przez du Faya (1733 r.), wynika, że istnieją dwa i tylko dwa rodzaje elektryzacji lub, innymi słowy, dwa i tylko dwa rodzaje naboju elektrycznych: szklany i żywiczny. Z powodów, które niżej znajdą swoje wyjaśnienie, jedną z tych elektryczności a mianowicie szklaną, nazywamy dodatnią, drugą zaś, żywiczną — ujemną.

Ciała naelektryzowane elektrycznością tego samego znaku (jednoimiennie) odpychają się, ciała, naelektryzowane elektrycznością znaków różnych (różnoimiennie), przyciągają się.

Jeżeli więc kulki podwójnego wahadełka (rys. 96) naelektryzujemy przez zetknięcie elektrycznością tego samego znaku, kulki będą się odpychały tym silniej, im większy jest



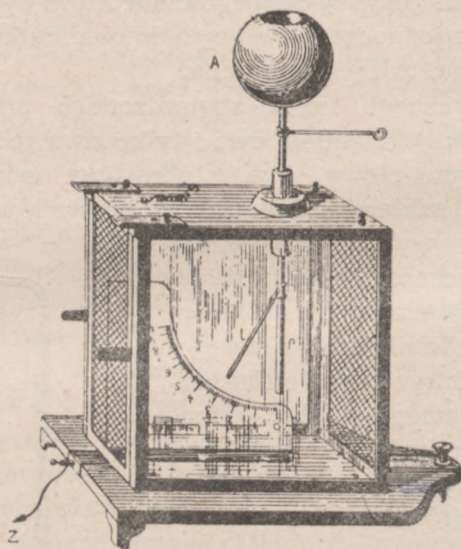
rys. 96

otrzymany przez każdą z nich nabój elektryczny. Tego rodzaju elektroskop, użyty po raz pierwszy przez Cantona (1753 r.), pozwalała nam nie tylko stwierdzić, czy ciało, którym dotykamy



elektroskop, jest naelektryzowane, lecz również zdać sobie, przynajmniej porównawczo, sprawę ze stanu jego elektryzacji: w tych samych bowiem warunkach zetknięcia nabój otrzymany przez kulki jest tym większy, im silniej jest naelektryzowane badane ciało.

W tej prostej postaci elektroskop rzadko bywa używany. Zazwyczaj nici z kulkami są zastąpione przez pręt metalowy z przymocowanymi do niego lekkimi listkami (lub listkiem) również metalowymi (np. glinowymi). Pręt osadzony jest pionowo w izolującym korku (np. bursztynowym), znajdującym się w górnej części naczynia metalowego, zaopatrzonego z dwóch stron przeciwległych (lub tylko z jednej strony) w okienka szklane, przez które można obserwować odchylenie listków (elektroskop rys. 97 jest elektroskopem jedno-

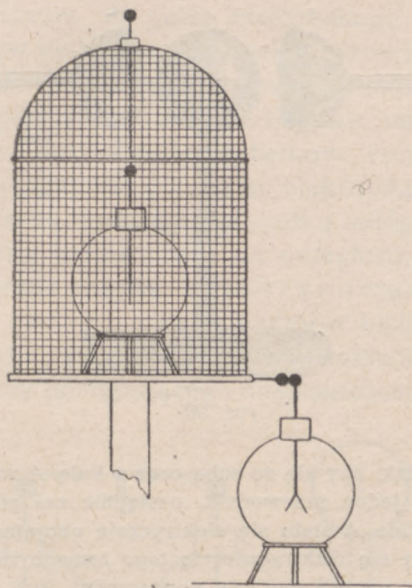


rys. 97

listkowym, w którym pręcik  $p$  odpycha naelektryzowany jednorodnie listek  $L$ ). Umieszczenie elektroskopu tak, jak się to czasem zdarza, w naczyniu szklanym na ogół nie jest wskazane, szkło bowiem, o ile nie jest zwilżone wodą, przy słabym nawet potarciu ręką łatwo się elektryzuje i powstające na nim wtedy naboje powodują odchylenie listków elektroskopu nawet, gdy nie były one uprzednio elektryzowane.



Umieścimy, powtarzając w małej skali doświadczenie wykonane przez Faradaya (1838 r.), elektroskop wewnątrz zamkniętej siatki metalowej (rys. 98); jakkolwiek silnie naelektry-

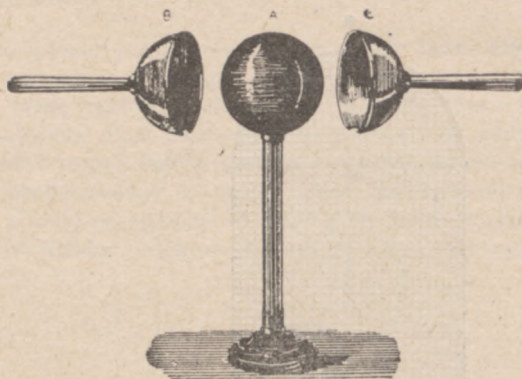


rys. 98

zowalibyśmy siatkę, listki elektroskopu się nie rozchylą i to zarówno wtedy, gdy elektroskop połączymy z siatką jakimkolwiek przewodnikiem, jak i wtedy, gdy go całkowicie od siatki odosobnimy. Jednocześnie listki połączonego z siatką elektroskopu zewnętrznego będą odchylały się tym bardziej, im silniej będzie siatka naelektryzowana. To doświadczenie wskazuje, 1) że nabój udzielony przewodnikowi jest umiejscowiony na jego powierzchni, tak że wewnętrzne części przewodnika, do których należy elektroskop, połączony metalicznie z siatką, naboju nie otrzymują, oraz 2) że naelektryzowany przewodnik nie wywiera żadnych działań elektrycznych na umieszczone wewnątrz niego ciała, jak to wynika z nieodchylania się listków odosobnionego od siatki elektroskopu.



Do tego wniosku wcześniej jeszcze doszedł Cavendish (1773 r.) i niezależnie od niego Coulomb (1786 r.). Niech  $A$  będzie naelektryzowaną kulą, osadzoną na izolowanej podstawie,  $B$  i  $C$  wydrążonymi półkulami, zaopatrzonymi w rączki izolujące. Gdy na  $A$  nałożymy



rys. 99

półkule  $B$  i  $C$  tak, aby się ze sobą oraz z kulą  $A$  zetknęły, stanowiąc przez ten czas jeden przewodnik, następnie zaś półkule odsuniemy, okaże się, że kula  $A$  stała się elektrycznie obojętna, kule zaś  $B$  i  $C$  naelektryzowały się elektrycznością tego samego znaku. Nabój więc, znajdujący się początkowo na powierzchni kuli  $A$ , przeszedł na zewnętrzną powierzchnię przewodnika, złożonego z  $A$  oraz półkul  $B$  i  $C$ .

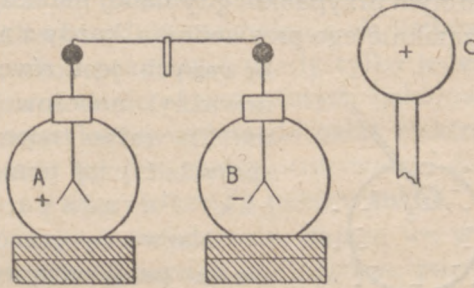
Przypuśćmy teraz, że listki naelektryzowanego dodatnio elektroskopu rozchyliły się o kąt  $\alpha$ ; gdy elektroskopu dotkniemy jeszcze raz naelektryzowaną pałeczką szklaną, odchylenie zwiększy się np. o kąt  $\beta$ ; gdy dotkniemy naelektryzowaną pałeczką laku, odchylenie się zmniejszy np. o kąt  $\gamma$ . Udzielenie więc ciała już naelektryzowanemu naboju tego samego znaku wzmacnia jego działania elektryczne, udzielenie naboju znaku przeciwnego — zmniejsza.

W ten sposób znajduje usprawiedliwienie wprowadzona wyżej przez analogię z dodatnimi i ujemnymi wielkościami algebraicznymi nazwa elektryczności dodatniej i ujemnej. W przypadku, gdy działania naboju przeciwnego znaku całkowicie się zobojetniają, naboje uważamy za r ó w n o w a ż n e. Gdyby więc w przykładzie wyżej przez nas podanym nabój



ujemny udzielony przez pałeczkę laku zmniejszył odchylenie listków o kąt  $\beta$ , uważalibyśmy go za równoważny naboju dodatniemu, który elektroskop otrzymał przy powtórnym zetknięciu z pałeczką szklaną.

Przy wykonywaniu tego doświadczenia stwierdzamy, że już przy przybliżaniu do gałki elektroskopu pałeczki laku, odchylenie listków elektroskopu, naelektryzowanych dodatnio, jeszcze przed zetknięciem się jej z gałką stopniowo się zmniejsza, jak gdyby pałeczka nawet z oddalenia udzielała listkom naboju ujemnego. Kąt odchylenia listków wraca do swej poprzedniej wartości, gdy nie dotykając elektroskopu, odsuniemy od niego pałeczkę na dostatecznie wielką odległość. To zjawisko elektryzowania przewodnika na odległość, odkryte przez Cantona i nazywane często elektryzowaniem przez wpływ (influencję), a które nazywać będziemy indukcją elektrostatyczną, możemy dokładniej sobie wyjaśnić przy pomocy następującego doświadczenia (Valentiner).



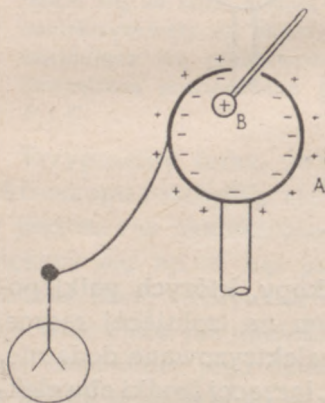
rys. 100

Weźmy dwa jednakowe elektroskopy, których gałki połączone są cienkim drutem, osadzonym na izolującej rączce, i przybliżmy do nich ciało C, silnie naelektryzowane dodatnio, tak aby się ono znajdowało na prostej, łączącej środki obu elektroskopów. Odchylenie, którego doznają wtedy listki elektroskopów, nie ulega żadnej zmianie, gdy usuniemy drut, łączący elektroskopy i jednocześnie odsuniemy dostatecznie daleko ciało C. Przybliżając do gałki elektroskopu B naelektryzowaną pałeczkę laku, stwierdzimy zwiększanie się odchylenia listków, skąd, na mocy ustalonych poprzednio twierdzeń, wyciągniemy



wniosek, że elektroskop ten jest naelektryzowany ujemnie a więc przeciwnie niż ciało *C*. Przybliżenie tej samej pałeczki do elektroskopu *A* wywoła zmniejszenie się odchylenia listków; elektroskop *A* jest przeto naelektryzowany dodatnio, a więc tak jak ciało *C*. Ponieważ podczas przybliżania ciała *C* oba elektroskopy stanowiły jeden przewodnik (były bowiem połączone przewodzącym drutem), możemy wynik tego doświadczenia wyrazić w sposób następujący: na przewodniku poddanym działaniom indukcji elektrostatycznej, powstają zawsze naboje obu znaków, przy czym nabój tego samego znaku, co nabój indukujący umiejscawia się na bardziej oddalonych, nabój zaś znaku przeciwnego na bardziej zbliżonych do ciała indukującego częściach przewodnika. Naboję te powstają w ilościach równoważnych, jeżeli bowiem po odsunięciu ciała *C* znów połączymy elektroskopy drutem, listki w obu elektroskopach opadną; naboje dodatni i ujemny zubożają się wzajemnie.

W szczególnym przypadku, gdy nabój indukujący znajduje się wewnątrz zamkniętego przewodnika, każdy z nabojeń indukowanych jest równy (lub równoważny) nabojeń indukującemu. To ważne twierdzenie można sprawdzić przy pomocy tzw. puszki Faradaya.



rys. 101

Nazwą tą oznaczamy naczynie z przewodzącego materiału np. kulę metalową taką jak kula *A* na rys. 101, o możliwie małym otworze, przez który można wprowadzać do jej wnętrza niewielkie ciała naelektryzowane. Gdy zewnętrzna powierzchnię tej puszki połączymy z elektroskopem i do środka puszki wprowadzimy kuleczkę metalową *B*, osadzoną na

izolującym trzonku i naelektryzowaną np. dodatnio, listki elektroskopu rozchylą się pod działaniem indukcji elektrostatycznej, elektryzując się dodatnio.



Zarówno znak elektryzacji, jak i kąt rozchylenia się listków ulegnie niewielkiej jedynie zmianie (tym mniejszej, im mniejszy jest otwór puszkii), gdy kulką *B* dotkniemy wewnętrznej powierzchni puszkii, gdy zatem kulka utworzy z puszką jeden przewodnik, a więc gdy jej nabój przejdzie na zewnętrzną powierzchnię puszkii. Przy tym zetknięciu znikają naboje indukowane, wzajemnie się zobojętniające, miejsce dodatniego naboju indukowanego zajmuje dodatni nabój kulki, — z niezmienności więc odchyień listków elektroskopu wynika, że nabój ten jest równy dodatniemu naboju indukowanemu i co za tym idzie, równoważny ujemnemu naboju indukowanemu.

Powstawanie nabołów różnych znaków w ilościach równoważnych jest cechą wszystkich zjawisk elektryzacji.

Wyścielmy dno puszkii sukniem i pocierajmy o nie kulkę *B*, osadzoną tak, jak poprzednio, na izolującym trzonku; listki elektroskopu pozostawać będą przez cały czas w spoczynku; nie odchylią się również i wtedy, gdy kulkę — nie wyjmując jej z naczynia — podniesiemy nieco ponad sukno. Dopiero wyjęcie kulki spowoduje rozchylenie się listków elektroskopu, w puszcze bowiem pozostanie wtedy tylko jeden z dwóch związanych przez tarcie równoważnych nabołów — nabój sukna. Przybliżając kulkę wyjętą do gałki elektroskopu, stwierdzimy, że nabój jej jest znaku przeciwnego do znaku naboju elektroskopu, a więc do znaku naboju sukna.

Tego rodzaju doświadczenia, dające we wszystkich przypadkach elektryzacji wyniki analogiczne, pozwalają postawić twierdzenie następujące: w układzie odosobnionym żadne przemiany nie mogą zmienić sumy algebraicznej nabołów zawartych w tym układzie. Ta zasada zachowania elektryczności została sformułowana przez Faradaya (1838 r.).

Jest rzeczą zazwyczaj dość trudną przewidzieć z góry, które z dwu pocieranych ciał naelektryzuje się dodatnio a które — ujemnie. Próby, zapoczątkowane jeszcze przez Younga (1807 r.) a następnie powtarzane przez Faradaya (1843 r.) i wielu innych badaczy, zgrupowania wszystkich ciał w szereg taki, aby ciała, stojące w szeregu wyżej, elektryzowały się przy potarciu o ciała, stojące niżej, dodatnio, skończyły się niepowodzeniem. Znak bowiem elektryzacji zależy w wysokim stopniu od stanu powierzchni i, jak się zdaje, od rodzaju gazu, w którym ciała się znajdują, a nawet od sposobu pocierania.



Szkło o powierzchni matowej elektryzuje się przy potarciu welną ujemnie; szkło o powierzchni gładkiej — dodatnio. Analogiczne zjawisko przy potarciu metali jedwabiem zaobserwował Jones (1915 r.). Według Pecleta pałeczka szklana silnie pocierana lnianą szmatką elektryzuje się dodatnio, słabo pocierana ujemnie. Co więcej, gdy przełamiemy jakiś izolator i będziemy pocierali dwa otrzymane w ten sposób kawałki, jeden z tych kawałków naelektryzuje się dodatnio, drugi ujemnie, przy czym, jak to wykazał Riess, znaku z góry przewidzieć się nie da. To elektryzowanie zachodzi jednak tylko wtedy, gdy stan fizyczny powierzchni obu ciał jest różny (Shaw, 1926 r.).

Dlatego też nie przytaczamy tutaj żadnej z tego rodzaju tablic, poprzestając na omówieniu przypadków bardziej charakterystycznych.

Tak więc rtęć elektryzuje się przy tarcu o szkło dodatnio; gdy umieścimy kroplę rtęci w rurze szklanej, z której zostało usunięte powietrze, ruch tej kropli po powierzchni szkła powodować będzie świecenie, które w ciemności dobrze można obserwować.

Ciała sproszkowane i pyły silnie elektryzują się na skutek tarcia. Wydmuchiwanie np. z mieszka (lub przesiewanie przez muslin) mieszaniny siarki i minii powoduje elektryzowanie się siarki ujemnie, minii — dodatnio. Pył węglowy (v. Walther i Franke, 1929 r.) elektryzuje się przy przedmuchiowaniu przez rurę szklaną ujemnie i to tym silniej, im wyższa jest jego temperatura.

Lenard wykazał (1892 r.), że wodospady elektryzują otaczające powietrze ujemnie i przypisał tę elektryzację tworzeniu się na powierzchni wody podwójnej warstwy nabożów: jednej dodatniej, drugiej — ujemnej, przy czym ujemna zwrócona jest na zewnątrz. Powietrze porywa cząstki ujemne i w ten sposób się elektryzuje.

To objaśnienie posłużyło za punkt wyjścia teorii Coehna (1898 r.), który przyjmuje, że na powierzchni ciał zawsze istnieje tego rodzaju warstwa, tak że przy pocieraniu łatwiej uchodzą naboże ujemne z tego ciała, w którym siły elektryczne, z jakimi naboże dodatnie przyciągają ujemne, są mniejsze a więc którego zdolność elektryczna (p. ust. 2) jest większa. Reguła Coehna stosuje się tylko do dielektryków; gdy chodzi o metale, należy poczynić jeszcze dodatkowe założenia, których omawiać tu nie będziemy.

## 2. — PRAWO COULOMBA.

Przypuśćmy, że działające wzajemnie na siebie ciała naelektryzowane mają bardzo małe rozmiary lub też że odległość między nimi jest dostatecznie wielka, abyśmy mogli wpływ ich rozmiarów całkowicie pominąć, a więc innymi słowy, że, wracając do pojęcia, które takie usługi oddaje w mechanice, mamy do czynienia z naelektryzowanymi punktami materialnymi. Zgodnie z założeniem Coulomba (ust. I) przyjmujemy, że dzia-

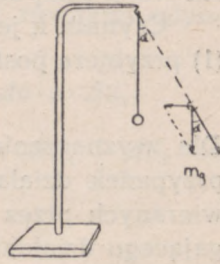


łanie wzajemne dwu takich punktów jest, w tych samych warunkach pozostałych, proporcjonalne do iloczynu ich nabojów, tak że mamy

$$f = k \cdot e_1 \cdot e_2, \quad (a)$$

gdzie  $e_1$  i  $e_2$  oznaczają wartości nabojów danych punktów.

Umieścimy naelektryzowane wahadełko elektryczne w takiej odległości od naelektryzowanego niewielkiego ciała  $A$ , abyśmy i kulkę i dane ciało mogli uważać z wystarczającą dokładnością za punkty materialne oraz abyśmy mogli nie uwzględniać zmiany ich odległości, spowodowanej przez ich wzajemne przyciąganie się i odpychanie. Przypuśćmy, że gdy ciało  $A$  i kulka wahadła znajdują się na jednym poziomie, wahadło pod działaniem siły elektrycznej odchyli się od pionu o kąt  $\alpha$  (rys. 102). Siła elektryczna wywierana przez ciało  $A$  równoważy składową styczną siły ciężkości  $Q \cdot \operatorname{tg} \alpha = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ; mierząc więc kąt  $\alpha$  możemy wyznaczyć wielkość tej siły. Gdy ciało  $A$  zastąpimy innym, silniej lub słabiej naelektryzowanym lub też, gdy zmienimy nabój wahadła, siła będzie w tych samych warunkach inna, kąt  $\alpha$  się zmieni. Oznaczmy wartość naboju przy pierwszym pomiarze przez  $e_1$  i  $e_2$ , przy drugim przez  $e_3$  i  $e_2$  (nabój wahadła zostaje bez zmiany, ciało  $A$  jest zastąpione przez inne), stosunek sił, otrzymany z pomiaru odchylenia, równy jest stosunkowi naboju  $e_1$  i  $e_3$ .



rys. 102

Założenie proporcjonalności siły  $f$  do iloczynów naboju działających jest, o ile, rzecz prosta, przyjmiemy założenie Coulomba, wnioskiem z doświadczenia.

Istotnie, niech siła  $f$  będzie proporcjonalna do dowolnej funkcji obu naboju, przeto będzie

$$f = k \cdot \psi(e_1, e_2). \quad (a)$$

Weźmy dwa punkty materialne naelektryzowane nabojami  $e_1$  i  $e_1'$  i wyznaczmy kolejno ich działania w tych samych pozostałych wa-



runkach na punkty naelektryzowane nabojami  $e_2, e_3, e_4 \dots$ . Na wartości sił działających otrzymamy odpowiednio

$$f_{1,2} = k \cdot \psi(e_1, e_2); \quad f_{1,3} = k \cdot \psi(e_1, e_3); \quad f_{1,4} = k \cdot \psi(e_1, e_4) \dots$$

$$f'_{1,2} = k \cdot \psi(e'_1, e_2); \quad f'_{1,3} = k \cdot \psi(e'_1, e_3); \quad f_{1,4} = k \cdot \psi(e'_1, e_4) \dots$$

Zestawiając wyniki pomiarów, stwierdzimy, że

$$\frac{f_{1,2}}{f'_{1,2}} = \frac{f_{1,3}}{f'_{1,3}} = \frac{f_{1,4}}{f'_{1,4}} = \dots = \frac{\psi(e_1, e_n)}{\psi(e'_1, e_n)} = \text{stałej},$$

co jest możliwe jedynie wtedy, gdy we wzorze (a) wielkości  $e_2, e_3 \dots$  są czynnikami iloczynu  $e_n \psi(e_1)$  i  $e_n \psi(e'_1)$ . Ponieważ jednak siła  $f$  musi być w jednakowy sposób zależna od obu działających wzajemnie na siebie nabołów, musimy przyjąć, że i  $e_1$  i  $e'_1$  są również czynnikami iloczynu. Otrzymamy więc ostatecznie, zgodnie ze wzorem (1)

$$f = k \cdot e_1 \cdot e_2.$$

Powierzchnowa nawet obserwacja działania ciał naelektryzowanych pozwala stwierdzić, że przy tej samej wartości działających nabołów siła  $f$  znacznie się zmienia przy zmianie ich wzajemnej odległości.

Czynnik  $k$  jest przeto funkcją tej odległości  $r$ , tak że wzór (1) przybiera postać

$$f = k_1 \cdot \varphi(r) \cdot e_1 \cdot e_2. \quad (1a)$$

Dla wyznaczenia kształtu funkcji  $\varphi$  rozpatrzmy szczególnie przypadek działań elektrycznych, a mianowicie działań, wywieranych przez nabój kulistego odosobnionego i nie podlegającego działaniom indukcyjnym przewodnika na naelektryzowany punkt materialny, umieszczony wewnątrz tej kuli. Jeżeli nabój punktu jest dostatecznie mały w porównaniu z nabojem kuli, aby można było pominąć jego działanie indukcyjne, nabój kuli jest rozmieszczony na jego powierzchni równomiernie. Nazywając elektryczną gęstością powierzchniową  $\sigma$  wielkość, której miarą jest nabój przypadający na jednostkę powierzchni, napiszemy

$$\sigma = \frac{\Delta e}{\Delta S} = \frac{e}{4\pi R^2} = \text{stałej},$$

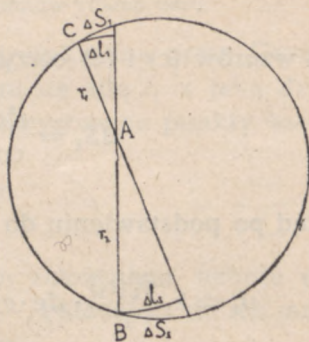
gdzie  $\Delta e$  — nabój na powierzchni  $\Delta S$  kuli,  $e$  — jego nabój całkowity,  $R$  — jej promień.



Załóżmy, że działanie naboju kuli na nabój punktu materialnego jest wypadkową działań elementarnych nabojuw elektrycznych, przypadających na elementy powierzchni kuli.

Wypadkowa ta, zgodnie z ustalonym wyżej (ust. 1) faktem, że działania elektryczne naboju przewodnika wewnątrz przewodnika się nie ujawniają, równa jest w tym przypadku zeru.

Przeprowadźmy przez punkt  $A$  (rys. 103), w którym umieszczony jest niewielki nabój dodatni  $\Delta e$ , cieniutki stożek podwójny  $CAB$  o kącie bryłowym  $\Delta \omega$



rys. 103

(p. tom I, str. 157). Stożek ten wytnie na kuli elementarne powierzchnie  $\Delta S_1$  i  $\Delta S_2$ . Naboję  $\sigma \Delta S_1$ ,  $\sigma \Delta S_2$ , o których założymy, że są dodatnie, działać będą na nabój  $\Delta e$  siłami odpychającymi, skierowanymi w przeciwne strony i równymi odpowiednio

$$f_1 = k_1 \varphi(r_1) \cdot \Delta e \cdot \sigma \cdot \Delta S_1 \quad \text{i} \quad f_2 = k_1 \varphi(r_2) \cdot \Delta e \cdot \sigma \cdot \Delta S_2,$$

gdzie  $r_1$  i  $r_2$  oznaczają odległości elementów  $\Delta S_1$  i  $\Delta S_2$  od punktu  $A$ .

Nadajmy funkcji  $\varphi(r)$  kształt następujący

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_1(r)}{r^2},$$

co nie zmniejszy bynajmniej ogólności wywodów. Będziemy mieli wtedy

$$f_1 = k_1 \frac{\varphi_1(r_1)}{r_1^2} \Delta e \cdot \sigma \cdot \Delta S_1 \quad \text{i} \quad f_2 = k_1 \cdot \frac{\varphi_1(r_2)}{r_2^2} \Delta e \cdot \sigma \cdot \Delta S_2. \quad (\text{b})$$

Opiszmy z punktu  $A$  kule promieniami  $r_1$  i  $r_2$ ; stożek  $CAB$  wytnie na tych kulach powierzchnie  $\Delta l_1$  i  $\Delta l_2$ , tworzące z  $\Delta S$  i  $\Delta S_2$  ten sam kąt  $\alpha$  (p. tom I, str. 157), tak że mamy

$$\Delta l_1 = \Delta S_1 \cos \alpha \quad \text{i} \quad \Delta l_2 = \Delta S_2 \cdot \cos \alpha. \quad (\text{c})$$



Z drugiej strony mamy

$$\Delta l_1 = r_1^2 \Delta \omega \quad \text{i} \quad \Delta l_2 = r_2^2 \cdot \Delta \omega. \quad (\text{d})$$

Ze wzorów (c) i (d) otrzymujemy

$$\Delta S_1 = \frac{r_1^2 \Delta \omega}{\cos \alpha} \quad \text{i} \quad \Delta S_2 = \frac{r_2^2 \Delta \omega}{\cos \alpha}.$$

Skąd po podstawieniu do wzoru (b)

$$f_1 = k_1 \frac{\varphi_1(r_1)}{r_1^2} \cdot \Delta e \cdot \sigma \cdot \frac{r_1^2 \cdot \Delta \omega}{\cos \alpha} = k_1 \frac{\varphi_1(r_1)}{\cos \alpha} \cdot \Delta e \cdot \sigma \cdot \Delta \omega,$$

$$f_2 = k_1 \frac{\varphi_1(r_2)}{\cos \alpha} \cdot \Delta e \cdot \sigma \cdot \Delta \omega.$$

Wypadkowa tych sił, będąca ich algebraiczną różnicą, musi być równa zero, gdyby bowiem którakolwiek z tego rodzaju par, na jakie możemy rozbić powierzchnię przewodnika, nie dawała wypadkowej równej zero, wypadkowa ogólna też nie byłaby równa zero, nie ma bowiem drugiej pary elementów, która by działała wzdłuż prostej CAB i która by mogła zrównoważyć działanie danej pary, taki zaś wynik byłby sprzeczny z doświadczeniem. Mamy więc

$$f = f_1 - f_2 = k_1 \cdot \frac{\Delta \omega}{\cos \alpha} \cdot \Delta e \cdot \sigma \{ \varphi_1(r_1) - \varphi_1(r_2) \} = 0. \quad (\text{e})$$

Punkt A zajmuje dowolne położenia wewnątrz przewodnika, dowolną więc wartość mają również odległości  $r_1$  i  $r_2$ , podane jednemu tylko warunkowi, aby suma ich była równa lub mniejsza od średnicy kuli. Równanie (e) może być zatem spełnione tylko w przypadku, gdy

$$\varphi_1(r_1) = \varphi_1(r_2) = \text{stałe},$$

gdy więc

$$\varphi(r) = \frac{\text{stałe}}{r^2}. \quad (\text{f})$$



Jest rzeczą oczywistą, że otrzymalibyśmy ten sam wzór rozpatrując działanie na nabój  $A$  ujemnie naelektryzowanego przewodnika. I wtedy bowiem wypadkowa dwu przeciwnie skierowanych sił przyciągania byłaby dla każdej pary elementów równa zeru.

W ten sposób, postępując drogą, wskazaną przez Cavendisha (1773 r.), dochodzimy do wzoru na siłę  $f$ , z jaką działają wzajemnie na siebie dwa naelektryzowane punkty materialne,

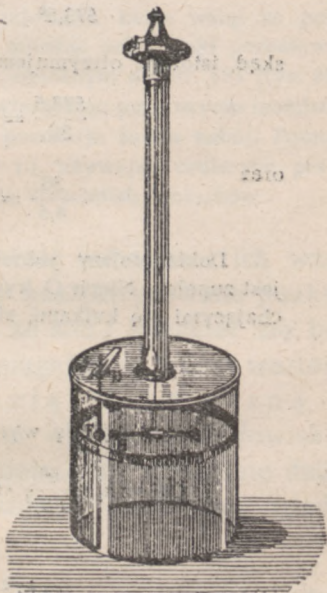
$$f = k' \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

lub oznaczając, zgodnie z przyjętym założeniem, naboje dodatnie znakiem  $+$ , ujemne znakiem  $-$ , i stosując do ich mnożenia reguły mnożenia algebraicznego

$$f = \pm k' \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2}, \quad (2)$$

gdzie znak  $+$  oznacza odpychanie, znak  $-$  przyciąganie. Wzór (2) ustalony (1785 r.) przez Coulomba na drodze doświadczalnej, wyraża tzw. prawo Coulomba.

Coulomb używał do swych doświadczeń wagi skręceń (p. tom I, str. 175). Wisząca na cienkim druciku pozioma bardzo lekka pałeczka szklana dźwigała na jednym swym końcu kulkę  $B$  z rdzenia bżowego (rys. 104), na drugim zaś pionowo umieszczony płaski krążek z papieru nasyconego terpentyną lub z miki. W przykrywce cylindrycznego naczynia znajdują się dwa otwory  $T$  i  $D$ . Przez otwór  $D$  wsuwamy pałeczkę szklaną, dźwigającą na końcu kulkę bżową  $F$  o promieniu tym samym, co kulka  $B$ . Pałeczka ta pozostaje przez cały czas doświadczenia w niezmiennym położeniu. Ustawiamy kuleczkę tak, aby przy zupełnym rozkręceniu drutu kulka  $B$  dotykała kulki  $F$ . Przez otwór  $T$



rys. 104



wprowadzamy naelektryzowaną kulkę metalową, osadzoną na izolowanej ręczce i dotykając nią kulek  $B$  i  $F$ , elektryzujemy je elektrycznością tego samego znaku, udzielając im w tych warunkach nabożów jednakowych. Siła, wywierana przez kulkę  $F$  na kulkę  $B$ , spowoduje odchylenie się kulki od pierwotnego jej położenia i skręcanie dolnego końca drutu, dopóki siły sprężystości nie zrównoważą sił elektrycznych. Przypuśćmy, że równowadze tej odpowiada kąt skręcenia  $\alpha$ . Po wyznaczeniu tego kąta (z odczytania pierwotnego i końcowego położenia krążka pionowego na skali) skręcamy górny koniec drutu o kąt  $\varphi$ , tak aby kulkę  $B$  przybliżyć do  $F$  i wyznaczamy znów odchylenie  $\alpha'$  kuleczki od położenia początkowego. Temu nowemu położeniu równowagi odpowiada skręcenie drutu o kąt  $\varphi + \alpha'$ . Coulomb zakładał, że odległość kulek można przyjąć za proporcjonalną do kątów odchylenia  $\alpha'$ , siły zaś sprężystości, równoważące siły elektryczne, za proporcjonalne do kątów skręcenia  $\varphi + \alpha'$  i z otrzymanych wyników pomiaru wyprowadził wnioski, że gdy odległości wzrastają w stosunku 1 : 2 : 4, siły odpychające maleją w stosunku 1 : 4 : 16.

Coulomb otrzymał

$\frac{\varphi + \alpha'}{36^\circ}$	$\frac{\alpha'}{36^\circ}$
144°	18°
573,5°	8,5°

skąd, istotnie, otrzymujemy

$$\frac{573,5}{36} = 15,93 \approx 16; \quad \frac{144}{36} = 4$$

oraz

$$\frac{36}{8,5} = 4,23 \approx 4; \quad \frac{36}{18} = 2.$$

Dokładniejszy jednak rachunek wskazuje, że zgodność ta nie jest zupełna. Niech  $O$  (rys. 105) będzie środkiem pałeczki,  $F$  i  $B$  odpychającymi się kulkami, siła  $f$ , w myśl założenia powinna być równa

$$f = k_1 \cdot \frac{e^2}{(FB)^2}.$$

Moment tej siły wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} f \cdot OG &= k_1 \cdot \frac{e^2}{(FB)^2} \cdot OG = k_1 \cdot \frac{e^2}{4R^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot R \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= k_1 \cdot \frac{e^2}{4R \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (g)$$



Moment ten jest równy momentowi sił sprężystych  $D$  ( $\varphi + \alpha'$ ) (tom I, str. 158). Mamy więc po uproszczeniu

$$\frac{k_1}{D} \cdot \frac{e^2}{4R} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot (\varphi + \alpha'), \quad (h)$$

gdzie  $\varphi$  i  $\alpha'$  są, oczywiście, mierzone w radianach.

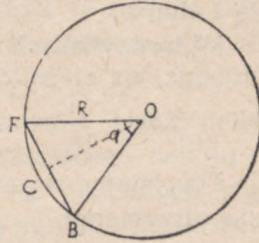
Lewa strona tego równania zachowuje podczas całego doświadczenia wartość stałą, stałą więc powinna być i strona prawa. Podstawienie danych Coulomba daje nam liczby stopniowo malejące: 3,614; 3,568; 3,169; co wskazuje, że poza nieuniknionymi błędami, wynikającymi z niedokładności pomiaru, mamy tu do czynienia z błędem systematycznym. Błąd ten najprawdopodobniej ma swe źródło w stałym zmniejszaniu się naboju kulek, czynnik  $e^2$  z biegiem czasu maleje.

W analogiczny sposób Coulomb wyznaczał zależność sił przyciągających od odległości, otrzymując mniej więcej podobne wyniki.

Cavendish sprawdzał słuszność założenia, które wziął za podstawę przy wyprowadzeniu wzoru (2), mierząc nabój, jaki pozostawał na kuli wewnętrznej w doświadczeniu, opisanym na str. 174 (rys. 99), po usunięciu zewnętrznych półkul, i stwierdzając przy użyciu możliwie czułego elektroskopu, że na kuli nie pozostaje żaden nabój. Pomiar Cavendisha powtórzył Maxwell (1879 r.), używając czulszych przyrządów i dochodząc do tych samych co Cavendish wniosków.

Jeżeli zachowując tę samą wartość naboju i ich wzajemną odległość, przenosić będziemy naelektryzowane punkty do różnych środowisk, stwierdzimy, że siła  $f$  zmieniać się będzie w zależności od środowiska, osiągając w próżni wartość największą. Nazwijmy zdolnością elektryczną  $\varepsilon$  wielkość, charakteryzującą pod tym względem środowisko, i przyjmijmy, że ze wzrostem  $\varepsilon$  zmniejsza się wzajemne działanie ciał naelektryzowanych. Wzór (2) otrzymamy wtedy w postaci

$$f = \pm k_0 \cdot \frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2}. \quad (2a)$$



rys. 105



Kładąc  $k_0 = 1$  przyjmując, że w próżni  $\epsilon = \epsilon_0 = 1$ , będziemy mieli dla próżni

$$f = \pm \frac{e_1 e_2}{r^2}, \quad (2b)$$

gdzie  $f$  wyrażone jest w dynach,  $r$  — w centymetrach.

W tym tzw. elektrostatycznym układzie elektrostatyczną jednostką naboju jest, jak to wynika bezpośrednio ze wzoru (2b), w którym kładziemy  $e_1 = e_2, f = 1$ , nabój, który z odległości 1 cm działa w próżni na drugi nabój, sobie równy, siłą 1 dyny.

W środowiskach o zdolności elektrycznej  $\epsilon$  będziemy mieli

$$f = \pm \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2}. \quad (2c)$$

Przyjmując wymiar  $\epsilon$  za równy jednostce, na wymiar naboju otrzymamy

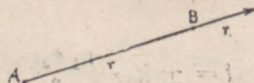
$$[e] = [f]^{1/2} [r^2]^{1/2} = M^{1/2} L^3 T^{-1}, \quad (3)$$

czemu w układzie CGS odpowiada  $g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ sek}^{-1}$ . Często używaną jednostką naboju jest tzw. kulomb — nabój  $\frac{c}{10}$  razy większy od jednostki elektrostatycznej naboju, gdzie  $c$  z wystarczającym zazwyczaj przybliżeniem możemy uważać za równe  $3 \cdot 10^9$ .

W ten sposób określony kulomb jest kulombem bezwzględnym, równym mniej więcej kulombowi międzynarodowemu, tj. naboju, którego przejściu przez roztwór wodny azotanu srebra ( $\text{Ag NO}_3 + \text{aq}$ ) towarzyszy wydzielenie 0,001118 g srebra.

### 3. — POLE ELEKTRYCZNE.

Umieścimy w odległości  $r$  od dodatnio naelektryzowanego naboju  $e_1$  punktu A punkt B naelektryzowany nabojem dodatnim  $e_2$  i odłożymy na prostej AB wektor  $\vec{r}_1$  o długości równej jednostce i kierunku zgodnym z kierunkiem AB (rys. 106). Siłę



rys. 106



z jaką nabój  $e_1$  działa na nabój  $e_2$ , możemy wyrazić wzorem

$$\vec{f} = \frac{e_1}{\varepsilon r^2} \cdot \vec{r}_1 \cdot e_2 = \vec{E} \cdot e_2,$$

gdzie

$$\vec{E} = \pm \frac{e_1}{\varepsilon r^2} \cdot \vec{r}_1. \quad (4)$$

Wzór (4) jest analogiczny do wzoru na siłę grawitacyjną (tom I, str. 161). Podobnie, jak tam wielkość  $\vec{G}$  zależna była od wartości mas działającego układu i od położenia masy podlegającej działaniu grawitacyjnemu, nie zależała zaś zupełnie od wartości tej masy, we wzorze (4) wielkość  $\vec{E}$  zależy jedynie w danym środowisku od wartości działającego naboju  $e_1$  i od położenia względem niego naboju  $e_2$ , poddanego jego działaniu. W każdym punkcie otaczającej punkt A przestrzeni wektor  $\vec{E}$  ma oznaczoną wartość i kierunek; dla danej wartości naboju  $e_1$  i w danym środowisku wartość jego i kierunek zależą w danym punkcie jedynie od spórzędnych tego punktu, wielkość  $\vec{E}$  jest więc, podobnie jak  $\vec{G}$ , funkcją punktu (tom I, str. 162).

Przestrzeń zatem, w której wektor  $\vec{E}$  posiada wartość różną od zera, możemy nazwać polem siły elektrycznej — lub prościej polem elektrycznym lub wreszcie, gdy pole nie zmienia się z czasem, polem elektrostatycznym, wektor zaś  $\vec{E}$  jego natężeniem.

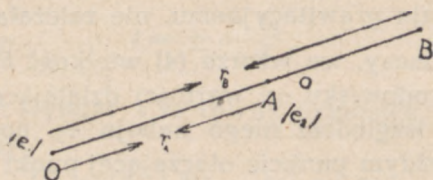
Rachunek analogiczny do wykonanego przy rozpatrywaniu pracy sił pola grawitacyjnego (tom I, str. 163 — 164), pozwoli nam stwierdzić, że praca sił pola elektrycznego, wykonana przy przeniesieniu naboju elektrycznego z jednego punktu pola do drugiego, zależy jedynie od położenia początkowego i końcowego punktu drogi, a więc, że siły elektryczne są, podobnie jak siły grawitacyjne, siłami zachowawczymi (tom I, str. 82).

W przeciwieństwie jednak do sił grawitacyjnych, które zawsze są siłami przyciągającymi, siły elektryczne mogą być



zarówno przyciągające, jak i odpychające, tak że kierunek sił, a co za tym idzie i natężenia pola, wzbudzonego przez nabój  $e_1$ , zmienia się na odwrotny, gdy zmienimy znak naboju  $e_2$ , poddawanego działaniu sił pola (tzw. nabój probierczy). Dla uniknięcia tej nieoznaczoności będziemy za nabój probierczy brali zawsze tak, jak to zrobiliśmy na początku tego ustępu, nabój dodatni, wobec czego kierunek  $\vec{E}$  będzie całkowicie wyznaczony przez znak naboju  $e_1$ .

Praca zatem, wykonana przez siły pola, wzbudzonego przez dodatni nabój, przy przeniesieniu naboju probierczego  $e_2$  z punktu  $A$  do  $B$  (rys. 107), wyniesie (por. tom I, str. 164)



rys. 107

$$W = \frac{e_1 e_2}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Praca ta zachodzi kosztem energii potencjalnej układu, tak że mamy

$$W_{AB} = \frac{e_1 e_2}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = E_A^{(p)} - E_B^{(p)} \quad (a)$$

lub kładąc

$$V_A = \frac{e_1}{\epsilon r_A} \quad \text{i} \quad V_B = \frac{e_1}{\epsilon r_B} \quad (5a)$$

$$W_{AB} = e_2 (V_A - V_B),$$

gdzie  $V_A$  i  $V_B$  są potencjałami elektrycznymi w punktach  $A$  i  $B$ . Gdy punkt  $B$  przesuwac się będzie do nieskończoności, potencjał  $V_B$  maleć będzie do zera. W granicy otrzymamy

$$\frac{1}{e_2} \cdot W_{A\infty} = V_A; \quad (5c)$$



potencjał danego punktu pola jest w danym przypadku liczbowo równy pracy, wykonanej przez siły pola przy przeniesieniu jednostki naboju dodatniego z danego punktu pola do nieskończoności.

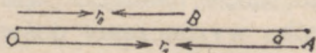
Ściśle biorąc, we wzorach (5a) moglibyśmy równie dobrze przyjąć

$$V = \frac{e_1}{\epsilon r} + C,$$

gdzie  $C$  jest wielkością stałą, której jednak ze wzoru (a) nie możemy wyznaczyć. Kładąc  $C = 0$ , tym samym przyjmujemy, że w punkcie nieskończenie odległym od punktu  $O$  potencjał jest równy zeru.

Wielkość  $\frac{W_{AB}}{e_2}$ , będąca miarą pracy, wykonanej przy przeniesieniu naboju jednostkowego z  $A$  do  $B$ , nosi nazwę napięcia elektrycznego wzdłuż drogi  $AB$  lub napięcia punktu  $A$  względem  $B$ .

Jeżeli pole wzbudzone jest przez nabój ujemny —  $e_1$ , siły pola wykonują pracę dodatnią wtedy, gdy nabój probierczy przybliży się do punktu  $O$  (rys. 108).



rys. 108

Praca, wykonana przez siły pola, wynosi

$$W = \frac{e_1 e_2}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = E_A^{(p)} - E_B^{(p)} \quad (b)$$

lub po podstawieniu

$$V_A = - \frac{e_1}{\epsilon r_A} \quad \text{i} \quad V_B = - \frac{e_1}{\epsilon r_B} \quad (5d)$$

$$W_{AB} = e_2 (V_A - V_B); \quad (5e)$$

tym razem przeto potencjał danego punktu jest liczbowo równy pracy wykonanej przez siły pola przy przesunięciu jednostki naboju dodatniego z poza granic pola do danego punktu.



Wzory (5d) i (5e) są analogiczne do wzorów na potencjał grawitacyjny, obliczony na str. 166, tomu I. Pole grawitacyjne odpowiada bowiem polu, wzbudzonemu przez nabój ujemny; różnica w znakach natężenia obu pól ( $\vec{E} = -\frac{e_1}{\epsilon r_1^2} \vec{r}_1$  i  $\vec{G} = k \frac{m}{r_1^2} \vec{r}_1$ ) pochodzi stąd, że w polu grawitacyjnym za dodatni uważamy kierunek siły przyciągającej, w polu zaś elektrycznym — siły odpychającej.

Wprowadzone wyżej pojęcia możemy uogólnić na przypadek, gdy pole elektryczne jest wzbudzone nie przez naelektryzowany punkt materialny, lecz przez układ wielu punktów lub ogólniej przez układ naelektryzowanych przewodników. Istotnie, na podstawie przyjętego przez nas wyżej założenia (ust. 2, str. 181), działanie elektryczne takiego układu jest działaniem wypadkowym naboju elementarnych, na jakie możemy podzielić nabój danego układu. Będziemy zatem mieli

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad (6)$$

Znając wartości i kierunki  $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \dots$  moglibyśmy z tego wzoru obliczyć wartość i kierunek natężenia wypadkowego. Zazwyczaj obliczenie takie nastęrcza wielkie trudności, tak że natężenie pola albo wyznaczamy doświadczalnie albo też obliczamy ze wzorów, otrzymanych na podstawie innych twierdzeń, o których będzie mowa niżej. Doświadczalnie natężenie wyznaczamy z pomiaru siły (np. przy użyciu wahadła elektrycznego), działającej na nabój probierczy  $e_2$ , skąd otrzymujemy

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{e_2}$$

Pomiar ten jednak tylko wtedy daje istotną wartość natężenia pola, gdy nabój probierczy  $e_2$  jest w porównaniu z nabojami, wzbudzającymi pole, dostatecznie mały, abyśmy mogli całkowicie pominąć zakłócenia, jakie w rozmieszczeniu naboju powoduje wprowadzenie do pola naboju  $e_2$  (por. tom I, str. 162).

Potencjał pola otrzymujemy sumując potencjały pól składowych

$$V = V_1 + V_2 + \dots \quad (6a)$$



Gdy pole wzbudzone jest przez naelektryzowany przewodnik, elementy jego powierzchni możemy uważać za punkty materialne; na natężenie składowe otrzymujemy wtedy

$$d\vec{E} = \pm \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^2} \cdot \vec{r}_1$$

lub biorąc  $\sigma$  z odpowiednim znakiem,

$$d\vec{E} = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^2} \cdot \vec{r}_1,$$

stąd składowe w kierunku osi współrzędnych

$$dE_x = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^2} \cos(\vec{r}_1, \vec{x}) = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^3} (x_0 - x),$$

$$dE_y = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^2} \cos(\vec{r}_1, \vec{y}) = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^3} (y_0 - y),$$

$$dE_z = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^2} \cos(\vec{r}_1, \vec{z}) = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^3} (z_0 - z),$$

gdzie  $x_0, y_0, z_0$  są współrzędnymi punktu, w którym wyznaczamy natężenie,  $x, y, z$  — współrzędnymi danego elementu powierzchni przewodnika,  $r$  — odległością między danym punktem pola i danym elementem powierzchni.

Sumując otrzymamy składowe natężenia wypadkowego

$$E_x = \int \frac{\sigma dS}{\epsilon r^3} (x_0 - x); \quad E_y = \int \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^3} (y_0 - y); \quad E_z = \int \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r^3} (z_0 - z).$$

Podobnie dla potencjału elementarnego mamy

$$dV = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r}$$

i dla potencjału pola

$$V = \int \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon r}. \quad (6c)$$

Pracę sił pola, odniesioną do jednostki naboju, otrzymujemy ze wzoru

$$\frac{W}{e_2} = \int_A^B E_s \cdot ds$$

gdzie  $E_s$  składowa natężenia styczna do drogi.



W przypadku drogi zamkniętej, gdy więc nabój probierczy wraca do początkowego położenia  $A$ ,

$$\int_A^A E_s ds = 0.$$

Tego rodzaju pole nazywamy, zapożyczając termin z hydrodynamiki, polem niewirowym, (irrotacyjnym, łac. rotare — wirować). Pole więc elektrostatyczne tzn. takie, w którym konfiguracja nabołów wzbudzających pole nie zmienia się podczas pomiaru, jest podobnie, jak pole grawitacyjne, niewirowe.

Wymiar potencjału w układzie elektrostatycznym wyraża się wzorem

$$[V] = \frac{[lO]}{[e]} = \frac{ML^2T^{-2}}{M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}, \quad (7)$$

czemu w jednostkach C.G.S. odpowiada  $g^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{1}{2}} \text{sek}^{-1}$ . W układzie elektrostatycznym za jednostkę potencjału bierzemy potencjał takiego punktu pola, z którego przeniesienie przez siły pola dodatniej jednostki elektrostatycznej naboju poza granice pola wymaga pracy 1 erga. W tzw. jednostkach praktycznych za jednostkę potencjału przyjmujemy potencjał takiego punktu pola, z którego przeniesienie przez siły pola dodatniego naboju 1 kulomba bezwzględnie poza granice pola wymaga pracy 1 dżula. Tę jednostkę nazywamy woltem (bezwzględnym) od nazwiska fizyka włoskiego Volty.

Związek między woltem i elektrostatyczną jednostką potencjału otrzymujemy ze wzoru

$$1 \text{ wolt} = 1 \frac{\text{dżul}}{\text{kul}} = n \frac{\text{erg}}{\text{jed. els. nab.}}$$

wobec czego

$$n = 1 \frac{\text{dżul}}{\text{erg}} \cdot \frac{\text{jed. els. nab.}}{\text{kul}} = 1.10^7 \cdot \frac{1}{3.10^9} = \frac{1}{300}.$$

Wolt zatem jest  $\frac{1}{300}$  jednostki elektrostatycznej potencjału.

W prostym przypadku kuli naelektryzowanej, o równomiernie rozmieszczonym naboju, znajdziemy stosując z nie-



wielkimi zmianami to samo rozumowanie, jakim posługiwaliśmy się przy wyznaczaniu sił grawitacyjnych, wywieranych przez warstwę kulistą (tom I, str. 167), że zarówno natężenie  $E$ , jak i potencjał  $V$  mają w dowolnym punkcie pola wartość taką, jaką by miały, gdyby cały nabój kuli był skupiony w jej środku geometrycznym. Powierzchnie więc poziomu (tom I, str. 166) są w tym przypadku powierzchniami kulistymi, spółośrodkowymi do powierzchni przewodnika.

Stąd jednak bynajmniej nie wynika, aby tak, jak to mieliśmy w zjawiskach grawitacji (tom I, str. 159) wzajemne działanie dwu naelektryzowanych kul można było sprowadzić do działania dwóch naelektryzowanych punktów materialnych, umieszczonych w tej samej odległości co środki kul. Każda bowiem z tych kul naruszy przez swe działanie indukcyjne równomierność rozmieszczenia nabożów na kuli drugiej, tym samym wyżej przytoczone twierdzenie nie będzie mogło być stosowane.

W sposób podobny do tego, jakiego używaliśmy przy rozpatrywaniu zjawisk grawitacji, otrzymamy związek między potencjałem i natężeniem pola. (por. tom I, str. 168).

Niech początkowy  $A$  i końcowy  $B$  punkty drogi, wzdłuż której siły pola przesuwają nabój probieńczy  $e_2$ , leżą na tej samej linii sił w dostatecznie małej odległości wzajemnej  $\Delta n$ , abyśmy mogli uważać natężenie pola za mające te samą wartość i ten sam kierunek we wszystkich punktach tej drogi. Odcinek  $\Delta n$ , prostopadły, jak wiemy (tom I, str. 168) do powierzchni poziomu  $V_1$  i  $V_2$ , przechodzących przez punkty  $A$  i  $B$ , wyznacza najkrótszą odległość między tymi powierzchniami. Mamy wtedy.



rys. 109

$$\frac{W}{e_2} = E \cdot \Delta n = V_1 - V_2.$$

Praca ta jest dodatnia tylko wtedy, gdy  $V_2$  jest mniejsze od  $V_1$ , a więc, gdy nabój  $e_2$  jest przesuwany w kierunku zmniejszających się potencjałów; natężenie więc pola, mając ten sam



kierunek, co droga, jest zawsze skierowane w stronę potencjałów malejących.

Oznaczmy przez  $\Delta V$  zmianę potencjału  $V_2 - V_1$  przy przesunięciu się o  $\Delta n$  wzdłuż normalnej do danej powierzchni ekwipotencjalnej w kierunku natężenia pola. Zmiana ta, jakśmy to przed chwilą stwierdzili, jest zawsze ujemna, wobec czego

$$E = - \frac{\Delta V}{\Delta n} \quad (8)$$

lub przechodząc do granicy

$$E = - \frac{dV}{dn} \quad (8a)$$

Na wymiar zatem natężenia otrzymujemy

$$[E] = \frac{[V]}{L} = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (8b)$$

Gdy potencjał wyrażamy w woltach, długość w cm, jednostką natężenia pola jest wolt/cm.

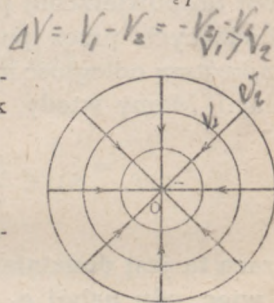
W polu wzbudzonym przez naelektryzowany punkt materialny, powierzchniami ekwipotencjalnymi są powierzchnie kul spółśrodkowych, opisanych z danego punktu, jak ze środka, liniami zaś sił promienie, wychodzące z danego punktu, gdy jest on naelektryzowany dodatnio, lub schodzące się w nim, gdy nabój jego jest ujemny (rys. 110). Potencjał w punkcie pola odległym o  $r$  od naelektryzowanego punktu jest w pierwszym przypadku równy  $+\frac{e}{\epsilon r}$  w drugim  $-\frac{e}{\epsilon r}$ .

W pierwszym przypadku natężenie pola ma kierunek wzrastających odległości, tak że mamy

$$E' = - \frac{dV}{dr}$$

dodatniemu bowiem przyrostowi  $dr$  odpowiada ujemny przyrost  $dV$ . Wobec tego

$$E' = - \frac{d}{dr} \left( \frac{e}{\epsilon r} \right) = \frac{e}{\epsilon r^2}.$$



rys. 110



W przypadku drugim natężenie pola skierowane jest w stronę odległości malejących,  $dr$  jest więc przy dodatniej pracy pola ujemne;

$$E'' = - \frac{dV}{dr},$$

gdzie iloraz  $\frac{dV}{dr}$  ma tym razem wartość dodatnią, potencjał bowiem wzrasta w miarę wzrostu odległości  $r$ . Mamy więc

$$E'' = - \frac{dV}{dr} = - \frac{d\left(-\frac{l}{\epsilon r}\right)}{dr} = - \frac{l}{\epsilon r^2}.$$

W obu zatem przypadkach otrzymujemy wzory zgodne z (4).

W przypadku ogólnym kierunek normalnej do powierzchni ekwipotencjalnej w danym punkcie pola jest wyznaczony przez kąty, jakie ta normalna tworzy z osiami współrzędnych. Przesuńmy przez punkt  $A$  prostokątny układ współrzędnych (rys. 111, na którym oś  $z$  jest prostopadła do płaszczyzny rysunku). Możemy napisać

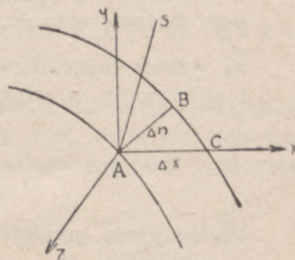
$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{\Delta V}{\Delta n} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

lub przechodząc do granicy

$$\lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta V}{\Delta n} \cdot \lim \frac{\Delta n}{\Delta x}.$$

Kąt  $ABC$  będzie równy kątowi prostemu i

$$\lim \frac{\Delta n}{\Delta x} = \cos(\vec{\Delta n}, \vec{x}),$$



rys. 111

wobec czego

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dn} \cos(\vec{\Delta n}, \vec{x}).$$

Podstawiając do tego wzoru

$$\frac{dV}{dn} = -E,$$

i uwzględniając, że

$$E \cos(\vec{\Delta n}, \vec{x}) = E_x,$$



kierunek bowiem natężenia jest zgodny z kierunkiem normalnej, otrzymujemy ostatecznie

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

i podobnie

$$\begin{aligned} E_y &= - \frac{\partial V}{\partial y}, \\ E_z &= - \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \tag{8c}$$

Przeprowadźmy przez punkt  $A$  dowolną prostą  $s$ , z której dane powierzchnie wytną odcinek  $ds$ . Rozumując tak, jak poprzednio, znajdziemy

$$E_s = - \frac{\partial V}{\partial s}. \tag{8d}$$

Związek między spadem potencjału (p. tom I, str. 168) i natężeniem pola możemy wyrazić, jak wiadomo, jeszcze inaczej. Oznaczmy przez  $\vec{n}_1$  wektor jednostkowy, normalny do powierzchni ekwipotencjalnej i skierowany w stronę wzrastających potencjałów. Wektor

$$\vec{N} = \frac{dV}{dn} \cdot \vec{n}_1$$

będzie wtedy gradientem potencjału (tom I, str. 168).

Składowe jego w kierunku osi  $O_x$ ,  $O_y$  i  $O_z$  będą odpowiednio równe

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z},$$

tak, że mamy

$$N_x = \text{grad}_x V = \frac{\partial V}{\partial x} = -E_x; \quad N_y = \text{grad}_y V = \frac{\partial V}{\partial y} = -E_y;$$

$$N_z = \text{grad}_z V = \frac{\partial V}{\partial z} = -E_z$$

i ostatecznie

$$E = - \text{grad } V,$$

analogicznie do wzoru (10a) str. 168 tomu I.



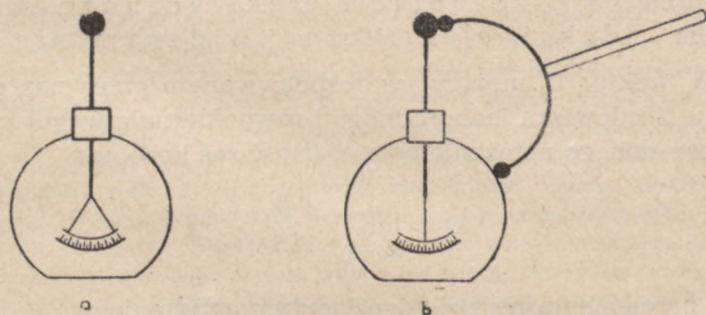
Z rozważań poprzednich wynika, że powierzchnia przewodnika, na której naboje elementarne, składające się na jego nabój całkowity, nie zmieniają w czasie obserwacji swego położenia, czyli, innymi słowy, powierzchnia przewodnika, znajdującego się w stanie równowagi elektrycznej, jest zawsze powierzchnią ekwipotencjalną. Gdyby bowiem było inaczej, naboje elementarne byłyby przesuwane z miejsc o wyższym potencjale do miejsc o potencjale niższym, warunek zatem równowagi nie byłby spełniony.

Tę samą wartość potencjału muszą mieć również punkty wewnątrz przewodnika, w przeciwnym bowiem razie natężenie pola wewnątrz przewodnika nie byłoby równe zero, co, jak wiemy, byłoby w sprzeczności z ustalonymi doświadczalnie faktami. Wszystkie więc punkty przewodnika w stanie równowagi elektrycznej muszą czynić zadość warunkowi

$$V = \text{stałej}, \quad (9)$$

tę wartość potencjału nazywamy potencjałem przewodnika.

Połączmy rozbajaczem gałkę naelektryzowanego dowolnie elektroskopu z jego metalową osłoną (rys. 112), listki elektroskopu natychmiast opadną zarówno wtedy, gdy osłona jego jest połączona



rys. 112

z ziemią, jak i wtedy, gdy jest od ziemi odosobniona; w obu bowiem przypadkach listki stanowiąc będą razem z osłoną jeden przewodnik o jednakowym we wszystkich punktach potencjale: potencjały każdego z listków i osłony będą miały wartość tę samą, wobec czego wewnątrz osłony natężenie pola równe będzie zero.



## 4. — INDUKCJA ELEKTRYCZNA. — TWIERDZENIE GAUSSA.

Umieścimy w badanej części pola elektrycznego, wzbudzonego w środowisku jednorodnym i równokierunkowym, cienką blaszkę metalową o małej powierzchni  $\Delta S$ , prostopadłą do kierunku linii sił pola. Na blaszce powstaną wtedy naboje indukowane w ilościach równoważnych, przy czym nabój ujemny powstanie na tej stronie blaszki, do której linii sił pola wchodzi, nabój dodatni — po stronie przeciwnej. Gdy blaszkę ustawimy nie pod kątem prostym, lecz pod innym kątem dowolnym, wartość każdego z nabołów indukowanych będzie mniejsza. Oznaczając przez  $\alpha$  kąt, jaki normalna do blaszki tworzy z liniami sił, możemy napisać

$$\Delta e_\alpha = \Delta e_0 \cdot \cos \alpha,$$

gdzie  $\Delta e_0$  oznacza bezwzględną wartość naboju indukowanego, wzbudzonego wtedy, gdy blaszka jest prostopadła do kierunku linii sił, a więc, gdy  $\alpha = 0$ .

Nazwiemy strumieniem indukcji przez umieszczoną w danym miejscu pola powierzchnię  $dS$  wielkość  $\Delta \Phi$ , wyznaczoną wzorem

$$\Delta \Phi = 4\pi \cdot \Delta e_\alpha, \quad (10)$$

wektorem zaś przesunięcia elektrycznego lub wektorem indukcji elektrycznej w danym miejscu pola wektor  $D$ , mający w rozpatrywanym przez nas przypadku (środowiska jednorodnego i równokierunkowego) kierunek ten sam, co natężenie pola, wartość zaś liczbową

$$D = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi_0}{\Delta S}, \quad (10a)$$

skąd na elementarny strumień indukcji otrzymujemy

$$d\Phi = d\Phi_0 \cos \alpha = D \cdot \cos \alpha \cdot dS, \quad (10b)$$

strumień zatem indukcji przez dowolną powierzchnię jest, jako suma strumieni elementarnych, równy

$$\Phi = \int D \cos \alpha \cdot dS. \quad (10c)$$



Przypuśćmy, że badana powierzchnia jest powierzchnią zamkniętą, otaczającą nabój indukujący. Wiemy z doświadczenia (p. ust. I, str. 176), że w tym przypadku wartość każdego z nabołów indukowanych równa jest zawsze nabołowi indukującemu, bez względu na środowisko, wypełniające przestrzeń między ciałem indukującym i daną powierzchnią.

Tę niezależność od środowiska może wykazać następujące doświadczenie. Wprowadźmy do odosobnionej od ziemi puszkii Faradaya, wypełnionej powietrzem, naelektryzowaną kulkę metalową. Listki elektroskopu, którego gałka połączona jest z zewnętrzną stroną puszkii, osłona zaś z ziemią, rozchyła się o pewien kąt. Kąt ten się nie zmieni, gdy, nie zmieniając naboju na naelektryzowanej kuli, wypełnimy kulę jakąś dobrze izolującą cieczą, np. olejem parafinowym.

Strumień zatem indukcji przez taką powierzchnię zamkniętą będzie równy  $4\pi \cdot e$ , gdzie  $e$  oznacza bezwzględną wartość naboju, znajdującego się wewnątrz powierzchni. Gdy nabój indukujący jest dodatni, strumień indukcji uważamy również za dodatni, przyjmując tym samym za dodatni ten kierunek normalnej, który jest skierowany na zewnątrz powierzchni zamkniętej.

Znaczenie wielkości  $\Phi$  i  $D$ , wprowadzonych do teorii pola elektrycznego przez Maxwella (1875 r.), może nam nieco lepiej wyjaśnić model, niewiele odbiegający od tego, przy którego pomocy Maxwell próbował odtworzyć własności pola elektrycznego. Przypuśćmy, że ciało rozciągliwe, wypełnione nieściśliwą cieczą, umieszczone jest w nieograniczonej masie innej nieściśliwej cieczy, podzielonej cienkimi sprężystymi przeponami na niewielkie komory. Przy pewnej objętości ciała, która odpowiadać będzie jego stanowi elektrycznie obojętnemu, położenie tych przepon i ich napięcie będzie miało oznaczoną wartość, odpowiadającą w naszym obrazie nieistnieniu pola elektrycznego. Gdy do ciała wtłoczmy więcej cieczy, łącząc np. jego wnętrze ze źródłem, objętość jego się zwiększy, otaczająca je ciecz przesunie się w kierunku od danego ciała ku zewnątrz i w tym samym kierunku wygną się przepony. Przez dowolną zamkniętą powierzchnię w cieczy zewnętrznej przepłynie wtedy objętość cieczy równa objętości wtłoczonej do ciała. Odpowiadać to będzie dodatniemu elektryzowaniu przewodnika. Gdy odwrotnie pewna ilość cieczy z ciała odpłynie, przez połączenie np. ciała z miejscem jakiegoś odpływu, objętość ciała się zmniejszy, przesunięcie cieczy zajdzie w kierunku przeciwnym, przepony wygną się ku danemu ciału. Oczywiście



i wtedy objętość cieczy, która przepłynie przez dowolną powierzchnię zamkniętą, otaczającą dane ciało, będzie równa objętości cieczy, która z ciała odpłygnęła. Obraz ten odpowiadać będzie elektryzacji ujemnej przewodnika.

Stąd wynika, że gdy wewnątrz powierzchni zamkniętej, umieszczonej w polu elektrycznym, nie ma nabożów elektrycznych, strumień indukcji przez tę powierzchnię (umieszczoną w polu elektrycznym) jest równy zeru. Wobec bowiem równoważności nabożów, indukowanych na zewnętrznej stronie tej powierzchni, dodatnia część strumienia indukcji jest co do wartości bezwzględnej równa ujemnej, strumień więc całkowity jest jako ich suma algebraiczna równy zeru.

Podobnie strumień indukcji przez powierzchnię zamkniętą jest równy zeru, gdy algebraiczna suma nabożów, znajdujących się wewnątrz tej powierzchni, równa jest zeru, jak to bezpośrednio wynika z doświadczenia, opisanego w ust. I, str. 177.

W ten sposób dochodzimy do ogólnego sformułowania, znanego pod nazwą **t w i e r d z e n i a G a u s s a**: strumień indukcji przez powierzchnię zamkniętą równy jest  $4\pi$  razy wziętej sumie algebraicznej nabożów, znajdujących się wewnątrz danej powierzchni.

Związek między natężeniem pola i wektorem indukcji otrzymamy, rozpatrując przypadek powierzchni kulistej opisanej promieniem  $r$ , w której środku znajduje się punkt naelektryzowany  $e$ . Przyjmijmy w dalszym ciągu, że środowisko jest jednorodne i równokierunkowe, wektor  $\vec{D}$  będzie miał zatem, jak to wynika bezpośrednio z warunków symetrii, we wszystkich punktach tej powierzchni wartość tę samą. Możemy zatem napisać

$$\Phi = \int D \cos \alpha \cdot dS = D \int dS = D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi e,$$

kąt  $\alpha$  bowiem we wszystkich punktach kuli jest równy zeru. Natężenie pola ma na danej powierzchni wartość

$$E = \frac{e}{\epsilon r^2}, \text{ skąd } e = \epsilon E r^2,$$



wobec czego

$$D = \frac{4\pi e}{4\pi r^2} = \frac{4\pi \varepsilon \cdot Er^2}{4\pi r^2},$$

skąd otrzymujemy

$$D = \varepsilon E$$

lub z uwagi na zgodność w tym przypadku kierunków obu wektorów

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (11)$$

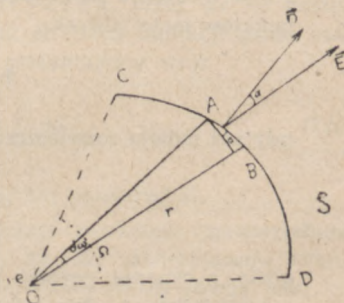
Związek ten możemy uogólnić na dowolne pole, wzbudzone w jednorodnym i równokierunkowym środowisku przez układy naelektryzowanych punktów materialnych lub przewodników o skończonych rozmiarach. W obu bowiem przypadkach wielkości, charakteryzujące pole, są, jak o tym wyżej była mowa, wypadkowymi wielkościami, charakteryzującymi pola elementarne, w których obowiązuje wzór (11). Ponieważ dla każdego z tych pól, wzbudzanych w tym samym środowisku, zdolność elektryczna posiada tę samą wartość, wypadkowa wektora indukcji będzie w tym samym stosunku do wypadkowej wektora natężenia, co składowe elementarne tych wektorów.

Wzór (11) wyprowadziliśmy, jako wniosek z twierdzenia Gaussa; moglibyśmy jednak postąpić odwrotnie: biorąc za punkt wyjścia wzór (11) udowodnić twierdzenie Gaussa. Niech  $O$  będzie punktem naelektryzowanym nabojem  $+e$ ,  $S$  badaną powierzchnią (rys. 113). Przeprowadźmy przez  $O$  nieskończenie cienki stożek o kącie bryłowym  $d\omega$ , który wytnie z powierzchni  $S$  element  $dS$ . Strumień indukcji przez ten element otrzymamy ze wzoru (10b)

$$d\Phi = D \cdot \cos \alpha \cdot dS,$$

lub po uwzględnieniu wzoru (11)

$$d\Phi = \frac{e}{r^2} \cos(\vec{E}, \vec{n}) \cdot dS, \quad (a)$$



rys. 113



przy czym, zgodnie z poprzednim naszym założeniem, za dodatni kierunek normalnej uważać będziemy kierunek na zewnątrz powierzchni, a więc zgodny z kierunkiem od punktu  $O$  do  $A$ .

Opiszmy z  $O$  promieniem  $OA$  kulę; stożek  $d\omega$  wytnie z niej powierzchnię

$$df = r^2 \cdot d\omega$$

gdzie  $df$  związana jest z  $dS$  wzorem

$$dS = \frac{df}{\cos \alpha} = \frac{r^2 d\omega}{\cos(\vec{E}, \vec{n})}$$

Podstawiając do wzoru (a) otrzymujemy

$$d\Phi = \frac{e \cdot \cos(\vec{E}, \vec{n})}{r^2 \cos(\vec{E}, \vec{n})} \cdot r^2 d\omega = e d\omega. \quad (12)$$

Strumień indukcji przez całą powierzchnię  $S$  będzie równy

$$\Phi = \int d\Phi = e \int d\omega = e \Omega, \quad (12a)$$

gdzie  $\Omega$  jest kątem bryłowym, pod którym obserwator umieszczony w punkcie  $O$  widzi powierzchnię  $S$ . Wartość więc strumienia nie zależy od kształtu powierzchni  $S$ , lecz jedynie od położenia i rozmiarów obwodu  $CD$  tej powierzchni.

Gdy powierzchnia  $S$  jest zamknięta,

$$\Phi = 4\pi e. \quad (12b)$$

Jeżeli wewnątrz powierzchni znajduje się więcej naelektryzowanych punktów materialnych,

$$\Phi = 4\pi \sum \pm e, \quad (12c)$$

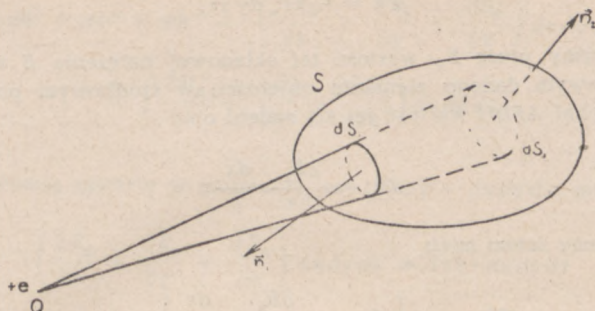
gdy zaś naboje rozmieszczone są na powierzchni przewodników,

$$\Phi = 4\pi \int \sigma \cdot dS, \quad (12d)$$

gdzie  $\sigma$  oznacza gęstość powierzchniową,  $dS$  elementy powierzchni przewodników i gdzie całkowanie rozciąga się na wszystkie naelektryzowane powierzchnie.



Niech naelektryzowany punkt materialny  $O$  znajduje się poza zamkniętą powierzchnią  $S$  (rys. 114). Stożek  $d\omega$ , przeprowadzony



rys. 114

z punktu  $O$  przecina powierzchnię  $S$  przynajmniej w dwu miejscach (przy bardziej złożonej postaci powierzchni ogólnie w  $2n$  miejscach), wycinając w niej powierzchnie  $dS_1$  i  $dS_2$ . Strumienie  $d\Phi_1$  i  $d\Phi_2$  przez te elementy powierzchni będą, zgodnie ze wzorem (12) i z założeniem co do kierunku normalnej, równe co do wartości bezwzględnych, lecz o znakach przeciwnych, tak że będziemy mieli

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0.$$

Ponieważ na takie pary elementów możemy podzielić całą powierzchnię  $S$ , strumień indukcji przez tę powierzchnię

$$\Phi = 0.$$

Gdy pole jest wzbudzone przez naelektryzowane ciało dielektryczne, naboje elementarne są zazwyczaj rozmieszczone nie tylko na powierzchni ciała, lecz również i w jego wnętrzu. Oznaczając przez  $\rho$  objętościową gęstość elektryczną, przez  $dv$  — naelektryzowany element objętości ciała, na strumień indukcji przez otaczającą ciało powierzchnię zamkniętą otrzymujemy wzór

$$\Phi = 4\pi \int \rho dv + 4\pi \int \sigma dS, \quad (12c)$$

gdzie  $dS$  oznacza naelektryzowany element powierzchni.

Obliczmy strumień indukcji przez zamkniętą powierzchnię sześciianu  $ABCDEFGH$ , o bokach  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , zawierającego nabój  $\rho dv = \rho dx dy dz$ . Strumień przez powierzchnię  $AFDH$  równy jest

$$d\Phi_1 = D_{n_1} dS = \epsilon E'_{n_1} \cdot dy dz$$



lub z uwagi, że normalna do powierzchni  $AFDH$  jest równoległa do osi  $Ox$  i przeciwnie niż ona skierowana,

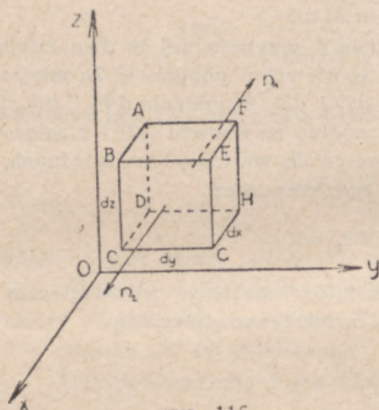
$$d\Phi = -\varepsilon E'_x dy dz.$$

Oznaczmy przez  $E_x$  wartość tej składowej natężenia  $\vec{E}$  w punkcie środkowym danego elementu objętości; w środkowym punkcie powierzchni  $AFDH$  wartość jej się zmieni o

$$dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{dx}{2};$$

będziemy zatem mieli

$$d\Phi_1 = -\left(\varepsilon E_n - \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) dy dz.$$



rys. 115

Analogicznie strumień przez powierzchnię  $BCEG$  jest równy

$$d\Phi_2 = \varepsilon E''_n dy dz;$$

tym jednak razem normalna jest skierowana w tę samą stronę, co oś  $Ox$ , składowa zaś w kierunku tej osi natężenia  $E$  ma w środkowym punkcie powierzchni  $BCEG$  wartość

$$E''_x = E''_n = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2},$$

skąd

$$d\Phi_2 = \left(\varepsilon E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) dy dz.$$

Strumień zatem indukcji przez te dwie przeciwległe powierzchnie

$$d\Phi' = d\Phi_1 + d\Phi_2 = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial D_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Podobnie strumienie indukcji przez boki  $ABCD$  i  $EFGH$  oraz  $ABEF$  i  $DCGH$  będą odpowiednio równe

$$d\Phi'' = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz \quad \text{i} \quad d\Phi''' = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz.$$



Strumień więc indukcji przez powierzchnię, ograniczającą dany element objętości,

$$\begin{aligned} d\Phi &= d\Phi' + d\Phi'' + d\Phi''' = \varepsilon \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Nabój zawarty w sześcianie jest równy  $\rho \cdot dx dy dz$ , mamy zatem

$$\varepsilon \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz = 4\pi\rho \cdot dx dy dz$$

i ostatecznie

$$\varepsilon \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 4\pi\rho \quad (13)$$

lub, uwzględniając związek między natężeniem pola i potencjałem (8a),

$$-\varepsilon \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = 4\pi\rho; \quad (13a)$$

ta postać równania (13) nosi nazwę równania Poissona. Niech  $A$  będzie jakimkolwiek wektorem, wielkość skalarową wyrażoną wzorem

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

nazywamy rozbieżnością (divergentia — łac. divergere — rozdzielać się) wektora  $A$  i oznaczamy symbolem

$$\operatorname{div} \vec{A}$$

Wzór (13) możemy zatem przepisać w postaci

$$\varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \quad (13b)$$

W środowisku o gęstości  $\rho$  równej zeru, a więc np. w polu wzbudzonym przez naelektryzowane przewodniki i wypełnionym przez dielektryk elektrycznie obojętny, mamy

$$\varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (13c)$$



lub

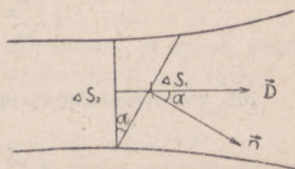
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (13d)$$

Równanie (13d) często bywa nazywane równaniem Laplace'a.

Wyodrębnimy w polu elektrycznym niewielką płaską powierzchnię  $\Delta S$  i przeprowadźmy przez wszystkie punkty jej obwodu linie sił (rys. 116). Linie te utworzą rurkę, której jednym z przekrojów jest powierzchnia  $\Delta S$ . W ten sposób utworzoną rurkę nazwiemy strugą sił. W środowisku równokierunkowym kierunek linii sił jest w każdym punkcie pola zgodny z kierunkiem wektora indukcji; w takim środowisku struga sił będzie również i strugą indukcji. Strumień



rys. 116



rys. 117

indukcji przez boczne powierzchnie strugi jest zawsze równy zeru, wektor bowiem indukcji jest we wszystkich punktach tej powierzchni do niej prostopadły; zjawisko zatem zachodzi w analogiczny sposób, jak przy trwałym ruchu cieczy (tom I, str. 274), gdy ciecz nie przepływa przez boczne ściany strugi prądu. Ta analogia usprawiedliwia użytą przez nas nazwę strugi indukcji.

Niech  $\Delta S_1$  i  $\Delta S_2$  będą dwoma przekrojami strugi indukcji (rys. 117). Strumienie indukcji przez te przekroje będą odpowiednio równe

$$\Delta\Phi_1 = D \cdot \Delta S_1 \cos \alpha = \varepsilon E \cdot \Delta S_1 \cos \alpha,$$

$$\Delta\Phi_2 = D \cdot \Delta S_2 = \varepsilon E \cdot \Delta S_2;$$

mamy jednak

$$\Delta S_2 = \Delta S_1 \cdot \cos \alpha,$$

wobec czego

$$\Delta\Phi_2 = \varepsilon E \cdot \Delta S_1 \cos \alpha = \Delta\Phi_1.$$



Strumień indukcji przez jakikolwiek przekrój strugi posiada zawsze tę samą wartość, w tych przeto punktach pola (w środowisku jednorodnym i jednokierunkowym), w których natężenie pola jest mniejsze, struga się rozszerza.

Gdy strumień indukcji w danej strudze równy jest jednostce, strugę nazywamy jednostkową.

Umieścimy w pobliżu naelektryzowanego, dodatnio np., przewodnika  $A$  inny przewodnik  $B$  naelektryzowany lub elektrycznie obojętny i przypuścimy, że jedna ze strug indukcji, wychodząca z przewodnika  $A$ , kończy się na przewodniku  $B$ . Zamknijmy tę strugę dwiema dowolnymi powierzchniami  $S_1$  i  $S_2$ , leżącymi wewnątrz przewodników  $A$  i  $B$ . Strumień indukcji przez utworzoną w ten sposób powierzchnię zamkniętą równy jest zeru, wektor indukcji bowiem jest prostopadły do powierzchni bocznych strugi, we wszystkich zaś punktach powierzchni  $S_1$  i  $S_2$ , leżących wewnątrz przewodnika, ma wartość zero. Oznaczając przez  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  gęstości na powierzchniach  $dS_1$  i  $dS_2$ , wyciętych przez strugę na przewodnikach, otrzymujemy

$$\sigma_1 dS_1 + \sigma_2 dS_2 = 0$$

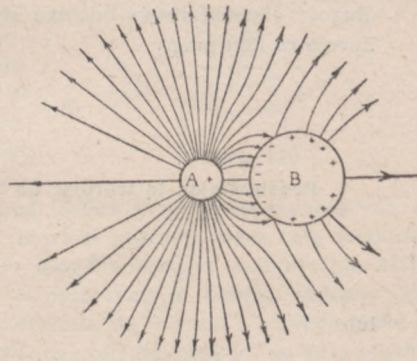
lub

$$\sigma_1 dS_1 = -\sigma_2 \cdot dS_2, \quad (14)$$

gdzie  $dS_1$  i  $dS_2$  są odpowiadającymi sobie elementami powierzchni.

Struga indukcji łączy zatem jedynie te elementy powierzchni przewodników, które są naelektryzowane różnoimiennie.

Stąd nie wynika bynajmniej, aby przewodnik  $B$  musiał być przed wprowadzeniem go do pola elektrycznie obojętny lub naelektryzowany ujemnie; może być również naelektryzowa-

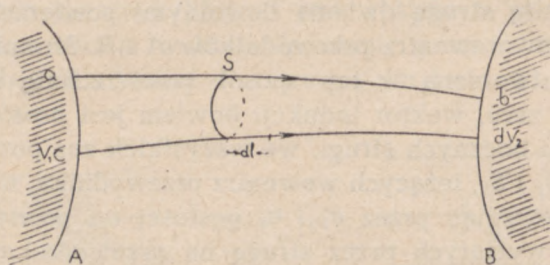


rys. 118



ny dodatnio; wprowadzenie go do pola powoduje powstanie na nim nabożów indukowanych; strugi, idące z  $A$ , kończą się wtedy na tych właśnie ujemnych nabożach indukowanych (rys. 118). Warunkiem jednak koniecznym jest aby potencjał ciała był niższy od potencjału ciała  $A$ , gdyż linie sił a więc i linie indukcji, mają zawsze, jak o tym była mowa wyżej, kierunek zmniejszających się potencjałów.

Niech  $abcd$  (rys. 119) będzie strugą indukcji, łączącą przewodniki



rys. 119

$A$  i  $B$ , o potencjałach równych odpowiednio  $V_1$  i  $V_2$  przy czym  $V_1 > V_2$ . Strumień indukcji posiada wzdłuż strugi wartość taką

$$\Phi = D \cdot S = \varepsilon \cdot E \cdot S, \quad (b)$$

jaką ma przez dowolnie wzięty przekrój strugi. Oznaczmy przez  $dl$  długość elementarnego odcinka strugi, mierzoną w kierunku linii sił. Ze wzoru (8b) mamy

$$E = - \frac{\partial V}{\partial l}.$$

Podstawiając tę wartość do (b), otrzymujemy

$$\Phi = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial l} \cdot S$$

lub

$$\frac{\partial V}{\partial l} \cdot dl = - \frac{\Phi}{\varepsilon} \cdot \frac{dl}{S},$$



skąd

$$\int_0^l \frac{\partial V}{\partial l} dl = -\Phi \int_0^l \frac{dl}{\epsilon S}$$

oraz

$$V_1 - V_2 = \Phi \int_0^l \frac{dl}{\epsilon S}$$

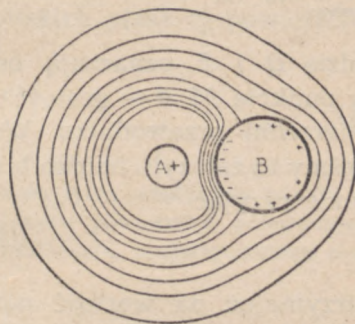
i ostatecznie

$$\Phi = \frac{V_1 - V_2}{\int_0^l \frac{dl}{\epsilon S}} \quad (15)$$

(por. rozdz. V, ust. 1).

Gdy przewodzące ciało  $B$ , wprowadzone do pola wzbudzonego przez naelektryzowane ciało  $A$ , jest elektrycznie obojętne, potencjał jego — jednakowy, rzecz prosta, we wszystkich jego punktach — jest wyznaczony przez jego położenie w polu, które jednak przez wprowadzenie ciała  $B$  ulega mniejszemu lub większemu odkształceniu (na rys. 120 zaznaczono odkształcenie linii poziomów).

Potencjał ciała  $B$  ma wartość potencjału tej powierzchni poziomu, która przecina powierzchnię ciała wzdłuż linii obojętnej, rozdzielającej naboje indukowane przeciwnych znaków. Ta powierzchnia poziomu — prostopadła we wszystkich punktach linii obojętnej do powierzchni przewodnika — obleka go całkowicie, tworząc w tym miejscu, jak gdyby wydęcie. Liczba strug jednostkowych, kończących się na powierzchni



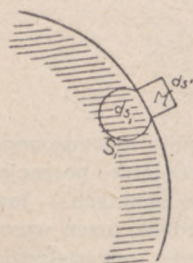
rys. 120

przewodnika  $B$ , musi być równa liczbie strug, rozpoczynających się na jego powierzchni, strumień bowiem indukcji przez całą zamkniętą jego powierzchnię jest, wobec jego obojętnego elektrycznego stanu, równy zeru. Gdy przewodnik  $B$  połączymy z ziemią, napięcie jego względem ziemi spada do zera, zmienia się również i napięcie ciała  $A$ ; zmiany w polu są wtedy na ogół inne, niż poprzednio, do pola bowiem wprowadzamy nie tylko ciało  $B$ , lecz i ziemię.

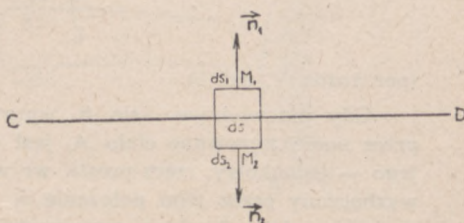


Przetnijmy strugę indukcji, wychodzącą z przewodnika, płaszczyzną, prostopadłą do osi strugi i przechodzącą przez punkt  $M$ , leżący bardzo blisko powierzchni przewodnika, i zamknijmy strugę wewnątrz przewodnika dowolną powierzchnią  $S_1$  (rys. 121). Strumień indukcji przechodzący przez utworzoną w ten sposób powierzchnię zamkniętą, równy strumieniowi przez element powierzchni  $dS'$  (strumień bowiem indukcji przez boczne powierzchnie strugi i powierzchnię  $S_1$  równy jest zeru), wyraża się, jak wiemy, wzorem

$$d\Phi = D \cdot dS' = \varepsilon E dS' = 4\pi\sigma \cdot dS_1,$$



rys. 121



rys. 122

gdzie  $D$  i  $E$  oznaczają odpowiednio indukcję i natężenie w punkcie  $M$ ,  $\sigma$  — gęstość elektryczną na elemencie  $dS_1$  powierzchni przewodnika. Wobec tego, że punkt  $M$  leży, jakśmy to założyli, bardzo blisko powierzchni przewodnika, możemy przyjąć

$$dS' = dS_1,$$

otrzymując na wartość natężenia pola w punkcie leżącym blisko powierzchni przewodnika wzór

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Gdy pole wzbudzone jest przez przewodzącą powierzchnię płaską  $CD$  (rys. 122), wtedy przecinając elementarną strugę indukcji dwiema płaszczyznami, przechodzącymi przez punkty  $M_1$  i  $M_2$ , leżące symetrycznie po obu stronach powierzchni



przewodzącej, otrzymamy powierzchnię zamkniętą, przez którą przechodzi strumień indukcji równy

$$d\Phi = 4\pi\sigma \cdot dS.$$

Tym razem jednak całkowity strumień indukcji składać się będzie z dwu strumieni cząstkowych: strumienia przez powierzchnię  $dS_1$ , przesuniętą przez punkt  $M_1$ , i strumienia przez powierzchnię  $dS_2$  przesuniętą przez punkt  $M_2$ . Żaden z tych strumieni nie jest równy zero, gdyż ani punkt  $M_1$ , ani punkt  $M_2$  nie leżą wewnątrz przewodnika. Mamy więc

$$d\Phi_1 = d\Phi_1 + d\Phi_2 = D_1 dS_1 + D_2 \cdot dS_2 = \varepsilon_1 E_1 dS_1 + \varepsilon E_2 dS_2 = 4\pi\sigma \cdot dS,$$

przy czym strumień  $d\Phi_1$  równy jest  $d\Phi_2$ , jak to bezpośrednio wynika z warunków symetrii. W przypadku zatem, gdy środowiska po obu stronach płaszczyzny są jednakowe, otrzymujemy po uwzględnieniu, że

$$dS_1 = dS_2 = dS,$$

na natężenie pola w punktach bliskich płaskiej powierzchni naelektryzowanej

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}. \quad (17)$$

Taką jednak wartość natężenie ma tylko wtedy, gdy punkty  $M_1$  i  $M_2$  leżą dostatecznie daleko od brzegów powierzchni przewodzącej, w których sąsiedztwie występują zakłócenia, nieuwzględnione przez nas w rachunku.

To twierdzenie pozwala nam wyznaczyć siłę, z jaką się odpychają wzajemnie elementarne naboje, rozmieszczone na zamkniętej powierzchni przewodzącej.

W tym przypadku natężenie pola  $\vec{E}$  w punkcie bliskim powierzchni przewodnika wyraża się, jak wiemy, wzorem (16). Natężenie to możemy uważać za wypadkowe dwu natężeń: natężenia  $\vec{E}_1$  pola, wzbudzonego przez nabój  $\sigma dS$ , znajdujący się na najbliższym punkcie  $M$  elemencie powierzchni przewodnika,



i natężenia  $E_2$  pola wzbudzonego przez naboje elementarne, rozmieszczone na pozostałych częściach przewodnika, wobec czego mamy

$$E_1 + E_2 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}. \quad (c)$$

Gdy punkt  $M$  będziemy coraz bardziej przybliżali do powierzchni przewodnika, tak że wreszcie odległość jego od elementu  $dS$  stanie się znikomo mała w porównaniu z liniowymi wymiarami tego elementu, natężenie  $\vec{E}_1$  będzie się coraz mniej różniło od natężenia pola w punkcie bliskim płaskiej powierzchni przewodzącej.

W granicy będziemy mieli, zgodnie ze wzorem (17)

$$E_1 = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon},$$

a zatem

$$E_2 = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon}. \quad (d)$$

Natężenie  $\vec{E}_2$  będzie miało, oczywiście, tę samą wartość, co w punkcie  $M$ , we wszystkich punktach elementu  $dS$ , różnica bowiem odległości każdego z tych punktów i punktu  $M$  od pozostałych elementów powierzchni jest zbyt mała, aby mogła wpłynąć w dostrzegalny sposób na wartość  $\vec{E}_2$ . Siła więc, z jaką nabój przewodnika działa na nabój elementu  $dS$ , wynosi

$$df = E_2 \cdot \sigma \cdot dS = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} \cdot dS,$$

na jednostkę przeto powierzchni działa ciśnienie, skierowane na zewnątrz, prostopadle do powierzchni przewodnika (rys. 123).



rys. 123

$$p = \frac{df}{dS} = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} = \frac{2\pi}{\epsilon} \left( \frac{\epsilon E}{4\pi} \right)^2 = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}, \quad (18)$$



gdzie  $E$  natężenie pola w punkcie nieograniczenie bliskim powierzchni przewodnika.

Ciśnienie to nazywamy ciśnieniem elektrostatycznym.

Zanurzymy w wodzie, nalanej do izolowanego naczynia, areometr. Gdy wodę zaczniemy silnie elektryzować (np. przy pomocy maszyny elektrostatycznej), areometr podniesie się nieco do góry. (Bruhat).

##### 5. — ZAŁOŻENIA TEORII FARADAYA-MAXWELLA.

Związek, jaki między nabojami elektrycznymi i wielkościami, charakteryzującymi pole, ustaliły wzory, wyprowadzone w ustępie poprzednim, pozwala nam rozpatrywać zjawiska elektryczne z dwojakiego punktu widzenia. Przede wszystkim możemy, zgodnie z podstawowym założeniem ust. I, str. 170 oraz treścią prawa Coulomba, uważać naboje elektryczne, wzbudzone w ten czy inny sposób na ciałach elektryzowanych, za właściwe źródło zjawisk elektrycznych. Naboje te działając „na odległość” będą powodowały wzajemne przyciąganie i odpychanie ciał naelektryzowanych, jak również powstawanie nabołów indukowanych. Pojęcie pola elektrycznego staje się przy tych założeniach pojęciem wyłącznie formalnym podobnie, jak pojęcie pola grawitacyjnego w teorii Newtona, służącym li tylko do ułatwienia rachunków.

Dotyczy to również i tych przypadków, gdy odległości między nabojami są bardzo małe, rzędu np. rozmiarów atomu, i wtedy bowiem źródła działań elektrycznych będą skupione w poszczególnych punktach przestrzeni.

Możemy jednak tej teorii „działania na odległość” (*actio in distans*) przeciwstawić teorię pola, opracowaną w głównych zarysach przez Faradaya (1791—1867 r.), jako ostateczny wynik jego badań nad elektrycznością i magnetyzmem, następnie zaś pogłębioną i ujętą we wzory matematyczne przez Maxwella (1856 r. i następnie 1869 r.). W teorii Faradaya-Maxwella to, co nazywamy elektryzacją ciała i co przypisywaliśmy wzbudzeniu nabołów elektrycznych, polega na zmianie własności otaczającej ciała naelektryzowane przestrzeni i to bez względu na to, czy przestrzeń ta wypełniona jest jakimś środowiskiem ma-



terialnym czy też jest całkowicie próżna. Zmiany te ujawniają się w powstaniu linii sił i strug indukcji, wychodzących z tych punktów ciała, w których zakładaliśmy poprzednio istnienie naboju dodatnich, i dochodzących do tych punktów, którym przypisywaliśmy nabój ujemny.

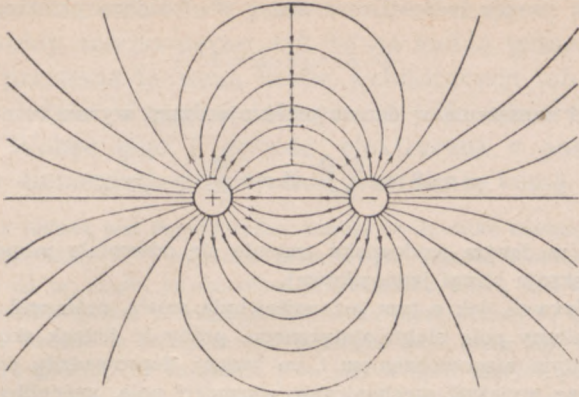
W świetle tej teorii powierzchnia przewodnika naelektryzowanego nabojem dodatnim jest z jednej strony powierzchnią, z której wychodzi  $4\pi e$  jednostkowych strug indukcji, z drugiej zaś powierzchnią, ograniczającą tę część przestrzeni, w której ujawniają się działania elektryczne, od tej części (leżącej wewnątrz przewodnika), w której pola elektrycznego nie ma. Podobnie naelektryzowany punkt materialny jest miejscem, z którego wychodzą (gdy nabój punktu jest dodatni), lub w którym się schodzą (gdy nabój jest ujemny) jednostkowe strugi indukcji, w ilości  $4\pi$  razy przewyższającej tę wartość naboju, jaką byśmy zgodnie z teorią działania na odległość przypisywali temu punktowi.

W teorii pola działanie w danym punkcie przestrzeni jest wyznaczone, gdy znamy wartość, jaką pewne wielkości (natężenie pola, wektor indukcji, potencjał) posiadają w danym punkcie lub punktach sąsiednich. W teorii działania na odległość działanie wyznaczone jest przez wartości, jakie w pewnych punktach, odległych na ogół od danego punktu, posiadają pewne wielkości (np. naboje) oraz przez położenie tych punktów względem badanego punktu. Na tym w istocie polega różnica między teorią pola i teorią actionis in distans.

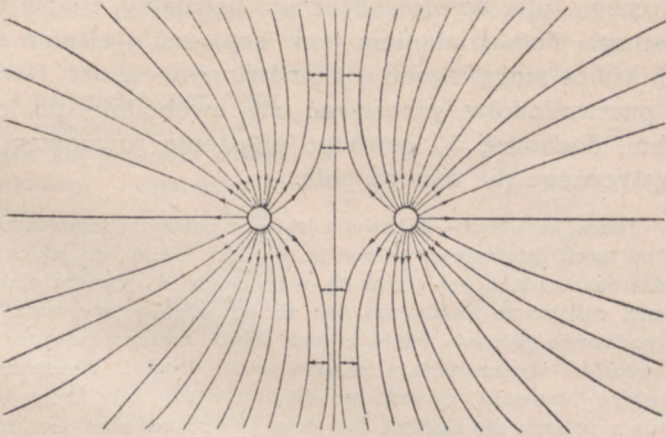
Działania mechaniczne między naelektryzowanymi ciałami należy tym razem przypisywać nie nabojom, lecz w przypadku przyciągania szczególnym naprężeniom, działającym wzdłuż strug indukcji, łączących przeciwnie naelektryzowane elementy (powierzchni, gdy mamy do czynienia z przewodnikami, objętości, gdy z dielektrykami) przyciągających się ciał, w przypadku zaś odpychania — ciśnieniem bocznym, wywieranym na strugi indukcji przez strugi sąsiednie. Zjawisko zatem zachodzi tak, jak to schematycznie przedstawiają rys. 124, 125 i 125a (p. str. 218).

Tym naprężeniem strugi tłumaczy się zjawisko, które w ustępie poprzednim przypisywaliśmy ciśnieniu elektrostatycznemu.





rys. 124



rys. 125

Wartość tego naprężenia na jednostkę powierzchni wyraża wzór (18) w jego postaci ostatecznej, tak że mamy

$$p = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} \quad (18a)$$

W stanie równowagi elektrycznej naprężenie (całkowite) ma tę samą wartość we wszystkich przekrojach strugi.



W strudze jednostkowej mamy dla każdego przekroju

$$D \cdot S = \varepsilon E \cdot S = 1.$$

Siła zaś naprężenia w danym przekroju strugi wynosi

$$f = p \cdot S = \frac{E \cdot D}{8\pi} \cdot S = \frac{E}{8\pi} = \frac{1}{8\pi \varepsilon S}, \quad (18b)$$

a więc w danym środowisku zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do przekroju strugi jednostkowej.

Maxwell, jak o tym już wyżej była mowa, próbował dać model mechaniczny pola elektrostatycznego; próby te jednak skończyły się całkowitym niepowodzeniem i, co więcej, doprowadziły do wniosku, że, chcąc wyjaśnić mechanicznie własności pola, musielibyśmy przypisać środowisku cechy wzajemnie się wykluczające.

Ciśnienie boczne w strugach jest, jak to udowodnił Maxwell, a czego tutaj wyprowadzać nie będziemy, równe naprężeniu strugi. Pod działaniem tych naprężeń i ciśnień strugi, których końce mogą, zgodnie z omówionymi w ust. 1 własnościami przewodników, przesuwać się swobodnie po ich powierzchni, dochodzą do pewnego położenia równowagi, charakterystycznego dla danego pola.

Teoria Faradaya — Maxwella jest pod pewnymi względami prostsza od teorii działania na odległość, wnioski jednak, do jakich doprowadza nas każda z tych teorii, są, o ile chodzi o zjawiska elektrostatyczne, całkowicie identyczne, tak że od wzorów, wyprowadzonych na podstawie założeń jednej z tych teorii, możemy zawsze przejść do wzorów, otrzymanych z założeń teorii drugiej. Wyższość teorii Faradaya — Maxwella ujawnia się dopiero wtedy, gdy mamy do czynienia z polami, nie stałymi, jak pola elektrostatyczne, lecz zmieniającymi się w czasie.

W dalszych przeto rozważaniach będziemy i nadal posługiwali się pojęciem naboju w tych wszystkich przypadkach, gdy okaże się ono użyteczne.

#### 6. — ROZMIESZCZENIE NABOJU NA POWIERZCHNI PRZEWODNIKA. — POJEMNOŚĆ ELEKTRYCZNA.

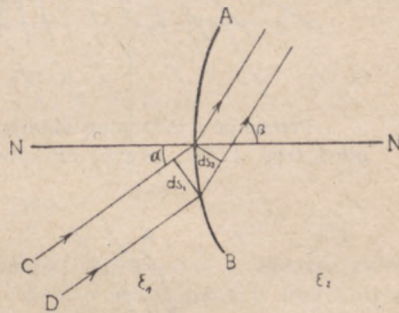
Gdy ciałem naelektryzowanym jest przewodnik kulisty, umieszczony w dostatecznej odległości od innych ciał (nie wyłączając ziemi), linie sił, a co za tym idzie, i jednostkowe strugi indukcji rozchodzą się, jak wiemy, z jego powierzchni promie-



nisto. Rozmieszczenie ich w przestrzeni, otaczającej przewodnik, jest wtedy równomierne, tak że na każdą jednostkę powierzchni przypada ta sama liczba wchodzących lub wychodzących (zależnie od znaku elektryzacji) jednostkowych strug indukcji. Wobec tego i gęstość elektryczna  $\sigma$  posiada na wszystkich elementach powierzchni wartość tę samą.

Tak jednak jest dopóty tylko, dopóki środowisko otaczające ciało, jest jednorodne. W przypadku przeciwnym gęstość elektryczna jest większa na tej części powierzchni przewodnika, która jest w zetknięciu ze środowiskiem o większej zdolności elektrycznej  $\epsilon$ , gdzie więc ciśnienie boczne w strugach jest mniejsze (por. wzór 18a, w którym należy uwzględnić, że natężenie pola jest w tych samych pozostałych warunkach odwrotnie proporcjonalne do zdolności elektrycznej). Zjawisko zachodzi tak, jak gdyby końcowe przekroje strug indukcji doznając większego ciśnienia ze strony strug, rozmieszczonych w dielektryku o mniejszej zdolności elektrycznej, ślizgały się po powierzchni przewodnika, skupiając się na powierzchni, graniczącej z dielektrykiem o zdolności  $\epsilon$  większej. W tej części pola przekrój strug jednostkowych jest mniejszy. Równowaga następuje wtedy, gdy wzrost siły  $f$  naprężenia (por. wzór 18b), spowodowany zmniejszeniem się przekroju strugi, zrównoważy zmniejszenie, spowodowane przez różnicę zdolności elektrycznych, gdy więc innymi słowy, iloczyn  $\epsilon S$  będzie miał we wszystkich strugach jednostkowych wartość tę samą.

Gdy zmiana środowiska następuje w pewnej odległości od ciała naelektryzowanego, linie sił przy przejściu przez powierzchnię rozdziału zmieniają na ogół swój kierunek.



rys. 126

Niech  $AB$  będzie taką powierzchnią rozdziału dwu dielektryków o zdolnościach elektrycznych równych odpowiednio  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_2$ ,  $CD$  zaś elementarną strugą indukcji, wchodzącą do dielektryka drugiego i tworzącą z normalną w danym punkcie kąt  $\alpha$ . Strumień indukcji przez dowolny przekrój strugi musi mieć w obu środowiskach wartość tę samą, wobec czego

$$D_1 dS_1 = D_2 \cdot dS_2,$$

gdzie  $dS_1$  i  $dS_2$  są elementarnymi przekrojami prostopadłymi do osi strugi. Oznaczając przez  $\beta$  kąt, jaki struga tworzy z normalną w drugim



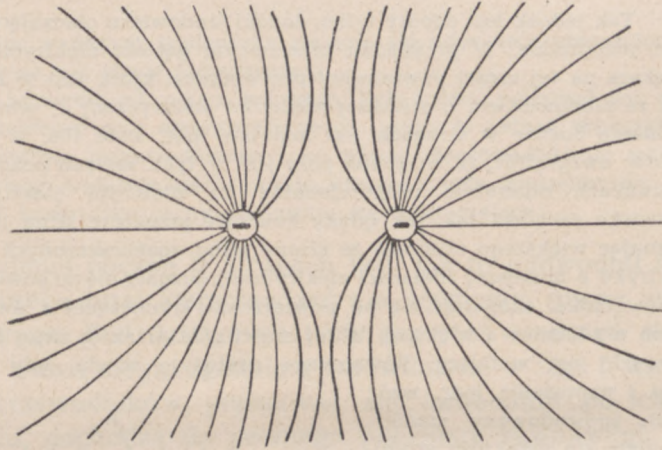
środowisku, i przez  $dS$  element powierzchni  $AB$ , wycięty przez strugę, otrzymamy

$$D_1 \cos \alpha \cdot dS = D_2 \cdot \cos \beta \cdot dS$$

i z uwagi, że

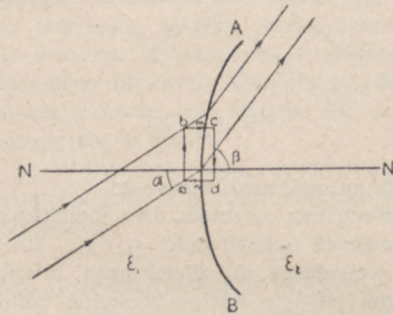
$$D_1 = \varepsilon E_1 \text{ oraz } D_2 = \varepsilon_2 E_2,$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \alpha = \varepsilon_2 E_2 \cos \beta. \quad (a)$$



rys. 125a

Przesuńmy jednostkę naboju dodatniego wzdłuż drogi zamkniętej  $abcd$  (rys. 127a), leżącej częściowo w jednym, częściowo w drugim środowisku. Praca sił pola wzdłuż takiej zamkniętej drogi jest równa zero, pole bowiem elektrostatyczne jest, jakśmy to stwierdzili, (ust. 2), zachowawcze. Mamy zatem idąc w kierunku wskazanym strzałką



rys. 127 a

$$E_1 \sin \alpha \cdot ab + E_1 \cos \alpha \cdot bm + \\ + E_2 \cos \beta \cdot mc - E_2 \sin \beta \cdot ed - \\ - E_2 \cos \beta \cdot dn - E_1 \cos \alpha \cdot na = 0.$$

Odcinki dróg  $bc$  i  $da$  możemy dowolnie skrócić tak, aby stały się one dowolnie małe w porównaniu z odcinkami  $ab$  i  $cd$ . Biorąc pod uwagę, że w granicy odcinki te stają się sobie równe, otrzymamy

$$E_1 \sin \alpha = E_2 \sin \beta. \quad (b)$$



Dzieląc (b) przez (a) znajdziemy

$$\frac{E_1 \sin \alpha}{\varepsilon_1 E_1 \cos \alpha} = \frac{E_2 \sin \beta}{\varepsilon_2 E_2 \cos \beta},$$

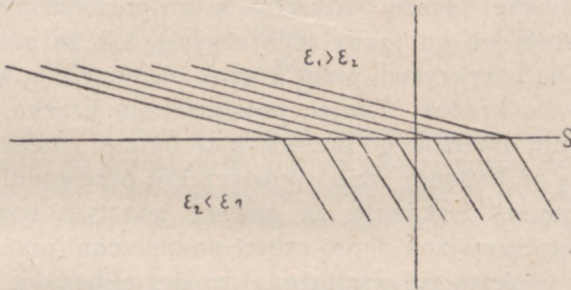
skąd

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (19)$$

Gdy  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ,  $\alpha > \beta$ , linie sił po przejściu do drugiego dielektryka przybliżają się do normalnej, przekrój strug indukcji wzrasta,  $\cos \alpha$  bowiem jest mniejsze od  $\cos \beta$  a więc i

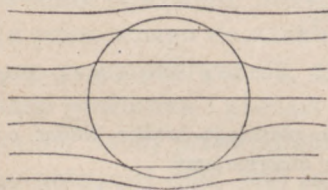
$$dS_1 = dS \cdot \cos \alpha < dS_2 = dS \cos \beta.$$

Do dielektryka drugiego wchodzi nawet te strugi indukcji, które padają na powierzchnię rozdziału pod kątem bliskim  $90^\circ$ . Otrzymujemy wtedy, jak gdyby rozrzedzenie linii sił (rys. 127 b).

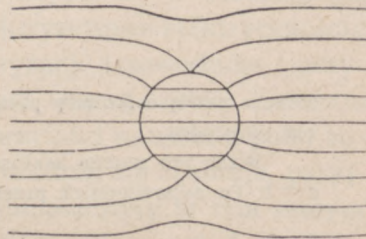


rys. 127b

Niech np. dielektryk o zdolności elektrycznej  $\varepsilon$ , posiada kuliste wydrążenie całkowicie próżne. Przebieg strug indukcji (lub linii sił, co w danym przypadku wychodzi na jedno) odtwarza rys. 127c.



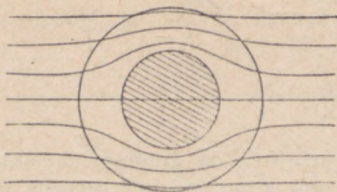
rys. 127c



rys. 127d



Odwrotnie, gdy  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ,  $\alpha < \beta$ ; linie sił oddalają się od normalnej: kula z dielektryku, umieszczona w próżni, jak gdyby skupia linie sił



rys. 127e

(rys. 127d). Tym się tłumaczy działanie ochronne pierścieni, zrobionych z materiału o znacznej zdolności elektrycznej. Natężenie pola wewnątrz pierścienia jest tym mniejsze, im większy jest stosunek  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ , i im większa jest grubość warstwy pierścieniowej (rys. 127e).

Jeżeli jednak kulę zastąpimy elipsoidem, rozmieszczenie naboju przestanie być równomierne, jak o tym można się przekonać przy pomocy tzw. krążka probierczego. Jest to płaski krążek metalowy o niewielkiej powierzchni, osadzony na izolowanej ręczce. Gdy krążek ten przyłożymy do przewodnika, staje się on jakby jego częścią, tak że nabój, znajdujący się na przykrytym przez krążek elemencie powierzchni, przechodzi na krążek. Znając powierzchnię krążka, możemy po zmierzeniu uniesionego przez krążek naboju znaleźć gęstość elektryczną na badanej części powierzchni przewodnika. Tego rodzaju pomiary wskazują, że gęstość jest tym większa, im większa jest krzywizna danej części powierzchni przewodnika, jest zatem większa na wydłużonej części elipsoidu, mniejsza na spłaszczonej.

Z rachunku, którego tu przytaczać nie będziemy, wynika, że gęstość elektryczna jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka czwartej potęgi z iloczynu dwu głównych promieni krzywizny (p. tom I, str. 256), tak że mamy

$$\sigma = \frac{e}{A \sqrt{R_1 R_2}}, \quad (c)$$

gdzie  $e$  nabój całkowity przewodnika,  $A = 2\pi \sqrt{abc}$  ( $a, b, c$  — długości osi elipsoidu).

Wzór ten można zastosować do płaskiego krążka kładąc  $c = 0$ ;  $a = b$ . Po odpowiednich przeróbkach otrzymujemy

$$\sigma = \frac{e}{4\pi \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (d)$$



gdzie  $a$  promień krążka,  $r$  — odległość danego elementu powierzchni od środka.

Rozmieszczenie naboju na takim przewodniku badał doświadczalnie (1788 r.) Coulomb, używając do pomiaru naboju, zebranego przez krążek probierczy, wagi skręceń. Metodę tę w zmienionej nieco postaci stosował następnie Riess (1844 r.) do wyznaczenia stosunku gęstości na dwu danych elementach powierzchni. Wyniki pomiarów Coulomba podajemy za Wüllnerem, umieszczając w drugiej kolumnie gęstość, obliczoną przez W. Thomsona (1869 r.) ze wzoru ( $d$ ). Krążek miał promień 13,5 cm.

g ę s t o ś c i

$r$ w cm	Zmierzone	obliczone
0	1,000	1,000
2,7	1,001	1,020
5,4	1,005	1,090
8,1	1,170	1,260
10,8	1,520	1,670
12,15	2,070	2,290
13,5	2,900	$\infty$

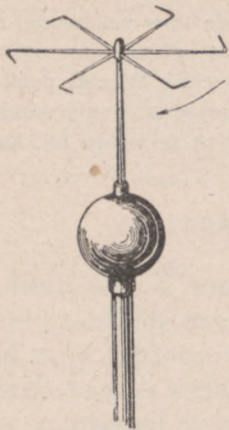
Jeżeli się zważy małą dokładność metody krążka probierczego oraz to, że wzór ( $d$ ) stosuje się do krążków nieograniczenie cienkich, zgodność rachunku z doświadczeniem należy uznać za wystarczającą.

Riess również stwierdził znaczny wzrost gęstości na krawędziach.

Tym zwiększaniem się gęstości elektrycznej na silniej zakrzywionych częściach powierzchni przewodnika tłumaczy się tzw. działanie ostrzy tj. takich części przewodnika, których krzywizna jest bardzo wielka. W pobliżu ostrzy natężenie pola, proporcjonalne, jak wiemy, do gęstości, przybiera szczególnie wielką wartość. Pole silnie wtedy działa na naelektryzowane cząstki, (jony) zawsze znajdujące się w otaczającym przewodnik powietrzu. Jony, naelektryzowane elektrycznością znaku przeciwnego do znaku elektryzacji przewodnika i przyciągane przez przewodnik, mniej lub więcej szybko (zależnie od stanu powietrza i początkowej wartości natężenia pola) zobjętniają nabój przewodnika: przewodnik się rozbraja, przyjmując potencjał taki, jaki miałby umieszczony w tym samym miejscu przewodnik elektrycznie obojętny (por. ust. 4, str. 209).



Gdy przewodnik utrzymywany jest przy stałym potencjale wskutek ciągłego dopływu elektryczności (np. z maszyny elektrostatycznej), odpychane jony powietrza, o naboju tego samego znaku, co przewodnik, mogą być wprawione w dostatecznie silny ruch, aby można go było bez trudu zauważyć (wiatr elektryczny). Jeżeli przewodnik jest ruchomy, impuls odpychanych jonów może nieraz wprawić w ruch i przewodnik, np. w przypadku tzw. młynka elektrycznego (rys. 128, gdzie strzałka wskazuje kierunek ruchu młynka). W podobny sposób można wyjaśnić silne drganie drutów, połączonych z dodatnim biegunem maszyny elektrostatycznej i umieszczonych w pobliżu ostrza, połączonego z ziemią (Ollivier, 1927 r.).



rys. 128

Jakikolwiek jednak byłby kształt takiego odosobnionego przewodnika oraz jakikolwiek byłoby rozmieszczenie na nim naboju, zawsze stosunek między wartością naboju całkowitego i wartością potencjału przewodnika będzie miał dla danego przewodnika wartość stałą

$$\frac{e}{V} = C, \quad (20)$$

gdzie wielkość  $C$  jest pojemnością elektryczną danego ciała.

Wymiar jej w układzie elektrostatycznym otrzymamy podstawiając do wzoru (20) wymiary naboju i potencjału (p. str. 186 i str. 192)

$$[C] = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}} = L. \quad (20a)$$

W układzie więc elektrostatycznym  $C$ , G. S. jednostką pojemności jest centymetr. W układzie wolt-kulomb jednostką pojemności jest farad ( $f$ ). Ze wzoru (20) otrzymujemy

$$1f = \frac{1 \text{ kul}}{1 \text{ w}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ j} \cdot \text{els} \cdot \text{nab}}{\frac{1}{3} \cdot 10^{-2} \text{ j} \cdot \text{els} \cdot \text{pot}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm.}$$



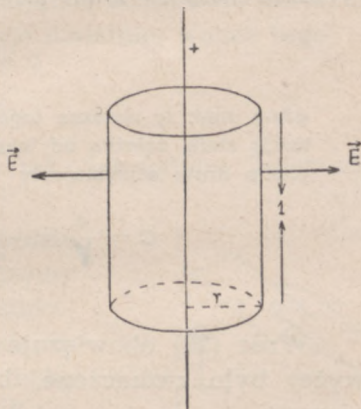
Częściej jednak używaną jednostką jest mikrofarad ( $\mu f$ ), będący milionową częścią farada.

W pewnych prostych przypadkach można znając nabój przewodnika obliczyć jego potencjał i stąd wyznaczyć jego pojemność. Niech np. przewodnik ten będzie kulą o naboju  $e$ . Kula ta, jak wiemy, wywiera na zewnątrz takie działanie, jak gdyby nabój był skupiony w jej środku geometrycznym. Potencjał więc kuli o promieniu  $R$  ma wartość taką, jaką by miał potencjał punktu pola, znajdującego się w odległości  $R$  od naelektryzowanego punktu. Mamy zatem

$$V = \frac{e}{\epsilon R} \quad \text{i} \quad C = \epsilon R. \quad (21)$$

Pojemność kuli odosobnionej w próżni równa jest liczbowo promieniowi kuli.

Niech przewodnikiem naelektryzowanym będzie nieograniczenie długi drut cylindryczny odosobniony od innych ciał. Przypuśćmy, że nabój, przypadający na jednostkę długości, ma wartość  $+e$ , jednakową w tych warunkach na całej długości drutu. Opiszmy promieniem  $r$  walec współosiowy do drutu, o wysokości równej jednostce (rys. 129). Strumień indukcji przez podstawy walca równy jest zeru, kierunek natężenia pola jest prostopadły do powierzchni drutu. Całkowity zatem strumień indukcji przez tę powierzchnię zamkniętą równy jest strumieniowi przez boczną powierzchnię walca. Na podstawie twierdzenia Gaussa piszemy



rys. 129

$$2\pi r \cdot 1 \cdot \epsilon E = 4\pi e,$$

skąd

$$E = \frac{2e}{\epsilon r}. \quad (22)$$



Na powierzchni więc drutu natężenie wynosi

$$E_R = \frac{2e}{\varepsilon R}, \quad (22a)$$

gdzie  $R$  — promień drutu.

Natężenie jednak można wyrazić również inaczej (p. wzór 8),

$$E_r = - \frac{dV}{dr},$$

pisząc  $dr$  zamiast  $dn$ , promień bowiem walca jest normalny do jego powierzchni.

Po podstawieniu do (22) otrzymujemy

$$\frac{2e}{\varepsilon r} = - \frac{dV}{dr}$$

Temu równaniu czyni zadość, jak to można bez trudu sprawdzić, następująca wartość potencjału

$$V = \frac{e}{\varepsilon} 2lg \frac{k}{r}, \quad (22b)$$

skąd kładąc  $r = R$  otrzymujemy na potencjał drutu

$$V = \frac{e}{\varepsilon} 2lg \frac{k}{R},$$

gdzie znak  $lg$  oznacza logarytm naturalny;  $k$  zaś jest pewną wartością stałą, zależną od warunków na końcach drutu. Na pojemność przeto drutu otrzymujemy

$$C = \frac{e}{V} = \frac{e}{\frac{e}{\varepsilon} 2lg \frac{k}{R}} = \frac{\varepsilon}{2lg \frac{k}{R}}. \quad (23)$$

Wzór (20) obowiązuje jednak tylko wtedy, gdy, jak to wyżej było zaznaczone, badane ciało jest ciałem odosobnionym.

Istotnie, przysuńmy do kuli przewodzącej  $A$ , naelektryzowanej do potencjału  $+V$ , dowolny przewodnik  $B$ , elektrycznie obojętny. Na przewodniku tym powstaną naboje indukowane przeciwnych znaków, przy czym elementy powierzchni, naelektryzowane ujemnie, będą się znajdowały bliżej kuli, niż elementy naelektryzowane dodatnio. Potencjał kuli  $A$ ,



poprzednio wyznaczony jedynie przez nabój (oraz oczywiście, przez zdolność elektryczną środowiska), obecnie zależęć będzie od rozmieszczenia naboju indukowanego na przewodniku  $B$ .

Oznaczmy przez  $V'$  bezwzględną wartość potencjału, który by kula  $A$  nabyła, zajmując to samo, co poprzednio, położenie i będąc elektrycznie obojętną, w polu wzbudzonym przez ujemny nabój, indukowany na przewodniku  $B$ , (potencjał ten będzie rzecz prosta, ujemny), przez  $V''$  — potencjał, jaki by w tych samych warunkach pozostałych kula nabyła w polu dodatniego naboju indukowanego.

Z zasady dodawania działań elektrycznych wynika, że potencjał kuli, naelektryzowanej uprzednio do potencjału  $V_0$  i znajdującej się w polach naboju indukowanego na przewodniku  $B$ , jest sumą potencjałów poszczególnych. Mamy tedy

$$V = V_0 - V' + V''.$$

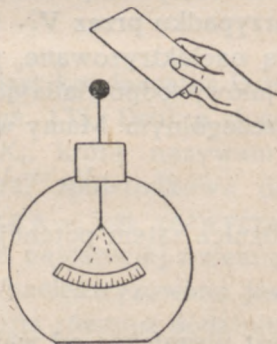
$V'$  jest co do wartości bezwzględnej większe od  $V''$ , ujemne bowiem naboje indukowane znajdują się bliżej kuli, niż wzbudzone w równoważnej ilości naboje dodatnie, wobec tego

$$V < V_0,$$

zjawisko więc zachodzić będzie tak, jak gdyby pojemność kuli się zwiększyła.

Zwiększenie pojemności będzie jeszcze większe, gdy ciało  $B$  połączymy z ziemią, wtedy bowiem nabój indukowany tego samego znaku, co nabój indukujący (w danym przypadku dodatni) ujdzie do ziemi, na ciele zaś  $B$  pozostanie tylko nabój znaku przeciwnego

Weźmy w rękę sporą płytkę metalową i przybliżajmy ją do naelektryzowanego elektroskopu. Listki będą się do siebie zbliżały, wracając do poprzedniego położenia przy odsuwaniu płytki (rys. 130).

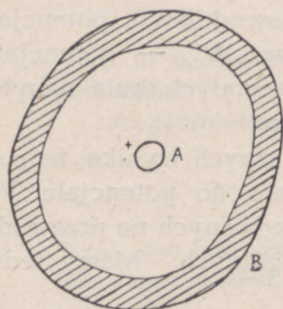


rys. 130



Stosunek zatem naboju przewodnika do potencjału przestaje być wartością stałą, lecz zmienia się ze zmianą położenia lub stanu elektrycznego ciał otaczających.

W pewnych jednak przypadkach możemy pojęcie pojemności, nadając mu zresztą nieco odmienne od poprzedniego znaczenie, stosować i do układu ciał.



rys. 131

Taki przypadek zachodzi przede wszystkim wtedy, gdy jedno z ciał (A) znajduje się wewnątrz drugiego (B) (rys. 131). Przypuśćmy, że ciało zewnętrzne B jest naelektryzowane do pewnego potencjału  $V_1$ , ciało zaś wewnętrzne A jest elektrycznie obojętne. Wtedy we wszystkich punktach wydrążenia, nie zawierającego naboju elektrycznych, potencjał ma wartość stałą, równą wartości potencjału ciała B, natężenie bowiem pola, wzbudzonego przez naboje,

rozmszczone na zewnętrznej powierzchni ciała B, jest wewnątrz tego ciała równe zero. W tym więc przypadku potencjał ciała A równy jest  $V_1$ , potencjałowi ciała B. Przypuśćmy teraz, że ciało B jest elektrycznie obojętne, ciało zaś A otrzymało pewien nabój  $e$ . Potencjał ciała A jest wtedy, jak wiemy, zależny również od rozmieszczenia naboju indukowanego na ciele B i od rodzaju wypełniającego wydrążenie środowiska. Oznaczmy ten potencjał przez  $V_2$ , potencjał zaś ciała B w tym przypadku przez  $V'_2$ . Gdy teraz zarówno ciało A, jak i ciało B są naelektryzowane, potencjały ich są wypadkowymi potencjałów, odpowiadających wyżej rozpatrzonym przypadkom szczególnym. Mamy więc

$$V_A = V_1 + V_2 \text{ i } V_B = V_1 + V'_2,$$

różnica zatem potencjałów ciał A i B

$$V_A - V_B = V_2 - V'_2 \quad (\text{a})$$

jest niezależna od wartości  $V_1$  potencjału ciała zewnętrznego. Przy niezmiennym przeto położeniu wzajemnym ciał A i B



ta różnica potencjału lub napięcia ciała  $A$  względem  $B$  jest (w danym środowisku, wypełniającym wydrążenie), proporcjonalna do naboju ciała  $A$ , zarówno bowiem  $V_2$ , jak i  $V'_2$ , są do tego naboju proporcjonalne.

Połączmy ciało  $B$  z ziemią, wzór (a) wyznaczycie nam napięcie ciała  $A$  względem ziemi. Oznaczając je przez  $V$  tak, jak potencjał, od którego różni się jedynie o wielkość stałą, otrzymujemy

$$V = Ke \text{ lub } e = \frac{1}{K} V, \quad (b)$$

gdzie  $e$  jest nabojem ciała  $A$ . Wielkość  $\frac{1}{K} = C$  nazywamy pojemnością danego układu, tak że ostatecznie mamy

$$e = CV.$$

Tego rodzaju stałą pojemność będą posiadały wszystkie układy, w których jedno ciało odgrywa względem drugiego rolę z a s ł o n y elektrycznej, oddzielającej elektrycznie część przestrzeni, zawierającej dane ciało, od części pozostałej. Takim układem, poza rozpatrywanym wyżej, jest również układ dwu cylindrycznych spółosiowych przewodników o nieograniczonej długości lub układ złożony z dowolnego ciała i nieograniczonej płaszczyzny przewodzącej. Układ dwu przewodników, którego pojemność możemy uważać za stałą, nazywamy kondensatorem. (łac. condensare — zgęszczać).

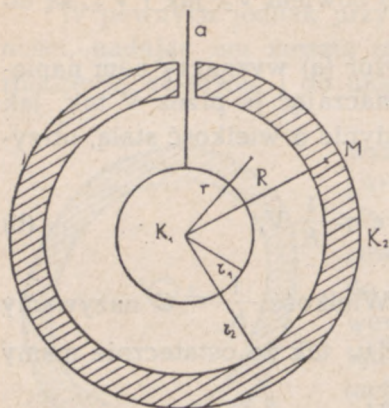
#### 7. — POJEMNOŚĆ KONDENSATORÓW.

Najprostszym typem kondensatora jest kondensator kulisty, schematycznie przedstawiony na rys. 132. Druć  $a$  służy do elektryzowania wewnętrznej kuli  $K_1$ , którą nazywamy zbroją wewnętrzną kondensatora; spółśrodkowa do niej kula  $K_2$  — zbroja zewnętrzna — jest zazwyczaj połączona ze źródłem o stałym potencjale, najczęściej z ziemią.

Przypuśćmy, że zbroja wewnętrzna naelektryzowana jest nabojem dodatnim  $e$ , zbroja zaś zewnętrzna również dodatnim nabojem  $e_1$ . Na zbroi tej powstaną poza tym na skutek działań indukcyjnych naboju zbroi wewnętrznej równoważne na-



boje indukowane  $\pm e$ , tak że ostatecznie na zewnętrznej powierzchni zbroy  $K_2$  nabój dodatni będzie miał wartość  $e = e + e_1$ .



rys. 132

Jakakolwiek jednak byłaby wartość tego naboju, natężenie pola prądów wytworzonego będzie miało w przestrzeni między zbrojami kondensatora wartość zero, potencjał bowiem tego pola będzie miał we wszystkich punktach tej przestrzeni, znajdującej się wewnątrz naelektryzowanego przewodnika, wartość jednakową. Siły zatem elektryczne, działające wewnątrz kondensatora, będą całkowicie wyznaczone przez nabój zbroy wewnętrznej i zdol-

ność elektryczną środowiska, wypełniającego przestrzeń między zbrojami. W odległości więc  $r$  od środka zbroy wewnętrznej natężenie pola będzie równe

$$E = \frac{e}{\epsilon r^2}.$$

Różnicę potencjałów lub inaczej mówiąc napięcie zbroy wewnętrznej względem zewnętrznej znajdziemy, obliczając pracę sił elektrycznych, odniesioną do jednostki naboju, przy przeniesieniu naboju probierczego  $\Delta e$  z powierzchni zbroy wewnętrznej na zbroję zewnętrzną, której wszystkie punkty posiadają, oczywiście, ten sam potencjał. Praca elementarna wyniesie

$$dW = \Delta e \cdot E \cdot dr = \frac{e \cdot \Delta e}{\epsilon r^2} \cdot dr.$$

Praca całkowita, którą możemy obliczyć stosując te same metody rachunkowe, jak w ust. 3, będzie równa

$$W = \frac{e \cdot \Delta e}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$



gdzie  $r_1$  oznacza promień kuli  $K_1$ ,  $r_2$  — wewnętrzny promień wydrążonej kuli  $K_2$ . Stąd na różnicę potencjałów otrzymujemy

$$V_1 - V_2 = \frac{W}{\Delta e} = \frac{e}{\varepsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{e(r_2 - r_1)}{\varepsilon \cdot r_1 r_2}. \quad (24)$$

Gdy zbroja zewnętrzna połączona jest z ziemią, wzór (24) wyraża napięcie  $V = V_1 - V_2$  zbroi wewnętrznej  $K_1$  względem ziemi.

Oznaczmy przez  $d = r_2 - r_1$  grubość warstwy, oddzielającej zbroje; wzór (24) przybierze wtedy postać następującą

$$V = \frac{e \cdot d}{\varepsilon \cdot r_1 r_2},$$

skąd na pojemność kondensatora otrzymujemy

$$C = \frac{e}{V} = \frac{\varepsilon \cdot r_1 r_2}{d}. \quad (25)$$

Pojemność takiego układu jest większa od pojemności kuli o sobnionej o tym samym promieniu, co kula wewnętrzna:  $\frac{r_2}{d}$  bowiem jest zawsze większe od jedności. Tak np. pojemność kuli o promieniu równym promieniowi ziemskiemu, a więc mniej więcej 6000 km = =  $6 \cdot 10^8$  cm, równa jest w próżni 600  $\mu$ f. Tę samą prawie pojemność otrzymamy biorąc kondensator kulisty, którego zbroja wewnętrzna miałaby promień 7745 cm, zewnętrzna zaś o milimetr większy, — przy czym tak, jak poprzednio, zdolność elektryczna środowiska byłaby równa jedności. Kondensatory więc pozwalają gromadzić znaczne ilości elektryczności, nie podnosząc zbytnio potencjału ciał elektryzowanych. Tym się tłumaczy ich nazwa.

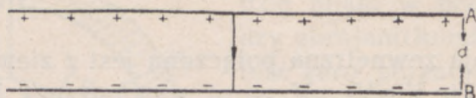
Gdy różnica  $r_1$  i  $r_2$  jest niewielka, możemy w liczniku wzoru (25) przyjąć  $r_1 = r_2$ . Mnożąc licznik i mianownik przez  $4\pi$  otrzymujemy wzór przybliżony

$$C = \frac{\varepsilon \cdot 4\pi r^2}{4\pi d} = \frac{\varepsilon \cdot S}{4\pi d}, \quad (25a)$$

gdzie  $S$  powierzchnia jednej ze zbroi kondensatora.



Częściej jednak, niż kondensatora kulistego, używa się kondensatora płaskiego. Zbrojami tego kondensatora są dwie płytki przewodzące, z których jedna połączona jest ze źródłem stałego potencjału.



rys. 133

Gdyby powierzchnie zbroi były nieograniczone, jedna z nich byłaby zasłoną elektryczną dla drugiej, gęstość elektryczna na każdej z nich miałaby wszędzie wartość tę samą, powierzchnie ekwipotencjalne w polach, wzbudzonych przez nabój każdej ze zbroi oddzielnie, byłyby płaszczyznami do zbroi równoległymi, wobec czego byłyby do zbroi równoległe i powierzchnie ekwipotencjalne pola wypadkowego. W tym przypadku przekrój strug indukcji prostopadłych do tych powierzchni miałby w każdym punkcie strugi wartość tę samą, tak że powierzchnie wyciętych przez nie na zbrojach elementów odpowiadających sobie, a stąd i wartości bezwzględne gęstości elektrycznych na obu zbrojach, byłyby wzajemnie równe.

Natężenie pola  $\vec{E}$  między zbrojami, mające wobec tego we wszystkich punktach pola tę samą wartość i ten sam kierunek, jest wypadkową natężeń  $\vec{E}_1$  i  $\vec{E}_2$ , które możemy obliczyć ze wzoru (17). Wziąwszy pod uwagę, że natężenia składowe mają kierunki zgodne, otrzymujemy

$$E = E_1 + E_2 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \quad (26)$$

Napięcie zatem jednej zbroi względem drugiej będzie równe

$$V = E \cdot d = \frac{4\pi\sigma \cdot d}{\epsilon} \quad (27)$$

gdzie  $d$  oznacza odległość między zbrojami.



Podstawiając

$$\sigma = \frac{e}{S},$$

gdzie  $e$  — nabój zbroi,  $S$  — jej powierzchnia, otrzymujemy

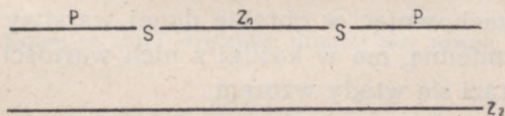
$$V = \frac{4\pi ed}{\varepsilon S}$$

i ostatecznie

$$C = \frac{e}{V} = \frac{\varepsilon \cdot S}{4\pi d}, \quad (28)$$

a więc wzór analogiczny do wzoru (25a).

W rzeczywistości jednak zbroje kondensatora nie są nieograniczenie rozciągle, wobec czego wywody, na których oparliśmy wyprowadzenie wzoru (28), dotyczą ściśle biorąc, jedynie środkowych ich części, dostatecznie odległych od krańców zbroi, w których pobliżu ani twierdzenie o równomiernej gęstości ani o prostoliniowym, prostopadłym do powierzchni zbroi przebiegu linii sił, nie obowiązują. Zakłócenia, zachodzące w tej części kondensatora, są tym mniejsze, im mniejsza jest odległość  $d$  między zbrojami. Dla ich uniknięcia zaopatruje się czasami wewnętrzną zbroję kondensatora w tzw. pierścień ochronny (W. Thomson, 1867 r.). Jest to



rys. 134

przewodząca płytką  $P$  (rys. 134), leżąca w tej samej płaszczyźnie, co zbroja  $Z_1$  i otaczająca ją ze wszystkich stron, naelektryzowana do tego samego, co ona, potencjału. Płytką tą oddzielona jest od zbroi wąską szczeliną  $S$ . W tych warunkach pojemność kondensatora jest proporcjonalna do powierzchni zbroi  $Z_1$ .



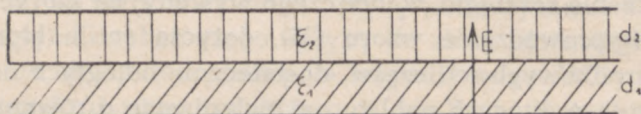
W przypadku kondensatora o zbrojach kołowych napięcie  $V$  wyraża się przy uwzględnieniu zakłócenia na krańcach wzorem przybliżonym

$$V = \frac{4\pi\sigma d}{\varepsilon} \left(1 - \frac{d}{2R}\right), \quad (27a)$$

gdzie  $R$  oznacza promień zbroi,  $d$  — odległość między zbrojami, małą w porównaniu z  $R$ .

Dokładniejszy wzór na pojemność takiego kondensatora dali Clausius (1852 r.) i Kirchoff (1877 r.).

Gdy przestrzeń między zbrojami wypełniona jest nie jednym, lecz dwoma różnymi dielektrykami, o zdolnościach elektrycznych  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ , tak że powierzchnia ich rozdziału jest równoległa do powierzchni zbroi (rys. 135), gęstość elektryczna



rys. 135

na zbrojach zachowuje tę samą wartość, co poprzednio w środowisku jednorodnym, jednostkowe strugi indukcji i tym razem równomiernie rozmieszczone w środowisku, zachowują ten sam przekrój na całej swojej długości, wartość bowiem wektora indukcji jest niezależna od wartości  $\varepsilon$ . Wobec tego napięcie pola, zachowując w obrębie danej warstwy dielektryku wartość niezmienną, ma w każdej z nich wartości różne. Napięcie  $V$  wyrazi się wtedy wzorem

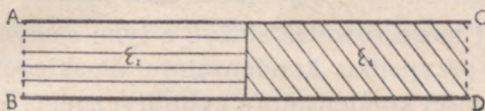
$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = 4\pi\sigma \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right), \quad (27b)$$

gdzie  $d_1$  i  $d_2$  oznaczają grubości warstw dielektryków. Stąd po podstawieniu  $\sigma = \frac{e}{S}$  otrzymujemy

$$C = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{4\pi(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2)}. \quad (28a)$$



Inaczej sprawa się przedstawia, gdy powierzchnia rozdziału dielektryków jest prostopadła do powierzchni zbroy (rys. 136). Natężenie pola musi mieć w tym przypadku w obu dielektrykach wartość tę samą, inaczej praca wykonana przy przeniesieniu jednostki naboju dodatniego wzdłuż drogi  $AB$  nie byłaby równa pracy wzdłuż drogi  $CD$ ,



rys. 136

wobec czego na różnicę potencjałów zbroy  $BD$  i  $AC$  otrzymalibyśmy różne wartości, zależnie od drogi, na jakiej ta różnica byłaby wyznaczona, co jest nie do pogodzenia z własnościami pola elektrostatycznego. Natężenie jednak tylko wtedy może mieć w obu dielektrykach tę samą wartość, gdy gęstość elektryczna na powierzchniach, graniczących z danymi dielektrykami, będzie proporcjonalna do ich zdolności elektrycznych

$$\sigma_1 \varepsilon_2 = \sigma_2 \varepsilon_1.$$

Rozmieszczenie zatem jednostkowych strug indukcji przestanie być równomierne: skupią się one bardziej w dielektryku o większej zdolności elektrycznej. Oznaczając przez  $e_1$  nabój na części zbroy o powierzchni  $S_1$ , graniczącej z dielektrykiem  $\varepsilon_1$ , przez  $e_2$  — na części o powierzchni  $S_2$ , graniczącej z  $\varepsilon_2$ , mamy

$$\sigma_1 = \frac{e_1}{S_1} \text{ i } \sigma_2 = \frac{e_2}{S_2}.$$

Napięcie jednej ze zbroy względem drugiej jest równe

$$V = E \cdot d = \frac{4\pi\sigma_1}{\varepsilon_1} \cdot d = \frac{4\pi\sigma_2}{\varepsilon_2} \cdot d.$$

Uwzględniając, że

$$\sigma_1 = \frac{e - e_2}{S_1} = \frac{e - \sigma_2 S_2}{S_1} = \frac{e - \frac{\sigma_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1} S_2}{S_1},$$

gdzie  $e$  — całkowity nabój zbroy, mamy

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1 e}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2},$$



wobec czego

$$V = \frac{4\pi e}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2} \cdot d$$

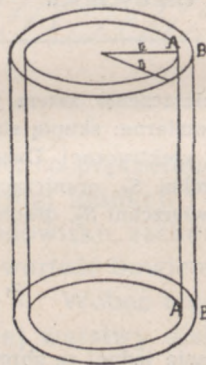
i ostatecznie

$$C = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{4\pi d} \quad (28b)$$

Wzór (28) może również służyć z tymi samymi ograniczeniami, co w przypadku kondensatora płaskiego, do wyznaczenia pojemności kondensatora cylindrycznego, w którym powierzchnie zbroi są współosiowymi powierzchniami cylindrycznymi. Do tego typu kondensatorów należy tzw. butelka lejdejska (rys. 137), której zbrojami są cienkie arkusze staliu, naklejone na wewnętrznej i zewnętrznej stronie szklanej butelki (Musschenbroek, 1745 r.).



rys. 137



rys. 138

Niech *AA* będzie zbroją wewnętrzną kondensatora, *BB* zbroją zewnętrzną. Oznaczmy podobnie, jak przy rozpatrywaniu pojemności drutu cylindrycznego (str. 223), przez  $e$  nabój, przypadający na jednostkę długości zbroi wewnętrznej. Natężenie pola w przestrzeni między zbrojami będzie wyznaczone całkowicie przez nabój zbroi wewnętrznej i zdolność elektryczną środowiska (por. str. 228), wobec czego zgodnie ze wzorem (22) ust. 6, mamy

$$E = \frac{2e}{\varepsilon r},$$

gdzie  $r$  — odległość danego punktu pola od osi kondensatora.



Napięcie  $V$  będzie więc równe

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{2e}{\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{2e}{\varepsilon} \lg \frac{r_2}{r_1}, \quad (29)$$

gdzie  $r_2$  — promień zboid zewnętrznej,  $r_1$  — wewnętrznej. Stąd pojemność kondensatora, odniesiona do jednostki długości,

$$C_1 = \frac{e}{V} = \frac{\varepsilon}{2 \lg \frac{r_2}{r_1}}. \quad (29a)$$

I ten wzór stosuje się, ściśle biorąc, do nieograniczenie długiego kondensatora. Jeżeli jednak długość kondensatora jest dostatecznie wielka w porównaniu z różnicą  $r_2 - r_1$ , błąd, jaki popełnimy, używając wzoru (29a) do wyznaczenia pojemności kondensatora o rozmiarach skończonych, jest wystarczająco mały, abyśmy mogli nie brać go w rachubę.

Przy bardzo małej różnicy promieni zboid wzór (29a) możemy zastąpić wzorem (28). Istotnie, podstawmy zamiast  $r_2$  sumę  $r_1 + \Delta r$  i napiszmy, że

$$\lg r_2 = \lg (r_1 + \Delta r) = \lg r_1 + \lg \left( 1 + \frac{\Delta r}{r_1} \right).$$

Rozkładając drugi z tych logarytmów w szereg otrzymujemy

$$\lg \left( 1 + \frac{\Delta r}{r_1} \right) = \frac{\Delta r}{r_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta r}{r_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta r}{r_1} \right)^3 \dots$$

Odrzucając wyższe potęgi  $\frac{\Delta r}{r_1}$ , znajdujemy po podstawieniu do wzoru (29a)

$$C_1 = \frac{\varepsilon}{2 (\lg r_2 - \lg r_1)} = \frac{\varepsilon}{2 \left( \lg r_1 + \frac{\Delta r}{r_1} - \lg r_1 \right)} = \frac{\varepsilon r_1}{2 \Delta r}.$$

Dla kondensatora zatem o długości 1 mamy po pomnożeniu licznika i mianownika przez  $2\pi$

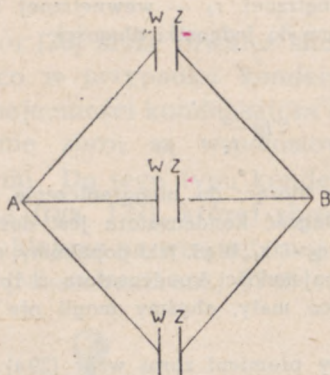
$$C = \frac{\varepsilon \cdot 2\pi r_1 \cdot l}{4\pi \cdot \Delta r} = \frac{\varepsilon \cdot S}{4\pi d},$$

gdzie  $S$  oznacza powierzchnię kondensatora,  $d$  — odległość zboid.

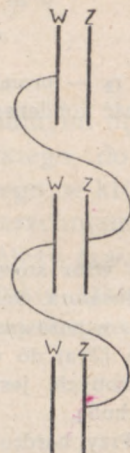
Często mamy do czynienia nie z pojedynczym kondensatorem, lecz z pewnym ich układem tzw. baterią konden-



satorów. Bateria taka powstaje przez połączenie przewodnikami oddzielnych kondensatorów. Połączenie może być trój-

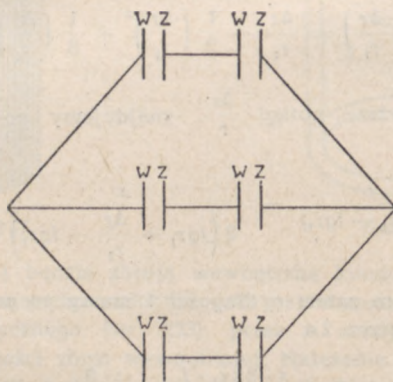


rys. 139a



rys. 139b

kiego rodzaju: albo łączymy wszystkie zbroje wewnętrzne i oddzielnie wszystkie zbroje zewnętrzne, tworząc tzw. połączenie równoległe (rys. 139a), albo zbroję wewnętrzną



rys. 139c

jednego kondensatora łączymy ze zbroją zewnętrzną drugiego, zbroję wewnętrzną drugiego ze zbroją zewnętrzną trzeciego itd. (rys. 139b), otrzymując tzw. połączenie w szereg



(kaskadowe) lub wreszcie biorąc po parę lub kilka kondensatorów połączonych w szereg i łącząc je równolegle (rys. 139c), połączenie mieszane. W przypadku pierwszym zbroje wewnętrzne  $W$  stanowią jeden przewodnik, naelektryzowany do tego samego potencjału  $V_A$ , podobnie wszystkie zbroje zewnętrzne mają ten sam potencjał  $V_B$ . We wszystkich więc kondensatorach napięcie jednej zbroi względem drugiej ma wartość tę samą, równą  $V = V_A - V_B$ . Oznaczając przez  $C_1, C_2 \dots C_n$  pojemności poszczególnych kondensatorów otrzymujemy na wartości nabożów wewnętrznych zbroi kondensatorów

$$e_1 = C_1 V; \quad e_2 = C_2 \cdot V \dots \quad e_n = C_n \cdot V,$$

stąd na sumę nabożów

$$e = \sum e_i = V \cdot \sum C_i .$$

Wobec czego pojemność baterii

$$C = \frac{e}{V} = \sum C_i . \quad (30)$$

Gdy pojemności kondensatorów są jednakowe

$$C = \sum C_i = n C_1, \quad (30a)$$

pojemność baterii złożonej z  $n$  jednakowych kondensatorów, jest  $n$  razy większa od pojemności pojedynczego kondensatora.

Przy połączeniu w szereg potencjały zewnętrznej i wewnętrznej zbroi połączonych ze sobą kondensatorów są jednakowe. Wprowadźmy na zbroję wewnętrzną pierwszego kondensatora nabój  $e$ . Jakakolwiek była uprzednio różnica potencjałów zbroi zewnętrznej i wewnętrznej, nabój ten wytworzy dodatkowe napięcie między zbrojami

$$V' = \frac{e}{C_1}$$

i wzbudzi przez indukcję na zbroi zewnętrznej pierwszego kondensatora równoważny nabój ujemny, na połączonej zaś z tą



zbroją zbroi wewnętrznej kondensatora drugiego równy nabój dodatni. Napięcie zbroi drugiego kondensatora, wytworzone przez ten nabój, będzie zatem równe

$$V'' = \frac{e}{C_2}.$$

Rozumując w ten sposób dalej, znajdziemy, że napięcie w kondensatorze  $n$ -tym będzie

$$V^{(n)} = \frac{e}{C_n}.$$

Napięcie zbroi wewnętrznej pierwszego kondensatora względem zbroi zewnętrznej kondensatora  $n$ -tego, wytworzone przez wprowadzenie do baterii naboju  $e$ , jest równe sumie napięć, wytworzonych w poszczególnych kondensatorach

$$V = V' + V'' + \dots + V^{(n)} = e \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) = e \sum \frac{1}{C_i},$$

skąd

$$C = \frac{e}{V} = \frac{1}{\sum \frac{1}{C_i}}. \quad (30b)$$

Gdy pojemności  $C_i$  są równe

$$V' = V'' = \dots = V^{(n)} = \frac{V}{n}; \quad C = \frac{e}{V} = \frac{C_1}{n}; \quad (30c)$$

pojemność baterii, złożonej z  $n$  jednakowych kondensatorów, jest  $n$  razy mniejsza od pojemności pojedynczego kondensatora.

Połączenia równoległego używa się zazwyczaj wtedy, gdy mamy do czynienia z bardzo wielkimi nabojami elektrycznymi, których wprowadzenie na zbroję wewnętrzną pojedynczego kondensatora wytworzyłoby tak wielkie napięcie względem zbroi zewnętrznej, że mogłoby spowodować rozbrojenie poprzez dielektryk między zbrojami. Połączenie w szereg stosuje się w przypadku pobierania elektryczności ze źródeł o bardzo wielkim napięciu względem ziemi. Wtedy, łącząc zbroję



zewnątrzną  $n$ -tego kondensatora z ziemią, zbroję zaś wewnętrzną kondensatora pierwszego z danym źródłem, otrzymujemy w każdym z kondensatorów napięcie  $n$  razy mniejsze od napięcia źródła.

Wreszcie w przypadku łączenia mieszanego, gdy łączymy w szereg  $n$  grup z  $m$  kondensatorów, połączonych równolegle, otrzymujemy na pojemność baterii

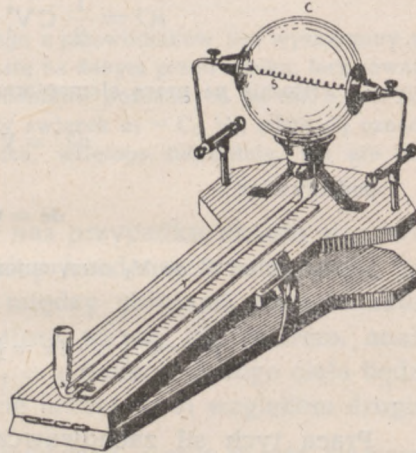
$$C = \frac{1}{\sum_{i=m}^{i=n} \frac{1}{C'_i + C''_i + \dots + C_i^{(m)}}}, \quad (30d)$$

co dla kondensatorów o pojemności jednakowej sprowadza się do wzoru

$$C = \frac{mC_1}{n} \quad (30e)$$

#### 8. — ENERGIA ELEKTRYCZNA. —

Połączmy zbroje kondensatora cienką spiralą platynową  $S$ , umieszczoną w naczyniu  $C$ , zawierającym powietrze (rys. 140). Zbroje w ten sposób połączone utworzą jeden przewodnik, wobec czego potencjały ich się wyrównają i napięcie jednej zbroi względem drugiej spadnie do zera. Temu wyrównywaniu się potencjałów towarzyszyć będzie wywiązywanie się energii cieplnej w spirali i ogrzanie powietrza w naczyniu  $C$ , czego dowodem będzie przesunięcie się pod wpływem wzrostu ciśnienia w naczyniu słupka cieczy w lekko nachylonej rurce  $r$ . Ciepło to powstaje kosztem energii elektrycznej kondensatora, którą możemy obliczyć na podstawie poprzednio ustalonych twierdzeń.



rys. 140



Założmy początkowo, że mamy do czynienia z pojedynczym przewodnikiem o pojemności  $C$ , który chcemy naelektryzować do potencjału  $V_1$ . Niech  $V$  oznacza chwilową wartość potencjału ciała; praca, wykonana przeciwko siłom pola przy przeniesieniu elementarnego naboju  $de$  z nieskończoności na powierzchnię przewodnika, wynosić będzie  $V \cdot de$ . W miarę przenoszenia coraz to nowych nabożów na powierzchnię przewodnika wzrastać będzie stopniowo jego potencjał od początkowej wartości zero do ostatecznej  $V_1$ . Ponieważ  $V$  jest w każdej chwili proporcjonalne do chwilowej wartości naboju na przewodniku, nie popełnimy błędu przyjmując, że suma prac elementarnych jest równa pracy, którą należałoby wykonać przenosząc ten sam nabój całkowity  $e$  na przewodnik o stałym potencjale  $\frac{1}{2} V_1$ , tak że mamy

$$W = \frac{1}{2} \int V_1 de = \frac{1}{2} V_1 \int de = \frac{1}{2} V_1 e \quad (31)$$

lub z uwagi, że  $e = CV$ ,

$$W = \frac{1}{2} CV_1^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}. \quad (31a)$$

Istotnie na pracę elementarną mamy wzór

$$dW = V \cdot de;$$

podstawiając

$$de = CdV$$

i całkując od 0 do  $V_1$  otrzymujemy

$$W = C \int_0^{V_1} V \cdot dV = \frac{1}{2} CV_1^2 = \frac{1}{2} V_1 \cdot e.$$

Praca tych sił zachowawczych równa jest zwiększeniu energii danego układu i wyznacza jego energię elektryczną. Możemy więc napisać

$$U = \frac{1}{2} V_1 e = \frac{1}{2} CV_1^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}. \quad (31b)$$



Mierząc nabój i potencjał w jednostkach elektrostatycznych, otrzymujemy energię elektryczną w ergach; mierząc nabój w kulombach, potencjał w woltach, otrzymujemy energię w dżulach. Stosunek bowiem jednostek, wyrażony wzorem ogólnym (p. tom I, str. 12), wynosi

$$\frac{|U|_1}{|U|} = \frac{|e|_1}{|e|} \cdot \frac{|V|_1}{|V|}$$

gdzie  $[U]_1$  oznacza jednostkę energii w układzie wolt - kulomb,  $[U]$  w układzie elektrostatycznym C. G. S. Podstawiając odpowiednie wartości znajdujemy

$$|U|_1 = 3,10^9 \cdot \frac{1}{300} |U| = 10^7 \text{ erg.}$$

Gdy mamy do czynienia z większą ilością naelektryzowanych przewodników, energia elektryczna układu wyrazi się sumą energii przewodników, poszczególnych

$$U = \frac{1}{2} V_1 e_1 + \frac{1}{2} V_2 e_2 + \frac{1}{2} V_3 e_3 + \dots + \frac{1}{2} V_n e_n. \quad (31c)$$

Wtedy jednak potencjał każdego z przewodników jest wyznaczony nie tylko przez nabój, znajdujący się na danym przewodniku, lecz również przez nabój i położenie przewodników pozostałych (p. ust. 6, str. 224), wobec czego tym razem prosty związek  $e_1 = C_1 V_1$ , gdzie  $C_1$  oznacza pojemność danego przewodnika, wziętego oddzielnie, już nie obowiązuje.

W rozpatrywanym przez nas przypadku układu stanowiącego kondensator, nabój, który kondensator otrzymuje, jest proporcjonalny do napięcia między zbrojami, energia zatem naelektryzowanego kondensatora wyrazi się wzorem, analogicznym do (31), w którym  $V_1$  — potencjał danego ciała będzie zastąpiony przez  $V$  — napięcie jednej zbroi względem drugiej.

Znając napięcie w kondensatorze i mierząc energię, wywiązaną przy jego rozbrajaniu, można ze wzoru (31 b) wyznaczyć jego pojemność. W ten właśnie sposób postępował Riess (1837 r.), używając do pomiaru energii przyrządu opisanego na początku niniejszego ustępu (tzw. termometru elektrycznego). Jakkolwiek pomiary te były, z samej natury rzeczy, dość niedokładne, pozwoliły



jednak po raz pierwszy potwierdzić słuszność wzorów (27) i (28), a zwłaszcza ustalić proporcjonalność między pojemnością kondensatora i powierzchnią jego zbroi.

Rozumowanie, które doprowadziło nas do wzoru na energię elektryczną kondensatora, oparte było na założeniu postawionym przez Coulomba, że zjawiska elektryczne mają swe źródło w nabożach, rozmieszczonych na powierzchni przewodnika. W myśl jednak teorii Faradaya-Maxwella możemy równie dobrze uważać pole, wytworzone przez naelektryzowane przewodniki, nie zaś same przewodniki, za siedlisko energii elektrycznej układu i zjawiska cieplne, powstające przy rozbrojeniu takiego układu, za spowodowane przez zanikanie tego pola. Wtedy jednak we wzorze na energię elektryczną wielkości, charakteryzujące stan elektryczny przewodnika, muszą być zastąpione przez wielkości, charakteryzujące pole elektryczne. Związki między tymi wielkościami, ustalone w ust. 4, pozwalają bez trudu dokonać takiego przekształcenia.

Przypuśćmy dla uniknięcia trudności rachunkowych, że rozpatrywany układ jest kondensatorem płaskim. Mamy wtedy (por. wzory 26 i 28)

$$e = \sigma \cdot S = \frac{\varepsilon \cdot E}{4\pi} \cdot S \quad \text{i} \quad C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

podstawiając te wartości do (31b), otrzymujemy

$$U = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 E^2 \cdot S^2 \cdot 4\pi d}{16\pi^2 \cdot \varepsilon S} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cdot S \cdot d = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} v = \frac{E \cdot D}{8\pi} \cdot v, \quad (31d)$$

gdzie  $v = S \cdot d$  jest objętością między zbrojami kondensatora.

W danym przypadku mamy do czynienia z polem jednostajnym, w którym wektory  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  mają we wszystkich punktach wartości te same, wobec czego na jednostkę objętości przypada gęstość energii

$$U_1 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi},$$

równa liczbowo wartości naprężenia strug indukcji, odniesionej do jednostki powierzchni (por. 18a).



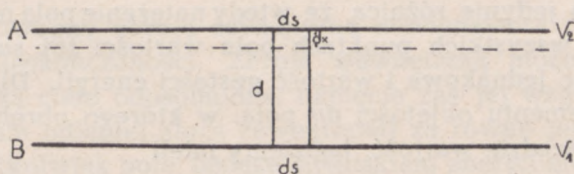
Wymiary  $U_1$  i  $p$  są wzajemnie równe. Istotnie

$$[U]_1 = \frac{[\text{energia}]}{[\text{objętość}]} = \frac{ML^2 \cdot T^{-2}}{L^3} = ML^{-1} T^{-2};$$

z drugiej zaś strony

$$[p] = [E^2] = ML^{-1} T^{-2}.$$

Do wzoru (31d) moglibyśmy dojść i na innej drodze. Wybierzmy sobie jedną ze strug indukcji, łączących odpowiadające sobie elementy zbroi przewodnika (rys. 141).



rys. 141

Naprężenie strugi równe  $p \cdot dS$ , gdzie  $dS$  — przekrój strugi, wynosi

$$p \cdot dS = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dS = \frac{E \cdot D}{8\pi} dS,$$

naprężenie więc całkowite między obu zbrojami równe jest

$$p \cdot S = \frac{E \cdot D}{8\pi} S.$$

Przypuśćmy, że pod działaniem tego naprężenia jedna ze zbroi kondensatora, np. zbroja A, przesunie się ku zbroi drugiej o  $dx$ . Praca sił pola, zużyta na to przesunięcie, będzie równa

$$dW = p \cdot S \cdot dx = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cdot S \cdot dx = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dv. \quad (a)$$

Praca ta jest wykonana kosztem energii elektrycznej układu, wzór (a) wyraża więc również zmniejszenie się tej energii na skutek przesunięcia. Odwrotnie, jeżeli wbrew siłom pola



będziemy zbroję  $A$  oddalali od zbroi  $B$ , energia układu będzie wzrastała. Dla danej odległości  $d$  zbroi energia ta równa jest pracy zewnętrznej, wykonanej przy odsunięciu zbroi  $A$  od bezpośredniego zetknięcia ze zbroją  $B$  na odległość  $d$ , a więc równa

$$U = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cdot Sd = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cdot v,$$

wartość bowiem natężenia jest niezależna od odległości między zbrojami.

Wnioski te dotyczyć będą również dowolnego kondensatora z tą jedynie różnicą, że wtedy natężenie pola nie będzie miało we wszystkich punktach pola wartości tej samej, nie będzie więc jednakowa i wartość gęstości energii. Dla bardzo małego elementu objętości  $dv$  pola, w którego obrębie  $E$  ma tę samą wszędzie wartość, będziemy mieli

$$dU = \frac{\varepsilon E^2 \cdot dv}{8\pi}. \quad (33)$$

Energię zaś pola zawartego między zbrojami kondensatora otrzymamy jako sumę energii jego elementów objętości.

Niech badany kondensator będzie np. kondensatorem kulistym. Odsunięcie zbroi zewnętrznej o  $dr$  wymaga pracy sił zewnętrznych

$$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = \frac{\varepsilon E^2}{2} r^2 dr,$$

gdzie  $E$  wartość natężenia pola na wewnętrznej powierzchni tej zbroi,  $r$  — jej promień wewnętrzny. Odsunięcie zatem z odległości  $r_1$  (promień zbroi wewnętrznej) od środka do odległości  $r_2$  wymaga pracy

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int_{r_1}^{r_2} E^2 \cdot r^2 \cdot dr.$$

Pracę tę, a więc równoważną jej energię pola między zbrojami, najłatwiej obliczyć kładąc

$$E = \frac{e}{\varepsilon r^2}.$$



Otrzymujemy wtedy

$$U = \frac{e^2}{2\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

lub z uwagi, że

$$V = \frac{e}{\epsilon} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

ostatecznie

$$U = \frac{1}{2} eV.$$

Odsuwajmy zbroję zewnętrzną kondensatora coraz dalej aż do nieskończoności. Zbroję wewnętrzną możemy wtedy uważać za ciało odosobnione, napięcie zaś jej względem nieskończenie odległej zbroi zewnętrznej za równe jej potencjałowi. Jakkolwiek pole, będące siedliskiem energii elektrycznej, sięgać będzie tym razem do nieskończoności, energia elektryczna zachowa wartość skończoną, gęstość bowiem energii nie będzie miała wartości stałej, lecz będzie bardzo szybko się zmniejszała w miarę oddalania się od ciała naelektryzowanego, suma więc energii poszczególnych elementów objętości dążyć będzie do wartości skończonej, równej tej, jaką byśmy otrzymali obliczając energię ciała naelektryzowanego ze wzoru (31b).

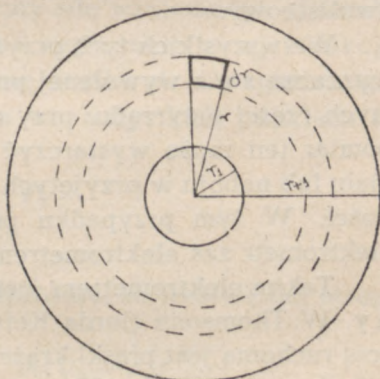
Niech ciałem naelektryzowanym będzie kula o promieniu  $r_1$  i naboju  $e$ . Energia elektryczna tego ciała jest równa

$$U = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\epsilon r_1}.$$

Energię części pola, zawartej między powierzchnią tej kuli i powierzchnią kuli współśrodkowej o promieniu równym  $r_1 + 1$ , otrzymujemy sumując energie

$$dU = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dv = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$$

elementów objętości, na jakie możemy podzielić daną część pola.



rys. 142



Podstawiając  $E = \frac{e}{\varepsilon r^2}$ , otrzymujemy na energię tej części pola

$$U_{r_1+1} = \frac{e^2}{2\varepsilon} \int_{r_1}^{r_1+1} \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2\varepsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1+1} \right) = \frac{e^2}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1(r_1+1)}$$

Stosunek tej energii do energii całkowitej wynosi

$$\frac{U_{r_1+1}}{U} = \frac{r_1}{r_1(r_1+1)} = \frac{1}{r_1+1}$$

Im mniejsze jest  $r_1$ , tym stosunek ten jest większy. Dla  $r_1 = 1$  cm, stosunek ten wynosi 0,5, dla  $r_1 = 0,1$  wynosi 0,9. Jeżeli więc naelektryzowana kula ma promień równy 0,1 cm, 0,9 energii pola zawarte jest w objętości ograniczonej z jednej strony przez powierzchnię tej kuli, z drugiej przez powierzchnię kuli opisaną promieniem 1,1 cm a więc w objętości mniej więcej  $6 \text{ cm}^3$ . Łatwo można sprawdzić, że energia zawarta w objętości, ograniczonej przez to samo ciało i kulę o promieniu 100,1 cm będzie wynosiła  $\frac{100}{100,1} = 0,999$  energii całkowitej pola.

#### 9. — PRZYRZĄDY DO MIERZENIA RÓŻNIC POTENCJAŁÓW I NABOJÓW. —

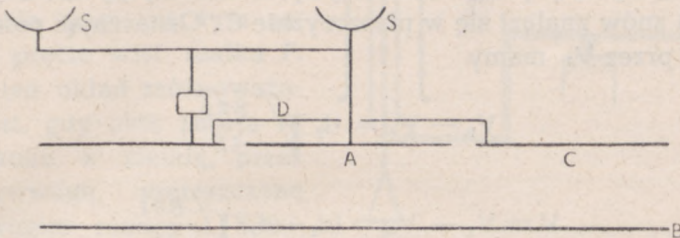
Związek, jaki istnieje między siłami, wywieranymi wzajemnie na siebie przez ciała naelektryzowane, i potencjałami czy też nabojami tych ciał, pozwala sprowadzić pomiar tych wielkości do pomiaru sił. Przyrządy, służące do tego celu, noszą nazwę *elektrometrów*, najprostszym ich typem jest wspominany już niejednokrotnie elektroskop jedno — lub dwulistkowy.

We wszystkich tych przyrządach wartość siły elektrycznej wyznacza się z wywołanej przez nią zmiany położenia ruchomych części przyrządu: przy odpowiedniej budowie przyrządu pomiar ten może wystarczyć do wyznaczenia różnicy potencjału lub naboju w przyjętych przez nas jednostkach tych wielkości. W tym przypadku pomiar nazywamy *bezwzględny*, elektrometr zaś *elektrometrem bezwzględny*.

Takim elektrometrem jest *elektrometr bezwzględny* W. Thomsona (lorda Kelvina); w elektrometrze tym częścią ruchomą jest płaski krążek przewodzący *A*, otoczony pierścieniem ochronnym *C* i tworzący z równoległą do niego płyt-



ką przewodzącą  $B$  kondensator płaski. Krążek ruchomy  $A$  jest utrzymywany w płaszczyźnie pierścienia ochronnego albo przez odpowiednie przykręcenie śruby, działającej na sprężyny, na których zawieszony jest krążek (jak w pierwotnym elektrometrze Thomsona) lub przez należyte obciążenie szalek wagi  $SS$ , na której krążek wisi (jak w elektrometrze Abrahama przedstawionym na rys. 143).



rys. 143

Od góry krążek osłonięty jest puszką ochronną  $D$ , połączoną metalicznie z  $C$ , wskutek czego nabój gromadzi się jedynie na dolnej jego powierzchni.

Dla wyznaczenia napięcia danego źródła elektryczności względem ziemi najczęściej używa się sposobu następującego.

Krążek  $A$  i pierścień ochronny  $C$  elektryzujemy do pewnego, dowolnego zresztą potencjału  $V_0$ , płytkę zaś  $B$  — do badanego potencjału  $V_1$  i mierzymy siłę wzajemnego działania płytek  $B$  i  $A$ . Siła ta jest równa naprężeniu strug indukcji, działającemu na całą powierzchnię krążka  $A$ . Uwzględniając, że natężenie pola ma tym razem we wszystkich punktach tę samą wartość

$$E = \frac{V_0 - V_1}{d_1},$$

gdzie  $d_1$  — odległość zbroi kondensatora, ze wzoru (18a) otrzymujemy

$$f = p \cdot S = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cdot S = \frac{\varepsilon (V_0 - V_1)^2}{8\pi d_1^2} \cdot S,$$



skąd

$$V_0 - V_1 = d_1 \sqrt{\frac{8\pi f}{\epsilon S}}. \quad (34a)$$

Siłę  $f$  wyznaczamy, obciążając przeciwległą do krążka  $A$  szalkę wagi  $S$  tak, aby krążek  $A$  pozostał w płaszczyźnie płaszcza ochronnego  $C$ .

Zachowując ten sam potencjał krążka i to samo obciążenie wagi łączymy płytke  $B$  z ziemią i przesuwamy ją tak, aby krążek  $A$  znów znalazł się w płaszczyźnie  $C$ . Oznaczając potencjał ziemi przez  $V_z$  mamy

$$V_0 - V_z = d_2 \sqrt{\frac{8\pi f}{\epsilon S}}, \quad (34b)$$

$$V = V_1 - V_z = (d_2 - d_1) \sqrt{\frac{8\pi f}{\epsilon S}}. \quad (34c)$$

Biorąc pod uwagę wpływ szczeliny między krążkiem  $A$  i pierścieniem  $C$  należy, według Maxwella, podstawić do wzorów (34) nie  $S' = \pi r_1^2$ , gdzie  $r_1$  promień krążka, lecz  $\frac{\pi}{2} (r_1^2 + r_2^2)$ , gdzie  $r_2$  — promień szczeliny.

Gdy chcemy osiągnąć dokładność 1%, musimy tak wykonać pomiar, aby odległość  $d_1 - d_2$  nie była mniejsza od 1 mm, siła zaś  $f$  — od 100 mgc czyli mniej więcej od 100 dyn. Na wartość napięcia w próżni otrzymujemy przy tych wartościach

$$V = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{8\pi \cdot 100}{S}} \text{ j. els. pot.}$$

kładąc  $S = 8\pi \doteq 25 \text{ cm}^2$ , będziemy mieli

$$V = 1 \text{ j. els. pot.} = 300 \text{ w.}$$

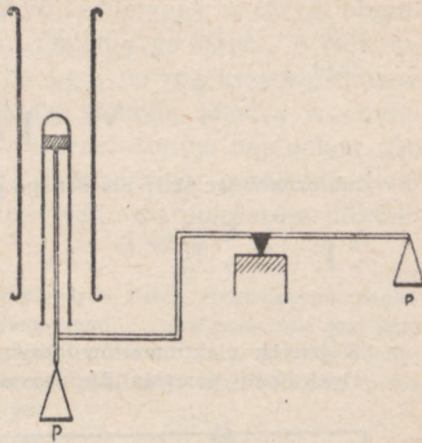
Jest to najmniejsze napięcie, jakie z tą dokładnością możemy wyznaczyć przy użyciu tego przyrządu.

Na podobnej zasadzie oparta jest budowa elektrometrów do wysokich napięć od 100000 w. (100 kilowoltów) do 300 woltów Abrahama i Villarda oraz Tschernyscheffa i Palmy.



Dogodniejszy w użyciu, lecz mniej czuły od elektrometru Thomsona jest elektrometr cylindryczny Bichata i Blondlota (1866 r.), odtworzony schematycznie na rys. 144. Wa-

lec wewnętrzny, stanowiący wewnętrzną zbroję kondensatora cylindrycznego, osadzony jest na pręcie pionowym, przytwierdzonym do ramienia wagi; na tym samym pręcie wisi szalka *P*. Cały ten układ zrównoważony jest, gdy obie zbroje są połączone z ziemią, przez przeciwwagę, umieszczoną na drugim ramieniu belki.



rys. 144

Jeżeli nie przerywając połączenia zbroi wewnętrznej z ziemią, połączymy zbroję zewnętrzną z badanym źródłem o potencjale  $V_1$ , działanie sił elektrycznych naruszy równowagę, tak że chcąc przywrócić położenie poprzednie trzeba będzie obciążyć szalkę dodatkowym ciężarem.

Pomijając zakłócenia na końcach walca możemy napisać, że pojemność jednostki długości kondensatora równa jest (p. wzór 29 a)

$$C_1 = \frac{\varepsilon}{2lg \frac{r_2}{r_1}},$$

gdzie  $r_2$  i  $r_1$  są promieniami zewnętrznej i wewnętrznej zbroi. Gdy zbroja wewnętrzna wsunie się pod działaniem sił elektrycznych głębiej o  $dx$ , pojemność zwiększy się o  $C_1 dx$ . Przy stałej wartości potencjałów zbroi wzrost energii elektrycznej wyniesie

$$dU = \frac{1}{2} (V_1 - V_2)^2 C_1 \cdot dx.$$

Wzrost ten równy jest pracy  $i \cdot dx$  sił elektrycznych, mamy więc

$$i \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon (V_1 - V_2)^2}{2lg \frac{r_2}{r_1}} \cdot dx.$$



Oznaczając napięcie względem ziemi przez  $V$  i masę odważnika, którym równoważymy siłę  $f$ , przez  $m$  otrzymujemy ostatecznie

$$mg = f = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon V^2}{2lg \frac{r_2}{r_1}},$$

skąd

$$V = 2 \sqrt{\frac{mg}{\varepsilon} lg \frac{r_2}{r_1}} \quad (35)$$

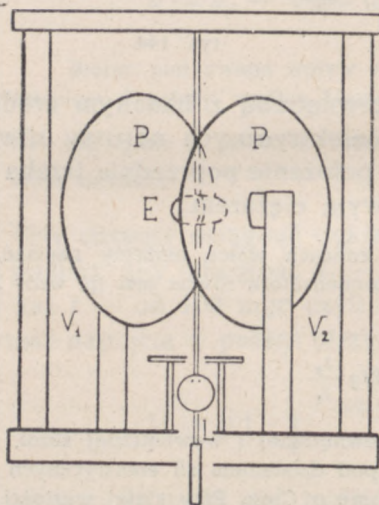
lub oznaczając stały dla danego przyrządu współczynnik

$$2 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} lg \frac{r_2}{r_1}} \text{ przez } k$$

$$V = k \sqrt{mg}.$$

Z innych elektrometrów bezwzględnych zasługuje na wymienienie elektrometr pomysłu Bjerknessa, ulepszony następnie przez Eberta

i Hoffmana (1898 r.). Dwie płytki kołowe  $P$  (rys. 145) są połączone z badanymi źródłami elektryczności o potencjach  $V_1, V_2$ ; między nimi zawieszony jest na dwu nitkach elipsoid aluminiowy  $E$ , którego większa oś tworzy w położeniu początkowym kąt  $45^\circ$  z kierunkiem linii sił pola. Do odczytania kąta, o jaki elipsoid odchylił się pod działaniem sił pola służy lustro  $L$  (por. tom I, str. 322). Związek między wartością sił, działających na elipsoid, i momentem kierującym sił zawieszenia i różnicą potencjałów płytek można obliczyć; wyznaczenie więc kąta skręcenia pozwala wyznaczyć napięcie w przyjętych przez nas jednostkach.



rys. 145

Częściej jednak od elektrometrów bezwzględnych są w użyciu elektrometry, w których współczynnik proporcjonalności między siłami elektrycznymi i napięciem wyznaczamy na drodze doświadczalnej, przy czym zależnie od budowy przyrządu współczynnik ten ma albo wartość dla wszystkich napięć stałą albo wartość dla różnych napięć różną.



W pierwszym przypadku przyrząd może służyć również do pomiarów bezwzględnych, gdy z pomiaru znanego napięcia wyznaczymy czynnik proporcjonalności — stałą przyrządu, — w drugim — musi być cechowany w całym obszarze napięć, do których pomiaru chcemy go użyć. Wynik takiego cechowania wyraża się na ogół pewną krzywą, odtwarzającą zależność, zazwyczaj bardzo złożoną, między wychYLENIEM ruchomej części przyrządu i przyłożonym napięciem. Do tego rodzaju przyrządów należą elektroskopy jedno lub dwulistkowe, które też rzadko są używane do pomiarów dokładniejszych.

Niech  $\alpha$  będzie kątem, o jaki odchylił się listek elektroskopu, naelektryzowany do napięcia  $V$  względem ziemi, z którą połączona jest jego osłona. Zakładając, że listek jest dostatecznie sztywny, możemy odchylenie to uważać za obrót koło osi poziomej, przechodzącej przez punkt  $O$ . Listek przestanie się odchylać, a więc kąt  $\alpha$  przybierze wartość stałą, gdy moment sił elektrycznych będzie zrównoważony przez moment sił ciężkości względem osi obrotu. Moment sił elektrycznych obliczamy ze zmiany energii elektrycznej, spowodowanej przez wzrost pojemności  $C$  na skutek przybliżania się listka do ścian osłony.

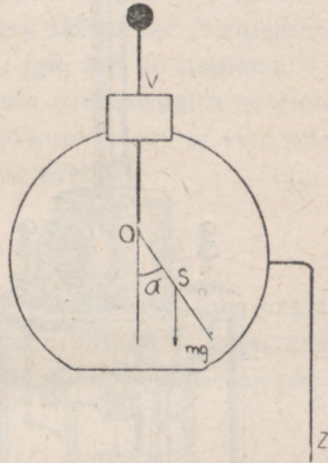
Zmiana ta jest dodatnia, praca bowiem sił elektrycznych jest wytwarzana nie kosztem energii układu, który tym razem nie jest odosobniony, lecz kosztem energii źródła, utrzymującego mimo wzrostu pojemności stale tę samą wartość napięcia  $V$ .

Oznaczając przez  $M$  moment sił elektrycznych, otrzymujemy na pracę elementarną, wykonaną przy odchyleniu o kąt  $d\alpha$

$$M d\alpha = \frac{1}{2} V^2 dC,$$

skąd

$$M = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{d\alpha}.$$



rys. 146



Niech  $m$  będzie masą listka,  $l$  — odległością jego środka ciężkości  $S$  od osi obrotu

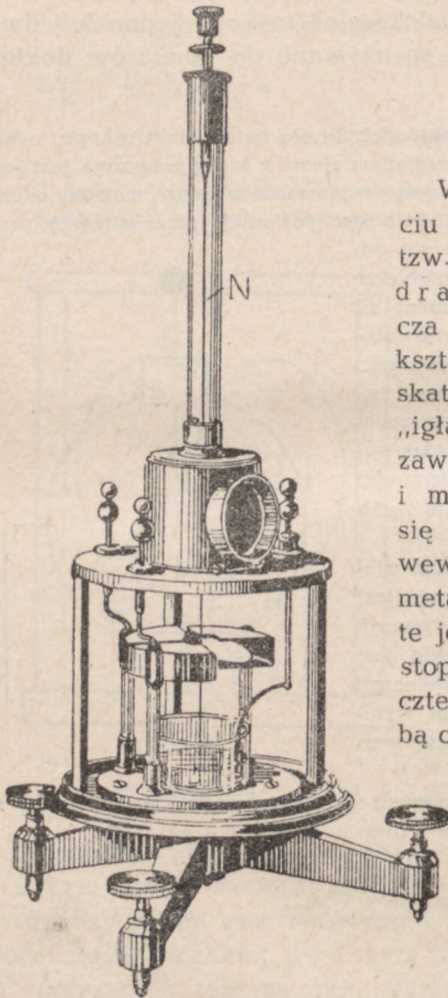
$$mgl \sin \alpha = M = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{d\alpha},$$

skąd

$$V^2 = \frac{2mgl \sin \alpha}{\frac{dC}{d\alpha}},$$

gdzie  $\frac{dC}{d\alpha}$  ma dla różnych wartości kąta  $\alpha$  wartości różne. Gdy  $\alpha$  zbliża się do  $90^\circ$ ,  $\frac{dC}{d\alpha}$  zbliża się do zera.

W powszechnym za to użyciu do pomiarów napięcia są tzw. elektrometry kwadrantowe, których zasadniczą część stanowi szczególnego kształtu, zbliżonego do lemniskaty, płytka przewodząca tzw. „igła” elektrometru (rys. 147b), zawieszona na nici  $N$  (rys. 147a) i mogąca swobodnie obracać się w płaszczyźnie poziomej wewnątrz płaskiego pudełka metalowego. Pudełko to rozcięte jest dwiema wzajemnie prostopadłymi płaszczyznami na cztery, nie stykające się ze sobą części — kwadranty (na rys.



rys. 147a



rys. 147b



147a jeden kwadrant jest usunięty). Cały ten układ umieszczony jest wewnątrz walca metalowego (nie odtworzonego na rysunku), połączonego z ziemią.

Pierwszy elektrometr kwadrantowy zbudował W. Thomson (lord Kelvin) później jednak budowa tego przyrządu była niejednokrotnie ulepszana. Ulepszenia te dotyczyły głównie zawieszenia igły, zmiany jej kształtu, tłumienia jej wahań oraz materiału nici. W niektórych elektrometrach, jak np. w jednym z typów, zbudowanych przez Dolezaleka (1918 r.), puszką, w której igła się waha, jest podzielona na dwie, nie na cztery części, igła składa się również z dwu części; w elektrometrze Hoffmanna (1917 r.), igła waha się nad podzieloną na dwie części płytką. Na rys. 147a odtworzony jest elektrometr Mascarta, przy czym dla pokazania wnętrza elektrometru usunięto, jak to już wspominaliśmy, cylindryczną puszkę mosiężną, ochraniającą dolną część przyrządu.

Połączmy metalicznie przeciwległe kwadranty i naelektryzujmy otrzymane w ten sposób pary do napięć (względem ziemi), równych odpowiednio  $V_1$  i  $V_2$ , igłę zaś do napięcia  $V$ .

Igła odchyła się wtedy od położenia równowagi o pewien kąt  $\alpha$ . Moment sił sprężystości nici, równoważący w tym nowym położeniu siły elektryczne, będzie równy

$$M = D \cdot \alpha$$

(por. tom I, str. 211). Z całkowitej powierzchni  $S$  igły część jej  $S_1$  znajdować się będzie między kwadrantami 1, część zaś  $S_2$  — między kwadrantami 2, przy czym, o ile pominiemy szerokość szczeliny

$$S_1 + S_2 = S = \text{stałej.} \quad (\text{a})$$

Pojemność układu, utworzonego z danej pary kwadrantów i znajdującej się między nimi części igły, można z pewnym, wystarczającym pospolicie przybliżeniem przyjąć za proporcjonalną do wartości powierzchni igły, znajdującej się między kwadrantami, tak że będziemy mieli

$$C_1 = BS_1 \quad \text{i} \quad C_2 = B \cdot S_2.$$



Łączna zatem energia elektryczna obu układów wyniesie

$$U = \frac{1}{2} C_1 (V_1 - V)^2 + \frac{1}{2} C_2 (V_2 - V)^2 = \\ = \frac{1}{2} B [(V_1 - V)^2 S_1 + (V_2 - V)^2 S_2].$$

Przypuśćmy teraz, że kąt skręcenia igły wzrasta o  $d\alpha$ , co wymaga wykonania pracy przeciwko siłom sprężystości, równej

$$Md\alpha = D\alpha \cdot d\alpha.$$

Na skutek tego skręcenia zmienia się również wartość powierzchni  $S_1$  i  $S_2$  o  $dS_1$  i  $dS_2$ , zmieni się więc odpowiednio i energia elektryczna układu o

$$dU = \frac{1}{2} B [(V_1 - V)^2 dS_1 + (V_2 - V)^2 dS_2].$$

Ze wzoru (a) mamy

$$dS_1 + dS_2 = 0 \quad \text{lub} \quad dS_1 = -dS_2,$$

wobec czego

$$dU = \frac{1}{2} B [(V_1 - V)^2 - (V_2 - V)^2] dS_1. \quad (b)$$

Ta zmiana energii równa jest, gdy pominiemy pracę przeciwko oporom biernym, pracy  $M \cdot d\alpha$ , otrzymujemy więc

$$Md\alpha = D\alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2} B [(V_1 - V)^2 - (V_2 - V)^2] dS_1.$$

Biorąc pod uwagę, że  $dS_1$  jest proporcjonalne do przyrostu kąta odchylenia, kładziemy  $dS_1 = Kd\alpha$ , wobec czego

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \frac{BK}{D} [(V_1 - V)^2 - (V_2 - V)^2] = \\ &= \frac{1}{2} A [(V_1 - V)^2 - (V_2 - V)^2]. \end{aligned} \quad (37)$$



Zależnie od wartości mierzonego napięcia używa się jednego z trzech następujących połączeń.

1. Łączymy igłę ze źródłem o napięciu  $V$ , znacznie większym od napięć  $V_1$  i  $V_2$ . We wzorze (37), który przepiszemy w postaci

$$\alpha = A (V_2 - V_1) \left( V - \frac{V_1 + V_2}{2} \right), \quad (37a)$$

można wtedy pominąć  $\frac{V_1 + V_2}{2}$  wobec  $V$ , tak że otrzymamy

$$\alpha = A (V_2 - V_1) V. \quad (37b)$$

Gdy więc dla danego napięcia igły  $V$  wyznaczmy stałą przyrządu  $A$  przy znanej różnicy potencjałów (lub napięć) kwadrantów, ze wzoru (37 b) możemy wyznaczyć i każdą inną różnicę potencjałów, o ile tylko napięcia  $V_1$  i  $V_2$  są znacznie mniejsze od napięcia  $V$ , którego dokładnej wartości wyznaczać nie potrzebujemy.

2. Gdy mamy do czynienia z ciałem o wysokim napięciu, wtedy łączymy je z igłą, kwadranty zaś elektryzujemy do napięć równych, lecz o przeciwnych znakach. Podstawiając do (37)  $V_1 = -V_2$ , mamy

$$\alpha = 2AV_1V. \quad (37c)$$

Te dwa sposoby łączenia często są nazywane połączeniami heterostatycznymi (gr. heteros — różny, inny), pomiar bowiem wymaga użycia oprócz ciał, których napięcie chcemy wyznaczyć, jeszcze ciała (lub ciał) o odpowiednio dobranym napięciu.

3. Inaczej jest przy tzw. połączeniu idiosztatycznym (gr. idios — własny), gdy jedną parę kwadrantów łączymy z ziemią, drugą zaś z igłą i badanym ciałem. Wtedy  $V_2 = V$ ,  $V_1 = 0$ , tak że

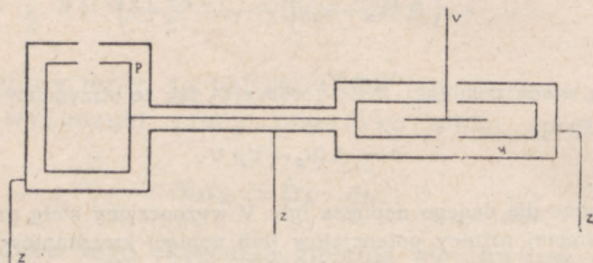
$$\alpha = \frac{1}{2} AV^2. \quad (37d)$$

Kierunek odchylenia igły nie zależy tym razem od znaku badanego napięcia, innymi słowy, od tego, czy różnica potencjałów badanego ciała i ziemi jest dodatnia czy ujemna. Tego rodzaju połączenie może więc służyć do pomiaru napięć przemiennych. Czulość jednak przyrządu, którym przy połączeniu heterostatycznym możemy mierzyć napięcia nie większe od  $10^{-5}$  wolta (elektrometr typu Dolezaleka, 1901 r.), w tym przypadku jest mniejsza.

Rozpatrywane wyżej przyrządy mogą służyć również do pomiaru naboju elektrycznego, jeżeli znamy pojemność elektryzowanej części przyrządu pomiarowego i połączonego z nią



przewodnika lub układu przewodników. Połączmy np. jedną z par kwadrantów elektrometru z puszką Faradaya  $P$  (rys. 148), zabezpieczając zarówno puszkę, jak i łączące ją z elektrometrem druty, zasłonami przewodzącymi, połączonymi z ziemią



rys. 148

tak, aby pojemność utworzonego w ten sposób układu można było uważać za stałą. Badany nabój, wprowadzony do puszkę, spowoduje, bez względu na to, jaki był początkowy potencjał układu, zmianę potencjału  $\Delta V$ , równą

$$\Delta V = \frac{e}{C} \quad (c)$$

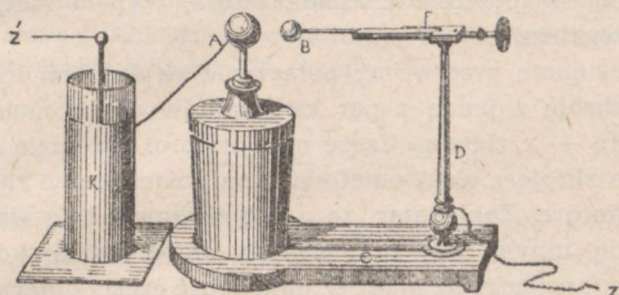
Wyznaczając tę zmianę z odchylenia igły elektrometru i znając  $C$  znajdujemy wartość naboju  $e$ .

Gdy pojemność  $C$  nie jest wielka (np. mniej więcej 100 cm), sposób ten pozwala wyznaczyć nabój rzędu jednej stutysięcznej jednostki elektrostatycznej naboju. Należy jednak zauważyć, że wzorem (c) możemy tylko wtedy się posługiwać, gdy zmiany pojemności układu, zachodzące na skutek zmiany położenia igły względem kwadrantów, są w porównaniu z pojemnością całego układu dostatecznie małe, aby mogły być bez znaczącego błędu pominięte. Warunek ten jest spełniony, gdy pojemność kwadrantów jest mała w porównaniu z pojemnością puszkę i gdy odchylenie, spowodowane przez zmianą potencjału  $\Delta V$ , jest małe. Z tego też względu jest niekiedy rzeczą korzystną używać do tego rodzaju pomiaru elektrometru listkowego o małej na ogół pojemności.

Z innych przyrządów, służących do pomiaru naboju elektrycznego wymienimy opisywaną już wyżej wagę skręceń, której udoskonaloną odmianą jest elektrometr Kohlrausha (1843 r.), oraz służącą do pomiarów względnych butelkę Lane'a (1767 r.). Jest to butelka lejdejska  $A$ ,



której zbroja zewnętrzna połączona jest ze słupkiem  $D$ , dźwigającym drążek  $F$ , zakończony kulką  $B$ . Odległość kulek  $A$  i  $B$  może być dokładnie regulowana przy pomocy śruby mikrometrycznej. Przyrząd ten używany jest najczęściej wtedy, gdy chodzi o zmierzenie znacznych stosunkowo nabożów, dostarczanych danemu ciału np. konden-



rys. 149

satorowi. Niech  $K$  będzie tym kondensatorem, elektryzowanym przez jakieś źródło elektryczności, z którym połączona jest jego zbroja wewnętrzna. Kondensator ten izolujemy i łączymy jego zbroję zewnętrzną, na której przez indukcję powstają naboże równoważne do naboju, wpływającego na zbroję wewnętrzną, ze zbroją wewnętrzną butelki Lane'a. Gdy nabój na tej zbroi dojdzie do pewnej wartości  $e_1$ , zależnej od pojemności butelki, wymiarów kulek  $A$  i  $B$  oraz ich wzajemnej odległości, między  $A$  i  $B$  przeskoczy iskra: butelka rozbroi się do ziemi, z którą połączona jest jej zbroja zewnętrzna. Utrzymując odległość  $AB$  niezmienną i licząc iskry, przeskakujące między kulkami, znajdujemy, ile razy nabój dostarczony kondensatorowi jest większy od naboju  $e_1$ .

#### 10. STAŁA DIELEKTRYCZNA. — POLARYZACJA DIELEKTRYCZNA.

Niewielka zmiana wyżej opisanych metod pomiarowych pozwala przy użyciu tych samych przyrządów porównać zdolności elektryczne środowisk, w których wzbudzone jest pole elektryczne.

Połączmy np., że opiszemy tu najprostszą metodę tego rodzaju pomiaru (Boltzmann, 1872 r.), jedną ze zbroi kondensatora płaskiego, którego druga zbroja odprowadzona jest do ziemi, ze źródłem stałego napięcia  $V$  (np. z biegunem baterii ogniów, której drugi biegun połączony jest z ziemią), wy-



znaczonego uprzednio przy pomocy elektrometru kwadrantowego. Nabój na zbroi kondensatora wyniesie

$$e = C_1 V, \quad (a)$$

gdzie  $C_1$  — pojemność kondensatora, wypełnionego danym dielektrykiem.

Następnie przerwijmy połączenie ze źródłem i połączmy daną zbroję z jedną z par kwadrantów elektrometru, drugą zaś parę — z ziemią. Część naboju zbroi przejdzie na druty, łączące zbroję z elektrometrem, i na połączoną ze zbroją parę kwadrantów. Zakładając, że nabój zachował swą wartość poprzednią, innymi słowy, że badany układ jest doskonale izolowany, i oznaczając przez  $C'$  pojemność części dołączonych do zbroi, otrzymujemy

$$e = (C_1 + C') V'. \quad (b)$$

Z porównania wzorów (a) i (b) wynika

$$\frac{C_1}{C'} = \frac{V'}{V - V'}. \quad (c)$$

Przerywamy połączenie z elektrometrem i zastępujemy dany dielektryk w kondensatorze innym; znów łączymy ze źródłem i po naelektryzowaniu kondensatora powtarzamy pomiar poprzedni. Mamy wtedy przed połączeniem z elektrometrem

$$e' = C_2 V,$$

po połączeniu zaś, w założeniu, że pojemność pary kwadrantów pozostała przy innym na ogół odchyleniu igły ta sama,

$$e' = (C_2 + C') V'', \quad (d)$$

skąd

$$\frac{C_2}{C'} = \frac{V''}{V - V''}.$$



Z porównania wzorów (c) i (d) otrzymujemy

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{V'}{V''} \cdot \frac{V - V''}{V - V'}$$

Jeżeli w obu przypadkach odległość między zbrojami pozostaje ta sama i dielektryki wypełniają całą przestrzeń między nimi, ze wzoru (28) str. 231 mamy

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (e)$$

Gdy zdolność elektryczną danego dielektryka porównujemy ze zdolnością elektryczną próżni, tak że  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ , stosunek

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = K \quad (38)$$

nazywamy stałą dielektryczną danego środowiska, w elektrostatycznym więc układzie jednostek, gdzie  $\epsilon_1 = 1$ , stała dielektryczna równa jest zdolności elektrycznej środowiska.

Ścisłe biorąc pojemność  $C'$  ma w obu pomiarach tę samą wartość tylko przy jednakowym odchyleniu igły, a więc gdy  $V' = V''$ . Można do tej równości doprowadzić zmieniając w drugim pomiarze odległość między zbrojami kondensatora. Niech w pomiarze pierwszym środowisko między zbrojami ma zdolność elektryczną  $\epsilon_0$  (próżnia), odległość zaś między zbrojami niech wynosi  $d_0$ , pojemność  $C_1$  jest wtedy równa (wzór 28)

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{4\pi d_0}$$

Zastąpmy próżnię badanym dielektrykiem i przyjmijmy, że nie wypełnia on całkowicie przestrzeni między zbrojami. Przy pewnej odległości  $d_1$  zbroi pojemność kondensatora  $C_2$  będzie równa pojemności poprzedniej  $C_1$ . Oznaczając przez  $d_2$  grubość warstwy dielektryka, otrzymamy

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 S}{4\pi [\epsilon_1 (d_1 - d_2) + \epsilon_0 d_2]} = C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{4\pi d_0}$$

skąd

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = K = \frac{d_2}{d_0 - d_1 + d_2} \quad (f)$$



lub, gdy dielektryk wypełnia całkowicie przestrzeń między zbrojami,  
gdy więc  $d_1 = d_2$

$$K = \frac{d_2}{d_0}$$

Tego rodzaju metody, użyte po raz pierwszy przez Faradaya (1838 r.), w których stałą dielektryczną wyznacza się ze zmian pojemności kondensatora, są często używanymi metodami pomiaru tej wielkości, pozwalają one bowiem osiągnąć większą dokładność, niż metody, oparte na wyznaczaniu zmian, jakich przy zmianie środowiska doznaje wzajemne działanie ciał naelektryzowanych.

Metody tego drugiego rodzaju w zastosowaniu do dielektryków stałych opracowali m. in. Boltzmann (1874 r.), który wyznaczał siłę, działającą na kulę dielektryczną, umieszczoną w polu elektrycznym i porównywał ją z siłą, która by w tych samych warunkach działała na kulę przewodzącą, oraz Lefèvre, (1892 r.), który mierzył siły, z jakimi działają wzajemnie na siebie naelektryzowane płytki, umieszczane kolejno w różnych środowiskach. Analogiczne metody mogą być używane i do pomiarów stałej dielektrycznej płynów (metoda Pérota, 1891 r., Quinckego, 1883 r.). Podobną metodą posługiwał się Tomaszewski, wyznaczając (1888 r.) zależność stałej dielektrycznej od chemicznej budowy ciał.

W dielektrykach doskonałych (o przewodnictwie elektrycznym znikomo małym (p. niżej) stała dielektryczna ma wartość niezależną od częstości zmian pola.

Tak np. cienka błonka celulozoidu przy częstości 4 zmian na sekundę ma  $K = 12$ , przy częstości 50 zmian na sekundę  $K = 8$ , przy częstości 20 zmian  $K = 7$  i wreszcie przy częstości wyższej od 100  $K = 6,56$ . Po wysuszeniu, gdy opór właściwy wzrośnie stokrotnie,  $K$  przybiera wartość 4,8, mniej więcej niezależną od częstości (Addenbroke, 1924 r.).

Inaczej jednak jest w dielektrykach niedoskonałych, z jakimi mamy zazwyczaj do czynienia; w nich stała dielektryczna jest funkcją okresu zmian pola. Zależność ta występuje wyraźnie w dielektrykach stałych i ciekłych, przy czym w miarę zmniejszania się  $T$  zmniejsza się również i stała dielektryczna.

Tak np. według Ferry'ego (1897 r.) stała dielektryczna  $K$  ma dla ebonitu przy  $T = 0,002$  sek wartość 2,55, przy  $T = 3 \cdot 10^{-8}$  sek już tylko 2,32; olej rycynowy ma dla tych samych wartości  $T$  stałą dielek-



tryczną równą odpowiednio 4,65 i 4,49; nafta — 2,05 i 1,99. Dla lodu w temperaturze  $0^{\circ}$  Dewar i Fleming znaleźli (1896 r.) przy  $T$  bardzo wielkim  $K = 78$ , przy  $T$  małym  $K$  mniej więcej równe 2.

W pomiarach, w których  $T$  ma wartości bardzo małe, posługiwano się zazwyczaj drganiami elektromagnetycznymi (p. rozdz. IX), wyznaczając albo zmianę okresu drgań, spowodowaną przez zmianę pojemności obwodu drgającego, albo prędkość rozchodzenia się drgań w danym środowisku lub wreszcie współczynnik załamania fal elektromagnetycznych w dielektrykach; w tym ostatnim przypadku  $K$  wyznacza się ze wzoru

$$K = n^2$$

(p. tom III, rozdz. IX, ust. 3).

Dla gazów pod ciśnieniem 1 Atm w temperaturze  $0^{\circ}$  pomiary Boltzmanna (1874 r.) i Tangla (1908 r.) dały następujące wartości  $K$

powietrze	1,000573
dwutlenek węgla	1,0000987
wodór	1,000273
tlenek węgla	1,00069

Podana wyżej za Tanglem wartość  $K$  powietrza jest nieco niższa od wartości, otrzymanych przez innych fizyków, a mianowicie 1,000594, otrzymanej (1927 r.) przez Carmana i Hubbarda, 1,000590 przez Boltzmanna (1875 r.) 1,000586 przez Klemenčica (1885 r.), 1,000585 przez Occhialiniego i Bodarena (1913 r.), 1,000585 przez Waibela (1923 r.). Mniejszą wartość  $K = 1,000540$  otrzymał Fritts (1924 r.), który poza tym dla wodoru znalazł  $K = 1,000263$ , dla tlenu 1,000507, dla azotu 1,000555. Według Michelsa (1932 r.)  $K$  azotu wynosi 1,000573.

Stałą dielektryczną ciekłego helu oraz ciekłego i stałego wodoru wyznaczali Wolfke i Kamerlingh Onnes (1925 r.), otrzymując dla ciekłego helu w temperaturze  $4,2^{\circ}K$ , pod ciśnieniem 763 mm rtęci  $K = 1,048$ , przy czym, jak to wykazały pomiary późniejsze (1928 r.), stała ta przechodzi przez maximum w temperaturze  $2,2^{\circ}K$ ; dla ciekłego wodoru w temperaturze  $20,33^{\circ}K$  pod ciśnieniem 58 mm rt  $K = 1,225$  i wreszcie dla stałego wodoru w temperaturze  $14^{\circ}K$  pod ciśnieniem 58 mm rt.  $K = 1,248$ . Pomiary stałej dielektrycznej wykonywali m. in. Doborzyński, (1930 r.), Piekara (1928 r.), Mazur (1930 r.) i Wolfke (1931 r.).



Wiśniewski wyprowadził (1926 r.) następującą zależność między stałą dielektryczną i budową drobinny gazu dwuatomowego.

$$K = 1 + 3 \sqrt{3} \cdot \pi \cdot N \cdot d^3,$$

gdzie  $d$  — odległość między atomami drobin,  $N$  — liczba drobin w  $\text{cm}^3$

W kryształach, nie należących do układu sześciennego, wartość  $K$  zależy również od kierunku pola względem osi kryształu.

W kwarcu np.  $K$  w kierunku równoległym do osi równe jest 4,55, w kierunku prostopadłym 4,49 (J. Curie, 1889 r.); w szmaragdzie zaś w kierunku równoległym do osi  $K = 6,24$  jest mniejsze od  $K = 7,58$  w kierunku do osi prostopadłym.

Zależność od temperatury niekiedy, jak np. w wodzie, szkle, parafinie, bardzo wyraźna, nie da się ująć w żadne reguły.

O wielkości zmian  $K$  wody niech świadczą następujące liczby: w temperaturze  $0^\circ\text{C}$   $K = 84,4$ , w temperaturze zaś  $75^\circ\text{C}$   $K = 62,9$  (Cuthbertson i Maass, 1930 r.).

Poza tym wartość stałej dielektrycznej zależna jest, w pewnych przypadkach, jak to wykazał Jeżewski (1928 i 1929 r.), od wartości pola magnetycznego, którego działaniu poddany jest dany dielektryk.

W jakichkolwiek jednak warunkach znajdowałyby się badany dielektryk, wartość jego stałej dielektrycznej jest zawsze większa od jedności, tak że dla wszystkich dielektryków nie wyłączając gazów mamy

$$\varepsilon > \varepsilon_0.$$

Siły zatem, z jakimi działają wzajemnie na siebie ciała naelektryzowane są w tych samych pozostałych warunkach największe wtedy, gdy ciała te znajdują się w próżni (por. ust. 2 str. 185).

Niech  $A$  będzie jedną ze zbroi kondensatora, stykającą się bezpośrednio z dielektrykiem o zdolności elektrycznej  $\varepsilon$  (rys. 150). Gdyby dielektryka nie było, natężenie pola między zbrojami byłoby równe (patrz wzór 26 str. 230).

$$E_0 = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (\text{a})$$



Wprowadzenie dielektryka zmniejsza natężenie do wartości

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}. \quad (b)$$

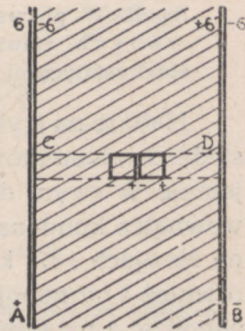
Tę samą wartość natężenia otrzymamy podstawiając do (a) na gęstość powierzchniową wartość

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \sigma = \frac{\sigma}{K}, \quad (c)$$

innymi słowy zakładając, że gęstość powierzchniowa zmniejszyła się o

$$\sigma' = \sigma - \sigma_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \sigma = \frac{K-1}{K} \sigma. \quad (40)$$

Przypiszmy to pozorne zmniejszenie się gęstości powstaniu na zwróconej ku zbroi  $A$  powierzchni dielektryka naboju znaku przeciwnego o gęstości  $\sigma'$ , wyznaczonej wzorem (40). Wtedy, z uwagi na to, że suma algebraiczna nabojów w układzie nie mogła ulec zmianie na skutek wprowadzenia do układu nienaelektryzowanego dielektryka, musimy przyjąć, że na powierzchni stykającej się ze zbroją  $B$ , powstał nabój o tej samej gęstości, lecz o znaku przeciwnym do  $\sigma'$  (rys. 150).



rys. 150

W miarę wzrostu stałej dielektrycznej  $\varepsilon_1$ , a co za tym idzie i  $E$ , maleje; natężenie pola wewnątrz dielektryka staje się coraz to mniejsze: gdy  $K$  dąży do  $\infty$ ,  $E$  dąży do zera,  $\sigma$  coraz mniej różni się od  $\sigma'$ . Zjawisko staje się coraz bardziej podobne do zjawiska indukcji elektrycznej. Z formalnego zatem punktu widzenia możnaby rozpatrywać przewodnik, jako dielektryk o nieskończenie wielkiej stałej dielektrycznej.

Przypuśćmy dalej, że tego rodzaju naboje powstają nie tylko na końcowych powierzchniach dielektryka, lecz na wszystkich prostopadłych do kierunku linii sił pola powierzchniach dowolnych elementów objętości, na jakie moglibyśmy



podzielić dielektryk, przy czym nabój ujemny powstaje na tej powierzchni elementu, przez którą linie sił wchodzi, nabój zaś dodatni na tej, przez którą wychodzą.

Wyobębniemy z dielektryka bardzo cienki walec  $CD$  o tworzących równoległych do kierunku sił pola i o podstawie równej  $dS$  i podzielmy go płaszczyznami równoległymi do zbroi kondensatora na elementy objętości  $dv = dS \cdot dl$ . Tego typu elementy elektrycznie nie obojętne, w których równoważne naboje przeciwnych znaków znajdują się w niewielkiej wzajemnej odległości, nazywane są często dipolami elektrycznymi (gr.  $di$  — dwa i  $polos$  — biegun).

Zależnie od rodzaju dielektryka działanie pola polega albo na przesuwaniu wewnątrz danego elementu dodatniej elektryczności w kierunku pola, ujemnej — w kierunku przeciwnym albo też na ustawianiu w kierunku zgodnym z kierunkiem pola już istniejących, bezładnie we wszystkich możliwych kierunkach rozmieszczonych dipoli. W pierwszym przypadku mówimy o dipolach indukowanych, zjawisko bowiem jest analogiczne do zjawiska indukcji elektrostatycznej, w drugim o dipolach naturalnych.

Naboje na stykających się ze sobą powierzchniach dwu sąsiednich elementów muszą być równoważne i znosić się wzajemnie w swym działaniu na zewnątrz, inaczej bowiem pole wewnątrz kondensatora byłoby zależne nie tylko od nabołów na zbrojach i na końcowych powierzchniach dielektryka, lecz również i od nabołów wewnątrz dielektryka, co nie dałoby się pogodzić z ustalonymi wyżej wzorami. Oznaczając więc przez  $de$  bezwzględną wartość naboju na prostopadłych do kierunku linii sił powierzchniach elementów i przez  $dS$  pola tych powierzchni, stwierdzamy, że gęstość elektryczna na tych powierzchniach  $\frac{de}{dS}$  równa jest gęstości  $\sigma'$  na krańcowych powierzchniach dielektryka.

Nazwijmy momentem elektrycznym danego elementu objętości wektor  $d\vec{M}$  o wartości równej

$$dM = de \cdot dl = \sigma' \cdot dS \cdot dl = \sigma' \cdot dv, \quad (41)$$

skierowany wzdłuż osi elementu od ujemnie do dodatnio naelektryzowanej jego powierzchni, polaryzacją zaś die-



lektryka wektor o tym samym kierunku, którego miarą jest moment elektryczny, przypadający na jednostkę objętości

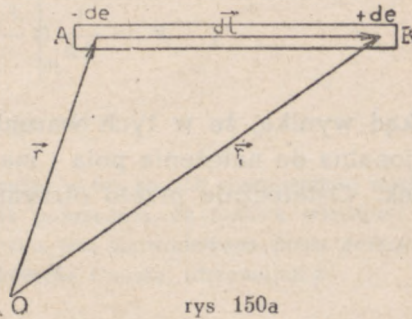
$$\vec{p} = \frac{d\vec{M}}{dv} \quad (42)$$

lub, po uwzględnieniu wzoru (41)

$$P = \frac{\sigma' dv}{dv} = \sigma' \quad (42a)$$

Polaryzacja danego elementu objętości jest więc liczbowo równa gęstości elektrycznej, wzbudzonej na prostopadłej do kierunku linii sił powierzchni danego elementu.

Niech  $AB$  będzie elementem objętości dielektryka. Momentem naboju elektrycznego  $de$  względem dowolnego punktu  $O$ , którym może być np. początek układu współrzędnych (rys. 150a), jest, zgodnie z podanym w tomie I, str. 62 określeniem, iloczyn naboju  $de$  przez odległość punktu, w którym nabój się znajduje, od punktu  $O$ , momentem zaś wypadkowym wszystkich nabołów, zawartych w danym elemencie, suma geometryczna momentów poszczególnych.



Mamy zatem

$$d\vec{M} = de \cdot \vec{r}_1 - de \cdot \vec{r} = de (\vec{r}_1 - \vec{r}) = de \cdot d\vec{l}.$$

Tę wielkość, niezależną od położenia punktu  $O$  i wyznaczoną przez wielkości, charakteryzujące stan elektryczny danego elementu, nazywamy jego momentem elektrycznym.

Podstawiając wartość  $\sigma$  ze wzoru (a) oraz uwzględniając, że  $\sigma_1 = \frac{\epsilon_0 E}{4\pi}$ , otrzymujemy ze wzoru (40)

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi} \epsilon_0 E_0 - \frac{1}{4\pi} \epsilon_0 E$$



lub z uwagi, że  $\varepsilon_0 E_0 = D$  i  $\sigma' = P$

$$P = \frac{1}{4\pi} (D - \varepsilon_0 E); \quad (42b)$$

polaryzacja jest zatem miarą różnicy między wartością istotną indukcji w przestrzeni między zbrojami kondensatora i wartością, jaką by miała indukcja, gdyby przy tym samym natężeniu pola przestrzeń między zbrojami była całkowicie próżna.

Uwzględniając że

$$D = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon E,$$

mamy

$$P = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon - \varepsilon_0) E = \gamma E, \quad (42c)$$

skąd wynika, że w tych warunkach polaryzacja jest proporcjonalna do natężenia pola i ma ten sam, co natężenie, kierunek. Ostatecznie przeto otrzymujemy

$$\vec{P} = \gamma \vec{E} \quad (42d)$$

gdzie  $\gamma$  jest tzw. przenikliwością (wrażliwością) elektryczną danego dielektryka.

Z określenia stałej dielektrycznej (wzór 38) wynika, że

$$\gamma = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi} = \frac{\varepsilon_0 (K - 1)}{4\pi},$$

lub kładąc  $\varepsilon_0 = 1$

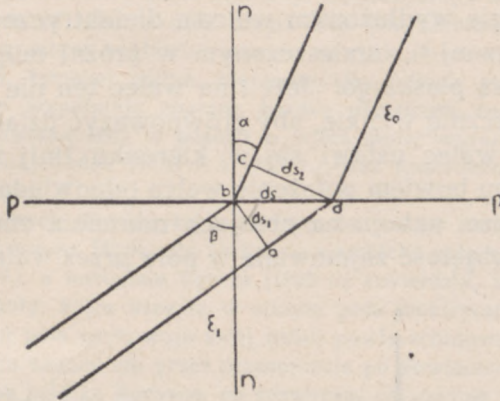
$$K = 1 + 4\pi\gamma.$$

W próżni  $\gamma$  jest, oczywiście, równa zero.

Twierdzenia te można uogólnić na przypadek, gdy linie sił nie są prostopadłe do powierzchni dielektryka. Niech np. linie sił, wcho-  
dzących z próżni do dielektryka, tworzą z normalną do jego po-



wierzchni w próżni kąt  $\alpha$ , w dielektryku kąt  $\beta$  (rys. 151), tym większy, im większa jest stała dielektryczna danego środowiska (por. ust. 6). Przetnijmy strugę indukcji, przechodzącą przez element  $dS$  powierzchni dielektryka, płaszczyznami, prostopadłymi do osi strugi w jednym



rys. 151

i drugim środowisku, otrzymując w ten sposób powierzchnię zamkniętą  $abcd$ . Zakładając tak, jak poprzednio, że różnica własności pola w jednym i drugim środowisku jest spowodowana przez polaryzację dielektryka, i stosując twierdzenie Gaussa, otrzymujemy

$$\epsilon_0 E_0 dS_2 - \epsilon_1 E_1 dS_1 = 4\pi\sigma' \cdot dS, \quad (d)$$

gdzie  $E_0$  i  $E_1$  oznaczają te wartości natężenia, jakie pole posiada istotnie w próżni i w badanym dielektryku. Z drugiej strony na podstawie twierdzenia o stałości strumienia indukcji możemy napisać

$$\epsilon_0 E_0 dS_2 = \epsilon_1 E_1 dS_1,$$

wobec czego równanie (d) przybiera kształt następujący

$$(\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1 dS_1 = 4\pi\sigma' \cdot dS$$

lub

$$(\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1 \cos\beta = 4\pi\sigma'.$$

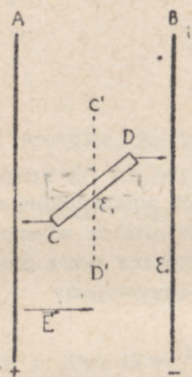
Uwzględniając wzór (42c) otrzymamy

$$4\pi P \cos\beta = 4\pi\sigma'$$

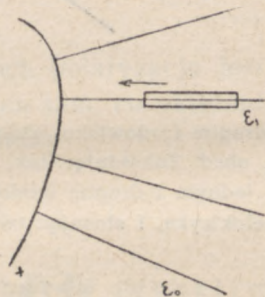


$$P \cos \beta = \sigma'. \quad (42d)$$

Polaryzacji dielektryka można również przypisać i działania mechaniczne, wywierane przez pole na dielektryk. Niech np.  $CD$  będzie wydłużonym walcem dielektrycznym o zdolności elektrycznej  $\epsilon_1$ , umieszczonym w próżni między zbrojami kondensatora płaskiego. Jeżeli na walec ten nie działają inne siły, dostatecznie wielkie, aby zrównoważyć działanie sił elektrycznych, walec ustawi się w kierunku linii sił pola (rys. 152),<sup>173</sup> takiemu bowiem położeniu walca odpowiadać będzie przy danej wartości naboju na zbrojach minimum energii, przypadającej na objętość zajmowaną w polu przez walec.



rys. 152



rys. 153

Gdy przestrzeń między zbrojami będzie wypełniona przez środowisko o zdolności elektrycznej  $\epsilon_1$ , większej od zdolności elektrycznej danego walca; walec ustawi się w położeniu  $C'D'$  (rys. 152).

W polu niejednostajnym siły działające na końcowe powierzchnie walca są niejednakowe; siłą większą jest tu zawsze siła przyciągająca do ciała, będącego źródłem pola, wobec czego walec będzie wciągany w pole w kierunku wzrastającego natężenia (rys. 153).

Lekkie ciała dielektryczne, nie podlegające żadnym innym znacznym siłom, poruszać się będą w takim polu wzdłuż linii sił. W ten właśnie sposób można odtworzyć przebieg linii sił w polu elektrycznym, jak to w pięknym doświadczeniu wykazał Modzelewski



(1929 r.). Dym, powstający przy przepuszczaniu amoniaku gazowego przez kwas solny, wdmuchiwany jest do pola elektrycznego, wzbudzonego przez dwa naprzeciwko siebie umieszczone ostrza, naelektryzowane do znacznej różnicy potencjałów (rzędu mniej więcej 200 000 woltów). Dym ten, będący zawiesiną koloidalną w gazie (tzw. aerosol), w polu elektrycznym kłaczkuje się (koaguluje) w postaci igieł, łączących się ze sobą w dość długie nici. Nici układają się wzdłuż linii sił i w miarę napływu coraz to nowych ilości dymu oddalają się od linii, łączącej ostrza, nie tracąc jednak swego kształtu i stopniowo wypełniają znaczną bardzo przestrzeń dookoła ostrzy. Podobne zjawiska, lecz w postaci o wiele mniej wyraźnej obserwowali wcześniej Lodge (1885 r. i 1925 r.) oraz Kohlschutter i Tuscher (1921 r.).

W pewnych dielektrykach polaryzacja, wbrew wnioskowi, wynikającym ze wzoru (42b), nie znika po usunięciu pola elektrycznego. Sato (1922 r.), a następnie Eguchi (1925 r.) stwierdzili, że mieszanina wosku i smoły, która krzepła w silnym polu elektrycznym, również po usunięciu pola zachowuje swój nabój powierzchniowy. Nabój tego nie można usunąć ani przez przesunięcie po powierzchni dielektryka płomienia palnika Bunsena, co zazwyczaj całkowicie wystarcza do pozabawienia ciała naboju powierzchniowego, ani przez obmywanie alkoholem lub kwasem ani nawet przez zeszkrobwanie nożem warstw powierzchniowych. Mamy tu do czynienia ze zjawiskiem analogicznym do zjawiska magnesowania trwałego (rozdz. IV, ust. 1): dipole elementarne, uporządkowane przez pole zewnętrzne, pozostają uporządkowane po usunięciu pola. Heaviside, który pierwszy stwierdził tę własność na krzepnącej smole, tą właśnie kierował się analogią, gdy ciała o trwałej polaryzacji nazwał *elektretami*. Z czasem jednak, jak to wykazał (1927 r.) Adams, polaryzacja ta się zmniejsza; zmniejszanie się jest tym szybsze, im wyższa jest temperatura.

Nadżanow znalazł (1938 r.), że dielektryki takie, jak siarka, których przewodnictwo elektryczne zmienia się przy ich oświetlaniu, zachowują w ciemności swoją polaryzację, gdy podczas znajdowania się w polu elektrycznym są silnie oświetlane. W odróżnieniu od wyżej opisanego typu elektretów, które Nadżanow nazywa *termoelektretami*, tego rodzaju elektrety oznacza nazwą *fotoelektretów*.

## II. — PRZEWODNICTWO DIELEKTRYKÓW. — POZOSTAŁOŚĆ DIELEKTRYCZNA.

Wszystko, o czym była mowa w ustępie poprzednim, dotyczy, ściśle biorąc, tylko dielektryków doskonałych, w rzeczywistości bowiem przebieg zjawisk jest w przeważającej ilości przypadków bardziej złożony. Wynika to przede wszyst-



kim stąd, że wbrew dotychczasowym naszym założeniom nabój na dielektryku wyjątkowo jedynie pozostaje umiejscowiony na elektryzowanym elemencie objętości, zazwyczaj stopniowo stan elektryzacji obejmuje wszystkie elementy objętości dielektryka.

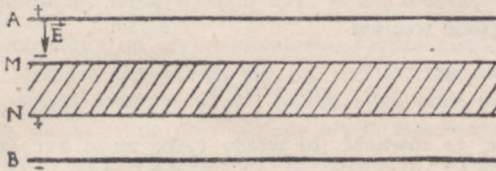
W przypadku dielektryka jednorodnego to przewodzenie elektryczności ujawnia się jedynie w stopniowym zmniejszaniu się naboju na naelektryzowanej zbroi odosobnionego kondensatora i, co za tym idzie, w stopniowym zmniejszaniu się napięcia między zbrojami. Zmniejszanie to jest prędsze lub wolniejsze zależnie od rodzaju dielektryka. Tak np. w kondensatorze, wypełnionym olejem rycynowym, nabój spada do połowy swej wartości początkowej w ciągu mniej więcej 0,35 sek, w wypełnionym wodą destylowaną w ciągu drobnego ułamka sekundy (rzędu jednej dziesięciomilionowej), w wypełnionym siarką (o temperaturze pokojowej) dopiero po upływie paru lub nawet kilku dni. Chcąc więc utrzymać stałość napięcia musimy dostarczać zbroi coraz to nowych nabojów, które wyrównują straty, wynikające z przewodzenia.

We wszystkich jednak tych przypadkach otrzymujemy przy rozbrojeniu kondensatora tę wartość naboju, jaka odpowiada przyłożonemu napięciu i pojemności kondensatora. Kondensator, raz rozbrojony, nie wykazuje już następnie (po przerwaniu połączenia między zbrojami) żadnej elektryzacji (Arons, 1888 r.).

Inaczej sprawa się przedstawia, gdy przestrzeń między zbrojami jest wypełniona różnymi dielektrykami, gdy np. między zbrojami kondensatora umieszczona jest warstwa stałego dielektryka, oddzielona od zbroi trudną do usunięcia warstwą powietrza. Wtedy jednorazowe rozbrojenie jedynie chwilowo wyrównywa potencjały obu zbroi: po upływie pewnego dłuższego lub krótszego czasu powstaje nowa różnica potencjałów, której istnienie możemy stwierdzić rozbrajając jeszcze raz kondensator. To zjawisko, znane pod nazwą pozostałości dielektrycznej, ma swe źródło, jak to wykazał Maxwell, w niejednorodności środowiska, powodującej tworzenie się warstw naelektryzowanych na powierzchniach, rozdzielających niejednorodne części środowiska.



Niech  $A, B$  będą zbrojami kondensatora,  $M, N$  — warstwami, odgraniczającymi dany dielektryk od powietrza, wypełniającego resztę przestrzeni między zbrojami (rys. 154). Na skutek przewodnictwa elektrycznego naboje dodatnie będą przesuwane w kierunku natężenia pola, naboje ujemne — w kierunku przeciwnym. Gdyby powietrze miało to samo prze-



rys. 154

wodnictwo, co dielektryk, ta sama ilość elektryczności przechodziłaby w danych warunkach przez każdy  $\text{cm}^2$  środowiska, prostopadły do kierunku linii sił, ponieważ jednak powietrze jest gorszym przewodnikiem, na powierzchniach dielektryka powstaje pewien nadmiar elektryczności: ujemnej na powierzchni  $M$ , dodatniej na powierzchni  $N$ . Te naboje dodatkowe swym działaniem indukcyjnym „wiążą” część naboju na zbrojach, tak że przy rozbrojeniu znika tylko część naboju, doprowadzonych przy elektryzowaniu do zbroi  $A$  i  $B$ . Gdy przez rozbrojenie znika różnica potencjałów, naboje na powierzchniach  $M$  i  $N$ , zwolnione od działania pola stopniowo na skutek przewodzenia dielektryka, zanikają, uwalniając „związane” naboje na zbrojach  $A$  i  $B$ , co powoduje powstanie nowej różnicy potencjałów zbroi, a więc i konieczność ponownego ich rozbrojenia, o ile chcemy kondensator doprowadzić do stanu elektrycznie obojętne. W podobny sposób można wyjaśnić pozostałość dielektryczną dielektryka, w którym sąsiadujące ze sobą elementy objętości posiadają różne przewodnictwa.

Weźmy za miarę przewodnictwa danego środowiska ilość elektryczności, przechodzącej przy natężeniu pola równym jednostce w ciągu 1 sek przez powierzchnię  $1 \text{ cm}^2$ , prostopadłą do kierunku linii sił, tak że będziemy mieli

$$k = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{E}. \quad (\text{a})$$



Powierzchnia rozdziału dwu dielektryków tylko wtedy nie będzie naelektryzowana, gdy naboje przyplływające do niej i odpływające z niej będą wzajemnie równe, gdy więc

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = k_1 E_1 = \frac{d\sigma_2}{dt} = k_2 E_2, \quad (b)$$

gdzie  $k_1, k_2$  oznaczają przewodnictwo stykających się dielektryków,  $E_1$  i  $E_2$  — natężenia pól w tych dielektrykach. Natężenia pól są, jak wiemy, związane wzorem

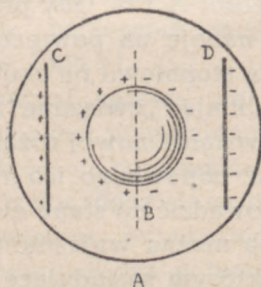
$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \quad (c)$$

skąd wynika, że równość (b) wtedy tylko może być spełniona, gdy

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (d)$$

Tworzeniem się takich warstw naelektryzowanych można wyjaśnić zaobserwowany przez Quincke'go (1896 r.) ruch obrotowy walca lub kuli nieprzewodzącej (np. parafinowej), umieszczonej w słabo przewodzącej cieczy (np. terpentynie), gdy ciecz i ciało znajdują się w silnym polu elektrycznym.

Niech  $A$  (rys. 155) będzie naczyniem szklanym, wypełnionym daną cieczą,  $B$  — badaną kulą dielektryczną, zawieszoną na nici,  $C$  i  $D$  — elektrodami, połączonymi ze źródłem wysokiego potencjału (np. z biegunami maszyny elektrostatycznej). Na skutek lepszego przewodnictwa cieczy naboje, przewodzone pod działaniem pola, zbierają się na powierzchni prawie nieprzewodzącej kuli, wobec czego powstają siły odpychające między elektrodami i odpowiednimi półkulami. W tych warunkach równowaga jest chwiejna, wystarczy drobne jej zakłócenie, aby kulę wprowadzić w ruch obrotowy, który trwać będzie dopóty, dopóki siły sprężystości nici nie zrównoważą działania sił elektrycznych (Heydwiller, 1897 r.).



rys. 155

Również w związku z przewodnictwem dielektryków znajduje się tzw. zjawisko Johnsen-Rahbeka (1921 r.).

Na zeszlifowanej powierzchni płyty półprzewodzącej  $A$  (np. agatowej), do której od spodu przyklejona jest warstwa staniolu, kładziemy płytę metalową  $M$ .  $M$  łączymy z ujemnym, warstwę zaś staniolu z dodatnim biegunem źródła o różnicy potencjału 220 w. Wtedy, płyty



A i M silnie się przyciągają. Według Bergmanna (1923 r.), siła przyciągania dochodzić może przy powierzchni płyt równej  $20 \text{ cm}^2$  w przypadku płyty gipsowej o temperaturze  $20^\circ \text{C}$  do 790 gc (napiecie przyłożone wynosi 200 voltów).

Zjawisko to, badane między innymi przez Rotgarta (1921 r.), Regenera (1923 r.) i Wąsika (1924 r.), można objaśnić w sposób następujący: Jakkolwiek gładkie byłyby stykające się powierzchnie A i M, zetknięcie między nimi, o ile tylko nie doloży się szczególnych starań przy ich zeszlifowaniu, zachodzić będzie w niewielu stosunkowo punktach; we wszystkich innych punktach płytka półprzewodząca będzie oddzielona od płytki metalowej bardzo cienką warstewką powietrza. Naboje, znajdujące się na powierzchni rozdziálu płyty A i tej warstewki wzbudzą w niej bardzo silne pole elektryczne i co za tym idzie, bardzo silne przyciąganie płytki metalowej M.

Elektrostrykcja. — Z rozważań ustępów poprzednich wynika, że zarówno dielektryk doskonały, którego przykładem może być tzw. parafina twarda, jak i dielektryki niedoskonałe, częściowo przewodzące, do których zaliczyć należy wszystkie prawie pozostałe izolatory, podlegają w polu elektrycznym działaniom mechanicznym, spowodowanym przez siły elektryczne, z jakimi działają wzajemnie na siebie naboje, czy to rozmieszczone na zbrojach kondensatora, czy też rozrzucone w elementach dielektryka. Badanie odkształceń, zachodzących w dielektryku na skutek tych działań, tzw. elektrostrykcji (łac. stringere — ścisnąć), która w butelce lejdejskiej ujawnia się w zwiększeniu pojemności butelki przy elektryzowaniu (Fontana, 1831 r.), nastęrcza tak duże trudności, że dziś jeszcze mimo wielu bardzo dokładnych badań, szczególnie Wüllnera i Wiena (1902 r.), zjawisko to bynajmniej nie jest wyjaśnione. Trudności wynikają stąd, że zmianę objętości dielektryka wyznaczają nie tylko, jak można byłoby przypuszczać, naprężenia i boczne ciśnienia w strugach indukcji, zależne, jak wiemy, od natężenia pola i zdolności elektrycznej środowiska, lecz również zmiana tej zdolności zachodząca na skutek zmiany działającego na dielektryk ciśnienia. Dwa te czynniki działają w kierunku przeciwnym.

## 12. — PIROELEKTRYCZNOŚĆ I PIEZOELEKTRYCZNOŚĆ.

W pewnych rodzajach dielektryków polaryzacja może ujawniać się nie tylko pod działaniem sił pola elektrycznego, lecz również i pod wpływem zmiany ich temperatury lub wywieranych na nie działań mechanicznych.

Tak np. kryształ turnalinu, ogrzewany możliwie jednostajnie, elektryzuje się na dwóch przeciwległych końcach (Daum, 1707 r.) elektrycznością znaków przeciwnych (Aepinus,



1762 r.). Naboje te powstają tylko podczas zmiany temperatury (Canton, 1759 r.); w temperaturze stałej, bez względu na jej wysokość, stopniowo zanikają: kryształ staje się elektrycznie obojętny. Przy ochładzaniu kryształ również się elektryzuje, przeciwnie jednak, niż poprzednio: na tym końcu, który przy ogrzewaniu elektryzował się dodatnio, wywiązuje się przy ochładzaniu elektryczność ujemna, na końcu zaś o naboju poprzednio ujemnym — dodatnia. Końce, na których wywiązują się naboje elektryczne, nazywamy biegunami osi elektrycznej kryształu. Gauguin, który dokładnie badał (1859 r.) to zjawisko piroelektryczności (gr. pyr — ogień), stwierdził, że wielkość naboju wywiązanego jest proporcjonalna do przekroju kryształu, niezależna zaś od jego długości i że tym samym zmianom temperatury bez względu na ich znak odpowiadają te same bezwzględne wartości wywiązanych nabojów. Według Riecke'go i Voigta (1892 r.), gęstość elektryczna, wywołana przez zmianę temperatury o  $1^{\circ}\text{C}$  wynosi około  $\pm 1,23$  j. el. naboju na  $\text{cm}^2$ .

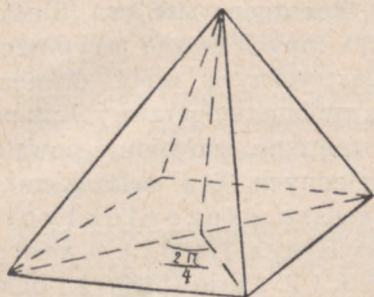
Wartość ta odnosi się do temperatur, leżących w pobliżu  $0^{\circ}\text{C}$ ; w temperaturach wyższych jest na ogół wyższa. Z obliczeń, opartych na danych, dostarczonych przez badania piezoelektryczności (p. niżej) otrzymuje się na gęstość wartość nieco większą.

Podobne własności wykazują i inne kryształy o budowie takiej, jak turmalin, np. topaz, kwarc; posiadają one jedną lub więcej osi biegunowych tzn. takich, na których końcach przeciwległych ściany kryształu nie są jednakowo ułożone.

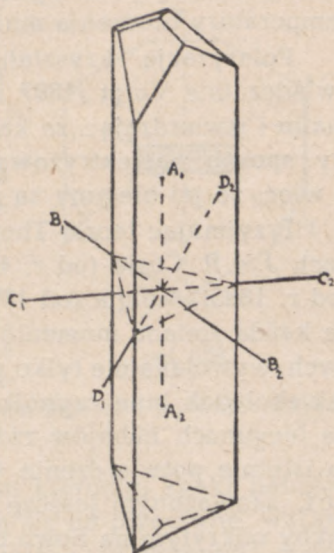
Nazwijmy osią symetrii (pierwszego rodzaju) ciała — prostą, przechodzącą przez ciało i posiadającą tę własność, że po obrocie ciała o kąt  $\frac{2\pi}{q}$ , gdzie  $q$  jest liczbą całkowitą, ciało widzimy tak samo, jak poprzednio. Zależnie od wartości liczby  $q$  rozróżniamy rząd symetrii osi, tak np. oś ostrosłupa o podstawie kwadratowej jest rzędu czwartego lub inaczej czterokrotna, wystarcza bowiem obrócić ciało o kąt  $\frac{2\pi}{4}$ , aby je zobaczyć w tej samej, co poprzednio, postaci. Gdy  $q$  równe jest nieskończoności, jak w przypadku walca, rząd osi równy jest nieskończoności; oś jest wtedy tzw. osią



izotropii. Oś biegunową (heteropolarną, gr. heteros — inny), mamy wtedy, gdy jak o tym była mowa wyżej, rozmieszczenie ścian ciała u obu jej końców nie jest identyczne. Przykładem osi biegunowej może być trzykrotna oś  $A_1 A_2$  ciała, przedstawionego na rys. 157 i odpowiadającego schematycznie kryształowi turmalinu. Biegunowość osi jest warunkiem koniecznym, aby naboje, wywiązane na przeciwległych biegunach były różnego znaku.



rys. 156



rys. 157

Zjawisko piroelektryczności można wyjaśnić przyjmując za W. Thomsonem (1878 r.), że kryształy piroelektryczne są ciałami stale spolaryzowanymi w kierunku równoległym do ich osi elektrycznej. Podobnie, jak przy polaryzacji wzbudzonej przez pole elektryczne, naboje dipolów wewnętrznych całkowicie się zobojętniają; działanie na zewnątrz wywierane jest wyłącznie przez naboje krańcowe, na biegunowych powierzchniach kryształu. Zazwyczaj jednak działanie indukcyjne tych nabołów wzbudza w cieniutkiej, słabo przewodzącej warstewce, tworzącej się na powierzchni kryształu, naboje znaku przeciwnego, stopniowo równoważące naboje biegunowe. Zmiana temperatury, powodująca zmianę wartości polaryzacji, narusza ustaloną w ten sposób równowagę, do której kryształ dochodzi po upływie tym dłuższego czasu, im mniej przewodząca jest warstwa, powstająca na powierzchni ciała. Tak np. Riecke stwierdził (1887 r.), że w atmosferze su-



czego, pozbawionego kurzu powietrza ogrzany, a następnie ostygający do temperatury otoczenia kryształ turmalinu wykazywał jeszcze po upływie 30 godzin ślady naboju, jakkolwiek już po upływie 1 godziny temperatura jego różniła się od temperatury otoczenia mniej, niż o  $1^{\circ}\text{C}$ .

Polaryzację kryształu piroelektrycznego wykazał doświadczalnie Voigt (1897 r.), rozłamując ochładzający się turmalin i stwierdzając, że każda z części kryształu jest w podobny sposób naelektryzowana, jak poprzednio cały kryształ, a więc, że jej bieguny są naelektryzowane przeciwnie.

Przyjmując teorię Thomsona, rozwiniętą następnie w pracach J. i P. Curie (od r. 1880), Roentgena (1883 r.), Rieckiego (od r. 1885), Voigta (od 1887 r.) i innych można przypuszczać, że każda zmiana momentów elektrycznych dipoli elementarnych, wywołana nie tylko przez zmianę temperatury, lecz przez jakiegokolwiek inne czynniki zewnętrzne, spowoduje powstanie na biegunach naboju różnoimiennych. Ten wniosek znajduje istotnie potwierdzenie w zjawisku piezoelektryczności, zauważonym jeszcze przez Hauy'a (1817 r.), a następnie jakby odkrytym na nowo przez J. i P. Curie (1880 r.) i polegającym na elektryzowaniu się biegunów turmalinu lub innych pokrewnych co do budowy kryształów przy zgniataniu ich lub rozciąganiu w kierunku jednej z osi elektrycznych. Naboję, powstające przy zgniataniu, rozmieszczone są w ten sam sposób, jak przy ostyganiu kryształu, powstające przy rozciąganiu — tak jak przy ogrzewaniu.

Ciałem najbardziej piezoelektrycznym jest jednak nie turmalin, lecz kwarc, posiadający trzy osie elektryczne, prostopadłe do osi głównej (optycznej), nie będącej osią biegunową a więc nie będącej również osią elektryczną.

Oś ta jest osią trzykrotną — homopolarną (gr. homoios — podobny).

Przetnijmy kryształ kwarcu płaszczyzną, prostopadłą do osi optycznej i niech *abcdef* (rys. 158) będzie otrzymanym w ten sposób przekrojem. Osiami elektrycznymi są proste *da*, *fc* i *be*.

Osie te są osiami dwukrotnymi.



Niech teraz  $ABCD$  będzie płytką równoległościenną, której dłuższe boki są prostopadłe do jednej z osi elektrycznych np. do  $ad$ . Przy zgniataniu płytki w kierunku tej osi na bokach  $AB$  i  $CD$  pojawiają się naboje przeciwnych znaków, których gęstość będzie równa

$$\sigma = \pm 6,45 \cdot 10^{-8} \cdot p, \quad (43a)$$

gdzie  $p$  jest mierzone w  $\text{dyn/cm}^2$

Wartość stałego współczynnika zmienia się nieco przy zmianie temperatury (Beckmann, 1922 r.).

I tym razem warunkiem koniecznym (ale niedostatecznym) jest heteropolarność osi kryształu. Kwarc, ogrzany do temperatury wyższej od  $580^{\circ}$ , traci nagle własności piezoelektryczne (Perrier, 1916 r.), wtedy bowiem jego osie podwójne stają się homopolarne.

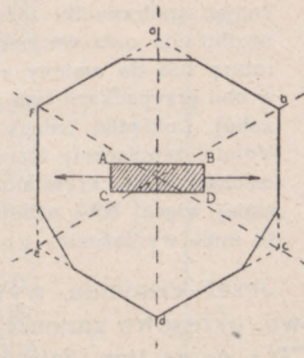
Przy rozciąganiu w tym samym kierunku znaki nabołów na powierzchniach  $AB$  i  $CD$  zmieniają się na przeciwne, wartość jednak bezwzględna gęstości odniesiona do jednostki ciśnienia pozostanie ta sama. W obu przypadkach mamy do czynienia z rozciąganiem i zgniataniem podłużnym.

Karcher sprawdził (1922 r.) wzór (43a) poddając kwarc wysokim ciśnieniom rzędu  $3800 \text{ kg/cm}^2$  i stwierdził, że aż do tych granic obowiązuje prawo proporcjonalności naboju do ciśnienia.

Gdy płytka jest zgniatana lub rozciągana w kierunku prostopadłym do osi elektrycznej (ale również i prostopadłym do osi optycznej) np. w kierunku, wskazanym na rysunku strzałkami, gdy więc podlega zgniataniu lub rozciąganiu poprzecznemu, na bokach  $AB$  i  $CD$  pojawiają się naboje, których wartość wyraża się wzorem, ustalonym przez P. Curie,

$$e = \pm 6,45 \cdot 10^{-8} \frac{l}{d} f, \quad (43b)$$

gdzie  $l$  — długość boków  $AB$  i  $CD$ ,  $d$  — ich wzajemna odległość,  $f$  — siła działająca na boki  $AC$  i  $CD$  (w dynach).



rys. 158



Voigt założył (1892 r.), że zmiana momentu elektrycznego zależy jedynie od odkształceń, jakich doznaje elementarny dipol, że więc tym samym wydłużeniom lub skróceniom kryształu, bez względu na to, czy wywołane one zostały przez zmianę temperatury czy też przez zmianę ciśnienia, odpowiada ta sama wartość wywiązanego naboju. Znając współczynniki rozszerzalności i współczynniki sprężystości przy wydłużaniu oraz wartości naboju, odniesione do  $1^0$  zmiany temperatury lub do zmiany ciśnienia o jednostkę, można sprawdzić, czy w obu przypadkach tym samym zmianom długości odpowiada ten sam nabój. Dokładne jednak pomiary, wykonane później (1898 r.) przez Voigta, zaprzeczyły temu założeniu: okazało się, że przy wydłużaniu mechanicznym kryształu wartość wywiązanego naboju równa była mniej więcej 80% naboju, wywiązanego przy ogrzewaniu, dającemu to samo wydłużenie.

Jeżeli ciśnienie, wywierane na płytkę, zmienia się okresowo, okresowo zmieniają się i naboje na powierzchniach  $AB$  i  $CD$  i, co za tym idzie, potencjały tych powierzchni. Gdy powierzchnie te posrebrzamy i połączymy drutem, w drucie płynąć będzie prąd zmieniający się okresowo. Odwrotnie, gdy powierzchnie te połączymy z biegunami źródła o zmiennej okresowo różnicy potencjałów lub, inaczej mówiąc, poddamy płytkę działaniu okresowo się zmieniającego pola elektrycznego, płytka podlegać będzie okresowym skróceniom i wydłużeniom. Dobierając odpowiednio częstość zmian pola do częstości drgań własnych płytki, można otrzymać silne drgania sprężyste płytki o częstościach, leżących poza granicami słyszenia (por. rozdz. I, str. 40 i rozdz. II, str. 75).

Podobnie kryształy piroelektryczne, umieszczone w polu elektrycznym, ogrzewają się lub ochładzają zależnie od kierunku pola. Własność tę (na turmalinie) stwierdził pierwszy Straubel, (1892 r.).

### 13. — POLE ELEKTRYCZNE ZIEMI.

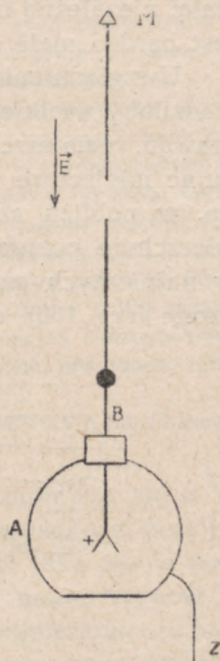
Już u schyłku XVIII wieku znany był dobrze fakt, że otaczająca ziemię atmosfera jest stale, nie tylko w czasie burzy siedliskiem zjawisk elektrycznych. Istnienie tego pola elektrycznego Ziemi można wykazać następującym prostym doświadczeniem.

Ustawmy na otwartej przestrzeni, możliwie daleko od nierówności gruntu, drzew lub budynków, elektroskop  $A$ , którego



osłona jest połączona z ziemią, listki zaś przed samym pomiarem odprowadzone są na chwilę do ziemi, i połączmy go pionowym drutem  $BM$  z ostrzem, umieszczonym w punkcie  $M$  (rys. 159). Okaze się, że listki się rozchyla, elektryzując się przy jasnym bezchmurnym niebie zawsze dodatnio, — i że rozchylenie ich będzie wzrastało w miarę zwiększania się różnicy wysokości między ostrzem i elektroskopem. Potencjał ostrza  $i$ , oczywiście, połączonych z nim listków, jest, jak wiemy, (p. ust. 6, str. 221), równy potencjałowi punktu  $M$  przestrzeni, rozchylenie więc listków wskazuje, że potencjał w tym punkcie nie jest równy potencjałowi Ziemi; jest on, jak to wynika ze znaku naboju indukowanego na listkach, większy od tego potencjału, natężenie zatem pola, którego istnienia dowodzi stwierdzona w ten sposób różnica potencjałów, jest skierowane na dół.

Gdyby powierzchnia Ziemi była kulista i pozbawiona całkowicie jakiejkolwiek nierówności, atmosfera zaś — doskonałym izolatorem, wyznaczenie natężenia w jednym punkcie pola na dowolnej wysokości wystarczyłoby do obliczenia natężenia w dowolnym punkcie otaczającej Ziemię przestrzeni. Powierzchnię bowiem Ziemi możemy bez znaczniejszego błędu uważać za powierzchnię przewodnika, a więc i za ekwipotencjalną, a to z uwagi na to, że tworzące ją ciała: gleba, skały, wody — są albo półprzewodnikami albo przewodnikami. Pole więc ziemskie byłoby polem, wzbudzonym przez naelektryzowaną kulę przewodzącą, zanurzoną w dielektryku o zdolności elektrycznej takiej, jak powietrze. Na wysokości  $h$  ponad powierzchnią Ziemi natężenie byłoby równe.



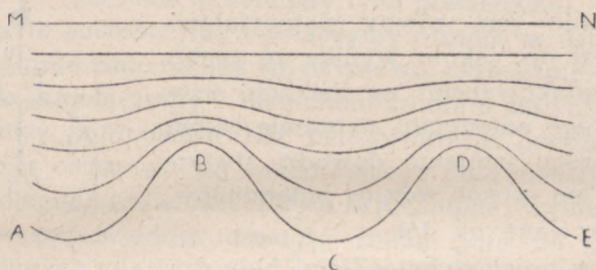
rys. 159

$$\vec{E} = - \frac{e_z}{\epsilon (R+h)^2} \vec{r}_1, \quad (a)$$



gdzie  $r_1$  jest wektorem jednostkowym, skierowanym od środka Ziemi na zewnątrz,  $e_z$  zaś bezwzględną wartością naboju Ziemi. W pobliżu Ziemi natężenie pola miałyby wtedy wartość prawie stałą, niezależną od wysokości ponad powierzchnią,  $h$  bowiem jest bardzo małe w porównaniu z promieniem Ziemi  $R$ .

Uwzględnienie nierówności powierzchni Ziemi nie wprowadziłoby wielkich zmian do tego obrazu. Zmieniają one, co prawda, rozmieszczenie powierzchni ekwipotencjalnych, powodując miejscowe zmiany wartości i kierunku natężenia. Tak np. w pobliżu szczytowych punktów wyniosłości  $B, D$  powierzchnie poziomu są zagęszczone, natężenie pola większe, w najniższych punktach zagłębień  $A, C, E$  — są one rozrzedzone (rys. 160); natężenie pola jest mniejsze, dochodząc cza-



rys. 160

sami do wartości zero w niewielkich zagłębieniach, otoczonych znacznie wyższymi wyniosłościami (np. na niewielkich podwórzach wysokich domów, na małych polankach w wysokopiennym lesie). Szczególnie jaskrawo zmiana natężenia ujawnia się w pobliżu oddzielnie wznoszących się na równinie nierówności (np. w pobliżu stromego pagórka lub samotnego drzewa na równinie, domu stojącego oddzielnie i nie otoczonego drzewami itp). Erdman stwierdził (1803 r.), że w tych warunkach natężenie pola może mieć kierunek poziomy, powierzchnie więc ekwipotencjalne układają się wtedy pionowo.

Te nieprawidłowości znikają jednak już przy niewielkim wzniesieniu się ponad daną wyniosłość. Na wysokości zatem mniej więcej 10 km ponad powierzchnią Ziemi (powyżej najwyższych gór) możnaby oczekiwać wartości natężenia, odpo-



wiadających wzorowi (a). Pomiaru jednak i w tych warunkach dają wyniki ze wzorem tym niezgodne.

W większości przypadków używa się metod pomiarowych, niewiele odbiegających od prostej metody, opisanej na początku tego ustępu i pozwalającej wyznaczyć przeciętny spad potencjału a więc przeciętne natężenie pola. Często jednak zastępuje się elektroskop przez elektrometr i ostrze, stanowiące w danym układzie tzw. sondę, przez inną sondę. Bywa nią albo tzw. elektroda kropłowa, użyta po raz pierwszy przez W. Thompsona (1884 r.), a następnie wielokrotnie udoskonalana (Conrad, 1907 r., Lutze, 1913 r.), w której strumień wody, wypływający przez boczny otwór w izolowanym od ziemi naczyniu metalowym, połączonym z elektroskopem, unosząc pierwotny jego nabój doprowadza naczynie do potencjału danego punktu pola; albo palący się płomieniem lont (Bennet, 1786 r.); który powoduje jonizację otaczającego powietrza, co zubożnia początkowy nabój przyrządu, albo wreszcie niewielka płytka metalowa, pokryta cienką warstewką ciała promieniotwórczego (Exner) np. polonem lub jodem lub, jak ostatnio radiotorem (Wigand i Kircher, 1927 r.).

Innych metod pomiarowych (np. Wilsona, 1916 r. lub Dallemanna, 1861 r.) omawiać nie będziemy.

Okazuje się bowiem, że natężenie zmniejsza się o wiele szybciej, niż to wynika ze wzoru (a): na wysokości mniej więcej 20 km wynosi zaledwie 0,01 wartości jaką ma w pobliżu powierzchni (Ildrac, 1926 r.), a która na morzu wynosi przeciętnie około 120 w/m (1,2 w/cm). To zmniejszanie się natężenia zachodzi tak, jak gdyby w otaczającej ziemi atmosferze rozsiane były naboje dodatnie (lub ściślej mówiąc nadwyżka naboju dodatnich nad ujemnymi), osłabiające działanie naboju ujemnego Ziemi. Takie objaśnienie znajduje całkowite uzasadnienie w doświadczeniach, pozwalających nie tylko stwierdzić istnienie takich naboju, lecz nawet wyznaczyć ich gęstość objętościową.

Z metod używanych do pomiaru elektrycznej gęstości objętościowej powietrza, wymienimy jedynie metodę W. Thomsona (lorda Kelvina). W danym obszarze pola ustawia się klatkę, zrobioną z siatki drucianej, i mierzy się przy pomocy sondy różnicę potencjału między środkowym punktem klatki i którymkolwiek punktem siatki. Gdy klatka ma kształt kulisty, gęstość objętościową można wyznaczyć ze wzoru

$$\rho = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{V}{r^2}$$

gdzie  $V$  — zmierzona różnica potencjału,  $r$  — promień klatki.



Gęstość objętościowa tego naboju zależy od wysokości, na jakiej znajduje się dana warstwa i na ogół ze wzrostem wysokości stopniowo się zmniejsza. Z podanej wyżej wartości natężenia na wysokości 20 km ponad powierzchnią ziemi wynika, że nabój, zawarty w tej warstwie prawie bez reszty równoważy nabój ujemny Ziemi, powyżej zatem 20 km gęstość naboju dodatniego niewiele różni się od zera.

Temu zmniejszaniu się gęstości towarzyszy gwałtowny na ogół wzrost przewodnictwa elektrycznego atmosfery. Według Wiganda (1921 r.) już na wysokości 3 km przewodnictwo jest pięciokrotnie, na wysokości 6 km — dziesięciokrotnie, na wysokości 9 km przeszło 16-krotnie większe, niż w bezpośrednim sąsiedztwie Ziemi. Na wysokości mniej więcej 80 km przewodnictwo osiąga wartość prawie tę samą, co wody rzecznej, warstwę więc atmosfery, znajdującą się na tej wysokości, można uważać za przewodzącą; nazywana jest ona zazwyczaj warstwą Heaviside'a.

Wnioski, dotyczące przewodnictwa wyższych warstw atmosfery, oparte są nie na pomiarach bezpośrednich, które, jak dotychczas, nie przekraczały wysokości kilkunastu kilometrów, lecz na rozważaniach, związanych czy to z rolą czynników, powodujących zmianę przewodnictwa gazu (czynniki jonizujące), czy też z rozchodzenia się w polu ziemskim zaburzeń elektromagnetycznych (fale elektromagnetyczne).

Warstwa ta i powierzchnia Ziemi tworzą zatem, jak gdyby dwie zbroje kondensatora kulistego, w którym przestrzeń między zbrojami wypełniona jest słabo przewodzącym dielektrykiem o wzrastającym w miarę oddalania się od powierzchni Ziemi przewodnictwie.

Przyjmując na wartość natężenia pola w pobliżu powierzchni Ziemi 120 w/m i biorąc promień Ziemi za równy  $6,3 \cdot 10^6$  m oraz kładąc  $\epsilon = 1$ , ze wzoru

$$E = \frac{e_z}{R^2}$$

otrzymujemy

$$1,2 \text{ w/cm} = 0,004 \frac{\text{j. els. pot.}}{\text{cm}} = \frac{e_z}{39,7 \cdot 10^{16}}$$



skąd na wartość bezwzględną naboju ziemi

$$e_z = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 39,7 \cdot 10^{16} = 158,8 \cdot 10^{13} \text{ j. elst. naboju} = \\ = 5,9 \cdot 10^5 \text{ kulombów.}$$

Układ w ten sposób utworzony nie jest układem odosobnionym. Zarówno przewodnictwo elektryczne atmosfery, jak i gęstość jej naboju dodatniego zależą od czynników zewnętrznych, wobec czego i natężenie pola, nawet w warunkach, które uważamy za normalne (a więc z wykluczeniem gwałtownych chwilowych zakłóceń, których w ogóle tu rozpatrywać nie będziemy) nie posiada wartości stałej, którą by można obliczyć, znając własności elektryczne atmosfery Ziemi oraz podaną wyżej wartość jej naboju.

Badając zmiany, jakich doznaje natężenie w ciągu tak długiego czasu i w tylu punktach Ziemi, aby nie dał się odczuwać wpływ miejscowych chwilowych zakłóceń, stwierdzamy istnienie dwojakiego rodzaju ich okresowości: okresowość roczną i okresowość dzienną.

Roczna wyraża się na półkuli północnej we wzroście natężenia, przypadającym na miesiące jesienne i zimowe (październik — marzec), a więc na miesiące, w ciągu których Ziemia się znajduje bliżej Słońca, i w zmniejszeniu poniżej przeciętnej w miesiącach wiosennych i letnich. Na oceanach, gdzie wartości natężenia nie zakłócają przypadkowe warunki miejscowe, obszerność tych zmian nie przekracza 18 w/m, natężenie zaś waha się koło podanej wyżej przeciętnej 120 w/m. Nad lądem stałym krzywa zmian (na półkuli północnej) posiada na ogół kształt ten sam, obszerność jednak wahań są znacznie większe, dochodząc nieraz, jak np. w Kew (Anglia,  $\varphi = 51,5^\circ$ ) do 75% wartości przeciętnej, a w Monachium nawet do 96%. Jednocześnie zmieniają się w zależności od miejsca pomiaru wartości przeciętne natężenia: od 317 w/m (Kew) do 73 w/m (Triest), a nawet i do 64 w/m (Davos).

W zmianach dziennych mamy również do czynienia z jednym maximum i jednym minimum. Wyraźną jednak prawidłowość można stwierdzić jedynie w punktach, leżących na powierzchni mórz lub oceanów: we wszystkich tych punktach



nateżenie pola osiąga maximum w tej samej chwili (około godziny 19 według czasu obserwatorium w Greenwich). Jest to, jak na to pierwszy zwrócił uwagę Mauchly (1926 r.), chwila przejścia Słońca przez płaszczyznę południka, na którym leży północny biegun magnetyczny Ziemi (p. rozdz. IV, ust. 5). W punktach, leżących na lądzie stałym, letnim miesiącom odpowiada okres półdniowy: krzywa dzienna zmian wykazuje dwa maxima i dwa minima.

Nateżenie pola, działając na rozsiiane w atmosferze naboje dodatnie, powoduje ich ruch ku Ziemi. Umieszczając w pobliżu powierzchni Ziemi odosobnioną płytkę przewodzącą, stwierdzamy, że nabój jej (dodatni) z biegiem czasu wzrasta. Stosunek wartości tego naboju do czasu, w ciągu którego gromadził się on na płycie, oraz do powierzchni płytki daje nam tzw. gęstość prądu pionowego. Gęstość ta jest na ogół niewielka; jak można wnioskować z nielicznych i niezbyt dokładnych pomiarów nie przekracza ona  $9 \cdot 10^{-7} \frac{j. els. nab.}{sek cm^2}$ , przy czym w zimie jest zazwyczaj większa, niż w lecie.

Ten to właśnie pionowy prąd, płynący przez środowisko o malejącym w kierunku powierzchni ziemi przewodnictwie powoduje gromadzenie się w pobliżu ziemi nadmiaru naboju dodatnich (por. ust. 11 str. 271).

Przyjmując na gęstość prądu przeciętną wartość około  $9 \cdot 10^{-7} \frac{j. els. nab.}{sek cm^2}$ , na promień Ziemi tak, jak poprzednio,  $6,3 \cdot 10^8$  cm znajdziemy, że cała powierzchnia Ziemi otrzymuje przeciętnie 1500 kulombów na sekundę. Mimo tego ciągłego dopływu elektryczności dodatniej nabój ujemny Ziemi zachowuje, o ile można sądzić, wartość stałą. Ta stałość naboju Ziemi nie znalazła, jak dotychczas, żadnego dostatecznie uzasadnionego wyjaśnienia.



## ROZDZIAŁ IV

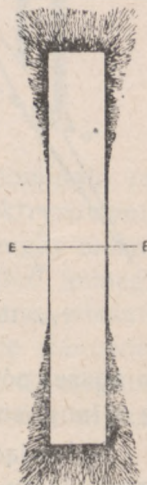
### POLE MAGNETYCZNE MAGNESÓW

#### 1. — PODSTAWOWE WŁASNOŚCI MAGNESÓW.

Działania, pod pewnymi względami analogiczne do działań ciał naelektryzowanych wywierają tzw. magnesy, posiadające własność przyciągania kawałków żelaza, niklu, kobaltu oraz pewnych stopów. Własność ta ujawnia się na niektórych zwłaszcza częściach powierzchni magnesu; części te, nazywane powierzchniami biegunowymi magnesu, można przez nadanie odpowiednio przygotowanemu magnesowi kształtu wydłużonej sztaby sprowadzić do dwu niewielkich stosunkowo obszarów, leżących na końcach sztaby, jak o tym można się przekonać, zanurzając tego rodzaju magnes do opiłek żelaznych i stwierdzając, że opiłki przyciągane są jedynie przez końcowe powierzchnie magnesu (rys. 161).

W tzw. magnesach naturalnych to znaczy kawałkach rudy żelaznej (magnetyt  $FeO - Fe_2O_3$ , piryt  $6 FeS - Fe_2S_3$ ), które bezpośrednio po wydobyciu z ziemi wykazują własności magnetyczne, powierzchnie biegunowe są zazwyczaj rozmieszczone nieprawidłowo. Jest to w istocie jedyna różnica między tymi magnesami i tzw. magnesami sztucznymi, jakie otrzymujemy poddając odpowiednio wybrane ciała (najczęściej stal) działaniom magnetycznym. To też podział na magnesy naturalne i sztuczne ma dzisiaj tylko historyczne znaczenie.

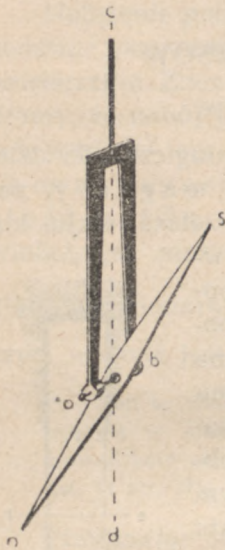
Powierzchnie biegunowe są wtedy przedzielone powierzchnią obojętną, nie wywierającą żadnego działania na zewnątrz.



rys. 161



Zmniejszając coraz bardziej przekrój magnesu, zmniejszamy zarazem i rozciągłość powierzchni biegunowych. W magnesach bardzo cienkich możemy z wystarczającym przybliżeniem uważać, że działanie magnetyczne wywierają jedynie końcowe punkty magnesu. Punkty te nazywamy biegunami magnesu. Zawieśmy tego rodzaju krótką i cienką sztabkę (igłę) magnetyczną tak, aby mogła swobodnie obracać się



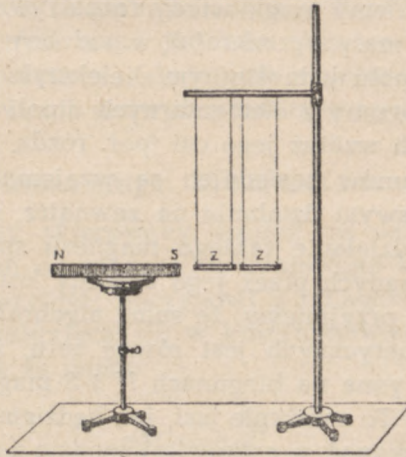
rys. 162

zarówno dookoła pionowej, jak i poziomej osi (rys. 162), umocowując np. poziomą oś (ab), przechodzącą przez środek masy igły, w ramce mosiężnej, zawieszanej na nici, koło której ramka z igłą mogłaby się obracać jak koło osi pionowej (cd), też przechodzącej przez środek masy igły. Obie osie są wtedy osiami swobodnymi (p. tom I, str. 138). Igła ustawi się w kierunku mniej więcej z południa na północ (p. ust. 4), przy czym zawsze ta sama powierzchnia biegunowa (lub biegun) igły będzie skierowana na północ (i jak na naszej półkuli nachylona ku dołowi), jakiegokolwiek byłoby początkowe położenie igły. Tę powierzchnię (lub ten biegun) nazywamy północną i oznaczamy literą *n* (ang. north — północ), przeciwną zaś, zwróconą zawsze ku południowi (i jak na naszej półkuli ku górze) południową i oznaczamy literą *s* (ang. south — południe).

Zbliżając ku sobie dwa zawieszony w ten sposób magnesy przekonamy się, że jednoimiennie końce magnesów odpychają się, różnoimiennie — przyciągają. Składając dwa magnesy tak, aby stykały się różnoimiennymi końcami, stwierdzimy, że będą one wywierały na zewnątrz działania słabsze, niż każdy z tych magnesów oddzielnie. I tu zatem tak, jak w zjawiskach elektrycznych, mamy do czynienia z dwoma rodzajami stanów magnetycznych, powodujących działania przeciwne. Stany te można, podobnie jak stan elektryzacji ciała, wzbudzać przez działania indukcyjne.

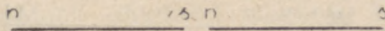


Zawieśmy poziomo na niciach dwie sztabki miękkiego żelaza ZiZ w odległości wzajemnej nie przekraczającej 2 mm. Gdy do sztabek przybliżymy silny magnes, tak, jak to wskazuje rys. 163, sztabki przybliżą się do siebie aż do zetknięcia. (Valentiner).



rys. 163

To działanie indukcyjne będzie jednak przypominało raczej zjawisko polaryzacji dielektryków, niż elektryzowania przewodników przez indukcję. Nie będzie bowiem nigdy można otrzymać tylko jednej powierzchni biegunowej (lub jednego bieguna). Jeżeli np. przełamiemy długą igłę, w ten właśnie sposób namagnesowaną, każda z jej części będzie stanowiła magnes o obu biegunach, leżących na tej samej osi, co bieguny igły nieprzełamanej (rys. 164). Tej biegunowości nie usunie



rys. 164

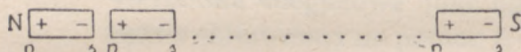
dalsze łamanie igły na części coraz to krótsze: każda z nich będzie zawsze posiadała dwa różnoimienne bieguny.

Przyjmijmy za Coulombem, że działania magnetyczne są wywierane przez masy magnetyczne i że masy te są tym większe, im działanie to jest większe, oraz że w przypadku bardzo



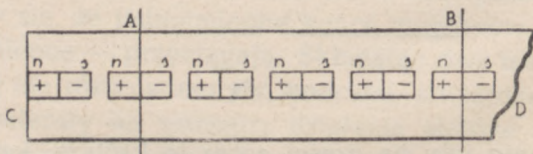
cienkich sztab magnetycznych masy te są skupione w biegunach magnesów, przy czym w biegunie północnym skupiona jest masa północna, którą uważać będziemy za dodatnią, w biegunie zaś południowym — masa południowa, którą uważamy za ujemną. Będziemy mogli wtedy rozpatrywać magnes liniowy (o znikomym małym przekroju), w podobny sposób, jak spolaryzowany w polu jednostajnym dielektryk, a więc przyjmując, że jest on utworzony z elementarnych dipoli magnetycznych, rozmieszczonych wzdłuż jego osi (por. rozdz. III, ust. 10).

Masy biegunów sąsiednich są wzajemnie równoważne, znosząc się w swym działaniu na zewnątrz, zgodnie bowiem z założeniem, działanie takiego magnesu sprowadza się do działań, wywieranych przez jego bieguny końcowe. Rozwijając tę analogię, przyjmujemy, że suma algebraiczna wszystkich tych mas magnetycznych jest równa zeru, że więc, innymi słowy, masy czynne na biegunach  $N$  i  $S$  magnesu wzajemnie się równoważą. To założenie jest, jak będziemy mieli możność później się przekonać, w całkowitej zgodzie z doświadczeniem.



rys. 165a

W sztabach magnetycznych o przekrojach większych działanie magnetyczne wywierane jest, jak wiemy, nie przez bieguny, lecz przez powierzchnie biegunowe; jeżeli więc chcemy utrzymać założenie poprzednie, musimy przyjąć, że masy magnetyczne dwu sąsiednich magnesów elementarnych nie całkowicie się równoważą; że więc  $m_i \neq m_{i-1}$ .



rys. 165b

Istotnie, przetnijmy powierzchnię biegunową  $CD$  płaszczyznami  $A$  i  $B$  (rys. 165 b), Masy magnesów elementarnych,



zawartych między tymi płaszczyznami, nie równoważą się wzajemnie, inaczej nie wywierałyby działania na zewnątrz, suma zatem algebraiczna ich mas nie jest równa zero. Suma jednak wszystkich mas elementarnych, zawartych w całym magnesie, jest i tym razem równa zero, w każdym bowiem magnesie elementarnym masa dodatnia równoważna jest ujemnej. Nadwyżka przeto mas dodatnich w północnej części magnesu jest równoważna nadwyżce mas ujemnych w jego części południowej.

Nazwijmy elementarnym momentem magnetycznym  $\vec{dM}$  wektor, skierowany wzdłuż osi danego elementu objętości magnesu od bieguna południowego ku północnemu i równy co do wartości iloczynowi z odległości między biegunami przez znajdującą się w którymkolwiek z nich masę magnetyczną, tak że mamy

$$\vec{dM} = q_i \vec{dl}. \quad (1)$$

Przez namagnesowanie lub stopień namagnesowania będziemy rozumieli wektor  $J$  równy co do kierunku i wartości momentowi magnetycznemu, odniesionemu do jednostki objętości.

$$\vec{J} = \frac{\vec{dM}}{dv}. \quad (2)$$

W przypadku, gdy jedynymi powierzchniami biegunowymi sztaby magnetycznej są jej powierzchnie końcowe, namagnesowane różnoimiennie, momenty elementarne mają we wszystkich elementach objętości magnesu tę samą wartość i ten sam kierunek, wobec czego i namagnesowanie  $\vec{J}$  ma we wszystkich punktach sztaby te same wartości i kierunki. Magnes jest wtedy namagnesowany jednostajnie. Oznaczając przez  $dS$  powierzchnie końcowe magnesów elementarnych, przez  $\sigma$  zaś tzw. gęstość magnetyczną powierzchnią tzn. wielkość, której miarą jest masa  $q$  odniesiona do jednostki powierzchni, otrzymujemy na moment magnetycz-



ny magnesu, równy sumie geometrycznej momentów elementarnych

$$\vec{M} = \int d\vec{M} = \int q_i d\vec{l} = \int \int \sigma \cdot dS \cdot d\vec{l},$$

skąd, wobec zgodności kierunków wszystkich magnesów elementarnych

$$\vec{M} = \vec{l} \int \sigma \cdot dS = (\sigma \cdot S \cdot \vec{l}) = q\vec{l} \quad (1a)$$

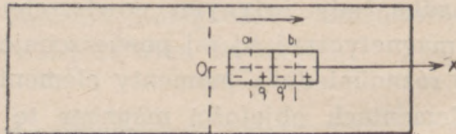
gdzie  $l$  jest długością osi sztaby, będącej w danym przypadku jej osią magnetyczną.

Namagnesowanie wyrazi się wtedy wzorem

$$J = \frac{dM}{dv} = \frac{\sigma \cdot dS \cdot dl}{dS \cdot dl} = \sigma. \quad (3)$$

Gdy powierzchniami biegunowymi są prócz końcowych jeszcze boczne powierzchnie sztaby, momenty elementarne i co za tym idzie namagnesowanie mają na ogół w różnych punktach sztaby różne wartości i kierunki.

Przypuśćmy, że namagnesowanie sztaby, zachowując wszędzie ten sam kierunek, zmniejsza się stopniowo od środka sztaby ku jej końcom — co, dodajmy, jest często spotykanym w praktyce przypadkiem.



rys. 166

Wyodrębnijmy dwa elementy objętości, bezpośrednio ze sobą sąsiadujące na osi  $Ox$  (rys. 166). Namagnesowanie elementu, leżącego bliżej środka magnesu, wynosi

$$J = \frac{q \cdot dx}{dS \cdot dx} = \frac{q}{dS}$$



namagnesowanie elementu leżącego dalej

$$J + dJ = \frac{q' dx}{dS \cdot dx} = \frac{q'}{dS},$$

skąd otrzymujemy

$$q = J \cdot dS \quad \text{i} \quad q' = (J + dJ) dS.$$

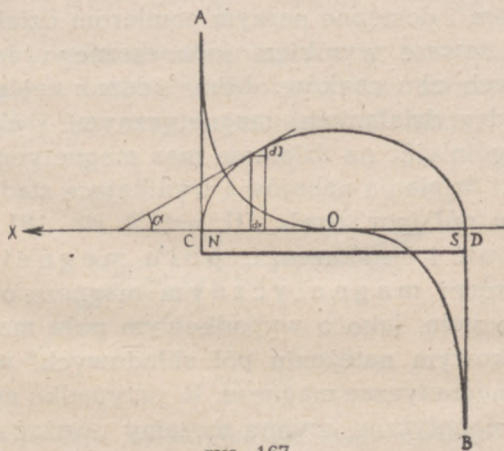
W elemencie objętości zawartym między przekrojami  $a$  i  $b$  suma algebraiczna mas magnetycznych jest równa.

$$q - q' = -dJ \cdot dS = -\frac{dJ}{dx} dx \cdot dS = -\frac{dJ}{dx} dv,$$

gdzie  $dv$  objętość danego elementu. Na gęstość zatem objętościową nadwyżki mas magnetycznych jednego znaku nad masami znaku przeciwnego otrzymujemy

$$\frac{q - q'}{dv} = \rho = -\frac{dJ}{dx}. \quad (4)$$

W rozpatrywanym przez nas przypadku namagnesowanie zmniejsza się ze wzrostem  $x$ , wobec czego  $\frac{dJ}{dx}$  jest ujemne,  $\rho$  więc jest dodatnie; w części  $ON$  magnesu istnieje nadwyżka magnetyzmu dodatniego.



rys. 167

Gdy znamy zależność namagnesowania od odległości, gdy np. wiemy, że wyraża się ona krzywą  $SN$  (rys. 167), wtedy możemy obliczyć  $\rho$  dla każdego przekroju magnesu. Gęstość bowiem jest, jak to wynika ze



wzoru (4), liczbowo równa wartości  $tg$  kąta, jaki styczna do krzywej tworzy z osią  $Ox$ . Odkładając wartości  $\rho$ , jako rzędne, otrzymamy krzywą typu  $AB$ . Pole  $ACO$  będzie wyrażało nadwyżkę magnetyzmu dodatniego w północnej części magnesu, pole  $BDO$  nadwyżkę magnetyzmu ujemnego w południowej części magnesu. Pola te muszą być równe, jak wynika z warunku, że suma algebraiczna wszystkich mas elementarnych magnesu równa jest zeru.

W przypadku, gdy kierunek namagnesowania nie jest zgodny z kierunkiem osi sztaby, wzory (3) i (4) przybierają kształt następujący

$$\sigma = J \cos(\vec{J}, \vec{n}), \quad (3a)$$

gdzie  $\sigma$  oznacza gęstość powierzchniową magnetyzmu na powierzchniach biegunowych,  $n$  — normalną do tych powierzchni, skierowaną na zewnątrz;

$$\rho = - \left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) = - \operatorname{div} \vec{J} \quad (4a)$$

(por. rozdz. III, ust. 4, str. 205).

## 2. — POLE MAGNETYCZNE MAGNESU.

Jak o tym wyżej już była mowa, różnoimienne i równoważne masy magnetyczne są zawsze ze sobą związane, obserwowane zatem i dostępne naszym pomiarom działanie magnetyczne jest zawsze wynikiem jednoczesnego działania mas magnetycznych obu znaków. Mimo jednak tej podstawowej różnicy między działaniami magnetycznymi i elektrycznymi możemy, uogólniając na działanie mas magnetycznych zasadę niezależności działania nabożów i wynikające stąd twierdzenie o dodawaniu pól (por. rozdz. III, ust. 2, str. 181 oraz ust. 3, str. 190), mówić i tym razem o polu magnetostatycznym lub krócej magnetycznym magnesu oraz o natężeniu tego pola, jako o wypadkowym polu magnetycznym oraz wypadkowym natężeniu pól składowych, wzbudzanych przez masy magnetyczne magnesu. W przypadku najprostszym, gdy masy magnetyczne czynne możemy uważać za skupione w biegunach magnesu, pole magnesu jest polem wypadkowym dwu pól, z których jedno wzbudzone jest przez masę magnetyczną dodatnią, drugie — przez równoważną masę magnetyczną ujemną.



Podobnie i siła, działająca na magnes, umieszczony w polu magnetycznym, jest wypadkową sił, działających na poszczególne masy magnetyczne magnesu. Oznaczając przez  $\vec{H}$  natężenie pola, przez  $q_i$  masę magnetyczną, poddaną jego działaniu, na wartość siły otrzymamy

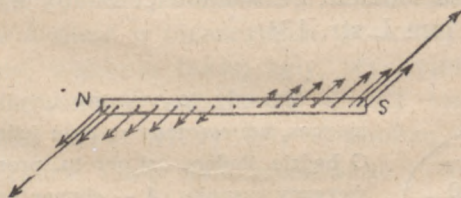
$$\vec{f} = \vec{H} \cdot q_i, \quad (5)$$

przy czym zależnie od znaku masy  $q_i$  siła  $\vec{f}$  będzie skierowana albo w tę samą stronę co  $\vec{H}$  albo w stronę przeciwną.

Założmy, że sztabę magnetyczną umieściliśmy w takim polu magnetycznym, które w obszarze przez sztabę zajmowanym można uważać za jednostajne. Jakikolwiek byłoby rozmieszczenie mas wewnątrz magnesu, namagnesowanego w kierunku osi sztaby, w północnej połowie magnesu przeważają zawsze masy magnetyczne dodatnie, w południowej ujemne. Siły zatem działające na północną część magnesu, wzajemnie równoległe, będą miały wypadkową

$$\vec{F} = \sum \vec{f} = \sum \vec{H} \cdot q_i = \vec{H} \sum q_i = \vec{H} \cdot q_n,$$

przyłożoną w środku sił równoległych (p. tom I, str. 120), którego położenie w sztabie jest, oczywiście, zależne od rozmieszczenia w niej mas magnetycznych dodatnich.



rys. 168

Siły równoległe, działające na masy ujemne południowej części sztaby, skierowane przeciwnie do kierunku natężenia pola, dadzą wypadkową

$$\vec{F}' = \sum \vec{f}' = - \sum \vec{H} \cdot q_i = - \vec{H} \sum q_i = - \vec{H} \cdot q_s.$$



Siły  $\vec{F}$  i  $\vec{F}'$  równe ( $q_n = q_s$ ) i równoległe stanowią parę sił. Prosta, na której leżą obydwa środki sił, wyznacza oś magnetyczną magnesu. Moment tej pary równy jest  $H \cdot q \cdot l \cdot \sin \alpha$ , gdzie  $l$  — odległość między środkami sił równoległych,  $\alpha$  — kąt, jaki natężenie pola tworzy z osią magnetyczną magnesu. Uogólniając podane wyżej określenie momentu magnetycznego (wzór 1a), napiszemy, że moment pary, który dla odróżnienia od momentu magnetycznego oznaczymy tym razem przez  $C$ , równy jest

$$C = M \cdot H \cdot \sin \alpha \quad (5a)$$

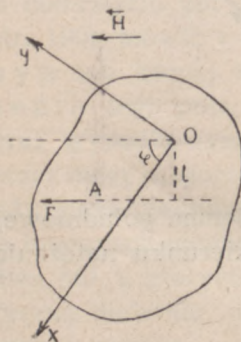
i skierowany prostopadłe do płaszczyzny, przesuniętej przez wektory  $\vec{M}$  i  $\vec{H}$  (w przypadku przedstawionym na rysunku 168 przed płaszczyzną rysunku).

Moment pary jest zatem iloczynowi zewnętrznemu tych dwu wektorów (p. tom I, str. 61).

Przypuśćmy, że sztaba nie poddana działaniu żadnych innych sił poza siłami pola może się swobodnie obracać dookoła osi prostopadłej do kierunku natężenia pola. Wychylona o taki kąt z położenia równowagi, abyśmy mogli uważać  $\sin \alpha = \alpha'$  będzie się ona wahała w płaszczyźnie, przesuniętej przez wypadkowe  $F$  i  $F'$ , przy czym okres jej wahań będzie równy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{MH'}} \quad (6)$$

gdzie  $B$  oznacza moment bezwładności sztaby względem danej osi obrotu (p. tom I, str. 134).



rys. 169

Wywody te możemy uogólnić na dowolny magnes, umieszczony w polu jednostajnym. Niech  $O$  będzie śladem osi obrotu, prostopadłej do płaszczyzny rysunku,  $A$  — elementem bryły, zawierającym masę magnetyczną  $dq = \rho \cdot dv$ ,  $\vec{H}$  wektorem natężenia pola (rys. 169). Moment względem osi obrotu siły  $\vec{dF} = \vec{H} \cdot dq$ , działającej na element  $A$ , jest równy

$$H \cdot dq \cdot l.$$



Przeprowadźmy przez  $O$  w dowolnym kierunku osie współrzędnych  $Ox$  i  $Oy$ . Mamy wtedy

$$I = x \sin \varphi - y \cos \varphi,$$

gdzie  $x, y$  są współrzędnymi punktu  $A$ . Moment siły  $d\vec{f}$  względem osi  $O$  będzie równy

$$Hdq \cdot x \sin \varphi - Hdq \cdot y \cos \varphi.$$

Moment więc wypadkowy, będący sumą arytmetyczną momentów składowych wyrazi się wzorem

$$C = H \sin \varphi \int dq \cdot x - H \cos \varphi \int dq \cdot y.$$

Wybermy kierunek  $Ox$  tak, aby  $\int dq \cdot y$  było równe zeru. Kierunek  $Ox$  będzie wtedy osią magnetyczną magnesu.

$$C = H \sin \varphi \int dq \cdot x \tag{6a}$$

skąd kładąc  $\int dq \cdot x = M$  i uważając tę wielkość za moment magnetyczny magnesu otrzymamy

$$C = M \cdot H \cdot \sin \varphi.$$

Gdy oś  $O$  jest jedną z głównych osi bryły i na magnes poza siłami pola nie działają żadne inne siły, kierunek osi magnetycznej jest tym kierunkiem równowagi, koło którego zachodzić będą wahania bryły.

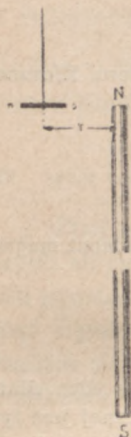
Taki przypadek zachodzi, gdy krótką i cienką igłę magnetyczną zawiesimy (lub podeprzemy) w ten sposób, aby mogła wahać się swobodnie w płaszczyźnie poziomej. Jak wykazuje doświadczenie, wahania takiej igły, wychylonej z położenia równowagi, stopniowo zresztą na skutek tarcia zanikające, zachodzić będą nawet wtedy, gdy w pobliżu nie będzie znajdowało się żadne ciało namagnesowane, co w zestawieniu z omówionym w ust. I ustawianiem się igły w oznaczonym kierunku, wskazuje na istnienie w przestrzeni otaczającej Ziemi pola magnetycznego, które nazywać będziemy polem magnetycznym Ziemi. W fakcie, że igła, umieszczona w tym polu, które w obszarze przez igłę zajmowanym możemy z góry uważać za jednostajne, podlega działaniu jedynie pary sił, widzimy jedno z potwierżeń podstawowego założenia



o równoważności mas magnetycznych dodatnich i ujemnych w magnesie.

Oś obrotu musi w tym przypadku przechodzić nie przez środek masy igły, lecz przez punkt leżący (na naszej półkuli) nieco przed środkiem masy w kierunku północnym. Tylko wtedy bowiem igła będzie wisiała poziomo (por. ust. 5).

✕ Okres wahań igły, zależny od natężenia pola ziemskiego, a raczej od jego składowej poziomej (p. ust. 5), ulegnie, rzecz prosta, zmianie, gdy igłę poddamy poza tym działaniu innego lub innych magnesów. Umieścmy np. w pobliżu igły *ns* długi i cienki magnes *NS* tak, aby biegun *N* magnesu znajdował się na przedłużeniu osi magnetycznej igły w położeniu równowagi (rys. 170). Gdy odległość między środkiem igły i biegunem *N* jest niewielka w porównaniu z długością magnesu, możemy pominąć działanie bieguna *S* magnesu. Pole, działające na igłę, będzie polem wypadkowym Ziemi i bieguna *N* magnesu. Wobec bardzo małej długości igły można przyjąć, że natężenia obu pól składowych mają zarówno w *n*, jak i w *s* kierunki te same, wobec czego natężenie wypadkowe będzie równe



rys. 170

$$H = H_z + H'_q,$$

gdzie  $H_z$  oznacza składową poziomą natężenia pola ziemskiego,  $H'_q$  — natężenie pola magnesu. Okres wahań magnesu wyniesie wtedy (w założeniu, że nić, na której wisi igła, jest doskonale giętka)

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{B}{(H_z + H'_q) M}} = \frac{1}{\nu_1}, \quad (\text{a})$$

gdzie  $M$  — moment magnetyczny igły.

Przy zmianie odległości magnesu od igły zmieni się natężenie pola w obszarze, zajmowanym przez igłę, tak że będziemy mieli

$$T'' = 2\pi \sqrt{\frac{B}{(H_z + H''_q) M}} = \frac{1}{\nu_2}. \quad (\text{b})$$



W samym zaś polu magnetycznym Ziemi (po odsunięciu magnesu)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{H_z M}} = \frac{1}{\nu_0} \quad (c)$$

Podnosząc (a), (b) i (c) do kwadratu znajdziemy

$$\nu_1^2 : \nu_0^2 = \frac{H_z + H'_q}{H_z} ; \quad \nu_2^2 : \nu_0^2 = \frac{H_z + H''_q}{H_z}$$

lub

$$\frac{\nu_1^2 - \nu_0^2}{\nu_0^2} = \frac{H'_q}{H_z} \quad \text{i} \quad \frac{\nu_2^2 - \nu_0^2}{\nu_0^2} = \frac{H''_q}{H_z}$$

i ostatecznie

$$(\nu_1^2 - \nu_0^2) : (\nu_2^2 - \nu_0^2) : \nu_0^2 = H'_q : H''_q : H_z \quad (d)$$

Stosunek, wyznaczony wzorem (d), jest niezależny od wartości mas magnetycznych igły, jeżeli więc igłę silniej namagnesujemy lub zastąpimy inną stosunek ten pozostanie bez zmiany. Doświadczenie potwierdza ten wniosek, a więc potwierdza i założenie, że siły, z jakimi działają na siebie wzajemnie ciała namagnesowane, są proporcjonalne do ich mas magnetycznych (por. rozdz. III, ust. 2, str. 179).

Tej właśnie metody użył Coulomb (1785 r.) do wyznaczenia związku między wartością natężenia i odległością danego punktu pola od bieguna magnesu wzbudzającego to pole.

Coulomb używał w tych pomiarach igły o długości 2,7 cm i magnesu o długości 63 cm. Częstość wahań wynosiła w polu ziemskim  $\nu_0 = 15$  na minutę. Gdy odległość  $r$  między  $N$  i  $S$  wynosiła 8,8 cm,  $\nu_1$  było równe 41, gdy  $r = 17,6$  cm,  $\nu_2 = 24$  i wreszcie, gdy  $r = 35,2$  cm,  $\nu_3 = 17$ . Stosunek zatem kwadratów odległości wynosił 1 : 4 : 16, stosunek zaś natężeń obliczony ze wzoru (d)

$$(41^2 - 15^2) : (24^2 - 15^2) : (17^2 - 15^2) = 1456 : 351 : 64 = 16 : 3,9 : 0,7$$

Rachunek ten jest wykonany w założeniu, że biegun południowy we wszystkich trzech pomiarach nie odgrywa żadnej roli. Otóż tak nie jest, im większa jest odległość magnesu od igły, tym działanie bieguna południowego jest stosunkowo większe. Istotnie, przyjmijmy, że



prawo Coulomba obowiązuje, wtedy natężenie pola, wzbudzonego przez biegun południowy magnesu, wyniesie w punkcie  $O$  (por. wzór 7)

$$H_{-q} = -\frac{q}{\mu r'^2} = -\frac{q}{\mu (r^2 + l^2)},$$

gdzie  $l$  — długość magnesu. Na okres wahań igły wpływać będzie jedynie składowa tego natężenia w kierunku prostej  $ON$ , wobec czego natężenie czynne

$$H'_{-q} = H_{-q} \cdot \sin \alpha = H_{-q} \cdot \frac{r}{r'} = H_{-q} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}} = -\frac{qr}{\mu (r^2 + l^2)^{3/2}}$$

lub z uwagi, że natężenie pola bieguna północnego wynosi

$$H_q = \frac{q}{\mu r^2},$$

$$H'_{-q} = -H_q \cdot \frac{r^3}{(r^2 + l^2)^{3/2}}.$$

Zamiast więc natężenia  $H_q$  na igłę działa w rzeczywistości natężenie

$$H^{(r)} = H_q + H'_{-q} = H_q \left( 1 - \frac{r^3}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \right) = H_q \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{l^2}{r^2} \right)^{3/2}} \right).$$

Dla odległości  $r_1 = 8,8$  cm otrzymujemy w przybliżeniu

$$H^{(r_1)} = H'_q (1 - 0,003) = 0,997 H'_q,$$

skąd

$$H'_q = 1,002 H^{(r_1)}.$$

Dla odległości  $r_2 = 17,6$

$$H^{(r_2)} = H''_q (1 - 0,02) = 0,98 H''_q,$$

skąd

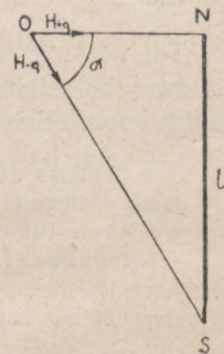
$$H''_q = 1,02 \cdot H^{(r_2)}$$

i wreszcie dla  $r = 35,2$  cm

$$H^{(r_3)} = H'''_q (1 - 0,12) = 0,88 H'''_q,$$

skąd

$$H'''_q = 1,125 \cdot H^{(r_3)}.$$



rys. 171



Pomiary wyznaczają wartość  $H^{(r)}$ , chcąc więc otrzymać wartość  $H_q$  musimy wprowadzić podane wyżej poprawki. Znajdujemy, że

$$H'_q : H''_q : H'''_q = 1,459 : 358 : 72 = 16 : 3,9 : 0,8,$$

a więc niewątpliwie większą, niż poprzednio, zgodność z prawem Coulomba.

Wyniki, jakie Coulomb otrzymał z tych pomiarów, potwierdziły na ogół jego założenia, oparte na analogii między działaniami magnetycznymi i elektrycznymi, że natężenie pola, wzbudzonego przez pojedynczą masę magnetyczną, skupioną w jednym punkcie, można wyrazić wzorem

$$H = K \cdot \frac{q}{r^2},$$

gdzie  $r$  oznacza odległość badanego punktu pola od bieguna magnetycznego. Siła zatem, z jaką pole działa na wprowadzoną do niego masę  $q'$ , wynosi

$$f = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2}.$$

To działanie zależy, jak wykazały doświadczenia późniejsze, od rodzaju środowiska, w którym pole jest wzbudzone. Oznaczając przez  $\mu$  tzw. zdolność (lub przenikliwość) magnetyczną środowiska i kładąc czynnik proporcjonalności równy jednostce oraz uwzględniając znaki mas magnetycznych, napiszemy, że

$$f = \pm \frac{qq'}{\mu r^2}, \quad (7)$$

otrzymując wzór analogiczny do wzoru na siłę, z jaką działają wzajemnie na siebie dwa naelektryzowane punkty materialne.

Ze wszystkich tych rozważań wynika jednak, że wielkością, którą możemy bezpośrednio wyznaczyć z pomiaru, umieszczając magnes w polu magnetycznym, jest nie masa magnetyczna biegunów danego magnesu, lecz jego moment magnetyczny. Można stąd wyciągnąć wniosek, że w przeciwstawieniu do naboju elektrycznego masa magne-



tyczna jest tylko pojęciem pomocniczym, często dogodnym w rozumowaniach. Z tego też powodu będziemy się nim i nadal posługiwali, pamiętając wszakże, iż wzór (7) Coulomba jest jedynie formalnie podobny do analogicznego wzoru w elektrostatyce.

Mierząc siłę w dynach, odległość w cm i przyjmując, że w próżni  $\mu=1$ , za jednostkę masy magnetycznej w tzw. elektromagnetycznym układzie jednostek C. G. S. bierzemy masę, która na drugą sobie równą działa w próżni z odległości 1 cm z siłą 1 dyny. Wymiar tej jednostki otrzymujemy ze wzoru (2)

$$[q] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}. \quad (8)$$

Jednostką natężenia jest w tym układzie takie natężenie, które w próżni działa na jednostkę magnetyzmu siłą 1 dyny. Jednostkę tę do niedawna nazywano gaussem i oznaczano symbolem  $\Gamma$ . W pomiarach magnetyzmu ziemskiego często używa się jednostki  $10^{-5}$  razy mniejszej, oznaczonej symbolem  $\gamma$ . Wymiar natężenia

$$[H] = \frac{[f]}{[q]} = \frac{MLT^{-2}}{M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}} = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}. \quad (8a)$$

Obecnie w związku z uchwałami międzynarodowego kongresu elektrotechnicznego z 1930 r. coraz częściej nazwą gausa oznacza się jednostkę indukcji magnetycznej (p. ust. 3), jednostkę zaś natężenia pola oerstedem.

Rozwijając dalej ustaloną w ten sposób analogię między działaniami nabojów elektrycznych i mas magnetycznych możemy przypisać polu magnetycznemu magnesu te wszystkie własności, które uprzednio na podstawie prawa Coulomba przypisaliśmy polu elektrycznemu. Do nich przede wszystkim należy zachowawczość sił magnetycznych: praca sił magnetycznych, wykonana przy przesunięciu mas magnetycznych z jednego miejsca pola do drugiego, zależy jedynie od położenia początkowego i końcowego punktu drogi, nie zależy zaś zupełnie od kształtu drogi. Możemy więc i tym razem mówić o potencjale danego punktu pola i wyznaczać jego wartość tak, jak to czyniliśmy w ust. 3, rozdz. III, z pracy wykonanej przez



siły pola przy przesunięciu jednostki masy dodatniej z pewnego punktu  $A$  do innego punktu pola  $B$ . Będziemy zatem mieli

$$V_A = \frac{1}{q} |O_{A\infty}$$

oraz

$$V_A - V_B = \frac{1}{q} |O_{AB}$$

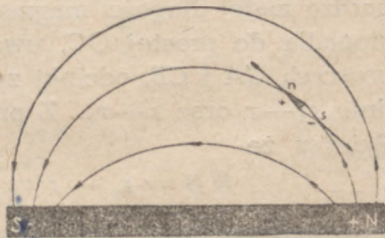
Podobnie związek między natężeniem pola i potencjałem będzie się wyrażał wzorami analogicznymi do wzorów ust. 3, rozdz. III.

Pole więc magnetyczne magnesu jest, jak i pole elektrostatyczne, polem niewirowym (irrotacyjnym, por. rozdz. III, str. 192).

Kierunek linii sił możemy wyznaczyć doświadczalnie umieszczając w danym miejscu pola magnesy liniowe dostatecznie krótkie, aby można było uważać natężenie pola za mające tę samą wartość we wszystkich punktach obszaru zajętego przez magnes probierczy. Magnes taki będzie, jak o tym mówiliśmy wyżej, w położeniu równowagi stałej wtedy, gdy kierunek osi magnetycznej będzie zgodny z kierunkiem natężenia pola w danym miejscu.

Gdy na poziomej płytce szklanej, położonej na magnesie, rozsypiemy opiłki żelazne, opiłki magnesując się w polu magnetycznym magnesu ułożą się wzdłuż linii sił magnetycznych. Obraz w ten sposób otrzymany nazywany jest nieraz widmem magnetycznym.

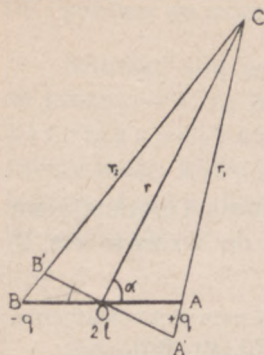
Za dodatni kierunek tych linii, łączących północną część magnesu z południową, przyjmujemy, zgodnie z określeniem kierunku natężenia pola, ten kierunek, w którym poruszałaby się pod działaniem pola swobodna masa magnetyczna dodatnia, a więc kierunek od bieguna północnego do południowego. Będziemy przeto i tym razem uważali linie sił za wychodzące z elementów objętości o magnetyzmie dodatnim i wchodzące do elementów o magnetyzmie ujemnym.



rys. 172



Natężenie w danym punkcie pola można obliczyć, wyznaczając wartość i kierunek natężeń pól składowych, wzbudzonych przez poszczególne masy magnetyczne, a następnie dodając je geometrycznie. Jedynie w bardzo prostych przypadkach obliczenie to nie nastęrcza większych trudności. Do takich należy przypadek pola, wzbudzonego przez bardzo krótki i cienki magnes. Niech  $AB$  będzie takim magnesem o małej długości  $2l$ , w którym czynne masy magnetyczne są skupione na jego końcach, tak że jego moment magnetyczny wynosi



rys. 173

$$M = 2ql.$$

Stosując rozumowanie analogiczne do tego, jakim posługiwaliśmy się w art. 3, rozdz. III przy wyznaczaniu potencjału w polu, wzbudzonym przez punkt naelektryzowany, znajdziemy, że potencjał, wytworzony w punkcie  $C$  przez masę dodatnią magnesu, równy jest  $+\frac{q}{\mu r_1}$  przez masę zaś ujemną równy  $-\frac{q}{\mu r_2}$ , gdzie  $r_1$  i  $r_2$  oznaczają odpowiednie odległości punktu  $C$  od dodatniego i ujemnego biegunów magnesu. Potencjał przeto wypadkowy

$$V_c = \frac{q}{\mu} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{\mu} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \quad (9)$$

Oznaczmy odległość środka magnesu od punktu  $C$  przez  $r$ , kąt zaś, jaki prosta  $OC$  tworzy z osią magnesu, przez  $\alpha$ . Wobec bardzo małej długości magnesu  $AB$  możemy prostą  $B'A'$ , prostopadłą do prostej  $OC$ , uważać za prostopadłą również do prostych  $CA$  i  $CB$ , odcinki zaś  $B'B$  i  $AA'$  za równe odpowiednio  $r_2 - r$  oraz  $r - r_1$ . Z prostokątnego trójkąta  $OB'B$  znajdziemy, że

$$B'B = r_2 - r = l \sin B'OB = l \cos \alpha,$$

z trójkąta zaś  $OAA'$

$$AA' = r - r_1 = l \sin AOA' = l \cos \alpha,$$



skąd

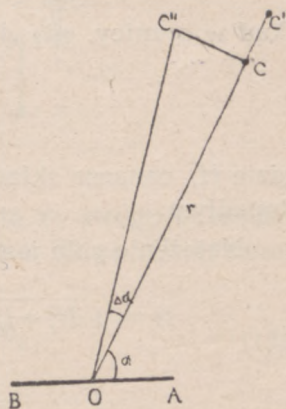
$$B'B + AA' = r_2 - r_1 = 2l \cos \alpha.$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (9), w którym iloczyn  $r_1 r_2$  zastępujemy przez  $r^2$ , otrzymujemy

$$V_c = \frac{2ql \cos \alpha}{\mu r^2} = \frac{M \cos \alpha}{\mu r^2}. \quad (9a)$$

Z tego wzoru wyznaczmy składowe natężenia pola: w kierunku prostej  $OC$  i w kierunku do tej prostej prostopadłym i stąd ostatecznie znajdziemy wartość i kierunek natężenia w punkcie  $C$ .

Praca sił pola przy przesunięciu jednostki masy magnetycznej dodatniej z punktu  $C$  do punktu  $C'$ , leżącego na prostej  $OC$  i odległego od  $C$  o  $\Delta r$ , (rys. 174), wynosi



rys. 174

$$\begin{aligned} H_r \cdot \Delta r &= V_c - V_{c'} = \frac{M \cos \alpha}{\mu} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r + \Delta r)^2} \right] = \\ &= \frac{M \cos \alpha}{\mu} \frac{(r + \Delta r)^2 - r^2}{r^2 (r + \Delta r)^2} = \frac{M \cos \alpha}{\mu} \cdot \frac{2r \Delta r + \Delta r^2}{r^4 \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^2}, \end{aligned}$$

stąd w granicy, gdy  $\Delta r$  dąży do zera,

$$H_r \cdot dr = \frac{2M \cos \alpha}{\mu} \cdot \frac{dr}{r^3}$$

i wreszcie

$$H_r = \frac{2M \cos \alpha}{\mu r^3}, \quad (10)$$

gdzie  $H_r$  oznacza składową natężenia pola w kierunku prostej  $OC$ . Gdy siły pola przesuwają jednostkę masy magnetycznej



z punktu  $C$  do punktu  $C''$ , leżącego w tej samej, co  $C$  odległości od punktu  $O$  na prostej  $C''O$ , tworzącej z osią magnesu kąt  $\alpha + \Delta\alpha$  praca sił pola wynosi

$$H_s \cdot r \cdot \Delta\alpha = V_c - V_{c''} = \frac{M}{\mu \cdot r^2} [\cos\alpha - \cos(\alpha + \Delta\alpha)] =$$

$$= \left( 2 \sin \frac{2\alpha + \Delta\alpha}{2} \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \right) \frac{M}{\mu r^2}$$

skąd w granicy, gdy  $\Delta\alpha$  dąży do zera i  $\sin \frac{\Delta\alpha}{2}$  do  $\frac{\Delta\alpha}{2}$ ,

$$H_s = \frac{M \sin \alpha}{\mu \cdot r^3}, \quad (11)$$

gdzie  $H_s$  oznacza składową natężenia w kierunku do  $OD$  prostopadłym.

Natężenie pola jest równe

$$H = \sqrt{H_r^2 + H_s^2} = \frac{M}{\mu \cdot r^3} \sqrt{4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{M}{\mu \cdot r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}, \quad (12)$$

kąt zaś, jaki tworzy z prostą  $OC$ , wynosi

$$\operatorname{tg}(H, OC) = \frac{H_s}{H_r} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (12a)$$

Zależność między momentem magnetycznym i natężeniem pola jest szczególnie prosta w dwu tzw. głównych położeniach punktu  $C$  a mianowicie, gdy kąt  $\alpha$  równy jest zeru i gdy równy jest  $90^\circ$ , innymi słowy, gdy prosta  $OC$  stanowi przedłużenie osi magnesu i gdy jest do niej prostopadła.

Gdy  $\alpha = 0$  (tzw. położenie pierwsze),

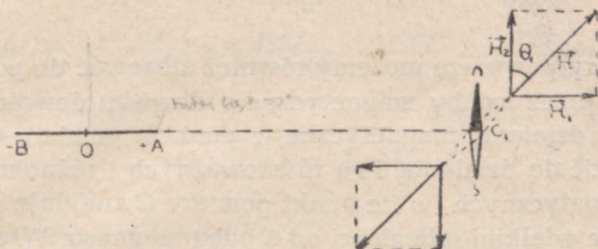
$$H'_r = \frac{2M}{\mu \cdot r^3}; \quad H'_s = 0,$$

wypadkowa więc

$$H_1 = \frac{2M}{\mu \cdot r^3} \quad (13)$$



jest skierowana wzdłuż prostej OC. Gdy oś magnesu ustawimy tak, aby była prostopadła do kierunku, jaki w polu magnetycznym Ziemi o składowej poziomej natężenia równej  $H_z$  posiada krótka igła magnetyczna, umieszczona w punkcie  $C_1$ ,



rys. 175a

igła pod działaniem magnesu odchyli się ze swego początkowego położenia równowagi o kąt  $\theta$ , (rys. 175 a). Otrzymamy zatem

$$H_1 = \frac{2M}{\mu r^3} = H_z \cdot \operatorname{tg} \theta_1. \quad (13a)$$

W drugim przypadku, gdy  $\alpha = 90$ ,

$$H_r'' = 0; \quad H_s'' = \frac{M}{\mu r^3},$$

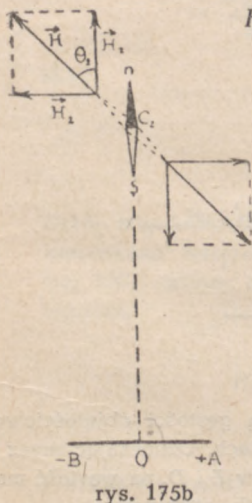
wypadkowa więc

$$H_2 = H_s'' = \frac{M}{\mu r^3} \quad (14)$$

jest skierowana prostopadle do prostej  $OC_2$  (rys. 175b).

Gdy zachowując to samo położenie osi magnesu, co przy pomiarze pierwszym, umieścimy w punkcie  $C_2$  krótką i cienką igłę magnetyczną, igła odchyli się ze swego początkowego położenia równowagi o kąt  $\theta_2$ . Będziemy wtedy mieli

$$H_2 = \frac{M}{\mu r^3} H_z \operatorname{tg} \theta_2.$$



rys. 175b

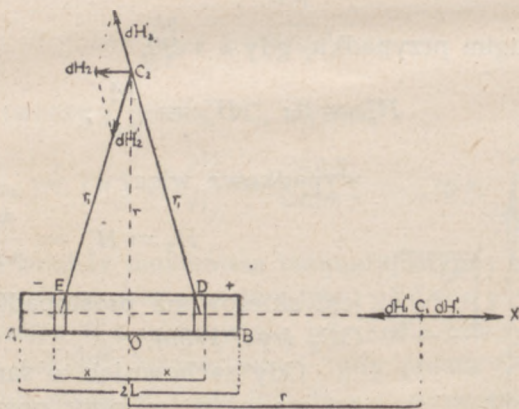


Jeżeli w obu pomiarach odległość  $r$  punktu  $C$  od środka magnesu  $O$  ma wartość tę samą,

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = 2. \quad (15)$$

Wzory powyższe możemy również stosować do pól, wzbudzonych przez sztaby magnetyczne o długości dowolnej, o ile tylko ich działania magnetyczne w punkcie pomiaru  $C$  można sprowadzić do działania dwu równoważnych i różnoimiennych mas magnetycznych i o ile punkt pomiaru  $C$  znajduje się w dostatecznie wielkiej odległości od środka magnesu. Wtedy natężenie pola jest całkowicie wyznaczone przez moment magnetyczny magnesu i przez odległość danego punktu pomiaru od jego środka, nie zależy zaś zupełnie od rozmieszczenia mas magnetycznych w magnesie.

Niech  $AB$  będzie badanym magnesem,  $E$  i  $D$  elementami jego objętości, rozmieszczonymi symetrycznie względem środka,  $2L$  — jego



rys. 176

długością,  $\rho$  wreszcie bezwzględną wartością gęstości objętościowej magnetyzmu (por. wzór 4) w danych elementach. Oznaczając przez  $S$  przekrój sztaby, przez  $dx$  — długość elementów  $E$  i  $D$ , na wartość mas magnetycznych, skupionych w tych elementach, otrzymamy

$$\pm \rho S \cdot dx.$$



Przyjmując, że odległość  $OC$  jest dostatecznie wielka, abyśmy wszystkie punkty każdego z tych elementów mogli uważać za znajdujące się w tej samej od  $C$  odległości, na wypadkowe natężenie pól przez nie wzbudzonych w punkcie  $C_1$ , leżącym na osi sztaby, otrzymamy, jak to bezpośrednio wynika z rys. 176

$$\begin{aligned} dH_1 &= \frac{\rho S \cdot dx}{\mu (r-x)^2} - \frac{\rho S dx}{\mu (r+x)^2} = \frac{\rho S dx}{\mu} \cdot \frac{4rx}{(r^2-x^2)^2} = \\ &= \frac{4\rho S dx}{\mu r^3} \cdot \frac{x}{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^2} = \frac{4\rho S dx \cdot x}{\mu r^3 \left(1 - \frac{2x^2}{r^2} + \frac{x^4}{r^4}\right)}, \end{aligned}$$

skąd natężenie całkowite

$$H_1 = \frac{2}{\mu r^3} \int_0^L \frac{\rho S dx \cdot 2x}{1 - \frac{2x^2}{r^2} + \frac{x^4}{r^4}}. \quad (\text{a})$$

W podobny sposób wyznaczamy natężenie w punkcie  $C_2$ . Oznaczając kąt  $EC_2O$  przez  $\beta$ , znajdziemy, że natężenie elementarne  $dH_2$  jest równe

$$\begin{aligned} dH_2^2 &= dH_2'^2 + dH_2''^2 + 2dH_2' dH_2'' \cos(\vec{dH}_2', \vec{dH}_2'') = \\ &= \frac{2(\rho S dx)^2}{\mu^2 r_1^4} (1 - \cos \beta) = \frac{4(\rho S dx)^2}{\mu^2 r_1^4} \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

skąd

$$dH_2 = \frac{2\rho S dx}{\mu r^3 \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)^{3/2}},$$

Każde z tych natężeń elementarnych leży na dwusiecznej kąta między kierunkami natężeń składowych, jest zatem prostopadłe do prostej  $OC_2$ , wobec czego natężenie wypadkowe jest ich sumą algebraiczną

$$H_2 = \frac{1}{\mu r^3} \int_0^L \frac{\rho dx \cdot 2x}{\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)^{3/2}}. \quad (\text{b})$$

Przypuśćmy teraz, że  $r$  jest dostatecznie wielkie w porównaniu z  $L$ , abyśmy odrzucając w mianowniku wyrażenia, stojącego pod znakiem całki, wyraz, zawierający stosunek  $\frac{x}{r}$  ( $x$  jest  $\leq L$ ) w potęgzie wyższej



od drugiej, nie popełnili błędu, przekraczającego dokładność pomiaru. Wzory (a) i (b) będziemy mogli wtedy przepisać w postaci

$$H_1 = \frac{2}{\mu r^3} \int_0^L \rho S dx \cdot 2x \left(1 + \frac{2x^2}{r^2}\right) = \frac{2}{\mu r^3} \int_0^L \rho S dx \cdot 2x + \frac{4}{\mu r^5} \int_0^L \frac{x^3}{r^2} \rho S dx \quad (c)$$

i

$$H_2 = \frac{1}{\mu r^3} \int_0^L \rho S dx \cdot 2x \left(1 - \frac{3x^2}{r^2}\right) = \frac{1}{\mu r^3} \int_0^L \rho S dx \cdot 2x - \frac{3}{\mu r^5} \int_0^L \frac{x^3}{r^2} \rho S dx \quad (d)$$

Z porównania pierwszego wyrazu każdego z tych wzorów ze wzorem (6a) wynika, że

$$\int_0^L \rho S dx \cdot 2x = \int_0^L dq \cdot 2x = M, \quad (e)$$

gdzie  $M$  jest momentem magnetycznym danej sztaby. Mamy zatem

$$H_1 = \frac{2M}{\mu r^3} + \frac{4}{\mu r^5} \int_0^L \rho S \cdot dx \cdot x^3, \quad (f)$$

$$H_2 = \frac{2M}{\mu r^3} - \frac{3}{\mu r^5} \int_0^L \rho S dx \cdot x^3.$$

Przypuśćmy, że takie samo działanie wywiera w punktach  $C_1$  i  $C_2$  magnes liniowy o masach magnetycznych  $\pm q_0$ , skupionych w biegunach, których wzajemna odległość wynosi  $2l_0$ . Powtarzając rachunek identyczny z tym, jakiśmy dopiero co wykonali przy obliczaniu natężeń pól elementarnych, znajdziemy, że natężenia będą tym razem równe

$$H_1^i = \frac{4q_0 l_0}{\mu r^3} + \frac{8q_0 l_0^3}{\mu r^5} \quad \text{i} \quad H_2^i = \frac{2q_0 l_0}{\mu r^3} - \frac{3}{2} \frac{2q_0 l_0^3}{\mu r^5} \quad (g)$$

Dla otrzymania przeto równości

$$H_1 = H_1^i \quad \text{i} \quad H_2 = H_2^i$$

wystarczy tak dobrać masy  $q_0$  i odległość biegunową  $2l_0$ , aby

$$2q_0 l_0 = \int_0^L \rho S \cdot dx \cdot 2x = M \quad (h)$$



oraz

$$q_0 I_0^2 = \int_0^L \rho S dx \cdot x^3.$$

Po podstawieniu tych wartości do wzorów (f) otrzymamy

$$H_1 = \frac{2M}{\mu r^3} \left(1 + \frac{2I_0^2}{r^2}\right); \quad H_2 = \frac{M}{\mu r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{I_0^2}{r^2}\right). \quad (i)$$

Znając moment magnetyczny  $M$  magnesu oraz zależność gęstości  $\rho$  od odległości  $x$  od środka magnesu, ze wzorów (h) możemy obliczyć zarówno masę  $q_0$ , jak i wzajemną odległość tych r ó w n o w a ż n y c h biegunów. Zazwyczaj jednak nie znamy rozmieszczenia magnetyzmu w magnesie, tak że odległości biegunów wyznacza się na drodze doświadczalnej. Metod tego wyznaczania, nie dających na ogół wyników dokładnych, rozpatrywać tu nie będziemy. W przypadkach, najczęściej spotykanych w praktyce laboratoryjnej, można z dostatecznym przybliżeniem przyjąć, że w magnesie o przekroju prostokątnym odległość między biegunami równoważnymi wynosi mniej więcej  $\frac{5}{6}$  długości magnesu.

Należy zaznaczyć, że masy biegunowe  $q_0$  nie są bynajmniej równe sumie nadwyżek mas jednego znaku w odpowiedniej połowie magnesu; o tym można się przekonać, zestawiając wartość  $q_0$ , otrzymaną z równań (h), z wartością  $q = \int_0^L S \cdot dx$  tej nadwyżki w magnesie.

Wzory (16) przechodzą we wzory (15), gdy ułamek  $\left(\frac{I_0}{r}\right)^2$  jest dostatecznie mały w porównaniu z jednością, aby można było go pominąć, nie zmniejszając przez to dokładności wyników. Gdy np.  $\frac{I_0}{r} = \frac{1}{20}$  błąd popełniony przy odrzuceniu kwadratu tej wielkości wynosi 0,5% dla  $H_1$  i około 0,4% dla  $H_2$ .

Pomiary, wykonane w 1833 r. przez Gaussa, potwierdziły na ogół wzór (15) i tym samym potwierdziły prawo Coulomba. Stosunek bowiem natężeń  $H_1$  i  $H_2$  tylko wtedy równy jest 2, gdy, jak to zakłada prawo Coulomba, siła  $f$ ; z jaką działa biegun magnetyczny, jest odwrotnie proporcjonalna do drugiej potęgi odległości. Istotnie, można bez wielkiego trudu dowieść, posługując się analogicznym do użytego przez nas wyżej rozumowaniem, że gdyby siła  $f$  zmieniała się odwrotnie proporcjonalnie do  $n$ -tej potęgi odległości, stosunek  $H_1$  do  $H_2$  byłby równy  $n$ .



Gauss wyznaczał kąty odchylenia  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , umieszczając igłę magnetyczną w różnych odległościach od środka magnesu. Oto kilka z otrzymanych przez niego wyników.

$r_{cm}$	$\theta_1$	$\theta_2$	$r_{cm}$	$\theta_1$	$\theta_2$
130	2° 13' 51,2''	1° 10' 19,3''	200	0° 37' 16,2''	0° 19' 1,6''
150	1° 27' 19,1''	0° 45' 14,3''	250	0° 18' 51,4''	0° 9' 36,1''
170	1° 0' 9,9''	0° 30' 57,9''	300	0° 11' 0,7''	0° 5' 33,7''
180	0° 50' 52,5''	0° 25' 59,5''	400	0° 4' 35,9''	0° 2' 22,2''

Dane te wyraźnie wskazują, że stosunek  $\theta_1$  do  $\theta_2$ , który wobec małości kątów możemy uważać za równy stosunkowi ich tg-ów, waha się istotnie około 2, przy czym ze wzrostem odległości odchylenie szybko maleje, mniej więcej odwrotnie proporcjonalnie do trzeciej potęgi odległości, a więc zgodnie ze wzorami (13) i (14). Tak np. na stosunek odchyień  $\theta_1$  w odległości 2 m i 4 m otrzymujemy

$$\frac{\theta_1^{(2)}}{\theta_1^{(4)}} = \frac{37' 16,2''}{4' 35,9''} = \frac{2236,2''}{275,9''} = 8,1 \doteq 8 = \frac{4^3}{2^3}$$

Podobnie dla odległości 1,5 m i 3 m stosunek odchyień

$$\frac{\theta_2^{(1,5)}}{\theta_2^{(3)}} = \frac{2714,3''}{333,7''} = 8,1 \doteq 8 = \frac{3^3}{(1,5)^3}$$

Wartość tych odchyień nie jest, jak się okazało, zależna od własności magnetycznych odchylonej igły: dany magnes odchyłał każdą igłę, umieszczoną w danym punkcie pola o ten sam kąt. Pomiar Gaussa potwierdziły zatem i założenie, że siła magnetyczna jest proporcjonalna do masy, na którą działa (por. uwagę na str. 11).

Z częściej używanego przy doświadczalnym wyznaczeniu natężenia wzoru (13a) wynika, że moment magnetyczny magnesu wzbudzającego dane pole, jest równy

$$M = \frac{1}{2} H_z \operatorname{tg} \theta \cdot \mu r^3, \quad (\text{k})$$

gdzie  $H_z$  jest składową poziomą pola magnetycznego ziemi. Zawieśmy badany magnes tak, aby pod działaniem tej składowej mógł się on wahać w płaszczyźnie poziomej. Okres wahań magnesu otrzymamy wtedy ze wzoru

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{MH_z}}$$



skąd

$$H_z = \frac{4\pi^2 \cdot B}{T^2 \cdot M}. \quad (1)$$

Po podstawieniu do wzoru (k) otrzymamy wzór

$$M^2 = \frac{2\pi^2 B}{T^2} \cdot \text{tg} \theta \cdot \mu \cdot r^3,$$

gdzie nieznanym jest tylko moment  $M$ . Tej metody pomiaru momentu magnetycznego magnezu (zazwyczaj nazywanej metodą magneto metru), pierwszy użył Gauss.

### 3. — WPLYW RODZAJU ŚRODOWISKA NA WŁASNOŚCI POLA.

Jak o tym już wyżej była mowa, działania wzajemne mas magnetycznych zależą nie tylko od wartości i położenia tych mas, lecz również i od rodzaju środowiska, w którym dane działania zachodzą. Przyjmijmy, podobnie, jak to czyniliśmy przy rozpatrywaniu wpływu rodzaju środowiska na działania elektryczne, że badane środowisko, jednorodne i równokierunkowe, umieszczone w jednostajnym polu magnetycznym, jest ograniczone dwiema płaszczyznami, prostopadłymi do kierunku natężenia pola. W tych warunkach rozkład linii sił pozostanie w środowisku taki sam, jaki byłby w próżni (por. rozdz. III, ust. 7), pole wewnątrz środowiska będzie nadal jednostajne, zmieni się jedynie jego natężenie, wartość jego  $H$  będzie związana z wartością  $H_0$  natężenia pola w próżni wzorem

$$H = \frac{\mu_0 H_0}{\mu}, \quad (a)$$

przy czym  $H$ , jak wykazuje doświadczenie, jest w niektórych środowiskach mniejsze, w innych większe od  $H_0$ ,  $\mu$  zatem może, inaczej, niż zdolność elektryczna  $\epsilon$  (rozd. III, ust. 2), mieć wartości zarówno większe, jak i mniejsze od  $\mu_0$ . Ciała, dla których  $\mu$  jest większe od  $\mu_0$ , nazywamy paramagnetycznymi, ciała o  $\mu < \mu_0$  — diamagnetycznymi. Zazwyczaj z ciał paramagnetycznych wyodrębnia się grupę ciał ferromagnetycznych, których zdolność (przenikliwość) ma-



gnetyczna, o wiele większa, niż w pozostałych ciałach paramagnetycznych, w wysokim stopniu zależy od natężenia pola, działającego na dane ciało. W rozważaniach niniejszego ustępu zależności tej uwzględniać nie będziemy, wobec czego wywody nasze nie będą na ogół dotyczyły ciał tej ostatniej kategorii.

Ze wzoru (a) wynika, że różnica natężeń  $H$  i  $H_0$  równa jest

$$H - H_0 = \frac{\mu_0 H_0}{\mu} - H_0 = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu} H_0 = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} H = H'. \quad (17)$$

Natężenie  $H$  w danym środowisku możemy zatem uważać za sumę dwu natężeń: natężenia  $H_0$  pola w próżni i natężenia  $H'$ , które w ciałach paramagnetycznych ( $\mu > \mu_0$ ) jest skierowane przeciwnie do  $H_0$ , w ciałach zaś diamagnetycznych ma kierunek ten sam.

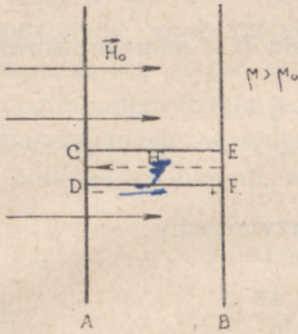
Jeżeli przypiszemy, podobnie, jak to czyniliśmy przy rozpatrywaniu wpływu środowiska na działania elektryczne (rozd. III, ust. 10), zmianę natężenia pola polaryzacji magnetycznej, jaką w ciele wzbudziło działające na nie pole, będziemy musieli przyjąć, zgodnie z wywodami ust. I, dotyczącymi wewnętrznej budowy magnesu, że ciało nabyło pod wpływem pola własności magnetyczne. W przypadku takich ciał, w których namagnesowanie to jest chwilowe i znika wraz z usunięciem działającego pola, z zestawienia wzoru (42) rozdz. III, str. 265) i wzoru (2) str. 289) otrzymujemy

$$\vec{p} = \vec{J} = \frac{d\vec{M}}{dv} = \frac{\sigma \cdot d\vec{l} \cdot dS}{dv}. \quad (18)$$

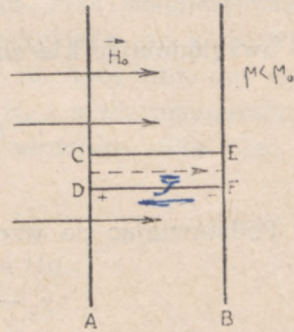
W ciałach paramagnetycznych bieguny ujemne magnesów elementarnych będą znajdowały się na tej powierzchni danego elementu objętości, przez którą linie sił wchodzą do tego elementu, w ciałach zaś diamagnetycznych — na tej, przez którą wychodzą. Istotnie, niech  $A$  i  $B$  będą przekrojami, prostopadłymi do kierunku linii sił, wyodrębniającymi ze środowiska objętość  $AB$ . Zgodnie ze wzorem (17), natężenie  $H'$  w obrębie tej objętości powinno mieć w środowisku paramagnetycznym



kierunek przeciwny do kierunku pola  $H_0$  a więc od B do A (rys. 177a). W elemencie więc objętości CDEF gęstość dodatnia  $+$   $\sigma$  musi być rozłożona na powierzchni EF, ujemna  $-$   $\sigma$  na powierzchni CD. W środowisku diamagnetycznym  $H'$

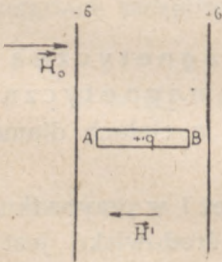


rys. 177a

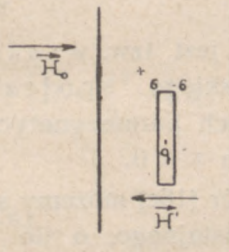


rys. 177b

ma ten sam kierunek, co  $H_0$ , gęstość dodatnia jest więc na powierzchni CD, ujemna na EF (rys. 177b). W obu przypadkach kierunek  $H'$  jest przeciwny do kierunku namagnesowania  $J$ . W przestrzeni zatem, zajmowanej przez dane ciało,



rys. 178a



rys. 178b

oprócz pola  $H_0$  czynne jest również pole  $H'$ , przeciwdziałające namagnesowaniu, wzbudzanemu przez masy magnetyczne, powstałe na skutek polaryzacji. W przypadku przez nas rozpatrywanym masami działającymi są masy rozłożone na ogra-



niczających środowisko płaszczyznach, działania bowiem wszystkich innych mas wzajemnie się równoważą, wobec czego

$$H' = \frac{4\pi\sigma}{\mu_0}$$

lub uwzględniając kierunek natężenia  $\vec{H}'$  i namagnesowania  $\vec{J}$

$$H' = -\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{J}. \quad (18b)$$

Podstawiając do wzoru (17) otrzymujemy

$$\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} \vec{H} = -\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{J}$$

i ostatecznie

$$\mu \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + 4\pi \vec{J}. \quad (18c)$$

Namagnesowanie zatem

$$\vec{J} = \frac{\mu - \mu_0}{4\pi} \vec{H} = \kappa \vec{H} \quad (18d)$$

gdzie  $\kappa$  jest tzw. wrażliwością magnetyczną (wg Witkowskiego współczynnikiem magnetycznym). W ciałach paramagnetycznych  $\kappa > 0$ , w ciałach diamagnetycznych  $\kappa < 0$ .

Wzór (18c) możemy stosować również i w przypadku pola niejednostajnego, o ile tylko badane środowisko jest jednorodne i równokierunkowe; wtedy jednak natężenie  $\vec{H}$  posiada w różnych punktach pola różne wartości i kierunki.

To natężenie wypadkowe moglibyśmy wyznaczyć wycinając w badanym ciele wąską szczelinę o przekroju prostokątnym  $AB$  (rys. 178a) tak aby kierunek linii sił pola  $H_0$  (lub, co w danym przypadku na jedno wychodzi, kierunek nama-



gniesowania  $\vec{J}$  był równoległy do dłuższego jej boku) i umieszczając w nim biegun magnetyczny dostatecznie mały aby nie zakłócił rozmieszczenia mas w środowisku. Masy magnesów elementarnych, tworzących boki tej szczeliny, równoważą się wzajemnie i nie wywierają żadnego działania na biegun; działanie bardzo małych mas magnetycznych, wzbudzonych przez polaryzację środowiska na końcowych powierzchniach  $A$  i  $B$  szczeliny jest na ogół znikomo małe; na biegun zatem działa jedynie pole  $H_0$  i masy rozmieszczone na płaszczyznach, ograniczających środowisko. Siła więc, jakiej podlega ten biegun, wynosi

$$F = (H_0 - H') q = Hq,$$

skąd

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{H}. \quad (19)$$

Jeżeli jednak dłuższy bok szczeliny, w której umieszczamy biegun probierczy  $+q$ , jest prostopadły do kierunku linii sił pola  $H_0$  (rys. 178b), oprócz pól  $\vec{H}_0$  i  $\vec{H}'$  działa na biegun pole mas rozłożonych na prostopadłych do kierunku linii sił powierzchniach szczeliny. Mamy wtedy

$$F = (H_0 - H') q + \frac{4\pi\sigma}{\mu_0} q = \left( H + \frac{4\pi}{\mu_0} J \right) q,$$

skąd

$$\frac{\vec{F}}{q} = \frac{\mu_0 \vec{H} + 4\pi \vec{J}}{\mu_0}$$

lub kładąc  $\mu_0 = 1$ , a więc przyjmując elektromagnetyczny układ jednostek

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{H} + 4\pi \vec{J}. \quad (19a)$$



## 4. — WEKTOR INDUKCJI MAGNETYCZNEJ I STRUMIEŃ INDUKCJI MAGNETYCZNEJ.

Wielkość równą  $\mu_0 \vec{H} + 4\pi \vec{J}$  nazywamy wektorem indukcji magnetycznej i oznaczamy przez  $B$ . Gdy namagnesowanie środowiska powstaje tak, jak to założyliśmy przy wyprowadzeniu wzoru (18), dopiero pod działaniem pola i razem z nim znika, wektor ten posiada w środowisku jednorodnym i równokierunkowym kierunek ten sam, co natężenie pola i zgodnie ze wzorem (18c) równy jest  $\mu H$ . W elektromagnetycznym układzie jednostek wektor ten jest liczbowo równy sile  $\vec{F}$ , działającej na jednostkę bieguna magnetycznego, umieszczonego w wąskiej szczelinie, wyciętej prostopadłe do kierunku linii sił pola, której dłuższy bok jest prostopadły do linii sił pola.

Nazwijmy strumieniem indukcji magnetycznej przez dany element  $dS$  dowolnej powierzchni, umieszczonej w polu magnetycznym, wielkość  $d\Psi$ , wyznaczoną wzorem

$$d\Psi = B \cdot dS \cdot \cos(B, n), \quad (20)$$

gdzie dodatni kierunek normalnej  $n$  do elementu  $dS$  określamy w ten sam sposób, jak przy obliczaniu strumienia indukcji elektrycznej (rozdz. I, ust. 4, str. 199).

Strumień indukcji przez powierzchnię skończoną  $S$  jest, jako suma strumieni elementarnych, równy

$$\Psi = \int d\Psi = \int B \cdot dS \cos(B, n). \quad (20a)$$

Przypuśćmy, że pole magnetyczne wzbudzone jest przez pojedynczy biegun magnetyczny  $+q$ . Niech  $dS$  będzie elementem powierzchni zamkniętej, otaczającej dany biegun,  $r$  zaś odległością danego elementu od bieguna. Natężenie pola w danym miejscu pola równe jest, jak wiadomo,

$$H = \frac{q}{\mu r^2},$$



skąd wektor indukcji

$$B = \mu H = \frac{q}{r^2}.$$

Na elementarny strumień indukcji otrzymujemy

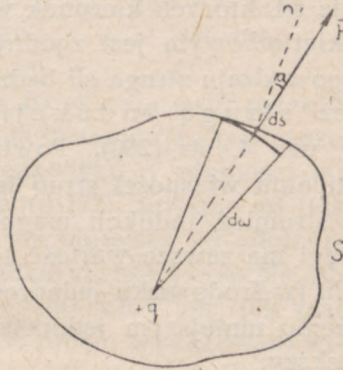
$$d\Psi = \frac{q}{r^2} dS \cdot \cos \alpha. \quad (20b)$$

Kąt bryłowy  $d\omega$ , pod którym z bieguna  $q$  widzimy element  $dS$  (rys. 179), wycina z kuli opisanej z bieguna promieniem  $r$ , powierzchnię  $r^2 d\omega$ , tworzącą z elementem powierzchni kąt  $\alpha$ , tak że mamy

$$r^2 d\omega = dS \cdot \cos \alpha.$$

Podstawiając do wzoru (20b) znajdujemy

$$d\Psi = \frac{q}{r^2} r^2 d\omega = q \cdot d\omega,$$



rys. 179

Stąd strumień indukcji przez całą powierzchnię zamkniętą  $S$

$$\Psi = \int d\Psi = q \int d\omega = 4\pi q. \quad (21)$$

Pola takiego, które byłyoby wzbudzone przez pojedynczy biegun magnetyczny, w rzeczywistości otrzymać nie można. Nawet w przypadku najbardziej zbliżonym do rozpatrywanego, gdy biegunem wzbudzającym jest biegun bardzo długiego i cienkiego pręta, w którym czynne masy magnetyczne są skupione na jego końcach, nie wszystkie elementy zamkniętej powierzchni  $S$  leżą w przestrzeni, znajdującej się poza magnesem; pewna część powierzchni leży wewnątrz magnesu.

Ze wzoru (21) stanowiącego odpowiednik twierdzenia Gaussa w elektrostatyce (rozd. III, ust. 4) wynika, że strumień indukcji przez powierzchnię zamkniętą jest, niezależnie



od rodzaju środowiska, całkowicie wyznaczony przez wartość mas magnetycznych znajdujących się wewnątrz tej powierzchni. Strumień zatem indukcji, przechodzący przez powierzchnię zamkniętą, nie zawierającą mas magnetycznych, wzbudzających pole, jest zawsze równy zero. W tych warunkach mamy więc

$$\Psi = 0. \quad (21a)$$

Wyodrębnijmy w polu magnetycznym niewielką powierzchnię  $dS$  i przeprowadźmy przez wszystkie punkty jej obwodu linie sił, których kierunek w środowisku jednorodnym i równokierunkowym jest zgodny z kierunkiem wektora indukcji. Tego rodzaju struga sił będzie więc w takim środowisku również strugą indukcji magnetycznej (por. rozdz. III, ust. 4, str. 206). Powtarzając rozumowania użyte przy ustalaniu własności strug indukcji elektrycznej, stwierdzimy, że strumień indukcji magnetycznej przez dowolny przekrój strugi ma zawsze wartość tę samą, wobec czego w częściach pola (w środowisku jednorodnym i równokierunkowym) o natężeniu mniejszym jednostkowa struga indukcji ma przekrój większy.

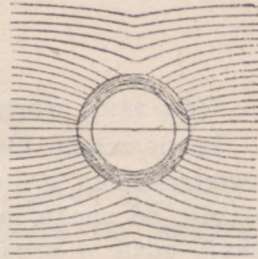
Przy przejściu z jednego środowiska do drugiego struga indukcji się załamuje, przy czym związek między kątem padania i kątem załamania wyraża się wzorem (p. rozdz. III, wzór 19, str. 219).

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (22)$$

Gdy  $\mu_1$  jest bardzo wielkie w porównaniu z  $\mu_2$ , jak np. przy przejściu z żelaza do powietrza, wielkim nawet wartościom (bliskim  $90^\circ$ ) kąta  $\alpha$  odpowiadają niewielkie wartości kąta  $\beta$ ; strugi indukcji wychodząc do powietrza tworzą, bez względu na swój kierunek w żelazie, prawie kąt prosty z powierzchnią rozdziału. Odwrotnie, strugi indukcji, przechodzące z powietrza do żelaza i tworzące z normalną do powierzchni rozdziału kąt prawie równy zero, w żelazie znacznie odchylają się od normalnej, przekrój strug indukcji



się zmniejsza. Umieszczenie w polu jednostajnym wydrążonej kuli żelaznej powoduje jakby skupienie strug indukcji w masie żelaza (rys. 180). Gdy wydrążenie jest niewielkie, grubość zaś warstwy żelaza jest znaczna, natężenie pola w wydrążeniu może spaść do wartości, mniejszej od natężenia pola zewnętrznego (du Bois, 1892 r.).



rys. 180

Ogólnie można powiedzieć, że w ciałach paramagnetycznych, umieszczonych w polu magnetycznym, strugi indukcji się skupiają, przy czym przekrój ich się zmniejsza, w ciałach zaś diamagnetycznych rozrzedzają się i zwiększają swój przekrój. Tak jednak jest tylko wtedy, gdy ciała te znajdują się w próżni, jeżeli bowiem umieścimy je w środowisku o zdolności magnetycznej  $\mu'$  to, jak wynika ze wzoru (22), zależnie od tego, czy zdolność ta jest większa czy też mniejsza od zdolności magnetycznej danego ciała, ciało będzie zachowywało się albo tak, jak ciało diamagnetyczne ( $\mu' > \mu$ ) albo tak, jak ciało paramagnetyczne ( $\mu' < \mu$ ), choćby w próżni wykazywało własności przeciwne.

Z ustalonego na tej drodze związku między wielkościami, charakteryzującymi pole magnetyczne, i masami magnetycznymi wynika, że zjawiska magnetyczne możemy podobnie, jak zjawiska elektryczne, przypisać nie masom magnetycznym, lecz zmianom własności fizycznych środowiska, w którym zostało wzbudzone pole magnetyczne (por. rozdz. III, ust. 5, str. 213).

Przyciąganie wzajemne mas magnetycznych przeciwnego znaku przypiszemy wtedy naprężeniom, działającym wzdłuż strug, łączących zawsze masy o znakach przeciwnych; odpychanie zaś mas jednoimiennych ciśnieniu bocznemu w strugach. Z uwagi, że wzory, wyrażające działanie nabożów elektrycznych, są analogiczne do wzorów, wyrażających działanie mas magnetycznych, musimy i naprężenia strug oraz ciśnienia boczne wyrażać wzorami, analogicznymi do tych, jakimi posługiwaliśmy się w elektrostatyce. Naprężenie zatem w strudze



indukcji magnetycznej, odniesione do jednostki przekroju strugi będzie równe (por. rozdz. III, ust. 5, str. 215):

$$p = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{HB}{8\pi}. \quad (23)$$

Taką samą wartość ma i ciśnienie boczne.

Powierzchnie biegunowe magnesu są w myśl tej teorii powierzchniami, z których wychodzi lub do których wchodzi, zależnie od znaku magnetyzmu,  $4\pi q$  jednostkowych strug indukcji, gdzie  $q$  oznacza bezwzględną wartość nadwyżki magnetyzmu jednego znaku w tej części sztaby, w której leży dana powierzchnia biegunowa. Wobec tego, że suma algebraiczna tych nadwyżek jest, jak wiemy, w każdym magnesie równa zeru, liczba wchodzących do magnesu jednostkowych strug indukcji magnetycznej jest zawsze równa liczbie strug wychodzących. Twierdzenie zatem, wyrażone wzorem (21a) możemy uogólnić na każdą powierzchnię zamkniętą, zawierającą dowolny magnes i powiedzieć, że strumień indukcji magnetycznej przez powierzchnię zamkniętą, zarówno zawierającą magnes, jak i nie zawierającą magnesu, jest równy zeru.

Magnesu zatem, jak o tym zresztą już wyżej była mowa, nie można upodobnić do naelektryzowanego przewodnika, przez którego powierzchnię przechodzi strumień indukcji elektrycznej różny na ogół od zera. Zapożyczając terminologię z hydrodynamiki, uważamy przewodnik taki albo za źródło, gdy jest naelektryzowany dodatnio, albo, gdy nabój jego jest ujemny, za miejsce odpływu strumienia indukcji. W magnesie źródła i miejsca odpływu są nierozdzielnie ze sobą związane i posiadają tę samą wydajność. Tym się tłumaczy, że powierzchnia magnesu nie jest tak, jak powierzchnia naelektryzowanego przewodnika, powierzchnią, oddzielającą tę część przestrzeni, w której istnieje pole sił, od tej części, w której pola nie ma: wewnątrz magnesu natężenie pola ma wartość różną od zera.

Rozpatrując jednak tylko tę część pola, która znajduje się poza magnesem, możemy znów, opierając się na formalnym podobieństwie tej części pola magnetycznego i pola



elektrostatycznego, energię pola magnetycznego wyznaczyć w analogiczny sposób, jak energię pola elektrycznego. Otrzymamy wtedy na energię jednostki objętości pola (por. rozdz. III, ust. 8, wzór 33, str. 244).

$$U_1 = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{HB}{8\pi}.$$

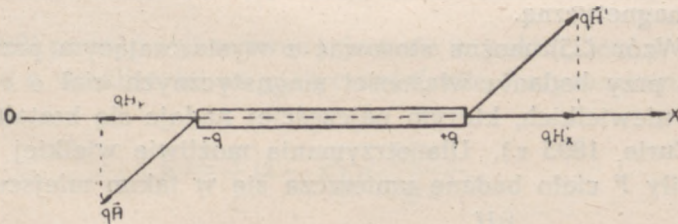
### 5. — CIAŁA DIA- I PARAMAGNETYCZNE.

Gdy chodzi o ciała dia- i paramagnetyczne zazwyczaj zamiast zdolności magnetycznej  $\mu$  wyznacza się wrażliwość magnetyczną  $\chi$  ciała. Większość używanych w tym celu metod polega na pomiarze siły, jaką działa na badane ciało niejednostajne pole magnetyczne.

Niech ciałem tym będzie dipol magnetyczny o masach biegunowych  $\pm q$ , znajdujących się w odległości  $a$  jedna od drugiej i niech kierunek  $Ox$  będzie zgodny z kierunkiem osi magnetycznej dipolu, wtedy rzut na ten kierunek wypadkowej  $F$  sił działających na biegun dipolu jest równy

$$\begin{aligned} F &= qH_x - qH_x = q \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} a - H_x \right) = \\ &= qa \frac{\partial H_x}{\partial x} = M \frac{\partial H_x}{\partial x}, \end{aligned} \quad (a)$$

gdzie  $M$  jest momentem magnetycznym dipolu,  $a$  — odległością biegunów dipolu (rys. 181). Gdy mamy do czynienia z cia-



rys. 181

łem, które nabywa własności magnetyczne dopiero pod działaniem pola, moment magnetyczny jest jak wiemy, pro-



porcjonalny do natężenia pola i skierowany w tę samą, co pole, stronę w ciałach paramagnetycznych, w stronę zaś przeciwną w ciałach diamagnetycznych. Mamy więc zawsze, opuszczając znaczki

$$\vec{dM} = \int \vec{dv} = \kappa \vec{H} \cdot dv.$$

Jeżeli ciało badane jest tak małe, że możemy jego namagnesowanie uważać za jednostajne, wartość zaś  $\frac{dH}{dx}$  w obrębie danego ciała za stałą, na wartość siły działającej  $F$  otrzymujemy wzór

$$F = \kappa \cdot v \cdot H \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2} \kappa \cdot v \cdot \frac{\partial (H^2)}{\partial x}. \quad (25)$$

Wprowadzając zamiast  $\kappa$  wielkość  $\chi$ , równą

$$\chi = \frac{\kappa}{\delta}, \quad (26)$$

gdzie  $\delta$  jest gęstością ciała, i oznaczając masę ciała przez  $m$  otrzymujemy

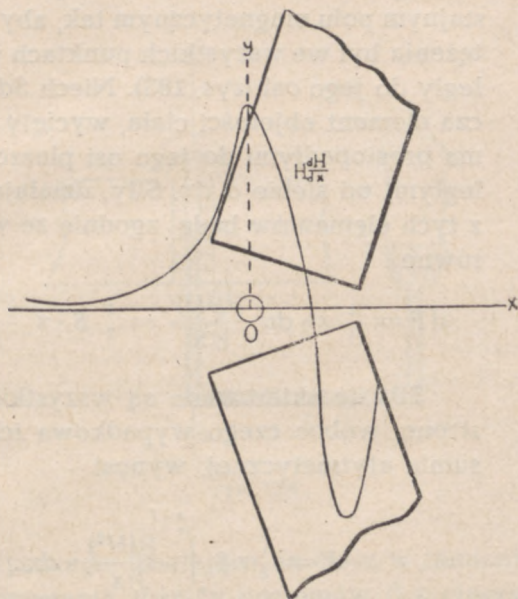
$$F = \frac{1}{2} \chi \cdot m \cdot \frac{\partial (H^2)}{\partial x}. \quad (26a)$$

Wielkość  $\chi$  nazywamy wrażliwością magnetyczną odniesioną do jednostki masy; wielkość  $\kappa$  — wrażliwość magnetyczną, odniesioną do jednostki objętości — nazywać będziemy nadal wrażliwością magnetyczną.

Wzór (25) można stosować z wystarczającym przybliżeniem przy badaniu własności magnetycznych ciał o rozmiarach niewielkich, którym najczęściej nadaje się kształt kulki (P. Curie, 1895 r.). Dla otrzymania możliwie wielkiej wartości siły  $F$  ciało badane umieszcza się w takim miejscu pola, gdzie iloczyn  $H \frac{\partial H}{\partial x}$  ma wartość największą. Miejsce to wyznacza się doświadczalnie mierząc wartości  $H$  i  $\frac{\partial H}{\partial x}$  w różnych miejscach pola. W pomiarach, wykonanych przez Curie'go,



pole, w którym umieszczono badane ciało, zawarte było między dwoma biegunami elektromagnesu, tworzącymi ze sobą kąt ostry. Miejscem, w którym iloczyn  $H \frac{\partial H}{\partial x}$  przechodzi przez maximum, jest punkt  $O$ , leżący na prostej  $x$ , wyznaczającej kierunek działania siły. Siłę tę równoważą siły sprężystości nici, na której zawieszono jest badane ciało.



rys. 182

Jeżeli pomiar wykonywany jest nie w próżni, lecz w środowisku o wrażliwości magnetycznej  $\kappa'$ , siłę  $F$  wyznaczamy ze wzoru

$$F = \frac{1}{2} (\kappa - \kappa') v \frac{\partial (H^2)}{\partial x}. \quad (b)$$

Wtedy bowiem we wzorze (18d) będziemy musieli podstawić  $\mu'$  zamiast  $\mu_0$  otrzymując na wartość namagnesowania

$$\vec{J} = \frac{\mu - \mu'}{4\pi} \vec{H} = \frac{\mu - \mu_0}{4\pi} \vec{H} - \frac{\mu' - \mu_0}{4\pi} \vec{H} = \kappa H - \kappa' H = (\kappa - \kappa') H.$$



Metoda Curie'go nadaje się głównie do pomiarów względnych, gdy chodzi o porównanie wrażliwości magnetycznej różnych ciał; umieszczając je po kolei w tym samym miejscu pola; ze stosunku sił, jakim podlegają, wyznaczamy stosunek wartości  $\chi$ .

Do ciał, mających rozmiary większe można stosować metodę opracowaną przez Gouy'a. Ciało, któremu nadaje się kształt wydłużonego walca, umieszczone jest w niejednostajnym polu magnetycznym tak, aby kierunek natężenia był we wszystkich punktach walca równoległy do jego osi (rys. 183). Niech  $Sdx = dv$  oznacza element objętości ciała, wycięty z ciała dwiema prostopadłymi do jego osi płaszczyznami, oddległymi od siebie o  $dx$ . Siły, działające na każdy z tych elementów będą, zgodnie ze wzorem (25a), równe

$$dF = \frac{1}{2} \chi \cdot dv \frac{\partial(H^2)}{\partial x} = \frac{1}{2} S \cdot \chi \frac{\partial(H^2)}{\partial x} \cdot dx.$$

Siły te skierowane są wszystkie w tę samą stronę, wobec czego wypadkowa ich, równa ich sumie arytmetycznej, wynosi

$$F = \frac{1}{2} \chi S \int_{x=0}^{x=l} \frac{\partial(H^2)}{\partial x} \cdot dx.$$

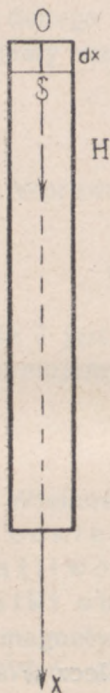
Oznaczając natężenie pola w punktach  $x=0$  przez  $H_0$ , w punktach  $x=l$  przez  $H_l$ , otrzymujemy

$$F = \frac{1}{2} \chi S (H_l^2 - H_0^2) \quad (c)$$

lub gdy pomiar wykonywany jest nie w próżni, lecz w środowisku o przenikliwości  $\chi'$

$$F = \frac{1}{2} (\chi - \chi') S (H_l^2 - H_0^2). \quad (d)$$

Siłę  $F$  można zmierzyć albo zawieszając badane ciało na jednej z belek wagi, wtedy, oczywiście, oś  $x$  musi być pio-

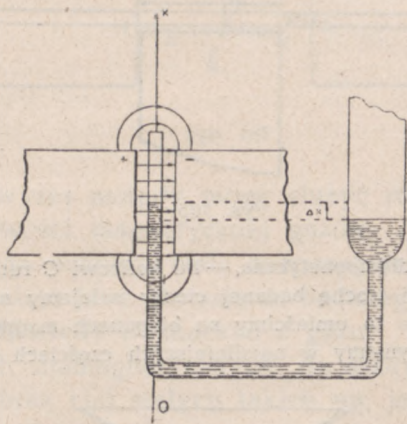


rys. 183



nowa, albo, gdy oś  $x$  jest pozioma, używając do pomiaru wagi skręceń.

Od tej metody niewiele się różni metoda Quincke'go (1885 r.), służąca do wyznaczania wrażliwości magnetycznej cieczy. Badaną ciecz wlewa się do naczynia w kształcie litery  $U$  (rys. 184), którego ramię węższe umieszcza się w polu magnetycznym, ramię zaś szersze pozostawia się poza polem. Siły



rys. 184

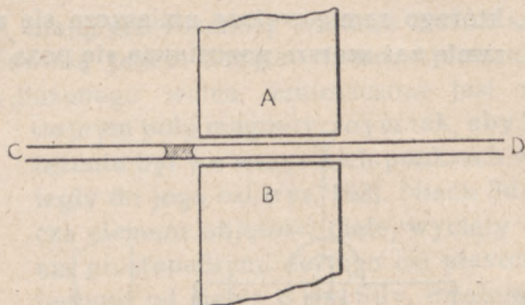
pola magnetycznego, działające na ciecz w ramieniu węższym, powodują powstanie różnicy poziomów  $\Delta x$  cieczy w obu ramionach. Wynikająca stąd różnica ciśnień równowagi działanie sił pola. Oznaczając gęstość cieczy przez  $\delta$ , gęstość środowiska, w którym ciecz się znajduje, przez  $\delta'$ , wrażliwości zaś magnetyczne odpowiednio przez  $\kappa$  i  $\kappa'$  mamy

$$(\delta - \delta') g \cdot \Delta x = \frac{1}{2} (\kappa - \kappa') H^2. \quad (e)$$

Gdy  $\kappa > \kappa'$ , poziom cieczy w rurce wąskiej się podnosi, ciecz jest wciągana w pole do miejsc o największym natężeniu (p. rozdz. III, str. 268), gdy  $\kappa < \kappa'$ , poziom cieczy spada.

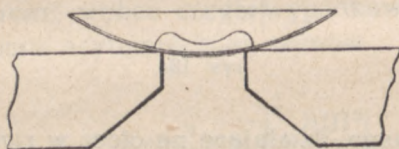


Umieścimy rurkę  $CD$ , zawierającą kroplę badanej cieczy (rys. 185), poziomo między różnoimiennymi biegunami dwu magnesów  $A$  i  $B$ . Gdy ciecz jest paramagnetyczna (ściślej mówiąc, gdy jej zdolność magnetyczna jest większa od zdolności magnetycznej powietrza), kropla porusza się ku części rurki, znajdującej się między biegunami,



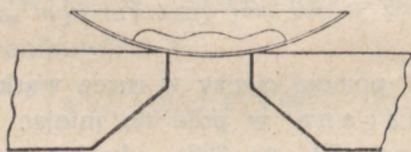
rys. 185

gdy ciecz jest diamagnetyczna, — ku końcowi  $C$  rurki (Quet, 1854 r.). Podobnie, jeżeli trochę badanej cieczy nalejemy na szkiełko zegarkowe i szkiełko to umieścimy na biegunach magnesów tak, jak na rys. 186 a, otrzymamy w najsilniejszych częściach pola (nad krawę-



rys. 186 a

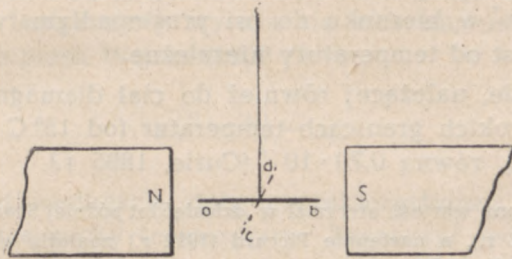
dziami magnesów) wzniesienia, gdy ciecz jest paramagnetyczna, ciecz bowiem wtedy porusza się ku najsilniejszym częściom pola (rys. 186 a), lub też zagłębienia, gdy ciecz jest diamagnetyczna, wtedy bowiem ciecz porusza się ku najslabszym częściom pola (rys. 186 b).



rys. 186 b



Tym się również tłumaczy znany fakt, że cienka pałeczka, wycięta z danego ciała i zawieszona między biegunami magnesów, ustawia się wzdłuż linii sił w przypadku ciała paramagnetycznego i prostopadle do linii sił w przypadku ciała diamagnetycznego (rys. 187).



rys. 187

Opisane wyżej metody mogą służyć również do wyznaczenia wrażliwości magnetycznej gazów. W tym celu wystarczy użyć do pomiaru ciała o znanej wrażliwości magnetycznej i umieścić je w atmosferze badanego gazu. Wzór (b) lub (e) pozwoli wtedy wyznaczyć  $\chi$  gazu.

W ciałach diamagnetycznych, do których należy większość gazów oraz ciał stałych takich np. jak lit, sód, siarka, miedź, cynk, srebro, kadm, antymon, złoto, rtęć, bizmut, ołów, wrażliwość magnetyczna  $\chi$  odniesiona do jednostki masy jest, o ile można wnioskować z pomiarów dotychczas wykonanych, niezależna od natężenia pola magnetycznego, nawet, gdy natężenie to osiąga, jak w pomiarach wrażliwości magnetycznej bizmutu, wykonanych przez Kapitzę, olbrzymią wartość 280 000 oerstedów. Wielkość więc  $\chi$ , której wartość na ogół niewielka nie przekracza zazwyczaj rzędu  $10^{-6}$ , jest istotnie wielkością charakterystyczną dla danego ciała.

Według Meissnera i Ochsenfelda (1933 r.) nadprzewodniki (p. rozdz. V, str. 392) zachowują się w polu magnetycznym, jak ciała diamagnetyczne o zdolności magnetycznej równej zero, wobec czego linie sił magnetycznych nie wchodzi wcale do tych ciał, lecz jedynie okrążają ich powierzchnię.

W znakomitej większości przypadków wartość  $\chi$  jest, jak to ustalił Curie, również niezależna od temperatury (pierwsze prawo Curie'ego). Wyjątek stanowią bizmut, an-



tymon i grafit; tak np.  $\chi$  bizmutu posiada w temperaturze pokojowej wartość  $— 1,08 \cdot 10^{-6}$  jedn. elm. w kierunku osi optycznej i  $1,49 \cdot 10^{-6}$  w kierunku do osi prostopadłym; w temperaturze zaś  $— 188^{\circ}\text{C}$  ma wartość  $— 1,295 \cdot 10^{-6}$  w kierunku osi i  $— 2,04 \cdot 10^{-6}$  w kierunku do osi prostopadłym; w bizmucie ciekłym  $\chi$  jest od temperatury niezależne.

W wodzie, należącej również do ciał diamagnetycznych,  $\chi$  ma w szerokich granicach temperatur (od  $15^{\circ}\text{C}$  do  $159^{\circ}\text{C}$ ), wartość stałą, równą  $0,79 \cdot 10^{-6}$  (Curie, 1895 r.).

Zbliżoną wartość otrzymał w dziesięć lat później Scarpa ( $0,77 \cdot 10^{-6}$ ); Seve (1911 r.), a następnie Piccard (1912 r.) znaleźli wartości nieco mniejsze ( $0,72 \cdot 10^{-6}$ ).

Do ciał diamagnetycznych należą również kassiopelem, lantan i hafn (Meyer St., 1925 r.). Grafit jest silniej diamagnetyczny, niż węgiel bezpostaciowy i diament (Paramasivan, 1927 r.).

Ciała paramagnetyczne, do których należy między innymi tlen, powietrze, glin, pallad, cyna, platyna, można podzielić na trzy grupy. W pierwszej  $\chi$  podobnie, jak w ciałach diamagnetycznych, nie zależy od temperatury. Taką np. własność wykazują potas, wapń, tungsten (wolfram), tytan.

W drugiej zależności  $\chi$  od temperatury wyraża się prawem, ustalonym przy badaniu magnetycznych własności tlenu przez Curie'go (1892 r.),

$$\chi T = C, \quad (27)$$

gdzie  $C$  jest wielkością stałą, tzw. stałą Curie'go.

Wiśniewski otrzymał (1927 r.), biorąc za podstawę ten sam model drobiny dwuatomowej, jakim się posługiwał przy wyznaczaniu stałej dielektrycznej, wzór na wrażliwość magnetyczną tlenu i azotu, dający wartości zgodne z wynikami pomiarów.

Temu drugiemu prawu Curie'go podlegają poza tlenem niektóre roztwory soli żelaza i niklu oraz niektóre sole stałe. W ciałach tej grupy ujawnia się czasem w bardzo niskich temperaturach zależność  $\chi$  od natężenia pola magnetycznego: ze wzrostem pola wartość  $\chi$  wzrasta, początkowo szybko, następnie coraz wolniej, dochodząc asymptotycznie do pewnej wartości „nasylenia” (p. ust. 6), niezależnej od dalszego wzrostu



poła (jak to badając własności magnetyczne siarczanu gadolinu w temperaturze  $1,31^{\circ}\text{K}$  i w polu 22 000 oerstedów stwierdzili Kammerlingh Onnes i Woltjer, 1923 r.).

W przeważającej jednak większości przypadków zależność  $\chi$  od temperatury wyraża się wzorem, ustalonym doświadczalnie przez Weissa (1908 r.)

$$\chi(T - \Theta) = C, \quad (28)$$

gdzie  $\Theta$  jest wielkością stałą, charakterystyczną dla danego ciała i mającą cechy temperatury. Zaznaczyć jednak należy, że w niektórych ciałach paramagnetycznych wielkość  $\Theta$  ma wartość ujemną, wobec czego podobieństwo jej do temperatury jest wyłącznie formalne.

To prawo Weissa stosuje się do tlenu pod wysokim ciśnieniem ( $\Theta = -5,4^{\circ}$ ) do stężonych roztworów żelaza, kobaltu, manganu (Foex, 1921 r.) i do stałych soli krystalicznych w proszku.

Z licznych teorii dia- i paramagnetyzmu omówimy tu jedynie i to w najogólniejszych zarysach teorię Langevina (1905 r.), która, jakkolwiek w wielu szczegółach zmieniona przez współczesne teorie budowy materii, w podstawowych swoich założeniach najbardziej, jak się zdaje, odpowiada wynikom doświadczeń. Langevin przyjmuje, rozwijając założenia, postawione jeszcze przez Ampère'a w jego teorii magnetyzmu, że elementarne cząstki ciała (drobiny lub atomy) są siedliskiem prądów elementarnych, warunkujących własności magnetyczne ciała. W pewnej kategorii ciał prądy te są tego rodzaju, że równoważny im pod względem magnetycznym (p. rozdz. VI) wypadkowy moment magnetyczny jest dla każdej cząstki elementarnej ciała, nie poddanego działaniu zewnętrznego pola magnetycznego, równy zeru. Wzbudzenie pola zewnętrznego powoduje powstanie w każdej cząstce elementarnej jakby prądu indukowanego (p. rozdz. VIII), równoważnego dodatkowemu momentowi magnetycznemu, skierowanemu zgodnie z prawami indukcji elektromagnetycznej w stronę przeciwną do kierunku natężenia pola zewnętrznego. Ciało w tym przypadku wykazuje własności diamagnetyczne. Zmiana temperatury, ujawniająca się w zmianie energii ruchu drobin czy atomów, mały wywiera wpływ na zjawiska, zachodzące wewnątrz tych elementarnych cząstek materii; wrażliwość więc magnetyczna  $\chi$  odniesiona do jednostki masy jest, zgodnie z pierwszym prawem Curie'go, niezależna od temperatury.



W ciałach paramagnetycznych wypadkowy moment magnetyczny każdej poszczególniej drobiny lub poszczególnego atomu ciała nie jest równy zeru. Równa zeru jest jedynie suma tych wypadkowych momentów magnetycznych wszystkich cząstek elementarnych ciała, a to dlatego, że momenty elementarne, mające na skutek bezładnego ruchu cieplnego wszystkie możliwe kierunki, wzajemnie się znoszą w swoim działaniu. W polu magnetycznym zewnętrznym każdy z tych magnesów elementarnych obraca się w kierunku pola, tak że suma rzutów ich momentów na prostą, wyznaczającą kierunek pola, przestaje być równą zeru. Temu „porządkowaniu” momentów magnetycznych przeciwdziała ruch cieplny cząstek, którego energia jest proporcjonalna do temperatury ciała. W temperaturach więc wysokich dopiero przy użyciu pól o natężeniu w praktyce nieosiągalnym można nadać wszystkim elementarnym momentom magnetycznym taki dokładnie kierunek, jaki ma natężenie pola, i otrzymać stan nasycenia. Tym się tłumaczy zmniejszanie się ze wzrostem temperatury wartości  $\chi$ , będącej miarą stosunku namagnesowania do natężenia pola (drugie prawo Curie'go). W niskich temperaturach przy niewielkiej energii ruchu bezładnego stan nasycenia można osiągnąć już przy niewielkich stosunkowo wartościach natężenia pola (przytoczone wyżej doświadczenia Kamerlingha Onnesa i Woltjera); wtedy  $\chi$  jest na ogół funkcją natężenia pola, zmniejszającą się przy dostatecznie wielkim natężeniu do zera.

Przyjmując, że magnesy elementarne ciał paramagnetycznych nie działają na siebie żadnymi siłami (co wynika choćby z faktu, że ciała te przestają być magnesami po usunięciu działania pola zewnętrznego), że więc „porządkowanie” ich jest uwarunkowane jedynie przez natężenie pola magnesującego i energię ruchu cieplnego, Langevin na podstawie rozumowania analogicznego do tego, jakim posługuje się teoria kinetyczna gazów, ustalili, że wzbudzony przez pole zewnętrzne moment magnetyczny  $M_A$  ciała namagnesowanego, odniesiony nie tak, jak to czyniliśmy poprzednio, do jednostki objętości, lecz do masy drobiny gramowej (lub atomu gramowego w ciałach jednoatomowych), równy jest

$$M_A = m_0 N \left\{ \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right\}. \quad (f)$$

We wzorze tym  $m_0$  oznacza wypadkowy moment magnesu elementarnego,  $N$  — ilość magnesów elementarnych w jednej drobinie gramowej (lub atomie gramowym), równą, gdy przyjmemy, że każda drobina (lub atom) stanowi magnes elementarny, ilości drobin,  $a$  zaś wyraża się wzorem

$$a = \frac{m_0 H}{k T} \quad (g)$$



w którym  $k = \frac{R}{N}$ , stałej gazowej (p. tom I, str. 336), podzielonej przez  $N$ . W przypadku nasycenia, gdy wszystkie momenty elementarne są skierowane w tę samą stronę,

$$M_{nas} = M_{\infty} = m_0 N;$$

mamy zatem

$$\frac{M_A}{M_{\infty}} = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a}. \quad (h)$$

Dla małych wartości  $a$ , a więc dla małych wartości  $\frac{H}{T}$ , można przyjąć, czego tu dowodzić nie będziemy, że

$$\frac{M_A}{M_{\infty}} = \frac{a}{3} = \frac{m_0 H}{3kT} = \frac{m_0 \cdot NH}{3kNT} = \frac{\tau_{\infty} \cdot H}{3RT}, \quad (i)$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{M_A}{H} = \chi_A = \frac{M_{\infty}^2}{3RT}, \quad (j)$$

gdzie przez  $\chi_A$  oznaczamy wrażliwość magnetyczną odniesioną do masy jednego mola.

Kładąc

$$\frac{M_{\infty}^2}{3R} = C_A, \quad (k)$$

otrzymujemy

$$\chi_A = \frac{C_A}{T}, \quad (l)$$

drugie prawo Curie'go;  $C_A$  jest stałą Curie'go odniesioną do jednego mola.

Z odstępstwa od prawa Curie'go większości ciał paramagnetycznych wynika, że podstawowe założenie teorii Langevina o wzajemnym nieoddziaływaniu magnesów elementarnych stosuje się jedynie do niewielu ciał paramagnetycznych.

Poza porządkiem momentów elementarnych pole zewnętrzne powoduje również i w ciałach paramagnetycznych powstawanie dodatkowych momentów magnetycznych o kierunku przeciwnym kierunkowi natężenia pola. Diamagnetyzm jest przeto, w myśl teorii Langevina, własnością wszystkich ciał, paramagnetyzm jedynie niektórych.



W ciałach, które uważamy za paramagnetyczne, moment dodatkowy, wzbudzony przez pole zewnętrzne, jest mały w porównaniu z wypadkowym momentem magnetycznym cząstki elementarnej. W pewnych jednak, bardzo zresztą rzadkich przypadkach, można te dwa momenty w pomiarze wyodrębnić. Tak np. wartość  $\chi$  palladu wyraża się, według Foe'go (1921 r.) wzorem

$$\chi = \frac{C}{T - \theta} - d,$$

gdzie pierwszy wyraz prawej strony wzoru wyraża zależność od temperatury paramagnetycznej części wielkości  $\chi$ , stały zaś wyraz  $d$  odpowiada jej części diamagnetycznej.

Jakiegokolwiek byłyby założenia co do istoty omawianych wyżej magnesów elementarnych, będziemy mogli przyjąć, czego tu obszernej nie będziemy rozpatrywali, że z punktu widzenia mechaniki magnesowanie ciała będzie zjawiskiem analogicznym do zwiększania ilości ruchu ciała magnesowanego. Można więc na podstawie zasady zachowania momentu ilości ruchu bryły odosobnionej (tom I, str. 124) przypuszczać, że magnesowanie ciała powodować będzie ruch obrotowy ciała magnesowanego dookoła osi magnesowania. Odwrotnie, ruch obrotowy ciała paramagnetycznego powodować będzie magnesowanie ciała. Oba te zjawiska, przewidywane jeszcze przez Maxwella (1861 r.), a następnie na próżno poszukiwane (1908 r.) przez Richardsona, zostały doświadczalnie potwierdzone: pierwsze — powstawanie ruchu obrotowego ciała przy magnesowaniu — przez Einsteina i de Haasa (1915 r.), później zaś potwierdzone przez innych badaczy, drugie — magnesowanie przy wprawianiu ciała w ruch obrotowy — przez Barnetta (1915 r.). W obu przypadkach do badań użyto ciał ferromagnetycznych, w ciałach tych bowiem własności magnetyczne występują o wiele wyraźniej, niż w ciałach paramagnetycznych.

Zależność od temperatury wrażliwości magnetycznej  $\chi$ , odniesionej do jednostki masy, wyrażona prawami Curie'go i Weissa, wskazuje, że namagnesowanie  $\vec{J}$  wzbudzone przez pole o oznaczonym natężeniu  $\vec{H}$ , zmniejsza się ze wzrostem temperatury. Stąd wynika, zgodnie z warunkami, jakie według drugiej zasady termodynamiki wyznaczają stan równowagi termodynamicznej, że zwiększeniu natężenia pola magnesującego  $\vec{H}$ , a co za tym idzie, namagnesowania  $\vec{J}$ , towarzyszyć będzie wzrost temperatury ciała magnesowanego, zmniejszaniu zaś  $\vec{H}$  — obniżenie temperatury.



Te warunki równowagi termodynamicznej w prosty, choć dość ogólnikowy sposób formuluje tzw. zasada Le Chateliera i Brauna (1887 r.), stwierdzająca, że każda zmiana działania zewnętrznego (w rozpatrywanym przez nas przypadku wzrost natężenia pola magnesującego  $\vec{H}$ ) powoduje w układzie takie zmiany, które przeciwdziałają zmianom, wywołanym bezpośrednio przez wzrost działań zewnętrznych (w danym przypadku wzrost temperatury, zmniejszający wartość  $\chi$  i tym samym namagnesowanie ciała).

Tego zjawiska magnetokalorycznego użyli de Haas i Wiersma (1934 r.) do otrzymania bardzo niskich temperatur, najniższych z otrzymanych dotychczas, zmniejszając nagle silne pole magnetyczne (przeszło 24 000 oerstedów), w którym znajdowało się badane ciało (silnie paramagnetyczne, jak np. atun chromowy) o bardzo niskiej temperaturze, do wartości bardzo małej (paru oerstedów). Na tej drodze udało się następnie otrzymać temperatury mniejsze od 0,01 K a nawet dochodzące do 0,0044 K (Mac Lennan 1935 r.). Temperatury te wyznaczano z prawa Curie'go, mierząc po oziębieniu wrażliwość magnetyczną  $\chi$  odniesioną do jednostki masy.

Bose i Raha stwierdzili (1931 r.) zmianę wrażliwości magnetycznej pod wpływem światła. Wpływ ten jest według nich (1935 r.) szczególnie wyraźny w kryształach i roztworach, zawierających jony żelaza lub metalu, należące do grupy żelaza. Specchia ustalili (1935 r.), że zmiana ta jest dodatnia, innymi słowy, że pod wpływem światła wrażliwość magnetyczna wzrasta. Podobne działanie światła na ciała diamagnetyczne (chlor, pary jodu i bromu) wykrył (1935 r.) Bhuyan.

#### 6. — CIAŁA FERROMAGNETYCZNE.

W ciałach dia- i paramagnetycznych o niewielkiej zdolności magnetycznej mogliśmy bez zmniejszenia dokładności wyników uważać pole magnesujące  $\vec{H}$  za identyczne z polem zewnętrznym  $\vec{H}_0$ . W rzeczywistości jednak pole magnesujące jest, zgodnie ze wzorem (17), równe

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}',$$

gdzie  $H'$  jest polem mas magnetycznych, powstałych na skutek polaryzacji środowiska. Natężenie tego pola zależne jest



od rozmieszczenia mas czynnych na powierzchni badanego ciała, a więc od kształtu ciała. W przypadku rozpatrywanym w ust. 3, gdy badane ciało było ograniczone dwiema płaszczyznami prostopadłymi do kierunku natężenia  $\vec{H}_0$ , jednostajnego pola magnetycznego, natężenie  $H'$ , skierowane zawsze, jak wiemy, przeciwnie do kierunku namagnesowania i dlatego nazywane zazwyczaj natężeniem odnamagnesowującym, było równe

$$\vec{H}' = -\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{J}$$

(p. wzór 18 b). W przypadku ciał inaczej ograniczonych  $\vec{H}'$  pozostaje również proporcjonalne do  $\vec{J}$ , stosunek jednak tych wielkości

$$\frac{H'}{-J} = \frac{N}{\mu_0} \quad (29)$$

będzie mógł być obliczony jedynie w paru prostych przypadkach, (kuli, elipsoidu obrotowego lub wydłużonego walca). Mnożąc licznik i mianownik we wzorze (29) przez wrażliwość magnetyczną  $\kappa$  i uwzględniając wzory (17) i (18d), otrzymujemy

$$\frac{N}{\mu_0} = \frac{\kappa H'}{-\kappa J} = \frac{\kappa H_0 - \kappa H}{\kappa J} = \frac{\kappa H_0 - J}{\kappa J} \quad (29a)$$

Namagnesowanie  $J$  jest więc równe

$$J = \frac{\mu_0 \kappa}{\mu_0 + \kappa N} \cdot H_0 \quad (30)$$

W przypadku zatem, gdy  $\kappa$  jest bardzo małe, gdy więc iloczyn  $\kappa N$  możemy uważać za bardzo mały w porównaniu z  $\mu_0$ , otrzymujemy

$$J = \kappa H_0 \quad (30a)$$

tak jak się przyjmowali przy rozpatrywaniu ciał dia- i paramagnetycznych.



Do ciał ferromagnetycznych takich, jak żelazo, kobalt, nikiel, stopy tych metali oraz, jak to wykrył Heusler (1898 r.), stopy manganu, miedzi i cyny (stopy Heuslera), w których  $\kappa$  posiada na ogół znaczną wartość, przybliżonego wzoru (30a) stosować nie możemy. Co więcej, wprowadzenie takiego ciała do pola jednostajnego  $H_0$  powoduje na ogół tego rodzaju zakłócenia w rozkładzie linii sił, że w wyjątkowych tylko przypadkach — np. elipsoidu obrotowego lub jego krańcowego przypadku — walca wydłużonego w kierunku pola — możemy uważać pole odmagnesowujące, a co za tym idzie i pole magnesujące  $\vec{H}$  za jednostajne.

Najwygodniej do pomiaru wrażliwości lub zdolności magnetycznej używać długich i cienkich wałców, wtedy bowiem  $N$  na całej prawie długości ciała staje się równe zero, związek zaś między namagnesowaniem  $\vec{J}$  i natężeniem  $\vec{H}_0$  pola zewnętrznego wyraża się wzorem (30a). Namagnesowanie  $J$  można wyznaczyć z pomiaru momentu magnetycznego  $M$  przy pomocy magnetometru (p. ust. 2). Zazwyczaj działanie na igłę magnetometru pola zewnętrznego  $H_0$  równoważy się działaniem innego pola dodatkowego, wobec czego odchylenie igły magnetometru zależy jedynie od momentu magnetycznego ciała magnesowanego. Wartość  $\vec{J}$  otrzymujemy ze wzoru

$$J = \frac{M}{v}$$

gdzie  $v$  jest objętością ciała.

Wartość  $\kappa$  lub  $\mu$  możemy również otrzymać, mierząc zależność indukcji magnetycznej  $B$  od natężenia pola magnesującego i kładąc tak, jak poprzednio

$$H = \frac{B}{\mu}.$$

Metod pomiaru  $B$  rozpatrywać tu nie będziemy.

Mamy wtedy

$$B = \mu H = \mu(H_0 + H') = \mu \left( H_0 - \frac{N}{\mu_0} J \right),$$



skąd po uwzględnieniu wzoru (30)

$$B = \mu \left( H_0 - \frac{\alpha N}{\mu_0 + \alpha N} H_0 \right) = \mu \cdot \frac{\mu_0}{\mu_0 + \alpha N} \cdot H_0.$$

Podstawiając ze wzoru (18d)

$$\mu - \mu_0 = 4\pi\alpha$$

i

$$\alpha = \frac{\mu - \mu_0}{4\pi},$$

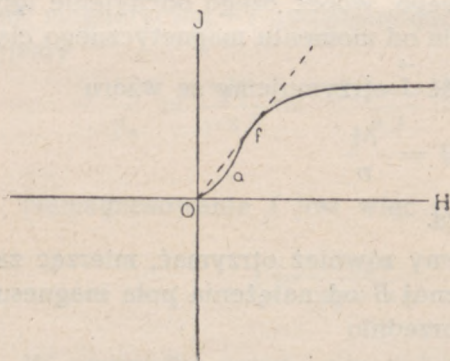
otrzymujemy

$$B = \mu \cdot \frac{4\pi\mu_0}{4\pi\mu_0 + N(\mu - \mu_0)} H_0$$

i wreszcie

$$\mu = \frac{(4\pi - N)B}{4\pi H_0 - \frac{N}{\mu_0} B}.$$

Jeżeli ciało, poddawane działaniu pola magnesującego, jest magnesowane po raz pierwszy (lub też jeżeli wpływ magnesowań poprzednich został w ten czy inny sposób usunięty), wtedy namagnesowanie  $J$  ciała wzrasta ze wzrostem natężenia pola magnesującego,



rys. 188

początkowo nieznacznie, następnie o wiele prędej, potem znów wolniej, aby wreszcie w dostatecznie silnym polu dojść do wartości stałej, której dalszy wzrost pola już nie zmienia. Odkładając na osi odciętych natężenia pola magnesującego, (często nazywanego polem prawdziwym w odróżnieniu od pola zewnętrznego  $H_0$ ),

na osi rzędnych namagnesowanie  $J$  (rys. 188), otrzymamy zależność między  $J$  i  $H$  w postaci krzywej, którą nazywać będziemy krzywą zerową. Natężenie pola, w którym namagnesowanie osiąga stałą i największą wartość, dochodząc

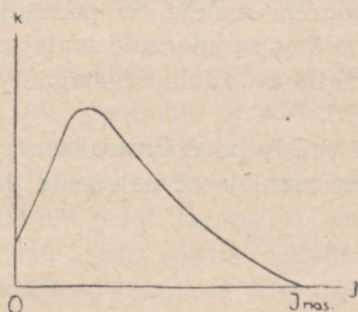


do stanu nasycenia  $J_{\max} = J_{\text{nas}}$ , ma dla różnych ciał różne wartości. Tak np. w żelazie  $J$  dochodzi do wartości bliskiej wartości stanu nasycenia w polu o natężeniu, równym mniej więcej 2 oerstedom, w niklu — 100 oerstedom, w stopie niklu i żelaza (78,2% Ni i 21,8% Fe) tzw. permalloyu już przy natężeniu 0,2 oersteda, a więc już w polu ziemskim; za to w kobalcie stan nasycenia nie jest jeszcze osiągnięty w polach o natężeniu 12 000 oerstedów (Preuss).

Podobnie różnią się i wartości  $J_{\max}$ : w żelazie o temperaturze  $19^{\circ}\text{C}$  wartość ta wynosi około 1880 j. elm., w niklu o tej samej temperaturze — 479 j. elm. (według danych Weissa); w permalloyu mniej więcej 900 j. elm.

Z kształtu krzywej  $J = i(H)$  wynika bezpośrednio, że nawet podczas tego magnesowania, gdy wpływ magnesowań poprzednich został całkowicie usunięty, ani wrażliwość magnetyczna  $\kappa$  ani zdolność magnetyczna  $\mu$  nie mają wartości stałej, przechodząc przy pewnej wartości natężenia pola (lub namagnesowania  $J$ ) przez maximum (punkt  $f$  krzywej rys. 188).

Odkładając na osi odciętych namagnesowanie  $J$ , na osi rzędnych wrażliwość  $\kappa$  (rys. 189), otrzymujemy krzywą przecinającą oś odciętych w punkcie  $J = J_{\max}$ .



rys. 189

Zależność indukcji magnetycznej  $B$  od natężenia  $H$  wyrazi się krzywą podobną, lecz nie identyczną z krzywą rys. 188. Ze wzoru bowiem

$$B = (\mu_0 + 4\pi\kappa)H = \mu_0 H + 4\pi J \quad (\text{a})$$

wynika, że jakkolwiek w polach o natężeniu niewielkim możemy, gdy chodzi o ciała o wielkiej wrażliwości magnetycznej przyjąć

$$B \doteq 4\pi J,$$



to jednak w polach o natężeniach znacznych musimy uwzględnić również i pierwszy wyraz prawej strony wzoru (a). W ciele, które osiągnęło stan nasycenia, indukcja wzrasta proporcjonalnie do  $H$ , mamy bowiem

$$B = \mu_0 H + 4\pi J_{\text{nas}} = \mu_0 H + a,$$

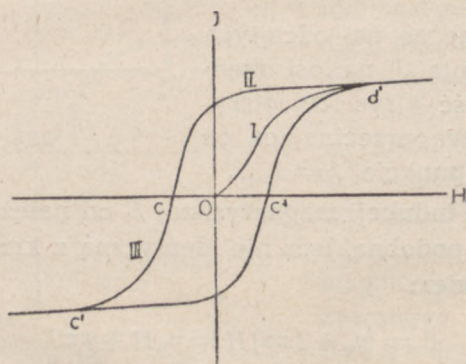
gdzie  $a$  jest wielkością stałą. Wtedy zdolność magnetyczna

$$\mu = \mu_0 + 4\pi\kappa$$

staje się równa  $\mu_0$ , a więc w układzie elektromagnetycznym równa jedności.

Przed dojściem ciała do stanu nasycenia  $\mu$ , jak o tym była już wyżej mowa, początkowo wzrasta, następnie maleje: w żelazie, otrzymanym przez elektrolizę, wzrasta od 700 (w polu o bardzo małym natężeniu, rzędu 0,01 oersteda) do 26 000, poczem maleje; w permalloyu od 6000 do 80 000; w niklu zmiany są znacznie mniejsze: od 400 do 1100; w kobaltie początkowa zdolność magnetyczna wynosi około 10, największa 175.

Gdy po doprowadzeniu ciała do stanu nasycenia zaczniemy zmniejszać natężenie pola magnesującego, namagnesowa-



rys. 190

nie też będzie stopniowo się zmniejszało, zmniejszanie się będzie jednak stale mniejsze od poprzedniego wzrastania przy zwiększaniu natężenia pola, wobec czego krzywa II (rys. 190),



wyrażająca w tym przypadku związek między  $J$  i  $H$ , będzie leżała wyżej od krzywej zerowej. Natężeniu  $H=0$  będzie wtedy odpowiadała pewna oznaczona wartość namagnesowania  $J$ , wyrażająca tzw. pozostałość magnetyczną (magnetyzm szczątkowy). Ciało pozostanie namagnesowane nawet po usunięciu pola magnesującego. Dopiero zmiana kierunku pola magnesującego doprowadzi przy pewnej wartości natężenia pola ( $OC$  na rys. 190) do całkowitego odmagnesowania ciała. Tę wartość natężenia pola  $H$  nazywamy natężeniem koercji (łac. *coercere* — powściągać, hamować). W żelazie wynosi ono około 0,2 oersteda, w permalloyu jest rzędu 0,05 oersteda, w kobalcie dochodzi do 12 oerstedów, w niektórych gatunkach stali do 70 oerstedów (stal chromowa); w stopach Heuslera, co prawda w warunkach wyjątkowych, nawet do 172 oerstedów.

Według Stäbleina (1925 r.) natężenie koercji stali o 30% kobaltu wynosi 220 oerstedów.

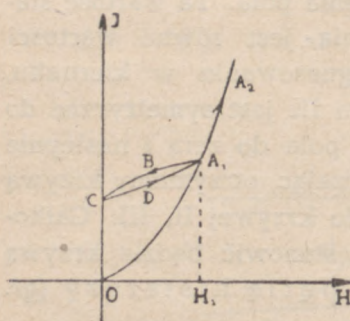
Dalszy wzrost natężenia pola (o kierunku ujemnym) powodować będzie namagnesowanie o kierunku przeciwnym do poprzedniego; namagnesowanie to wzrastać będzie do pewnej wartości granicznej, powyżej której zachowa wartość stałą bez względu na wartość natężenia pola. Ta wartość stała, odpowiadająca stanowi nasycenia, jest równa wartości nasycenia, otrzymanej przy namagnesowaniu w kierunku, przyjętym za dodatni, tak że krzywa III jest symetryczna do krzywej II. Zmniejszając natężenie pola do zera i następnie po zmianie kierunku znów je zwiększając, otrzymamy krzywą namagnesowania  $c'C'd'$  symetryczną do krzywej II, III. Całkowitą zatem krzywą namagnesowania stanowić będzie krzywą zamkniętą — krzywą, cykl lub pętlę histerezy (gr. *hystereo* — opóźniam się).

Poddając ciało po raz drugi działaniu tak samo zmieniającego się pola otrzymamy krzywą, zbliżoną do otrzymanej poprzednio. Otrzymywane w ten sposób kolejne krzywe bardzo szybko dążą do postaci ostatecznej, którą zachowują przy wszelkich ponownych namagnesowaniach, zawartych w tych samych granicach.



Przypuśćmy, przyjmując założenia, postawione przez Evinga, że magnesy elementarne, z których składa się ciało ferromagnetyczne, są namagnesowane do stanu nasycenia i że, wbrew temu, co zakładaliśmy mówiąc o ciałach paramagnetycznych, działają na siebie wzajemnie. Na magnesy te, o całkowitym momencie wypadkowym równym zero, pola słabe działają w ten sposób, że zmniejszają kąt, jaki osie poszczególnych magnesów lub raczej grup magnesów, silniej z sobą związanych, tworzą z kierunkiem pola. Zjawisko zachodzi wtedy na ogół odwracalnie. Dalszy wzrost natężenia powoduje wreszcie ustawienie w kierunku pola tych magnesów, których osie tworzyły początkowo kąt większy od  $90^{\circ}$ , a wreszcie i takie, których osie miały początkowo kierunek biegunowo przeciwny do kierunku pola. Gdy po osiągnięciu stanu nasycenia zmniejszamy natężenie pola, nowy stan równowagi, osiągnięty przez uporządkowanie magnesów elementarnych, nie jest od razu naruszony; nawet, gdy natężenie pola zmieni swój kierunek, zaledwie niektóre pojedyncze magnesy lub pojedyncze ich grupy zmieniają kierunek swych osi; dopiero, gdy natężenie pola osiągnie po zmianie kierunku pola pewną znacznie większą wartość, równą mniej więcej natężeniu koercji, nagle następuje odwrócenie kierunku osi magnetycznej; krzywa namagnesowania, biegnąca dotychczas mniej więcej równoległe do osi  $H$ , nagle stromo opada. To proste wyjaśnienie zjawisk histerezy dane przez Evinga, zostało następnie pogłębione i rozwinięte w teorii ferromagnetyzmu Weissa. (p. niżej).

Oprócz tego głównego cyklu histerezy możemy otrzymać jeszcze tzw. cykle wtórne, gdy natężenie pola  $H_1$ , mniejsze od natężenia, przy którym następuje nasycenie, zmniejszamy do zera, a następnie znów zwiększamy do wartości poprzedniej. Krzywa namagnesowania utworzy wtedy pętlę  $A_1BCDA_1$ , (rys. 191), rozpoczynającą się i kończącą w punkcie  $A_1$ . Przy dalszym zwiększaniu natężenia pola ponad wartość  $H_1$ , zmianę namagnesowania odtwarzać będzie krzywa  $A_1A_2$ .



rys. 191

Od zjawiska histerezy należy odróżnić zjawisko opóźniania się namagnesowania, występujące w niektórych ciałach (zwłaszcza w żelazie miękkim) szczególnie wtedy, gdy ciało ma rozmiary znacznie większe. Namagnesowanie nie od razu przybiera wartość, odpowiadającą danemu natężeniu pola, dochodząc do wartości właściwej nieraz po upływie kilku lub kilkunastu sekund, a nawet niekiedy paru minut.

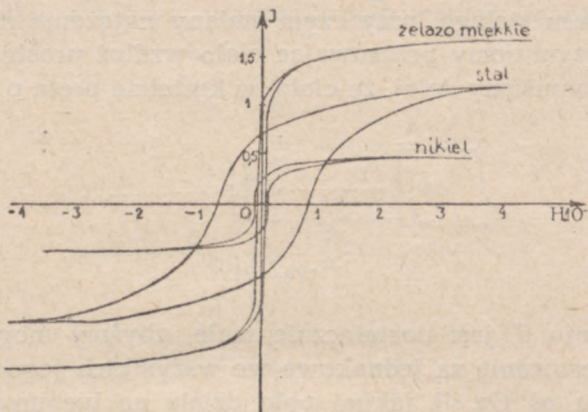


(Ewing). Ciała, w których to zjawisko zachodzi, nazywamy magnetycznie lepkiemi.

Jeżeli jednak ciało magnesowane ma odpowiednio dobrane wymiary, gdy np. ma kształt cienkiego długiego pręta, kształt krzywej histerezy nie zależy od szybkości zmian pola. Własności magnetyczne ciała pozostają bez zmiany nawet wtedy, gdy okres trwania jednego cyklu zmian natężenia pola spada do milionowej części sekundy (Kaufmann i Erhardt, 1916 r.). Dopiero przy częstościach wyższych (rzędu powyżej  $10^8$ ) ciało nie podlega już magnesowaniu, jego zdolność magnetyczna staje się równa jedności (według cytowanych przez Olliviera doświadczeń Arcadieva).

Według Strutta (1931 r.) zdolność magnetyczna żelaza, kobaltu i niklu stopniowo się zmniejsza w miarę częstości zmian pola magnetycznego. Wnioski Strutta znajdują potwierdzenie w wynikach pomiarów Haaga i Jonesa (1932 r.), wykonanych przy użyciu zgoła odmiennej metody.

Pole powierzchni, objętej przez pętlę histerezy, jest, jak to wynika z przytoczonych wyżej wartości pozostałości magnetycznej i natężenia koercji, dla różnych ciał różne. Tytułem przykładu podajemy za Peruccą krzywe histerezy miękkiego żelaza, stali i niklu (rys. 192).

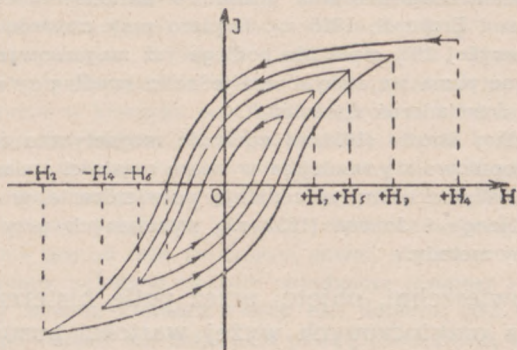


rys. 192

Jeżeli ciało będziemy poddawali cyklom magnesowania, zawartym w coraz to mniejszych granicach zmian natężenia magnesującego, pętle histerezy będą obejmowały coraz to mniejsze pola tak, że pozostałość magnetyczna będzie dążyła stopniowo do zera (rys. 193).

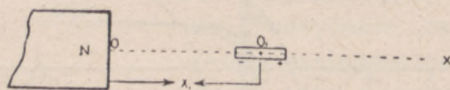


Jednocześnie dążyć będzie do zera energia, pochłaniana przez ciało podczas cyklu magnesowania, energia ta bowiem, wyrażona w ergach na  $\text{cm}^3$ , jest, jak to wykazał (1881 r.) Warburg, proporcjonalna do pola powierzchni, objętej przez pętlę histerezy.



rys. 193

Istotnie, przypuśćmy, że badane ciało magnesujemy w polu magnesu stałego, przy czym zmiany natężenia magnesującego otrzymujemy przesuwać ciało wzdłuż prostej  $Ox$  (rys. 194). Przypuśćmy dalej, że ciało, w kształcie pręta o długości  $l$



rys. 194

i przekroju  $S$ , jest dostatecznie małe, abyśmy mogli uważać namagnesowanie za jednakowe we wszystkich jego punktach. Rzuty na oś  $Ox$  sił, jakimi pole działa na bieguny ciała, są odpowiednio równe

$$-\sigma S H_x \quad \text{i} \quad +\sigma \cdot S \left( H_x + \frac{dH_x}{dx} l \right),$$

gdzie  $\sigma$  oznacza gęstość powierzchniową magnetyzmu, indukowanego na prostopadłych do osi  $Ox$  powierzchniach danego ciała.



Wypadkowa tych rzutów, skierowana wzdłuż osi  $Ox$ , wynosi

$$X = \sigma \cdot S \cdot l \cdot \frac{dH_x}{dx}$$

lub przyjmując, że kierunek sił pola jest w miejscu, zajmowanym przez ciało, zgodny z kierunkiem osi  $Ox$

$$X = \sigma \cdot S \cdot l \cdot \frac{dH_x}{dx} = M \cdot \frac{dH}{dx} = J \cdot v \cdot \frac{dH}{dx}, \quad (b)$$

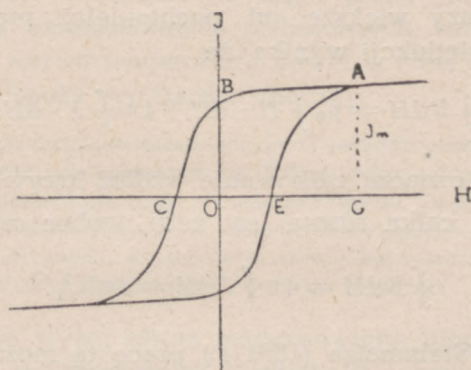
gdzie  $M$  jest momentem magnetycznym ciała,  $v$  — jego objętością. Przy przesuwaniu ciała o  $dx$  praca sił pola wyniesie

$$dW = M \frac{dH}{dx} dx = M \cdot dH = J \cdot v \cdot dH,$$

w odniesieniu więc do jednostki objętości

$$dW_1 = J \cdot dH. \quad (c)$$

Założmy, że ciało znajdowało się początkowo w punkcie  $O_1$  (rys. 194), w którym natężenie pola magnesującego wynosi



rys. 195

siło  $H_1$ , namagnesowanie zaś było równe zero (punkt  $E$  na rys. 195). Na skutek działania sił przyciągających pola ciało znajdzie się w punkcie  $O$ , w którym natężenie pola wynosi  $H_m$ , namagnesowanie zaś  $J_m$  (punkt  $A$  na krzywej rys. 195). Praca sił



poła, wykonana przy tym przesunięciu, równa  $\int J \cdot dH$ , wyraża się polem  $EAGE$  (rys. 195). Z tego położenia odsuwamy stopniowo ciało od magnesu aż do takiej odległości  $x$ , w której natężenie pola magnesującego spadłoby do zera. Zmianę namagnesowania odtworzy krzywa  $AB$ , pracę zaś, wykonaną przeciwko siłom pola, a więc dostarczoną z zewnątrz wyrazi pole  $GABOG$ . W tym położeniu odwróćmy ciało o  $180^\circ$ , co nie będzie wymagało żadnej pracy,  $H$  bowiem jest w tej odległości, jak mówiliśmy, równe zeru, i przesuwać ciało z powrotem do tego samego położenia  $x = x_1$ , jakie zajmowało na początku, gdzie natężenie pola, działając w kierunku przeciwnym do poprzedniego, ma tę samą wartość bezwzględną  $H_1$ . Namagnesowanie spadnie wtedy do zera (punkt  $C$  na rys. 195); praca zaś wykonana podczas tego przesunięcia przez siły zewnętrzne wyrazi się polem  $OBC$ . Nadwyżka zatem pracy dostarczonej z zewnątrz wyrazi się podczas tej połowy cyklu polem  $EABCE$ , a więc polem połowy pętli histerezy. Pracę przeto pochłoniętą podczas całego cyklu wyrazi pole powierzchni, objętej przez całą pętlę.

Jeżeli na osi rzędnych odkładać będziemy nie namagnesowanie  $J$ , lecz indukcję  $B$ , pole otrzymanej w ten sposób pętli będzie  $4\pi$  razy większe od pochłoniętej pracy. Istotnie, z określenia indukcji wynika, że

$$\oint BdH = \mu_0 \oint H \cdot dH + 4\pi \oint J \cdot dH, \quad (d)$$

gdzie znak  $\oint$  oznacza całkowanie wzdłuż krzywej zamkniętej. Pierwsza całka równa jest zeru, wobec czego

$$\oint BdH = 4\pi \oint JdH = 4\pi W_1. \quad (31)$$

Według Steinmetza (1891 r.) pracę tę można wyznaczyć ze wzoru

$$W_1 = \eta \left( \frac{B_1 - B_2}{2} \right)^{1,6}, \quad (31a)$$

gdzie  $B_1$  i  $B_2$  oznaczają krańcowe wartości indukcji, otrzymane podczas cyklu magnesowania,  $\eta$  — pewną wielkość stałą, mającą dla żelaza miękkiego wartość równą mniej więcej



0,0005 (w jednostkach elektromagnetycznych), dla stali hartowanej od 0,035 do 0,08, dla niklu 0,015, dla kobaltu 0,01 i wreszcie dla permalloyu tylko 0,0001.

Wzór ten jednak jest, jak to wykazały pomiary Ewinga (1894 r.), Gray'a (1894 r.), Weissa (1896 r.) i innych, jedynie wzorem przybliżonym; wykładnik potęgi nie zawsze jest równy 1,6 (niekiedy jest on funkcją indukcji magnetycznej  $B$ ), wartości zaś współczynnika  $\eta$  nieraz dla tego samego ciała wahają się w dość szerokich granicach. Mimo to wzór ten bywa czasami bardzo przydatny; dając nam pewne pojęcie o rzędzie wielkości energii, zużytej podczas magnesowania.

Energia ta ujawnia się w postaci ciepła, stan bowiem magnetyczny ciała nie zmienia się przy magnesowaniu cyklicznym. Dzieląc obliczoną ze wzoru (31) lub (31a) energię rozproszoną przez mechaniczny równoważnik ciepła i przez ciepło właściwe ciała magnesowanego, możemy wyznaczyć wzrost temperatury ciała (oczywiście, cieplnie odosobnionego). Wzrost ten jest, na ogół, niewielki, tak np. miękkie żelazo przy magnesowaniu w polu zmieniającym się od  $+75$  do  $-75$  oerstedów, ogrzewa się podczas jednego cyklu o mniej więcej  $0,3 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}$  (Ewing). Jeżeli jednak, jak to często bywa w zastosowaniach technicznych, zmiany pola są bardzo częste, wzrost temperatury nawet w ciele niedoskonale odosobnionym, może być bardzo znaczny.

Poza tym procesem nieodwracalnym zachodzi jeszcze odwracalna wymiana ciepła z otoczeniem, w której ciało pobiera ciepło przy magnesowaniu, oddając przy odmagnesowywaniu. To zjawisko magnetokaloryczne, przebiegające w ciałach ferromagnetycznych tak, jak w paramagnetycznych, występuje ze szczególną wyrazistością w temperaturach bliskich temperaturze Curie'go (p. niżej).

Nakreślony wyżej obraz magnesowania ulega znacznym zmianom, gdy od temperatur bliskich  $0^{\circ}\text{C}$  przechodzimy do temperatur coraz to wyższych. Przede wszystkim stopniowo maleje zarówno pozostałość magnetyczna  $J_p$  jak i natężenie koercji  $H_k$ ; dla niklu w temperaturze około  $300^{\circ}\text{C}$   $J_p$  spada do 0,4 tej wartości, jaką wielkość ta posiadała w temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$  (Harrison, 1904 r.),  $H_k$  zaś do mniej więcej  $1/4$  wartości w temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$  (Gans, 1913 r.). Podobnie zmniejsza się

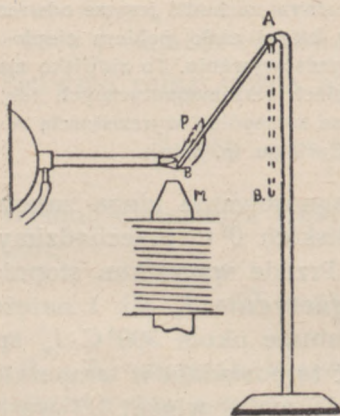


wartość namagnesowania w stanie nasycenia  $J_{nas}$ . W pewnej, dla każdego ciała ferromagnetycznego innej temperaturze własności ferromagnetyczne nagle znikają (Curie, 1894 r.), ciało staje się paramagnetyczne, podlegając powyżej tej temperatury Curie'ego (punktu Curie'ego, p. ust. 5), prawu Weissa, wyrażonemu wzorem (28).

Jednocześnie zmienia się nagle, jak to wykazał Weiss (1911 r.), wartość ciepła właściwego ciała. Ciepło to wzrastając anormalnie szybko w pobliżu temperatury Curie'ego, w tej temperaturze nagle spada zmniejszając się w niklu od 0,154 do 0,125, w żelazie od 0,305 do 0,185; przy dalszym wzroście temperatury wzrasta prawidłowo. Przejściu przez punkt Curie'ego nie towarzyszą na ogół żadne zmiany w budowie krystalicznej ciała.

Temperatura ta dla żelaza wynosi  $769^{\circ}\text{C}$ , dla kobaltu  $1130^{\circ}\text{C}$ , dla niklu  $358^{\circ}\text{C}$ , dla stopów Heuslera od  $60^{\circ}\text{C}$  do  $380^{\circ}\text{C}$ , zależnie od składu i sposobu przygotowania. Gadolin, według pomiarów Urbain'a, Weissa i Trombe'a (1935 r.), wykazuje własności ferromagnetyczne w temperaturach niższych od temperatury pokojowej; jego punkt Curie'ego leży w pobliżu  $16^{\circ}\text{C}$  ( $16 \pm 2^{\circ}\text{C}$ ). Jeszcze niższą wartość ma punkt Curie'ego dla alunu żelazowoamonowego; ciało to staje się ferromagnetyczne w temperaturach niższych od 0,05 K (Kusti, Lainé, Rollin i Simon, 1936 r.).

Zmianę własności magnetycznych, zachodzącą przy ogrzewaniu ciał ferromagnetycznych, można wykazać następującym prostym



rys. 196

doświadczeniem (Perucca). Nad biegunem silnego elektromagnesu zawieszamy pręt niklowy  $AB$  tak, aby był on przez siły magnetyczne odchylony od położenia pionowego (rys. 196). Pręt ten ogrzewamy płomieniem palnika gazowego, powyżej temperatury Curie'ego pręt przestaje być ferromagnetyczny i opada do położenia pionowego  $AB_1$ . Gdy jednak ogrzewanie przerwiemy i pręt wróci do temperatury poprzedniej, zostanie znów przyciągnięty przez elektromagnes i zajmie z powrotem położenie  $AB$ .



W pierwiastkach ferromagnetycznych zjawisko Curie'go jest odwracalne: własności ferromagnetyczne pojawiają się przy ostygnięciu ciała w tej samej temperaturze, w jakiej zanikały przy ogrzewaniu. W stopach temperatury te zazwyczaj nie są jednakowe: ciało staje się znów ferromagnetyczne w temperaturze niższej od temperatury Curie'go, przy czym różnica tych temperatur może być nieraz bardzo znaczna, tak np. dla stopu żelaza z manganem, zawierającego 12% manganu, wynosi ona około  $700^{\circ}$ .

Za odpowiednik ciał ferromagnetycznych można w dziedzinie elektryczności uważać dielektryki typu soli Seignette'a (sól sodowo-potasowa kwasu winowego).

W kondensatorze o dielektryku, należącym do tego rodzaju ciał zależność napięcia na zbrojach od naboju kondensatora nie wyraża się linią prostą, lecz krzywą, analogiczną do krzywej magnesowania ciał ferromagnetycznych. Przy okresowej zmianie napięcia krzywa ta przybiera kształt pętli histerezy. Stała dielektryczna może wtedy osiągnąć niezwykle wielką wartość (powyżej 18000). Te szczególne własności znikają w temperaturze powyżej  $+25^{\circ}$  C i poniżej  $-20^{\circ}$  C. Temperatury te są jakby odpowiednikami temperatury Curie'go w ciałach ferromagnetycznych.

W tych samych granicach temperatur sól Seignette'a posiada stałą piezoelektryczną paręset razy większą od stałej kwarcu.

Poza solą Seignette'a podobne własności posiadają jeszcze niektóre inne dielektryki. Ciała takie nazywane są często, niezbyt zresztą ściśle, seignettoelektrykami.

Działania mechaniczne, wywierane na ciało podczas magnesowania, wpływają na ogół znacznie zarówno na wartość magnetyzmu szczątkowego  $J_p$ , jak i natężenia koercji  $H_k$  oraz namagnesowania nasycenia  $J_{nas}$ . Tak np. uderzenia i wstrząsy zmniejszają pozostałość magnetyczną; pole, objęte przez krzywą histerezy, maleje:  $H_k$  w miękkim żelazie magnesowanym cyklicznie może spaść do zera, gdy ciało jest w czasie magnesowania silnie uderzane. Rozciąganie i ściskanie wywołuje zmiany, których znak jest zależny od natężenia pola magnesującego. W drucie żelaznym rozciąganie zwiększa namagnesowanie  $J$  w polu słabym i zmniejsza w silnym polu magnesującym (Villari, 1868 r.). Przy pewnej wartości natężenia pola rozciąganie (o ile tylko zawarte jest w pewnych wąskich granicach) nie wywiera żadnego wpływu na war-



tość  $J$ . Jest to tzw. krytyczny punkt Villari'ego. Istnienie podobnego punktu można również stwierdzić i w nikielu (Heydweiller, 1894 r.) i w kobaltcie (W. Thomson, 1875 r.).

Zjawiska te stoją w niewątpliwym związku z tzw. magnetostrykcją (łac. stringere — ściągać), ujawniającą się w zmianie długości ciała, poddawanego magnesowaniu podłużnemu. Zmiany te są bardzo małe: pręt z żelaza miękkiego o długości 10 m wydłuża się w polu 80 oerstedów o  $3 \cdot 10^{-5}$  cm; jest to największe wydłużenie, przy dalszym bowiem wzroście pola wydłużenie to się zmniejsza, dochodzi do zera i wreszcie przy dalszym wzroście zmienia znak — pręt się skraca. Nikiel zawsze się skraca, przyczem poczynając od mniej więcej 600 oerstedów skrócenie przestaje być zależne od natężenia pola, osiągając pewną wartość stałą, mniej więcej 10 razy większą od największego wydłużenia żelaza.

O wiele bardziej złożone są zjawiska, występujące przy skręcaniu i magnesowaniu kołowym ciała (np. przez prąd elektryczny, płynący wzdłuż magnesowanej sztaby). Tych zjawisk (tzw. zjawisk Matteucci'ego — Wiedemanna) rozpatrywać tu nie będziemy.

Przyjmijmy tak, jak to, łącząc teorię Langevina z założeniami Ewinga, zrobił Weiss w swej teorii ferromagnetyzmu (1908 r., 1910 r.), że w ciałach ferromagnetycznych magnesy elementarne działają na siebie wzajemnie siłami, mającymi, jak się zdaje (Weiss, 1910 r. Heisenberg, 1928 r.), swe źródło we wzajemnych działaniach elektrostatycznych jednego atomu na drugi. Siły te wytwarzają pole wewnętrzne, które Weiss przyjmuje za równoważne polu magnetycznemu o natężeniu

$$H_w = K \cdot J, \quad (e)$$

gdzie  $K$  oznacza pewną wielkość stałą, zależną od rodzaju ciała,  $J$  — tak, jak poprzednio, namagnesowanie.

Oznaczając przez  $\delta$  gęstość ciała, przez  $D$  jego ciężar drobinowy, otrzymujemy

$$J \frac{D}{\delta} = M_A,$$

gdzie  $M_A$  jest momentem magnetycznym, odniesionym do jednej drobinicy gramowej (lub atomu gramowego) (p. str. 330).



Stąd

$$H_w = \frac{K \cdot \delta}{D} \cdot M_A. \quad (f)$$

Pod działaniem tego pola wewnętrznego elementy objętości ciała nabywają pewnego namagnesowania  $M$ , które w odróżnieniu od namagnesowania, nabytego pod działaniem pola zewnętrznego, Weiss nazywa namagnesowaniem samoistnym (aimantation spontanée).

Namagnesowanie to możemy obliczyć, podstawiając do wzorów Langevina wartość  $H_w$ , zamiast  $H$ . Mamy zatem

$$\frac{M_A}{M_\infty} = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \quad (g)$$

oraz

$$a = \frac{m_0 H_w}{kT} = \frac{m_0 K \cdot \delta}{kT \cdot D} M_A = \frac{m_0 N \cdot K \cdot \delta}{kN \cdot D \cdot T} M_A = \frac{M_\infty K \delta}{R \cdot D \cdot T} M_A,$$

skąd

$$\frac{M_A}{M_\infty} = \frac{RD \cdot T}{M_\infty^2 K \delta} a. \quad (h)$$

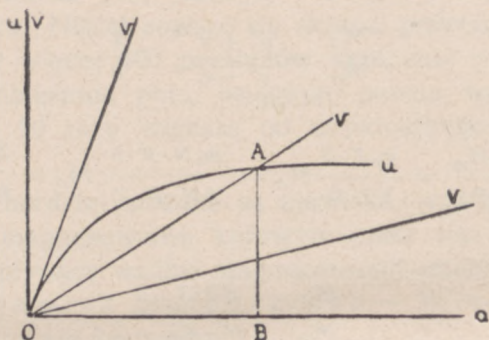
Przyjmijmy  $a$  za wielkość zmienną i napiszmy, że

$$u = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \quad \text{oraz} \quad v = \frac{R \cdot D \cdot T}{M_\infty^2 K \delta} a. \quad (i)$$

Wtedy przy takiej wartości  $a$ , przy której  $u = v$ , stosunek  $\frac{M_A}{M_\infty}$  będzie równy  $u = v$ . Odkładajmy na osi odciętych wartości zmiennej  $a$ , na osi zaś rzędnych wartości  $u$  i  $v$ . (rys. 197). Związek między  $u$  i  $a$  wyrazi się krzywą, która dla wielkich wartości  $a$  będzie asymptotycznie zbliżała się do prostej  $u = 1$ , jaką otrzymujemy kładąc  $a = \infty$  w równaniu krzywej  $u$ ; dla małych zaś wartości  $a$  będzie prostą, tworzącą z osią  $a$  kąt, którego styczna równa jest  $\frac{1}{3}$ . Zależność  $v$  od  $a$  wyraża się prostą, tworzącą z osią  $a$  kąt tym większy, im wyższa jest wartość temperatury  $T$ . W temperaturach niskich, bliskich zera bezwzględnego, kąt ten jest bardzo mały; prosta  $v$  przecina krzywą  $u$  w punkcie dostatecznie odległym od początku współrzędnych, aby można było przyjąć, że  $u$  w tym punkcie równe jest jedności.



W punkcie tym  $\nu=1$ , stosunek zatem  $\frac{M_A}{M_\infty}$  też równy jest jedności. Namagnesowanie więc samoistne w niskich temperaturach zbliża się asymptotycznie do namagnesowania nasycenia. Przy wzroście temperatury punkt przecięcia się  $u$  i  $v$  zbliża się ku początkowi spólrzędnych; stosunek  $\frac{M_A}{M_\infty}$  stale mniejszy od jedności, stopniowo się zmniejsza; w temperaturze, w której prosta  $v$  staje się styczną do krzywej, punktem wspólnym jest początek spólrzędnych  $O$ , namagnesowanie samoistne staje się równe zero.



rys. 197

Oznaczmy tę temperaturę przez  $\theta$ , tangens kąta, jaki prosta  $v$  tworzy z osią  $a$  jest w tej temperaturze równy  $\frac{1}{3}$ , mamy więc ze wzoru (i)

$$\frac{R \cdot D \cdot \theta}{M_\infty K \cdot \delta} = \frac{1}{3}, \text{ skąd } \theta = \frac{M_\infty^2 \cdot K \cdot \delta}{3RD}. \quad (i)$$

Powyżej tej temperatury ciało staje się paramagnetyczne,  $\theta$  zatem jest temperaturą Curie'go. Biorąc pod uwagę, że (p. wzór (k), str. 331)

$$\frac{M_\infty^2}{3R} = C_A,$$

otrzymujemy

$$\theta = \frac{C_A \cdot K \cdot \delta}{D}.$$



Znając więc temperaturę Curie'go i stałą Curie'go  $C_A$  możemy wyznaczyć  $K$ .

W świetle tych rozważań namagnesowanie ciała ferromagnetycznego przez pole zewnętrzne sprowadza się, podobnie jak w rozważaniach Ewinga, do skrócenia w kierunku pola osi magnetycznych poszczególnych, już uprzednio namagnesowanych samoistnie, niewielkich elementów objętości ciała. Potwierdzeniem słuszności tych poglądów jest odkryte znacznie później (1924 r.) przez Barkhausena zjawisko nieciągłości magnesowania ciał ferromagnetycznych. Mierząc dostatecznie czułym przyrządem wzrost namagnesowania jakiegokolwiek z tych ciał, umieszczonego we wzrastającym stopniowo polu magnetycznym, Barkhausen stwierdził, że wzrost ten zachodzi nie w sposób ciągły, lecz skokami, tak, jak gdyby nagle przy dostatecznej wartości pola magnesującego zmieniał się o  $180^\circ$  kierunek osi magnetycznych pewnej znaczniejszej ilości magnesów elementarnych, zawartych w skończonym elemencie objętości ciała.

Wartość namagnesowania pod działaniem pola magnetycznego zewnętrznego otrzymujemy, podstawiając do wzorów Langevina zamiast  $H$

$$H_c = H + H_w = H + \frac{K\delta}{D} \sigma.$$

Dla małych wartości  $\alpha = \frac{m_0 H_c}{kT}$  będziemy mieli (p. wzór (j), str. 331)

$$\frac{M_A}{M_\infty} = \frac{M_\infty H_c}{3RT} = \frac{M_\infty}{3RT} \left( H + \frac{K\delta}{D} \sigma \right),$$

skąd

$$M_A = \frac{M_\infty^2}{3RT - \frac{K\delta}{D} M_\infty} \cdot H$$

lub po uwzględnieniu wzoru (j)

$$M_A = \frac{M_\infty^2}{3R(T-\theta)} \cdot H.$$

Wrażliwość zatem magnetyczna odniesiona do jednej drobinę gramowej (atomu gramowego) wyniesie

$$\frac{M_A}{H} = \chi_A = \frac{M_\infty^2}{3R(T-\theta)} = \frac{C_A}{T-\theta}.$$



Wzór ten jest analogiczny do wzoru, wyrażającego prawo Weissa. W ten sposób byłoby wyjaśnione nabywanie przez ciała ferromagnetyczne cech ciał paramagnetycznych powyżej temperatury Curie'go.

Jak o tym już wyżej była mowa, namagnesowanie nasycenia osiąga wartość  $M_{\infty}$ , ściśle biorąc, jedynie w niskich temperaturach, gdy bezładny ruch cieplny w małym tylko stopniu zakłóca ustawianie się osi magnetycznych wszystkich elementów objętości w tym samym kierunku. Weiss, opierając się na wykonanych razem z Kamerlinghiem Onnesem pomiarach namagnesowania w temperaturze  $20^{\circ}K$ , stwierdził (1910 r.), że w tych przypadkach, co do których można było przypuszczać osiągnięcie istotnego stanu nasycenia (żelazo, nikiel), wartość namagnesowania odniesiona do drobiny gramowej (atomu gramowego) wyraża się liczbą, będącą wielokrotnością pewnej wspólnej dla wszystkich ciał liczby. Tak np. dla żelaza otrzymano  $M_{\infty} = 12360$  (w jednostkach CGS) = 11.1123,6; dla niklu  $3370 = 3.1123,3$ . Liczbę tę, którą w wyniku późniejszych swych pomiarów zwiększył do 1125,6 (według Cabrery jest ona równa 1124,9), Weiss uznał za wyrażającą wartość elementarnego momentu magnetycznego, odniesionego do drobiny gramowej (atomu gramowego), i nazwał ją *magnetone m gramowym*. Gdy liczbę tę podzielimy przez liczbę Avogadry, otrzymamy wartość pojedynczego *magnetonu*. Jak wynika z podanych wyżej liczb, żelazo posiada 11, nikiel w niskich temperaturach 3 magnetony.

W ciałach paramagnetycznych, w których stan nasycenia jest bardzo trudny do osiągnięcia nawet w niskich temperaturach, wartość  $M_{\infty}$  można wyznaczyć ze wzoru

$$C_A = \frac{M_{\infty}^2}{3R}$$

skąd liczbę magnetonów  $p$  danego ciała otrzymamy, kładąc

$$p = \frac{M_{\infty}}{1125,6} = \frac{\sqrt{3 \cdot 8,314 \cdot 10^7 \cdot C_A}}{1125,6}$$

Późniejsze pomiary Weissa, Rosenbohma (1914 r.), a zwłaszcza Cabrery (wykonywane w ciągu wielu lat i zestawione w sprawozdaniu ogłoszonym w 1930 r.) potwierdziły na ogół istnienie takich wielokrotności i tym samym założeń Weissa.

Należy jednak zaznaczyć, że magneton Weissa ma wartość mniej więcej pięć razy mniejszą od tej, jaką teoria budowy atomu przyjmuje na wartość najmniejszego momentu atomowego (tzw. magneton Bohra). Jak dotychczas sprzeczność ta nie została w należyty sposób wyjaśniona.



## 7. — POLE MAGNETYCZNE ZIEMI.

Kierunek natężenia pola magnetycznego Ziemi jest, podobnie, jak i każdego innego pola magnetycznego, wyznaczony przez kierunek, jaki w polu tym przybiera swobodnie zawieszona, dostatecznie krótka i cienka igła magnetyczna (p. ust. I). Płaszczyzna, w której igła ostatecznie się ustawia po dojściu do położenia równowagi, a którą nazywamy płaszczyzną południka magnetycznego, jedynie wyjątkowo jest również płaszczyzną południka ziemskiego, — zazwyczaj jest od niej odchylona na wschód lub na zachód, tak że oś magnetyczna igły tworzy z kierunkiem północ-południe kąt najczęściej nierówny zeru. Kąt ten jest miarą tzw. zboczenia magnetycznego (deklinacji), które oznaczamy literą *D*, rozróżniając przy tym zboczenie wschodnie (albo dodatnie), gdy igła odchylona jest na wschód od południka ziemskiego, i zachodnie (lub ujemne), gdy jest odchylona na zachód.

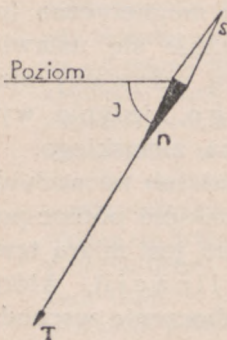
Pomiar więc zboczenia wymaga uprzedniego wyznaczenia kierunku południka ziemskiego. Dlatego też przyrządy, służące do tego rodzaju pomiarów (teodolity magnetyczne — gr. *theao* — dostrzegam i *dolichos* — długość) są zazwyczaj budowane w ten sposób, aby mogły służyć również i do pomiarów astronomicznych. W obserwatoriach magnetycznych (jak np. w obserwatorium magnetycznym w Świdrze pod Warszawą) południk ten jest raz na zawsze wyznaczony.

Ustawianie się igły magnetycznej w oznaczonym położeniu względem stron świata było, jak się zdaje, znane bardzo dawno: pierwsze wzmianki, dotyczące używania w podróżach morskich busoli (włos. *bussola* — puszka) lub kompasu (łac. *compassus*, którą to nazwą oznaczano początkowo zegary słoneczne, zaopatrzone w igłę magnetyczną, ustawiającą pręciak, rzucający cień, w płaszczyźnie, jak wówczas sądzono, południka ziemskiego) sięgają trzynastego wieku. Wbrew utartej opinii Wschód (Japonia, Chiny) nie wyprzedził pod tym względem Europy. Stwierdzenie, że odchylanie się igły od kierunku południe — północ nie jest rzeczą przypadku, uwarunkowanego przez błędy w budowie busoli, zawdzięczamy, jak się zdaje, Kolumbowi.

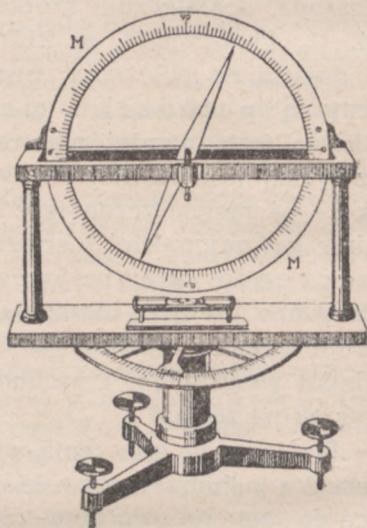
Przy zawieszaniu swobodnym, takim jak na rys. 157, igła na ogół nie jest pozioma. Kąt tego nachylenia *I* (inklinacji) uważamy za dodatni, gdy biegun północny igły na-



chylony jest ku dołowi (rys. 198). Do pomiaru nachylenia zazwyczaj używa się tzw. inklinatora (rys. 199), w którym igła magnetyczna może obracać się jedynie koło osi po-

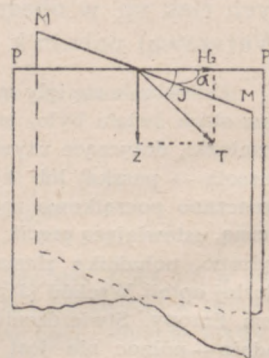


rys. 198



rys. 199

ziomej. Kąt, jaki igła tworzy z poziomem, jest wtedy zależny od kąta między płaszczyzną, w której znajduje się igła (płaszczyzna koła  $MM$ , które można obracać koło osi pionowej), i płaszczyzną południka magnetycznego. Istotnie, niech  $PP$  i  $MM$  będą odpowiednio śladami przecięcia płaszczyzny poziomej przez płaszczyznę południka magnetycznego i płaszczyznę, przesuniętą przez igłę magnetyczną,  $\alpha$  — kątem między tymi płaszczyznami (rys. 200). Rozłożmy natężenie  $T$  pola magnetycznego Ziemi na składowe: poziomą  $H_z$  i pionową  $Z$ .



rys. 200

W tablicach magnetycznych składową poziomą oznacza się przez  $H$ , symbolem tym jednak oznaczaliśmy dotychczas i będziemy



oznaczali nadal całkowite natężenie każdego pola magnetycznego, dla uniknięcia przeto nieporozumień składową poziomą magnetyzmu ziemskiego oznaczać będziemy nie przez  $H$ , lecz przez  $H_z$ .

Będziemy mieli

$$H_z = T \cos J; \quad Z = T \cdot \sin J. \quad (32)$$

Ruch obrotowy igły, znajdującej się w płaszczyźnie  $MM$ , będzie wyznaczony przez te składowe, które leżą w tej właśnie płaszczyźnie, a więc przez składową pionową  $Z$ , która zawsze leży w tej płaszczyźnie, i przez składową wektora  $H_z$  w tej płaszczyźnie. Ta ostatnia składowa jest równa

$$H_z^{MM} = H_z \cos \alpha = T \cos J \cdot \cos \alpha. \quad (33)$$

Położenie równowagi igły znajdziemy obliczając kąt  $i$ , jaki tworzy kierunek wypadkowej sił, działających na igłę, z poziomem

$$\operatorname{ctg} i = \frac{H_z^{MM}}{Z} = \frac{T \cos J \cdot \cos \alpha}{T \sin J} = \operatorname{ctg} J \cdot \cos \alpha. \quad (34)$$

Gdy więc  $\operatorname{ctg} i = 0$  tzn. gdy igła ustawia się pionowo, płaszczyzna południka magnetycznego tworzy z płaszczyzną koła  $MM$  kąt prosty, wtedy bowiem  $\alpha = 90^\circ$ . Obracając więc koło  $MM$  dookoła osi pionowej i odczytując na kole poziomym to położenie, w którym igła ustawi się pionowo, możemy wyznaczyć położenie południka magnetycznego.

Obróćmy koło  $MM$ , aby płaszczyzna jego tworzyła z płaszczyzną południka magnetycznego kąt  $90 - \alpha$ . Będziemy mieli

$$\operatorname{ctg} i_{90-\alpha} = \operatorname{ctg} J \cdot \sin \alpha. \quad (34a)$$

Podnosząc do kwadratu, i dodając wzory (34) i (34a), otrzymamy

$$\operatorname{ctg}^2 i + \operatorname{ctg}^2 i_{90-\alpha} = \operatorname{ctg}^2 J.$$

Wielkości  $D$ ,  $I$  i  $H_z'$ , nazywane elementami magnetyzmu ziemskiego, całkowicie charakteryzują pole magnetyczne ziemskie, pozwalają bowiem wyznaczyć zarówno wartość, jak i kierunek natężenia pola  $T$ .



Często zamiast składowej poziomej  $H_z$  używa się jej składowych:  $X$  w kierunku z południa na północ i  $Y$  w kierunku z zachodu na wschód. Mamy wtedy,

$$X = H_z \cos D \quad \text{i} \quad Y = H_z \sin D,$$

skąd

$$T = \frac{H_z}{\cos Y} = \sqrt{H_z^2 + Z^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Do pomiaru składowej poziomej można użyć metody Gaussa. Ze wzorów (k), (l) ust. 2 (str. 310) rugujemy wtedy moment magnetyczny magnesu, użytego do pomiaru, otrzymując (dla  $\mu = 1$ )

$$H_z^2 = \frac{8\pi^2 B}{T^2 \cdot \text{tg} \theta \cdot r^3}, \quad (35)$$

gdzie  $T$  okres drgania.

Do pomiarów względnych, gdy chodzi o porównanie natężeń  $H_z$  w dwóch punktach ziemi lub po upływie pewnego czasu, może służyć metoda Borda, w której porównuje się okresy wahań poziomo zawieszonoego magnesu. Mamy wtedy

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{B}{MH'_z}} \quad \text{i} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{B}{MH''_z}},$$

skąd

$$\frac{H'_z}{H''_z} = \frac{T_2^2}{T_1^2}. \quad (35a)$$

W pomiarach dokładnych używa się obecnie metody Lamonta (1849 r.), stanowiącej udoskonalenie metody Gaussa. Pierwsze pomiary składowej poziomej wykonał Poisson (1826 r.), używając metody, analogicznej do tej, jaką posługiwał się Coulomb przy wyprowadzaniu swego prawa.

Zestawiając przeciętne wyniki, otrzymane z pomiarów elementów magnetycznych, otrzymujemy następujący przybliżony obraz. Krzywe, łączące punkty powierzchni ziemi, w których zboczenie  $D$  posiada tę samą wartość, tzw. *isogony* (gr. *gonia* — kąt), biegną na znacznych nieraz prze-



strzeniach równoległe do łuków wielkich kół, przechodzących przez bieguny ziemi (jak np. w całej prawie Europie), niekiedy tylko tworząc w obrębie jednej półkuli (północnej lub południowej) linie zamknięte. Izogona o zboczeniu zero (tzw. *a g o n a*) dzieli kulę ziemską na dwie równe mniej więcej części — wschodnią i zachodnią — nie będąc jednak równoległą do żadnego południka. Wszystkie te krzywe przecinają się zarówno na półkuli północnej, jak i południowej, nie tylko w biegunach ziemskich, w których nie można wyróżnić kierunku poszczególnego południka, a więc i wyznaczyć kąta zboczenia, lecz również w dwu innych punktach, znajdujących się w niewielkiej od biegunów odległości.

Północny z tych punktów ma szerokość geograficzną równą mniej więcej  $73^{\circ}$ , długość zaś (na zachód od Greenwich)  $96^{\circ}$ , południowy — szerokość  $72^{\circ}$ , długość  $152^{\circ}$  (na wschód od Greenwich).

Ponieważ w tych dwu punktach, które nazywamy biegunami magnetycznymi Ziemi, każdy z południków ziemskich ma oznaczony kierunek, nieoznaczoność kąta zboczenia może być spowodowana jedynie przez to, że w tych punktach składowa  $H_z$  równa jest zeru, kąt więc nachylenia  $I$  wynosi  $\pm 90^{\circ}$ . Ten wniosek potwierdzają pomiary zarówno nachylenia, jak i składowej poziomej.

Bieguny magnetyczne nie leżą na tej samej średnicy kuli ziemskiej. Średnica, do której oś magnetyczna Ziemi jest równoległa, tworzy z osią obrotu kąt równy mniej więcej  $11,6^{\circ}$ .

Krzywe jednakowego nachylenia — izokliny (gr. klin — nachylać) — biegną na obu półkulach (północnej i południowej) mniej więcej równoległe do kół równoleżnikowych, przy czym nachylenie zmienia się stopniowo od  $+90^{\circ}$  w pobliżu północnego bieguna magnetycznego do  $-90^{\circ}$  w pobliżu bieguna południowego. Izoklina o nachyleniu  $0^{\circ}$  jest prawie równoległa do równika, odchylając się ku południowi na Oceanie Spokojnym i w Południowej Ameryce.

Mniej prawidłowy jest przebieg krzywych o jednakowej składowej poziomej  $H_z$  — izodynam. Wartość tej składowej istotnie zmniejsza się od największej wartości jaką ma w sąsiedztwie równika, równej mniej więcej  $0,30 \Gamma$ , ku obu



biegunom, w których pobliżu spada do zera, izodynamy jednak wykazują większe niż izokliny odchylenia od równoleżników, co więcej, tworzą czasami krzywe zamknięte (na danej półkuli) o anormalnej wartości  $H_z$ , jak np. w pobliżu Siamu, gdzie składowa pozioma osiąga wartość 0,39  $\Gamma$ .

Ten z gruba naszkicowany obraz ulega bardzo wielkim zmianom, gdy przechodzimy do pomiarów dokładniejszych, wykonanych na mniejszych powierzchniach kuli ziemskiej. Okazuje się wtedy, że mniej lub więcej prawidłowy przebieg krzywych doznaje wyraźnych miejscowych zakłóceń, ujawniających się w anormalnych wartościach elementów magnetyzmu ziemskiego w danej okolicy. Tak np., jak wynika z pomiarów, wykonanych przez Kalinowskiego i jego współpracowników i ogłoszonych w 1933 r., na przedwojennym terytorium Polski, zawartym w czerwcu 1928 r. między izogoną — 4° (zбочenie zachodnie), przechodzącą w okolicach Poznania (Peckowo na płn.-zachód od Poznania — 4° 8') i izogoną 0° (agona), przechodzącą mniej więcej przez Nowogródek (— 0° 18') i Równe (— 0° 48'), trafiają się wyodrębnione od otoczenia obszary, zamknięte w izogonie + 1° 33' (zбочenie wschodnie) lub też w niewielkiej odległości od Warszawy, gdzie zбочenie wynosiło — 2° 20', izogona o zбочeniu — 3° 45' (Opinogóra).

Zakłócenia te, szczególnie wyraźne na północy i wschodzie kraju ujawniają się również i w woj. olsztyńskim i gdańskim (wg mapy magnetycznej Hausсмanna) i, jak się zdaje, w Szwecji.

O ile chodzi o izokliny, to bez większego błędu można przyjąć, że nachylenie zwiększa się stopniowo osiągając na Helu wartość 68° 14'. Odwrotnie zmienia się składowa pozioma: równa 0,17692  $\Gamma$  na Helu, w Warszawie miała w tym czasie wartość 0,18568  $\Gamma$ .

Miejscowe anomalie mają, niewątpliwie, swe źródło w budowie i składzie chemicznym powierzchniowych warstw skorupy ziemskiej; okolice bogate w skały zawierające żelazo (zwłaszcza magnetyt) są zazwyczaj miejscami największych odchyień od wartości przewidywanych. Dokładne ich wyznaczenie i, co za tym idzie, wykreślenie map magnetycznych jest

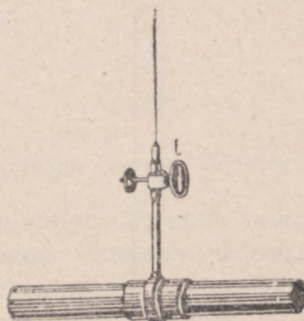


w wysokim stopniu utrudnione przez fakt, że elementy magnetyczne w jednym i tym samym miejscu nie posiadają wartości stałej.

Do mierzenia tych zmian służą wariometry. Zazwyczaj wyznacza się zmiany zбочenia oraz składowych poziomej i pionowej natężenia, co, jak wiemy, wystarcza do zdania sobie sprawy ze zmian pola.

Do wyznaczenia zmian zбочenia używa się deklinatora, którego główną część stanowi niewielki magnes, zawieszony poziomo na nici pionowej, koło której może się swobodnie obracać. Kierunek magnesu w chwili początkowej wyznacza się odczytując w zwierciadelku  $l$ , przymocowanym do magnesu, podziałkę  $n_0$  skali, umieszczonej w odległości  $d$  cm (p. tom I, na str. 322). Gdy na skutek zmiany zбочenia magnes ustawi się w innym kierunku, w zwierciadelku odbije się inna podziałka  $n'$ . Oznaczając zmianę zбочenia przez  $\varphi$ , mamy

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{n' - n_0}{d}$$



rys. 201

Po rozłożeniu w szereg i odrzuceniu wyrazów, zawierających potęgę wyższe od trzeciej, otrzymujemy

$$\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{n}{d} - \frac{1}{3} \frac{n^3}{d^3} \right),$$

gdzie  $n = n' - n_0$ . Wyrażając  $\varphi$  nie w radianach, lecz w minutach kątowych, a więc mnożąc przez 3437,6 znajdujemy

$$\varphi' = 1718,8 \frac{n}{d} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{n^2}{d^2} \right)$$

lub w przybliżeniu

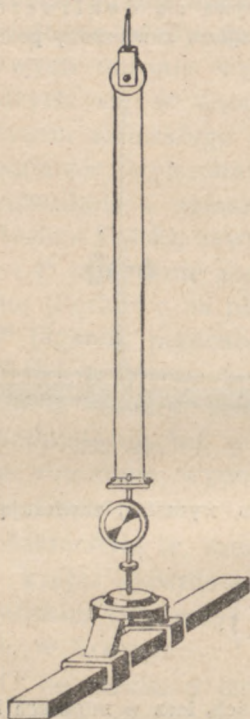
$$\varphi' = 1718,8 \frac{n}{d}.$$

Dobierając  $d = 1718,8$ , mamy

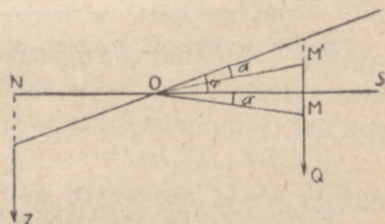
$$\varphi' = n.$$



Przy wyznaczaniu zmian składowej poziomej  $H_z$  ustawia się magnes tak, aby dla danej wartości tej składowej oś jego była prostopadła do płaszczyzny południka magnetycznego, wtedy bowiem czułość przyrządu jest największa. Można to osiągnąć działając na magnes albo siłami sprężystości nici, na której magnes jest zawieszony, albo też działając na magnes dodatkowym magnesem. Na rys. 202 odtworzony jest schematycznie dwunitkowy magnetometr Gaussa, w którym siłą przeciwdziałającą polu ziemskiemu jest siła, powstająca przy skręcaniu nici. Chcąc z kąta, na jaki magnes się obróci przy zmianie wartości  $H_z$ , wyznaczyć wartość tej zmiany, należy magnetometr skalibrować przy pomocy magnesu o znanym momencie magnetycznym, wyznaczając, jakiej zmianie pola odpowiada odchylenie magnesu o jednostkę kąta (lub o jedną podziałkę skali). Należy jednak zaznaczyć, że nawet przy niezmiennącej się wartości składowej poziomej położenie magnesu w magnetometrze z biegiem czasu się zmienia; zmiana tej „wartości podstawowej” (lub po prostu „podstawy”) spowodowana jest między innymi stopniowym rozmagasowywaniem się magnesu.



rys. 202



rys. 203

Do wyznaczenia zmian składowej pionowej  $Z$  najczęściej służy tzw. waga Lloyda (1874 r.). Magnes  $NS$ , ustawiony w płaszczyźnie południka magnetycznego, może się obracać dookoła osi poziomej  $O$ , w ten sposób umieszczonej, aby moment ciężaru magnesu względem tej osi równoważył moment składowej pionowej  $Z$ ; magnes wtedy jest poziomy i jego biegun północny nie nachyla się ku dołowi. Przy zmianie wartości  $Z$  magnes obróci się o kąt  $\psi$ . W tym nowym położeniu będzie on w równowadze, gdy

$$Z \cdot M \cos \psi = Q \cdot OM' \cdot \cos(\psi - \alpha),$$



skąd

$$Z = \frac{Q \cdot OM'}{M} \cdot \cos \alpha + \frac{Q \cdot OM'}{M} \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Uwzględniając, że

$$\frac{Q \cdot OM'}{M} \cdot \cos \alpha = \frac{Q \cdot OM \cos \alpha}{M} = Z_0,$$

gdzie  $Z_0$  oznacza początkową wartość składowej pionowej i kładąc stałą

$$\frac{Q \cdot OM'}{M} \sin \alpha = A,$$

mamy

$$Z - Z_0 = A \operatorname{tg} \varphi.$$

I tu również należy się liczyć z możliwą zmianą „wartości podstawy”.

Dokładnie zbadanymi zmianami są zmianyienne i roczne elementów magnetyzmu ziemskiego. Zmianyienne, występujące w miesiącach letnich wyraźniej, niż w zimowych, ujawniają się zazwyczaj w jednym maximum i jednym minimum, o niejednakowych najczęściej amplitudach. Kształt krzywej, wyrażającej te zmiany, zależy w wysokim stopniu od położenia miejsca obserwacji: w okolicy równika zmiany te zachodzą spokojniej i bardziej prawidłowo, niż w okolicach podbiegunowych. Wahania roczne są na ogół o wiele mniejsze; wykazują one, jak się zdaje, podwójną okresowość.

Nie wchodząc w omawianie teorii, której w XX szczególnie wieku (Birkeland od 1902 r., Champan i Augnelister 1924 r., Bridlingmaier, 1911 r. i inni) udało się wyjaśnić większość z omawianych tu zjawisk, zaznaczymy jedynie, że zmiany elementów magnetycznych spowodowane są w przeważnej mierze przez czynniki leżące na zewnątrz powierzchni Ziemi, jak np. przez działanie Słońca i Księżyca lub przez stan elektryczny otaczającej Ziemi atmosfery.

Inaczej, jak się zdaje, sprawa się przedstawia z tzw. zmianami wiekowymi zauważonymi po raz pierwszy przez Gullibranda (1635 r.), a których źródłem, o ile można o tym sądzić na podstawie niezwykle skąpego materiału obserwacyj-



nego, (dokładne pomiary natężenia są wykonywane zaledwie od 100 lat), są zmiany w rozmieszczeniu magnetyzmu ziemskiego. Mają one raczej charakter zmian miejscowych, ujawniając się w różnym stopniu na różnych obszarach kuli ziemskiej.

Od tych mniej lub więcej prawidłowych wahań należy odróżniać zakłócenia magnetyczne, których źródło leży zawsze poza Ziemią i które wobec tego występują we wszystkich punktach Ziemi. Ujawniają się one w nagłej (wybuchowej) zmianie wartości elementów magnetycznych, trwającej niedługo, lecz powodującej następnie przez dłuższy stosunkowo czas (parę lub kilka dni) zmianę przeciętnych wartości tych elementów. Największa częstość zakłóceń tego typu przypada na parę tygodni przed wiosennym i po jesiennym porównaniu dnia z nocą. Zaburzenia te, jak to wykazały badania, przede wszystkim Birkenlanda i Störmera, są w niewątpliwym związku ze zmianami promieniowania elektronowego, wysyłanego przez Słońce na Ziemię.



## ROZDZIAŁ V

### PRĄD ELEKTRYCZNY STAŁY

#### 1. — PRĄD ELEKTRYCZNY. — PRAWO OHMA.

Połączmy dwa naelektryzowane do różnych potencjałów przewodniki *A* i *B* dowolnym ale jednorodnym drutem *C*. Przez to połączenie zostanie naruszony stan równowagi elektrycznej, w jakim poprzednio znajdowały się ciała *A* i *B*. Początkowe bowiem rozmieszczenie naboju, przy którym każde z tych ciał miało potencjał inny, nie będzie mogło, rzecz prosta, zadośćuczynić warunkowi, wymaganemu dla nowego stanu równowagi, w którym wszystkie trzy ciała, stanowiące obecnie jeden przewodnik *ACB*, muszą mieć potencjał jednaki. Nie wchodząc w szczegóły zmian, jakim rozmieszczenie to powinno ulec, stwierdzimy jedynie, że nabój dodatni ciała o potencjale wyższym (np. ciała *A*) ulega wtedy zmniejszeniu, nabój zaś dodatni ciała o potencjale niższym (np. ciała *B*) — zwiększeniu. Te zmiany w wartościach naboju dodatniego mogą nastąpić albo na skutek przejścia naboju dodatniego z ciała *A* na ciało *B* albo na skutek przejścia naboju ujemnego z ciała *B* na ciało *A* lub wreszcie na skutek przejścia naboju ujemnego z ciała *B* na *A* i dodatniego z ciała *A* na *B*. Nie rozstrzygając, które z tych założeń lepiej odpowiada istotnemu przebiegowi zjawiska, przyjmiemy, że ustalaniu się nowego stanu równowagi towarzyszy przejście przez drut *C* elektryczności dodatniej z ciała *A* na ciało *B*, i upodabniając zachodzące w tym przypadku zjawisko do przepływu przez rurę wody ze zbiornika o poziomie wyższym do zbiornika o poziomie niższym, powiemy, że drut jest siedliskiem prądu elektrycznego, płynącego od ciała *A* do ciała *B*.



Ściśle biorąc, siedliskiem prądu jest nie tylko drut, lecz również i przewodniki  $A$  i  $B$ , podobnie, jak siedliskiem prądu wody jest nie tylko rura łącząca zbiorniki, lecz i same zbiorniki; w obecnych jednak naszych rozważaniach nie będziemy uwzględniali zjawisk, zachodzących w ciałach  $A$  i  $B$ .

Niech  $de$  będzie wartością naboju dodatniego, przepływającego w ciągu czasu  $dt$  przez dowolny przekrój  $S$  drutu, natężeniem prądu elektrycznego w danym przekroju nazwiemy wielkość  $i$ , wyrażoną wzorem

$$i = \frac{de}{dt} \quad (1)$$

Mierząc nabój w jednostkach elektrostatycznych C. G. S., czas w sekundach, otrzymamy wartość natężenia prądu w jednostkach elektrostatycznych natężenia, których wymiar będzie równy

$$[i] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2} \quad (2)$$

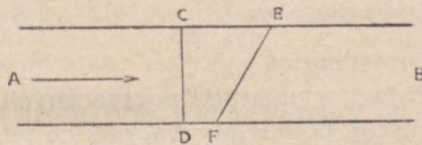
Mierząc zaś nabój w kulombach i czas tak, jak poprzednio, w sekundach, otrzymamy wartość natężenia w amperach, przy czym zależnie od tego, czy nabój będzie mierzony w kulombach bezwzględnych, czy też międzynarodowych (por. rozdz. III, ust. 2) wartość natężenia prądu będzie wyrażona albo w amperach bezwzględnych albo w międzynarodowych.

W takich warunkach doświadczenia, o jakich mówiliśmy wyżej, prąd ten na ogół trwać będzie bardzo krótko; potencjały na końcach drutu, równe w chwili łączenia potencjałom tych ciał, z którymi się stykały, przybiorą po upływie bardzo krótkiego czasu wartość potencjału równowagi; podobnie będzie i z potencjałami środkowych części drutu, których wartości, początkowo w różnych punktach drutu różne, też bardzo szybko się wyrównają. Doświadczenie jednak wskazuje, że możemy zapobiec temu wyrównaniu się potencjałów, łącząc ciała  $A$  i  $B$  z tzw. źródłem prądu to znaczy z takim układem, który by ciału  $A$  (lub co na jedno wychodzi, temu końcowi drutu  $C$ , który z ciałem  $A$  jest połączony) do-



starczał stale tyle elektryczności dodatniej, ile jej z ciała  $A$  w ciągu tego samego czasu wypływa, ciało zaś  $B$  (lub połączone z nim końcowi drutu  $C$ ) tyle odbierał, ile jej do ciała  $B$  w ciągu tego samego czasu wpływa. Wtedy nie będą się zmieniały również i potencjały poszczególnych części drutu. Otrzymamy w ten sposób w drucie stały rozkład potencjałów, odpowiadający pewnemu stanowi trwałemu, nie zmieniającemu się z czasem.

W tym przypadku natężenie prądu będzie miało we wszystkich przekrojach drutu wartość jednakową. Istotnie, niech  $CDEF$  będzie elementem objętości drutu, ograniczonym przekrojami  $CD$  i  $EF$ ; z prądem płynącym w kierunku  $AB$ , wpłynie w ciągu  $dt$  sekund przez przekrój  $CD$  nabój dodatni  $de$ ; gdyby przez przekrój  $EF$  wypłynął w ciągu tego samego czasu nabój dodatni nie równy  $de$ , potencjał tego elementu



rys. 204

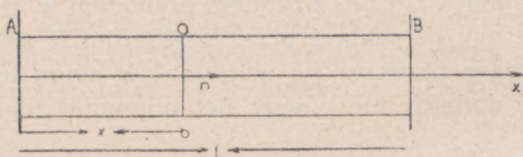
uległby zmianie, co nie byłoby zgodne z warunkami, wyznaczającymi stan trwały; podobnie przeczyłoby tym warunkom przypuszczenie, że natężenie prądu zmienia się z czasem. Musimy zatem przyjąć, że natężenie prądu, płynącego w tych warunkach przez drut, ma stale we wszystkich przekrojach wartość tę samą. Prąd taki nazywamy prądem stałym.

Co więcej taki sam nabój dodatni, jaki w ciągu danego czasu przepływa przez dowolny przekrój drutu, w ciągu tego samego czasu z jednej strony wypływa z układu, z drugiej zaś wpływa do układu, będącego źródłem prądu. Uogólniając określenie prądu powiemy, że i przez źródło prądu przepływa prąd o tym samym, co w drucie natężeniu, że więc innymi słowy drut i połączone z nim źródła prądu stanowią obwód zamknięty, będący siedliskiem kołowego przepływu elektryczności.



Analogiczny obwód zamknięty otrzymalibyśmy, włączając do układu zawierającego dwa zbiorniki wody o niejednakowym poziomie, połączone ze sobą rurą, pompę, która by przepompowywała nadmiar wody ze zbiornika o poziomie niższym do zbiornika o poziomie wyższym, utrzymując w ten sposób stałą różnicę poziomów. Przez pompę przepływałaby w danym przeciągu czasu ta sama masa wody, jaka w ciągu tego samego czasu przepływałaby przez dowolny przekrój rury.

Założmy, idąc drogą, wskazaną przez Ohma (1827 r.) i Kirchhoffa, że natężenie prądu jest proporcjonalne do natężenia pola w danym miejscu drutu. W prostym i najczęściej w praktyce spotykanym przypadku drutu cylindrycznego,



rys. 205

o stałym przekroju i wymiarach poprzecznych małych w porównaniu z długością, potencjały wszystkich punktów przekroju prostopadłego do osi możemy uważać za jednakowe, powierzchnie więc tych przekrojów za powierzchnie ekwipotencjalne. Potencjał zmienia się wtedy jedynie wzdłuż drutu. Przewodniki, czyniące zadość tym warunkom, nazywamy linio-  
wym i.

Przyjmując oś drutu za oś  $x$ , otrzymamy po uwzględnieniu wzoru (8 a) rozdz. III str. 194

$$i = cE = -c \frac{dV}{dn} = -c \frac{dV}{dx}. \quad (3)$$

Przepiszmy to równanie w takiej postaci

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{i}{c} = -C,$$

gdzie  $C$  jest wielkością stałą, natężenie bowiem prądu ma we wszystkich przekrojach stale tę samą wartość.



Oznaczając przez  $V$  potencjał w przekroju  $ab$ , odległym o  $x$  od przekroju  $A$ , w którym potencjał ma wartość  $V_1$ , ze wzoru

$$dV = - C dx$$

otrzymamy całkując

$$\int_{V_1}^V dV = V - V_1 = - C \int_0^x dx = - Cx,$$

skąd

$$V = V_1 - Cx. \quad (4)$$

W przewodniku liniowym potencjał jest liniową funkcją odległości od przekroju o potencjale największym.

Temu warunkowi czynią również zadość, jak to wykazał Kirchhoff, i przewodniki o wymiarach poprzecznych znacznych w porównaniu z długością, o ile tylko przekroje końcowe, prostopadłe do kierunku prądu, są powierzchniami ekwipotencjalnymi.

Kładąc we wzorze  $V = V_2$ , potencjałowi przekroju  $B$ , i  $x = l$ , długości drutu, oraz podstawiając  $C = \frac{i}{c}$  otrzymujemy wzór, będący częściowym sformułowaniem prawa Ohma (1826 r.),

$$i = c \frac{V_1 - V_2}{l}. \quad (4a)$$

Doświadczenia, wykonane przez Davy'ego jeszcze w roku 1821, ustaliły, że natężenie prądu jest zależne od materiału, z którego drut jest zrobiony i od przekroju drutu, wobec czego wzorowi (4a) możemy nadać postać następującą

$$i = \kappa \cdot S \frac{V_1 - V_2}{l} \quad \text{lub} \quad i = \frac{V_1 - V_2}{\frac{l}{\kappa S}}, \quad (4b)$$

gdzie  $\kappa$  oznacza wielkość, zależną od materiału drutu.

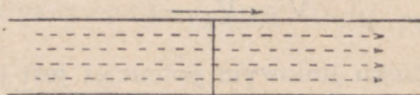
Z proporcjonalności natężenia prądu do przekroju wynika, że prąd stały wypełnia cały przekrój drutu równomiernie, gęstość zatem prądu, której miarą jest stosunek naboju  $de_1$ ,



przepływającego w jednostce czasu przez element  $dS$  prostopadłego przekroju drutu, do pola  $dS$

$$j = \frac{de_1}{dS},$$

będzie miała w całym przekroju wartość stałą, równą  $\frac{i}{S}$ , tory zaś, wzdłuż których zachodzi ruch elektryczności, tzw. linie prądu będą równoległe do osi drutu (rys. 206).



rys. 206

We wzorze (4b) mianownik ma dla danego drutu wartość stałą, niezależną według Ohma od natężenia prądu i od różnicy potencjałów na jego końcach, możemy przeto uważać jego wartość za miarę wielkości charakteryzującej dany przewodnik. Wielkość tę nazywamy oporem elektrycznym lub oporem omowym drutu  $r$ , wobec czego mamy

$$r = \frac{l}{\kappa S} \quad (5)$$

gdzie  $\kappa$  oznacza przewodnictwo właściwe drutu.

Kładąc  $S = 1 \text{ cm}^2$ , otrzymujemy ze wzoru (4b)

$$i = \kappa \cdot \frac{V_1 - V_2}{l} = \kappa E,$$

skąd

$$\kappa = \frac{i}{E}. \quad (5a)$$

Przewodnictwo właściwe jest więc liczbowo równe natężeniu prądu stałego, przepływającego przez drut o przekroju  $1 \text{ cm}^2$ , gdy spadek potencjału lub, co na jedno wychodzi, natężenie pola wzdłuż drutu równe jest jednostce.

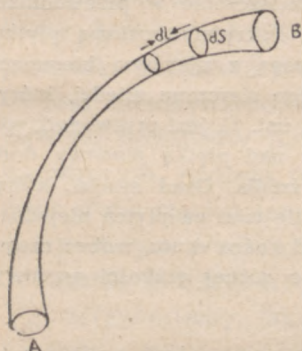


Ze wzoru (5) wynika, że opór drutu o przekroju równym jednostce i długości równej jednostce równy jest  $\frac{1}{\kappa}$ . Wielkość tę oznaczamy przez  $\rho$  i nazywamy oporem właściwym drutu.

Podstawiając (5) do wzoru (4b) mamy

$$i = \frac{V_1 - V_2}{r} \quad (6)$$

Wzór ten możemy stosować również w przypadku, gdy przekrój drutu nie jest stały, lecz zmienia się w sposób ciągły, przy czym jednak poprzeczne wymiary drutu są, jak poprzednio, małe w porównaniu z jego długością. Wtedy jednak oporu nie możemy już obliczać ze wzoru (5),  $S$  bowiem nie ma wartości stałej.



rys. 206a

Niech  $dl$  będzie tak małym odcinkiem drutu, aby można było przekrój na całej jego długości uważać za stały; opór tego odcinka przyjmiemy za równy

$$dr = \frac{dl}{\rho S},$$

opór drutu wyrazi się wtedy wzorem

$$r = \int_A^B dr = \int_A^B \frac{dl}{\rho S} = \frac{1}{\rho} \int_A^B \frac{dl}{S} \quad (5b)$$

Gdy prąd stały przepływa nie przez przewodnik liniowy, lecz przez przewodnik o wymiarach dowolnych, gęstość prądu nie ma wartości stałej i linie prądu nie biegną już równoległe. Rozmieszczenie ich w ciele zależy od kształtu przewodnika, jak również od kształtu i położenia w ciele elektrod (gr. hodos — droga), przez które prąd wpływa i wypływa. Możemy jednak i wtedy mówić o oporze ciała, rozumiejąc przez to stosunek różnicy potencjałów na elektrodach do natężenia prądu w przewodniku

$$r = \frac{V_1 - V_2}{i}$$



Przetnijmy przewodnik powierzchnią prostopadłą we wszystkich punktach do kierunku linii prądu, — będzie to, oczywiście, powierzchnia ekwipotencjalna, — i przeprowadźmy przez wszystkie punkty obwodu elementu, wyciętego z tej powierzchni, linie prądu otrzymując w ten sposób elementarną strugę prądu. Niech  $de_1$  oznacza jak wyżej ilość elektryczności, przepływającą w jednostce czasu przez element  $dS$ , gęstość prądu będzie równa

$$j = \frac{de_1}{dS},$$

skąd

$$de_1 = jdS.$$

Natężenie prądu przepływającego przez przewodnik jest równe

$$i = \int de_1 = \int jdS. \quad (5c)$$

W pewnych przypadkach można, jak to pierwszy stwierdził Nobili (1827 r.), wyznaczyć doświadczalnie rozmieszczenie w przewodniku powierzchni jednakowej gęstości prądu. Pokryjmy poziomą płytkę srebrną, platynową lub mosiężną połączoną z ujemnym biegunem źródła prądu warstewką roztworu wodnego siarczanu miedzi, który, jak o tym później będzie mowa (rozd. VI ust. 1), jest przewodnikiem, podlegającym prawu Ohma, i umieścimy nad płytką pionowy drut, połączony z dodatnim biegunem tegoż źródła. Osad miedzi, który powstanie wskutek przepływu prądu, będzie miał na płytce niejednakową gęstość w różnych odległościach od końca drutu, wobec czego na płytce powstaną koła spółśrodkowe o różnej grubości warstwy miedzi.

Ze wzoru (6) wynika, że jednostką oporu jest opór przewodnika, przez który przepływa prąd stały o natężeniu równym jednostce, gdy różnica potencjałów na końcach drutu równa jest jednostce. Wymiar oporu w elektrostatycznym układzie jednostek, wyznaczony ze wzoru (6), wynosi

$$[r] = \frac{[V]}{[i]} = \frac{M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}}{M^{1/2} L^{3/4} T^{-2}} = L^{-1} T.$$

Zazwyczaj jednak opór wyrażany jest w tzw. jednostkach praktycznych. Rozróżniamy dwa układy jednostek praktycz-



nych: układ bezwzględny jednostek praktycznych i układ międzynarodowy jednostek praktycznych.

Na mocy uchwały zebrania ogólnego komisji miar i wag w 1933 r. układ jednostek międzynarodowych ma charakter układu pomocniczego, obowiązującym zaś układem praktycznym jest bezwzględny układ jednostek praktycznych, oparty na jednostkach długości, masy, czasu i natężenia prądu (p. rozdz. VII, ust. 2).

W bezwzględnym układzie jednostek praktycznych jednostką oporu jest  $0\text{ m}$ ; jest to opór przewodnika, w którym różnica potencjałów jednego wolta powoduje przepływ prądu o natężeniu jednego ampera. W tym układzie  $0\text{ m}$  jest jednostką pochodną od jednostki napięcia i natężenia prądu. Mamy wtedy

$$1\text{ om} = \frac{1}{300} j \cdot \text{els} \cdot \text{pot.} : 3 \cdot 10^9 j \cdot \text{els} \cdot \text{nat. prądu} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} j \cdot \text{els} \cdot \text{oporu.}$$

W tzw. układzie międzynarodowym, o którym wspominaliśmy już niejednokrotnie, jednostkami podstawowymi są jednostki natężenia prądu (amper międzynarodowy  $A_m$ ) i oporu ( $0\text{ m}$  międzynarodowy  $\Omega_m$ ). Określenie ampera międzynarodowego podaliśmy już wyżej wiążąc go z kulombem międzynarodowym; oporem równym  $0\text{ m}$  międzynarodowemu jest opór słupa rtęci o temperaturze topniejącego lodu, o długości (przy stałym przekroju) równej 106,3 cm i masie 14,4521 g. Jednostkę międzynarodową potencjału (wolt międzynarodowy  $V_m$ ) otrzymujemy, jako pochodną tych dwu jednostek, biorąc za jednostkę potencjału różnicę potencjału dwu końcowych przekrojów przewodnika o oporze  $1\ \Omega_m$ , przez który przepływa prąd o natężeniu  $1\ A_m$ .

O stosunku tych jednostek do noszących tę samą nazwę jednostek praktycznych bezwzględnych będzie mowa na innym miejscu.

## 2. — PRAWO JOULE'A. — SIŁA ELEKTROBODŹCZA.

Przepływ prądu przez drut wyraża się, jak wiemy, w stałym przechodzeniu coraz to nowych ilości elektryczności dodatniej z miejsc o potencjale wyższym do miejsc o potencjale



niższym, tak że praca sił elektrycznych odniesiona do jednostki czasu wynosi (rozdz. III, ust. 3, str. 189)

$$i \cdot (V_1 - V_2), \quad (8)$$

energia zatem zużyta podczas przepływu prądu równa jest

$$U' = i (V_1 - V_2) \cdot t$$

lub po uwzględnieniu wzoru (6)

$$U' = i^2 \cdot r \cdot t, \quad (8a)$$

gdzie  $t$  oznacza czas przepływu prądu.

Gdy wielkości elektryczne wyrażone są w jednostkach elektrostatycznych C. G. S., energia wyrażona jest w ergach, gdy w jednostkach praktycznych, energia wyrażona jest w dżulach bezwzględnych lub dżulach międzynarodowych. Biorąc za podstawowe wielkości elektryczne natężenie prądu i opór, otrzymujemy ze wzoru (8a) następujące określenie dżula: dżul jest równy energii, zużytej w ciągu 1 sek przy przepływie prądu stałego o natężeniu 1 ampera (bezwzględnego czy międzynarodowego) przez drut o oporze 1 oma (bezwzględnego czy międzynarodowego).

Energia ta, jak to pierwszy w dokładnych pomiarach stwierdził Joule (1841 r.), ujawnia się w postaci ciepła, powodującego ogrzanie drutu, będącego siedliskiem prądu (por. rozdz. III, ust. 8). Oznaczając ilość ciepła wywiązane, tzw. ciepła Joule'a, przez  $Q$  mamy

$$Q = \frac{1}{J} i (V_1 - V_2) t = \frac{1}{J} i^2 r \cdot t. \quad (8b)$$

Jeszcze przed Joule'm Riess (1837 r.) stwierdził, że ciepło, wywiązane przez rozbrojenie baterii kondensatorów w druciku termometru elektrycznego, jest tym większe, im większy jest opór drucika. Joule mierząc ciepło, wywiązane przez prąd stały, wyznaczył nie tylko zależność od oporu drutu, otrzymując podobne, co Riess wyniki, lecz również i od natężenia prądu, stwierdzając, że ilość ciepła wywiązane jest proporcjonalna do drugiej potęgi natężenia prądu. Dopiero jednak Clausius wskazał (1852 r.), że wzór Joule'a wynika bezpo-



średnio z zasady zachowania energii i prawa Ohma. Pomiarów późniejsze, wykonane między innymi przez Becquerela (1843 r.), Lenza (1844 r.), Johna (1885 r.) i Dieterici'ego (1887 r.), potwierdziły na ogół wzór Joule'a i tym samym pośrednio prawo Ohma.

Gdy znamy ilość wywiązywanego w drucie ciepła, natężenie przepływającego prądu, opór drutu oraz czas przepływu prądu możemy ze wzoru (8b) wyznaczyć mechaniczny równoważnik ciepła  $J$ . W ten właśnie sposób Jaeger i Steinwehr znaleźli (1921 r.), że

$$1 \text{ dż. bezwzględny} = 10^7 \text{ ergów} = 0,2389 \text{ kal}_{15}$$

$$1 \text{ dż. międzynarodowy} = 0,2390 \text{ kal}_{15}$$

Wartość jednak energii, obliczona ze wzoru (8a), nie wyraża energii wywiązanej w całym obwodzie, będącym siedliskiem prądu stałego. Obwód ten bowiem, stanowiący z natury rzeczy obwód zamknięty (p. wyżej, str. 365), składa się oprócz drutu jeszcze ze źródła prądu, przez które przepływa stale prąd o tym samym, co w drucie, natężeniu. Przyjmijmy, że energia, rozproszona w źródle, wyraża się wzorem analogicznym do wzoru Joule'a, a więc, że dla tej części obwodu, która zawiera źródło, mamy

$$U'' = i^2 r_w \cdot t,$$

gdzie wielkość  $r_w$ , mająca te same cechy, co opór drutu, jest tzw. oporem wewnętrznym źródła; opór drutu jest wtedy oporem zewnętrznym  $r_z$ . Energia więc rozproszona w całym obwodzie wynosi

$$U = U' + U'' = i^2 (r_z + r_w) t. \quad (9)$$

Źródło zatem prądu, będące, oczywiście, źródłem tej energii, dostarcza każdej jednostce naboju dodatniego, przepływającej przez obwód, energii

$$\frac{U}{i \cdot t} = \frac{i^2 (r_z + r_w)}{i \cdot t} \cdot t = i (r_z + r_w). \quad (9a)$$



Wielkość  $\mathcal{E}$ , będąca miarą tej energii, odniesionej do jednostki naboju, nosi nazwę siły elektrobodźczej (elektromotrycznej) danego źródła prądu. Wartość tej siły wynosi

$$\mathcal{E} = i(r_z + r_w), \quad (9b)$$

skąd

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r_z + r_w}. \quad (9c)$$

Wzór (9c) wyraża uogólnione prawo Ohma.

Nazwijmy biegunami źródła prądu miejsca, w których źródło łączy się z drutem; biegunem dodatnim będzie to miejsce, przez które prąd do drutu wchodzi, — ujemnym, przez które wychodzi, i oznaczmy potencjały tych biegunów przez  $V_1$  i  $V_2$ . Podstawiając do wzoru (9b)

$$i \cdot r_z = V_1 - V_2,$$

otrzymamy

$$\mathcal{E} = V_1 - V_2 + i \cdot r_w. \quad (10)$$

Siła elektrobodźcza jest zatem większa od różnicy potencjału na biegunach. Jedynie w przypadku, gdy natężenie prądu spada do zera (obwód otwarty),

$$\mathcal{E} = V_1 - V_2.$$

W praktyce możemy równość tę uważać za spełnioną, gdy opór wewnętrzny źródła jest bardzo mały w porównaniu z oporem zewnętrznym, lub gdy prąd w obwodzie ma bardzo małe natężenie.

### 3. — ROZGAŁĘZIENIE PRĄDU. — PRAWA KIRCHHOFFA.

Gdy mamy do czynienia nie z pojedynczym drutem, łączącym bieguny źródła prądu, lecz z całą ich siecią, w której poszczególnych gałęziach znajdują się źródła siły elektrobodźczej, możemy, stosując twierdzenia ustępów poprzednich, wyznaczyć natężenie i kierunek prądu w każdej poszczególnej gałęzi sieci, o ile tylko znamy opory tych gałęzi i wartości



oraz rozmieszczenie czynnych sił elektrodźwicznych. Tego rodzaju wyznaczeń dotyczą wyprowadzone przez Kirchhoffa (1845 r.) z prawa Ohma reguły, nazywane zazwyczaj twierdzeniami lub prawami Kirchhoffa.

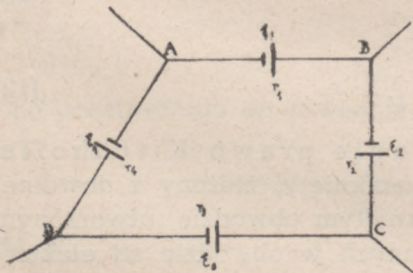
Niech punkt  $P$  (rys. 207) będzie punktem rozgałęzienia prądu stałego. Ilość elektryczności, wpływająca w ciągu dowolnie krótkiego czasu do tego punktu, musi być, jak to wynika z warunku stałości natężenia prądu, równa ilości, wypływającej w ciągu tego samego czasu, suma więc natężeń prądów, skierowanych ku punktowi  $P$ , musi być równa sumie natężeń prądów wychodzących z  $P$ . Jeżeli umówimy się natężenia prądów wychodzących brać ze znakiem przeciwnym do znaku prądów wchodzących, będziemy mieli

$$\sum i = 0, \quad (11)$$

suma algebraiczna natężeń prądów w drutach, schodzących się w punkcie rozgałęzienia, jest równa zero.

Wzór (11) wyraża pierwsze prawo Kirchhoffa. Drugie prawo ustala związek między natężeniem prądu w gałęziach obwodu zamkniętego, stanowiącego część badanej sieci przewodników, i siłami elektrodźwicznymi, czynnymi w tych gałęziach.

Niech danym obwodem zamkniętym będzie np. obwód



rys. 208

$ABCD$  (rys. 208), czerpiący energię nie tylko z własnych źródeł prądu, rozmieszczonych w poszczególnych gałęziach, lecz również z sieci, z którą jest połączony w punktach rozgałęzienia. I w tym przypadku będziemy mieli do czynienia z pewnym stanem trwałym, w którym

potencjały końcowych punktów każdej gałęzi będą miały wartości stałe. Różnica tych potencjałów, wyznaczona nie tylko



przez siły elektrobodźcze czynne w danej gałęzi, lecz również i przez siły elektrobodźcze pozostałej części obwodu i sieci, może działać albo w tym samym, co siły elektrobodźcze gałęzi, kierunku albo w przeciwnym. Wybierając jeden z tych kierunków za dodatni i opatrując wartości różnicy potencjału, siły elektrobodźczej i natężenia prądu odpowiednio znakami + lub —, możemy w obu przypadkach na podstawie prawa Ohma, zastosowanego do danej gałęzi, napisać

$$V_1 - V_2 + \mathcal{E} = i \cdot r,$$

gdzie  $V_1$  i  $V_2$  potencjały na końcach gałęzi,  $r = r_z + r_w$  całkowity jej opór,  $\mathcal{E}$  — suma algebraiczna sił elektrobodźczych, czynnych w gałęzi.

Stosując ten wzór po kolei do wszystkich gałęzi obwodu znajdziemy

$$V_A - V_B + \mathcal{E}_{AB} = i_{AB} \cdot r_{AB} \quad (a)$$

$$V_B - V_C + \mathcal{E}_{BC} = i_{BC} \cdot r_{BC}$$

$$V_C - V_D + \mathcal{E}_{CD} = i_{CD} \cdot r_{CD}$$

$$V_D - V_A + \mathcal{E}_{DA} = i_{DA} \cdot r_{DA},$$

skąd po dodaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC} + \mathcal{E}_{CD} + \mathcal{E}_{DA} &= i_{AB} \cdot r_{AB} + i_{BC} \cdot r_{BC} + \\ &+ i_{CD} \cdot r_{CD} + i_{DA} \cdot r_{DA} \end{aligned}$$

lub inaczej przepisane

$$\sum \mathcal{E} = \sum i \cdot r. \quad (12)$$

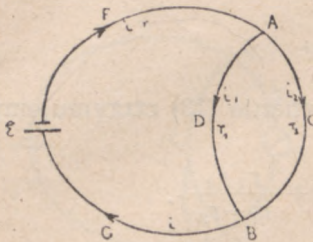
Wzór ten, wyrażający drugie prawo Kirchhoffa, możemy uogólnić na obwód zamknięty, złożony z dowolnej ilości gałęzi. W każdym zamkniętym obwodzie, utworzonym z rozgałęzień sieci, suma czynnych w obwodzie sił elektrobodźczych jest równa sumie iloczynów z oporu poszczególnej gałęzi przez natężenie płynącego przez gałąź prądu.

Prawa Kirchhoffa zastosujemy do rozpatrzenia paru ważniejszych przypadków.



a. — ROZGAŁĘZIENIE PROSTE. — UPUST (BOCZNIK-SHUNT).

Obwód, w którym czynna jest siła elektrodźwiczna  $\mathcal{E}$ , rozgałęzia się w punktach  $A$  i  $B$ . Oznaczając przez  $i$  natężenie prądu w gałęzi  $GF$  i przyjmując że prąd w tej gałęzi płynie ku punktowi  $A$ , z pierwszego prawa Kirchhoffa znajdujemy



rys. 209

$$i - (i_1 + i_2) = 0$$

lub inaczej

$$i_1 + i_2 = i, \quad (b)$$

gdzie  $i_1$  i  $i_2$  oznaczają wartości natężeń prądu w gałęziach  $ACB$  i  $ADB$ .

W obwodzie zamkniętym  $ADBC$ , nie zawierającym wcale siły elektrodźwicznej, mamy, zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$V_A - V_B = i_1 r_1$$

$$V_B - V_A = -i_2 r_2,$$

skąd

$$i_1 r_1 - i_2 r_2 = 0. \quad (c)$$

Z równania tego znajdujemy

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (d)$$

lub

$$i_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot i_1$$

i po podstawieniu do równania (b)

$$i = i_1 + \frac{r_1}{r_2} i_1 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} i_1,$$

tak że

$$i_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} i, \quad (13)$$

$$i_2 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} i. \quad (14)$$



Wartość natężenia  $i$  możemy wyznaczyć stosując drugie prawo Kirchhoffa do zamkniętego obwodu  $FADBG$ , zawierającego źródło prądu o sile elektrodźwicznej  $\mathcal{E}$ . Oznaczając opór całkowity gałęzi  $GF$  przez  $r$ , napiszemy

$$\mathcal{E} = ir + i_1 r_1,$$

skąd po podstawieniu wartości  $i_1$  z równania (13) otrzymujemy

$$\mathcal{E} = ir + i \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = i \left( r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right),$$

i ostatecznie

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \quad (15)$$

co pozwala nam ze wzorów (13) i (14) wyznaczyć natężenia  $i_1$  i  $i_2$ .

Jak wynika ze wzoru (15) natężenie prądu  $i$  w gałęzi  $FG$  pozostałoby bez zmiany, gdybyśmy gałęzie  $ACB$  i  $ADB$  zastąpili jednym przewodnikiem o oporze

$$r_r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad (16)$$

który nazwiemy oporem rozgałęzienia lub oporem równoważnym. Wzór (16) przepiszmy w postaci

$$r_r = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}$$

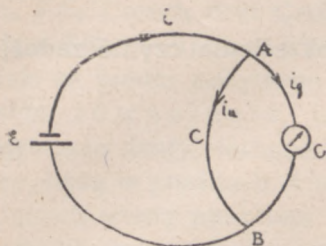
lub

$$\frac{1}{r_r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}. \quad (16a)$$

Odwrotność oporu rozgałęzienia równa jest sumie odwrotności oporów gałęzi. Opór rozgałęzienia jest więc zawsze mniejszy od oporu każdej poszczególniej gałęzi.



Tego rodzaju rozgałęzienie często jest stosowane wtedy, gdy przyrządy, włączone do obwodu (np. galwanometry), chcemy zabezpieczyć przed działaniem silnego prądu, płynącego w obwodzie. Niech  $G$  będzie np. tym przyrządem o oporze  $r_g$ , włączonym do obwodu w punktach  $A$  i  $B$ . Punkty te łączymy drutem  $ACB$ , który wtedy nosi nazwę upustu lub bocznika (shunt). Jeżeli opór upustu wynosi  $r_u$  natężenia prądu w gałęziach  $AGB$  i  $ACB$  będą do siebie w stosunku (p. wzór d)



rys. 210

$$\frac{i_g}{i_u} = \frac{r_u}{r_g} \quad (e)$$

Przypuśćmy np., że chcemy, aby przez gałąź  $AGB$  przepłynęła tylko  $n$ -ta część natężenia prądu  $i$  w obwodzie. Ze wzoru (13) otrzymujemy

$$i_g = \frac{r_u}{r_g + r_u} i = \frac{1}{n} i,$$

skąd

$$n \cdot r_u = r_g + r_u$$

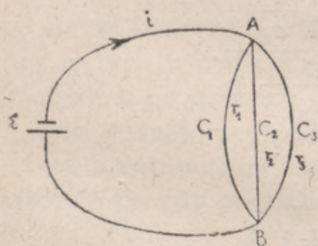
i wreszcie

$$(n-1) r_u = r_g.$$

Opór upustu musi być  $(n-1)$  razy mniejszy od oporu gałęzi  $AGB$ .

#### b. — ROZGAŁĘZIENIE ZŁOŻONE

Przypuśćmy teraz, że punkty  $A$  i  $B$  obwodu są połączone nie dwoma, lecz  $n$  różnymi drutami, o oporach równych odpowiednio  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ . I tym razem, oczywiście,



rys. 211

$$i = \sum_{p=1}^n i_p, \quad (f)$$

gdzie

$$i_p = \frac{V_A - V_B}{r_p} \quad (g)$$



Podobnie więc, jak w przypadku poprzednim, mamy

$$i_1 : i_2 : i_3 : \dots : i_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \frac{1}{r_3} : \dots : \frac{1}{r_n}. \quad (h)$$

Opór rozgałęzienia  $r_r$  musi w myśl określenia czynić zadość równaniu

$$i = \frac{V_A - V_B}{r_r} \quad (i)$$

lub

$$r_r = \frac{V_A - V_B}{i} = \frac{V_A - V_B}{\sum i_p} = \frac{V_A - V_B}{(V_A - V_B) \sum_{p=1}^n \frac{1}{r_p}} = \frac{1}{\sum_{p=1}^n \frac{1}{r_p}}, \quad (16b)$$

skąd ostatecznie

$$\frac{1}{r_r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}. \quad (16c)$$

Podstawiając do (g) wartość  $V_A - V_B$  wyznaczoną z (i), i uwzględniając wzór (16b) otrzymujemy

$$i_p = \frac{r_r}{r_p} i = \frac{1}{r_p \sum_{p=1}^n \frac{1}{r_p}} i$$

i z uwagi, że

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + r_r} = \frac{\mathcal{E} \sum_{p=1}^n \frac{1}{r_p}}{r \sum_{p=1}^n \frac{1}{r_p} + 1},$$

$$i_p = \frac{\mathcal{E}}{r_p} \cdot \frac{1}{r \sum_{p=1}^n \frac{1}{r_p} + 1}. \quad (17)$$



c. — OBWÓD Z DWOMA ŹRÓDŁAMI SIŁY ELEKTROBODŹCZEJ, WŁĄCZONYMI RÓWNOLEGLE.

Niech teraz w badanym obwodzie znajdują się dwa źródła prądu o siłach elektrobodźczych równych odpowiednio  $\mathcal{E}_1$  i  $\mathcal{E}_2$  i niech drut  $CAD$  łączy bieguny dodatnie tych źródeł, drut  $FBG$  — ujemne (rys. 212), tak że źródła połączone są ze sobą równoległe, i niech wreszcie druty, łączące bieguny, będą w punktach  $A$  i  $B$ , będących wtedy punktami rozgałęzienia, połączone drutem  $AHB$ .

Natężenie prądu  $i$ , płynącego przez drut  $AB$ , będzie w myśl pierwszego prawa Kirchhoffa równe sumie algebraicznej natężeń w drutach  $CA$  i  $DA$  lub  $FB$  i  $GB$ , przy czym jednak tylko kierunek prądu  $i$  będzie mógł być od razu wyznaczony (w przypadku przedstawionym na rysunku, prąd płynie od  $A$  do  $B$ ). Jakikolwiek jednak jest kierunek prądów  $i_1$  i  $i_2$ , mamy zawsze

$$i = i_1 + i_2 \quad (j)$$

$$i_1 r_1 + ir = \mathcal{E}_1 \quad (k)$$

$$i_2 r_2 + ir = \mathcal{E}_2 \quad (l)$$

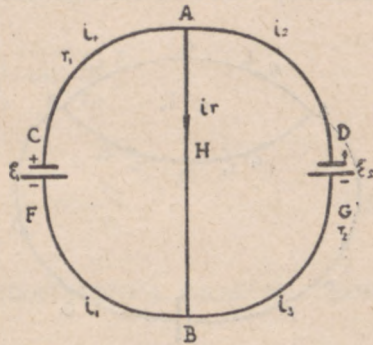
Dobierzmy tak opory drutów, żeby prąd wcale nie płynął przez gałąź  $ACFB$ , a więc aby  $i_1 = 0$ . Wtedy

$$\mathcal{E}_1 = ir = V_A - V_B \quad (m)$$

Siła elektrobodźcza źródła, znajdującego się w gałęzi, przez którą w tych warunkach prąd nie płynie, równa jest różnicy potencjałów na końcach drutu  $AB$ .

Taki jednak przypadek możliwy jest tylko wtedy, gdy  $E_1 < E_2$ , z porównania bowiem wzoru (m) i wzoru, który otrzymujemy z (l), gdy przyjmiemy w nim  $i_2 = i$  znajdujemy

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r}{r + r_2} < 1.$$

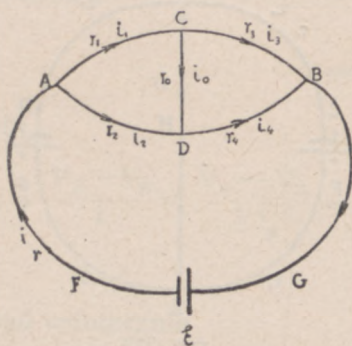


rys. 212



## d. — MOST WHEATSTONE'A.

Połączmy w układzie, któryśmy rozpatrywali w ustępie (a), druty rozgałęzienia  $ACB$  i  $ADB$  drutem  $CD$  tzw. mostem (rys. 213). Otrzymamy wtedy układ, nazywany zazwyczaj mostem Wheatstone'a, od nazwiska fizyka, który pierwszy (1843 r.) użył go przy pomiarze oporu przewodników.



rys. 213

Ściśle biorąc układ odtworzony schematycznie na rys. 213 jest późniejszą, opracowaną przez Kirchhoffa, postacią mostu. Układ, używany przez Wheatstone'a, był nieco inny.

Na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa możemy napisać

$$i = i_1 + i_2 \quad (m)$$

$$i_1 = i_0 + i_3$$

$$i = i_3 + i_4,$$

przy czym kierunek prądu  $i_0$  w moście nie może być z góry wyznaczony, założenie więc nasze, że prąd płynie od  $C$  do  $D$  jest całkowicie dowolne.

Stosując drugie prawo Kirchhoffa do zamkniętych obwodów  $FACBG$ ,  $ACDA$ ,  $CDBC$ , otrzymamy

$$ir + i_1 r_1 + i_3 r_3 = \mathcal{E}, \quad (n)$$

$$i_1 r_1 + i_0 r_0 - i_2 r_2 = 0,$$

$$i_0 r_0 + i_4 r_4 - i_3 r_3 = 0.$$

Z sześciu równań (m) i (n) można wyznaczyć sześć niewiadomych natężeń prądu: Równań tych jednak rozwiązywać nie będziemy, poprzestając na rozpatrzeniu szczególnego przypadku, gdy końcowe punkty  $C$  i  $D$  mostu mają jednakowy potencjał. Takie ustawienie mostu jest zawsze możliwe, wzdłuż obu bowiem gałęzi  $ACB$  i  $ADB$  potencjał zmniejsza się w sposób ciągły od tej samej wartości początkowej  $V_A$  do tej samej wartości końcowej  $V_B$ . Jakikolwiek więc byłby potencjał punktu  $C$  na drucie  $ACB$ , można zawsze znaleźć taki punkt  $D$



na drucie  $ADB$ , który by miał ten sam potencjał, co  $C$ . Wtedy natężenie prądu w moście będzie równe zero, a więc  $i_1$  będzie równe  $i_3$  i  $i_2$  równe  $i_4$ .

Z równań (n) otrzymamy

$$i r + (r_1 + r_3) i = \mathcal{E}$$

oraz

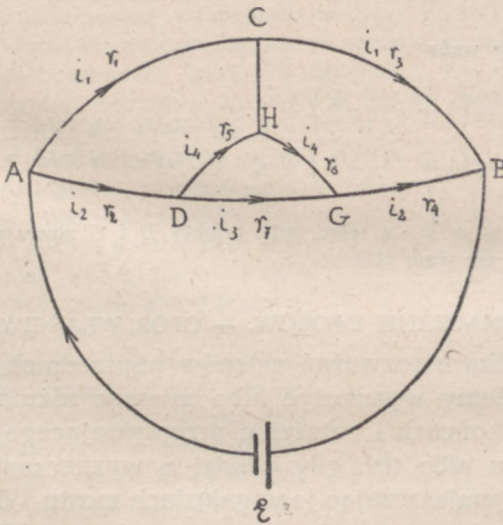
$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{r_4}{r_3},$$

skąd wynika, że

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4} \text{ lub } \frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}. \quad (18)$$

e. — PODWÓJNY MOST WHEATSTONE'A (MOST W. THOMSONA).

Połączmy teraz punkt  $C$  drutu  $ACB$  nie z jednym punktem  $D$  drutu  $ADB$ , lecz z dwoma punktami  $D$  i  $G$  przy pomocy drutu  $CH$ , rozga-



rys. 214

łęziającego się w punkcie  $H$  (rys. 214), i przypuścmy, że tak, jak poprzednio, prąd przez gałąź  $CH$  nie płynie. Wtedy natężenia prądu w gałęziach  $AC$  i  $CB$  będą jednakowe (równe np.  $i_1$ ), również jedna-



kowe w gałęziach  $DH$  i  $HG$  (równe np.  $i_4$ ) i wreszcie w gałęziach  $AD$  i  $GB$ . W zamkniętych obwodach  $ACHDA$ ,  $CBGHC$  i  $DHGD$  mamy na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa

$$i_1 r_1 = i_2 r_2 + i_4 r_5, \quad (o)$$

$$i_1 r_3 = i_2 r_4 + i_4 r_6,$$

$$i_4 (r_5 + r_6) = i_3 \cdot r_7.$$

Z ostatniego z tych równań oraz z równania

$$i_2 = i_3 + i_4$$

otrzymujemy

$$i_2 = \frac{r_5 + r_6 + r_7}{r_7} i_4,$$

skąd po podstawieniu do dwu pierwszych równań (o)

$$i_1 r_1 = \left( \frac{r_5 + r_6 + r_7}{r_7} r_2 + r_5 \right) i_4, \quad (p)$$

$$i_1 r_3 = \left( \frac{r_5 + r_6 + r_7}{r_7} r_4 + r_6 \right) i_4$$

znajdujemy wzór

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2 \left( 1 + \frac{r_5 + r_6}{r_7} \right) + r_5}{r_4 \left( 1 + \frac{r_5 + r_6}{r_7} \right) + r_6} = \frac{r_2 (r_5 + r_6 + r_7) + r_5 r_7}{r_4 (r_5 + r_6 + r_7) + r_6 r_7} \quad (19)$$

który dla  $r_7 = 0$ , a więc, gdy punkty  $D$  i  $G$  zlewają się ze sobą, przechodzi we wzór (18).

#### 4. — WYZNACZANIE OPORÓW. — OPÓR WŁAŚCIWY.

Jak wynika z rozważań ustępów poprzednich, opór przewodnika możemy wyznaczyć albo mierząc różnicę potencjałów na jego końcach i natężenie przepływającego przez przewodnik prądu albo też, gdy chodzi o wyznaczenie stosunku dwu oporów, umieszczając je w gałęziach mostu Wheatstone'a. W tym ostatnim przypadku za przewodnik  $ADB$  bierze się zazwyczaj drut jednorodny o możliwie stałym przekroju, w gałęzi  $AC$  umieszcza się znany opór  $r$ , w gałęzi zaś  $CB$  przewodnik o nieznanym oporze  $x$  (rys. 213). Gdy prąd przez gałąź  $CD$  nie płynie (co sprawdzamy, umieszczając w tej gałęzi



galwanometr), stosunek oporu  $x$  do  $r$  równy jest, jak to wynika ze wzoru (18), stosunkowi oporu części drutu  $DB$  do oporu części  $AD$ . Ponieważ drut ten ma przekrój stały, opory tych części są do siebie w stosunku takim, jak ich długości,  $l_1$  i  $l_2$ . Mamy zatem

$$x = r \cdot \frac{l_2}{l_1}. \quad (20)$$

W pewnych przypadkach korzystniej jest używać mostu Thomsona (rys. 214). Gdy opory gałęzi  $AC$ ,  $DH$ ,  $CB$  i  $HG$  tak dobierzemy, aby

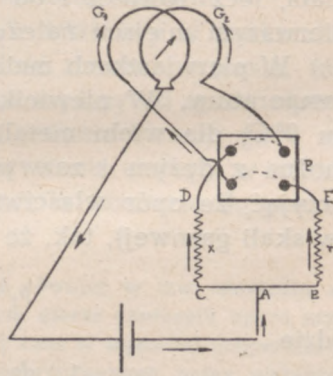
$$\frac{r_5}{r_1} = \frac{r_6}{r_3},$$

wtedy, jak to wynika z równań (p), opory gałęzi  $AD$  ( $r_2$ ) i  $GB$  ( $r_4$ ) będą do siebie w stosunku

$$\frac{r_2}{r_4} = \frac{r_1}{r_3}.$$

Stąd znając stosunek  $\frac{r_1}{r_3}$  i jeden z oporów  $r_2$  lub  $r_4$  można wyznaczyć drugi opór.

Z innych metod wymienimy metodę podstawienia: do obwodu włącza się zamiast nieznanego oporu opór znany, który może być w dość szerokich granicach zmieniany, np. drut, w którym długość części, włączonej do obwodu, można zmieniać w sposób ciągły. Opór ten dobieramy tak, aby natężenie prądu w obwodzie miało wartość tę samą, co przy włączeniu do obwodu oporu nieznanego. Odmianą tej metody podstawienia jest tzw. metoda różnicowa Kohlrauscha (1883 r.), w której schemat podaje rys. 215. Prąd, płynący ze źródła, rozgałęzia się w punkcie  $A$ , część jego płynie przez opór  $x$ , część przez opór  $r$ . Z gałęzi  $CD$  prąd płynie do jednej z dwu cewek galwanometru  $G_2$ ; z gałęzi  $EF$  do drugiej cewki  $G_1$ , przy czym kierunki prądu w obu cewkach są przeciwne, przeciwnie skierowane są więc i działania magnetyczne obu cewek na igłę galwanometru, (por. rozdz. VII, ust. 1). Notujemy wychylenie galwanometru, odpowiadające danemu połączeniu i przy pomocy przełącz-



rys. 215



nika  $P$  zmieniamy kierunki prądu w cewkach na odwrotne; gdy opór  $x$  równy jest oporowi  $r$ , wychylenie igły pozostaje bez zmiany.

Jeżeli przewodnik jest tego rodzaju, że możemy do niego stosować wzór (5), pomiar jego oporu  $r$  pozwala obliczyć jego opór właściwy  $\rho$ . Ze wzoru

$$r = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad (a)$$

znajdujemy, że opór właściwy danego ciała równy jest liczbowo oporowi przewodnika o długości 1 cm i przekroju 1 cm<sup>2</sup>. W praktyce jednak za miarę oporu właściwego bierze się opór  $\rho'$  przewodnika o długości 1 m i przekroju 1 mm<sup>2</sup>. Ta wielkość, podawana zazwyczaj w tablicach, jest 10<sup>4</sup> raza większa od  $\rho$ , jak to wynika bezpośrednio ze wzoru (a), gdy w nim podstawimy  $l = 100$  cm,  $S = 0,01$  cm<sup>2</sup> i  $r = \rho'$ .

Z pierwiastków metalicznych najmniejszy opór właściwy posiada srebro ( $\rho' = 0,015$  w temperaturze 0<sup>o</sup> C), następnie miedź ( $\rho' = 0,017$  w 0<sup>o</sup> C) i złoto ( $\rho' = 0,023$  w 0<sup>o</sup> C); ze stopów szczególnie dobrym przewodnikiem jest tzw. brąz fosforowy (0,98 miedzi i 0,02 cyny oraz bardzo drobne ilości fosforu), którego opór właściwy w temperaturze 0<sup>o</sup> C jest prawie równy oporowi właściwemu miedzi.

Wartość jednak tych oporów zależy nie tylko od rodzaju ciała, lecz również i od innych czynników, z których na pierwszym miejscu należy wymienić temperaturę.

W pierwiastkach metalicznych opór wzrasta ze wzrostem temperatury. W niewielkich granicach temperatur (w pobliżu 0<sup>o</sup> C) dla wielu metali (jak np. platyny, miedzi, ołowiu) można z dużym i zazwyczaj wystarczającym przybliżeniem przyjąć, że opór właściwy jest liniową funkcją temperatury (w skali gazowej), tak, że mamy

$$\rho_t = \rho_o (1 + at), \quad (21)$$

gdzie

$$a = \frac{1}{\rho_o} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho_t - \rho_o}{\rho_o \cdot t} = \text{stałej} \quad (21a)$$

jest termicznym współczynnikiem oporu właściwego.



W większych jednak granicach temperatur współczynnik  $a$  przestaje zachowywać wartość stałą, wzrastając wraz ze wzrostem temperatury. W znacznej ilości przypadków wzrost ten nie jest wielki, dla miedzi np. w granicach temperatur od  $400^{\circ}$  do  $500^{\circ}$  C wynosi mniej więcej 8% wartości, jaką współczynnik  $a$  miał w granicach od  $0^{\circ}$  do  $100^{\circ}$  C; jedynie w metalach ferromagnetycznych (żelazo, nikiel, kobalt) wzrost ten jest większy (współczynnik  $a$  żelaza ma w granicach od  $400^{\circ}$  do  $500^{\circ}$  C wartość dwa razy większą, niż w granicach od  $0^{\circ}$  do  $100^{\circ}$ ). Odrębne własności wykazują platyna i pallad: współczynnik termiczny tych metali maleje ze wzrostem temperatury.

Na ogół w wysokich temperaturach wzór (21) należy zastąpić wzorem

$$\rho_t = \rho_0 (1 + bt + ct^2), \quad (21b)$$

lepiej odpowiadającym wynikom pomiarów. Wtedy

$$a = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dt} = b + 2ct,$$

gdzie współczynnik  $c$  jest dla wszystkich metali, z wyjątkiem platyny i palladu (oraz, być może, tantalu), dodatni.

W temperaturach topnienia opór właściwy w znakomitej większości przypadków nagle i to dość znacznie wzrasta, (np. opór ołowiu ciekłego jest dwukrotnie wyższy od oporu ołowiu stałego, Pietenpol i Miley, 1929 r.); jedynie bizmut, gal i antymon wykazują przy przejściu ze stanu stałego w ciekły nagle zmniejszenie oporu, dochodzące w bizmucie do połowy wartości oporu w stanie stałym.

Wpływ temperatury ujawnia się również w tzw. starzeniu się przewodnika, polegającym na znacznym nieraz obniżeniu oporu przewodnika, utrzymywanego przez dłuższy czas w wysokiej temperaturze. Tak np. opór drutu platynowego, utrzymywanego przez piętnaście godzin w temperaturze  $180^{\circ}$  C, zmniejsza się o więcej, niż 5% (Credner, 1913 r.). To zmniejszanie się oporu wzrasta na ogół z temperaturą, w której przewodnik jest utrzymywany: w pewnej charakterystycznej dla danego metalu temperaturze przechodzi przez maximum. Dla platyny temperatura ta wynosi około  $800^{\circ}$  C.



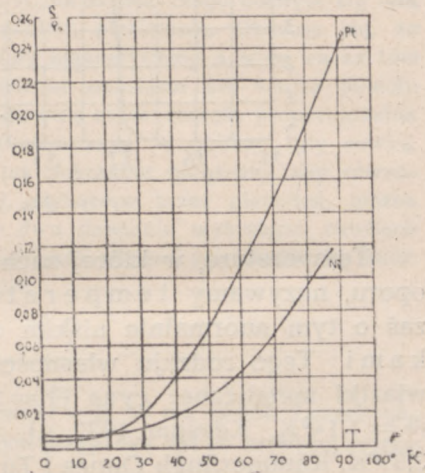
W stopach wartość współczynnika termicznego zależy od ich składu procentowego, na ogół jest ona mniejsza, niż w pierwiastkach metalicznych. Można przeto odpowiednio dobierając metale otrzymać stopy o bardzo małym współczynniku  $\alpha$ : tak np. współczynnik termiczny konstantanu (60% miedzi i 40% niklu) jest 600 razy mniejszy od współczynnika  $\alpha$  niklu i 400 razy od współczynnika termicznego miedzi.

Zgola inaczej wyraża się zależność oporu właściwego od temperatury w ciałach, nazywanych zazwyczaj półprzewodnikami, posiadających opór właściwy o wiele większy od oporu przewodników, ale nie będących w ścisłym tego słowa znaczeniu dielektrykami. Można by przypuszczać, że ciała takie będą stanowiły jak gdyby stan przejściowy od przewodników do izolatorów. Doświadczenie wszakże wskazuje, że posiadają one pewne własności szczególne, które zmuszają do rozpatrywania ich jako odrębną grupę ciał. Najwyraźniej ta ich odrębność ujawnia się w fakcie, że wbrew temu, co obserwujemy we wszystkich przewodnikach bez wyjątku, opór właściwy półprzewodników maleje ze wzrostem temperatury i to tym bardziej, im większy jest wzrost temperatury. Tak np. pałeczka szklana, która w temperaturze pokojowej zachowuje się pod każdym względem jak dielektryk, podgrzana palnikiem gazowym, staje się przewodnikiem. Jeżeli przyłożymy do niej napięcie około 220 v., ciepło, wywiązane przez płynący przez nią prąd, jest dostatecznie duże, aby nawet po odstawieniu palnika pałeczka pozostała przewodzącą. Podobnie zachowują się pałeczki, otrzymane pod znacznym ciśnieniem ze sproszkowanych tlenków metali. Przewodnictwo w półprzewodnikach może być dwojakiego rodzaju: albo typu jonowego, a więc podobne do przewodnictwa elektrolitów (por. rozdz. VI, ust. I), albo elektronowego, tak jak w przewodnikach, t. zn. takiego, w którym ruch elementarnych nabożów (elektronów) powoduje przepływ prądu. W ciałach należących do pierwszej grupy, (np. szkło,  $Cr^2O_3Ag_2S$ ) można stwierdzić pozorne odstępstwo od prawa Ohma, niekiedy nawet przenoszenie produktów rozkładu; w ciałach drugiej grupy występują wyraźniej zjawiska termoelektryczne (p. niżej ust. 5 i 6) i zjawisko Halla (rozd. VII, ust. 7).

W wielu przypadkach zachodzi jeszcze jedna różnica pomiędzy przewodnikami i półprzewodnikami. Oto oczyszczanie przewodników z obcych domieszek na ogół zmniejsza ich opór właściwy; metal czysty ma przewodnictwo największe; w półprzewodnikach oczyszczanie prowadzi do przeciwnego wyniku. Można by zatem przypuszczać, że te właśnie zanieczyszczenia warunkują przewodnictwo półprzewodników.



W temperaturach niższych od  $0^{\circ}\text{C}$  zależność oporu właściwego od temperatury ma na ogół ten sam charakter, co w temperaturach powyżej  $0^{\circ}$ . Opory właściwe znacznej części metali czystych przy obniżaniu temperatury zmniejszają się w sposób ciągły, dochodząc w temperaturach bliskich zera bezwzględnego do pewnej wartości stałej tzw. oporu szczątkowego (patrz rys. 216, gdzie na osi rzędnych odkładamy stosunek oporu właściwego  $\rho$  w danej temperaturze do oporu właściwego  $\rho_0$  w temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$ , na osi zaś odciętych temperatury w skali bezwzględnej). Według Meissnera (1928 r.) opór szczątkowy jest tym mniejszy, im czystszy jest użyty do pomiarów metal, wobec czego możnaby przypuszczać, że w metalach doskonale oczyszczonych opór

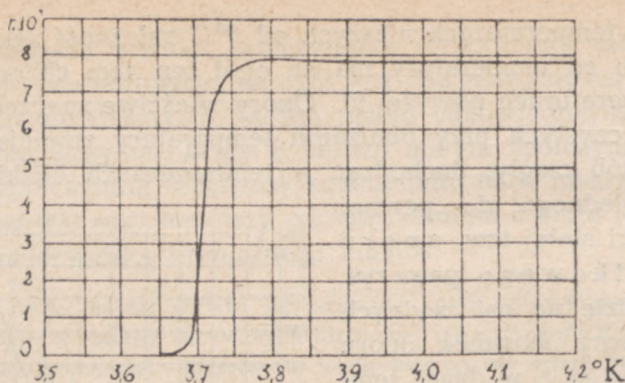


rys. 216

właściwy zbliża się asymptotycznie do zera w miarę, jak temperatura zbliża się do zera bezwzględnego.

Dla pewnej jednak grupy metali przebieg zjawiska, jak to stwierdził w 1911 r. Kamerlingh Onnes, jest w bardzo niskich temperaturach (poniżej  $9^{\circ}\text{K}$ ) odmienny. Opór właściwy tych metali, dochodzący podobnie, jak opór poprzednio omawianych metali, w dostatecznie niskiej temperaturze do pewnej wartości stałej, którą możnaby uważać za opór szczątkowy, przy dalszym obniżaniu temperatury nagle się zmniejsza, spadając w temperaturach nieco wyższych od zera bezwzględnego do wartości znikomo małych. Tak np. opór właściwy cyny (rys. 217, wzięty z IV tomu „Handbuch der Physik“ Müller-Pouilleta) w temperaturze  $5^{\circ}\text{K}$  prawie stały, w temperaturze  $3,74^{\circ}\text{K}$  nagle spada, tak że już w temperaturze  $3,65^{\circ}\text{K}$  wartość jego jest mniej więcej 10 000 razy mniejsza, a więc leżąca poza granicami możliwości pomiaru.





rys. 217

Temperaturę, w której zachodzi to nagłe zmniejszenie się oporu, nazywamy temperaturą skoku  $\vartheta$ , przewodniki zaś o tym anormalnie niskim oporze — nadprzewodnikami. Tego rodzaju własności wykazują następujące pierwiastki metaliczne: cyna ( $\vartheta = 3,74^{\circ}\text{K}$ ), gal ( $\vartheta = 1,05^{\circ}\text{K}$ ), glin ( $\vartheta = 1,14^{\circ}\text{K}$ , Keesom 1933 r.), ind ( $\vartheta = 3,37^{\circ}\text{K}$ ), iryd (około  $3,39^{\circ}\text{K}$ , Kammerlingh Onnes i Tuyn, 1923 r.), lantan ( $\vartheta = 4,71^{\circ}\text{K}$ , Mendelssohn i Daunt, 1937 r.), niobium ( $\vartheta = 4,19^{\circ}\text{K}$ ), ołów ( $\vartheta = 7,2^{\circ}\text{K}$ ), ruten ( $\vartheta = 2,04^{\circ}\text{K}$ , Mc Lennan, Allen, Wilhelm, 1929 r.), tal ( $\vartheta = 2,32^{\circ}\text{K}$ ), tantal ( $\vartheta = 4,36^{\circ}\text{K}$ ), tor ( $\vartheta = 1,145^{\circ}\text{K}$ ), tytan ( $\vartheta < 1,13^{\circ}\text{K}$ ).

W temperaturach poniżej  $1^{\circ}\text{K}$  stają się nadprzewodnikami: cynk ( $\vartheta = 0,79^{\circ}\text{K}$ , Keesom, 1933 r.): cyrkon ( $\vartheta = 0,70^{\circ}\text{K}$ , Kürti i Simon, 1935 r.), hafn ( $\vartheta = 0,35^{\circ}\text{K}$ , Kürti i Simon, 1935 r.), kadm ( $\vartheta = 0,54^{\circ}\text{K}$ , Kürti i Simon, 1935 r.).

Opór glinu w temperaturach od  $4,2^{\circ}\text{K}$  do  $2,2^{\circ}\text{K}$  badali Niewodniczański i Boorse, 1935 r.

Nagłość spadku oporu w temperaturze skoku jest tym wyraźniejsza, im czystszy jest użyty metal; wysokość jednak temperatury  $\vartheta$  pozostaje na ogół bez zmiany, o ile tylko domieszka obcego metalu nie jest zbyt wielka. Stopy nie zawsze mają własności analogiczne do własności swych składników, tak że może się zdarzyć, iż stop metali, nie będących nadprzewodnikami, jest nadprzewodnikiem, jak np. stop złota i bizmutu ( $\vartheta = 1,84^{\circ}\text{K}$ , de Haas, Aubel i Voogd, 1931 r.).

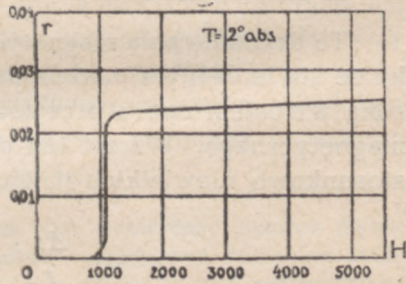


Dowodem istnienia w niskich temperaturach nadprzewodnictwa pewnych metali może być między innymi następujące doświadczenie Kamerlingh-Onnesa, (1914 r.). Pierścień ołowiany, umieszczony w cewce z prądem i posiadający temperaturę pokojową, jest następnie oziębiony do temperatury skoku przez zanurzenie do naczynia z ciekłym helem. Przerwanie prądu w cewce wzbudza w pierścieniu prąd indukowany (p. rozdz. VIII, ust. 1), na skutek czego odchyła się igła magnetyczna, umieszczona w pobliżu pierścienia. Okazuje się, że w tych warunkach odchylenie igły magnetycznej, a więc, co za tym idzie, natężenie prądu w pierścieniu zmniejsza się bardzo powoli; wartość więc rozpraszanej w jednostce czasu energii, proporcjonalna do oporu, jest bardzo mała. Umieszczając w pobliżu igły cewkę, przez którą przepływa prąd o tak dobranym natężeniu, aby równoważył działanie na igłę prądu, płynącego przez pierścień, można wyznaczyć stosunek natężeń w dwu dowolnie wybranych chwilach  $t_1$  i  $t_2$  i stąd, znając współczynnik indukcji własnej pierścienia, (p. rozdz. VIII, ust. 3) wyznaczyć  $r$  ze wzoru

$$i = i_0 e^{-\frac{r}{L}t},$$

gdzie  $i_0$  — natężenie prądu w chwili  $t = 0$ . W ten sposób Kamerlingh-Onnes stwierdził, że opór w danym przypadku był co najwyżej równy  $10^{-12}$  oma.

Wysokość temperatury skoku jest zależna od natężenia prądu, płynącego przez przewodnik. Tak np. według Suhrmanna drut cynowy o przekroju  $0,014 \text{ mm}^2$  i oporze równym (w temperaturze pokojowej) 79 omom staje się nadprzewodnikiem w temperaturze  $3,72^\circ \text{K}$ , gdy natężenie prądu wynosi 0,004 A; przy wzroście natężenia do 0,4 A temperatura skoku obniża się do  $2,35^\circ \text{K}$ . Podobne działanie wywiera i pole magnetyczne: wzrost pola magnetycznego powoduje wzrost oporu i obniżenia temperatury skoku (rys. 218).



rys. 218

Z doświadczeń, wykonanych przez Silsbeego (1916 r.), zdaje się wynikać, że w obu przypadkach czynnikiem decydującym jest natężenie pola magnetycznego. Silsbee w rurce cynowej, o świetle rów-



nym mniej więcej 0,8 mm, umieścił drut ołowiany, przez który przechodził prąd w kierunku przeciwnym do kierunku prądu w rurce. Ten układ przewodników oziębiany był do temperatury nieco niższej od temperatury skoku cyny. Przy pewnej wartości natężenia prądu w ołowiu prąd o natężeniu 2A całkowicie usuwał nadprzewodnictwo cyny, tak że na końcach rurki powstawała stosunkowo znaczna różnica potencjałów. Różnica ta stopniowo malała, gdy wzrastało natężenie prądu w drucie ołowianym, wtedy bowiem malało natężenie pola magnetycznego, działającego na cynę.

Opór nadprzewodnika, umieszczonego w polu magnetycznym, zaczyna wzrastać, poczynając od pewnej granicznej wartości natężenia tego pola i dochodząc do tej wartości, jaką by miał normalny przewodnik w danej temperaturze. Wartość ta zależy od temperatury przewodnika i jest rzędu setek lub tysięcy oerstedów. W przypadku, gdy mamy do czynienia z kryształem ciała nadprzewodzącego, umieszczonym równolegle do pola, pole wewnątrz ciała jest równe zero, kryształ zachowuje się przeto jak ciało doskonale diamagnetyczne. W nadprzewodniku o kształcie kulistym ten wzrost oporu pod działaniem pola magnetycznego jest mniej wyraźny: niektóre obszary pozostają nadprzewodzące, inne nie. Według Shubnikowa i Nakhatina (1937 r.), w tym przejściowym stanie ciało jest nadprzewodnikiem w kierunku równoległym do pola, w kierunku zaś prostopadłym zachowuje się jak normalny przewodnik. Z badań Desiranta i Schoenberga (1948 r.) oraz Andrew (1948 r.) wynika, że podobną niejednorodność stanu przewodnictwa można zauważyć w nadprzewodzącym walcu, którego oś jest prostopadła do pola magnetycznego.

Badanie struktury krystalicznej nadprzewodników przy pomocy promieni X nie ujawniło żadnych widocznych zmian w budowie. Siła termoelektryczna ogniwa zbudowanego z dwóch przewodników spada do zera, gdy oba dochodzą do stanu nadprzewodnictwa.

To działanie pola magnetycznego jest w oczywistym związku ze stwierdzonym o wiele dawniej (1856 r.) przez W. Thomsona wzrostem oporu przewodnika, poddanego działaniu pola magnetycznego. Wzrost ten dla natężeń pola magnetycznego stosunkowo niewielkich można wyrazić wzorem

$$\frac{\Delta r}{r} = A \cdot H^2 \quad (22)$$

gdzie  $\Delta r$  oznacza zmianę oporu,  $r$  — opór przewodnika, gdy pole magnetyczne nie działa,  $A$  — wielkość stałą zależną od rodzaju metalu. W przeważającej większości przypadków  $A$  ma wartość bardzo małą: dla złota np.  $A = 0,3 \cdot 10^{-12}$  tak że



w polu o natężeniu 10 000 oerstedów zmiana oporu drutu żółtego wynosi nie więcej, niż 0,003%; dla ciał ferromagnetycznych  $A$  jest mniej więcej 100 razy większe (Webster, 1927 r.), jedynie w bizmucie osiąga znaczniejszą wartość, równą w temperaturze pokojowej  $0,13 \cdot 10^{-8}$  (Kapitza, 1928 r.), a więc prawie 10 000 razy większą niż w złocie.

Kapitza, stosując pole magnetyczne 300 000 oerstedów, znalazł, że pod działaniem tego pola opór bizmutu w temperaturze pokojowej wzrasta 50 razy; w temperaturze ciekłego powietrza 100 razy.

W polach magnetycznych bardzo silnych wzór (22) nie czyni już zadość wynikom pomiarów (Kapitza, 1928 r.), wtedy bowiem stosunek  $\frac{\Delta r}{r}$  wzrasta proporcjonalnie do natężenia pola. W niższych temperaturach wpływ pola magnetycznego jest na ogół większy (tak np. stosunek  $\frac{\Delta r}{r}$  cynku zmienia się pod działaniem pola 300 000 oerstedów od 0,14 w temperaturze pokojowej do 0,96 w temperaturze ciekłego azotu).

Wszystkie wyżej przytoczone dane dotyczą pola magnetycznego o natężeniu prostopadłym do kierunku prądu; gdy natężenie pola jest równoległe do kierunku prądu, wpływ pola na opór staje się znikomo mały, tak że jedynie w przypadku bizmutu i żelaza i to przy użyciu pól o znacznym natężeniu może być, jak to stwierdził Kapitza, brany w rachubę.

W selenie krystalicznym opór elektryczny zmienia się w zależności od natężenia światła, padającego na ciało. Gdy natężenie to wzrasta, opór się zmniejsza, opadając przy silnym oświetleniu nieraz do 0,01 początkowej wartości. Podobne zmiany o wiele jednak mniej wyraźnie zachodzą w tellurze i siarce oraz w sadzy i tlenku miedzi.

Majorana znalazł (1934 r.), że opór elektryczny cienkich płytek metalowych w niektórych przypadkach wzrasta pod działaniem światła; według Etzrodta (1935 r.) jednak zmiana ta jest spowodowana przez zmianę temperatury ciała na skutek oświetlenia.

Wyznaczenie zależności oporu właściwego od ciśnienia, jakiemu poddany jest przewodnik, nastręcza dość duże trudności doświadczalne. Opór bowiem przewodnika zmienia się wtedy nie tylko na skutek zmiany oporu właściwego, lecz również z powodu zmiany wymiarów



ciała, przy czym wydłużenie i towarzyszące mu zazwyczaj zmniejszenie się wymiarów poprzecznych ciała (p. tom I, str. 202) powoduje wzrost oporu, skrócenie zaś i zwiększenie wymiarów poprzecznych — zmniejszenie oporu. Nie wchodząc w szczegółowe rozpatrywanie tego zagadnienia, poprzestaniemy na przytoczeniu główniejszych wyników. W większości przewodników metalicznych poddanych ciśnieniu, w ścisłym tego słowa znaczeniu, opór właściwy przy wzroście ciśnienia maleje. Dotyczy to zarówno pierwiastków metalicznych, jak i stopów; wyjątek stanowią lit, wapń, stront, bizmut, antymon oraz niektóre stopy (Bridgman, 1930 r.), których opór wzrasta wraz z ciśnieniem. Zależność od napięcia (przy rozciąganiu przewodnika) jest na ogół bardzo mała; dane liczbowe otrzymane z nielicznych zresztą pomiarów są bardzo niepewne. Zależność tę badał między innymi W. Werner (1908 r.).

W jakichkolwiek jednak warunkach wyznaczamy opór właściwy przewodników metalicznych, wartość jego jest zawsze, zgodnie z podstawowym założeniem, zawartym we wzorze (5), niezależna od natężenia prądu, płynącego przez przewodnik. Dopiero gdy przekrój przewodnika staje się bardzo mały, rzędu mniej więcej  $10^{-5}$  mm<sup>2</sup>, daje się, według Pattersona (1902 r.) i Baedekera (1911 r.), zauważyć wzrost oporu przewodnika przy wzrastającym natężeniu prądu. Ta zmiana oporu zdawałaby się wskazywać na zależność oporu właściwego od gęstości prądu, w przewodnikach bowiem o przekroju bardzo małym już przy miernym stosunkowo natężeniu gęstość prądu może dojść do znacznych wartości. Do takich właśnie wniosków doszedł (1922 r.) Bridgman stwierdzając, że odchylenia od założenia Ohma przy gęstości prądu  $5 \cdot 10^6$  A/cm<sup>2</sup> sięgają 1,6%.

W doświadczeniach Bridgmana badanym przewodnikiem, stanowiącym jedną z gałęzi mostu Wheatstone'a, była folia metalowa (srebrna lub złota) o długości 1 mm, szerokości 0,1 mm i grubości od 0,08  $\mu$  do 0,2  $\mu$ , przyklejona na płytce szklanej. Folia ta była ochładzana silnym strumieniem wody, tak że można było uważać temperaturę jej podczas pomiaru za stałą.

Do całkowicie jednak odmiennych wyników doszedł Barlow (1930 r.), który przy gęstości niewiele mniejszej od użytej przez Bridgmana ( $3 \cdot 10^6$  A/cm<sup>2</sup>) nie znalazł żadnego odchylenia od prawa Ohma. Zagadnienie zatem pozostaje nierozstrzygnięte.



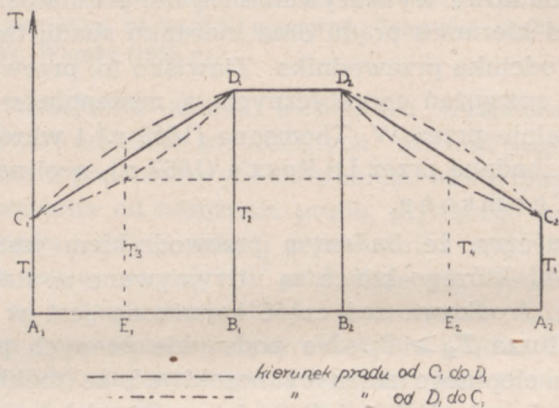
5. — PRĄD W PRZEWODNIKU O NIEJEDNAKOWEJ TEMPERATURZE. — ZJAWISKO W. THOMSONA.

Ciepło, wywiązywane w jednorodnym przewodniku metalicznym, przez który płynie prąd stały, jest jak wiadomo, (wzór 8), proporcjonalne do kwadratu natężenia prądu, wartość więc jego jest niezależna od kierunku prądu. Tak jest istotnie, gdy przewodnik na całej swej długości posiada tę samą temperaturę; jeżeli jednak warunek ten nie jest spełniony, w pewnych częściach obwodu zachodzi oprócz ciepła Joule'a dodatkowe wywiązywanie się lub pochłanianie ciepła, zależnie od kierunku prądu oraz kierunku spadu temperatury na danym odcinku przewodnika. Zjawisko to, przewidziane na podstawie rozważań teoretycznych a następnie stwierdzone doświadczalnie przez W. Thomsona (1856 r.) i wkrótce potem dokładnie zbadane przez Le Roux'a (1867 r.), nosi nazwę zjawiska Thomsona.

Przypuśćmy, że badanym przewodnikiem jest drut żelazny  $A_1 A_2$ , którego końce są utrzymywane w stałej temperaturze  $T_1$ , środkowa zaś część zanurzona jest w zbiorniku o temperaturze  $T_2 > T_1$ . Na podstawie znanych praw przewodnictwa cieplnego możnaby oczekiwać, że rozkład temperatur w częściach  $A_1 B_1$  i  $A_2 B_2$  będzie całkowicie symetryczny, tak że odkładając w kierunku osi rzędnych temperatury poszczególnych odcinków drutu otrzymamy wykres taki jak na rys. 219, gdzie symetryczne krzywe  $C_1 D_1$  i  $D_2 C_2$ , w rzeczywistości na skutek wywiązywania ciepła Joule'a nieco wygięte ku górze, przyjmiemy dla uproszczenia wywodów za linie proste, co zresztą w ogólnej charakterystyce zjawiska nie będzie odgrywało żadnej roli. Okazuje się jednak, że rozkład temperatur przewidywanom tym odpowiadać nie będzie. Gdy prąd ma w gałęzi  $C_1 D_1$  kierunek od  $C_1$  do  $D_1$ , tak że kierunek spadu temperatur jest przeciwny do kierunku natężenia prądu, rozkład temperatur wyznacza krzywa przerywana, leżąca wyżej, niż prosta  $C_1 D_1$ ; w tej więc gałęzi przepływ prądu powoduje wywiązywanie dodatkowej ilości ciepła. Odwrotnie, w gałęzi  $D_2 C_2$ , gdzie spadek temperatury ma kierunek ten sam, co prąd, krzywa rozkładu temperatur będzie leżała poniżej prostej  $D_2 C_2$ , w tej więc gałęzi zachodzić będzie pochłanianie



ciepła. W punktach zatem  $E_1$  i  $E_2$  drutu, leżących w tej samej odległości po obu stronach ogrzanej do temperatury  $T_2$  części drutu  $D_1D_2$ , temperatury nie będą jednakowe: w punkcie  $E_2$  temperatura  $T_4$  będzie niższa o  $\Delta T$  od temperatury  $T_3$  punktu  $E_1$ . Gdy kierunek prądu zmieni się na odwrotny (od  $D_1$  do  $C_1$ , rys. 219), zmiany w rozkładzie temperatur też zmienią swój znak: w gałęzi  $C_2D_2$  nastąpi wywiązywanie się ciepła, w gałęzi zaś  $C_1D_1$  — pochłanianie, punkt  $E_2$  będzie miał temperaturę wyższą, niż punkt  $E_1$ .



rys. 219

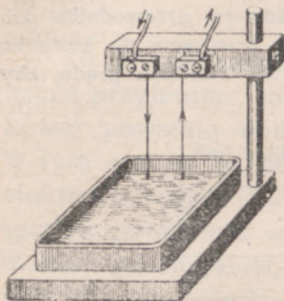
Wywiązywanie lub pochłanianie dodatkowych ilości ciepła zachodzić będzie również i wtedy, gdy żelazo zastąpimy innym metalem, przy czym w pewnej grupie metali (jak np. platyna, kobalt, bizmut) ciepło będzie wywiązywane i pochłaniane w tych samych gałęziach, co w drucie żelaznym, w pozostałych zaś metalach (jak np. srebro, złoto, miedź) ciepło (przy prądzie o kierunku od  $C_1$  do  $D_1$ ) będzie pochłaniane w gałęzi  $C_1D_1$ , wywiązywane w gałęzi  $D_2C_2$ .

Tę niesymetryczność rozkładu temperatur można wyraźnie zaobserwować używając sposobu, podanego przez Königa (1910 r.). Dwa druty platynowe o średnicy mniej więcej 0,5 mm, których końce zanurzone są w zbiorniku z rtęcią (rys. 220), ogrzewamy silnym prądem elektrycznym aż do żarzenia. Na końcach zanurzonych do rtęci, o temperaturze pokojowej, powstaje znaczny spadek temperatury, ciepło



wywiązane w jednym drucie i pochłaniane w drugim, powoduje, że granice żarzenia nie są w obu drutach na jednakowej wysokości.

Z pomiarów ilości ciepła  $\Delta Q$ , wywiązanych lub pochłoniętych, wynika, że są one proporcjonalne do pierwszej (nie drugiej, jak ciepło Joule'a) potęgi natężenia prądu oraz do spadku temperatury, tak że można ilość tę wyrazić wzorem



rys. 220

$$\Delta Q = \sigma \cdot i \cdot \frac{\Delta T}{\Delta l} \cdot \Delta l \cdot t$$

lub

$$\Delta Q = \sigma \cdot i \cdot \Delta T \cdot t, \quad (23)$$

gdzie  $t$  — czas przepływu prądu,  $\sigma$  — współczynnik, zależny od rodzaju przewodnika.

Ze wzorów (23) otrzymujemy

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta l} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta T} \cdot \frac{1}{it} \quad (24a)$$

lub

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \cdot \frac{1}{i \cdot t}. \quad (24b)$$

Wielkość  $\sigma$  nazywamy współczynnikiem zjawiska Thomsona.

Thomson wielkość tę nazwał ciepłem właściwym elektryczności.

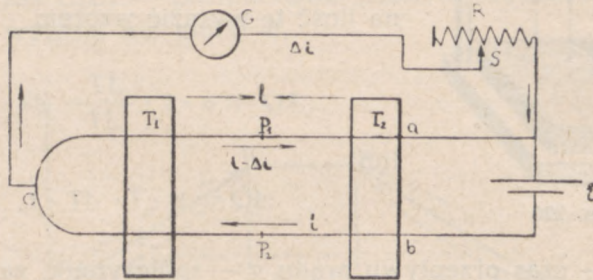
Gdy  $\Delta Q$  mierzymy w kaloriach,  $\sigma$  wyrażona jest w kaloriach na stopień, amper i sekundę (lub inaczej w kaloriach na stopień i kulomb,  $\frac{\text{kal.}}{\text{kal. stop.}}$ ) gdy  $\Delta Q$  mierzymy w dżulach,  $\sigma$  wyznaczone jest w woltach na stopień  $\left(\frac{\text{wolt}}{\text{stop.}}\right)$ .

Współczynnik ten uważamy za dodatni, gdy prąd, płynący w kierunku spadku temperatury, powoduje wywiązanie, płynący zaś w kierunku przeciwnym — pochłanianie ciepła.



W rozpatrywanym przez nas przypadku drutu żelaznego  $\sigma$  jest ujemne.

Jedną z prostszych metod wyznaczania wartości  $\sigma$  jest metoda Berga (1910 r.), różniąca się zresztą jedynie sposobem pomiaru ciepła od metody, użytej przez Le Roux'a. W badanym przewodniku  $acb$  spadek temperatury w gałęzi  $ac$  ma kierunek przeciwny do kierunku spadku w gałęzi  $cb$  (rys. 221). Dobieramy tak kierunek prądu, aby



rys. 221

ciepło było pochłaniane w gałęzi  $bc$ , a więc, aby temperatura w punkcie  $P_2$  drutu  $bc$  była niższa od temperatury punktu  $P_1$ , leżącego symetrycznie na drucie  $ac$ . Dla usunięcia tej nierówności przepuszczamy przez gałąź  $bc$  prąd o natężeniu większym, tak, aby otrzymana w ten sposób nadwyżka ciepła Joule'a wyrównała niedobór, spowodowany pochłanianiem ciepła. Można to osiągnąć używając takiego układu połączeń, jak na rys. 221, gdzie prąd w gałęzi  $bc$  jest o  $\Delta i$  większy od prądu w gałęzi  $ac$ . Różnicę tych natężeń można dowolnie zmieniać przesuwać styk  $s$  wzdłuż opornicy  $R$ , przy czym natężenie  $\Delta i$  wyznacza galwanometr  $G$ . W przypadku całkowitego wyrównania ilości ciepła, wywiązanej w obu gałęziach drutu, dla każdego elementu długości  $dl$  obu gałęzi będziemy mieli spełnioną równość

$$\frac{r}{l} i^2 \cdot dl + \sigma \cdot i \cdot \frac{dT}{dl} \cdot dl = \frac{r}{l} (i + \Delta i)^2 dl - \sigma (i + \Delta i) \frac{dT}{dl} \cdot dl,$$

skąd zakładając stałość spadku temperatury w obu gałęziach (podobnie, jak to czyniliśmy na wykresie rys. 219)

$$\frac{dT}{dl} = \frac{T_2 - T_1}{l},$$

otrzymujemy

$$\frac{r}{l} (2i + \Delta i) \cdot \Delta i = \sigma (2i + \Delta i) \frac{T_2 - T_1}{l}$$



lub

$$r \Delta i = \sigma (T_2 - T_1)$$

i ostatecznie

$$\sigma = \frac{r \cdot \Delta i}{T_2 - T_1}. \quad (24c)$$

To wywiązywanie lub pochłanianie ciepła możemy wyjaśnić przyjmując, że w przewodniku o temperaturze niejednakowej powstają dodatkowe różnice potencjałów, działające w tym samym co siły elektrobodźcze lub przeciwnym do sił elektrobodźczych kierunku. W pierwszym przypadku suma spadów potencjału w badanej części obwodu jest większa od różnicy potencjałów, przyłożonej do jej końców, ilość więc wywiązanego ciepła jest większa od tej, jaką otrzymujemy ze wzoru (8b); w drugim przypadku suma ta jest mniejsza, wobec czego i ilość wywiązanego ciepła jest mniejsza od ilości, wyznaczonej przez wzór Joule'a.

Uogólniając podane w ust. 2 określenie siły elektrobodźczej, powiemy, że w przewodniku jednorodnym o niejednakowej temperaturze powstaje siła elektrobodźcza temperatury (lub termoelektryczna danego przewodnika), równa

$$e_T = \frac{Q}{i \cdot t}, \quad (25)$$

gdzie  $Q$  oznacza wartość ciepła wywiązanego lub pochłoniętego, mierzoną oczywiście, w dżulach.

Niech  $dT$  oznacza różnicę temperatur na końcach elementu  $dl$  długości drutu,  $dQ$  — ilość ciepła, wywiązaną lub pochłoniętą na tym odcinku. Ze wzoru (23) mamy po podstawieniu  $dQ$  zamiast  $\Delta Q$  i  $dT$  zamiast  $\Delta T$

$$dQ = \sigma \cdot dT \cdot i \cdot t,$$

skąd na ilość ciepła, wywiązaną lub pochłoniętą w drucie o długości  $l$  i o temperaturach na końcach drutu  $T_1$  i  $T_2$ ,

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} dQ = i \cdot t \int_{T_1}^{T_2} \sigma \cdot dT.$$



Podstawiając do (25) otrzymujemy

$$e_T = \int_{T_1}^{T_2} \sigma \cdot dt. \quad (25a)$$

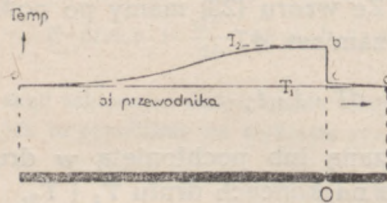
W przypadku zatem żelaza siła elektrobodźcza temperatury jest ujemna.

Spółczynnik  $\sigma$  jest, jak to wykazują pomiary, funkcją, często bardzo złożoną, temperatury, wobec czego wyznaczenie  $e_T$  ze wzoru (25a) nastęrcza zazwyczaj duże trudności; nic więc dziwnego, że wyniki otrzymane przy użyciu różnych metod pomiaru są nieraz bardzo rozbieżne, tak, że częstokroć można jedynie ustalić rząd wielkości  $\sigma$ , równy dla wszystkich prawie metali  $10^{-6}$  V/stop.

W temperaturach wyższych od  $0^{\circ}\text{C}$  można z wystarczającym przybliżeniem uważać  $\sigma$  za funkcję liniową temperatury.

Dwa metale ołów i cyna posiadają  $\sigma$  bardzo małe, rzędu  $10^{-7}$  V/stop (Borelius, 1921 r.), tym się tłumaczy, że przez długi czas uważano ołów za metal, w którym zjawisko Thomsona nie zachodzi. Szczególnie wysoką wartość ma  $\sigma$  w kobalcie (rzędu  $10^{-5}$  V/stop).

Jak wynika ze wzoru (25a) suma sił elektrobodźczych w obwodzie zamkniętym jest zawsze równa zeru: górna i dolna granica całkowania stają się sobie równe ( $T_1 = T_2$ ), wracamy bowiem, sumując siły elektrobodźcze wzdłuż obwodu, do punktu wyjścia. Niejednakowe zatem ogrzanie drutu jednorodnego nie może w nim wzbudzić prądu, innymi słowy, drut taki nie może być źródłem prądu.



rys. 222

Ten wniosek jest według Benedicksa (1916 r.), słuszny tylko wtedy, gdy spadły temperatury mają po obu stronach miejsca ogrzanego te same wartości, w przeciwnym bowiem razie, gdy, jak np. w przypadku, przedstawionym na rys. 222, zwężenie przewodnika

w miejscu, leżącym w pobliżu części ogrzewanej, powoduje nagły skok temperatury z jednej strony miejsca o temperaturze najwyższej,



podczas gdy z drugiej strony temperatura zmniejsza się stopniowo i w sposób ciągły, może pod działaniem sił elektrobodźczych temperatury powstać i utrzymać się w obwodzie prąd stały. Wartość siły elektrobodźczej, w ten sposób otrzymanej, jest na ogół niewielka: w drucie tungstenowym (wolframowym), w którym to zjawisko Benedicksa występuje najwyraźniej, nie przekracza  $20 \cdot 10^{-6}$  v/stop. Mimo dość licznych doświadczeń, zarówno samego Benedicksa, jak i innych badaczy, (Terada, Tsutoni, Tomano, 1927 r., Benade, 1921 r.) trudno jest dzisiaj powiedzieć, czy obserwowana siła elektrobodźcza zawdzięcza swe powstanie niesymetrii spadku temperatury w drucie jednorodnym, jak to zakłada Benedicks, czy też przypadkowej nieraz i trudnej do wykrycia niejednorodności drutu, jak to wynika z pomiarów Frasera, 1938 r. Później ogłoszone prace (Nordheim, 1934 i 1935 r.) zagadnienia tego nie rozwiązują.

6. — OBWÓD ZŁOŻONY Z PRZEWODNIKÓW NIEJEDNORODNYCH.  
— TERMOELEKTRYCZNOŚĆ.

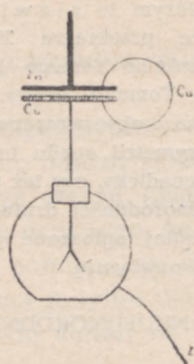
Podobne dodatkowe różnice potencjałów występują i w obwodzie o temperaturze jednakowej, lecz niejednorodnym. W miejscu zetknięcia niejednorodnych części obwodu powstaje nagły skok potencjału o wartości zależnej od rodzaju stykających się części. Oznaczając symbolicznie przez  $A/B$  zmianę potencjału przy przejściu od przewodnika  $A$  do stykającego się z nim przewodnika  $B$  otrzymujemy na wartość dodatkowej różnicy potencjału, powstającej w obwodzie zamkniętym, złożonym z przewodników  $A, B, C, \dots, Z$ ,

$$\Delta V = A/B + B/C + \dots + A/Z.$$

Ta różnica potencjału  $A/B$ , którą za Planckiem nazywamy napięciem galwanicznym i której, jak dotychczas, wyznaczyć bezpośrednio nie możemy, jest w niewątpliwym związku z tzw. potencjałem Volty (czasem nazywanym potencjałem zewnętrznym metalu), powstającym, jak to pierwszy stwierdził Volta, (1796 r.), wtedy, gdy końce otwartego obwodu, złożonego z niejednakowych przewodników metalicznych, wprowadzamy w możliwie bliskie zetknięcie tak, aby między nimi pozostała jedynie cieniutka warstewka jakiegoś dielektryka lub po prostu próżnej przestrzeni. Istnienie takiej różnicy potencjału można wykazać następującym prostym doświadczeniem, niewiele zresztą w swym układzie odbiegającym od układu doświadczenia Volty. Na pręcie czułego elektroskopu (rys. 207) umieszczamy połączoną z nim metalicznie płytkę miedzianą, pokrytą cieniutką warstewką werniksu, na niej zaś kładziemy też powernikowaną płytkę cynkową, zaopatrzoną w rączkę izol-



jąca R. Płytki te łączymy uziemionym drutem miedzianym. Jeżeli teraz drut odejmiemy i podniesiemy płytkę cynkową do góry, zmniejszając w ten sposób pojemność kondensatora, jaki tworzą płytki



rys. 223

cynkowa i miedziana, zauważymy znaczne stonkowo rozchylenie się listków elektroskopu. Gdy płytkę miedzianą przeniesiemy na miejsce cynkowej, cynkową zaś na miejsce miedzianej, znak elektryzacji zmieni się na przeciwny. Wartość tego potencjału zetknięcia nie jest bynajmniej równa skokowi potencjałów  $A/B$ , o których mówiliśmy poprzednio. W opisanym bowiem wyżej doświadczeniu różnica potencjału płytek jest równa różnicy skoków potencjału między każdą z płytek i punktem dielektryku (lub próżni), leżącym bardzo blisko ich powierzchni, w przypadku zaś omawianym w tekście mamy do czynienia z różnicą potencjału dwu metali, bezpośrednio ze sobą się stykających, niezależnie od rodzaju dielektryku, który żadnej roli w zjawisku nie odgrywa. Z tego też powodu tę różnicę potencjału nazywają czasami wewnętrzną.

Z bardzo dokładnych pomiarów, wykonanych szczególnie w ostatnich latach (Perucca, 1921 r., Mönch, 1930 r., Lukinsky i Prilezajew (1928 r.) wynika, że wartość potencjału zetknięcia, zależna zresztą w wysokim stopniu od rodzaju gazu, w którym pomiar jest wykonywany, jest rzędu mniej więcej 1 wolta.

Jeżeli obwód jest tak, jak to ciągle wyżej zakładaliśmy, utworzony z przewodników metalicznych, wielkość  $\Delta V$  ma zawsze w obwodzie zamkniętym wartość równą zero. Będziemy więc mieli

$$A/B + B/C + \dots + Y/Z + Z/A = 0. \quad (26)$$

To prawo, udowodnione doświadczalnie przez Voltę (1796 r.) i stąd nazywane prawem Volty, stosuje się również do przewodników takich, jak węgiel i tlenki oraz siarczki metali. Wszystkie te ciała łącznie z metalami obejmujemy wspólną nazwą przewodników pierwszej klasy.

Ze wzoru (26) wynika, że

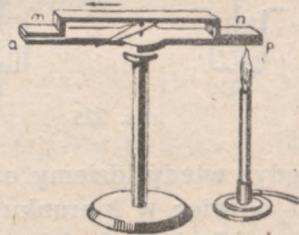
$$A/B + B/C + \dots + Y/Z = -Z/A = A/Z. \quad (26a)$$



Włączenie więc między dwa dane przewodniki pierwszej klasy innych przewodników pierwszej klasy nie zmienia różnicy potencjałów tych dwu przewodników.

Prawo Volty obowiązuje jednak tylko wtedy, gdy cały obwód posiada tę samą temperaturę. Jeżeli jest inaczej, jeżeli np. miejsca spojeń stykających się ze sobą przewodników obwodu posiadają temperatury różne, w obwodzie, złożonym z samych przewodników pierwszej klasy może, jak to wykazał w 1821 r. Seebeck, powstać prąd elektryczny. W takim więc obwodzie zamkniętym  $\Delta V$  nie jest równe zeru.

Umieścimy np. igłę magnetyczną wewnątrz obwodu zamkniętego *amnp* (rys. 224), utworzonego ze sztabek bizmutu *ap* i miedzi *mn*, dobrze ze sobą spójonych, i ustawmy ten przyrząd tak, aby osie sztabek *nm* i *ap* leżały w płaszczyźnie południka magnetycznego. Gdy jedno ze spojeń będziemy ogrzewali, igła odchyli się od swego początkowego położenia równowagi, co będzie dowodem, że w obwodzie płynie prąd elektryczny. Jeżeli różnica temperatur obu spojeń nie będzie się zmieniała, kąt odchylenia igły będzie pozostawał bez zmiany, prąd zatem płynący w obwodzie będzie prądem stałym.



rys. 224

Stąd wynika, że różnica potencjałów *Cu/Bi* nie ma w obu miejscach spójenia wartości tej samej, że więc jest ona funkcją temperatury. Siłę elektrobodźczą, powstającą w tych warunkach, nazywamy siłą elektrobodźczą termoelektryczną, obwód zaś, w którym ta siła powstaje, ogniwem termoelektrycznym.

Rozpatrzmy prosty, najczęściej jednak spotykany w praktyce przypadek obwodu, złożonego z dwu różnych metali *A* i *B*, posiadających w miejscach spojeń temperatury  $T_1$  i  $T_2$ , przy czym niech  $T_1$  będzie mniejsze od  $T_2$ . Z dwóch połączonych w ten sposób metali będziemy uważali za dodatni względem drugiego ten, w którym prąd płynie od spójenia cieplejszego do chłodniejszego. W przypadku zatem, przedstawionym

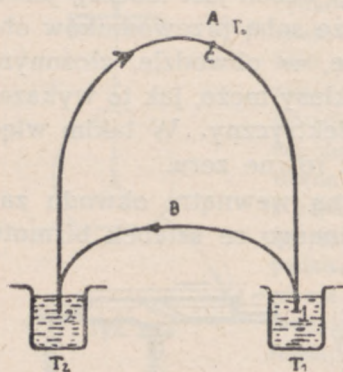


na rys. 225, dodatnim jest metal A. Siłę elektrobodźczą takiego ogniwa oznaczymy przez  $\mathcal{E}_{1,2}^{A,B}$  i przyjmiemy ją za równą sumie różnic potencjałów, z jakimi się spotkamy idąc wzdłuż obwodu od metalu A do metalu B poprzez spojenie cieplejsze 2, a więc w kierunku przeciwnym do kierunku prądu. Zgodnie więc z taką umową mamy

$$\mathcal{E}_{1,2}^{A,B} = -E_{1,2}^{B,A},$$

wtedy bowiem idziemy od metalu B do metalu A przez spojenie 2 o temperaturze wyższej, a więc w kierunku zgodnym z kierunkiem prądu, oraz

$$\mathcal{E}_{1,2}^{A,B} = \mathcal{E}_{2,1}^{B,A},$$



rys. 225

gdyż wtedy idziemy od metalu B do metalu A przez spojenie 1, a więc w kierunku przeciwnym do kierunku prądu.

Niech C będzie dowolnym przekrojem przewodnika A o temperaturze  $T_0$ . Na odcinku od C do spojenia 2 działa siła elektrobodźcza temperatur równa (wzór 25a)

$$e'_A = \int_{T_0}^{T_2} \sigma_A dT.$$

W miejscu spojenia 2 następuje skok potencjału  $(A/B)_2$ . Do tego dochodzi siła elektrobodźcza temperatury wzdłuż przewodnika B od punktu 2 do punktu 1 równa

$$e_B = \int_{T_2}^{T_1} \sigma_B dT.$$

W spojeniu 1 zachodzi nowy skok potencjału  $(B/A)_1$  i wreszcie wzdłuż przewodnika A od punktu 1 do C

$$e''_A = \int_{T_1}^{T_0} \sigma_A \cdot dT.$$



Ostatecznie więc otrzymujemy

$$\mathcal{E}_{1,2}^{A,B} = \int_{T_0}^{T_2} \sigma_A \cdot dT + (A/B)_{2,1} + \int_{T_2}^{T_1} \sigma_B \cdot dT + (B/A)_1 + \int_{T_1}^{T_0} \sigma_A \cdot dT,$$

skąd po uwzględnieniu, że

$$(B/A)_1 = - (A/B)_{1,1} \int_{T_1}^{T_0} \sigma_A dT + \int_{T_0}^{T_2} \sigma_A dT = \int_{T_1}^{T_2} \sigma_A \cdot dT$$

oraz

$$\int_{T_2}^{T_1} \sigma_B \cdot dT = - \int_{T_1}^{T_2} \sigma_B \cdot dT,$$

mamy

$$\mathcal{E}_{1,2}^{A,B} = (A/B)_2 - (A/B)_1 + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_B) dT. \quad (27)$$

Jeżeli więc między dwa dane metale wstawimy trzeci metal *C*, którego wszystkie elementy objętości będą miały tę samą temperaturę np.  $T_2$ , wartość siły elektrobodźczej termoelektrycznej pozostanie bez zmiany, podstawienie bowiem w prawej części wzoru (27) zamiast  $(A/B)_2$  sumy

$$(A/C)_2 + \int_{T_2}^{T_2} \sigma_c \cdot dT + (C/B)_2$$

da nam tę samą wartość, co poprzednio,  $(A/B)_2$ . Możemy zatem łączyć badane metale trzecim nie zmieniając przez to siły termoelektrycznej ogniwa.

Gdyby spojenia miały temperatury  $T_2$  i  $T_3$  lub  $T_1$  i  $T_3$ , przy czym  $T_1 < T_2 < T_3$ , ze wzoru (27) otrzymalibyśmy

$$\mathcal{E}_{2,3}^{A,B} = (A/B)_3 - (A/B)_2 + \int_{T_2}^{T_3} (\sigma_A - \sigma_B) dT,$$



$$\mathcal{E}_{1,3}^{A,B} = (A/B)_3 - (A/B)_1 + \int_{T_1}^{T_3} (\sigma_A - \sigma_B) dT,$$

skąd, uwzględniając wzór (27)

$$\mathcal{E}_{1,3}^{A,B} = \mathcal{E}_{1,2}^{A,B} + \mathcal{E}_{2,3}^{A,B}. \quad (27a)$$

Wzór ten wyraża regułę kolejnych temperatur, potwierdzoną doświadczalnie przez Becquerela (1826 r.).

Przypuśćmy teraz, że z trzech metali  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tworzymy kolejno, łącząc je po dwa, trzy ogniwa  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$ . Siły termoelektryczne tych ogniw w założeniu, że temperatury spójień są we wszystkich trzech przypadkach jednakowe, będą zgodnie ze wzorem (27) równe

$$\mathcal{E}_{1,2}^{A,B} = (A/B)_2 - (A/B)_1 + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_B) dT,$$

$$\mathcal{E}_{1,2}^{B,C} = (B/C)_2 - (B/C)_1 + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_B - \sigma_C) dT,$$

$$\mathcal{E}_{1,2}^{A,C} = (A/C)_2 - (A/C)_1 + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_C) dT.$$

Siła zatem termoelektryczna ogniwa  $AC$  jest równa

$$\mathcal{E}_{1,2}^{A,C} = \mathcal{E}_{1,2}^{A,B} + \mathcal{E}_{1,2}^{B,C} \quad (27b)$$

gdyż

$$(A/B)_2 + (B/C)_2 = (A/C)_2, \quad (A/B)_1 + (B/C)_1 = (A/C)_1$$

i

$$\int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_B) dT + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_B - \sigma_C) dT = \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_C) dT.$$

Ta reguła kolejnych metali pozwala, gdy znamy siły termoelektryczne ogniw  $AB$  i  $BC$ , gdzie  $B$  jest tzw. metalem



odniesienia, wyznaczyć siłę termoelektryczną ogniwa AC. Zazwyczaj za metal odniesienia wybiera się ołów, a to z uwagi na bardzo małą wartość współczynnika  $\sigma$  zjawiska Thomsona w tym metalu; czasami jednak korzystniej jest brać miedź lub platynę.

Wyznaczając siły termoelektryczne ogniw, utworzonych z różnych metali i ołowiu (lub innego metalu odniesienia), można dla danych temperatur spojeń ustawić, jak to pierwszy stwierdził Seebeck, wszystkie metale w szereg, tak, aby każdy metal wyżej stojący w szeregu był termoelektrycznie dodatni względem stojącego niżej, ujemnym względem stojącego wyżej. Tak np. w temperaturze spojeń  $-0,5^{\circ}\text{C}$  i  $+0,5^{\circ}\text{C}$  otrzymujemy, według Euckena i Etzrodta, następujący szereg (liczby w nawiasach oznaczają siłę termoelektryczną ogniwa z danego metalu i ołowiu, wyrażoną w mikrowoltach,  $10^{-6}$  wolta).

selen (+ 1 000)	ołów (0,0)
antymon (+ 35)	magnez (— 0,2)
żelazo (+ 16)	glin (— 0,5)
cynk (+ 3)	platyna (— 3,1)
złoto (+ 2,8)	rtęć (— 3,2)
srebro (+ 2,7)	sód (— 4,2)
cyna (+ 0,2)	kobalt (— 17)
ołów (+ 0,0)	nikiel (— 19)
	bismut (— 70)

Chcąc wyznaczyć siłę termoelektryczną ogniwa, utworzonego np. z antymonu i niklu o wyżej wskazanych temperaturach spojeń ( $-0,5^{\circ}\text{C}$  i  $+0,5^{\circ}\text{C}$ ) dodajemy siły termoelektryczne ogniw antymon — ołów i ołów — nikiel. Z tablicy otrzymujemy

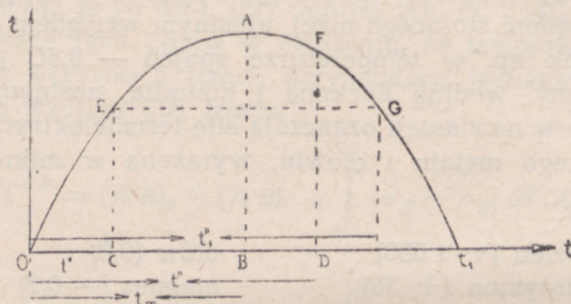
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Sb, Ni} &= \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Sb, Pb} + \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Pb, Ni} = \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Sb, Pb} - \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Ni, Pb} = \\ &= 35 \cdot 10^{-6} + 19 \cdot 10^{-6} = 54 \cdot 10^{-6} \text{ V.} \end{aligned}$$

Podobnie dla ogniwa żelazo — srebro

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Fe, Ag} &= \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Fe, Pb} + \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Pb, Ag} = \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Fe, Pb} - \mathcal{E}_{-0,5^{\circ}, +0,5^{\circ}}^{Ag, Pb} = \\ &= 16 \cdot 10^{-6} - 2,7 \cdot 10^{-6} = 13,3 \cdot 10^{-6} \text{ V.} \end{aligned}$$



Podana wyżej kolejność metali obowiązuje, jak o tym wyżej już była mowa, jedynie w pewnej temperaturze spoeń i może się zmienić ze zmianą tych temperatur, choćby przy tym różnica temperatur pozostała bez zmiany. Wartość bowiem, a nawet kierunek siły termoelektrycznej zależy od wysokości temperatury każdego ze spoeń, nie tylko od ich różnicy. W temperaturach powyżej  $0^{\circ}\text{C}$  w niewielkim stosunkowo zakresie temperatur można dla znacznej ilości przypadków zależność tę przedstawić w postaci paraboli (rys. 226). Niech



rys. 226

temperatura spoeń zimniejszego pozostaje stałą, równą np.  $0^{\circ}\text{C}$  (punkt  $O$  wykresu), wtedy w miarę wzrostu temperatury spoeń cieplejszego siła termoelektryczna wzrasta dochodząc do wartości największej  $AB$  w temperaturze  $t_m$ , po czym przy dalszym wzroście temperatury spoeń cieplejszego maleje, stając się wreszcie w temperaturze odwrócenia (inwersji)  $t_1$  równą zero i przy dalszym wzroście temperatury zmieniając znak na odwrotny.

Istnienie takiej temperatury odwrócenia pierwszy stwierdził W. Thomson, 1856 r.

Wysokość temperatury odwrócenia zależy nie tylko od rodzaju ciała, lecz również od temperatury spoeń zimniejszego. Istotnie, niech  $OC = t'$  będzie temperaturą tego spoeń,  $OD$  zaś  $= t''$  temperaturą spoeń cieplejszego. Z reguły kolejnych temperatur wynika, że

$$\mathcal{E}_{0, t''}^{A, B} = \mathcal{E}_{0, t'}^{A, B} + \mathcal{E}_{t', t''}^{A, B}$$



wobec czego

$$\mathcal{E}_{t', t''}^{A, B} = \mathcal{E}_{0, t''}^{A, B} - \mathcal{E}_{0, t'}^{A, B}.$$

W przypadku, przedstawionym na wykresie rys. 226, siła termoelektryczna  $\mathcal{E}_{t', t''}^{A, B}$  będzie w miarę wzrostu temperatury spojenia cieplejszego malała dochodząc w temperaturze  $t_1''$  do wartości zero. Temperaturze zatem  $t'$  spojenia zimniejszego odpowiada temperatura odwrócenia  $t_1''$ .

Często jednak, zwłaszcza, gdy chodzi o większą różnicę temperatur, zależność siły termoelektrycznej od temperatury wyraża się krzywą rzędu wyższego, niż drugi. Mamy wtedy

$$\mathcal{E}_{0, t}^{A, B} = at + bt^2 + ct^3. \quad (a)$$

Gdy  $c$  jest małe w porównaniu z  $a$  i  $b$ , trzeci wyraz możemy pominąć. Tak np. dla ogniwa złoto — ołów mamy w granicach temperatur od  $0^0$  do  $100^0\text{C}$

$$a = 2,899 \cdot 10^{-6}, \quad b = 0,0046 \cdot 10^{-6}, \quad c = -0,000\ 002 \cdot 10^{-6}.$$

W temperaturach spojen  $0^0$  i  $100^0\text{C}$  otrzymujemy na wartość siły termoelektrycznej

$$\mathcal{E}_{0, 100^0}^{Au, Pb} = 289,9 \cdot 10^{-6} + 46 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-6} \text{ V.}$$

W tym przypadku trzeci wyraz, jako mały w porównaniu z sumą dwu pierwszych może być pominięty.

Według Burtona, Tarra i Wilhelma (1935 r.), siła elektrobodźcza ogniwa ołów — cyna jest równa zero, gdy obydwa te metale są nadprzewodnikami, a więc gdy temperatury spojen tych metali są niższe od temperatury skoku cyny ( $< 3,7^0\text{K}$ ).

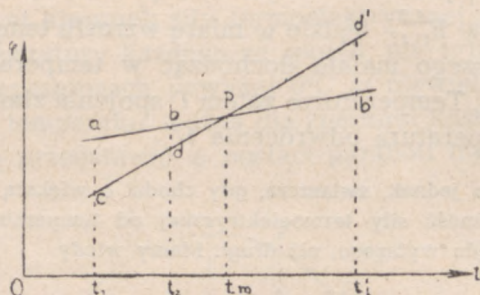
Przypuśćmy, że wzrostowi temperatury spojenia cieplejszego o  $dT^0\text{K}$  odpowiada zmiana  $d\mathcal{E}^{A, B}$  siły termoelektrycznej ogniwa, utworzonego z metali  $A$  i  $B$ . Wielkość

$$\varphi_T(A, B) = \frac{d\mathcal{E}^{A, B}}{dT} = \frac{d\mathcal{E}^{A, B}}{dt} \quad (28)$$

nazwiemy zdolnością termoelektryczną danego ogniwa (różniczkową siłą termoelektryczną).



Odkładajmy na osi odciętych temperatury, na osi rzędnych wartości  $\varphi$  danego ogniwa (rys. 227) i niech  $a$  będzie krzywą, wyrażającą zależność od temperatury zdolności termoelektrycznej ogniwa, utworzonego z metali A i B. Siłę termoelektryczną ogniwa AB dla temperatur spojeń  $t_1$  i  $t_2$  otrzymamy całkując wzór (28) w granicach  $t_1$  i  $t_2$ .



rys. 227

Będziemy mieli

$$\mathcal{E}_{1,2}^{A,B} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(A,B) dt. \quad (28a)$$

Siła ta jest więc równa liczbowo polu figury  $t_1abt_2$ . Przypuśćmy, że ten sam metal B, będący w tym przypadku metalem odniesienia, spojony jest z metalem C i że krzywa  $c$  wyraża zależność zdolności termoelektrycznej ogniwa CB od temperatury. Wartość siły termoelektrycznej tego ogniwa w tych samych, co poprzednio, temperaturach spojeń, wyraża tym razem pole figury  $t_1cdt_2$ . Z reguły kolejnych metali wynika

$$\mathcal{E}_{t_1,t_2}^{A,C} = \mathcal{E}_{t_1,t_2}^{A,B} + \mathcal{E}_{t_1,t_2}^{B,C} = \mathcal{E}_{t_1,t_2}^{A,B} - \mathcal{E}_{t_1,t_2}^{C,B}, \quad (28b)$$

siła więc termoelektryczna ogniwa AC równa jest liczbowo polu figury  $cabd$ ; jest ona dodatnia, gdy pole  $t_1abt_2$  jest większe od pola  $t_1cdt_2$ . Wtedy metal A jest dodatni względem C, prąd płynie od C do A przez spojenie cieplejsze (por. rys. 225). Dopóki temperatura spojenia cieplejszego nie osiągnie wartości  $t_m$ , siła termoelektryczna ogniwa AC wzrasta ze wzrostem temperatury tego spojenia; po przekroczeniu temperatury  $t_m$  zaczyna maleć, zmniejsza się bowiem różnica pól, wyrażających siły termoelektryczne ogniw AB i CB, w temperaturze  $t'_1$  pole  $t_1ab't'_1$  staje się równe polu  $t_1cd't'_1$ ; temperatura  $t'_1$  jest więc temperaturą odwrócenia, odpowiadającą temperaturze  $t_1$  spojenia zimniejszego. Gdy jeden z metali A lub C (albo obydwa) są termoelektrycznie ujemne względem metalu odniesienia, odpowiednią wartość zdolności termoelektrycznej odkładamy na ujemnej osi rzędnej.



Ze wzoru (28b) wynika, że

$$\varphi(A, C) = \varphi(A, B) - \varphi(C, B).$$

Niech badanym ogniwnem będzie ogniwo miedź—platyna. Z tablic znajdujemy, że gdy temperatura spojenia zimniejszego jest równa  $0^{\circ}\text{C}$ , spojenia zaś cieplejszego nie przekracza  $100^{\circ}\text{C}$ ,

$$\varphi(\text{Cu}, \text{Pb}) = 2,777 \cdot 10^{-6} + 0,0097 \cdot 10^{-6} \cdot t$$

$$\varphi(\text{Pt}, \text{Pb}) = -3,092 \cdot 10^{-6} - 0,0267 \cdot 10^{-6} \cdot t.$$

Mamy więc

$$\varphi(\text{Cu}, \text{Pt}) = 5,869 \cdot 10^{-6} + 0,0364 \cdot 10^{-6} \cdot t$$

Jeżeli więc  $t = 100^{\circ}$ , otrzymujemy, całkując

$$\int_0^{100} \varphi(\text{Cu}, \text{Pt}) dt = 5,869 \cdot \int_0^{100} dt + 0,0364 \int_0^{100} t dt \text{ mikrowoltów,}$$

że siła termoelektryczna tego ogniwa równa jest 768,9 mikrowoltów. Tego rodzaju wykresy, jak na rys. 227, wprowadził Tait (1874 r.).

W tych granicach temperatur, w jakich można zmiany siły termoelektrycznej wyrażać wzorem

$$at + bt^2,$$

zdolność termoelektryczna

$$\varphi = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = a + 2bt$$

jest liniową funkcją temperatury. W temperaturach niskich zależność  $\varphi$  od temperatury jest o wiele więcej złożona; w temperaturach bliskich zera bezwzględnego wartość  $\varphi$  staje się znikomo mała.

Ogniwa termoelektryczne służą najczęściej do wyznaczania temperatury. Jedno ze spojen utrzymywane jest w stałej i znanej temperaturze, drugie zaś jest w zetknięciu z ciałem, którego temperaturę wyznaczamy. Gdy chodzi o pomiar w temperaturach niezbyt wysokich, używa się zazwyczaj ogniwa konstantan—żelazo, w temperaturach wyższych ogniwa, złożonego z platyny i z platyny rodowej.

Wartość, a niekiedy i znak siły termoelektrycznej może ulec zmianie, gdy jeden lub obydwa ogniwa poddamy uprzednio działaniom mechanicznym lub cieplnym (np. walcowaniu, wyciąganiu, wyżarzaniu itp.). Tak np. Seebeck stwierdził, że

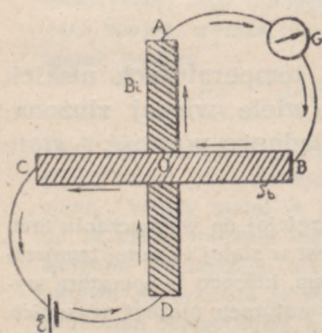


zahartowany metal jest termoelektrycznie ujemny względem metalu lanego; tę obserwację Seebecka potwierdził Barus mierząc siłę termoelektryczną ogniwa zbudowanego ze stali miękkiej i zahartowanej.

#### 7. — ZJAWISKO PELTIERA.

W tego rodzaju obwodach, jakie rozpatrywaliśmy w ustępie poprzednim, wywiązywanie ciepła podczas przepływu prądu podlega, jak to stwierdził Peltier (1834 r.), innym prawom, niż w obwodzie jednorodnym. W miejscach spojenia metali ilość wywiązywanego ciepła nie jest równa tej ilości, którą wyznacza prawo Joule'a (wzór 8). Jest ona mniejsza od ciepła Joule'a o  $q$ , gdy prąd płynie od metalu ujemnego do dodatniego termoelektrycznie, innymi słowy, gdy prąd ma kierunek taki, jaki by miał w ogniwie, utworzonym z tych samych metali, w którym dane spojenie byłoby spojeniem cieplejszym, większa zaś o tę samą ilość  $q$ , gdy prąd o tym samym natężeniu płynie w kierunku przeciwnym.

W przypadku, gdy spojone metale stoją daleko od siebie w szeregu termoelektrycznym i gdy natężenie prądu nie jest zbyt wielkie, a więc gdy ogrzanie przez ciepło Joule'a, proporcjonalne, jak wiemy, do kwadratu natężenia prądu, nie



rys. 228

jest znaczne, ciepło pochłonięte może być większe od ciepła Joule'a i powodować obniżenie temperatury w danym spojeniu. Taki przypadek zachodzi w słynnym doświadczeniu Peltiera z „krzyżem“ (1838 r.). Dwie sztabki, jedna z antymonu, druga z bizmutu są spojone w części środkowej  $O$  (rys. 228). Dwa ramiona krzyża  $C$  i  $D$  są połączone ze źródłem siły elektrodźwicznej  $\mathcal{E}$ , dwa inne,  $A$  i  $B$ , z galwanometrem  $G$ . Gdy

prąd idzie przez spojenie  $O$  od bizmutu do antymonu, spojenie to się oziębia, wobec czego powstaje różnica temperatur w niejednorodnym obwodzie  $OAGB$  i przez galwanometr płynie prąd od antymonu poprzez spojenie  $O$  do bizmutu. Ze zmianą



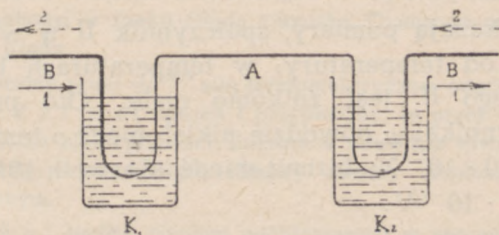
kierunku prądu w obwodzie C i D zmienia się również kierunek prądu w obwodzie, zawierającym galvanometr.

Ilość ciepła pochłoniętego lub wywołanego, tzw. ciepło Peltiera, jest proporcjonalna do natężenia prądu (Quintus Icilius, 1857 r.) i, jak o tym dopiero co była mowa, zależy od rodzaju stykających się metali, możemy zatem napisać, że

$$q_p = \Pi_{A,B} \cdot i \cdot t, \quad (29)$$

gdzie za dodatni przyjmujemy kierunek prądu od metalu A do metalu B. Wielkość  $\Pi_{A,B}$  — współczynnik Peltiera — ma wymiar potencjału; zazwyczaj wyraża się ją w woltach lub kaloriach na kulomb.

Do wyznaczenia ciepła  $q_p$ , a stąd i współczynnika  $\Pi$ , może służyć metoda, użyta po raz pierwszy przez Le Roux (1867 r.). Miejsca spójn dwu metali A i B umieszczamy w dwu kalorymetrach  $K_1$  i  $K_2$  (rys. 229), co pozwala nam wyznaczyć ilości



rys. 229

ciepła  $Q_1$  i  $Q_2$ , wywołane w miejscach spójnia przy przepływie prądu w kierunku, wskazanym strzałką I, oraz  $Q'_1$  i  $Q'_2$  przy przepływie prądu o tym samym natężeniu w kierunku odwrotnym. Każda z tych ilości ciepła jest sumą algebraiczną ciepła Joule'a i ciepła Peltiera.

Przyjmijmy, że przy przepływie prądu w kierunku I ciepło Peltiera było dodatnie w kalorymetrze  $K_2$ , ujemne w kalorymetrze  $K_1$ . Oznaczając ciepło Joule'a, wywołane w kalorymetrze  $K_1$ , przez  $q'_j$ , w kalorymetrze  $K_2$  przez  $q''_j$ , ciepło zaś Peltiera przez  $q_p$  (wartość jego bezwzględna jest w obu kalorymetrach ta sama) mamy

$$Q'_1 = q'_j - q_p; \quad Q'_2 = q''_j + q_p$$



i przy zmianie kierunku prądu

$$Q_1 = q_j' + q_p; \quad Q_2 = q_j'' - q_p.$$

(Wartość ciepła Joule'a pozostaje, rzecz prosta, przy zmianie kierunku prądu bez zmiany). Stąd

$$Q_1' - Q_2' = q_j' - q_j'' - 2q_p$$

$$Q_1 - Q_2 = q_j' - q_j'' + 2q_p$$

i ostatecznie

$$q_p = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_1' + Q_2'}{4}. \quad (30)$$

Podobnej metody używali do pomiaru spólczynnika Peltiera Lecher (1906 r.) i Cermak (1908 r.). Backer wyznaczył (1912 r.) ten spólczynnik mierząc ciepło, jakie należy doprowadzić do oziębiającego się spojenia, aby utrzymać je stale w tej samej temperaturze, co spojenie ogrzewające się. Borelius (1918 r.) opracował metodę, pozwalającą na wyznaczenie stosunku spólczynników Peltiera dwu par metali.

Jak wykazują pomiary, spólczynnik  $\Pi$  w wysokim stopniu zależy od temperatury; w temperaturach bliskich zera bezwzględne  $\Pi$  jest znikomo małe. Oto parę wartości tego spólczynnika: w obwodzie nikiel-miedź o temperaturze  $0^\circ$ :  $\Pi_{Ni,Cu} = 5060 \cdot 10^{-8} V$ , bizmut-miedź (Caswell, 1911 r.)  $\Pi_{Bi,Cu} = -16100 \cdot 10^{-8} V$ .

#### 7a. — WZÓR THOMSONA.

W obwodzie niejednorodnym o niejednakowej temperaturze spojeń podczas przepływu prądu zachodzą, jak wynika z rozważań poprzednich, cztery różne zjawiska cieplne: 1. przechodzenie ciepła z miejsca o temperaturze wyższej do miejsc o temperaturze niższej, uwarunkowane przez przewodnictwo cieplne części obwodu; 2. wywiązywanie się ciepła Joule'a, w ilości zależnej od kwadratu natężenia prądu i oporu omowego obwodu; 3. wywiązywanie lub pochłanianie ciepła w jednorodnych, lecz niejednakowo ogrzanych częściach obwodu, w ilości, wyznaczonej przez wzór Thomsona (23), i wreszcie 4. wywiązywanie lub pochłanianie ciepła Peltiera.

Z tych przemian dwie pierwsze są z samej istoty rzeczy nieodwracalne, dwie ostatnie mogą być odwracalnymi, zmiana bowiem kierunku prądu powoduje, jak wiemy, zmianę kierunku przebiegu tych przemian.

Ilość ciepła Joule'a możemy dowolnie zmniejszyć, biorąc prąd o natężeniu bardzo małym, nie zdołamy jednak przeszkodzić przecho-



dzeniu ciepła z miejsc cieplejszych do zimniejszych, tak że całość przemian pozostanie w dalszym ciągu nieodwracalna. Jeżeli jednak założymy za W. Thomsonem (1854 r.), że przebieg przemian odwracalnych w obwodzie termoelektrycznym jest niezależny od przebiegu przemian nieodwracalnych, zachodzących jednocześnie w tym obwodzie, tak że rozpatrując każdą z tych przemian oddzielnie, nie popełnimy znaczniejszego błędu, będziemy mogli do obwodu termoelektrycznego zastosować twierdzenia termodynamiki, dotyczące doskonałych motorów cieplnych.

W takim bowiem obwodzie energia elektryczna, którą możemy w razie potrzeby zamienić w pracę mechaniczną, powstaje, podobnie, jak praca motoru cieplnego, kosztem ciepła dostarczanego spojeniu cieplejszemu, które tym sposobem jest jakby ogniskiem tego źródła pracy. Rolę chłodnicy odgrywa spojenie zimniejsze. Gdy energia dostarczana jest z zewnątrz (gdy np. obwód połączony jest z zewnętrznym źródłem siły elektrobodźczej) i gdy prąd o tym samym natężeniu płynie w kierunku przeciwnym do tego, w jakim płynął, gdy układ działał jako ogniwo, w spojeniu, które poprzednio odgrywało rolę chłodnicy, ciepło jest pochłaniane w tej samej ilości, w jakiej było poprzednio wywiązywane, w spojeniu zaś drugim — wywiązywane. Analogiczna zmiana zachodzi w znaku ciepła zjawiska Thomsona przy odwróceniu kierunku prądu.

Oznaczmy przez  $d\mathcal{E}^{A,B}$  siłę termoelektryczną, odpowiadającą temperaturom  $T$  i  $T + dT$  spojeń i przypuśćmy, że przez obwód przepłynęła jednostka elektryczności. Energia w obwodzie równa jest, w myśl zasady zachowania energii, różnicy między ciepłem pochłoniętym i wywiązanym.

Niech  $q_p$  będzie ciepłem pochłanianym w spojeniu cieplejszym (gdy obwód działa, jako ogniwo, a więc, jak motor cieplny, dostarczający pracy),  $q_p - \frac{dq_p}{dT} dT$  ciepłem, wywiązanym w spojeniu chłodniejszym; wtedy odniesione do jednostki naboju te ilości ciepła są, zgodnie ze wzorem (29), gdzie podstawiamy  $it = 1$ , równe odpowiednio  $\Pi_{A,B}$  i  $\Pi_{A,B} - \frac{d\Pi_{A,B}}{dT} dT$ . Poza tym w obwodzie wywiązywane jest i pochłaniane ciepło zjawiska Thomsona; jeżeli w jednym z metali np.  $A$  zostało pochłonięte ciepło w ilości  $\sigma_A \cdot dT$ , w drugim została wywiązana ilość  $\sigma_B \cdot dT$ . Mamy przeto

$$d\mathcal{E}^{A,B} = \Pi_{A,B} - \Pi_{A,B} + \frac{d\Pi_{A,B}}{dT} \cdot dT + (\sigma_A - \sigma_B) dT,$$

skąd

$$\frac{d\mathcal{E}^{A,B}}{dT} = \frac{d\Pi_{A,B}}{dT} + (\sigma_A - \sigma_B) \quad (31)$$



lub

$$\frac{d(\mathcal{E}^{A,B} - \Pi_{A,B})}{dT} = \sigma_A - \sigma_B. \quad (31a)$$

Z równania (4) str. 395 tomu I

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{I\mathcal{O}}{JQ_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

otrzymujemy podstawiając  $d\mathcal{E}^{A,B} \cdot 1$  zamiast  $\mathcal{E}$ ,  $\Pi_{A,B}$  zamiast  $JQ_1$ ,

$$\frac{d\mathcal{E}^{A,B}}{\Pi_{A,B}} = \frac{dT}{T}$$

lub

$$\frac{d\mathcal{E}^{A,B}}{dT} = \varphi(A,B) = \frac{\Pi_{A,B}}{T}. \quad (32)$$

Ten ważny wzór, wiążący zdolność termoelektryczną danego ogniwa z ciepłem Peltiera, nosi nazwę pierwszego równania Thomsona. Bezpośrednie pomiary zdolności termoelektrycznej i ciepła Peltiera na ogół potwierdzają z wystarczającą dokładnością to równanie. Tak np. według Batelliego (1889 r.), którego dane podajemy tutaj za Euckenem, dla ogniwa *Bi — Pb* w temperaturze  $0^\circ\text{C}$   $\varphi = -17,22 \cdot 10^{-6}$  V/stop,  $\frac{\Pi_{Bi,Pb}}{T} = -17,51 \cdot 10^{-6}$  V/stop, dla ogniwa żelazo — nowe srebro w tejże temperaturze  $\varphi = +20,00 \cdot 10^{-6}$  V/stop,  $\frac{\Pi}{T} = 19,97 \cdot 10^{-6}$  V/stop.

Rugując ze wzorów (31) i (32)  $\frac{d\mathcal{E}^{A,B}}{dT}$ , otrzymujemy

$$\frac{d\Pi_{A,B}}{dT} - \frac{\Pi_{A,B}}{T} = \sigma_B - \sigma_A.$$

skąd dzieląc przez  $T$ 

$$T \frac{d\Pi_{A,B}}{dT} - \Pi_{A,B} = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{T}$$

lub

$$d\left(\frac{\Pi_{A,B}}{T}\right) = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{T}$$

i po podstawieniu  $\frac{d\mathcal{E}^{A,B}}{dT}$  zamiast  $\frac{\Pi_{A,B}}{T}$ 

$$\frac{d^2\mathcal{E}^{A,B}}{dT^2} = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{T}. \quad (33)$$

Jest to drugie równanie Thomsona, również potwierdzone doświadczalnie przez Boreliusą (1918 r.).

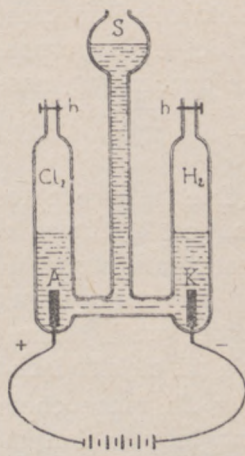


## ROZDZIAŁ VI

### PRĄD ELEKTRYCZNY W ELEKTROLITACH. — OGNIWA GALWANICZNE

#### 1. — ELEKTROLIZA. — PRAWA FARADAY'A.

W obwodzie, składającym się nie tylko z przewodników pierwszej klasy (p. str. 402), lecz również i takich, które prądu Volty nie podlegają, przepływowi prądu mogą towarzyszyć również zjawiska chemiczne, zachodzące w pobliżu elektrod, doprowadzających do danego przewodnika prąd z pozostałej części obwodu. Tak np. gdy do obwodu włączymy warstwę AK (rys. 230) roztworu kwasu solnego, przepływ prądu spowoduje wywiązanie się chloru na elektrodzie dodatniej — anodzie (gr. ana — w górę), wodoru zaś na elektrodzie ujemnej — katodzie (gr. kata — w dół). Analogiczne zjawiska rozkładu otrzymamy za każdym razem, gdy prąd płynąć będzie przez sole, zasady i kwasy, znajdujące się w stanie ciekłym, czy to na skutek rozpuszczenia w cieczach o wysokiej stałej dielektrycznej, a więc przede wszystkim w wodzie (p. rozdz. III, str. 262), czy też na skutek ogrzania do temperatury topnienia lub wyższej. Tego rodzaju przewodniki nazywamy elektrolitami (gr. lyo — rozwiązuję), zjawiska zaś rozkładu, towarzyszące przepływowi prądu, — zjawiskami elektrolizy.



rys. 230

Elektrolitami mogą jednak być i ciała stałe. Warburg, przepuszczając prąd przez szkło, ogrzane do temperatury  $300^{\circ}\text{C}$ , a więc



do temperatury, w której szkło można jeszcze uważać za ciało stałe, stwierdził (1884 r.), że zachowuje się ono jak elektrolit. Podobne własności, jak to wykazały badania późniejsze (Warburg i Tegetmeier, 1888 r., Haber i Tołłoczko, 1904 r. oraz Haber i Zawadzki, 1912 r.) posiadają również i niektóre niemetaliczne kryształy.

W najogólniejszym przypadku zjawisko elektrolizy polega na wydzielaniu się na elektrodach produktów rozkładu ciała rozpuszczonego (lub stopionego), przy czym na katodzie wydziele się metal lub wodór. Te ciała wydzielone mogą niekiedy działać chemicznie na elektrody albo na rozpuszczalnik; wtedy na elektrodach otrzymujemy ostatecznie produkty tych reakcyj wtórnych.

We wszystkich jednak przypadkach elektrolizy, najbardziej nawet złożonych i zaciemnionych przez reakcje wtórne, obowiązują prawa, sformułowane w 1833 r. przez Faraday'a. Prawa te są następujące:

Prawo pierwsze. Masy, wydzielone na elektrodach, są proporcjonalne do natężenia prądu, przepływającego przez elektrolit i do czasu jego przepływu, a więc innymi słowy, do ilości elektryczności, która przepłynęła przez elektrolit, tak, że oznaczając masę wydzieloną przez  $m$ , otrzymujemy

$$m = m_e \cdot i \cdot t \quad (1)$$

gdzie  $m_e$  — wielkość, charakterystyczna dla wydzielonego ciała, jest liczbowo równa masie, wydzielonej przez jednostkę natężenia prądu w ciągu jednostki czasu.

Prawo drugie. Przejściu tej samej ilości elektryczności przez różne elektrolity towarzyszy zawsze wydzielenie się na elektrodach mas równoważnych chemicznie.

Za masę chemicznie równoważną uważamy masę, która mogłaby w danym związku chemicznym zastąpić jeden atom gramowy wodoru lub też z jednym atomem gramowym utworzyć nowy związek. Masa ta, którą nazywać będziemy równoważnikiem gramowym, jest równa ilości gramów, wyrażających się tą samą liczbą, co ciężar atomowy, gdy produktem rozkładu jest pierwiastek, lub tą samą liczbą, co suma ciężarów atomowych, gdy produktem rozkładu jest grupa atomów np.  $SO_4$  lub  $NO_3$ , podzieloną w każdym z tych przypadków



przez wartościowość danego pierwiastka lub danej grupy atomów.

Włączmy np. w jeden i ten sam obwód roztwory wodne azotanu srebra ( $AgNO_3$ ) i siarczanu miedzi ( $CuSO_4$ ) i dobierzmy tak natężenie prądu i czas jego przepływu, aby na katodzie, zanurzonej w roztworze soli srebra, wydzielił się jeden atom gramowy tego metalu tzn. 107,88 g; wtedy na katodzie, zanurzonej w roztworze siarczanu miedzi wydzielili się 31,73 g miedzi, a więc połowa atomu gramowego miedzi (c. atom. 63,57), miedź bowiem jest w siarczanie miedzi dwuwartościowa.

Stąd wynika, że dla różnych ciał wartości współczynnika  $m_e$  we wzorze (I) są w takim stosunku wzajemnym, jak równoważniki gramowe tych ciał. Znając zatem wartość tego współczynnika, który nazwiemy elektrochemicznym równoważnikiem, dla jakiegokolwiek ciała o znanym ciężarze atomowym i znanej wartościowości, możemy obliczyć  $m_e$  dla dowolnego ciała, jeżeli tylko znamy jego ciężar atomowy i wartościowość. Mamy bowiem

$$\frac{m_e}{m'_e} = \frac{\frac{m_A}{w}}{\frac{m'_A}{w'}}$$

gdzie  $m_A$  i  $m'_A$  oznaczają masy jednego atomu gramowego porównywanych ciał,  $w$  i  $w'$  — ich wartościowości, i ostatecznie

$$m'_e = m_e \cdot \frac{\frac{m'_A}{w'}}{\frac{m_A}{w}} \quad (1a)$$

Zazwyczaj elektrochemiczne równoważniki porównujemy z elektrochemicznym równoważnikiem srebra, wyznaczanym z roztworu wodnego azotanu srebra. Wtedy bowiem, nawet przy zachowaniu miernych jedynie ostrożności, dokładność pomiaru jest o wiele większa, niż przy elektrolizie soli innych metali.

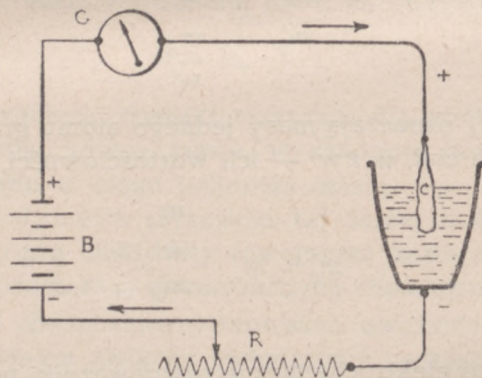
Srebro posiadając wysoki stosunkowo ciężar atomowy i wartościowość zawsze we wszystkich związkach równą jedności, posiada również dość wysoki równoważnik elektrochemiczny, wobec czego



ten sam błąd, popełniony przy wyznaczaniu wydzielonej masy, jest procentowo niższy, niż w przypadku ciał o mniejszej wartości  $m_e$ . Poza tym srebro wydzielone nie podlega na ogół reakcjom wtórnym i nie jest rozpuszczane przez roztwór. I wreszcie osad srebra ściśle przylega do katody i łatwo może być obmyty i osuszony. Szczególnie bodaj ważną własnością jest wspomniana wyżej stała wartościowość srebra we wszystkich jego związkach.

W takich bowiem przypadkach, jak np. miedzi, żelaza, złota, gdzie ciało posiada, zależnie od związku, w którym się znajduje, wartościowość różną, może w roztworze soli danego metalu ujawnić się, choć w małym zazwyczaj stopniu, i wartościowość nie odpowiadająca danej soli. Tak np. w roztworze wodnym siarczanu miedzi, w którym miedź jak wiemy, jest dwuwartościowa, daje się również stwierdzić, zresztą w stopniu bardzo nieznacznym, i obecność miedzi jednowartościowej (Wohlwill, 1899 r.). W roztworach soli złota zjawisko to występuje o wiele wyraźniej.

Do wyznaczenia tego elektrochemicznego równoważnika służy tzw. woltametr srebrowy. Pałeczka srebrna C, połączona z dodatnim biegunem baterii B, zanurzona jest w 10%-owym roztworze azotanu srebra, wypełniającym platynową miseczkę, służącą za katodę (rys. 231). Często dla unik-



rys. 231

nięcia opadania cząstek srebra z anody na dno miseczki, umieszcza się anodę w lnianym woreczku.

Pomiar osadzonej na katodzie masy srebra jest tak dokładny, że może służyć, gdy, rzecz prosta, uprzednio wyznaczmy elektrochemiczny równoważnik srebra, do dokładnego wyzna-



czenia natężenia prądu. Tym się tłumaczy, że właśnie na nim zostało oparte określenie ampera międzynarodowego (p. rozdz. V, str. 371), przy czym na liczbę, wyrażającą masę srebra, osadzaną na katodzie w ciągu 1 sek. przez prąd o natężeniu 1 ampera międzynarodowego, przyjęto przeciętną, otrzymaną z pomiarów masy srebra, osadzonej w ciągu 1 sek. przez prąd o natężeniu możliwie mało się różniącym od natężenia jednego ampera bezwzględnego. Masa ta równa jest, jak to wyżej mówiliśmy, 0, 001 118 g. Tę liczbę przyjmujemy zazwyczaj za wartość elektrochemicznego równoważnika srebra.

Elektrochemiczny równoważnik srebra odniesiony do jednego ampera bezwzględnego jest nieco większy (p. rozdz. VII, str. 474).

Wartość ta jest, jak to stwierdzili Kohlrausch i E. H. Weber (1907 r.), niezależna od temperatury elektrolitu.

Zachowując dane poprzednio określenie kulomba międzynarodowego i przyjmując na ciężar atomowy srebra podaną już wyżej liczbę 107,88, znajdujemy, że ilość elektryczności, której przejściu przez elektrolit towarzyszy wydzielenie na katodzie jednego równoważnika gramowego srebra, wynosi

$$\frac{107,88}{0,001118} = 96\,493 \text{ kul} \doteq 96\,490 \text{ kul.} \quad (2)$$

Jak wynika z drugiego prawa elektrolizy, przepływ przez elektrolit takiej samej ilości elektryczności powodować będzie wydzielenie z elektrolitu jednego równoważnika gramowego każdego innego ciała, a więc np. 1,008 g wodoru, 8 g tlenu, 31,78 g miedzi (ze związku  $\text{CuSO}_4$ ) itd. Tę wartość naboju, przepływającego przez elektrolit przy wydzielaniu się na elektrodach jednego równoważnika gramowego, oznaczamy zazwyczaj literą  $F$  i nazywamy stałą Faraday'a.

Jak wynika jednak z podanego wyżej określenia, równoważnik gramowy pierwiastka jednowartościowego zawiera tyle atomów, ile drobin zawiera drobina gramowa tegoż pierwiastka.

Istotnie, gdy mamy do czynienia z pierwiastkiem dwuatomowym np. wodorem, drobina gramowa o masie, wyrażającej się w gramach liczbą, równą ciężarowi drobinowemu, w przypadku więc wodoru



równą 2,016 g, zawiera dwa razy tyle atomów, co atom gramowy. Masa przeto dwa razy mniejsza, a więc równa atomowi gramowemu, zawiera tyle atomów, ile drobin zawiera drobina gramowa.

Otóż za najprawdopodobniejszą wartość liczby drobin, zawartych w drobinie gramowej jakiegokolwiek ciała, tzw. liczby Avogadry (por. tom I, str. 335), możemy uważać liczbę

$$N = 6,097 \cdot 10^{23} \quad (3)$$

(Millikan, 1938 r.). Wydzielaniu się więc z elektrolitu jednego atomu takiego pierwiastka (lub, jak to wynika z określenia równoważnika gramowego, jednowartościowej grupy atomów) towarzyszy przejście przez elektrolit naboju

$$e_0 = \frac{F}{N} = \frac{F \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ j. els. nab.}}{N}$$

Podstawiając z (2) i z (3) wartość  $F$  i  $N$  znajdujemy, że

$$e_0 = 4,75 \cdot 10^{-10} \text{ j. els. nab.} \quad (4)$$

Jeżeli produktem rozkładu jest pierwiastek (lub grupa atomów) dwuwartościowy, liczba atomów (lub grup atomów) w jednym równoważniku gramowym jest dwa razy mniejsza  $\frac{N}{2}$ , nabój więc towarzyszący temu wydzielaniu dwa razy większy  $2e_0$ , analogicznie w przypadku pierwiastków (lub grup atomów) trójwartościowych, liczba wydzielonych atomów (lub grup atomów) spada do  $\frac{N}{3}$ , wartość zaś naboju wzrasta do  $3e_0$ . Nabój  $e_0$  jest zatem najmniejszym nabojem, którego przejście przez elektrolit może spowodować wydzielenie się na elektrodzie jednego atomu (lub jednowartościowej grupy atomów).

Z pomiarów tego naboju elementarnego, wykonanych przy użyciu innych metod, które można uważać za dokładniejsze, wynika, że

$$e_0 = 4,796 \cdot 10^{-10} \text{ j. els. nab.} \quad (4a)$$

(Millikan, 1938 r.), co zresztą niewiele się różni od podanej wyżej wartości tego naboju.



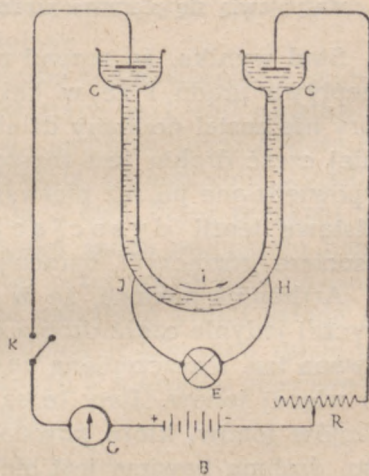
## 2. — TEORIA DYSOCJACJI ELEKTROLITYCZNEJ. —

Najprostsze objaśnienie omówionego wyżej procesu elektrolizy otrzymamy, zakładając, że naboje, których przejściu przez elektrolit towarzyszy zawsze wydzielenie się na elektrodach w ilościach równoważnych produktów rozkładu ciała rozpuszczonego, przenoszone są przez te atomy lub grupy atomów, na które rozpada się drobina danego ciała. Z tych cząstek, które, przyjmując terminologię, wprowadzoną (1834 r.) przez Faraday'a, nazywamy j o n a m i (gr. ion — idący), jedne naelektryzowane dodatnio — k a t i o n y — poruszałyby się pod działaniem przyłożonej do elektrod różnicy potencjałów w kierunku zgodnym z kierunkiem spadku potencjału i skupiałyby się przy katodzie, oddając metalowi elektrody swój nabój, inne, naelektryzowane ujemnie — a n i o n y — poruszałyby się w kierunku przeciwnym do kierunku spadku potencjału i skupiałyby się przy anodzie.

Tego rozszczepienia drobin nie możemy jednak przypisać działaniu przyłożonej do elektrod różnicy potencjałów. Gdyby bowiem rozszczepienie drobin zachodziło kosztem energii elektrycznej, zwiększenie natężenia prądu, a więc i wzrost liczby rozszczepionych drobin, musiałyby powodować pozorny wzrost oporu elektrolitu; stosunek  $\frac{V_1 - V_2}{i}$  musiałby wzrastać.

Tymczasem z pomiarów oporu elektrolitów, o których będzie mowa niżej, wynika, że dla danego naczynia, do którego nalany jest elektrolit, i wreszcie dla danego kształtu elektrod stosunek ten jest wielkością stałą, niezależną od wartości natężenia prądu, że więc elektrolity podlegają tak, jak przewodniki pierwszej klasy, prawu Ohma.

Stałość tego stosunku można stwierdzić choćby w sposób następujący. Do obwodu elektrycznego, zawierającego baterię B,



rys. 232



opór  $R$ , galwanometr  $G$ , włączamy naczynie szklane  $C$ , zawierające dany elektrolit. W naczynie są wtopione dwa druciki metalowe  $J$  i  $H$ , połączone metalicznie z elektrometrem  $E$ . Elektrody są z tego samego metalu, który wchodzi w skład soli roztworu. Mierząc natężenie prądu  $i$  i różnicę potencjałów  $V_J - V_H$ , stwierdzamy, że  $\frac{V_J - V_H}{i}$  jest stałe. Zmieniając odległość  $l$  między drucikami  $J$  i  $H$  oraz przekrój naczynia między tymi punktami, znajdujemy, że

$$\frac{V_J - V_H}{i} = k \frac{l}{S},$$

gdzie  $k$  jest wielkością zależną od rodzaju elektrolitu. Wielkość zatem, będąca miarą stosunku różnicy potencjałów do natężenia prądu, ma wszystkie cechy oporu omowego.

Co więcej doświadczenie, wykonane z elektrolitami, w których elektrody są z metalu, wchodzącego w skład soli elektrolitu (tzw. nie polaryzujące się elektrody), np. z miedzi w wodnym roztworze siarczanu miedzi, z cynku w wodnym roztworze siarczanu cynku itp., dowiodły, że elektroliza zachodzi nawet przy znikomo małej różnicy potencjałów elektrod.

Również i wtedy, gdy elektrody nie czynią zadość wyżej wymienionym warunkom, elektroliza zachodzi przy dowolnie małym napięciu, wtedy jednak trwa ona tylko dopóty, dopóki na elektrodach nie pojawiają się pierwsze produkty rozkładu (p. niżej).

Stąd wynika, że rozpad na jony zachodzi niezależnie od przepływu prądu i że w każdym elektrolicie, nawet takim, który nie został poddany działaniu sił elektrycznych, przynajmniej część drobin jest rozszczepiona na jony. To założenie, wypowiedziane po raz pierwszy przez Clausiusa (1854 r.) jest podstawą teorii dysocjacji elektrolitycznej (łac. dissociare - rozłączyć), opracowanej przez Arrheniusa (1887 r.).

Arrhenius zakłada, że w roztworze elektrolitycznym zazwyczaj jedynie część drobin ciała rozpuszczonego jest zdysocjowana tzn. rozszczepiona na dwa (w najprostszym przypadku) lub więcej jonów. Jony te są tak naelektryzowane, że suma nabożów jonów, które powstały z danej drobin, jest równa zeru, drobiną bowiem jest elektrycznie obojętna. W omawianym wyżej prostym przypadku wodnego roztworu kwasu sol-



nego drobina  $HCl$  rozpada się na dwa jony: dodatni  $H^+$  i ujemny  $Cl^-$ , obydwaj jednowartościowe, o naboju więc równym w myśl wywodów ustępu poprzedniego, elementarnemu naboju  $\pm e_0$ . Jony te, zbierające się koło elektrod i oddające im, jak już o tym wyżej mówiliśmy, swój nabój, łączą się w elektrycznie obojętne dwuatomowe drobiny wodoru ( $H_2$ ) i chloru ( $Cl_2$ ).

W przypadku nieco bardziej złożonym roztworu kwasu siarkowego w wodzie (rozcieńczonego) drobina  $H_2SO_4$  rozpada się na trzy jony: dwa kationy  $H^+$  i  $H^+$ , każdy o naboju  $+e_0$  i anion  $SO_4^{--}$  dwuwartościowy o naboju  $-2e_0$ . Gdy mamy do czynienia z roztworem wodnym siarczanu miedzi, obydwaj jony  $Cu^{++}$  i  $SO_4^{--}$  są dwuwartościowe o naboju  $\pm 2e_0$ .

Od dysocjacji elektrolitycznej należy odróżniać dysocjację chemiczną, w której drobina rozpada się na części elektrycznie obojętne.

Znak naboju zależy od natury chemicznej danego jonu: jony metali i wodoru są, jak już o tym była mowa, kationami, jony metaloidów i reszt kwasowych — anionami.

### 3. — PRĘDKOŚĆ JONÓW. — LICZBY HITTORFA. —

Z faktu, że przepływ prądu przez elektrolity podlega prawu Ohma, wynika, że ruch jonów, przesuujących się w kierunku elektrod, jest ruchem jednostajnym

Istotnie, oznaczmy przez  $P$  liczbę równoważników gramowych jonów każdego znaku, zawartych w  $1\text{ cm}^3$  elektrolitu, przez  $U_k$  i  $U_a$  prędkości kationów i anionów, przez  $F$  stałą Faraday'a i przyjmijmy dla uproszczenia, że elektrolit wypełnia naczynie cylindryczne o przekroju  $S\text{ cm}^2$ . Przez przekrój ten przejdzie w ciągu 1 sek. w kierunku spadku potencjału nabój dodatni  $P \cdot U_k \cdot S \cdot F$ , w kierunku zaś przeciwnym nabój ujemny  $P \cdot U_a \cdot S \cdot F$ . Ponieważ na wartość natężenia prądu składa się równie dobrze ruch naboju dodatnich w kierunku spadku potencjału, jak i ruch naboju ujemnych w kierunku przeciwnym (p. rozdz. V, ust. I), możemy napisać

$$i = P \cdot S \cdot F (U_k + U_a), \quad (5)$$

gdzie  $F$  jest wyrażone w kulombach, a  $i$  w amperach.



Z drugiej jednak strony mamy

$$i = cE$$

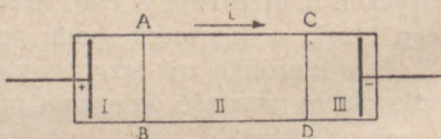
(p. rozdz. V, wz. 3), gdzie  $E$  oznacza natężenie pola elektrycznego w przewodniku. Przyrównując te dwa wyrażenia i uwzględniając, że  $P$  liczba równoważników gramowych jonów nie zależy w myśl założeń teorii dysocjacji od natężenia pola, stwierdzamy, że prędkości jonów muszą być proporcjonalne do natężenia pola i równe

$$U_k = u_k \cdot E \quad \text{i} \quad U_a = u_a \cdot E, \quad (6)$$

gdzie  $u_k$  i  $u_a$  są w danych warunkach wielkościami stałymi, a więc, że ruch jonów jest jednostajny, gdyż natężenie pola ma w tym przypadku (prąd stały) we wszystkich przekrojach wartość tę samą.

Stałe współczynniki  $u_k$  i  $u_a$  równe liczbowo prędkościom kationu i anionu w polu o natężeniu 1 V/cm, noszą nazwę ruchliwości bezwzględnych.

Współczynniki te, a co za tym idzie, i prędkości  $U_k$  i  $U_a$  nie są wzajemnie równe, jak to wykazał (1853 r.) Hittorf, wyjaśniając zaobserwowaną już dawniej (Gmelin, 1838 r., Pouillet, 1845 r.) niejednakową zmianę stężenia roztworu w pobliżu obu elektrod, zmianę, która np. przy elektrolizie wodnego roztworu siarczanu miedzi ujawnia się w niejednakowym zabarwieniu roztworu przy anodzie i przy katodzie. Podzielmy cylindryczne naczynie, w którym znajduje się elektrolit, na trzy komory w ten jednak sposób, aby jony mogły przez przegrody te przechodzić (rys. 233).



rys. 233

W doświadczeniu Hittorfa komory te były oddzielone jedna od drugiej przegrodami z pęcherzy zwierzęcych; w doświadczeniach późniejszych (Coehn, 1909 r., Washburn, 1909 r.) komory I i III były



połączone z komorą II rurami z kranem; krany te, otwarte podczas elektrolizy, zamykano przy jej ukończeniu i w ten sposób oddzielano komory przyelektrodowe od komory środkowej.

Jeżeli przez elektrolit przejdzie w ciągu jednostki czasu  $F$  kulombów, z elektrolitu ubędzie po jednym równoważniku gramowym kationów i anionów. Do komory II (środkowej) przez przekrój  $AB$  wejdzie w ciągu tego samego czasu

$$n_k = P \cdot S \cdot u_k \cdot E \quad (a)$$

równoważników gramowych kationów i tyleż wyjdzie przez przekrój  $CD$ , wobec czego koncentracja kationów w komorze II nie ulegnie na skutek przepływu prądu żadnej zmianie. Podobnie będzie i z koncentracją anionów: przez przekrój  $CD$  wejdzie, przez przekrój zaś  $AB$  wyjdzie

$$n_a = P \cdot S \cdot u_a \cdot E \quad (b)$$

równoważników gramowych anionów. W tej więc komorze stężenie roztworu się nie zmienia.

Z komory I (anodowej) przejdzie do komory II  $n_k$  równoważników gramowych kationów, jednocześnie uwolni się taka sama masa anionów, która osadzi się na anodzie, poza tym z komory II przejdzie do komory I  $n_a$  równoważników gramowych anionów, które nie pozostaną w roztworze, lecz osadzą się na anodzie, oddając jej swój nabój. Wobec tego na anodzie osadzi się masa  $n_a + n_k$ , równa, w myśl założenia, jednemu równoważnikowi gramowemu, masa zaś ciała, rozpuszczonego zmniejszy się o  $n_k$  równoważników gramowych, tyle bowiem anionów i tyle kationów ubyło z tej komory.

Podobnie w komorze III (katodowej) osadzi się jeden równoważnik gramowy kationów, masa zaś ciała rozpuszczonego zmniejszy się o  $n_a$  równoważników gramowych, tyle bowiem anionów przejdzie do komory II i tyle ze znajdujących się początkowo w komorze III kationów osadzi się na katodzie.

Z porównania wzorów (a) i (b) otrzymujemy, że

$$\frac{n_k}{n_a} = \frac{u_k}{u_a} \quad (7)$$



skąd po uwzględnieniu, że

$$n_k + n_a = 1,$$

a więc, że

$$n_k = 1 - n_a$$

i odrzucając znaczek przy  $n_a$

$$\frac{1 - n}{n} = \frac{u_k}{u_a}, \quad (7a)$$

gdzie  $n$  równe jest zmniejszeniu się masy ciała rozpuszczonego w komorze przykatodowej,  $1-n$  w komorze przyanodowej. Liczby  $n$  oraz  $1-n$  nazywane są liczbami Hittorfa lub ruchliwościami względnymi.

Jest rzeczą oczywistą, że wzór (7) pozostanie w mocy, gdy zamiast  $1-n$  oraz  $n$  weźmiemy wartości  $p_a$  i  $p_k$ , zmian masy, zachodzących w komorach anodowej i katodowej, przy przejściu przez elektrolit nie  $F$  kulombów, lecz dowolnego różnego od  $F$  naboju, że więc

$$\frac{p_a}{p_k} = \frac{u_k}{u_a} \quad (7b)$$

i, co za tym idzie,

$$\frac{1 - n}{n} = \frac{p_a}{p_k},$$

stąd zaś

$$n = \frac{p_k}{p_a + p_k} \quad \text{oraz} \quad 1 - n = \frac{p_a}{p_a + p_k}. \quad (7c)$$

Mierząc zatem ubytek masy ciała rozpuszczonego przy katodzie  $p_k$  i przy anodzie  $p_a$ , towarzyszący przejściu przez elektrolit dowolnego naboju elektrycznego, możemy wyznaczyć liczby Hittorfa.

Hittorf, mierząc zmianę stężenia wodnego roztworu siarczanu miedzi, znalazł, że na katodzie osadziło się 0,2955 g miedzi, komora zaś katodowa straciła 0,2112 g miedzi. Zmniejszenie się masy ciała



rozpuszczonego wyniosło dla całego roztworu tyle równoważników gramowych, ile równoważników gramowych kationów osadziło się na katodzie, a więc

$$p_a + p_k = \frac{0,2955}{31,78} \text{ rów. gr.},$$

zmniejszenie się zaś masy w komorze katodowej

$$p_k = \frac{0,2112}{31,78} \text{ rów. gr.},$$

stąd  $n$  — ruchliwość względna anionu  $\text{SO}_4$

$$n = \frac{0,2112}{0,2955} = 0,715,$$

ruchliwość zaś względna kationu  $\text{Cu}^{++}$

$$1 - n = 0,285.$$

Z wykonanych w ten sposób pomiarów wynika, że ruchliwości względne zależą na ogół od stężenia roztworu, dążąc asymptotycznie w miarę rozcieńczania roztworu do pewnych wartości granicznych. Podobnie do takiej wartości granicznej dąży i stosunek ruchliwości bezwzględnych jonów, który możemy wyznaczyć ze wzoru (7) znając liczby Hittorfa. Wartości jednak każdej z tych wielkości oddzielnie wzór (7) nie pozwala wyznaczyć, możemy je otrzymać dopiero z pomiaru przewodnictwa elektrolitów.

Liczby Hittorfa były wyznaczane nie tylko dla roztworów wodnych, lecz również i dla roztworów o rozpuszczalnikach takich, jak alkohol metylowy i etylowy, aceton, anilina, amoniak itd. W roztopionych solach, przewodzących elektrolitycznie, udało się, jak dotychczas, jedynie jakościowe potwierdzenie założeń teorii dysocjacji.

#### 4. — PRZEWODNICTWO ELEKTROLITÓW.

Gdy elektrolit wypełnia tak, jakśmy to już wyżej zakładali, naczynie cylindryczne o długości  $l$  i przekroju  $S$  cm<sup>2</sup> i gdy elektrody posiadają tę samą powierzchnię, co przekrój naczynia, a więc gdy przylegają do jego ścian, (rys. 234), opór słupa cieczy jest, zgodnie z prawem Ohma, równy

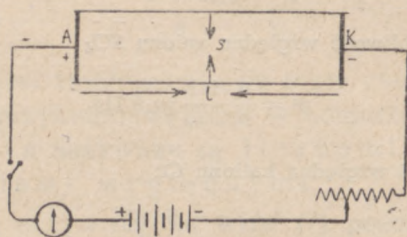
$$r = \rho \cdot \frac{l}{S}$$



przewodnictwo zaś słupa

$$K = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{S}{l} = \kappa \cdot \frac{S}{l}, \quad (8)$$

gdzie  $\kappa$  jest przewodnictwem właściwym danego elektrolitu, wyrażanym zazwyczaj w odwrotnych omach na  $cm$  ( $cm^{-1} cm$ ).



rys. 234

Przewodnictwo to możemy wyznaczyć w sposób analogiczny do tego, jakiego używamy do wyznaczania oporu przewodników pierwszej klasy, a więc np. przy pomocy mostku Wheatstone'a (rozdz. V, str. 382). Chcąc jednak uniknąć wydzielania się produktów rozkładu na elektrodach, co by mogło ujemnie wpłynąć na wyniki pomiarów (p. str. 436), używa się przy pomiarach nie prądu stałego, lecz zmiennego, zamiast zaś galwanometru na prąd stały przyrządu, który by pozwolił stwierdzić, czy prąd w danej gałęzi istotnie już nie płynie; do tego celu, jak na to pierwszy wskazał Kohlrausch, dobrze nadaje się telefon. Z chwilą, gdy używając opisanego wyżej naczynia, wyznaczmy przewodnictwo właściwe jednego jakiegokolwiek elektrolitu, możemy brać do dalszych pomiarów naczynia i elektrody dowolnych kształtów. Wtedy jednak musimy wyznaczyć uprzednio tzw. przewodnictwo naczynia, nalewając do danego naczynia zbadany poprzednio elektrolit i wyznaczając jego przewodnictwo w tym naczyniu. Przewodnictwo to będzie wtedy równe

$$K = \kappa \cdot C \quad (a)$$



gdzie  $C$  jest wielkością zależną od kształtu naczynia i elektrod oraz ich odległości, niezależną zaś od rodzaju elektrolitu. Gdy po wykonaniu tego pomiaru napełnimy naczynie cieczą o nieznanym przewodnictwie właściwym  $\kappa$ , wtedy z wyznaczonego zwykłym sposobem jej przewodnictwa

$$K' = C\kappa'$$

znajdziemy

$$\frac{K'}{K} = \frac{\kappa'}{\kappa} \quad \text{lub} \quad \kappa' = \kappa \cdot \frac{K'}{C} \quad (\text{b})$$

Często zamiast przewodnictwa naczynia używa się wielkości odwrotnej tzw. pojemności oporu, równej  $C_r = \frac{1}{C}$ .

Z pomiarów wynika, że przewodnictwo właściwe zmienia się wraz ze składem roztworu tzn. ze stosunkiem masy ciała rozpuszczonego do masy rozpuszczalnika, wyrażonym w %-ach, przy czym w miarę wzrostu składu przewodnictwo zazwyczaj początkowo wzrasta, a następnie maleje. Tak np. dla roztworu kwasu solnego w wodzie mamy, według Kohlrauscha,

Skład roztworu w %	5	10	15	20	25	30	40
przewodnictwo właściwe	0,3948	0,6302	0,7453	0,7615	0,7225	0,6620	0,515

Podobnie zmienia się przewodnictwo właściwe roztworu wodnego siarczanu cynku, osiągając maximum przy składzie 20%-ym roztworu ( $\kappa = 0,0468$ ) lub kwasu siarkowego (maximum  $\kappa = 0,7338$  przy składzie 30%) i innych.

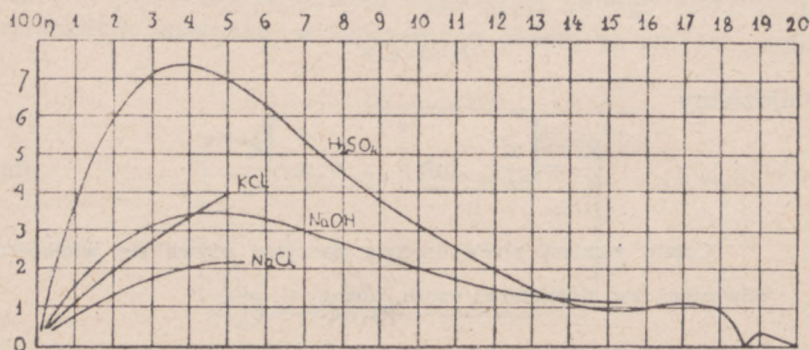
Zmiany te odtwarza krzywa rys. 235, gdzie na osi odciętych odłożone są tzw. stężenia równoważne  $\eta$  roztworów tzn. stosunek masy ciała rozpuszczonego, wyrażonej w równoważnikach gramowych, do objętości rozpuszczalnika.



Przewodnictwo właściwe zupełnie czystej wody wynosi

$$\kappa = 0,000\,000\,043$$

(Kohlrausch i Heydweiler, 1914 r.).



rys. 235

Inny jednak otrzymamy obraz, gdy wprowadzimy za Kohlrauschem (1885 r.) zamiast przewodnictwa właściwego tzw. przewodnictwo równoważne, którego wartość otrzymamy dzieląc  $\kappa$  przez stężenie równoważne  $\eta$ , tak że

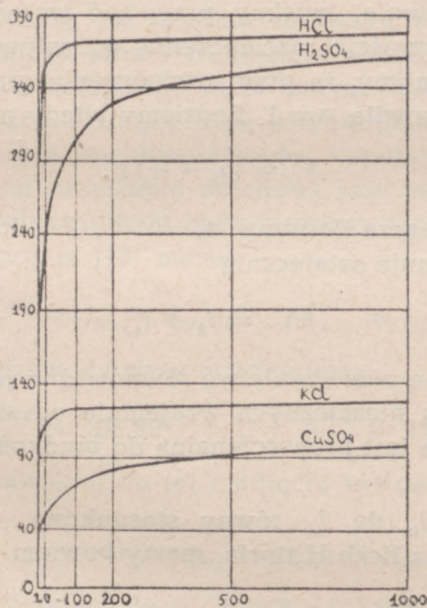
$$\Lambda = \frac{\kappa}{\eta} \quad (c)$$

Przewodnictwo to w miarę rozcieńczania roztworu wzrasta, zbliżając się asymptotycznie do pewnej wartości granicznej  $\Lambda_{\infty}$ . Tak np. dla wodnych roztworów siarczanu cynku, kwasu solnego i kwasu siarkowego otrzymujemy na  $\Lambda$  wartości, zestawione w tablicy, którą podajemy za Kohlrauschem i Holbornem.

stężenie równoważne roztworu	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
roztwór wodny $ZnSO_4$	9,0	20,1	26,1	45,34	72,76	98,39
roztwór wodny $HCl$	152,2	254	301	350,6	370	377
roztwór wodny $H_2SO_4$	135	183	198	225	308	



Zależność równoważnego przewodnictwa od stężenia równoważnego odtwarzają krzywe rys. 236, gdzie na osi odciętych odłożone są rozcieńczenia  $v = \frac{1}{\eta}$ , na osi zaś rzędnych wartości  $\Lambda$ . Oznaczmy przez  $P_1$  liczbę równoważników gramowych ciała rozpuszczonego w jednym centymetrze sześciennym roztworu i nazwijmy stopniem dysocjacji  $\alpha$



rys. 236

stosunek ilości zdysocjowanych drobin ciała rozpuszczonego do ilości wszystkich drobin tego ciała, zawartych w danej objętości. Podstawiając we wzorze (5)  $\alpha P_1$  zamiast  $P$  otrzymamy

$$i = \alpha \cdot P_1 \cdot F(U_k + U_a).$$

Ze wzoru zaś (4b) rozdziału V mamy

$$i = \kappa \cdot S \frac{V_1 - V_2}{l} = \kappa \cdot S \cdot E.$$



Z porównania tych dwóch wzorów wynika, że

$$\kappa \cdot S \cdot E = \alpha \cdot P_1 \cdot S \cdot F (U_k + U_a)$$

lub po uwzględnieniu wzoru (6)

$$\frac{\kappa}{P_1} = \Lambda = \alpha (u_k + u_a) F.$$

Zakładając, że wartości  $u_k$  i  $u_a$  mało na ogół się zmieniają ze zmianą stężenia, musimy przypisać wzrost, jakiego doznaje  $\Lambda$  przy wzroście rozcieńczenia, wzrostowi stopnia dysocjacji  $\alpha$ . Przyjmijmy, że przy rozcieńczeniu granicznym dysocjacja jest całkowita  $\alpha=1$ . Będziemy wtedy mieli

$$\Lambda_{\infty} = (u_k + u_a) F. \quad (9)$$

Kohlrausch oznacza iloczyny  $u_k \cdot F$  i  $u_a \cdot F$  odpowiednio przez  $I_k$  i  $I_a$  i otrzymuje ostatecznie

$$\Lambda_{\infty} = I_k + I_a, \quad (10)$$

tak że graniczne przewodnictwo równoważne jest, według niego, sumie dwu niezależnych wzajemnie od siebie wielkości, z których jedna jest proporcjonalna do prędkości kationu, druga — anionu.

Stosunek  $I_k$  do  $I_a$ , równy stosunkowi  $u_k$  do  $u_a$ , możemy obliczyć z liczb Hittorfa, mamy bowiem

$$\frac{1-n}{n} = \frac{u_k}{u_a}.$$

Stąd oraz ze wzoru (10) znajdujemy

$$I_k = (1-n) \Lambda_{\infty} \quad \text{i} \quad I_a = n \cdot \Lambda_{\infty}. \quad (11)$$

Znając więc liczby Hittorfa i graniczne przewodnictwo elektrolityczne, możemy wyznaczyć  $I_k$  i  $I_a$  i, po podzieleniu otrzymanych wartości przez  $F$ , ruchliwości bezwzględne kationów i anionów.

Przytaczamy za Coehnem kilka otrzymanych na tej drodze liczb:



potas	$u_k^+$	$= 0,000\ 699$	cm/sek
sód	$u_{Na}^+$	$= 0,000\ 450$	cm/sek
lit	$u_{Li}^+$	$= 0,000\ 340$	cm/sek
wodór	$u_H^+$	$= 0,003\ 294$	cm/sek
chlor	$u_{Cl}^-$	$= 0,000\ 677$	cm/sek
anion	$NO_3^-$	$u_{NO_3}^- = 0,0000\ 640$	cm/sek
anion	$OH^-$	$u_{OH}^- = 0,001\ 802$	cm/sek

Wartości te są, jak wynika ze wzoru (10), charakterystyczne dla danego jonu i całkowicie niezależne od rodzaju drugiego jonu, znajdującego się w danym elektrolicie. W dwu więc elektrolitach, różniących się jedynie jonami jednego znaku (np. kationami), ruchliwość jonów wspólnych obu elektrolitom (w danym przypadku anionów) jest jednakowa. Niech np. badanymi elektrolitami będą roztwory wodne  $NaCl$  i  $KCl$ . Zgodnie ze wzorem (10) mamy

$$\Lambda_{\infty}^{NaCl} = I_{Na} + I_{Cl} \quad \text{i} \quad \Lambda_{\infty}^{KCl} = I_K + I_{Cl}. \quad (e)$$

Z pomiarów przewodnictwa otrzymujemy

$$\Lambda_{\infty}^{NaCl} = 103,99 \quad \text{i} \quad \Lambda_{\infty}^{KCl} = 130,10,$$

skąd po podstawieniu do (e) i odjęciu równości pierwszej od drugiej

$$I_K - I_{Na} = 21,11$$

Weźmy teraz roztwory wodne  $KNO_3$  i  $NaNO_3$ ; przewodnictwo tych roztworów wynosi

$$\Lambda_{\infty}^{KNO_3} = I_K + I_{NO_3} = 126,50; \quad \Lambda_{\infty}^{NaNO_3} = I_{Na} + I_{NO_3} = 105,33,$$

skąd

$$I_K - I_{Na} = 21,17$$

w niezłej zgodności z liczbą otrzymaną wyżej.

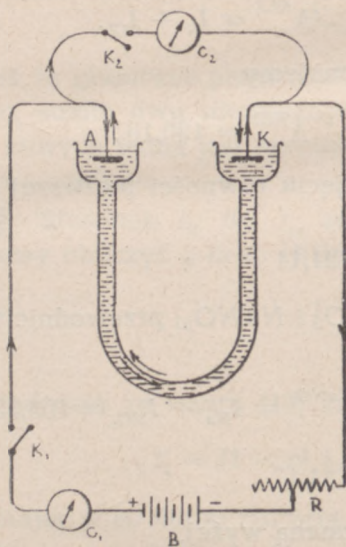
Ze wzrostem temperatury wzrasta przewodnictwo, a więc wzrastają również i ruchliwości jonów. Wzrost ten jest większy dla jonów, posiadających w temperaturach normalnych (około  $18^{\circ}C$ ) ruchliwości mniejsze, tak że różnice ruchliwości jonów ze wzrostem temperatury stopniowo się zmniejszają.



Podane wyżej proste objaśnienie zjawisk, zachodzących w elektrolicie podczas przepływu prądu, w wielu przypadkach prowadzi do wniosków, jedynie w przybliżeniu odpowiadających wynikom pomiarów. Ta rozbieżność między teorią i doświadczeniem skłoniła do poddania rewizji zasadniczych założeń teorii Arrheniusa, a mianowicie założenia, że dopiero w nieograniczenie rozcieńczonym roztworze następuje całkowita dysocjacja (Sutherland, 1907 r., Bjerrum, 1918 r.) oraz założenia, że ruchliwości jonów elektrolitu są niezależne od rodzaju rozpuszczalnika (Walden, 1924 r.). Nie wchodząc w bliższe rozpatrywanie tych zagadnień, stanowiących przedmiot badań chemii fizycznej, zaznaczmy jedynie, że teorie przewodnictwa elektrolitycznego, nieco odbiegające od teorii Arrheniusa i Kohlrauscha, dali między innymi P. Hertz (1912 r.) oraz Debye i Hückel (1923 r.).

#### 5. — POLARYZACJA ELEKTROLITYCZNA. — TEORIA NERNSTA.

W sprzeczności pozornej z doświadczeniami ustalającymi, że elektrolity podlegają prawu Ohma, znajduje się fakt, że w woltametrze o dwu jednakowych elektrodach stosunek natężenia prądu do przyłożonej na elektrodach różnicy potencjałów w miarę trwania elektrolizy stopniowo maleje. W elektrolicie, nie zawierającym soli metalu, z którego są zrobione elektrody, spadek natężenia prądu jest na ogół bardzo gwałtowny, tak że, gdy przyłożona do elektrod różnica potencjałów nie przekracza pewnej wartości, zależnej od elektrolitu i materiału elektrod (tzw. napięcia rozkładu), natężenie prądu już po bardzo krótkiej chwili przybiera wartość bardzo małą (prąd szczątkowy) i elektro-



rys. 237

lizacja przestaje być dostrzegalną.

Jeżeli wtedy woltametr wyłączymy z obwodu baterii (np. otwierając klucz  $K_1$  rys. 237) i bezpośrednio połączymy elektrody (np. zamykając klucz  $K_2$ ), przez utworzony w ten sposób



obwód  $AK_2G_2K$  przepływać będzie prąd o kierunku przeciwnym do prądu początkowego. Woltametr zmieni się zatem w źródło prądu — ogniwo galwaniczne, zostanie spolaryzowany. Siła elektrobodźcza polaryzacji, powodująca przepływ prądu przez obwód  $AK_2G_2K$ , działając w obwodzie  $BG_1AKB$  w kierunku przeciwnym do kierunku siły elektrobodźczej baterii  $B$  wpływa na zmniejszenie się natężenia prądu w tym obwodzie, będziemy bowiem mieli

$$i = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_p}{r}$$

gdzie  $\mathcal{E}_p$  oznacza siłę elektrobodźczą polaryzacji.

Zmniejszenie natężenia prądu może być spowodowane również przez istotną zmianę oporu woltametru, związaną ze zjawiskami elektrolizy, gdy np. ciała, wydzielające się na elektrodach, są złymi przewodnikami elektryczności. Tego rodzaju zmiany nie powodują jednak powstania siły elektrobodźczej.

Siła ta ma swoje źródło w zmianach chemicznych, towarzyszących przepływowi prądu przez elektrolit, toteż istnieje ona dopóty, dopóki istnieją te zmiany, z ich usunięciem — znika. Tak np. gdy woltametr o elektrodach platynowych napełnimy roztworem kwasu solnego, przepływowi prądu polaryzującego towarzyszyć będzie, jak wiemy, wydzielanie się wodoru na katodzie, chloru na anodzie; po wyłączeniu woltametru z obwodu baterii i po bezpośrednim połączeniu elektrod stwierdzimy, że w elektrolicie prąd płynie do katody do anody, powodując wydzielanie się wodoru na tej elektrodzie, która była poprzednio anodą, i chloru na tej, która była poprzednio katodą. Na każdej z tych elektrod tworzyć się będzie z powrotem kwas solny i gdy masa poprzednio wydzielonego wodoru i chloru połączy się z powrotem w chlorowódór, prąd płynący przestanie.

Jeżeli jednak w jakikolwiek inny sposób spowodujemy te same zmiany, jakie wywołuje prąd polaryzujący, otrzymamy z powrotem siłę elektrobodźczą polaryzacji, tej samej, co poprzednio, wartości.

W najprostszym teoretycznie przypadku woltametru o jednakowych elektrodach, zanurzonych w roztworze soli tego sa-



mego metalu (np. elektrody miedziane w roztworze wodnym siarczanu miedzi), jedyną zmianę, jaką powoduje elektroliza, jest zmiana stężenia w komorach katodowej i anodowej (p. ust. 3, w danym przypadku stężenie koło anody będzie większe, koło katody — mniejsze). W spolaryzowanym elektrolicie tworzącym wtedy tzw. ogniwo koncentracyjne, będą się stykały ze sobą roztwory o niejednakowym stężeniu, co powodować będzie dyfuzję ciała rozpuszczonego od roztworu bardziej stężonego do roztworu mniej stężonego. Dyfundować będą, rzecz prosta, nie tylko drobiny elektrycznie obojętne, lecz również i jony. Wobec niejednakowej ruchliwości jonów obu znaków dyfuzja anionów i kationów będzie z początku niejednakowa: do roztworu bardziej rozcieńczonego przejdzie więcej jonów jednego znaku, niż drugiego. Wobec tego roztwory te przestaną być elektrycznie obojętne i naelektryzują się elektrycznościami znaków przeciwnych. Między roztworami powstanie pewna różnica potencjałów, która działać będzie hamująco na jony ruchliwsze (a więc jony o tym samym znaku naboju, co znak elektryzacji roztworu bardziej rozcieńczonego), przyspieszając zaś na jony powolniejsze, wskutek czego prędkości ich dyfuzji będą się stopniowo wyrównywały. W końcu otrzymamy stan równowagi dynamicznej, w którym suma naboju, przenoszonych z jednego roztworu do drugiego przez jony obu rodzajów, będzie przeciętnie równa zeru. Jeżeli tego rodzaju ogniwo stanowić będzie część obwodu zamkniętego, w którym poza siłą elektrobodźczą, powstającą na skutek zetknięcia się roztworów o różnych stężeniach, nie są czynne żadne inne siły elektrobodźcze, wtedy przez obwód przepływać będzie prąd elektryczny, powodujący zmniejszanie się różnicy potencjałów roztworów i tym samym naruszenie ustalonej poprzednio równowagi. W przypadku jednak, gdy natężenie prądu w obwodzie jest bardzo małe, stan układu w każdej chwili bardzo mało różni się od stanu równowagi, tak że możemy z dostatecznym przybliżeniem uważać i tym razem stan elektryczny obu roztworów mimo przepływu prądu za niezmienną się z czasem.



Przyjmijmy dla uproszczenia, że ciało rozpuszczone rozpada się na dwa tylko jony o wartościowości  $w$  oraz że prąd wzbudzony przez ogniwo płynie dostatecznie długo, aby spowodować przeniesienie jednego równoważnika gramowego każdego z jonów i wreszcie, że przez cały ten czas stężenia roztworów pozostają bez zmiany.

Prąd ten spowoduje ubytek w obszarze o potencjale wyższym  $1-n$  równoważników gramowych kationów, w obszarze zaś o potencjale niższym  $n$  równoważników gramowych anionów. Dla utrzymania stanu równowagi musi ten ubytek być wyrównany przez dyfuzję, na której skutek przejdzie, w kierunku przeciwnym do kierunku prądu, kationów o  $1-n$  równ. gram. więcej, niż anionów, w kierunku zaś zgodnym z kierunkiem prądu, o  $n$  równ. gram. anionów więcej, niż kationów.

Oznaczmy koncentrację roztworów odpowiednio przez  $c_1$  i  $c_2$  i przyjmijmy, że roztwory są całkowicie zdysocjowane, wobec czego i koncentracja jonów w tych roztworach równa jest odpowiednio  $c_1$  i  $c_2$ .

Nernst, któremu zawdzięczamy teorię ogniw galwanicznych (1888 r.), zakłada, że praca, wykonana przez układ przy wyrównywaniu stężeń, może być wyznaczona w ten sam sposób, jak praca gazu, rozprężającego się od ciśnienia  $p_1$  do ciśnienia  $p_2$ . Praca ta w przypadku rozprężenia izotermicznego wynosi (p. tom I, str. 350)

$$W' = \int_{v_1}^{v_2} p dv,$$

co, po uwzględnieniu prawa Boyle'a Mariotte'a, gdzie

$$p dv + v dp = 0,$$

skąd

$$p dv = -v dp,$$

możemy napisać w postaci

$$W' = - \int_{p_1}^{p_2} v dp \cdot \log \frac{c_1}{c_2} \quad (14)$$



Odnosząc pracę tę do jednego mola jonów ze wzoru

$$v = \frac{RT}{p},$$

otrzymujemy

$$W' = - RT \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}.$$

Odnosząc zaś do jednego równoważnika gramowego o masie w razy mniejszej, będziemy mieli

$$W = - \frac{8,314}{w} T \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \frac{8,314}{w} T \lg \frac{p_1}{p_2} \text{ dżulów}$$

lub po przejściu od logarytmów naturalnych do logarytmów dziesiętnych

$$W = \frac{8,314}{w \cdot 0,4343} T \log \frac{p_1}{p_2}, \quad (12)$$

i wreszcie po podstawieniu zamiast  $p_1$  i  $p_2$  stężeń  $c_1$  i  $c_2$

$$W = \frac{8,314}{w \cdot 0,4343} T \log \frac{c_1}{c_2}. \quad (12a)$$

Założmy, że kationy są ruchliwsze:  $u_k > u_a$ , wobec czego prąd płynie od roztworu o mniejszym stężeniu do roztworu o stężeniu większym. Praca dyfuzji powoduje przechodzenie kationów w kierunku przeciwnym, a więc od stężenia większego do mniejszego; praca wykonana przy tym przejściu odpowiada przeto pracy przy rozprężaniu gazów. Uwzględniając, że na skutek wyrównawczego działania dyfuzji przeszło

$$1 - n = \frac{u_k}{u_k + u_a}$$

równoważników gramowych kationów, zgodnie ze wzorem (12a) na pracę, wykonaną przez siły układu otrzymamy

$$\text{elektryczny} \quad \frac{1}{w} \int_{c_1}^{c_2} \frac{dc}{c} = \frac{1}{w} T \log \frac{c_1}{c_2}. \quad (13)$$



Aniony o masie

$$n = \frac{u_a}{u_k + u_a}$$

są przenoszone od roztworu o stężeniu mniejszym do roztworu o stężeniu większym; praca więc zużyta na to przeniesienie, została wykonana przeciwko siłom układu. Mamy zatem

$$W_2 = - \frac{u_a}{u_k + u_a} \cdot \frac{8,314}{w \cdot 0,4343} \cdot T \cdot \log \frac{c_1}{c_2} \quad (13a)$$

Praca więc całkowita sił układu wynosi

$$W = W_1 + W_2 = \frac{u_k - u_a}{u_k + u_a} \cdot \frac{8,314}{w \cdot 0,4343} \cdot T \cdot \log \frac{c_1}{c_2} \text{ dżulów.}$$

Praca ta ma być w myśl założenia równa pracy, zużytej przez siły elektryczne, czynne w obwodzie, na przeniesienie  $F$  kulombów elektryczności, a więc równa

$$\mathcal{E} \cdot F = \mathcal{E} \cdot i \cdot t,$$

gdzie  $\mathcal{E}$  jest siłą elektrobodźczą danego ogniwa. Mamy przeto

$$\mathcal{E} \cdot F = - \frac{u_k - u_a}{u_k + u_a} \cdot \frac{8,314}{w \cdot 0,4343} \cdot T \cdot \log \frac{c_1}{c_2},$$

gdyż siły elektryczne są, zgodnie z naszym założeniem, skierowane przeciwnie do sił, powodujących wyrównywanie stężeń. Stąd

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= - \frac{u_k - u_a}{u_k + u_a} \cdot \frac{8,314}{w \cdot 0,4343} \cdot \frac{1}{F} \cdot T \cdot \log \frac{c_1}{c_2} = \\ &= \frac{I_k - I_a}{I_k + I_a} \cdot \frac{8,314}{w \cdot 0,4343} \cdot \frac{1}{F} \cdot T \log \frac{c_1}{c_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Podstawiając  $F = 96490$  kul. otrzymujemy

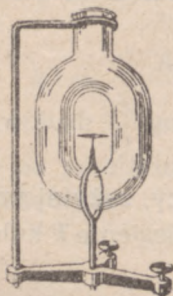
$$\mathcal{E} = - \frac{I_k - I_a}{I_k + I_a} \cdot 0,0002 \cdot \frac{T}{w} \log \frac{c_1}{c_2} \text{ woltów.} \quad (14a)$$



Gdy, jak to bywa najczęściej, używamy ogniwa w temperaturze pokojowej  $t = 18^{\circ}\text{C}$ , wartość siły elektrobodźczej wyrazi się wzorem

$$\mathcal{E} = - \frac{I_k - I_a}{I_k + I_a} \cdot \frac{1}{w} \cdot 0,058 \log \frac{c_1}{c_2} \text{ woltów.} \quad (15)$$

Tego rodzaju obwody, w których jedyną czynną siłą elektrobodźczą jest siła, powstająca przy zetknięciu dwu różniących się jedynie stężeniem roztworów, można otrzymać wypełniając odpowiednio dobranymi cieczami naczynie takiego np. kształtu, jak na rys. 238. Przypuśćmy, że obwód ten tworzą następujące wodne roztwory



rys. 238

$0,1 \text{ n KCl} / 0,1 \text{ n HCl} / 0,01 \text{ n HCl} / 0,01 \text{ n KCl}$ ,

gdzie  $n$  oznacza tzw. roztwór normalny o stężeniu równym jednej drobnie gramowej ciała

rozpuszczonego na 1 litr roztworu. Jony  $\overset{+}{K}$  i  $\overset{-}{Cl}$  posiadają ruchliwość prawie jednakową, tak że siła elektrobodźcza w miejscu zetknięcia roztworów  $KCl$  jest dostatecznie mała, aby mogła być w ogólnym rachunku pominięta; siły elektrobodźcze przy zetknięciu roztworów  $KCl$  i  $HCl$  o tym samym stężeniu ( $0,1n$  i  $0,01n$ ) są sobie równe, stosunek bowiem stężeń jest w obu przy-

padkach ten sam, i przeciwnie skierowane; pozostaje więc ostatecznie tylko siła elektrobodźcza przy zetknięciu roztworów  $HCl$ . Podstawiając do wzoru (14) wartości  $u_k$  i  $u_a$  lub do wzoru (15) wartości  $I_k$  i  $I_a$  oraz uwzględniając, że tym razem w równe jest jedności, mamy

$$l = 0,66 \cdot 0,058 \cdot 1 = 0,038 \text{ wolta,}$$

przy czym siła elektrobodźcza będzie skierowana od roztworu o stężeniu mniejszym do roztworu o stężeniu większym. Istnienie w tym obwodzie prądu elektrycznego możemy stwierdzić, umieszczając w środku naczynia igielkę magnetyczną; igielka ta po napełnieniu naczynia wymienionymi wyżej cieczami odchyli się od swego położenia równowagi. Gdy naczynie obrócimy o  $180^{\circ}$ , igielka odchyli się w przeciwną stronę.

Tego typu ogniwo zbudowali Dolezalek i Krüger (1906 r.), wypełniając naczynie do połowy 35% - owym roztworem kwasu siarkowego i nalewając następnie na ten roztwór z jednej strony 30% - owy roztwór azotanu sodu, z drugiej zaś 20% - owy roztwór chlorku litu. W tym ogniwie stykają się roztwory różnych ciał, wobec czego wzór (15) nie może być tu stosowany.



Uogólnienie wzoru Nernsta i na tego rodzaju ogniwa dał Planck (1890 r. i 1910 r.). Nie będziemy jednak ani omawiali tego wzoru ani też przytaczali wyników wielu dotyczących tego zagadnienia badań.

Zazwyczaj jednak w ogniwach mamy do czynienia z elektrodami stałymi, których zetknięcie z elektrolitem staje się nowym źródłem siły elektrobodźczej. Nernst uogólnia teorię ogniw ciekłych również i na te przypadki, wprowadzając pojęcie prężności roztwórczej.

Pojęcie to, zaczerpnięte z teorii roztworów, możemy przynajmniej z grubsza wyjaśnić w sposób następujący. Zanurzamy jakiegokolwiek ciało do cieczy, w której może się ono rozpuszczać. Roztwór będzie stopniowo stawał się coraz bardziej stężony, dopóki stężenie jego nie dojdzie do pewnej oznaczonej wartości (roztwór nasycony), przy której nastąpi równowaga termodynamiczna między danym ciałem i roztworem. Możemy założyć, że temu stanowi towarzyszy wyrównanie dwu ciśnień: ciśnienia, będącego miarą dążenia danego ciała do rozpuszczania się i które jest właśnie prężnością roztwórczą  $p_r$ , ciała, oraz ciśnienia  $p_o$ , wywieranego przez rozpuszczone w roztworze ciało i przeciwdziałającego dalszemu rozpuszczaniu się.

Tak jest jednak tylko wtedy, gdy ciałem rozpuszczającym się jest ciało tego typu, co cukier, którego drobiny są w roztworze niezdysoncowane, lub sól, której drobiny rozpadają się na jony o łącznym naboju zawsze równym zeru, wtedy istotnie ciśnieniem przeciwdziałającym rozpuszczaniu jest jedynie ciśnienie  $p_o$ , proporcjonalne do stężenia roztworu. Jeżeli jednak ciałem rozpuszczającym się jest metal, z którego do roztworu przechodzą jony jednego tylko znaku (kationy), wtedy do działania ciśnień  $p_r$  i  $p_o$  dołączają się jeszcze działania sił elektrycznych. Równowaga następuje wtedy, gdy wszystkie te działania wzajemnie się równoważą, czemu odpowiada powstanie pewnej różnicy potencjału między metalem elektrody i roztworem. Gdy  $p_r > p_o$ , kationy, przechodząc do roztworu, elektryzują go dodatnio, metal zaś elektryzuje się ujemnie, gdy  $p_r < p_o$ , kationy z roztworu osadzają się na metalu, elektryzując go dodatnio, roztwór zaś, tracąc nabój dodatni,



elektryzuje się ujemnie. To przechodzenie jonów z elektrody do roztworu lub z roztworu na elektrodę ustaje z chwilą, gdy działanie pola elektrycznego, wzbudzonego przez zmianę naboju roztworu i elektrody, zrównoważy działanie różnicy ciśnień  $p_r$  i  $p_o$ .

Rozumując w analogiczny sposób, jak przy wyprowadzaniu wzoru (12), znajdziemy, że związek między pracą, wykonaną przy przejściu jednego równoważnika gramowego kationów z metalu do roztworu lub z roztworu do metalu, i energią elektryczną, otrzymaną w obwodzie, wyraża się wzorem

$$\mathcal{E} \cdot F = - \frac{RT}{w} \cdot \lg \frac{p_r}{p_o}. \quad (16)$$

Zakładając, że ciśnienie  $p_o$  jest proporcjonalne do stężenia  $c$  kationów w roztworze, i wyrażając  $p_r$  przez analogiczną wielkość  $C$  (stężenie jonów w metalu), otrzymamy

$$\mathcal{E} \cdot F = - \frac{RT}{w} \lg \frac{C}{c}, \quad (16a)$$

skąd po podstawieniu wartości  $F$  i  $R$  oraz przejściu do logarytmów dziesiętnych mamy dla temperatury  $T = 291^\circ K$

$$\mathcal{E} = - \frac{0,058}{w} \log \frac{C}{c} \text{ woltów.}$$

Ogólnie biorąc  $C$  jest wielkością charakterystyczną dla danego metalu i danego rozpuszczalnika, w pewnych jednak przypadkach można ją zmienić, biorąc np. amalgamaty (roztwory rtęciowe) metalów o znacznej w porównaniu z rtęcią prężności roztwórczej (np. kadmu). Zanurzając do roztworu soli takiego metalu o koncentracji  $c$  elektrody pokryte amalgamatami o niejednakowym stężeniu  $C_1$  i  $C_2$ , na łączną siłę elektrobodźczą utworzonego w ten sposób ogniwa otrzymamy, zgodnie ze wzorem (16b)

$$\mathcal{E} = - \frac{0,058}{w} \left\{ \log \frac{C_1}{c} - \log \frac{C_2}{c} \right\} = - \frac{0,058}{w} \log \frac{C_1}{C_2}. \quad (16c)$$

Siła elektrobodźcza będzie zatem niezależna od stężenia roztworu.

Wzór (16c) był doświadczalnie potwierdzony przez Richardsa i Fabes'a (1909 r.).

W prostym przypadku ogniwa koncentracyjnego, w którym jednakowe elektrody zanurzone są w roztworach soli



danego metalu o niejednakowym stężeniu, ze wzorów (15) i (16b) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon = & -\frac{0,058}{w} \log \frac{C}{c_1} - \frac{I_k - I_a}{I_k + I_a} \cdot \frac{1}{w} \cdot 0,058 \cdot \log \frac{c_1}{c_2} + \\ & + \frac{0,058}{w} \log \frac{C}{c_2} = \frac{0,058}{w} \cdot \frac{2I_a}{I_k + I_a} \log \frac{c_1}{c_2}. \end{aligned} \quad (16d)$$

Zagadnienie staje się o wiele bardziej złożone, gdy mamy do czynienia z ogniwnem o elektrodach z różnych metali. Przyjmując, że każda z tych elektrod zanurzona jest w roztworze soli danego metalu i pomijając niewielką na ogół różnicę potencjału między roztworami, możemy siłę elektrobodźczą takiego ogniwa wyrazić wzorem

$$\varepsilon = -\frac{0,058}{w} \log \frac{C_1}{c_1} + \frac{0,058}{w} \log \frac{C_2}{c_2}, \quad (17)$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  oznaczają stężenia kationów elektrod (lub co na jedno wychodzi ich prężności roztwórcze),  $c_1$  i  $c_2$  — stężenia roztworów.

Stężenia roztworów można wyznaczyć zwykłymi metodami chemicznymi, stężenia zaś kationów w metalach mogą być obliczone jedynie z równania (17) przez pomiar siły elektrobodźczej danego ogniwa. Z równania tego jednak nie będziemy mogli wyznaczyć bezwzględnej wartości stężeń  $C_1$  i  $C_2$  i tym samym skoku potencjału przy przejściu od metalu do roztworu. Będziemy go mogli użyć jedynie do wyznaczenia wartości względnych, gdy nie zmieniając metalu jednej elektrody i, co za tym idzie, jednego z roztworów ogniwa, będziemy zmieniali metal drugiej elektrody i, oczywiście, roztwór, do którego jest zanurzony. Wtedy będziemy mogli wyznaczyć stosunek stężenia różnych metali w odniesieniu do niezmiennej elektrody, którą nazywamy elektrodą odniesienia.

Jeżeli założymy, że we wzorze (17) wyraz  $\log \frac{C}{c}$ , odnoszący się do wybranej przez nas elektrody odniesienia, równy jest zeru, a więc innymi słowy, że przy przejściu od metalu tej elektrody do roztworu, w którym jest zanurzona, nie ma skoku



potencjału, wtedy otrzymane w sposób wyżej wskazany względne wartości stężeń kationów w różnych metalach możemy uważać za wartości bezwzględne. Według Nernsta taki właśnie przypadek zachodzi, gdy elektrodą odniesienia jest elektroda platynowa, nasycona wodorem i umieszczona w roztworze o normalnym stężeniu jonów wodoru. Jest to tzw. normalna elektroda platynowa.

Bez względu jednak na to, czy przyjmiemy, czy też nie przyjmiemy założenia Nernsta, znając wartości  $\frac{C}{c}$  dla różnych metali, wyznaczone w odniesieniu do tej elektrody, możemy obliczyć siły elektrobodźcze ogni, utworzonych z tych metali i roztworów ich soli. Tak np. w znanym ogniwie Daniella, gdzie elektroda cynkowa zanurzona jest w wodnym roztworze cynku, elektroda zaś miedziana w wodnym roztworze siarczanu miedzi, cynk posiada prężność roztwórczą bardzo wielką; jony cynku przechodzą do roztworu, elektryzując go dodatnio; metal elektryzuje się ujemnie. Prężność roztwórcza miedzi jest bardzo mała: nawet przy stosunkowo znacznym rozcieńczeniu roztworu siarczanu miedzi kationy z roztworu przechodzą na metal elektrody, elektryzując ją dodatnio. Płytkę miedzi jest więc biegunem dodatnim ogniwa, cynkowa — ujemnym. W odniesieniu do normalnej elektrody platynowej skok potencjału między cynkiem i normalnym roztworem wodnym siarczanu cynku (tzw. potencjał normalny) wynosi  $-0,76$  V, skok zaś między miedzią i normalnym roztworem wodnym siarczanu miedzi  $+0,34$  V (obie liczby odnoszą się do temperatury  $18^{\circ}\text{C}$ ). Podstawiając te wartości do wzoru (17) otrzymujemy

$$\mathcal{E} = -\frac{0,058}{w} \log \frac{C_{zn}}{c_{zn}^{++}} + \frac{0,058}{w} \log \frac{C_{cu}}{C_{cu}^{++}} = 0,76 + 0,34 = 1,1 \text{ V,}$$

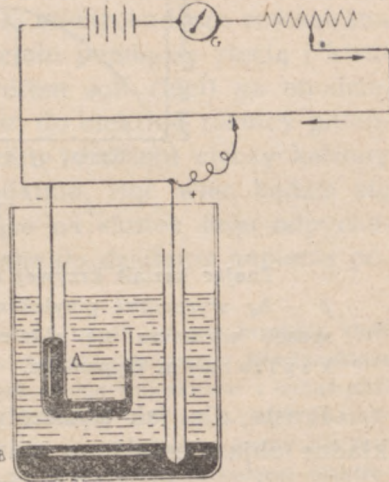
w niezłej zgodzie z doświadczeniem.

Ściśle biorąc wartość stosunku  $\frac{C}{c}$  dla danego metalu powinna zależeć jedynie od rodzaju metalu i od stężenia kationów w roztworze jego soli. W rzeczywistości jednak jest inaczej: wartość ta zależy również i od rodzaju rozpuszczalnika.



## 6. — ELEKTRODY RTĘCIOWE. — ELEKTROMETR KAPILARNY.

Użyjmy teraz zamiast elektrod z metalu stałego elektrod rtęciowych; niech jedną z nich  $B$  (rys. 239) będzie np. rtęć nalana na dno szerokiego naczynia, wypełnionego poza tym rozcieńczonym kwasem siarkowym, drugą — rtęć nalana do rurki w kształcie litery  $U$ , której ramię włoskowate zanurzone jest pod powierzchnią kwasu, ramię zaś szersze wystaje ponad poziom elektrolitu. W tej drugiej elektrodzie rtęć, rzecz prosta, nie będzie stała na tym samym poziomie w obu ramionach: w rurce włoskowatej poziom jej będzie niższy. Ta różnica poziomów  $h_0$ , spowodowana, jak wiemy, przez napięcie powierzchniowe rtęci (tom I, str. 263) i zależna, między innymi, od promienia rurki włoskowatej, nie ulegnie żadnej zmianie, gdy elektrody  $A$  i  $B$  połączymy metalicznie (np. drutem platynowym). Jeżeli jednak do obwodu włączymy dodatkową różnicę potencjałów tak, aby

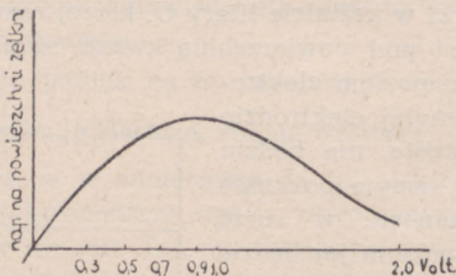


rys. 239

elektroda w rurce była katodą, elektroda zaś  $B$  — anodą utworzonego w ten sposób woltametry, wtedy stwierdzimy przesunięcie się poziomu rtęci w rurce włoskowatej. Zwiększaniu się różnicy potencjałów elektrod  $A$  i  $B$  będzie towarzyszyło początkowo obniżanie się poziomu rtęci w rurce, a więc zwiększaniu się działania napięcia powierzchniowego rtęci, następnie zaś, poczynając od pewnej wartości  $V_B - V_A = V_m$  podnoszenie się poziomu rtęci, a więc zmniejszanie się działania napięcia powierzchniowego. Odkładając na osi odciętych różnice potencjałów, na osi rzędnych różnice poziomów rtęci lub, co na jedno wychodzi, wyznaczone z danej różnicy poziomów działania napięcia powierzchniowego, otrzymamy krzywą kształtu zbliżonego do paraboli, lecz niesym-



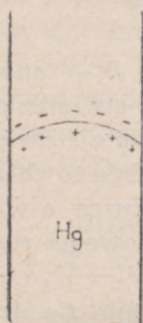
tryczną (rys. 240). W przypadku przez nas rozpatrywanym (rtęć w zetknięciu z rozcieńczonym kwasem siarkowym) maximum działania napięcia powierzchniowego odpowiada różnicy potencjałów na elektrodach, równej 0,95 V.



rys. 240

Znając kształt krzywej  $h = f(V)$  można z różnicy poziomów  $h - h_0$  wyznaczyć przyłożoną różnicę potencjałów. W ten właśnie sposób wyznacza się różnicę potencjałów w elektrometrze kapilarnym Lippmanna.

Proste, ale, jak wykazały badania późniejsze, niezbyt dokładne objaśnienie tego zjawiska dał Helmholtz, zakładając,



rys. 241

że jest ono spowodowane przez zmiany, jakim podlega podwójna warstwa elektryczna, tworząca się przy zetknięciu rtęci i elektrolitu. Warstwa ta wytworzona przez dodatnie naelektryzowanie się rtęci, ujemne — elektrolitu, zmniejsza działanie napięcia powierzchniowego rtęci, powodując elektrostatyczne odpychanie się elementów powierzchni cieczy, a co za tym idzie, zwiększanie się tej powierzchni (rys. 241). Włączenie do obwodu, zawierającego czynną siłę elektrobodźczą, powoduje przyływ do powierzchni rozdziału cieczy kationów, zubożających ujemny nabój elektrolitu i tym samym zubożających dodatni nabój rtęci. Ustala się nowy stan równowagi, któremu odpowiada inny, niż poprzednio, poziom rtęci w rurce włoskowatej.



Prąd wtedy przestaje płynąć, siła bowiem elektrobodźcza zewnętrzna zrównoważona jest przez siłę elektrobodźczą polaryzacji woltametry, powstającą na skutek zmiany stężeń roztworu siarczanu rtęciowego, tworzącego się przy zetknięciu rtęci z kwasem siarkowym. Zmiana stężenia będzie szczególnie znaczna przy katodzie włoskowatej, mającej bardzo małą powierzchnię zetknięcia z kwasem siarkowym.

Przy pewnej wartości różnicy potencjałów warstwa podwójna całkowicie znika i wtedy działanie napięcia powierzchniowego ma wartość największą; wtedy też różnica potencjałów między rtęcią w rurce włoskowatej i elektrolitem staje się równa zeru, przyłożona zaś siła elektrobodźcza zewnętrzna jest wtedy równa różnicy potencjału pomiędzy rtęcią i kwasem siarkowym (a raczej roztworem soli rtęci) na anodzie. Przy dalszym wzroście przyłożonej do elektrod różnicy potencjałów dopływające do powierzchni rozdziału cieczy kationy elektryzować będą elektrolit dodatnio, rtęć więc będzie się elektryzowała ujemnie; powstające na skutek tego odpychanie elektrostatyczne będzie zmniejszało działanie napięcia powierzchniowego.

Podstawowe jednak założenie tej teorii, że powierzchnie rtęci i elektrolitu tworzą jakby zbroje naelektryzowanego kondensatora o oznaczonej pojemności, nie jest, jak można wnioskować z badań późniejszych (zwłaszcza Gouy'a 1917 r. i Sterna 1920 r.), na ogół uzasadnione. Należy raczej przypuszczać, że w elektrolicie mamy do czynienia z nabojem, nie skupionym na powierzchni zetknięcia elektrolitu i rtęci, lecz rozsiانym w pewnej warstwie elektrolitu. Ten właśnie nabój o gęstości objętościowej, malejącej w miarę wzrostu odległości od powierzchni rozdziału cieczy, tworzy z nabojem rtęci warstwę podwójną nieodgraniczoną wyraźnie od pozostałej części elektrolitu. Tym samym upada przytoczony wyżej wniosek, że przy największej wartości działania napięcia powierzchniowego różnica potencjału rtęci i elektrolitu staje się równą zeru.

#### 7. — TERMODYNAMICZNA TEORIA OGNIW.

Przypuśćmy, że przez zamknięty obwód ogniwa przepływa przez czas  $t$  sek prąd o natężeniu  $i$  A; prądowi temu, jak o tym wyżej była mowa, towarzyszą w ogniwie reakcje chemiczne: pewne ciała wstępują w nowe związki, inne wydzielają się na elektrodach. Masy ciał biorących udział w tych reakcjach są, jak wiadomo, dla każdego z nich odpowiednio równe

$$m = m_e \cdot i \cdot t, \quad (a)$$



gdzie  $m_e$  jest elektrochemicznym równoważnikiem danego ciała. Jednocześnie w ogniwie wywiązuje się pewna ilość ciepła  $Q'$ , którą możemy wyznaczyć kalorymetrycznie.

Zakładając, że jedynym źródłem siły elektrobodźczej w obwodzie jest badane ogniwo galwaniczne i że ciepło, które wywiązałoby się w ogniwie o t w a r t y m na skutek reakcyj identycznych do tych, jakie zachodzą przy przepływie prądu, równe jest  $Q$ , możemy, jak na to pierwszy zwrócił uwagę W. Thomson (lord Kelvin) napisać (p. tom I, str. 346)

$$Q = Q' + \frac{1}{J} i^2 \cdot r \cdot t,$$

gdzie  $r$  oznacza opór zewnętrzny obwodu.

Wzór ten, którego słuszność udowodnili wielu pomiarami Favre i Silbermann, możemy uogólnić na przypadek, gdy energia elektryczna zużywa się nie tylko na wytworzenie ciepła Joule'a, lecz również  $i$  na pracę mechaniczną. Oznaczając całe ciepło, wywiązane w zewnętrznej części obwodu przez  $Q''$ , pracę mechaniczną przez  $W_z$ , otrzymujemy

$$Q = Q' + Q'' + \frac{1}{J} W_z. \quad (18)$$

Niech  $V_1$  i  $V_2$  będą potencjałami biegunów ogniwa. Mamy, jak wiadomo,

$$(V_1 - V_2) \cdot i \cdot t = JQ'' + W_z$$

lub uwzględniając, że

$$V_1 - V_2 = \mathcal{E} - iR,$$

gdzie  $R$  — opór ogniwa,

$$\mathcal{E} \cdot i \cdot t - i^2 R \cdot t = JQ'' + W_z.$$

Po podstawieniu do wzoru (18) otrzymujemy

$$Q = (Q' - \frac{1}{J} i^2 R \cdot t) + \frac{1}{J} \mathcal{E} \cdot i \cdot t. \quad (18a)$$

Ciepło reakcji możemy wyrazić nieco inaczej. Oznaczamy ciepło reakcji odniesione do 1 g ciała przez  $\lambda$ , wtedy ciepło  $Q$  będzie z uwagi na wzór (a) równe

$$Q = m_e \cdot i \cdot t \cdot \lambda = m_e \cdot \lambda \cdot i \cdot t = C \cdot i \cdot t. \quad (19)$$



Wielkość  $C$  nazwiemy ciepłem chemicznym ogniwa, jakkolwiek wielkość ta nie ma wymiaru ciepła i wyraża się w kal/kul.

Ze wzoru (18a) otrzymamy

$$C \cdot i \cdot t = (Q' - \frac{1}{J} i^2 R \cdot t) + \frac{1}{J} \mathcal{E} \cdot i \cdot t$$

lub

$$(C - \frac{1}{J} \mathcal{E}) i \cdot t = Q' - \frac{1}{J} i^2 R \cdot t. \quad (19a)$$

Wielkość  $\frac{1}{J} \mathcal{E}$  mającą ten sam wymiar, co  $C$ , nazywamy ciepłem woltaicznym ogniwa, różnicę zaś tych dwu wielkości — ciepłem wtórnym.

W ogniwie Daniella (patrz str. 446) ciepło  $Q'$ , wywiązywane w ogniwie podczas przepływu prądu jest prawie dokładnie równe ciepłu Joule'a, tak, że mamy

$$Q' \doteq \frac{1}{J} i^2 R \cdot t,$$

wobec czego ciepło wtórne tego ogniwa możemy uważać za prawie równe zeru i

$$Q = \frac{1}{J} \mathcal{E} \cdot i \cdot t.$$

W tym więc ogniwie energia elektryczna powstaje całkowicie kosztem ciepła reakcji, które również całkowicie przekształca się w energię elektryczną. Zmniejszając opór wewnętrzny  $R$  tak, aby stał się znikomo mały, zmniejszymy w tym samym stosunku ilość ciepła wywiązywanego w ogniwie podczas przepływu prądu, otrzymując w granicy

$$Q' = 0.$$

Tego typu ogniwo będzie przeto pracując zachowywało temperaturę stałą.

W znakomitej jednak większości przypadków ciepło wtórne ogniwa nie jest równe zeru. Przyjmując tak, jak poprzednio,



że opór ogniwa jest bardzo mały (lub że natężenie prądu, płynącego przez obwód, jest bardzo małe) znajdziemy, że gdy ciepło wtórne jest większe od zera (ciepło reakcji  $Q$  jest większe od energii elektrycznej prądu  $\frac{1}{J} \mathcal{E} \cdot i \cdot t$ ), ciepło  $Q'$  wywiązane w ogniwie jest większe od zera; podczas przepływu prądu ogniwo się ogrzewa, tak że chcąc, aby procesy, w nim zachodzące, były izotermiczne, musimy mu tę ilość ciepła odebrać. W niektórych ogniwach ciepło wtórne osiąga bardzo znaczne wartości, tak np. w ogniwach, w których elektrodami są cynk (elektroda ujemna) i platyna (elektroda dodatnia), elektrolitem zaś mieszanina kwasu siarkowego i chromowego, ciepło chemiczne jest mniej więcej dwa razy większe od ciepła voltaicznego ( $C = 0,610$  kal/kul,  $\frac{1}{J} \mathcal{E} = 0,310$  kal/kul, Favre), w tym więc ogniwie zaledwie połowa ciepła reakcji przechodzi w energię elektryczną prądu. O wiele rzadszy jest przypadek ujemnego ciepła wtórnego, gdy  $Q' < 0$ , a więc gdy ciepło reakcji jest mniejsze od energii prądu. Wtedy podczas przepływu prądu ogniwo będzie się oziębiało, tak że chcąc je utrzymać w stałej temperaturze, będziemy musieli dostarczać mu ciepła z zewnątrz. Taki przypadek zachodzi np. z ogniwem o elektrodach cynkowej i miedzianej i dwu elektrolitach  $KOH$  i  $CuSO_4$  (Jahn, 1895 r.), w którym  $C = 0,490$  kal/kul, a  $\frac{1}{J} \mathcal{E} = 0,520$  kal/kul.

Przypuśćmy teraz, że natężenie prądu w obwodzie jest dostatecznie małe, abyśmy mogli pomijać w naszych rachunkach ciepło Joule'a, wywiązane w obwodzie, i że reakcje, które zaszły w ogniwie podczas przepływu prądu, zajdą w kierunku odwrotnym, gdy przez ogniwo przepłynie ta sama ilość elektryczności w kierunku przeciwnym do kierunku siły elektrobodźczej ogniwa, tak że ogniwo w ten sposób wróci do swego stanu początkowego. W tym przypadku przemiany zachodzące w obwodzie możemy uważać za odwracalne i, co za tym idzie, stosować do nich twierdzenie Carnota (p. tom I, str. 390).

Temu warunkowi odwracalności nie czynią zadość te ogniwa, w których zachodzi dyfuzja.



Niech przez obwód takiego ogniwa odwracalnego o sile elektrobodźczej  $\mathcal{E}$  i temperaturze  $T$  przepływa 1 kulomb elektryczności; energia wywiązana w całym obwodzie podczas przepływu tego naboju, a którą zamienić można w pracę mechaniczną, wynosi  $\mathcal{E} \cdot 1$  dżulów. Jednocześnie w ogniwie na skutek zachodzących w nim reakcyj wywiązuje się ciepło  $C \cdot 1$  kalorii oraz zostaje pobrane z zewnątrz tyle ciepła, aby ogniwo zachowało stałą temperaturę, a więc aby zachodzące w nim przemiany były izotermiczne. Oznaczając to ciepło przez  $Q_1$  będziemy mieli

$$JQ_1 + JC \cdot 1 = \mathcal{E} \cdot 1 \quad \text{lub} \quad JQ_1 = (\mathcal{E} - JC) \cdot 1. \quad (a)$$

Wyłączmy następnie ogniwo z obwodu i ochłódźmy je do temperatury  $T - dT$ . Niech w tej temperaturze, w której siła elektrobodźcza wynosi  $\mathcal{E} - d\mathcal{E}$  woltów, przejdzie przez ogniwo, znów włączone do obwodu, 1 kulomb elektryczności w kierunku przeciwnym do kierunku siły elektrobodźczej ogniwa. Aby przepływ tego naboju był odwracalny, musimy do obwodu ogniwa włączyć dodatkowe źródło prądu, które by na biegunach ogniwa wytwarzało różnicę potencjałów  $V_1 - V_2$ , dowolnie małą różniącą się od siły elektrobodźczej ogniwa, lecz skierowaną przeciwnie. Praca tego źródła będzie

$$(V_1 - V_2) \cdot 1 = (\mathcal{E} - d\mathcal{E}) \cdot 1.$$

Jednocześnie ogniwo na skutek zachodzących w nim reakcyj zużyje  $C \cdot 1$  kalorii ciepła oraz odda na zewnątrz tyle ciepła, aby i tym razem przemiany w ogniwie były izotermiczne. Oznaczając ciepło to przez  $Q_2$  otrzymamy

$$-JQ_2 - JC \cdot 1 = -(\mathcal{E} - d\mathcal{E}) \cdot 1$$

lub

$$JQ_2 = (\mathcal{E} - d\mathcal{E} - JC) \cdot 1. \quad (b)$$

Następnie ogniwo po wyłączeniu z obwodu ogrzewamy do tej samej, co poprzednio, temperatury  $T$ , wobec czego wraca ono do stanu początkowego, przy czym zachodzące w nim przemiany odwracalne stanowiąc będą zamknięty cykl przemian, dowolnie małą różniący się od cyklu Carnota, ciepło bowiem oddane przez ogniwo podczas ochładzania i pobrane podczas



ogrzewania o  $dT^0$  jest bardzo małe w porównaniu z ciepłem oddanym i pobranym w przemianach izotermicznych (por. tom I, str. 419 i nast.). Możemy więc napisać

$$\frac{10_1}{JQ_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{dT}{T}$$

i podstawiając wartości  $Q_1$  i  $Q_2$  ze wzorów (a) i (b)

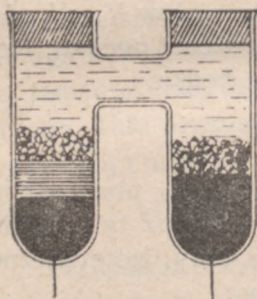
$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E} - JC} = \frac{dT}{T},$$

skąd

$$\mathcal{E} = JC + T \frac{d\mathcal{E}}{dT}. \quad (20)$$

Gdy  $JC$  jest większe od  $\mathcal{E}$  lub innymi słowy, gdy ciepło wtórne ogniwa jest większe od zera, a więc gdy ogniwo ogrzewa się podczas przepływu prądu,  $\frac{d\mathcal{E}}{dT}$  jest ujemne: siła elektrobodźcza maleje ze wzrostem temperatury. Tak zmienia się

np. w pewnych granicach temperatur siła elektrobodźcza ogniwa Westona, nazywanego często ogniwem normalnym i używanego zazwyczaj w pomiarach metodą kompensacji (np. w ten sposób, jak w przypadku str. 381) nieznanymi sił elektrobodźczych.



rys. 242

W ogniwie tym dodatnią elektrodą jest czysta rtęć, ujemną — amalgamat kadmu (rys. 242). Nad rtęcią umieszczona jest mieszanina  $HgSO_4$  i kryształów  $CdSO_4$ . Resztę naczynia wypełnia nasycony roztwór  $CdSO_4$ .

Siła elektrobodźcza tego ogniwa wynosi

w temperaturze:	0°	10°	15°	25°
	1,0187	1,0186	1,0183	1,0184 woltów.

Siła ta według Vigoureux'a i Wattsa (1933 r.) osiąga maximum w temperaturze 3°C.

Gdy ciepło wtórne równe jest zeru, a więc, gdy  $\mathcal{E} = JC$ , siła elektrobodźcza ogniwa nie zależy od temperatury.



Temu warunkowi czyni, jak wiemy, zadość ogniwo Daniella. Przejściu I kulomba przez to ogniwo towarzyszy osadzenie się  $\frac{63}{2 \cdot 96500}$  g miedzi (bierzemy tu liczby przybliżone) i przejście do elektrolitu  $\frac{65}{2 \cdot 96500}$  g cynku, wobec czego rozkłada się  $\frac{1}{2} \frac{159}{96500}$  g siarczanu miedzi i tworzy się  $\frac{1}{2} \frac{161}{96500}$  g siarczanu cynku. Pierwsza z tych reakcyj pochłania  $\frac{55960}{96500}$  kal, druga wywiązuje  $\frac{106090}{96500}$  kal, wobec czego ciepło reakcji jest równe

$$C \cdot 1 = (106090 - 55960) : 96500 = 0,2595 \text{ kal}$$

skąd

$$JC = 0,2595 \cdot 4,18 = 1,087 \text{ dż.}$$

Siła elektrobodźcza ogniwa Daniella w temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$  wynosi 1,096 V. Mamy zatem

$$1,096 \cdot 1 = 1,087 + 273 \frac{d\mathcal{E}}{dT},$$

skąd

$$\frac{d\mathcal{E}}{dT} = \frac{0,009}{273} = + 0,0000033 \text{ V/stop.}$$

Przy wzroście więc temperatury o  $10^{\circ}$  siła elektrobodźcza tego ogniwa wzrasta o 0,000033 V. Zmiana więc siły elektrobodźczej jest co do wartości bezwzględnej trzy razy mniejsza, niż w ogniwie Westona; nie popełniamy zatem znaczniejszego błędu, przyjmując, że jest ona w granicach zwykłych wahań temperatury równa zero.

Wreszcie, gdy ciepło wtórne jest ujemne, gdy przeto  $JC < \mathcal{E}$ ,  $\frac{d\mathcal{E}}{dT}$  jest dodatnie, siła elektrobodźcza wzrasta z temperaturą.

Do tych samych wniosków moglibyśmy dojść stosując zasadę Le Chateliera i Brauna (str. 333). Gdy przepływ prądu powoduje zmianę temperatury ogniwa, siła elektrobodźcza ogniwa się zmienia i tym samym zmienia się natężenie prądu i związana z nim zmiana temperatury: w przypadku  $JC > \mathcal{E}$ , to obniżenie siły elektrobodźczej towarzyszy wzrostowi temperatury ogniwa, w przypadku zaś  $JC < \mathcal{E}$  — obniżeniu (S. Czapski, 1884 r.).

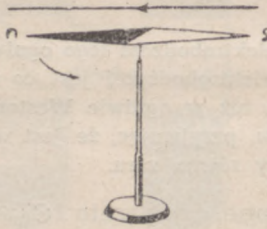


## ROZDZIAŁ VII

### POLE MAGNETYCZNE PRĄDU

#### 1. — DZIAŁANIE PRĄDU NA MAGNES I MAGNESU NA PRZEWODNIK PRĄDU. — ZAŁOŻENIE AMPÈRE'A.

Gdy do igły magnetycznej, mogącej się obracać dookoła osi pionowej, przybliżymy liniowy przewodnik prądu tak, aby kierunek prądu był równoległy do osi magnetycznej igły, igła odchyli się od swego położenia równowagi, przy czym zmiana kierunku prądu lub umieszczenie przewodnika nie nad lecz pod igłą, spowoduje zmianę kierunku odchylenia (Oersted, 1820 r.).



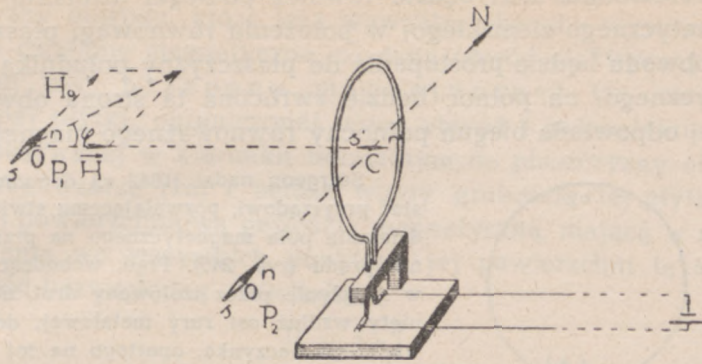
Rys. 243

Związek między kierunkiem odchylenia igły i kierunkiem prądu wyraża następująca reguła: biegun północny igły odchyli się od prawej ręki ku lewej człowieczka, płynącego z prądem i zwróconego twarzą do bieguna północnego igły (reguła Ampère'a 1820 r.).

Przy niezmiennej odległości przewodnika od igły kąt odchylenia wzrasta ze wzrostem natężenia prądu, przy niezmiennym zaś natężeniu — przy zbliżaniu przewodnika do igły.

Zastąpmy drut prostoliniowy drutem zwiniętym w koło (rys. 243a) i ustawmy go tak, aby, płaszczyzna obwodu była płaszczyzną południka magnetycznego. Działanie tego obwodu na igłę magnetyczną będzie tym razem zależne, przy niezmiennym natężeniu prądu i przy niezmiennej odległości środka igły  $O$  od środka obwodu  $C$ , od kąta, jaki prosta  $OC$ , łącząca środek magnesu ze środkiem obwodu tworzyć będzie z normalną do płaszczyzny obwodu. Działanie będzie najwięk-

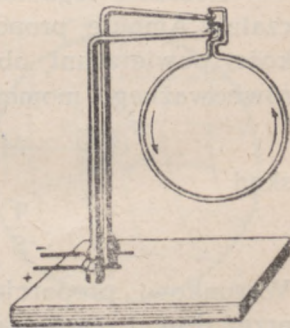




Rys. 243a

sze wtedy, gdy kąt ten będzie równy zero (położenie  $P_1$  na rysunku), najmniejsze zaś, gdy oś igły będzie leżała na prostej  $OC$ . Mierząc tg-y kątów odchylenia igły od położenia równowagi, stwierdzimy, że, o ile tylko odległość  $OC = r$  jest dostatecznie wielka, styczna kąta odchylenia igły w położeniu  $P_1$  jest mniej więcej dwa razy większa od stycznej kąta odchylenia w położeniu  $P_2$ . Prąd zatem wywiera na igłę działanie takie, jak magnes o osi prostopadłej do płaszczyzny obwodu, umieszczony w środku obwodu  $C$  (por. rozdz. IV ust. 2). Biegun dodatni tego magnesu znajduje się zgodnie z regułą Ampère'a z tej strony płaszczyzny obwodu, na którą patrząc, widzimy prąd płynący w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara.

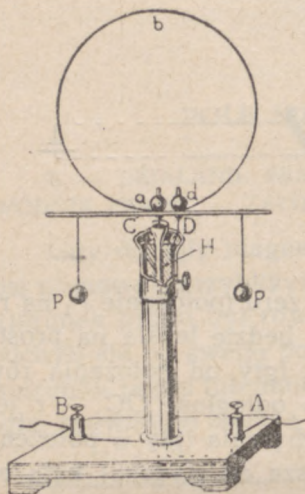
Istotnie, zawieśmy tego rodzaju przewodnik tak, aby się mógł obracać dookoła osi pionowej (rys. 244), i przybliżajmy do niego — magnesowaną sztabę. Przewodnik będzie odpychany wtedy, gdy biegun północny magnesu będziemy przybliżali do tej strony płaszczyzny obwodu, po której leżałby biegun dodatni równoważnego magnesu, przyciągany zaś przy zbliżaniu magnesu do strony przeciwnej.



Rys. 244



Przewodnik taki będzie również podlegał działaniu pola magnetycznego ziemskiego; w położeniu równowagi płaszczyzna obwodu będzie prostopadła do płaszczyzny południka magnetycznego; na północ będzie zwrócona ta strona obwodu, której odpowiada biegun północny równoważnego magnesu.



Rys. 245

Sturgeon nadał (1842 r.) dogodną postać przyrządowi, pozwalającemu stwierdzić działanie pola magnetycznego na przewodnik prądu (rys. 245). Prąd, wchodzący np. w A, płynie przez izolowany drut, naciągnięty wzdłuż osi rury metalowej, do niewielkiego naczynka, opartego na tej rurze i napełnionego rtęcią, i stąd przez ostrze C do zwiniętego drutu ab, dochodząc do ostrza D, zanurzonego w zbiorniku z rtęcią, połączoną metalicznie ze słupem metalowym H i zaciskiem B. Obciążenie przewodnika ciężarami PP' przenosząc środek ciężkości układu poniżej ostrza C zapewnia układowi równowagę stałą.

Zastępując obwód kołowy płaskimi obwodami innych kształtów np. w kształcie prostokąta, trójkąta itp. otrzymujemy wyniki analogiczne. We wszystkich tych przypadkach działanie magnetyczne obwodu elektrycznego może być przyrównane do działania magnesu stałego o odpowiednio dobranym co do wartości i kierunku momencie magnetycznym.

Wielkość tego działania jest, jak to stwierdził doświadczalnie Ampère, proporcjonalna do natężenia prądu i do wielkości powierzchni, objętej przez przewodnik, tak że wartość równoważnego momentu magnetycznego wyraża się wzorem

$$M = q \cdot l = C \cdot i \cdot S, \quad (1)$$

skąd

$$\frac{q}{S} \cdot l = \sigma \cdot l = C \cdot i. \quad (1a)$$

Warunkowi proporcjonalności między powierzchnią, objętą przez drut, i równoważnym momentem magnetycznym można uczynić zadość, zakładając, że magnes, który by w całej prze-



strzeni otaczającej przewodnik, z wyjątkiem tych punktów płaszczyzny obwodu, które leżą wewnątrz obwodu, wywierał to samo działanie magnetyczne, co dany obwód elektryczny, ma kształt tzw. przepony magnetycznej tzn. cienkiej płaskiej płytki, ograniczonej przez obwód i jednostajnie namagnesowanej w kierunku normalnym do płaszczyzny obwodu. We wzorze (1a)  $l$  będzie wtedy grubością tej płytki,  $\sigma$  — jej powierzchniową gęstością magnetyczną, mającą w myśl założenia we wszystkich punktach jej powierzchni tę samą wartość bezwzględną. Wielkość

$$H = \sigma \cdot l \quad (1b)$$

nosi nazwę mocy przepony magnetycznej lub momentu magnetycznego jednostki powierzchni.

Doświadczenie jednak wskazuje, że działania magnetyczne prądu elektrycznego nie zależą od rodzaju środowiska, w którym obwód się znajduje. Chcąc więc założenie o równoważności obwodu i przepony magnetycznej stosować do wszelkiego rodzaju środowisk, musimy przyjąć, że moment magnetyczny  $M$  równoważnej przepony jest proporcjonalny do zdolności magnetycznej  $\mu$  środowiska, tak że wzór (1) przybierze postać następującą

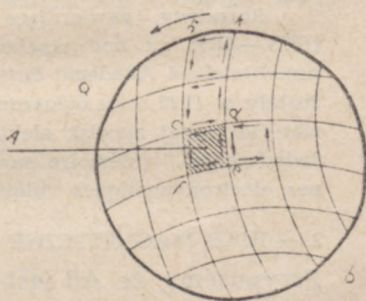
$$M = q \cdot l = k \cdot \mu \cdot i \cdot S, \quad (1c)$$

skąd

$$H = \sigma \cdot l = k \cdot \mu \cdot i, \quad (1d)$$

gdzie  $k$  jest czynnikiem niezależnym od rodzaju środowiska.

Warunek, aby równoważna przepona była płaska, nie jest jednak konieczny. Istotnie założymy, że powierzchnia przepony, ograniczona przez obwód (rys. 246) posiada kształt dowolny, np. że jest w różne strony powyginana. Podzielmy ją, idąc drogą rozumowania, wskazaną przez Ampère'a, dwoma układami przecinających się równoległych linii krzywych na ele-



Rys. 246



menty  $dS$  dostatecznie małe, abyśmy mogli uważać je za płaskie. Działania magnetyczne każdego z takich elementów przepony w dowolnym punkcie  $A$ , leżącym poza przeponą, będą w myśl założenia równe działaniom, jakie by w tym samym punkcie wywierał elementarny obwód  $cdef$ , w którym prąd płynąłby w tym samym kierunku, co prąd w obwodzie  $ab$ . Ponieważ jednak przez każdą gałąź dwu sąsiednich oczek płyną prądy o tym samym natężeniu, lecz w kierunkach przeciwnych, tak że ich działania magnetyczne wzajemnie się znoszą, suma geometryczna wszystkich tych działań, równoważnych sumie działań elementów przepony, sprowadza się do działań sumy elementów  $hk$  obwodu  $ab$ , przez które prąd przepływa tylko w jednym kierunku. Działanie zatem przepony jest i w tym przypadku równoważne działaniu prądu, płynącego przez obwód, ograniczający daną przeponę. Jest rzeczą oczywistą, że wniosek ten pozostaje w mocy przy dowolnym kształcie obwodu, a więc i wtedy, gdy elementy przewodnika nie leżą w jednej płaszczyźnie, innymi słowy, gdy przewodnik liniowy tworzy krzywą skośną.

Założenie Ampère'a możemy przeto sformułować w sposób następujący: działanie magnetyczne prądu, płynącego przez dowolny przewodnik liniowy, jest w punktach przestrzeni, leżących poza przewodnikiem, równoważne działaniu przepony magnetycznej, ograniczonej przez dany przewodnik i o tak dobranym kształcie, aby punkt przestrzeni, w którym wyznaczamy działanie magnetyczne prądu, nie leżał ani na powierzchni ani wewnątrz przepony. Moc jej wyraża wzór (Id).

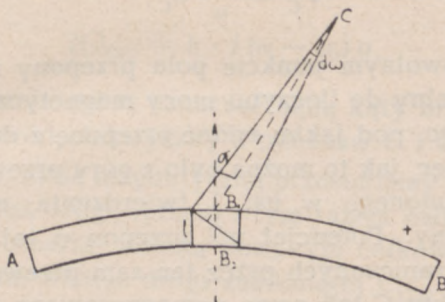
Rozprawy, zawierające wyniki epokowych badań Ampère'a (1775—1836 r.) nad wzajemnym działaniem prądów i magnesów przedstawiane Akademii Paryskiej w latach 1820, 1822, 1823 i 1825 r., zostały w 1826 roku ogłoszone razem w pracy pt.: „Rozprawa o teorii matematycznej zjawisk elektrodynamicznych, opartej jedynie na doświadczeniu...” (Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience...).

## 2. — POLE MAGNETYCZNE PRĄDU.

Przypuśćmy, że  $AB$  jest przeponą magnetyczną o gęstości powierzchniowej  $\sigma$  i grubości  $l$ . Pole magnetyczne, wzbudzone przez tę przeponę, możemy uważać za sumę pól magnesów



elementarnych  $B_1B_2$  (rys. 247), jakie otrzymamy dzieląc powierzchnię przepony na elementy i prowadząc przez wszystkie punkty obwodu każdego z tych elementów normalne do po-



Rys. 247

wierzchni przepony. Potencjał w punkcie C pola pojedynczego magnesu elementarnego jest, zgodnie ze wzorem (9a) ust. 2, rozdz. IV, równy

$$dV_c = \frac{\sigma \cdot l \cdot dS \cdot \cos \alpha}{\mu \cdot r^2}, \quad (\text{a})$$

gdzie  $\alpha$  oznacza kąt między prostą, łączącą środek magnesu z danym punktem C, a osią  $B_1B_2$  magnesu;  $\sigma \cdot dS \cdot l$  jest momentem tego magnesu.

Oznaczmy przez  $d\omega$  kąt bryłowy, pod jakim widzielibyśmy z punktu C element powierzchni  $dS$ ; kąt ten wytnie w kuli, opisaney z punktu C promieniem  $r$ , powierzchnię  $r^2 d\omega$ , która z powierzchnią elementu tworzy kąt  $\alpha$ , mamy więc

$$r^2 d\omega = dS \cdot \cos \alpha.$$

Po podstawieniu do wzoru (a)

$$dV_c = \frac{\sigma \cdot l \cdot r^2 \cdot d\omega}{\mu \cdot r^2} = \frac{\sigma \cdot l \cdot d\omega}{\mu},$$

skąd po uwzględnieniu, że

$$\sigma \cdot l = \Pi,$$

będziemy mieli

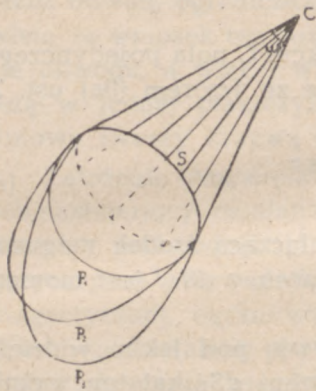
$$dV_c = \frac{\Pi}{\mu} d\omega.$$



Na potencjał zatem pola przepony magnetycznej, równy sumie potencjałów elementarnych, otrzymamy

$$V_C = \frac{\Pi}{\mu} \omega_C. \quad (2)$$

Potencjał w dowolnym punkcie pola przepony magnetycznej jest proporcjonalny do iloczynu mocy magnetycznej przepony i kąta bryłowego, pod jakim widać przeponę z danego punktu pola; jest on więc, jak to można było z góry przewidzieć na zasadzie udowodnionego w ust. 1 twierdzenia, niezależny od kształtu przepony. Potencjał pól przepon o tej samej mocy  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , ograniczonych przez ten sam przewodnik i zwróconych do punktu  $C$  tak samo namagnesowaną powierzchnią,



Rys. 248

ma w danym punkcie  $C$  wartość tę samą: dodatnią, gdy przepona zwrócona jest do punktu  $C$  powierzchnią namagnesowaną dodatnio (wtedy bowiem, bez względu na kształt przepony, dla większości magnesów elementarnych kąt  $\alpha$  między prostą  $r$  i dodatnim, zgodnym z kierunkiem osi magnetycznej magnesu, kierunkiem normalnej jest mniejszy od  $90^\circ$ ), ujemną, gdy przepona zwrócona jest ku  $C$  powierzchnią namagnesowaną ujemnie.

Praca zatem, wykonana przez siły pola przy przeniesieniu dodatniej masy magnetycznej  $q$  z punktu  $C$  do punktu  $C_1$ , jest równa

$$W_{CC_1} = \frac{\Pi}{\mu} (\omega - \omega_1) \cdot q, \quad (3)$$

gdzie  $\omega_1$  jest kątem bryłowym, pod którym widać przeponę z punktu  $C_1$ .

Wartość tej pracy nie ulegnie zmianie, gdy przeponę zastąpimy równoważnym jej obwodem, o ile tylko zarówno punkty  $C$  i  $C_1$ , jak i droga, wzdłuż której przesuwamy masę ma-



gnetyczną, leżą całkowicie w obszarze, w którym obowiązuje założenie równoważności Ampère'a. Podstawiając

$$\Pi = k \cdot \mu \cdot i,$$

otrzymamy

$$l\mathcal{O}_{CC_1} = k \cdot i (\omega - \omega_1) q, \quad (3a)$$

gdzie analogicznie  $\omega$  i  $\omega_1$  oznaczać będą kąty bryłowe, pod jakimi widać obwód elektryczny z punktów  $C$  i  $C_1$ .

Jeżeli więc masę magnetyczną przesuniemy z powrotem do punktu  $C$  wzdłuż drogi, leżącej i tym razem całkowicie w rozpatrywanym obszarze, zresztą poza tym całkowicie dowolnej, praca wykonana wzdłuż drogi zamkniętej  $C_{C,C}$  będzie zarówno w polu magnetycznym prądu, jak i w polu magnetycznym przepony, miała wartość zero. Oznaczając przez  $H_S$  składową, natężenia pola magnetycznego, styczną do kierunku drogi, w obu przypadkach otrzymamy

$$C_{CC,C} = q \oint H_S dS = 0,$$

gdzie, jak o tym już była mowa, znak  $\oint$  oznacza całkowanie wzdłuż drogi zamkniętej. Stąd

$$\oint H_S dS = 0. \quad (4)$$

W tym więc obszarze pole magnetyczne prądu jest podobnie, jak pole magnetyczne magnesu, polem niewirowym (p. rozdz. IV, ust. 2).

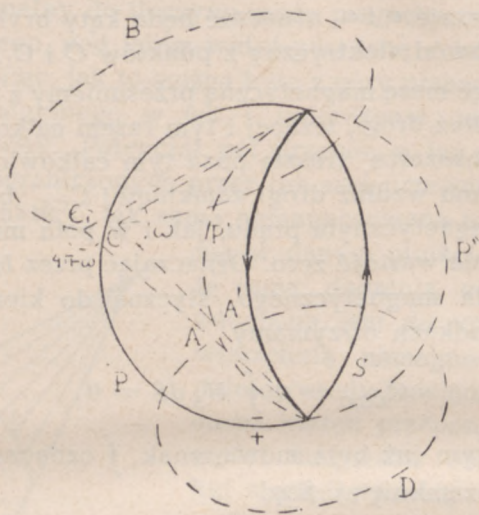
Przypuśćmy teraz, że punkty  $C$  i  $C_1$  leżą w bezpośrednim sąsiedztwie przepony po dwu przeciwnych jej stronach (rys. 249). Jeżeli  $\omega$  jest kątem bryłowym, pod jakim z punktu  $C$  widać przepoń, zwróconą ku temu punktowi stroną ujemną, kąt, pod jakim z punktu  $C_1$  widać dodatnią jej stronę, jest, wobec bardzo małej odległości punktów  $C$  i  $C_1$  równy  $4\pi - \omega$ . Praca zatem sił pola przy przesunięciu masy magnetycznej  $q$  z punktu  $C_1$  do  $C$  jest niezależnie od drogi, wzdłuż której masa się przesuwa, równa

$$l\mathcal{O}_{C_1C} = (V_{C_1} - V_C) q = \frac{\Pi}{\mu} (4\pi - \omega + \omega) q = \frac{4\pi\Pi}{\mu} q \quad (5)$$



Przy przesunięciu z powrotem masy magnetycznej do punktu  $C_1$  praca, wykonana przeciwko siłom pola, będzie co do wartości bezwzględnej równa pracy  $W_{C,C_1}$ , wobec czego i tym razem będziemy mieli

$$W_{C_1,CC_1} = 0.$$



rys. 249

Wniosek ten nie ulegnie żadnej zmianie, gdy przypuścimy, że w przeponie  $P$  został wycięty kanał, wzdłuż którego możemy przesunąć masę magnetyczną  $q$  z  $C$  do  $C_1$ . Natężenie bowiem pola w tym kanale będzie równe  $\frac{4\pi\sigma}{\mu}$ , jak to możemy przyjąć na podstawie analogii działań magnetycznych mas rozłożonych na powierzchniach przepony i działań elektrycznych nabożów o gęstości  $\sigma$ , rozłożonych na dwu równoległych powierzchniach przewodnika (p. rozdz. III, ust. 7, wzór 26). Praca przeciwko siłom pola wzdłuż drogi  $l$ , równej grubości przepony, będzie równa

$$W_{CC_1} = -q \cdot H \cdot l = -\frac{4\pi\sigma \cdot l}{\mu} q = -\frac{4\pi\Pi}{\mu} q.$$

Suma zatem prac

$$W_{C,C_1} + W_{CC_1} = 0.$$



Inaczej jednak będzie, gdy przeponę  $P$  zastąpimy przez równoważny obwód elektryczny. Wtedy masa magnetyczna będzie mogła być bezpośrednio przesunięta z  $C$  do  $C_1$  wzdłuż bardzo krótkiej drogi  $CC_1$ . Siły magnetyczne, działające na tym odcinku, będą miały wartość skończoną, równoważny bowiem obwód elektryczny możemy równie dobrze zastąpić przez przeponę  $P'$ , leżącą poza punktami  $C$  i  $C_1$ , o tej samej skończonej mocy, co przepona  $P$ , a więc i o skończonej wartości natężenia w rozpatrywanych punktach. Przy nieograniczonym zmniejszaniu odległości punktów  $C$  i  $C_1$  praca wykonana przy przesunięciu z  $C$  do  $C_1$  będzie nieograniczenie się zmniejszała. Będziemy więc mieli

$$\lim_{C, C_1 \rightarrow 0} W_{C, CC_1} = W_{C, C} + \lim_{C, C_1 \rightarrow 0} W_{CC_1} = W_{C, C} \quad (b)$$

Podstawiając

$$H = k \cdot p \cdot i,$$

znajdziemy ze wzoru (5)

$$W_{C, CC_1} = k \cdot 4\pi i \cdot q. \quad (6)$$

Praca ta, wykonana wzdłuż drogi, poddanej jednemu tylko warunkowi, aby raz jeden obejmowała obwód elektryczny, jest również niezależna od kształtu drogi. Z jakąkolwiek bowiem drogą tego rodzaju mielibyśmy do czynienia, zawsze moglibyśmy wybrać na niej takie dwa blisko siebie położone punkty (np.  $A'$  i  $A$  na drodze  $AA'D$ , rys. 249), o których moglibyśmy założyć, że leżą po dwu przeciwnych stronach przepony  $P'$ , równoważnej danemu obwodowi i powtórzyć bez zmiany użyte wyżej rozumowanie, które nas doprowadziło do wzoru (6). Na tego rodzaju drogach zamkniętych będziemy więc mieli zawsze

$$W_{C, CC_1} = q \oint H_s \cdot ds = k \cdot 4\pi i \cdot q,$$

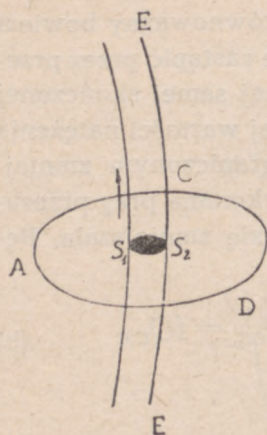
skąd

$$\oint H_s ds = k \cdot 4\pi i. \quad (7)$$



Niech  $ACD$  (rys. 250) będzie powierzchnią, ograniczoną przez tor przesuwanej masy magnetycznej. W powierzchni tej przewodnik  $EE$  wycina pole  $S_1S_2$ . Możemy napisać, że

$$i = \int j_n \cdot dS, \quad (c)$$



rys. 250

gdzie  $dS$  jest elementem pola  $S_1S_2$ ,  $j_n$  składową, normalną do  $dS$ , gęstości prądu, przepływającego przez  $dS$  (p. rozdz. V, ust. I). Wartość natężenia prądu, jaką otrzymamy obliczając całkę (c), pozostanie bez zmiany, gdy całkowaniem obejmiemy elementy nie tylko pola  $S_1S_2$ , lecz całej powierzchni  $ACD$ ; gęstość bowiem prądu poza polem  $S_1S_2$  równa jest zero, zerem więc będzie iloczyn  $j_n dS$  gęstości prądu przez element powierzchni, leżący poza przewodnikiem, jak również i suma tych iloczynów.

We wzorze zatem, który otrzymamy podstawiając (c) do wzoru (7)

$$\oint H_s ds = k \cdot 4\pi \int j_n \cdot dS, \quad (7a)$$

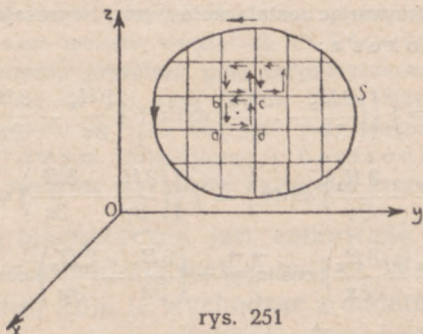
możemy przez  $dS$  oznaczać elementy powierzchni ograniczonej przez tor  $ACD$ , przez  $ds$  — elementy tego toru.

W tej postaci wzór (7a) obowiązywać będzie w całym obszarze pola magnetycznego prądu. Gdy tor przesunięcia nie obejmuje wcale przewodnika prądu, iloczyny  $j_n dS$  są równe zero i wzór (7a) przechodzi we wzór (4).

Przyjmijmy dla uproszczenia, że tor przesunięcia stanowi krzywą płaską, leżącą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny  $ZOY$  (rys. 251). Wartość całki  $\int H_s ds$ , wyrażającej pracę wektora  $H$  wzdłuż krzywej  $s$  (całka liniowa wektora  $H$  wzdłuż krzywej  $s$ ) będzie dodatnia, gdy kierunek przesunięcia będzie tworzył z kierunkiem wektora  $H$  kąt mniejszy od  $90^\circ$ , gdy więc przy kierunku prądu, tworzącym z dodatnim kierunkiem osi  $x$ -ów kąt mniejszy od  $90^\circ$ , będzie taki, jak na rys. 251. Podzielimy pole,



ograniczone przez krzywą  $s$ , dwoma układami prostych, równoległych odpowiednio do osi  $O_z$  i  $O_y$ , na elementarne czworoboki  $a b c d$ . Praca wektora  $\vec{H}$  wzdłuż boków wszystkich tych czworoboków w kierunku zgodnym z kierunkiem przesunięcia wzdłuż krzywej  $s$ , jest równa pracy wykonanej wzdłuż krzywej  $s$ ; w sąsiednich bowiem czworobokach przesunięcia wzdłuż rozgraniczających te elementy prostych mają kierunki przeciwne, w sumie zatem dadzą zero (por. ust. 1). Jeżeli więc wyznaczymy pracę wektora  $\vec{H}$  wzdłuż boków elementarnych czworoboków  $abcd$ , suma tych prac da nam pracę wektora wzdłuż krzywej  $s$ .



rys. 251

Oznaczmy długości boków czworoboku  $abcd$  odpowiednio przez  $dz$  i  $dy$ , wartość zaś składowych wektora  $\vec{H}$  w środkowym punkcie elementu przez  $H_y$  i  $H_z$  (składowa  $H_x$  przy przesunięciu w płaszczyźnie  $ZOY$  nie wykonuje żadnej pracy). Przy przesunięciu wzdłuż boków  $ad$  i  $cb$  pracę wykonuje jedynie składowa  $H_y$ , której wartość w punktach, leżących na tych bokach, jest odpowiednio równa

$$H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \quad \text{i} \quad H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2}.$$

Suma tych dwu prac wyniesie

$$\begin{aligned} & \left( H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dy - \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dy = \\ & = - \frac{\partial H_y}{\partial z} dy dz = - \frac{\partial H_y}{\partial z} dS. \end{aligned}$$

gdzie  $dS$  jest polem elementu  $abcd$ .

Podobnie suma prac przy przesunięciu wzdłuż boków  $ba$  i  $dc$  jest równa

$$\left( H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dz - \left( H_z - \frac{\partial H_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dz = \frac{\partial H_z}{\partial y} dS.$$



Praca więc przy przesunięciu wzdłuż wszystkich boków elementu

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) dS,$$

skąd, rozciągając sumowanie na wszystkie elementy, otrzymamy

$$\oint H_S ds = \int \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) dS.$$

Wzór ten można uogólnić na dowolnie położoną i dowolnego kształtu krzywą  $s$ , otrzymując ostatecznie wzór, wyrażający tzw. twierdzenie Stokes'a:

$$\begin{aligned} \oint H_S ds &= \int \left\{ \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) dzdx + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dxdy \right\} = \int \left\{ \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cos \vec{(n, x)} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cos \vec{(n, y)} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cos \vec{(n, z)} \right\} dS \quad (8) \end{aligned}$$

Wprowadźmy wektor  $\vec{A}$  o składowych w kierunkach osi współrzędnych równych odpowiednio

$$A_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad A_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad A_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}.$$

Wzór (8) przybierze wtedy postać następującą

$$\begin{aligned} \oint H_S ds &= \int \left\{ A_x \cos \vec{(n, x)} + A_y \cos \vec{(n, y)} + A_z \cos \vec{(n, z)} \right\} dS = \\ &= \int A_n dS. \quad (8a) \end{aligned}$$

Całka  $\int A_n \cdot dS$  wyraża strumień wektora  $\vec{A}$  przez powierzchnię  $S$ , ograniczoną krzywą  $s$ , wektor zaś  $\vec{A}$  jest wirem wektora  $H$ . Oznaczamy go albo

$$\vec{A} = \text{rot } \vec{H}$$

(łac. rotare — wirować) albo

$$\vec{A} = \text{curl } \vec{H}$$

(ang. to curl — zwiąć).



Otrzymujemy zatem następujące twierdzenie: praca wektora  $\vec{H}$  wzdłuż krzywej zamkniętej  $s$  jest równa strumieniowi jego wiru przez powierzchnię, ograniczoną daną krzywą  $s$ .

Z porównania wzoru (8a) i (7a) otrzymujemy

$$\vec{A} = \text{rot } \vec{H} = k \cdot 4\pi \vec{j}_n \quad (9)$$

W polu elektrostatycznym praca sił pola wzdłuż drogi zamkniętej jest, jak wiemy, zawsze równa zero, pole to jest więc polem bezwirowym (p. rozdz. III, ust. 3); linie sił tego pola biorą swój początek na ciałach naelektryzowanych dodatnio, które możemy uważać za ich źródła dodatnie, kończą się zaś na ciałach naelektryzowanych ujemnie, które wobec tego możemy uważać za ich źródła ujemne. Analogiczne własności możemy przypisać polu magnetycznemu magnesu, o ile ograniczymy się do tej jego części, która leży poza magnesem. W przeciwieństwie do tych dwóch pól pole magnetyczne prądu jest polem wirowym (rotacyjnym) i bezźródłowym; linie sił bowiem, jak to zaraz wykażemy, są w nim krzywymi zamkniętymi.

Gdy masa magnetyczna jest całkowicie swobodna, siły magnetyczne przesuwać ją wzdłuż linii sił. W przypadku przepony rzeczywistej linie te wychodząc z dodatniej strony przepony kończą się na stronie ujemnej, w przypadku jednak przepony fikcyjnej, równoważnej obwodowi elektrycznemu  $S$ , położenie przepony jest nieoznaczone: w myśl założenia Ampère'a działanie magnetyczne, a więc i kierunek sił działających w polu magnetycznym, pozostanie bez zmiany, gdy przeponę  $P$  zastąpimy przeponą  $P'$  lub  $P''$  (rys. 249), w polu zatem prądu elektrycznego linie sił nigdzie się nie zaczynają i nigdzie nie kończą, są więc krzywymi zamkniętymi.

Masa magnetyczna swobodna przesuwać się pod działaniem sił pola magnetycznego prądu opisywać będzie drogi zamknięte.

Praca, jaką siły pola wykonają podczas jednorazowego opisanie tej drogi przez masę  $q$ , będzie zgodnie ze wzorem (6) równa  $k \cdot 4\pi i \cdot q$ . Jeżeli więc przypiszemy punktowi  $C$  tę samą wartość potencjału, jaką by miał ten punkt, gdyby znajdował się w polu równoważnej przepony magnetycznej, a więc

$$V_c = \frac{\Pi}{\mu} \omega = k \cdot i \cdot \omega,$$

wtedy po przesunięciu masy magnetycznej  $q$  z tego punktu wzdłuż



linii sił z powrotem do tego samego punktu, musielibyśmy, zgodnie ze wzorem

$$V_A = V_B + \frac{1}{q} W_{AB},$$

(p. rozdz. IV, ust. 2), uważać za potencjał tego samego punktu C potencjał o wartości

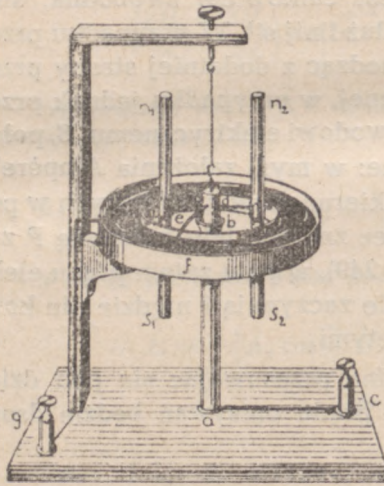
$$V_C = V_C + \frac{1}{q} W_{CC} = V_C + k \cdot 4\pi i = ki(\omega + 4\pi),$$

po  $n$ -krotnym przesunięciu

$$V_C^{(n)} = k \cdot i(\omega + 4\pi n).$$

Tego rodzaju pole nazywamy polem wielowartościowym.

Można to wykazać następującym prostym doświadczeniem, którego pomysł zawdzięczamy Faraday'owi: Słupek metalowy  $ab$ , połączony z zaciskiem  $c$  (rys. 252), posiada na górnym



Rys. 252

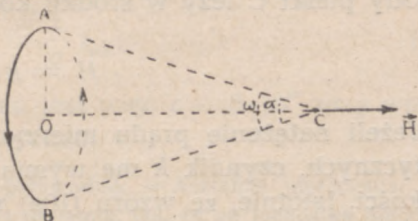
swym końcu wgłębienie, wypełnione rtęcią. Do rtęci tej zanurzony jest dolny koniec sztabki  $d$ , zawieszony na nici. Sztabka ta jest sztywno złączona z dwoma magnesami  $n_1s_1$  i  $n_2s_2$  oraz z drutem  $e$ , którego koniec swobodny zanurzony jest w kołowym rowku  $f$ , wypełnionym rtęcią, połączoną z zaciskiem  $g$ . Gdy przez słupek  $ab$  przepuścimy prąd elektryczny, bieguny (a z nimi, rzecz prosta, i magnesy) zaczną się obracać w kierunku zależnym od kierunku prądu w przewodniku  $ab$ .

Gdy magnesy wykonają jeden całkowity obrót, wszystkie części układu wrócą do swego poprzedniego stanu i wzajemnego położenia, wobec czego magnesy będą obracały się stale, dopóki będzie płynął prąd w przewodniku, przy czym za każdym obrotem praca sił pola wyniesie, jak wiadomo,  $k \cdot 4\pi i \cdot 2q$ . Zachodzącemu na skutek tego zmniejszaniu się energii układu zapobiega przyływ energii ze źródła



prądu, tak że energia układu, złożonego z przewodnika prądu i magnesów, zachowuje ciągle wartość stałą. Układ ten nie jest, rzecz prosta, układem odosobnionym.

W prostszych przypadkach wyznaczenie natężenia  $H$  pola magnetycznego prądu nie następuje większych trudności. Przyjmijmy np., że prąd płynie przez zgięty w koło drut  $AB$  (rys. 253). Natężenie pola równoważnej przepony będzie w punkcie  $C$ , leżącym na prostej  $OC$ , wystawionej ze środka koła  $O$  prostopadle do płaszczyzny obwodu, skierowane zgodnie z symetrią obwodu, wzdłuż osi  $OC$  ku punktowi  $O$  lub od punktu  $O$ , zależnie od znaku magnetyzmu tej strony przepony, która jest zwrócona ku punktowi  $C$ . Taki więc też będzie kierunek linii sił w tym punkcie. Potencjał w punkcie  $C$  jest, jak wiadomo, równy



Rys. 253

$$V_C = \frac{\Pi}{\mu} \omega.$$

Wartość kąta bryłowego znajdziemy obliczając powierzchnię wyciętą przez stożek  $ACB$  z kuli opisanej z punktu  $C$  promieniem równym jedności. Powierzchnia ta jest równa

$$S = 2\pi(1 - \cos \alpha)$$

lub z uwagi, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{x},$$

gdzie  $R$  — promień koła,  $x$  — odległość  $OC$ ,

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \quad \text{i} \quad S = 2\pi \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right).$$

Stąd natężenie pola w punkcie  $C$  (p. rozdz. IV, ust. 2)

$$H = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\Pi}{\mu} \frac{d\omega}{dx} = -\frac{\Pi}{\mu} 2\pi \left\{ -(x^2 + R^2)^{-1/2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} x (x^2 + R^2)^{-3/2} \cdot 2x \right\} = -\frac{\Pi}{\mu} 2\pi \cdot \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$



Po podstawieniu

$$\Pi = k p i$$

otrzymujemy

$$H = k \cdot 2\pi i \cdot \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (10)$$

Gdy punkt C leży w środku koła, a więc gdy  $x = 0$

$$H = k \cdot \frac{2\pi i}{R}. \quad (10a)$$

Jeżeli natężenie prądu mierzymy w jednostkach elektrostatycznych, czynnik  $k$  ma wymiar odwrotny do wymiaru prędkości. Istotnie, ze wzoru (10a) wynika, że

$$|k| = \frac{[H] [R]}{[i]_{els}} = \frac{M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}}{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}} = L^{-1} \cdot T.$$

Pisząc  $k = \frac{1}{c}$  otrzymamy wzór (10a) w postaci

$$H = \frac{1}{c} \cdot \frac{2\pi i_{els}}{R}, \quad (10b)$$

gdzie  $i_{els}$  oznacza wartość natężenia prądu wyrażoną w jednostkach elektrostatycznych. Wartość czynnika  $c$ , mającego wymiar prędkości, możemy wyznaczyć, mierząc w środkowym punkcie obwodu kołowego natężenie pola, wzbudzonego przez prąd o znanym natężeniu. Jak wykazały pomiary, o których będzie mowa niżej,  $c$  jest prawie równe  $3 \cdot 10^{10}$  cm/sek.

Możemy jednak równie dobrze za miarę natężenia prądu wziąć nie, jak poprzednio, nabój, przepływający w jednostce czasu przez dany przekrój przewodnika, lecz, jak wskazał W. Weber (1856 r.), działanie magnetyczne prądu. Kładąc we wzorze (10a)  $k = 1$ , za jednostkę natężenia prądu przyjmujemy wtedy natężenie takiego prądu, płynącego w obwodzie kołowym o promieniu równym jednostce długości, którego pole magnetyczne ma w środku koła natężenie równe  $2\pi$  jednostek.

Gdy długość mierzymy w centymetrach, natężenie pola w oerstedach (p. rozdz. IV, ust. 2, str. 300); a więc gdy za jednostki podstawowe bierzemy jednostki układu C. G. S., otrzymaną w ten sposób jednostkę natężenia prądu nazywamy jego jednostką elektromagnetyczną.



Mierząc w tych jednostkach natężenie prądu otrzymamy wzór (10a) w postaci

$$H = \frac{2\pi}{R} i_{elm}; \quad (10c)$$

z porównania ze wzorem (10b) wynika, że

$$i_{elm} = \frac{1}{c} i_{els}; \quad (11)$$

jednostka elektromagnetyczna jest więc  $c \doteq 3 \cdot 10^{10}$  razy większa od jednostki elektrostatycznej.

Przypuśćmy, że mamy przewodnik w kształcie pierścienia, naelektryzowany elektrycznością dodatnią, tak, że na jednostkę długości przypada nabój  $e$ . Jeżeli pierścień będziemy obracali dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny pierścienia, ruch nabojów, rozmieszczonych wzdłuż pierścienia, powodować będzie w przestrzeni, otaczającej pierścień, powstawanie działań magnetycznych identycznych z tymi, jakie by wywierał prąd, przepływający przez pierścień nieruchomy i mający natężenie równe

$$i_{els} = e \cdot v, \quad (12)$$

gdzie  $v$  jest prędkością liniową ruchu nabojów (Rowland, 1876 r.).

Natężenie tego samego prądu, wyrażone w jednostkach elektromagnetycznych, będzie miało wartość

$$i_{elm} = \frac{1}{c} e \cdot v.$$

Jeżeli więc nabój  $e$ , przypadający na jednostkę długości, równy jest jednostce elektrostatycznej naboju, to, aby przez obrót pierścienia wywołać takie działania magnetyczne, jakie wywiera prąd o natężeniu jednostki elektromagnetycznej, należy prędkość liniową ruchu nabojów doprowadzić do wartości  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/sek.

Wymiar jednostki elektromagnetycznej natężenia prądu jest równy

$$[i]_{elm} = \frac{[i]_{els}}{[c]} = \frac{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}}{LT^{-1}} = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}. \quad (13)$$

Jednostka ta często nazywana jest **weberem**. Należy jednak zaznaczyć, że Weber wyznaczając swoją jednostkę, brał za jednostkę masy nie gram lecz miliigram i za jednostkę długości nie centymetr, lecz milimetr (tzw. układ Gaussa), wymiar więc jednostki Webera wynosi

$$[i]_{jed. webera} = mg^{1/2} mm^{1/2} sek^{-1}.$$



Wymiar zaś jednostki elektromagnetycznej

$$[i]_{jed. elm} = g^{1/2} cm^{1/2} sek^{-1}.$$

Wobec tego 1 jednostka Webera równa jest  $n$  jednostkom elektromagnetycznym, gdzie  $n$  wyznaczamy ze wzoru (por. tom I, str. 12)

$$n = \left(\frac{mg}{g}\right)^{1/2} \left(\frac{mm}{cm}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{10}\right)^{1/2} = 0,01.$$

Jednostka elektromagnetyczna jest więc 100 razy większa od jednostki wyznaczonej przez Webera.

Uchwała komisji międzynarodowej w Paryżu, powzięta w 1933 r., nazwą *w e b e r a* oznaczyła jednostkę praktyczną strumienia indukcji magnetycznej, przyjmując  $1 w = 10^8$  j. C. G. S. strumienia indukcji =  $10^8$  maxwellom. Zaznaczyć jednak należy, że uchwałą wcześniejszą (z 1930 r.) ta sama jednostka  $10^8$  maxwellów została nazwana *p a r a m a x w e l l e m*. Przeważa więc wobec nieustalenia tych terminów nazw powyższych używać nie będziemy.

Za elektromagnetyczną jednostkę naboju przyjmujemy nabój, przepływający w ciągu 1 sek przez dowolny przekrój przewodnika, gdy natężenie prądu stałego równe jest elektromagnetycznej jednostce natężenia prądu. Nabój ten jest więc  $c$  razy większy od elektrostatycznej jednostki naboju.

Jednostkę elektromagnetyczną potencjału otrzymamy, wyrażając we wzorze na pracę prądu elektrycznego natężenie prądu w jednostkach elektromagnetycznych, pracę zaś, jak w układzie elektrostatycznym, w ergach. Ze wzoru

$$lO = (V_1 - V_2) i \cdot t \tag{a}$$

znajdujemy, że elektromagnetyczna jednostka potencjału jest  $c$  razy mniejsza od jednostki elektrostatycznej.

Z tych nowych jednostek otrzymujemy jednostki układu praktycznego, o których była mowa wyżej (p. rozdz. V, ust. I).

Za jednostkę praktyczną natężenia prądu bierzemy  $0,1$  j. elm natężenia prądu, a więc jednostkę  $\frac{c}{10}$  razy większą od odpowiedniej jednostki elektrostatycznej. Jest to *a m p e r bezwzględny (A)*. Dziesiąta część jednostki elektromagnetycznej naboju, również  $\frac{c}{10}$  razy większa od jednostki elektrostatycznej, nosi nazwę *k u l o m b a bezwzględnego (C)*;



jednostka potencjału,  $10^8$  razy większa od jednostki elektromagnetycznej, a więc  $\frac{10^8}{c}$  razy większa od jednostki elektrostatycznej, jest woltem bezwzględnym (V), wreszcie jednostka oporu  $\Omega = 10^9$  jedn. elm. oporu. Podstawiając  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/sek. otrzymamy te wartości ampera, kulomba, wolta i oma, jakimi posługowaliśmy się już poprzednio bez podania jednak dokładnego ich określenia.

Podobnie można ustalić bez trudu to, cośmy poprzednio przyjmowali bez dokładniejszego omówienia, że bezwzględną jednostką praktyczną pracy jest dżul (J), pojemności — farad (F);

Ten układ jednostek praktycznych możemy oprzeć na jednostkach wielkości podstawowych długości, masy i czasu dodając do nich jeszcze jedną, a mianowicie jednostkę przenikliwości magnetycznej, i przypisując jej wbrew temu, cośmy wyżej zakładali, wymiar  $[\mu]$ . Te jednostki podstawowe tak dobieramy, aby amper i volt (lub amper i om), uważane za jednostki pochodne tego nowego układu były w tym samym stosunku do jednostek elektromagnetycznych natężenia prądu i napięcia (lub natężenia prądu i oporu), jaki ustaliliśmy uprzednio, a więc 0,1 dla ampera i  $10^8$  dla wolta.

Wymiar natężenia prądu wyznaczymy ze wzoru

$$H = 2\pi \frac{i}{R},$$

gdzie wymiar  $\vec{H}$ , równy, jak wiadomo  $\frac{[f]}{[q]}$ , będzie po wprowadzeniu  $\mu$ , o wymiarze  $[\mu]$

$$[H] = \frac{[f]}{[q]} = \frac{L \cdot M \cdot T^{-2}}{L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} [\mu]^{1/2}} = L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} [\mu]^{-1/2}.$$

Wymiar natężenia prądu będzie wtedy

$$[i] = [H] \cdot [R] = L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} [\mu]^{-1/2}.$$

Podobnie znajdziemy

$$[V] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-2} [\mu]^{1/2}.$$

Założmy, że zmieniamy jedynie jednostki długości, masy i przenikliwości magnetycznej. Niech stosunek tych nowych jednostek  $L_1, M_1, \mu_1$  do dawnych jednostek  $L, M, \mu$  wyraża się pewną potęgą 10.



Tak więc

$$\frac{L_1}{L} = 10^l; \quad \frac{M_1}{M} = 10^m; \quad \frac{\mu_1}{\mu} = 10^n.$$

W myśl założenia powinniśmy mieć (p. tom I, str. 12)

$$\frac{|A|}{|i_{elm}|} = \left(\frac{L_1}{L}\right)^{1/2} \left(\frac{M_1}{M}\right)^{1/2} \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^{-1/2} = (10^l)^{1/2} (10^m)^{1/2} (10^n)^{-1/2} = 10^{-1},$$

oraz

$$\frac{|V|}{|V_{elm}|} = (10^l)^{3/2} \cdot (10^m)^{1/2} \cdot (10^n)^{1/2} = 10^8,$$

skąd

$$\frac{1}{2} l + \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} n = -1,$$

$$\frac{3}{2} l + \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} n = 8.$$

Dodając te dwa równania, otrzymujemy

$$2l + m = 7.$$

Po podstawieniu do równania pierwszego znajdujemy

$$l + n = 9.$$

Mamy zatem dwa równania z trzema niewiadomymi. Istnieje więc nieograniczenie wielka liczba układów, czyniąca zadość tym warunkom. (Ascoli).

Próbie wprowadzenia takiego układu pierwszy podjął Maxwell. Założył on, że w nowym układzie  $\mu_1 = \mu$ , innymi słowy przyjął za jednostkę przenikliwości magnetycznej przenikliwość próżni  $\mu_0 = 1$  tak, jak to przyjmowaliśmy poprzednio. W jego zatem układzie  $n = 0$ ,  $l = 9$  i  $m = -11$ . Za jednostkę długości należy zatem przyjąć  $10^9$  cm (mniej więcej ćwierć długości południka ziemskiego — kwadrant), za jednostkę masy  $10^{-11}$  g. Układ jednostek Maxwella nie jest jednak obecnie używany.

Giorgi zwrócił uwagę (1901 r.), że dogodniej byłoby przyjąć za podstawowe jednostki długości i masy — metr i kilogram. Wtedy  $l = 2$ ;  $m = 3$ ,  $n$  zaś równe jest 7. W układzie Giorgi'ego jednostka przenikliwości magnetycznej jest  $10^7$  razy większa od przenikliwości magnetycznej próżni, której wartość w tym układzie wyraża się liczbą  $10^{-7}$ . Układ Giorgi'ego został w 1935 r. zalecony przez międzynarodową komisję elektrotechniczną do rozważenia.

W 1946 r. międzynarodowy komitet miar i wag uznał za obowiązujący bezwzględny układ jednostek praktycznych, oparty na czterech jednostkach podstawowych: metr, kilogram,



sekunda (układ M. K. S) i amper (A). W tym układzie jednostką siły jest newton ( $1 \text{ new} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{sek}^2} = 10^5 \text{ dyn}$ ), jednostką pracy dżul ( $1 \text{ new} \cdot 1 \text{ m}$ ). Amper jest określony w sposób następujący: Jeżeli dwa równoległe, prostoliniowe, nieograniczenie długie, o znikomo małym przekroju przewodniki, przez które przepływają prądy o jednakowym natężeniu, działają na siebie wzajemnie w próżni z odległości 1 m siłą  $2 \cdot 10^{-7} \text{ new}$  na 1 m ich długości (wzór 20), natężenie prądów w nich płynących jest 1 A.

Jeżeli zamiast pojedynczego kołowego zwoju drutu umieścimy w tej samej płaszczyźnie  $n$  zwojów, każdy z nich wzbudzi w swym środku geometrycznym pole o natężeniu, wyrażonym wzorem (10c), gdzie  $R$  oznacza promień danego zwoju. Przyjmując, że zwoje te są spółśrodkowe i że różnica ich promieni jest dostatecznie mała, aby mogła być bez szkody dla dokładności pomiarów pominięta, otrzymamy na wartość natężenia pola

$$H = \frac{2\pi}{R} \cdot n \cdot i_{elm} \quad (10)$$

lub

$$H = \frac{2\pi}{10R} n \cdot i_a = 0,2 \frac{\pi}{R} n \cdot i_a, \quad (10a)$$

gdy natężenie prądu wyrażone jest w amperach.

Przypuśćmy teraz, że pole jest wzbudzone przez prąd, płynący przez cewkę o kołowym, na całej długości cewki jednakowym przekroju. Jeżeli odległość między poszczególnymi zwojami jest dostatecznie mała, abyśmy każdy ze zwojów mogli uważać za kołowy, cewkę nazwiemy, używając terminu, wprowadzonego przez Ampère'a, solenoidem (gr. solen — rura, kanał).

Ścisłe biorąc Ampère solenoidem nazwał szereg kół przewodzących o niewielkim i jednakowym promieniu, ustawionych jedno za drugim w ten sposób, aby płaszczyzny ich były prostopadłe do linii, na której leżą ich środki (oś solenoidu); gdy linia ta jest linią prostą, solenoid tworzy bardzo cienki prosty walec. Temu określeniu cewka będzie tym lepiej czyniła zadość, im mniejszy będzie jej przekrój i im mniej każdy ze zwojów różnił się od koła, a więc im mniejsza będzie, jak to założyliśmy wyżej, odległość między zwojami.



Każdy z tych zwojów możemy zastąpić płaską przepołą magnetyczną o mocy

$$\Pi = \sigma \cdot l = \mu \cdot i_{elm}$$

i o tak dobranej grubości  $l$ , aby sąsiednie przepony się stykały. Jeżeli zatem na 1 cm długości cewki przypada  $n$  zwojów, a więc  $i$   $n$  równoważnych przepon, grubość każdej przepony wyniesie  $l = \frac{1}{n}$  cm, skąd

$$\sigma = \mu \cdot n \cdot i_{elm}$$

lub, umawiając się, że we wszystkich przypadkach, w których mamy do czynienia z działaniami magnetycznymi prądu, przez  $i$  będziemy rozumieli natężenie, mierzone w jednostkach elektromagnetycznych,

$$\sigma = \mu \cdot n \cdot i. \quad (d)$$

Ponieważ według założenia przekrój cewki jest wszędzie jednakowy, masy magnetyczne przeciwnych znaków, znajdujące się na stykających się ze sobą powierzchniach dwu sąsiednich przepon, będą miały tę samą wartość bezwzględną

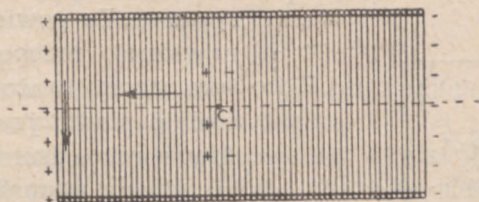
$$q = \sigma \cdot S = \mu \cdot n \cdot i S,$$

gdzie  $S$  jest polem przekroju cewki. Wobec tego w punkcie  $C$ , znajdującym się poza cewką, działania ich magnetyczne będą się wzajemnie znosiły. W tym punkcie działanie cewki będzie równoważne działaniu mas  $\pm q$ , rozmieszczonych równomiernie na zewnętrznych powierzchniach przepon końcowych, przy czym, zgodnie z regułą, podaną w ust. I, masa dodatnia będzie rozmieszczona na tym końcu cewki, na który patrząc widzimy prąd, płynący w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, lub mówiąc inaczej, oś magnetyczna cewki będzie miała kierunek taki, w jakim należałoby wkręcać śrubę prawoskrętną, aby kierunek jej obrotu był zgodny z kierunkiem prądu, płynącym przez zwoje cewki. Wartość natężenia pola w tym punkcie, zależna od wartości tych mas magnetycznych i od położenia końców cewki, nie będzie zależała od kształtu krzywej, na której leżą środki zwojów. Natę-



żenie to można wyznaczyć stosując metody, używane przy wyznaczaniu pola magnetycznego magnesów stałych. Gdy przekrój cewki jest mały w porównaniu z jej długością i odległością od jej końców punktu  $C$ , działanie magnetyczne cewki jest równoważne działaniu magnesu liniowego. Cewka zamknięta nie wywiera żadnego działania magnetycznego na zewnątrz.

W punkcie  $C'$ , znajdującym się wewnątrz cewki w takiej odległości od jej końców, (rys. 254) abyśmy mogli pominąć



Rys. 254

działania magnetyczne przepon końcowych, pole magnetyczne będzie polem wypadkowym dwu pól przepon sąsiednich, między którymi znajduje się punkt  $C'$ . Rozumując w ten sam sposób, jak w ust. 4 rozdz. IV, znajdziemy, że w punkcie  $C'$

$$H_{c'} = \frac{4\pi \cdot \sigma}{\mu},$$

skąd po uwzględnieniu wzoru (d)

$$H_{c'} = 4\pi ni; \quad (15)$$

w tej przeto części cewki pole magnetyczne jest jednostajne, wartość bowiem natężenia  $H$  nie zależy od położenia punktu  $C'$ . Mierzając natężenie prądu w amperach, otrzymamy

$$H_{c'} = \frac{4\pi}{10} n \cdot i_a. \quad (15a)$$

Gdy

$$n \cdot i_a = 1$$

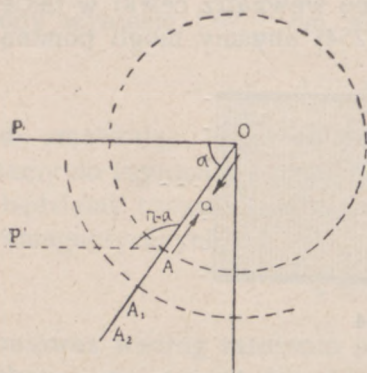
natężenie pola jest równe  $\frac{4\pi}{10}$  oerstedów. Tej wartości natężenia używa się często w technice, jako jednostki natężenia



pola magnetycznego prądu. Nosi ona nazwę amperozwoju na centymetr. Wzór (15a) przybierze wtedy postać następującą

$$H_{c'} = n \cdot i_a \text{ ampw/cm.}$$

Rozpatrzmy wreszcie przypadek, gdy pole magnetyczne wzbudzone jest przez prąd, płynący w nieograniczenie długim prostym drucie. Niech  $O$  (rys. 255) będzie śladem tego drutu,



Rys. 255

prostym drucie. Niech  $O$  (rys. 255) będzie śladem tego drutu, prostopadłego do płaszczyzny rysunku. Za powierzchnię równoważną przepony możemy tym razem uważać połowę dowolnej płaszczyzny  $P$  przechodzącej przez drut i z jednej tylko strony ograniczonej przez ten przewodnik. Niech  $A$  będzie dowolnie wybranym punktem w przestrzeni, otaczającej drut. Kąt bryłowy, pod którym widać z  $A$  równoważną przeponę  $P$

jest kątem dwuściennym między płaszczyzną  $P'$  równoległą do  $P$  i płaszczyzną  $OA$ , przesuniętą przez drut  $O$  i punkt  $A$ . Powierzchnia, którą płaszczyzny te wytną z kuli, opisanej z  $A$  promieniem równym jednościci, będąca miarą tego kąta dwuściennego, będzie równa  $2(\pi - \alpha)$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem, jaki płaszczyzna  $OA$  tworzy z płaszczyzną  $P$ . We wszystkich przeto punktach  $A, A_1, A_2 \dots$ , leżących na płaszczyźnie  $OA$ , potencjał pola przepony będzie miał tę samą wartość, kąt bowiem, pod jakim widać przeponę, jest we wszystkich tych punktach ten sam. Wobec tego powierzchniami ekwipotencjalnymi będą połowy płaszczyzn, przesuniętych przez drut, linie zaś sił, prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych, kołami, leżącymi w płaszczyznach prostopadłych do przewodnika; środki tych kół będą leżały na przewodniku.

Jeżeli więc w dowolnym punkcie  $A$  umieścimy swobodną masę magnetyczną, masa ta pod działaniem sił pola porusza się będzie po kole, przy czym praca wykonana podczas



jednego całkowitego obrotu i odniesiona do jednostki masy magnetycznej wyniesie (p. wzór 7)

$$H \cdot 2\pi a = 4\pi i,$$

gdzie  $a$  jest odległością punktu  $A$  od przewodnika,  $H$  zaś ma we wszystkich punktach drogi wartość tę samą, spad bowiem potencjału jest we wszystkich punktach koła ten sam

$$\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{ada'} \quad (16)$$

stąd

$$H = \frac{2i}{a}.$$

Natężenie pola zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do odległości danego punktu od przewodnika.

Do tego samego wniosku prowadzą wyniki doświadczeń, wykonanych w 1820 r. przez Biota i Savarta, którzy natężenie pola wyznaczyli z pomiaru okresu drgań krótkiej igiełki magnetycznej, umieszczonej w pobliżu długiego prostego drutu, przyczem działanie pola ziemskiego na igłę było skompensowane przez przeciwnie skierowane działanie odpowiednio dobranego magnesu stałego (por. rozdz. IV, ust. 2).

We wszystkich wyżej rozpatrzonych przypadkach wyznaczyliśmy działanie magnetyczne obwodu elektrycznego, opierając się na założeniu równoważności przepony magnetycznej i obwodu. Możemy jednak do tych samych wyników dojść i inną drogą, a mianowicie uważając pole magnetyczne obwodu elektrycznego za wypadkowe pól, wzbudzonych przez elementarne części obwodu. Prawo, pozwalające wyznaczyć tego rodzaju działanie elementarne, dał w ogólnej postaci Laplace, sformułowali zaś ostatecznie Biot i Savart na podstawie wykonanych przez siebie pomiarów pola w pewnych przypadkach szczególnych. W prostszy jednak sposób będziemy mogli je wyprowadzić rozpatrując siły, jakimi pole magnetyczne działa na przewodnik prądu.

Siły te, działające na ciała o pewnym ciężarze, są nieraz nazywane, w przeciwstawieniu do elektromotrycznych (elektrobodźczych), ponderomotrycznymi (łac. pondus — ciężar).



## 2 — a. — WEKTOR ELEKTRYCZNY I WEKTOR MAGNETYCZNY.

Uogólniając założenia Ampère'a powiemy, że podobnie, jak działanie magnetyczne w środku obwodu z prądem, obejmującego nieskończenie małe pole, możemy odtworzyć przy pomocy wektora

natężenia magnetycznego  $\vec{H}$ , przyłożonego do tego właśnie punktu środkowego, natężenie magnetyczne w dowolnym punkcie pola możemy odtworzyć przez nieskończenie mały obwód kołowy z prądem, ustawiony prostopadłe do kierunku pola (rys. 256a). To właśnie

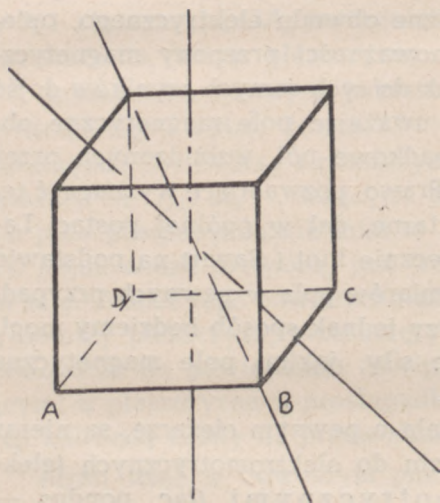


Rys. 256a

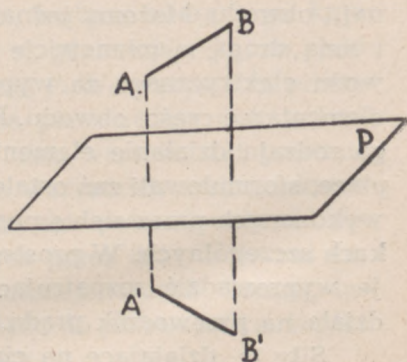
nie nadaje wektorowi magnetycznemu  $\vec{H}$  pewne cechy odmienne od tych, jakie posiada wektor elektryczny  $\vec{E}$ . Dla zdania sobie z nich sprawy musimy, choć pokrótce, omówić symetrię ciał i zjawisk fizycznych.

Nazwijmy symetryczną (gr. symetria — wymierność, należyty stosunek) bryłę, której rozmieszczenie poszczególnych części ujawnia pewną prawidłowość geometryczną, pewne prawidłowe powtarzanie. Prawidłowość tę można, biorąc rzecz najogólniej, sprowadzić do trzech następujących typów.

1. Części bryły (lub figury płaskiej) są tak rozmieszczone, że przez obrót dookoła pewnej stałej osi można nadać bryle to samo, co poprzednio położenie w przestrzeni, zmieniając jedynie porządek rozmieszczenia jej wierzchołków i krawędzi. Części bryły w swych nowych położeniach będą zajmowały dokładnie to samo miejsce, co



Rys. 256b



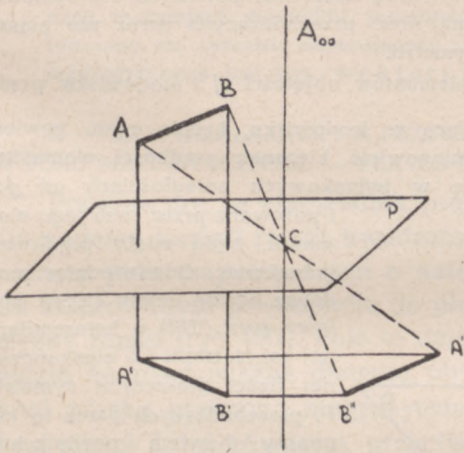
Rys. 256c



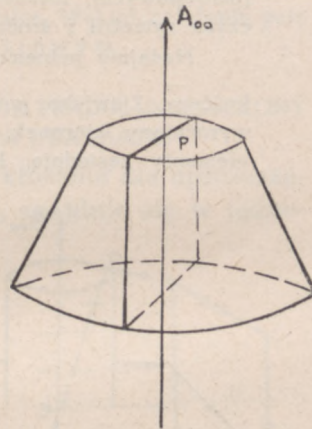
części, jakie się tam znajdowały przed obrotem. Z tego rodzaju symetrią pierwszego rodzaju mieliśmy już do czynienia w rozdz. III, ust. 12. Bryła posiada wtedy oś lub osie symetrii. Tak np. sześcian ma trzy osie czterokrotne (czwartego rzędu), prostopadłe do boków sześcianu i przechodzące przez ich środek, cztery osie trzykrotne, leżące na przekątnych sześcianu i sześć osi dwukrotnych wzdłuż prostych, łączących środki przeciwległych krawędzi (rys. 256b). Wszystkie te osie są homopolarne.

2. Inny typ symetrii wykazywać będzie bryła, której jedna część stanowi jakby odbicie w zwierciadle drugiej części. Części tych żadnym obrotem nie można nałożyć jedną na drugą. Tego rodzaju symetrię posiada np. układ dwu strzałek  $AB$  i  $A'B'$  (rys. 256c). Płaszczyzna odbicia  $P$  jest płaszczyzną symetrii układu. Punkty  $A$  i  $A'$ ,  $B$  i  $B'$  leżące na tych samych normalnych do płaszczyzny  $P$  i w jednakowych od niej odległościach są punktami homologicznymi (gr. homologos — zgodny).

Sześcian posiada 9 płaszczyzn symetrii (rys. 256d). Trzy z nich (1, 2, 3) są prostopadłe do boków sześcianu i przechodzą przez ich środki, pozostałe przechodzą przez przekątne sześcianu.



Rys. 256d



Rys. 256e

3. — Gdy strzałki, stanowiące części układu, zajmują takie położenie, jak  $AB$  i  $A''B''$  na rys. 256e, można zawsze znaleźć taki punkt  $C$ , który dzielić będzie odcinki prostych  $AA''$ ,  $BB''$ ... na dwie równe części.

Punkt  $C$  jest wtedy środkiem symetrii lub środkiem inwersji (łac. inversio — przekształcenie). Obracając



obraz  $A'B'$  strzałki  $AB$ , odbity w płaszczyźnie  $P$ , dookoła osi  $A_2$ , przechodzącej przez punkt  $C$  i prostopadłej do płaszczyzny odbicia  $P$ , o kąt  $180^\circ$ , możemy  $A'B'$  nałożyć na  $A''B''$ .

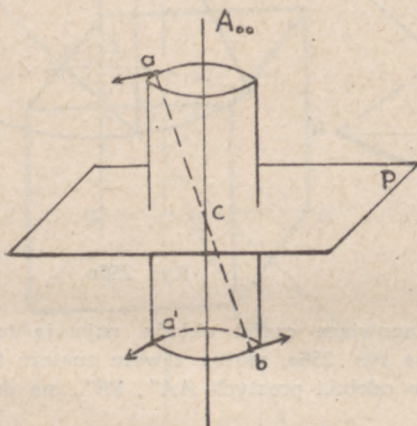
Te dwa typy symetrii stanowią szczególne przypadki tzw. symetrii drugiego rodzaju (symetrii złożonej). Symetryczne części bryły można nałożyć jedno na drugie przez obrót koło stałej osi  $A$  i odbicie od płaszczyzny, prostopadłej do osi. Gdy kąt obrotu równy jest zeru, mamy do czynienia ze zwykłym odbiciem (typ drugi), gdy  $180^\circ$ , z inwersją (typ trzeci).

Osie, płaszczyzny i środki symetrii są elementami symetrii danej bryły. Im więcej dana bryła posiada elementów symetrii, tym symetria jej jest wyższa.

Te pojęcia symetrii, oparte na rozważaniu kształtów brył, można, jak to pierwszy wykazał P. Curie (1884 r. i 1894 r.), zastosować do badania środowisk, stanów i zjawisk fizycznych. Należy wtedy dobrać odpowiedni model, który by możliwie dokładnie i wyczerpująco odtwarzał własności danego środowiska czy też przebieg danego zjawiska.

W przypadku nieograniczonego, jednorodnego i równokierunkowego środowiska takim modelem jest kula, bryła o najwyższej symetrii, posiadająca nieskończoną ilość homopolarnych osi symetrii (izotropowych), nieskończoną ilość przechodzących przez nie płaszczyzn symetrii i środek symetrii.

Nadajmy jednemu z elementów objętości  $\Delta S$  środowiska prędkość  $\vec{v}$ . Zjawisko powstające w środowisku, będzie miało pewien wyróżniony kierunek, a mianowicie kierunek prędkości elementu; elementy sąsiednie, leżące w jednakowych odległościach od  $\Delta S$



Rys. 256f

i porywane przez ruch tego elementu, będą miały prędkości jednakowe. Odpowiednim modelem będzie ucięty stożek kołowy (rys. 256f) o heteropolarnej osi izotropii i o nieskończonej ilości płaszczyzn symetrii  $P$ , przechodzących przez tę oś, punkty bowiem powierzchni stożka, leżące symetrycznie po obu stronach tej płaszczyzny, będą miały prędkości jednakowe. Wektor, odtwarzający geometrycznie prędkość  $\vec{v}$  będzie miał cechy takie, jak oś  $A_{\infty}$  danego stożka, będzie wektorem biegunowym (hete-



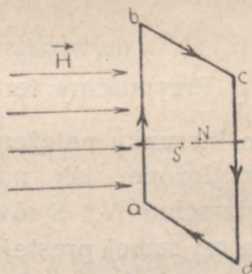
ropolarnym). Tego samego rodzaju wektorem będzie i wektor siły i wektor natężenia pola elektrycznego.

Gdy pewną część środowiska wprawimy w ruch obrotowy koło pewnej stałej osi  $A_\infty$ , każdemu elementowi  $a$  będzie odpowiadał element  $b$  środowiska tak położony względem elementu  $a$ , że wektor jego prędkości może być otrzymany przez inwersję z wektora prędkości  $a$ . Środkiem inwersji, a więc środkiem symetrii, jest wtedy punkt  $C$ . Poza tym elementowi  $a$  odpowiada element  $a'$ , leżący w tej samej odległości od płaszczyzny  $P$ , przechodzącej przez środek symetrii  $C$ , co element  $a$ .  $P$  jest przeto płaszczyzną symetrii zjawiska, zachodzącego w danym środowisku. Tym warunkom symetrii odpowiada obracający się walec, posiadający oś izotropii  $A_\infty$ , środek symetrii  $C$  i prostopadłą do osi płaszczyznę symetrii  $P$ . W przeciwieństwie do rozpatrywanego wyżej uciętego stożka nie posiada on płaszczyzn symetrii, przechodzących przez oś  $A_\infty$ . Walec taki może być więc modelem wektora prędkości kątovej i wektora momentu pary sił. Kierunku tych wektorów nie wyznacza bezpośrednio przebieg zjawiska; wyznaczamy go więc na zasadzie pewnej umowy (p. tom I, ust. 14).

Tego rodzaju symetrię posiada również, jak to wynika z założeń Ampère'a, wektor natężenia pola magnetycznego, prąd bowiem, płynący w zwojach solenoidu, prostopadłych do kierunku pola magnetycznego, ma symetrię obracającego się walca. Wektor natężenia pola magnetycznego jest tzw. wektorem osiowym.

### 3. — SIŁY, DZIAŁAJĄCE NA PRZEWODNIK PRĄDU, UMIESZCZONY W POLU MAGNETYCZNYM. — PRAWO BIOTA I SAVARTA.

Przypuśćmy, że przewodnik prądu, któremu dla uproszczenia nadamy kształt ramki kwadratowej, znajduje się w jednostajnym polu magnetycznym o natężeniu skierowanym prostopadle do płaszczyzny ramki (rys. 257). Pole to działać będzie na równoważną danemu obwodowi płaską przeponę magnetyczną  $a b c d$  siłami  $f_n$  i  $f_s$  równymi, przeciwnie skierowanymi i przyłożonymi w środkowych punktach  $N$  i  $S$  północnej i południowej powierzchni przepony, leżących na tej samej prostej, co siły  $i$ . Siły te wobec tego będą się wzajemnie równoważyły: przepona  $a b c d$  w tych warunkach będzie w spoczynku. Podobnie w myśl zasady Ampère'a muszą się równo-

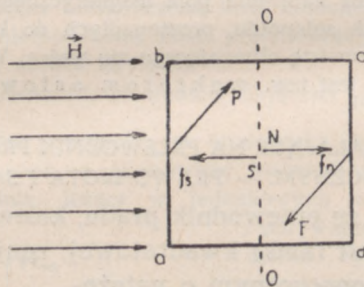


Rys. 257



ważyć siły, działające na boki  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  i  $da$  badanego obwodu.

Siły, jakimi pole działa na przeciwległe boki ramki  $ab$  i  $cd$ , mające tę samą długość i tworzące ten sam kąt z natężeniem pola  $\vec{H}$ , lecz przez które przepływają prądy o kierunkach przeciwnych, muszą być równe i przeciwnie skierowane, jak to bezpośrednio wynika z doświadczeń, o których była mowa w ust. I. Podobnie, równe i przeciwnie skierowane siły działają na boki  $bc$  i  $da$ . Tego rodzaju siły tylko wtedy będą się wzajemnie równoważyły, gdy każda z nich będzie prostopadła do boku, na który działa, i gdy kierunki ich działań będą leżały w płaszczyźnie ramki, ponieważ tylko wtedy, zarówno ich wypadkowa, jak i suma ich momentów będą równe zeru. Siły te będą zatem leżały na prostych prostopadłych do boków obwodu i do kierunku natężenia pola  $\vec{H}$ .



Rys. 258

Przypuśćmy teraz, że płaszczyzna ramki jest równoległa do kierunku natężenia pola  $\vec{H}$  (rys. 258). Wypadkowe  $i_n$  i  $i_s$ , przyłożone, jak poprzednio do środkowych punktów powierzchni  $N$  i  $S$  równoważnej przepony, nie leżą tym razem na tej samej prostej, lecz tworzą parę sił, której ramię równe jest grubości  $l$  przepony. Moment tej pary

$$C = i \cdot l = q \cdot H \cdot l = \sigma \cdot S \cdot H \cdot l \quad (a)$$

powoduje obrót przepony dookoła osi  $OO'$ .



Taka sama para musi działać i na obwód  $a b c d$ . Siły, działające na poszczególne boki ramki, są, zgodnie z dopiero co udowodnionym twierdzeniem, skierowane prostopadłe do płaszczyzny, przesuniętej przez dany bok ramki i kierunek natężenia pola. Płaszczyzna ta jest wyznaczona jedynie dla gałęzi  $a b$  i  $c d$ , gałęzie bowiem  $b c$  i  $d a$  są równoległe do kierunku natężenia  $\vec{H}$ ; każda zatem płaszczyzna, przesunięta przez te gałęzie, przechodzi również i przez prostą, wyznaczającą kierunek  $\vec{H}$ , wobec czego kierunek sił, działających na te boki nie może być wyznaczony, skąd wynika, że siła, jaką pole działa na każdą z tych gałęzi, musi być równa zeru. Działaniom więc pola podlegają jedynie boki  $a b$  i  $c d$ . Siły na nie działające stanowią parę sił o momencie równym momentowi  $C$  wzoru (a). Oznaczając przez  $F$  każdą z tych sił, przez  $h$  — ich ramię, równe długości boków ramki, otrzymamy

$$F \cdot h = f \cdot l = \sigma \cdot S \cdot H \cdot l = H \cdot \sigma \cdot l \cdot S. \quad (b)$$

Podstawiając

$$\sigma l = \rho i,$$

oraz biorąc pod uwagę, że

$$S = h^2,$$

otrzymujemy

$$F = \rho H i \cdot h. \quad (17)$$

W środowisku jednorodnym i równokierunkowym

$$\rho \vec{H} = \vec{B},$$

skąd

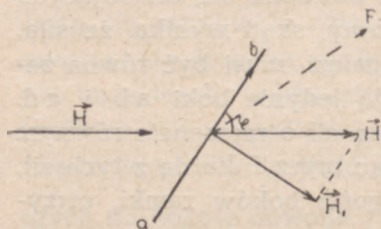
$$F = B \cdot i \cdot h \quad (17a)$$

Moment pary sił  $F$  ma kierunek zgodny z kierunkiem momentu  $C$ , siła  $F$  zatem, prostopadła zarówno do kierunku natężenia pola, jak i do przewodnika, na który działa, będzie skierowana od prawej ręki ku lewej człowieczka płynącego z prądem i patrzącego w kierunku pola.

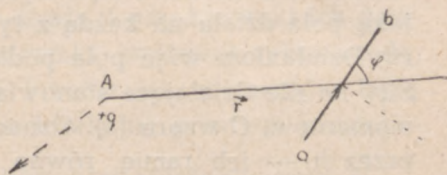


Niech teraz jedna z prostoliniowych gałęzi obwodu tworzy z kierunkiem natężenia pola dowolny kąt  $\varphi$  (rys. 259). Rozłóżmy natężenie pola na dwie składowe: równoległą i prostopadłą do przewodnika. Pierwsza z nich nie będzie, jak wiemy, wywierać żadnego działania mechanicznego na przewodnik, druga działać będzie siłą (skierowaną w przypadku przedstawionym na rysunku za płaszczyznę rysunku) równą

$$F = \mu H_1 \cdot i \cdot h = \mu H \cdot \sin \varphi \cdot i \cdot h = i \cdot B \sin \varphi \cdot h. \quad (18)$$



Rys. 259



Rys. 260

Przypuśćmy, że pole działające na przewodnik  $ab$ , jest polem dodatniego bieguna magnetycznego  $+q$  oraz, że długość  $h$  przewodnika jest dostatecznie mała, abyśmy mogli uważać natężenie pola za mające tę samą wartość we wszystkich punktach tego elementu obwodu. Wtedy wartość siły, jaką biegun działa na element  $ab$ , otrzymamy ze wzoru (18) podstawiając w nim

$$H = \frac{q}{\mu r^2} \quad \text{i} \quad h = dl,$$

$$dF = \frac{i \cdot dl \cdot \sin \varphi}{r^2} \cdot q. \quad (18a)$$

Zakładając, że siły, z jakimi mamy tu do czynienia, podlegają trzeciej zasadzie mechaniki Newtona, musimy przyjąć, że tą właśnie siłą, lecz skierowaną przeciwnie, działa element prądu  $dl$  na biegun magnetyczny  $+q$ . W przypadku, przedstawionym na rys. 260, siła ta skierowana jest przed płaszczyznę rysunku, a więc dla człowieka, płynącego z prądem, i patrzącego na biegun dodatni (nie tak, jak w regule poprzedniej,



gdzie człowieczek patrzył w kierunku pola), od prawej jego ręki do lewej.

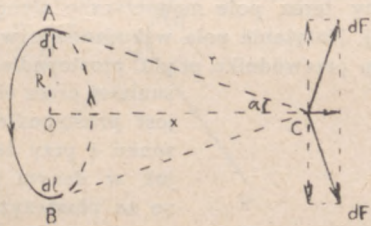
Stąd wynika, że natężenie w punkcie  $A$  pola magnetycznego, wzbudzonego przez element  $dl$  obwodu elektrycznego, jest równe

$$dH = \frac{dF}{q} = \frac{i \cdot dl \cdot \sin \varphi}{r^2}, \quad (19)$$

natężenie zaś pola całego obwodu jest równe sumie geometrycznej natężeń pól elementarnych. Wzór (19) wyraża wspomniane w ust. 2 prawo Biota i Savarta.

Zastosujmy wzór (19) do poprzednio rozpatrzonych przypadków: przewodnika kołowego i nieograniczenie długiego prostego drutu.

Niech punkt  $C$ , w którym wyznaczamy natężenie pola, leży tak, jak poprzednio, na osi kołowego przewodnika  $AB$  (rys. 261). Element



Rys. 261

$dl$  przewodnika, leżący koło punktu  $A$  i prostopadły do płaszczyzny rysunku, działa na dodatni biegun magnetyczny, umieszczony w punkcie  $C$ , siłą  $dF$ , prostopadłą do płaszczyzny, przesuniętej przez element  $dl$  i prostą  $AC$ , łączącą ten element z punktem  $C$ . Siłę tę, leżącą w płaszczyźnie rysunku i prostopadłą do  $AC$ , rozłożmy na dwie składowe, w kierunku osi  $OC$  i w kierunku do niej prostopadłym:  $dF \sin \alpha$  i  $dF \cos \alpha$ . Położony koło punktu  $B$  symetrycznie względem osi  $OC$  element prądu działa siłą  $dF'$ , której składowe w wyżej podanych kierunkach są odpowiednio równe składowym siły  $dF$ , składowa jednak  $dF \cos \alpha$  prostopadła do osi  $OC$  ma kierunek przeciwny do kierunku składowej  $dF \cos \alpha$ . Wobec tego wypadkowa tych dwóch sił sprowadza się do sumy ich składowych w kierunku osi  $OC$ :  $2 dF \sin \alpha$ . Rozkładając cały obwód na tego rodzaju przeciwstawne elementy i powtarzając dla każdej w ten sposób otrzymanej pary to samo rozumowanie, znajdujemy, że siła, z jaką obwód działa na biegun  $+q$ , jest równa sumie składowych  $2 dF \sin \alpha$ . Wartość więc



natężenia w punkcie C pola obwodu kołowego po podstawieniu wartości  $dF$  ze wzoru (19) wyniesie

$$H = \int dH = \frac{1}{q} \int 2dF \sin \alpha = \frac{2i}{r^2} \sin \alpha \int_0^{\pi R} dl,$$

gdzie górna granica całkowania jest wyznaczona przez warunek, że każdy z wyrazów pod znakiem całki jest sumą dwu elementów obwodu.

Uwzględniając, że

$$r^2 = R^2 + x^2 \quad \text{oraz} \quad \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{R}{r},$$

otrzymamy

$$H = \frac{2\pi R}{r^2} \sin \alpha \cdot i = \frac{2\pi R^2}{r^3} i = 2\pi \cdot \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot i,$$

wzór identyczny ze wzorem (10).

Rozpatrzmy teraz pole magnetyczne nieograniczonego prostego drutu (rys. 262). Natężenie pola wzbudzonego w punkcie C przez element  $dl$  takiego przewodnika prądu, prostopadłe do płaszczyzny przesuniętej przez element  $dl$  i prostą AC, jest prostopadłe do płaszczyzny rysunku i przy takim kierunku prądu, jak w danym przypadku, skierowane za płaszczyznę rysunku. Kierunki więc natężeń wszystkich pól elementarnych są zgodne, natężenie wypadkowe jest ich sumą algebraiczną.

Opiszmy z punktu C łuk promieniem  $r$ , długość tego łuku

$$dS = r d\alpha,$$

wobec czego

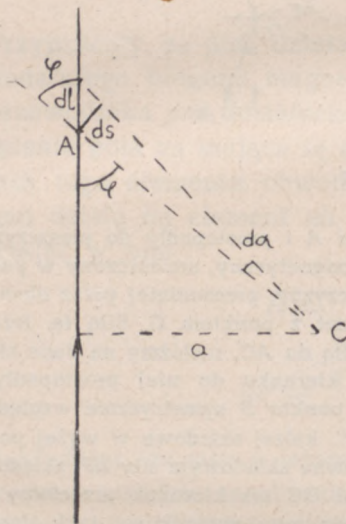
$$dl = \frac{dS}{\sin \varphi} = \frac{r d\alpha}{\sin \varphi},$$

biorąc pod uwagę, że

$$r = \frac{a}{\sin \alpha},$$

otrzymujemy ze wzoru Biota-Savarta

$$dH = \frac{i \cdot dl \cdot \sin \varphi}{r^2} = \frac{i \cdot r d\alpha \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi \cdot r^2} = \frac{id\alpha}{r} = \frac{i \cos \alpha}{a} d\alpha,$$



Rys. 262

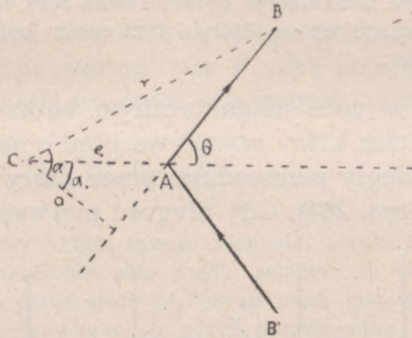


skąd

$$H = \frac{i}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{2i}{a},$$

zgodnie ze wzorem (16).

Niech teraz pole będzie wzbudzone tak, jak we wspomnianych w ust. 2 doświadczeniach Biota i Savarta, przez bardzo długi, prosty drut, zgięty w punkcie  $A$  (rys. 263) i niech badany punkt  $C$  leży na dwusiecznej kąta, jaki tworzą pozostałe  $BA$  i  $AB'$ . Przy sumowaniu działań elementów gałęzi  $AB$  kąt  $\alpha$  zmieniać się będzie od pewnej



Rys. 263

stałej wartości  $\alpha$ ,  $= \frac{\pi}{2} - \theta$ , gdzie  $\theta$  połowa kąta między gałęziami, do  $\frac{\pi}{2}$ , wobec czego natężenie pola, wzbudzonego przez tę gałąź,

$$H_1 = \frac{i}{a} \int_{\frac{\pi}{2} - \theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{i}{a} (1 - \cos \theta),$$

gdzie  $a$  tak, jak poprzednio, oznacza długość prostopadłej, opuszczonej z punktu  $O$  na przewodnik  $AB$ . Podstawiając  $\rho = \frac{a}{\sin \theta}$  otrzymamy

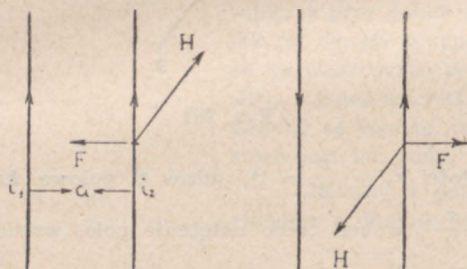
$$H_1 = \frac{i}{\rho} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{i}{\rho} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

oraz analogiczny wzór na natężenie pola gałęzi  $AB'$ .



Pomiary Biota i Savarta istotnie potwierdziły, że natężenie pola jest w tym przypadku odwrotnie proporcjonalne do  $\rho$  i wprost proporcjonalne do  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ . Należy jednak zaznaczyć, że podstawowe założenie, którym posługiwaliśmy się przy wyprowadzaniu wzoru Biota i Savarta, a mianowicie, że natężenia pól elementarnych, wzbudzanych przez poszczególne elementy obwodu, są wzajemnie niezależne, jest założeniem całkowicie dowolnym, którego nie można poddać żadnemu sprawdzeniu doświadczalnemu. Zgodność wzorów, jakie otrzymujemy stosując prawo Biota-Savarta, ze wzorami, wyprowadzonymi uprzednio z rozpatrywania działań całego obwodu, nie jest wystarczającym dowodem, że prawo to ma istotnie znaczenie fizyczne, a nie jest jedynie dogodnym wzorem rachunkowym. Moglibyśmy bowiem dodać we wzorze (19) wyrazy, których suma przy całkowaniu wzdłuż obwodu zamkniętego byłaby równa zeru, nie zmieniając w niczym ostatecznego wzoru, który i tym razem byłby zgodny z wynikami pomiarów.

Umieścimy w polu magnetycznym bardzo długiego prostego drutu  $A$ , przez który przepływa prąd o natężeniu  $i_1$ , drugi taki sam równoległy przewodnik, przez który przepływa prąd o natężeniu  $i_2$  (rys. 264). Gdy długość pierwszego z tych prze-



a Rys. 264 b

wodników jest, jakieśmy to założyli, bardzo duża, możemy przyjąć, że natężenie pola magnetycznego tego przewodnika będzie miało we wszystkich punktach przewodnika drugiego wartość i kierunek ten sam (za płaszczyznę rysunku, w przypadku, przedstawionym na rys. 264a). Kierunek jednak siły, jaką pole jednego przewodnika działać będzie na przewodnik drugi, zależy będzie od kierunku prądu w tym przewodniku: gdy prąd ten ma kierunek zgodny z kierunkiem prądu w przewodniku



pierwszym, siła  $F$  jest skierowana ku temu przewodnikowi (rys. 264a), gdy prąd ma kierunek odwrotny, siła jest skierowana przeciwnie. Jak wykazały doświadczenia Ampère'a, z taką samą siłą, lecz przeciwnie skierowaną działa drugi przewodnik na pierwszy tak że w przypadku zgodnych kierunków prądów  $i_1$  i  $i_2$  przewodniki te przyciągają się, w przypadku kierunków odwrotnych odpychają się. Uogólniając ten wynik na przewodniki o długości dowolnej otrzymamy prawo Ampère'a: liniowe przewodniki równoległe, w których płyną prądy o kierunkach zgodnych, wzajemnie się przyciągają, przewodniki zaś, w których prądy mają kierunki przeciwnie, odpychają się.

Niech  $l$  będzie długością drugiego przewodnika. Stosując wzory (16) i (17) na wartość siły  $F$ , jaką pole bardzo długiego prostego drutu działa na drugi przewodnik, otrzymamy

$$F = \mu \cdot H \cdot i_2 \cdot l = \mu \cdot \frac{2i_1}{a} i_2 \cdot l = 2\mu \cdot \frac{i_1 i_2}{a} \cdot l. \quad (20)$$

Moglibyśmy i tym razem podobnie, jakeśmy to uczynili przy wyznaczaniu natężenia pola prądu, założyć, że wzajemne działanie przewodników, przez które przepływa prąd, jest wypadkową działań elementarnych, wywieranych przez poszczególne elementy jednego przewodnika na elementy drugiego. I tym razem jednak musielibyśmy powtórzyć wszystkie te zastrzeżenia, jakie wypowiedzieliśmy wyżej przy omawianiu prawa Biota-Savarta, i stwierdzić, że zależnie od dodatkowych założeń otrzymujemy różne wyrażenia tych praw elementarnych, dające, oczywiście, w zastosowaniu do całych obwodów te same wyniki. Dlatego też poprzestaniemy na przytoczeniu (bez wyprowadzenia) jedynie najważniejszych wzorów tego rodzaju, a mianowicie wzoru Ampère'a i wzoru Grosmana.

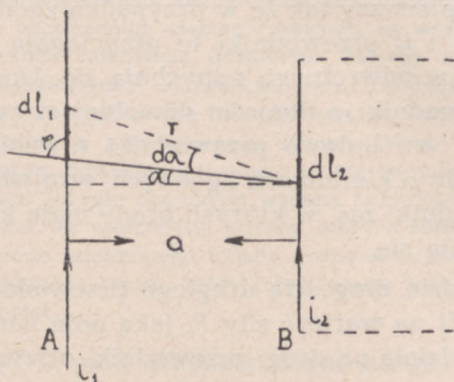
Ampère zakładając, że kierunki sił, jakimi działają na siebie wzajemnie elementy  $dl_1$  i  $dl_2$  dwu obwodów, leżą na prostej  $r$ , łączącej je dwa elementy, i że siła, z jaką element  $dl_1$  działa na element  $dl_2$  jest zgodnie z trzecią zasadą Newtona równa i przeciwnie skierowana do siły, jaką element  $dl_2$  działa na element  $dl_1$ , wyraził wartość tych sił wzorem następującym

$$dF = \frac{\mu \cdot i_1 i_2 dl_1 \cdot dl_2}{r^2} (2 \cos \epsilon - 3 \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2), \quad (21a)$$

gdzie  $\epsilon$  oznacza kąt między elementami  $dl_1$  i  $dl_2$ ,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  kąty, jakie kierunki prądów w elementach  $dl_1$  i  $dl_2$  tworzą z prostą  $r$ .



W przypadku, gdy jednym z tych przewodników jest nieograniczenie długi prostoliniowy przewodnik prądu, drugim zaś równoległy do niego również prostoliniowy przewodnik prądu o długości  $l$ , (rys. 265) we wzorze (21a)  $\varepsilon = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 90 - \alpha$ . Postępując tak, jak



Rys. 265

przy wprowadzeniu wzoru na natężenie pola nieograniczonego prostoliniowego przewodnika prądu (str. 490), znajdziemy, że

$$dl_1 = r d\alpha; \quad r = \frac{a}{\cos \alpha}; \quad \text{skąd} \quad dl_1 = \frac{a \cdot d\alpha}{\cos \alpha},$$

i że siła, jaką nieograniczenie długi przewodnik prądu działa na element  $dl_2$  drugiego przewodnika prądu jest równa

$$dF = \frac{\mu \cdot i_1 i_2 \cdot dl_2}{a} \left\{ 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot d\alpha - 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \right\} = \mu \cdot \frac{2 i_1 i_2}{a} dl_2,$$

skąd siła działająca na przewodnik o długości  $l$

$$F = 2\mu \frac{i_1 i_2}{a} \cdot l$$

zgodnie ze wzorem (20).

Grossmann, stosując do elementów przewodnika prądu wzór (18) oraz prawo Biota i Savarta, wyprowadził (1845 r.), że siła z jaką element  $dl_1$  działa na element  $dl_2$ , jest równa

$$dF = \frac{\mu \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot dl_1 \cdot dl_2}{r^2} \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2, \quad (21b)$$

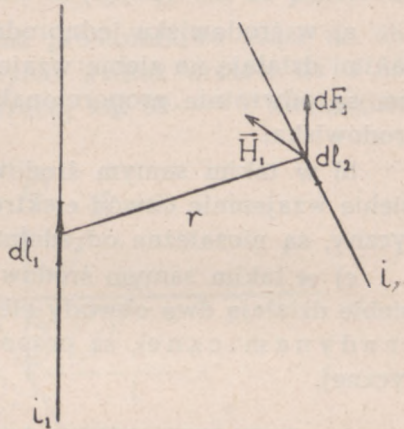


gdzie  $\varphi_1$ , oznacza kąt, jaki element działający  $dl_1$  tworzy z prostą  $r$ , łączącą oba elementy,  $\varphi_2$  — kąt, jaki element  $dl_2$ , podlegający działaniu, tworzy z natężeniem pola elementu  $dl_1$ .

Tym razem siła, jaką pole elementu  $dl_1$  działa na element  $dl_2$ , nie zawsze jest równa sile, jaką pole elementu  $dl_2$  działa na element  $dl_1$ . Tak np. w przypadku przedstawionym na rys. 266, gdzie elementy  $dl_1$  i  $dl_2$  leżą w dwu wzajemnie prostopadłych płaszczyznach i gdzie  $r$  prostopadłe do  $dl_1$  nie jest prostopadłe do  $dl_2$ , siła  $dF_1$ , jaką pole elementu  $dl_1$  działa na element  $dl_2$ , jest równa

$$\frac{\mu \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot dl_1 \cdot dl_2}{r^2} \sin \varphi_2,$$

siła zaś  $dF_2$ , jaką pole elementu  $dl_2$  działa na element  $dl_1$ , równa jest zeru, natężenie bowiem pola elementu  $dl_2$  jest równoległe do elementu  $dl_1$ . Wzór więc Grossmanna nie czyni na ogół zadość trzeciej zasadzie Newtona.



Rys. 266

Gdy przewodnik prostoliniowy o długości  $l$  podlega działaniu pola, wzbudzonego przez równoległy do niego nieograniczony przewodnik prostoliniowy,  $\varphi_2 = 90^\circ$ . Mamy wtedy

$$dF_1 = \frac{\mu \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot dl_1 \cdot dl_2}{r^2} \sin \varphi_1,$$

Podstawiając, tak, jak poprzednio,

$$dl_1 = r da; \quad r = \frac{a}{\cos \alpha} \quad \text{i} \quad \varphi_1 = 90 - \alpha,$$

otrzymamy na siłę, jaką nieograniczony prostoliniowy przewodnik prądu działa na element  $dl_2$

$$dF_1 = \frac{2 \mu \cdot i_1 i_2}{a} \cdot dl_2,$$

skąd siła, działająca na przewodnik  $l_2$

$$F_1 = \frac{2 \mu \cdot i_1 i_2}{a} \cdot l_2,$$

znów zgodnie ze wzorem (20).



Gdy wzór Grossmanna zastosujemy do wyznaczania sił, jakimi wzajemnie działają na siebie obwody zamknięte, wartości sił, otrzymane na tej drodze, będą zawsze czyniły zadość trzeciej zasadzie Newtona.

Badania zatem działań magnetycznych magnesu i prądu prowadzą do następujących wniosków:

a) w środowisku jednorodnym i równokierunkowym siły, jakimi działają na siebie wzajemnie dwa bieguny magnetyczne, są odwrotnie proporcjonalne do zdolności magnetycznej środowiska;

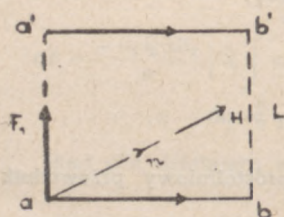
b) w takim samym środowisku, siły, jakimi działają na siebie wzajemnie obwód elektromagnetyczny i biegun magnetyczny, są niezależne od zdolności magnetycznej środowiska;

c) w takim samym środowisku siły, jakimi wzajemnie na siebie działają dwa obwody elektryczne (tzw. działania elektrodynamiczne), są proporcjonalne do zdolności magnetycznej.

#### 4. — RUCH PRZEWODNIKA Z PRĄDEM W POLU MAGNETYCZNYM.

Jeżeli na ruchomą gałąź obwodu  $ab$  nie działają żadne inne siły poza siłami pola, gałąź przesuwac się będzie w kierunku, wyznaczonym przez kierunek siły  $F$ . Praca, wykonana przez siły pola przy przesunięciu przewodnika z położenia  $ab$  do  $a'b'$  wzdłuż drogi  $l$ , będzie równa

$$W = \mu \cdot H_1 \cdot i \cdot h \cdot l,$$



Rys. 267

gdzie  $H_1$  jest składową natężenia pola prostopadłą do kierunku prądu (p. str. 488). Oznaczając, jak poprzednio, przez  $\varphi$  kąt między kierunkiem natężenia pola  $\vec{H}$  i kierunkiem prądu i kładąc  $\mu H = B$  będziemy mieli

$$W = i \cdot B \cdot \sin \varphi \cdot S, \quad (22)$$

gdzie  $S$  jest polem, opisanym przez przewodnik podczas ruchu.

Gdy zamiast kąta  $\varphi$  wprowadzimy kąt  $(\vec{H}_1, \vec{H}) = 90 - \varphi$ ,

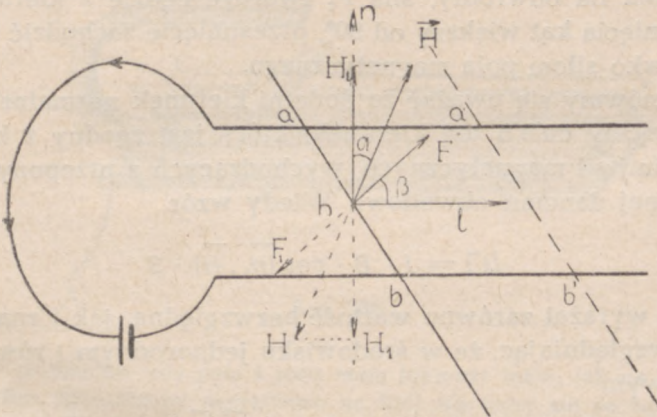
$$W = i \cdot B \cdot \cos (\vec{H}_1, \vec{H}) \cdot S. \quad (22a)$$



Praca ta jest wyrażona w ergach, jeżeli  $i$  mierzymy w jednostkach elektromagnetycznych,  $S$  — w  $\text{cm}^2$ .

Wzór ten możemy z łatwością uogólnić na przypadek, gdy na badaną gałąź obwodu działają oprócz sił pola jeszcze inne siły, wskutek czego kierunek jej przesunięcia nie jest zgodny z kierunkiem siły  $F$ .

Przypuśćmy np. że ruchoma prostoliniowa część  $ab$  obwodu może przesunąć się jedynie wzdłuż drutów  $aa'$  i  $bb'$  (rys. 268) w płaszczyźnie, tworzącej kąt  $90 - \alpha$  z kierunkiem



Rys. 268

natężenia pola. Rozłożmy i tym razem natężenie pola na dwie składowe: prostopadłą  $H_1$  i równoległą  $H_2$  do płaszczyzny  $aa'bb'$ . Składowa równoległa działa na przewodnik  $ab$  siłą prostopadłą do płaszczyzny  $aa'bb'$ , a zatem prostopadłą do kierunku przesuwania się przewodnika. Praca przez nią wykonana jest więc równa zero. Składowa prostopadła  $H_1$  działa siłą  $F$ , leżącą w płaszczyźnie przesunięcia, praca jej jest równa

$$W = F \cdot l \cdot \cos \beta, \quad (a)$$

gdzie  $\beta$  oznacza kąt między kierunkiem siły  $F$  i kierunkiem przesunięcia. Podstawiając wartość siły  $F$

$$F = \mu H_1 \cdot i \cdot h = \mu H \cos \alpha \cdot i \cdot h = i B \cos(\vec{H}_1, \vec{H}) \cdot h,$$



mamy

$$W = i \cdot B \cdot \cos(H_1, H) \cdot l \cdot h \cdot \cos \beta = i \cdot B \cdot \cos(\vec{H}_1, \vec{H}) \cdot S, \quad (b)$$

gdzie, jak poprzednio,  $S$  jest polem, opisanym przez przewodnik podczas przesunięcia.

Praca ta jest dodatnia, przesunięcie zachodzi pod działaniem sił pola, gdy kąt  $\beta$  jest mniejszy od  $90^\circ$ , a więc, gdy składowa  $H_1$  jest skierowana od północnej strony równoważnej przepony magnetycznej na zewnątrz. Jeżeli bowiem zachowując ten sam kierunek prądu, co na rys. 268, zmienimy kierunek pola na odwrotny, siła  $F_1$  tworzyć będzie z kierunkiem przesunięcia kąt większy od  $90^\circ$ , przesunięcie zachodzić będzie przeciwko siłom pola magnetycznego.

Umówmy się uważać za dodatni kierunek normalnej  $n$  do płaszczyzny  $aa'b'b$  ten kierunek, który jest zgodny z kierunkiem linii sił magnetycznych, wychodzących z przepony, równoważnej danemu obwodowi. Wtedy wzór

$$W = i \cdot B \cdot \cos(\vec{n}_1, \vec{H}) \cdot S \quad (c)$$

będzie wyrażał zarówno wartość bezwzględną, jak i znak pracy. Uwzględniając, że w środowisku jednorodnym i równokierunkowym

$$B \cos(n_1, H) \cdot S = B \cdot \cos(\vec{n}, \vec{B}) \cdot S = \Psi,$$

strumieniowi indukcji magnetycznej, przechodzącej przez powierzchnię, opisaną przez przewodnik podczas ruchu, napiszemy

$$W = i \Psi. \quad (23)$$

Dodatniej wartości tego strumienia indukcji odpowiadać będzie praca, wytworzona przez siły pola, ujemnej — praca, wykonana przeciwko tym siłom.

W polu niejednostajnym drogę, wzdłuż której przesuwa się przewodnik, rozbijamy na odcinki dostatecznie małe, abyśmy mogli we wszystkich ich punktach uważać natężenie pola za mające ten sam kierunek i tę samą wartość. Praca, wykonana na takim odcinku elementarnym będzie równa

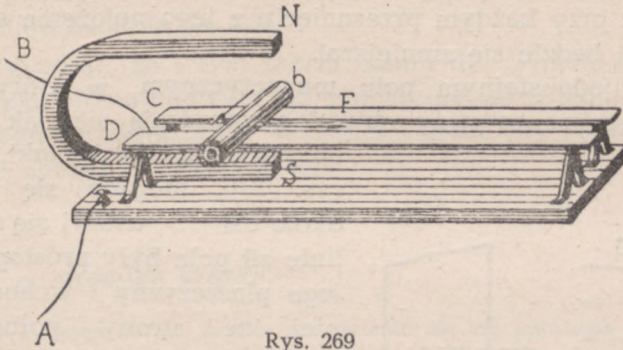
$$dW = i \cdot d\Psi,$$



praca zaś wykonana podczas przesunięcia całkowitego

$$W = i \int d\Psi. \quad (23a)$$

Tego rodzaju ruch prostoliniowej gałęzi obwodu można otrzymać przy pomocy prostego przyrządu, zbudowanego przez Kretschmera (1937 r.). Walec metalowy *ab* dobrze wypolerowany leży na sztabkach metalowych *D* i *C* i zamyka w ten sposób obwód *ADabCB* (rys. 269). Część obwodu *DabC* znajduje się w polu silnego magnesu.



Rys. 269

W przypadku, gdy pole i prąd mają kierunki takie, jak na rysunku, walec umieszczony początkowo na linii *NS* toczy się po zamknięciu obwodu wzdłuż sztabek *D* i *C* w kierunku wskazanym przez kierunek wektora *F*.

Jeżeli obwód posiada więcej gałęzi ruchomych, praca wykonana przez siły pola przy przesunięciu tych gałęzi do nowych położeń, jest, oczywiście, równa sumie prac, wykonanych przy przesunięciu każdej z nich oddzielnie.

$$W = \Sigma W_n = \Sigma i_n \int d\Psi \quad (23a)$$

Oznaczmy przez  $\Psi_0$  strumień indukcji magnetycznej pola zewnętrznego, przechodzący przez obwód w początkowym położeniu jego części, przez  $\Psi_1$  — strumień indukcji w położeniu końcowym, mamy wtedy

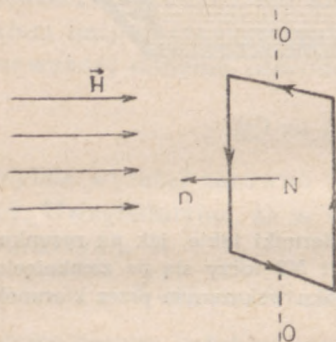
$$\Psi_1 = \Psi_0 + \int d\Psi = \Psi_0 + \Psi. \quad (24)$$



Gdy zmiana położenia części układu następuje pod działaniem sił pola magnetycznego,  $\Psi$  jest zawsze dodatnie,  $\Psi_1$  więc jest zawsze większe od  $\Psi_0$ .

Jest rzeczą oczywistą, że wzór (24) stosować się będzie również i wtedy, gdy części obwodu są z sobą sztywno związane, cały jednak obwód może się poruszać w polu magnetycznym. Położeniem równowagi takiego obwodu będzie takie położenie, w którym strumień indukcji magnetycznej, przechodzący przez dany obwód, ma wartość największą; wtedy bowiem przy każdym przesunięciu z tego położenia strumień indukcji będzie się zmniejszał.

W jednostajnym polu magnetycznym, w którym siły, działające na sztywny obwód sprowadzają się, jak wiemy,

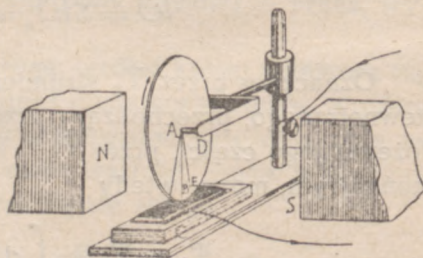


Rys. 270

do pary sił, obwód taki, jak na rys. 270, mogący się obracać około osi OO, ustawi się tak, aby linie sił pola były prostopadłe do jego płaszczyzny i wchodziły do niej ze strony południowej. W przypadku, przedstawionym na rys. 270, gdy dodatni kierunek normalnej  $n$  jest przeciwny do kierunku natężenia pola, równowaga będzie niestała. W niejednostajnym polu magnetycznym siły pola będą przesuwawały rucho-

my obwód elektryczny do takiego położenia, w którym w danych warunkach strumień indukcji, przechodzący przez dany obwód miałby wartość możliwie największą.

Na tych zasadach oparta jest budowa motorów elektrycznych, pomyślana w ten sposób, aby ruchomy obwód lub ruchoma część obwodu, nigdy nie był w położeniu równowagi. Takim motorem jest np. tzw. koło Barlowa (rys. 271).



Rys. 271



Krażek metalowy, mogący się obracać dookoła poziomej osi  $AD$ , dolnym swym brzegiem jest nieco zanurzony w rtęci, wypełniającej korytko  $C$ . Oś  $AD$  połączona jest z jednym biegunem źródła prądu, rtęć w korytku — z drugim, tak, że prąd od  $A$  do  $C$  (lub odwrotnie) płynie wzdłuż wąskiego wycinka  $AB$  krążka. Gdy krążek umieścimy w polu magnetycznym, siły pola, działając na wycinek z prądem, powodują jego przesunięcie w płaszczyźnie krążka; na miejsce jednak wycinka  $AB$  w rtęci zanurza się natychmiast sąsiedni wycinek  $AE$ , który z kolei podlega działaniom sił pola. W ten sposób krążek obraca się stale dookoła osi  $AD$ .

Przyjmując, że i tym razem mamy do czynienia z przewodnikiem prostoliniowym  $AB$ , napiszemy, że w jednostajnym polu magnetycznym praca, wykonana przez siły pola podczas jednego obrotu krążka, wynosi

$$lU = i \cdot B \cdot \pi r^2,$$

gdzie  $r$  — promień krążka.

Podczas obrotu krążka nie zmienia się ani położenie względem biegunów magnesu tych części przewodnika, na które działa pole, ani natężenie pola, możnaby zatem przypuszczać, że motor stanowi perpetuum mobile. Taki wniosek byłby jednak całkowicie błędny. Zjawisko bowiem, z jakim tu mamy do czynienia, jest bardziej złożone, niżby się to mogło początkowo wydawać. Przy obracaniu się krążka napięcie między punktami  $A$  i  $C$  spada (por. rozdz. VIII, ust. 2) tak że chcąc zachować to samo natężenie prądu, jakie prąd miał wtedy, gdy krążek był nieruchomy, musimy napięcie zwiększyć o  $\Delta V$ , wobec czego energia, dostarczona ze źródła, w ciągu jednej sekundy, będzie podczas obracania się krążka o  $i \cdot \Delta V$  większa, niż wtedy, gdy krążek się nie obraca. Ta początkowo dostarczana energia pozwala utrzymać badany układ, mimo wykonywania przez siły układu pracy, ciągle w tym samym stanie. Układ ten, do którego nie włączamy źródła prądu, nie jest oczywiście układem odosobnionym.

Tego typu motory, nazywane często jednobiegowymi, nie znalazły zastosowania w praktyce. W motorach, zazwyczaj używanych, częścią poruszającą się układu tzw. twornikiem (rotorem) jest drut izolowany, nawinięty w ten lub inny sposób na rdzeniu z żelaza lanego, przy czym w każdym ze zwojów tego przewodnika zmienia się przy prze-

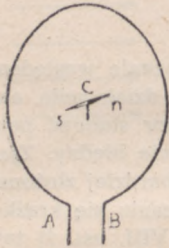


chodzeniu przez położenie równowagi kierunek prądu. O tego rodzaju motorach będziemy mówili później.

#### 5. — GALWANOMETRY I ELEKTRODYNAMOMETRY.

Omawiając działania magnetyczne prądu (ust. 2), stwierdziliśmy istnienie szczególnie prostej zależności między natężeniem prądu i natężeniem wzbudzonego przez prąd pola magnetycznego w dwu przypadkach, a mianowicie w przypadku obwodu kołowego oraz prostego nieograniczonego długiego przewodnika prądu. Ten drugi przypadek może być przy pomiarach odtworzony jedynie w przybliżeniu, budowa zaś obwodu kołowego nie nastęrcza żadnych szczególnych trudności.

Nawińmy na pionowej ramce kołowej  $AB$  jeden lub więcej zwojów izolowanego drutu i umieśmy na pionowym ostrzu w środku geometrycznym  $O$  ramki krótką igłę magnetyczną  $sn$ , która w ten sposób będzie mogła się obracać dookoła osi pionowej (rys. 272). Jeżeli promień ramki jest duży w porównaniu z długością igły, natężenie pola prądu ma na biegunach igły wartość mniej więcej tę samą, co w środkowym punkcie  $O$  obwodu. Na igłę działa wtedy para sił, z których każda równa jest (p. wzór 10c)



Rys. 272

$$F = H \cdot q = \frac{2\pi}{R} \cdot q \cdot ni,$$

gdzie  $q$  oznacza masę magnetyczną biegunów igły,  $n$  — ilość zwojów. Gdy obwód ustawiony jest w płaszczyźnie południka magnetycznego, siła  $F$ , równoległa do osi obwodu, jest prostopadła do osi magnetycznej igły, zazwyczaj mało się różniące od jej osi geometrycznej. Siłę tej, odchylającej igłę z płaszczyzny południka magnetycznego, przeciwdziałają pole magnetyczne ziemskie, działające na każdy z biegunów siłą  $H_z \cdot q$ , gdzie  $H_z$  oznacza składową poziomą magnetyzmu ziemskiego. Kąt odchylenia  $\alpha$  igły od położenia równowagi (rys. 273) jest wtedy wyznaczony ze wzoru, wyrażającego równość momentów sił działających



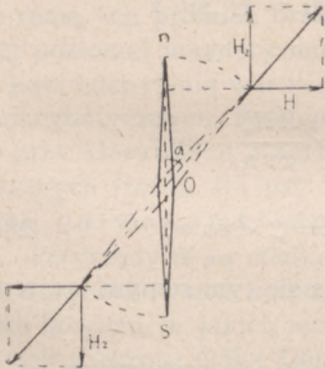
$$H_z \cdot q \cdot l \sin \alpha = H_z \cdot M \cdot \sin \alpha = HM \cos \alpha \quad (\text{a})$$

gdzie  $l$  oznacza długość igły,  $M$  — jej moment magnetyczny. Stąd

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{H_z} = \frac{2\pi}{RH_z} \cdot ni \quad (\text{b})$$

i ostatecznie

$$i = \frac{R \cdot H_z}{2\pi n} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (\text{25})$$



rys. 273

Natężenie prądu jest proporcjonalne do stycznej kąta odchylenia; tym się też tłumaczy nazwa busoli stycznych, jaką dajemy temu przyrządowi. Czynniki

$$C = \frac{R \cdot H_z}{2\pi n} \quad (\text{25a})$$

jest tzw. stałą przyrządu. W busoli stycznych czynnik ten zależy od składowej poziomej natężenia ziemskiego pola magnetycznego, nie mającej, jak wiemy, (p. rozdz. IV, ust. 7) wartości stałej.

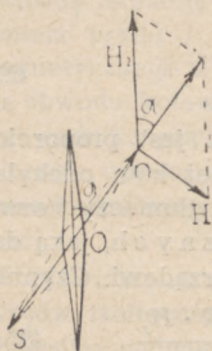
Busoli stycznych pierwszy użył do pomiaru natężenia prądu Pouillet w 1837 r. W przyrządzie Pouilleta igła magnetyczna była zawieszona na cienkiej nici kokonowej, tak że odchyleniu igły z położenia równowagi przeciwdziałały nie tylko siły pola magnetycznego ziemi, lecz również i siły sprężystości, powstające przy skręcaniu nici. Siły te jednak w nici kokonowej są przy skręcaniu o te kąty, z jakimi mamy w tym pomiarze do czynienia, znikomo małe.

Wzór (25) jest, jak to wynika z założeń, na których oparliśmy jego wyprowadzenie, wzorem przybliżonym. Przy znacznym kącie wychylenia natężenie pola w punktach, które po wychyleniu zajmują bieguny igły, nie ma ani tej samej wartości, ani tego samego kierunku, co w punktach, jakie bieguny zajmowały początkowo; pole bowiem obwodu kołowego nie jest polem jednostajnym. Błąd stąd powstający usunięty jest w tzw. busoli wstaw (Pouillet i następnie Poggen-



dorf), w której obwód może się obracać koło osi pionowej. Gdy igła się odchyła, obracamy za nią obwód tak, aby igła stała znajdowała się w płaszczyźnie obwodu. Kąt  $\alpha$ , o jaki igła się ostatecznie wychyli (rys. 274), będzie wtedy wyznaczony wzorem

$$HM = H_z \cdot M \cdot \sin \alpha,$$



skąd

$$H = H_z \cdot \sin \alpha$$

oraz

$$\frac{2\pi}{R} ni = H_z \sin \alpha$$

i ostatecznie

$$i = \frac{RH_z}{2\pi n} \cdot \sin \alpha$$

lub

$$i = C \cdot \sin \alpha, \quad (26a)$$

Rys. 274

gdzie  $C$  — stała przyrządu — wyraża się tym samym wzorem, co w busoli stycznych.

Błąd, wynikający ze zmiany wartości pola prądu można, jak to wykazał Helmholtz (1849 r.), wydatnie zmniejszyć, gdy środek igły umieścimy w punkcie  $O'$ , leżącym na osi obwodu i odległym od środka obwodu  $O$  o połowę jego promienia  $R$ . Tego rodzaju busolę zbudował Gaugain (1853 r.).

Podobnie biorąc dwie płaskie cewki o tym samym promieniu i o wspólnej osi, oddalone od siebie o  $R$  cm, otrzymujemy w sąsiedztwie punktu  $O'$ , leżącego na osi w połowie odległości między cewkami, pole w znacznym stosunkowo obszarze jednostajne. Natężenie pola prądu w tym punkcie obliczamy ze wzoru (10), w którym kładziemy  $x = \frac{R}{2}$ ; mamy zatem, dodając zgodne co do kierunku i równe co do wartości natężenia pól każdej cewki oddzielnie,

$$H = 2H_1 = 4\pi \cdot \frac{R^2 \cdot ni}{\left(\frac{R^2}{4} + R^2\right)^{3/2}} = \frac{32\pi}{5R\sqrt{5}} \cdot ni,$$

skąd po podstawieniu do wzoru (a)

$$i = \frac{5R \cdot \sqrt{5} \cdot H_z}{32\pi \cdot n} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$



Tego rodzaju przyrządy, w których natężenie prądu wyznaczamy z jego działań magnetycznych, nazywamy galwanometrami, rozróżniając galwanometry o ruchomym magnecie, w których tak, jak w busoli stycznych, natężenie wyznaczamy z odchylenia magnesu przez siły pola magnetycznego, wzbudzonego przez dany prąd, i o ruchomym przewodniku prądu, gdy natężenie wyznaczamy z odchylenia przewodnika, w którym płynie mierzony prąd, przez siły pola magnesu.

Używając wyżej opisanych busoli (busoli stycznych i busoli wstaw), otrzymujemy, znając liczbę zwojów, nawiniętych na ramę, ich promień oraz wartość w chwili pomiaru składowej poziomej magnetyzmu ziemskiego, bezpośrednio z pomiaru kąta odchylenia wartość natężenia pola w jednostkach elektromagnetycznych. Posługując się więc tą samą terminologią, co przy klasyfikacji przyrządów, służących do pomiarów elektrycznych (rozdz. III, ust. 9), możemy obiedwie te busole nazywać galwanometrami bezwzględnymi.

Przyrządy te są rzadko używane, głównie wtedy, gdy chodzi o wycechowanie innych przyrządów mierniczych, w warunkach bowiem, w jakich można uważać je za bezwzględne, tzn. stosować wzory (25) i (26) czułość ich jest na ogół niewielka.

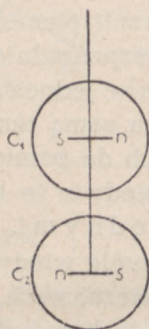
W zazwyczaj używanych galwanometrach o ruchomym magnecie zwiększenie czułości osiąga się przez stosowanie cewek o znacznej ilości zwojów i o możliwie małym promieniu oraz przez znaczne zmniejszenie wpływu pola ziemskiego na magnes galwanometru. Do tego celu służy tzw. astatyzowanie ruchomych magnesów. Przy astatyzowaniu wewnętrznym układ ruchomy składa się co najmniej z dwu złączonych ze sobą, równoległych igieł magnetycznych, których osie magnetyczne mają kierunki przeciwne (Nobili, 1826 r.). Ten układ magnesów poddany jest działaniu pól magnetycznych, dwu cewek, umieszczonych w ten sposób jedna nad drugą, aby w środku każdej z nich znajdowała się jedna z igieł układu, jak to schematycznie przedstawia rys. 275. Gdy prądy w cewkach  $C_1$  i  $C_2$  mają kierunki przeciwne, siły pól magnetycznych cewek działają na dolną i górną igłę w tym samym kierunku tak, że działanie pola prądu na układ magnesów jest większe, niż w przypadku magnesu pojedynczego.



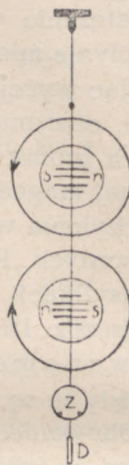
Jednocześnie zmniejsza się siła działania pola ziemskiego, równa w tym przypadku

$$F = (M_1 - M_2) H_z = M' H_z,$$

gdzie  $M_1$  i  $M_2$  oznaczają przeciwnie skierowane momenty układu.



rys. 275



rys. 276

Thomson zastąpił (1851 r.) te dwa pojedyncze magnesy dwoma układami małych magnesów, przyklejonych do krążka z miki (rys. 276), otrzymując w ten sposób jeszcze większą czułość.

Pomijając moment sił sprężystości nici, mający w galwanometrach o ruchomym magniesie zazwyczaj bardzo małą wartość, równanie równowagi układu ruchomego otrzymujemy w postaci, analogicznej do wzoru (25)

$$M' H_z \sin \alpha = MH \cos \alpha = MG \cdot i \cdot \cos \alpha$$

lub dla małych kątów  $\alpha$

$$M' H_z \cdot \alpha = M \cdot G \cdot i, \quad (c)$$

gdzie  $M$  jest sumą momentów magnesów, poddanych działaniu prądu (w przypadku więc układu o dwu magnesach  $M = M_1 + M_2$ ),  $G$  jest stałą galwanometru, którą wyznacza się doświadczalnie; iloczyn  $M \cdot G = a$  jest często nazywany stałą dynamiczną galwanometru.



Rozumiejąc przez czułość galwanometru  $S$  stosunek kąta odchylenia do natężenia prądu otrzymujemy ze wzoru (c)

$$S = \frac{\alpha}{i} = \frac{M G}{M' H_z} \quad (d)$$

czułość jest więc tym większa, im mniejsza jest suma geometryczna momentów magnetycznych układu ruchomego i im większa jest suma arytmetyczna momentów magnesów, na które działa prąd. Zwiększając zatem namagnesowanie poszczególnych magnesów układu oraz ich astatyzowanie zwiększamy czułość galwanometru.

Ze wzoru na okres wahaniaswobodnego układu magnesów

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{B}{M' H_z}}$$

mamy

$$M' H_z = \frac{4\pi^2 B}{T^2}$$

po podstawieniu do wzoru (d) otrzymujemy

$$S = \frac{M \cdot G \cdot T^2}{4\pi^2 \cdot B}$$

przy tym samym okresie wahań i tej samej stałej dynamicznej czułość jest tym większa, im mniejszy jest moment bezwładności układu ruchomego. Zmniejszając więc moment bezwładności otrzymujemy, o ile  $T$  zachowa tę samą wartość, czułość większą.

W układzie Thomsona moment ten wobec niewielkiej długości i masy każdej z igieł jest znacznie mniejszy, niż w układzie Nobili'ego. W galwanometrze Paschena (1893 r.) igielki mają długość od 1 do 1,5 mm, cały układ 26 magnesów waży wraz ze zwierciadłem 5 mg; w galwanometrze Boya — 2 mg.

W tym również celu (zmniejszenia momentu bezwładności) Siemens użył w swoim galwanometrze, nie astatyzując zresztą układu ruchomego, magnesu, zgiętego w podkowę (rys. 277), tzw. magnesu dzwonowego, zmniejszając przez przybliżenie biegunów magnesu moment magnetyczny w porównaniu z momentem tak samo namagnesowanej sztabki prostej  $n$  razy, moment zaś bezwładności  $n^2$  razy.

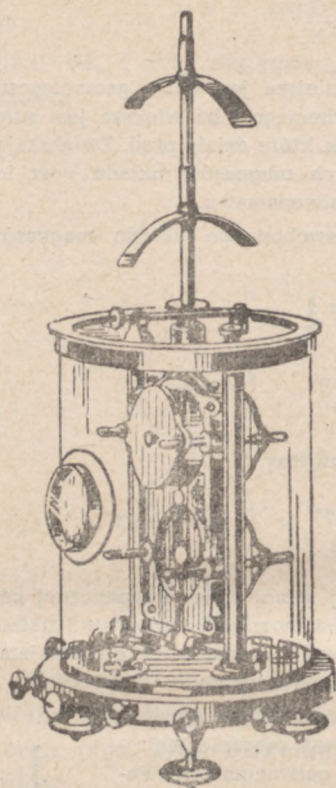


rys. 277

Astatyzowanie wewnętrzne często jest uzupełnione przez astatyzowanie zewnętrzne, polegające na umieszczeniu ponad cewkami dodatkowego magnesu, zazwyczaj wygiętego.



W galwanometrze Thomsona magnes ten — tzw. magnes kierujący — może być przesuwany wzdłuż pręta metalowego,



rys. 278

osadzonego na szafce oszklonej, ochraniającej galwanometr (rys. 278 gdzie dolna cewka jest wyjęta i gdzie galwanometr ma dwa magnesy kierujące). W galwanometrze Nernsta i Jaegera (1924 r.) bardzo lekkie magnesy kierujące są umieszczone na tej samej nici, na której wisi astatyzowany układ igieł.

Przed działaniami, jakie na układ ruchomy mogą wywierać zewnętrzne siły magnetyczne, których zmian nieraz nie można przewidzieć (np. nagle zmiany natężenia pola magnetycznego ziemi, zmiany, wywołane przesunięciem w pobliżu magnesu niewielkich nawet mas żelaza itp.) można, przynajmniej częściowo, układ ochronić umieszczając go w zasłonie żelaznej. Wtedy już astatyzowanie może stać się zbyt trudne. Tego rodzaju galwanometry pancerne o jednym „pancerzu” zbudował pierw-

szy W. Thomson (1858 r.); w nowszych galwanometrach du Bois i Rubensa (1900 r.) potrójny pancierz osłabia zewnętrzne działania magnetyczne mniej więcej 1000 razy.

Zbyt długotrwałym wahaniom układu ruchomego koło nowego położenia równowagi można zapobiec zwiększając opór, jaki ruchowi układu stawia środowisko, w którym układ się porusza; a więc np. zawieszając na tej samej nici, na której wiszą magnesy, płytkę o dość znacznej powierzchni, obracającej się razem z układem; płytkę taką czasami, gdy chodzi o otrzymanie silnego tłumienia, zanurza się w naczyniu z cieczą. Dogodniejsze jednak od tego rodzaju tłumień



mechanicznych jest tłumienie elektromagnetyczne, na które pierwszy zwrócił uwagę Weber, a które polega na działaniu prądów indukowanych (p. rozdz. VIII, ust. 1), wzbudzonych w przewodnikach przez ruch magnesu. Prądy te, które w przewodnikach o małym oporze mogą osiągnąć znaczne natężenie, działają hamująco na wahania magnesu. Dlatego też w niektórych typach galwanometrów układ magnesów umieszcza się wewnątrz grubościennego naczynia miedzianego.

Z jakimkolwiek jednak tłumieniem mielibyśmy do czynienia, siły tłumienia są w galwanometrach tego typu zawsze proporcjonalne do prędkości kątowej ruchu obrotowego układu magnesów. Oznaczając chwilową wartość kąta wychylenia przez  $\varphi$ , równanie ruchu układu otrzymujemy w postaci

$$B \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = a \cdot i - p \frac{d\varphi}{dt} - D\varphi, \quad (e)$$

gdzie z lewej strony mamy iloczyn momentu bezwładności przez przyspieszenie kątowe, z prawej sumę momentów działających sił i gdzie  $a$  jest stałą dynamiczną galwanometru,  $p$  — czynnikiem zależnym od rodzaju sił tłumiących,  $D$  — momentem kierującym  $M'H_z$  układu swobodnego

Przenosząc wyrazy zawierające kąt  $\varphi$  i jego pochodne względem czasu na lewą stronę otrzymujemy

$$B \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + p \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = a \cdot i. \quad (f)$$

Koło nowego położenia równowagi układ waha się w ten sam sposób, jak koło swego położenia zerowego, wartość bowiem, jaką kąt  $\varphi$  posiada w danej chwili różni się od wartości, jaką by posiadał w tej samej chwili przy wahanii koło położenia zerowego, o stałą wielkość  $\alpha$  równą kątowi równowagi.

Podstawiając do wzoru (f)  $\varphi = \varphi_1 + \alpha$ , otrzymujemy

$$B \frac{d^2(\varphi_1 + \alpha)}{dt^2} + p \frac{d(\varphi_1 + \alpha)}{dt} + D(\varphi_1 + \alpha) = ai,$$

skąd wobec tego, że zgodnie ze wzorem (c),

$$D\alpha = ai,$$

$$B \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + p \frac{d\varphi_1}{dt} + D\varphi_1 = 0$$

lub dzieląc przez  $B$

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{p}{B} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{D}{B} \varphi_1 = 0.$$



Równanie to jest analogiczne do równania (22b, rozdz. II, str. 137), kładąc  $\delta = \frac{p}{2B}$  i  $\omega^2 = C^2 = \frac{D}{B}$  znajdujemy, powtarzając to samo, co przy rozwiązywaniu równania 22b, rozumowanie, że dopóki

$$C^2 - \delta^2 = \frac{D^2}{B} - \frac{p^2}{4B^2} > 0$$

lub co na jedno wychodzi

$$4BD^2 - p^2 > 0,$$

układ wykonuje koło nowego położenia równowagi wahania zanikające, które możemy wyrazić wzorem

$$\varphi_1 = \varphi_0 e^{-\delta t} \cdot \sin \omega_0 \cdot t,$$

gdy założymy, że w chwili  $t = 0$  układ przechodzi przez położenie równowagi. Uwzględniając, że

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 - \delta^2 = \frac{D}{B} - \frac{p^2}{4B^2} = \frac{4BD - p^2}{4B^2},$$

otrzymujemy

$$\varphi_1 = \varphi_0 e^{-\frac{p}{2B} t} \cdot \sin \frac{\sqrt{4BD - p^2}}{2B} \cdot t. \quad (g)$$

Gdy tłumienie osiąga wartość krytyczną, przy której

$$4BD = p^2,$$

ruch układu przestaje być okresowym; układ nie przekracza położenia równowagi, lecz stopniowo się do niego przybliża. Dojście do nowego położenia równowagi, jak również powrót do położenia zerowego, gdy przerwiemy przepływ prądu przez cewki, następuje przy tłumieniu krytycznym w ciągu krótszego czasu, aniżeli w tych samych pozostałych warunkach, przy tłumieniu mniejszym lub większym. W tym ostatnim przypadku, gdy

$$p^2 > 4BD$$

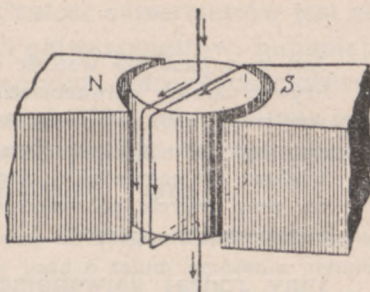
układ bardzo powoli dochodzi („czołga się”) do nowego położenia równowagi.

Badania wpływu tłumienia na ruch układu galwanometrów pierwszy przeprowadził du Bois Raymond (1869 r.); on też pierwszy stwierdził doświadczalnie aperiodyczność ruchu przy silnym tłumieniu.

O wiele mniej wrażliwe na działania zewnętrznych pól magnetycznych są galwanometry, w których część ruchomą



stanowi przewodnik prądu. Najczęściej używanym galwanometrem tego typu jest galwanometr Deprez'a i d'Arsonvala (1889 r.). Między biegunami silnego magnesu (rys. 279) zawieszona jest na drucie, łączącym cewkę ze źródłem prądu, cewka o przekroju prostokątnym. Wewnątrz niej znajduje się rdzeń żelazny, skupiający linie sił pola magnesu. Gdy przez cewkę płynie prąd, siły pola obracają cewkę koło osi pionowej tak, aby strumień indukcji, przechodzący przez pole, objęte obwodem cewki, miał wartość możliwie największą. Kąt odchylenia  $\alpha$  wyznaczony jest wzorem



rys. 279

$$D \cdot \alpha = i \cdot B n S_1 \cos \alpha = i \cdot B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

gdzie  $D$  jest momentem sił sprężystości nici,  $S_1$  — polem objętym przez pojedynczy zwój (por. wz. 6, str. 465).

Dla małych kątów odchylenia otrzymujemy

$$D \cdot \alpha = i \cdot B \cdot S$$

lub w przypadku, gdy środowiskiem, w którym znajduje się cewka, jest powietrze o zdolności magnetycznej  $\mu$  prawie równej jedności

$$D \cdot \alpha = i \cdot H \cdot S. \quad (h)$$

Stąd czułość galwanometru

$$S_C = \frac{\alpha}{i} = \frac{H \cdot S}{D} \quad (i)$$

W tym przypadku siłami tłumiącymi ruch cewki są prawie wyłącznie siły hamujące prądów indukowanych, powstających w zamkniętym obwodzie cewki. Siły te, proporcjonalne do prędkości kątowej cewki, są tym większe, im silniejsze jest pole, w którym cewka się znajduje i im mniejszy jest opór obwodu, będącego siedliskiem prądów indukowanych. Przy pewnej wartości tego oporu tłumienie, w tych samych warunkach pozostałych, staje się równe tłumieniu

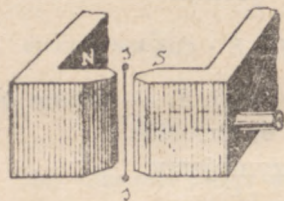


krytycznemu, najdogodniejszemu przy pomiarach. Oznaczając wartość tego oporu krytycznego przez  $r_k$ , mamy na opór (poza galwanometrem) części obwodu

$$r_z = r_k - r_g.$$

Jest to najmniejsza wartość oporu zewnętrznego, przy której można używać danego galwanometru, przy mniejszym bowiem oporze zewnętrznym opór całkowity staje się mniejszy od krytycznego, natężenie więc prądu indukowanego, a co za tym idzie, i tłumienie, staje się większe, niż poprzednio: „cewka się czolga”. Taki przypadek zachodzi np. przy zwarceniu galwanometru (połączenie zacisków galwanometru bardzo małym oporem).

Inny rodzaj galwanometrów o ruchomym przewodniku prądu stanowią galwanometry strunowe (Ader, 1897 r., Einthoven, 1903 r.). W tych galwanometrach częścią ruchomą jest bardzo cienka nić (miedziana, glinowa, kwarcowa



rys. 280

posrebrzana), o średnicy rzędu tysięcznej milimetra, napięta między biegunami magnesu (rys. 280). Odchylenie nici pod działaniem sił pola obserwuje się przez mikroskop. Galwanometry tego typu posiadają w najlepszym przypadku czułość nieco mniejszą od najczulszych galwanometrów typu Thomsona lub

Deprez'a — d'Arsonval'a. Zaletą ich jest bardzo mały okres wahanja (rzędu 0,001 sek), znaczne tłumienie, stałość położenia zerowego oraz mała wrażliwość na wstrząśnienia mechaniczne, ujemną zaś ich stroną, uniemożliwiającą nieraz ich użycie, jest bardzo znaczny opór, wynoszący parę lub kilka tysięcy omów.

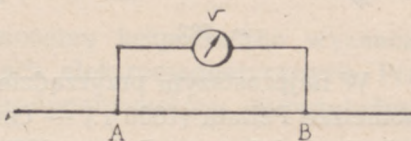
W tzw. ampermetrach, o budowie najczęściej podobnej do budowy galwanometrów Deprez'a — d'Arsonval'a, opór cewki ruchomej jest rzędu co najwyżej paru omów. Cewka jest połączona ze wskazówką, przesuwaną się przy obrocie cewki wzdłuż wycechowanej skali, co pozwala na bezpośrednie odczytanie wartości natężenia prądu. Momentami sił pola są albo momenty sił sprężystości dwu spiralnie zwinionych drutów, doprowadzających prąd do cewki i z nią połączo-



nych — cewka wtedy osadzona jest na dwu ostrzach, wyznaczających jej oś obrotu — albo momenty sił sprężystości drutu, na którym cewka jest zawieszona podobnie, jak w galwanometrze Deprez'a — d'Arsonval'a. Czułość ampermetrów jest na ogół znacznie mniejsza od czułości galwanometrów; najmniejsze natężenie prądu, jakie w najlepszych warunkach możemy przy ich pomocy wyznaczyć, jest rzędu  $10^{-9}$  amp, podczas gdy galwanometry pozwalają, co prawda również w najlepszych warunkach, mierzyć prądy o natężeniu  $10^{-12}$  amp.

O wielkości natężenia  $10^{-12}$  amp da nam pewne pojęcie następujący prosty rachunek: gdybyśmy prąd o takim natężeniu przepuszczali przez roztwór wodny azotanu srebra, otrzymalibyśmy wydzielanie się z roztworu 1 g srebra dopiero po upływie mniej więcej  $3 \cdot 10^5$  stuleci.

Niewielka zmiana w budowie ampermetru zamienia go na przyrząd, mogący służyć do pomiaru różnicy potencjałów dwu punktów obwodu. Wtedy przyrząd włączamy nie bezpośrednio w obwód, lecz równoległe do niego (rys. 281); iloczyn oporu gałęzi  $AVB$  przez natężenie prądu płynącego w gałęzi da nam wartość różnicy potencjałów punktów  $A$  i  $B$  obwodu



rys. 281

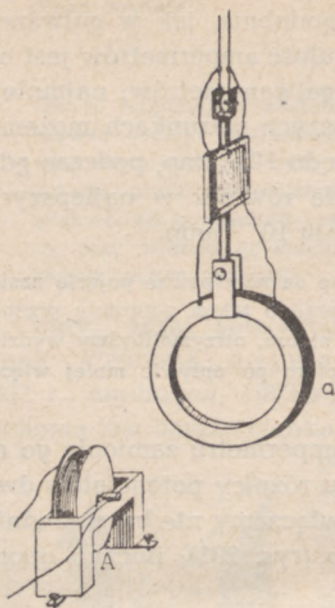
$$V_A - V_B = i_V \cdot r.$$

Gdy ampermetr ma opór tak duży, że oporu drutów, łączących przyrząd z punktami  $A$  i  $B$ , można nie brać pod uwagę, stosunek różnicy potencjałów do natężenia prądu jest wielkością stałą  $r$ , charakterystyczną dla danego przyrządu. Pisząc na skali zamiast wartości natężeń  $i$  iloczyny  $i \cdot r$ , gdzie  $i$  jest wyrażone w amperach,  $r$  w omach, otrzymamy tzw. woltmetry, różniące się od ampermetrów większym oporem i sposobem włączania do obwodu.

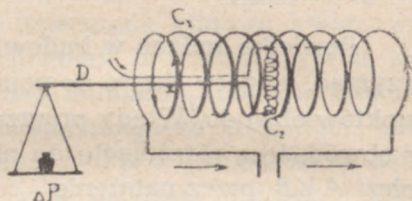
Oddzielny typ przyrządów mierniczych stanowią elektrodynamometry, w których na cewkę ruchomą działa nie pole magnesu, lecz pole prądu elektrycznego (Weber, 1846 r.).



W elektrodynamometrze Webera na cewkę ruchomą  $a$ , zawieszoną na dwu drutach w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny południka magnetycznego działało pole magnetyczne cewki nieruchomej  $A$  (rys. 282). Ustawiając cewkę  $A$  w różnych odległościach i nadając jej osi różne kierunki, Weber stwierdził, że założenia Ampère'a, dotyczące działań elektrodynamicznych, znajdują w wynikach pomiarów całkowite usprawiedliwienie. Analogiczne pomiary wykonali później Cazin (1866 r.), Boltzmann (1869 r.), Niemöller (1878 r.) dochodząc do tych samych, co Weber, wniosków.



rys. 282



rys. 283

W najprostszym przyrządzie tego rodzaju — elektrodynamometrze Pellata (1886 r.) — cewka ruchoma  $C_2$ , osadzona na jednej z belek wagi  $D$  (rys. 283), znajduje się wewnątrz cewki nieruchomej  $C_1$  w takiej odległości od jej końców, że z pewnym, często wystarczającym przybliżeniem można w tym miejscu, w którym znajduje się cewka  $C_2$ , uważać pole cewki za jednostajne. Natężenie tego pola będzie równe

$$H = 4\pi n i$$

(p. wzór 15, str. 479), gdzie  $n$  oznacza ilość zwojów cewki  $C_1$ , przypadający na 1 cm jej długości. Jeżeli w cewce ruchomej o  $n'$  zwojach na centymetr płynie prąd o tym samym natężeniu, cewka ta jest równoważna magnesowi o masach magnetycznych  $\pm q$ , rozmieszczonych na końcowych powierzchniach cewki i równych

$$q = p \cdot n' \cdot i \cdot S$$

(p. wzór d, str. 478).



Jednostajne pole magnetyczne działa na taki magnes parą sił o momencie

$$C = H \cdot q \cdot l,$$

gdyż oś magnetyczna magnesu jest prostopadła do natężenia pola  $H$  (p. rozdz. IV, str. 294). Podstawiając do tego wzoru wartość  $H$  i  $q$  otrzymujemy

$$C = 4\pi\mu \cdot n \cdot n' \cdot l \cdot i^2 \cdot S$$

lub oznaczając przez  $n_r$  iloczyn  $n'l$ , liczbę wszystkich zwojów cewki ruchomej, i podstawiając  $\pi r^2$ , gdzie  $r$  promień cewki, zamiast  $S$ ,

$$C = 4\pi^2 \cdot \mu \cdot n \cdot n_r \cdot r^2 \cdot i^2. \quad (j)$$

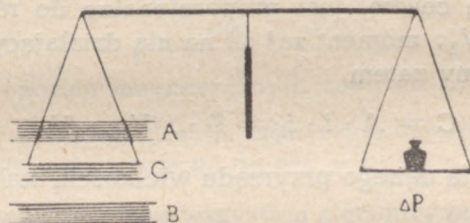
Moment ten równoważymy kładąc na szalkę wagi masę  $\Delta P$ . Oznaczając długość belki, na którą działa ten ciężar, przez  $d$ , mamy

$$\Delta P \cdot g \cdot d = 4\pi^2 \cdot \mu \cdot n \cdot n_r \cdot r^2 \cdot i^2,$$

skąd

$$i = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{g \cdot d}{\mu \cdot n \cdot n_r} \cdot \Delta P}.$$

W tym przeto przypadku możemy bezpośrednio wyznaczyć natężenie prądu w jednostkach elektromagnetycznych. Przyrząd Pellata jest więc elektrodynamometrem bezwzględny.



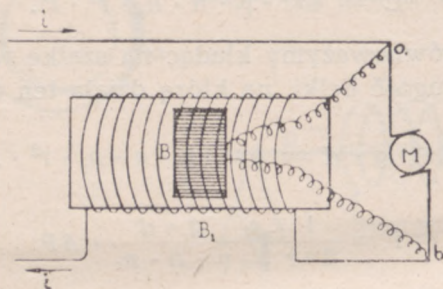
rys. 284

Zależność między natężeniem prądu i siłami, działającymi na ruchomą cewkę, jest o wiele bardziej złożona w tzw. wadze Rayleigh'a (Rayleigh i Sidgwich, 1884 r.), schematycznie przedstawionej na rys. 284. Ruchoma cewka  $C$  zawieszona jest na jednej z belek wagi między nieruchomymi cewkami  $A$  i  $B$ , w których prąd płynie w tym samym kierunku,



tak że ich działania na cewkę wzajemnie się dodają. Wzór którego przytaczać tu nie będziemy, wyprowadzony przez Maxwella, pozwala i tym razem wyznaczyć natężenie prądu w jednostkach bezwzględnych.

Na tej samej zasadzie oparta jest budowa w a t t m e t r ó w, służących do pomiaru energii elektrycznej, dostarczanej przez źródło. Nie wchodząc w szczegóły poprzestaniemy na podaniu schematu ich działania. Prąd  $i$ , dostarczany przez źródło, przechodzi przez cewkę nieruchomą (obwód amperów) o bardzo małym oporze; cewka ruchoma (obwód woltów) jest włączana tak, jak woltmetr, równoległe do obwodu w punktach  $a$  i  $b$ ;



rys. 285

opór jej jest bardzo duży (rys. 285). Natężenie prądu  $i$ , płynącego przez tę cewkę, jest proporcjonalne do różnicy potencjałów  $V_a - V_b$ , moment zaś sił na nią działających — do iloczynu  $ii_1$ ; mamy zatem

$$C = A \cdot i \cdot i_1 = D \cdot i (V_A - V_B),$$

gdzie  $D$  jest dla danego przyrządu wielkością stałą.

#### 6. — OBWÓD MAGNETYCZNY. — ELEKTROMAGNESY.

Jak wynika ze wzoru (7) ust. 2 praca, wykonana przy przesunięciu jednostki masy magnetycznej wzdłuż linii sił pola prądu z jakiegokolwiek punktu  $A$  z powrotem do tego samego punktu, równa jest  $4\pi i$  lub, gdy obwód elektryczny tworzy cewkę o  $n$  zwojach,  $4\pi ni$  tak, że mamy

$$\oint H_s ds = 4\pi ni. \quad (a)$$



Przeprowadźmy przez dany punkt  $A$  bardzo cienką strugę indukcji o bardzo małym przekroju  $dS$ . Strumień indukcji magnetycznej, mający, jak wiemy, w każdym przekroju strugi wartość tę samą, jest równy

$$\psi = \mu \cdot H \cdot dS,$$

skąd

$$H = \psi \cdot \frac{1}{\mu \cdot dS}.$$

Podstawiając do wzoru (a) otrzymujemy

$$4 \pi ni = \psi \int \frac{ds}{\mu \cdot dS}.$$

Nazwijmy wielkość  $4 \pi ni$  siłą magnetobodźczą  $M$ , wielkość zaś

$$\frac{ds}{\mu \cdot dS} = d\rho \quad (27)$$

oporem magnetycznym lub reluktancją (łac. reluctari — opierać się) odcinka  $ds$  strugi. Będziemy więc mieli

$$M = \psi \int d\rho$$

lub

$$\psi = \frac{M}{\int d\rho} = \frac{M}{\rho}, \quad (b)$$

gdzie  $\rho$  jest oporem magnetycznym całej strugi.

Według uchwały Komisji międzynarodowej (1930 r.) jednostka C. G. S. siły magnetobodźczej ma być nazywana gilbertem.

Przeprowadźmy przez wszystkie elementy powierzchni, objętej przez dany przewodnik prądu (lub elementy przekroju cewki), tego rodzaju strugi indukcji. Całkowity strumień indukcji równy sumie strumieni elementarnych wyrazi się wtedy wzorem

$$\Psi = \Sigma \psi = M \Sigma \frac{1}{\rho} = \frac{M}{R}, \quad (28)$$

analogicznym do wzoru Ohma (p. rozdz. V, wzór 9c).



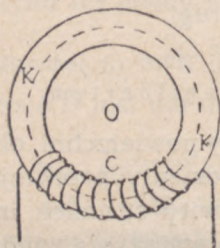
Analogia ta jest jednak wyłącznie formalna. W przeciwstawieniu bowiem do obwodu elektrycznego, w którym przepływowi prądu elektrycznego towarzyszy stałe wywiązywanie się ciepła w obwodzie (ciepło Joule'a), w obwodzie magnetycznym przepływowi strumienia indukcji magnetycznej nie towarzyszy żadne tego rodzaju zjawisko; poza tym wielkość  $R$  — opór magnetyczny obwodu — nie jest bynajmniej, tak jak opór omowy, wielkością charakterystyczną dla danego obwodu, lecz zależy, przynajmniej w najważniejszym dla praktyki przypadku — obwodu utworzonego z ciał ferromagnetycznych — również i od natężenia pola magnesującego, a więc od siły magneto-bodźczej.

Mimo to analogia, ustalona przez wzór (28), między obwodem elektrycznym i magnetycznym może nieraz, jak to wykazali (1886 r.) J. i E. Hopkinsonowie, znacznie ułatwić rozwiązanie pewnych zagadnień, z jakimi spotykamy się w elektrotechnice.

Przypuśćmy np., że mamy pierścień żelazny, całkowicie owinięty drutem, przez który przepływa prąd elektryczny. Strumień indukcji, wzbudzony przez prąd, płynie wtedy wyłącznie przez żelazo. Podstawiając

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{\rho} = \sum \frac{\mu \cdot S}{s} = \mu \cdot \frac{S_0}{s},$$

gdzie  $S_0$  jest przekrojem pierścienia,  $s$  — przeciętną długością elementarnych kołowych strug indukcji (lub długością strugi, przechodzącej przez środkowy element przekroju pierścienia), otrzymujemy ze wzoru (28)



rys. 286

$$\Psi = \frac{4\pi ni \cdot \mu \cdot S_0}{s}. \quad (c)$$

Gdy tylko część  $C$  pierścienia (rys 286) jest owinięta drutem, linie indukcji, ściśle biorąc, tylko w tej części obwodu będą całkowicie w żelazie, w części pozostałej pewien ich ułamek uchodzi do otaczającego pierścienia powietrza, strumień indukcji ulega jakby rozgałęzieniu, tak że mamy

$$\Psi = \Psi_z + \Psi_p, \quad (d)$$



gdzie  $\Psi_z$  oznacza strumień przepływający przez żelazo,  $\Psi_p$  — przez powietrze. Uwzględniając wzór (28) i oznaczając przez  $R$  — wypadkową reluktancję, przez  $R_z$  reluktancję tej gałęzi obwodu, która jest wypełniona żelazem, przez  $R_p$  — gałęzi wypełnionej powietrzem, otrzymujemy

$$\frac{M}{R} = \frac{M}{R_z} + \frac{M}{R_p}$$

lub

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_z} + \frac{1}{R_p}, \quad (29)$$

a więc znów wzór analogiczny do wzoru na równoważny opór omowy (p. rozdz. V, wzór 16a). Stąd zaś wynika, że

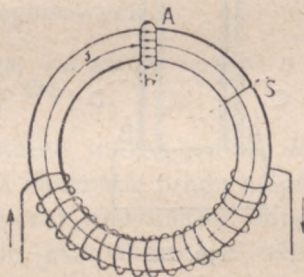
$$\Psi_p = \frac{R_z}{R_p} \cdot \Psi_z.$$

A ponieważ reluktancja powietrza jest bardzo wielka w porównaniu z reluktancją żelaza, możemy z wystarczającym zazwyczaj przybliżeniem napisać, że

$$\Psi_p = 0$$

i wzór (c) stosować również i do takiego obwodu.

Przypuśćmy teraz, że z pierścienia wycięliśmy tak, jak na rys. 287, warstwę o grubości  $h$ . Pomijając i tym razem stratę, wywołaną przez rozpraszanie się linii indukcji w otaczającym powietrzu, i zakładając, że wartość strumienia w tej warstewce powietrza jest taka sama, jak w rdzeniu żelaznym, znajdziemy stosując do takiego obwodu określenie oporu magnetycznego, wyrażone wzorem (27), że



rys. 287

$$R = R_z + R_p = \frac{1}{\mu_z} \frac{s-h}{S} + \frac{1}{\mu_p} \cdot \frac{h}{S}$$



lub kładąc  $\mu_p \doteq \mu_o = 1$

$$R = \frac{s - h + \mu_z \cdot h}{\mu_z \cdot S}$$

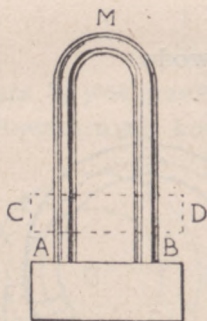
albo w przybliżeniu

$$R \doteq \frac{s + \mu_z \cdot h}{\mu_z S}$$

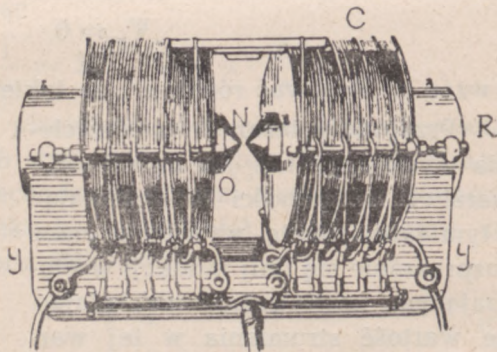
Tak np. gdy  $\mu_z = 800$ , warstewka powietrza o grubości 1 cm ma opór magnetyczny ten sam, co 8 m żelaza.

Twierdzenie, dotyczące rozdziału strumienia indukcji można również stosować i do magnesów stałych. Wtedy jednak nie siła magneto-bodźcza, która staje się tym razem wielkością fikcyjną, lecz suma strumieni indukcji magnetycznej, jest wielkością stałą.

Niech np. *AMB* (rys. 288) będzie magnesem, dźwigającym zworę żelazną o możliwie jak największej masie. Gdy w poprzek magnesu położymy sztabę żelazną *CD*, zwora odpada. Strumień bowiem indukcji płynący przez górną część magnesu rozdziela się w punktach zetknięcia się magnesu ze sztabą na dwa strumienie, wobec czego wartość jego w punktach *A* i *B* ulega zmniejszeniu i tym samym zmniejsza się siła nośna magnesu (Ollivier).



rys. 288



rys. 289

Tego rodzaju obwód magnetyczny jest najprostszym typem tzw. elektromagnesu, przyrządu, służącego do otrzymywania bardzo silnych pól magnetycznych. Jakakolwiek byłaby jego budowa, możemy w nim zawsze rozróżnić następujące części: rdzeń *R* (rys. 289), zazwyczaj z żelaza lub miękkiej



stali, na którym nawinięte są cewki C, przewodzące prąd, jarzmo J o znacznym przekroju, okowy biegunowe O i wreszcie nasady biegunowe N.

Pole magnetyczne w szczelinie między nasadami zależy przede wszystkim od siły magnetobodźczej obwodu, a więc od natężenia prądu magnesującego.

Dla zapobieżenia nadmiernemu ogrzewaniu się cewek przy wielkich natężeniach prądu używa się w silnych elektromagnesach (typu elektromagnesu Weissa przedstawionego na rys. 289) do przewodzenia prądu nie drutów, lecz rurek miedzianych, przez które przepływa, ochładzając je, strumień wody.

Ze wzrostem jednak natężenia pola zmniejsza się zdolność magnetyczna rdzenia, a co za tym idzie, wzrasta reluktancja obwodu, tak że powyżej natężenia nasycenia używanie ciał ferromagnetycznych w obwodzie magnetycznym okazuje się bezcelowe.

Tym się tłumaczy, że dla otrzymania bardzo silnych pól magnetycznych Kapitza używał nie elektromagnesów, lecz cewek bez rdzenia, przez które przepuszczał prąd o niezwykle wielkim natężeniu.

Drugim czynnikiem, warunkującym wartość pola, jest opór magnetyczny warstewki powietrza między okowami biegunowymi. Opór ten jest, rzecz prosta, tym mniejszy, im warstewka jest cieńsza; poza tym zależy również, jak to wykazał Weiss, od kształtu nasad biegunowych.

W elektromagnesie Weissa mają one kształt stożków o kącie wierzchołkowym, wynoszącym około  $57^\circ$ .

Pole to na ogół nie jest jednostajne, można jednak dobierając odpowiednio odległość nasad i natężenie prądu magnesującego otrzymać w pewnej zazwyczaj niewielkiej objętości (rzędu co najwyżej paru  $\text{cm}^3$ ) pole jednostajne. W żadnym jednak przypadku nie można przy użyciu elektromagnesu otrzymać pola o natężeniu większym od 50 000 oerstedów.

Kapitza używając wspomnianych wyżej cewek bez rdzenia otrzymał wewnątrz cewki o średnicy 1 cm pole o natężeniu 300 000 oerstedów, trwające jednak tylko  $\frac{1}{100}$  sek.



Często, zwłaszcza w elektromagnesach o kształcie podkowy, ważną jest rzeczą znać tzw. siłę nośną, tzn. ciężar ciała magnetycznego, jakie mogą równoważyć siły magnetyczne elektromagnesu. Siłę tę możemy obliczyć z wystarczającym, o ile chodzi o ciała ferromagnetyczne, przybliżeniem, zakładając, że przyciągające się powierzchnie (bieguna elektromagnesu i przyciąganego ciała ferromagnetycznego) są pokryte powierzchniowymi gęstościami magnetycznymi  $\pm \sigma$ . Pole, wytworzone przez biegun elektromagnesu, ma natężenie równe  $\frac{2\pi\sigma}{\mu_0}$ , siła zatem  $F$ , jaka działa na  $\text{cm}^2$  powierzchni ciała przyciąganego wynosi  $\frac{2\pi\sigma^2}{\mu_0}$ . Uwzględniając, że

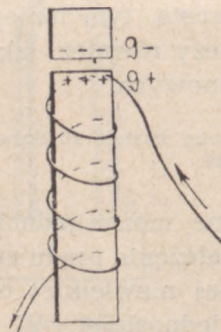
$$\sigma = J \quad \text{oraz} \quad B = \mu_0 H + 4\pi J,$$

otrzymamy

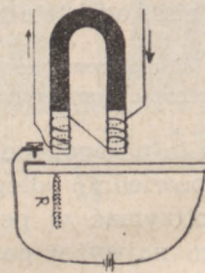
$$\sigma = \frac{B - \mu_0 H}{4\pi}.$$

W ciałach ferromagnetycznych, dalekich od stanu nasycenia,  $H$  jest małe w porównaniu z  $B$ , tak, że ostatecznie mamy

$$F = 2\pi \left( \frac{B}{4\pi} \right)^2 = \frac{B^2}{8\pi}. \quad (30)$$



rys. 290



rys. 291

Zmianie indukcji magnetycznej  $dB$ , a przeto i zmianie natężenia prądu w cewce odpowiada zmiana siły nośnej

$$dF = \frac{1}{4\pi} B dB.$$

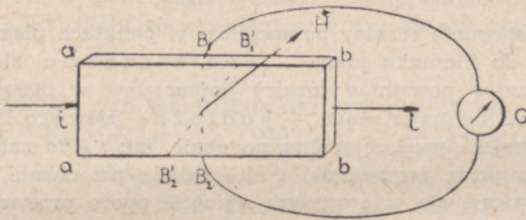


tym mniejsza, im mniejsza jest wartość indukcji  $B$ . Wobec tego w układach takich, jak np. telefony lub wszelkiego typu przyrządy przekaźnikowe (relais), gdzie są używane prądy słabe, poddaje się często rdzeń działaniu magnesującym magnesu stałego (rys. 29), przy czym siłę przyciągającą, wywieraną na zaworę, gdy prąd nie płynie, równoważy siła sprężystości sprężyny  $R$ . Siła przyciągająca wzrasta lub maleje zależnie od kierunku prądu w cewce. Takie elektromagnesy są nazywane spolaryzowanymi.

#### 7. — ZJAWISKA GALWANOMAGNETYCZNE I TERMOMAGNETYCZNE.

Działania pola magnetycznego, które w rozpatrywanych przez nas dotychczas przypadkach prądów, płynących przez przewodniki liniowe, ujawniały się w postaci działań ponderomotorycznych na przewodnik prądu, w przypadku prądu, płynącego przez przewodnik nieliniowy, ujawniają się również w tzw. zjawiskach galwanomagnetycznych, z których najważniejsze polega na odkrytej przez Halla (1879 r.) zmianie kierunku linii prądu.

Niech  $aabb$  będzie cienką prostokątną płytką przewodzącą, przez którą przepływa prąd o natężeniu  $i$  (rys. 292) i niech



rys. 292

powierzchnie krótszych boków  $aa$  i  $bb$  będą powierzchniami ekwipotencjalnymi: linie prądu, prostopadłe do tych powierzchni (p. rozdz. V, str. 366), są liniami prostymi, równoległymi do dłuższych boków  $ab$ . Punkty  $B_1$  i  $B_2$ , leżące na tych bokach w tej samej odległości od końców płytki, mają potencjały jednakowe, co łatwo można sprawdzić, łącząc te dwa punkty drutem i stwierdzając, że w utworzonym w ten sposób obwodzie żaden prąd nie płynie. Jeżeli jednak płytkę poddamy działaniu pola magnetycznego, prostopadłego do kierunku prądu, w ob-



wodzie  $B_1 G B_2$  zacznie płynąć prąd, o natężeniu tym większym, im większe jest natężenie prądu  $i$ , natężenie pola  $H$  i im mniejsza jest grubość płytki  $d$ . Przesuwając końce drutów wzdłuż boków  $aB_1 b$  i  $aB_2 b$ , znajdziemy, że prąd w obwodzie z galvanometrem przestanie płynąć dopiero wtedy, gdy końce drutów znajdują się w punktach  $B'_1$  i  $B'_2$ , wyznaczających nowe położenie powierzchni ekwipotencjalnej. Zjawisko zatem zachodzi tak, jak gdyby powierzchnia ekwipotencjalna i prostopadłe do niej linie prądu obróciły się o pewien kąt. Gdy przesunięcie punktów o jednakowym potencjale zachodzi w kierunku obrotu śruby prawoskrętnej, wkręcanej wzdłuż linii sił pola magnetycznego (tak, jak na rys. 292), zjawisko Halla nazywamy dodatnim, gdy w przeciwnym — ujemnym. Oznaczając różnicę potencjałów punktów  $B_1$  i  $B_2$  lub, co na jedno wychodzi, siłę elektrobodźczą, czynną w obwodzie  $B_1 G B_2$  przez  $\mathcal{E}_H$  możemy, zestawiając wyniki doświadczeń napisać, że

$$\mathcal{E}_H = R \cdot \frac{i \cdot H}{d}, \quad (31)$$

gdzie  $R$  — współczynnik zjawiska Halla jest wielkością, zależną od materiału płytki.

Powstawaniu różnicy potencjałów w punktach płaszczyzny, prostopadłej do kierunku prądu — poprzecznemu zjawisku Halla — towarzyszy powstanie różnicy potencjałów w płaszczyźnie równoległej do kierunku prądu — podłużne zjawisko Halla. Ta różnica potencjału, proporcjonalna, podobnie, jak  $\mathcal{E}_H$  do natężenia prądu, płynącego przez przewodnik, i skierowana przeciwnie do kierunku prądu, ujawnia się w pozornym wzroście oporu przewodnika, stosunek bowiem natężenia prądu do przyłożonej na końcach przewodnika zewnętrznej różnicy potencjałów maleje, pozostając jednak przy danym natężeniu pola magnetycznego stałym. Z tego punktu widzenia wzrost oporu, zachodzący, jak o tym obszerniej mówiliśmy w rozdziale poprzednim (str. 391), przy wzroście natężenia pola magnetycznego, wiązałby się z rozpatrywanymi w tym ustępie zjawiskami galwanomagnetycznymi.

Trudności doświadczalne, na jakie się natrafia przy pomiarze tego współczynnika, nie pozwalają na ogół ustalić dokładnej jego wartości. Dlatego też, nie przytaczając wyników różnych pomiarów, poprzestaniemy na podaniu ogólnych wniosków, do jakich prowadzi badanie zjawiska Halla. Okazuje



się przede wszystkim, że wzór (27) sprawdza się jedynie w niewielkich granicach zmian wartości natężenia  $H$ ; współczynnik  $R$  nie ma więc wartości stałej, lecz zmienia się w zależności od wartości natężenia pola. Dla bizmutu np., w którym zjawisko Halla występuje najwyraźniej, współczynnik ten ze wzrostem natężenia od 1500 do 12000 oerstedów maleje przeszło dwukrotnie (v. Ettingshausen i Nernst, 1888 r.); w polu 10 000 oerstedów  $R$  równe jest mniej więcej — 5 (według Euckena i Etzrodta). W ciałach ferromagnetycznych  $R$  ma wartość sto lub tysiąc razy mniejszą. W pozostałych ciałach wartość tego współczynnika jest rzędu  $10^{-4}$ .

Jeżeli przez płytkę bizmutu o grubości 0,01 cm, umieszczoną w polu magnetycznym 10000 oerstedów, przechodzi prąd 10 amp., siła elektrobodźcza zjawiska Halla wynosi

$$\mathcal{E}_H = \frac{5 \cdot 1 \cdot 10000}{0,01} = 5 \cdot 10^6 \text{ j. elm. pot.} = 0,05 \text{ wolta.}$$

Pewną odmianą zjawiska Halla stanowi tzw. zjawisko Corbina. Corbino stwierdził (1911 r.), że w krążku metalowym linie prądu, doprowadzonego do środka krążka i odprowadzonego na jego obwodzie, a więc rozchodzące się w normalnych warunkach z jego środka promienisto, w polu magnetycznym, prostopadłym do płaszczyzny krążka, zakrzywiają się powodując w ten sposób kołowy przepływ prądu.

Jednocześnie z powstaniem różnicy potencjałów powstaje, jak to wykrył Ettingshausen (1887 r.), w punktach  $B_1$  i  $B_2$  różnica temperatur, którą można wyznaczyć przy pomocy ogniwa termoelektrycznego i która, podobnie, jak różnica potencjałów w zjawisku Halla, jest proporcjonalna do natężenia prądu i natężenia pola magnetycznego, odwrotnie zaś proporcjonalna do grubości płytki, tak że mamy

$$\Delta T = P \cdot \frac{i \cdot H}{d}, \quad (32)$$

gdzie  $P$  — współczynnik zjawiska Ettingshausena, — rzędu zazwyczaj  $10^{-9}$  — ma podobnie jak  $R$ , wartość dodatnią, gdy w punkcie  $B_1$  temperatura jest wyższa, niż w  $B_2$  lub ujemną, gdy w punkcie  $B_1$  temperatura jest niższa. Dla większości ciał  $P$  jest dodatnie, wyjątek stanowią m. in.: żelazo,



miedź, srebro, złoto, cynk, w których  $P$  jest ujemne. W bizmutcie  $P = 3,5 \cdot 10^{-6}$ .

I w tym przypadku, analogicznie do podłużnego zjawiska Halla, powstaje różnica temperatur także na bokach  $aa$  i  $bb$  płytki, a więc w kierunku prądu (podłużne zjawisko Ettingshausena).

Odpowiednikiem tych zjawisk, zachodzących przy przepływie prądu elektrycznego są tzw. zjawiska termomagnetyczne, zachodzące przy przepływie prądu ciepła. Leduc i niezależnie od niego Righi stwierdzili (1887 r.), że, gdy boki  $aa$  i  $bb$  płytki zetkniemy ze źródłami ciepła o stałej temperaturze tak, aby przez płytkę przepływał stały prąd ciepła od  $aa$  do  $bb$ , symetria spadku temperatury wzdłuż boków  $ab$  zostanie w polu magnetycznym, prostopadłym do kierunku prądu ciepła, naruszona; punkty  $B_1$  i  $B_2$ , leżące na bokach  $ab$  w tej samej odległości od końców płytki, będą miały temperatury różne. Zależność tej różnicy temperatur od wartości prądu ciepła, od natężenia pola magnetycznego i od grubości płytki wyraża się wzorem analogicznym do wzoru (32). Mamy więc

$$\Delta T = S_L \cdot \frac{w \cdot H}{k \cdot d}, \quad (33)$$

gdzie  $w$  oznacza prąd ciepła (p. tom I, str. 461),  $k$  — właściwe przewodnictwo cieplne danego ciała,  $S_L$  — współczynnik zjawiska Leduc'a-Righi'ego, mający wartość dodatnią, gdy w  $B_1$  jest temperatura wyższa, niż w  $B_2$ . Dla bizmutu współczynnik ten jest ujemny, rzędu  $10^{-6}$ , dla innych ciał jest on dziesięć lub sto razy mniejszy.

W płytce bizmutowej o długości  $l = 10$  cm i szerokości  $b = 1$  cm, umieszczonej w polu magnetycznym 10000 oerstedów, przy różnicy temperatur na końcach równej  $100^\circ\text{C}$  mamy

$$w = k \cdot S \cdot \frac{T_1 - T_2}{l} = k \cdot b \cdot d \cdot \frac{T_1 - T_2}{l}$$

(p. tom I, str. 463), skąd przyjmując na wartość współczynnika  $S_L$  bizmutu —  $2 \cdot 6^{-6}$

$$\begin{aligned} \Delta T &= S_L \frac{k \cdot b \cdot d \cdot (T_1 - T_2)}{k \cdot l \cdot d} \cdot H = S_L \cdot \frac{b(T_1 - T_2)}{l} H = \\ &= -2 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot \frac{100}{10} \cdot 10000 = -2 \cdot 10^{-2} = -0,02^\circ \text{C}. \end{aligned}$$



Podobnie do powstającej pod działaniem pola magnetycznego przy przepływie prądu elektrycznego różnicy temperatur powstaje w polu magnetycznym przy przepływie prądu ciepła różnica potencjałów (Nernst i Ettingshausen, 1887 r.) równe

$$V_{B_1} - V_{B_2} = Q_N \cdot \frac{i_w \cdot H}{k \cdot d} \quad (34)$$

gdzie  $Q_N$  jest współczynnikiem zjawiska Nernsta-Ettingshausena:  $Q_N$  w większości przypadków jest rzędu  $10^{-4}$ , jedynie w bizmucie osiąga wartość tysięcy razy większą.

Zjawiskom poprzecznym Leduc'a-Righi'ego i Nernsta-Ettingshausena towarzyszą również zjawiska podłużne: w pierwszym przypadku powstanie dodatkowej różnicy temperatur na bokach  $aa$  i  $bb$  płytki, powodującej zmniejszenie się prądu ciepła, a więc pozorne zmniejszenie się przewodnictwa cieplnego płytki (zjawisko Maggi'ego), w drugim przypadku powstanie na bokach  $aa$  i  $bb$  — różnicy potencjałów (podłużne zjawisko Nernsta-Ettingshausena)

Zestawiając razem wszystkie te zjawiska otrzymujemy następującą tablicę

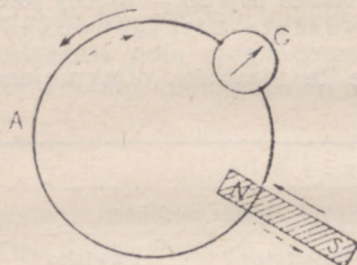
P r z y p r z e p ły w i e			
prądu elektrycznego		prądu cieplnego	
powstaje	zjawisko	powstaje	zjawisko
1. różnica potencjałów	Halla	1. różnica temperatur	Leduc'a — Righi'ego
2. różnica temperatur	v. Ettingshausena	2. różnica potencjałów	Nernsta v. Ettingshausena



## INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA

## 1. — PRĄDY INDUKOWANE.

Faraday stwierdził (1831 r.), że przy zbliżaniu lub oddalaniu magnesu *NS* od zamkniętego obwodu *A* (rys. 293), nie zawierającego źródła siły elektrobodźczej, powstaje prąd elektryczny, znikający z chwilą,



rys. 293

gdy magnes przestaje zmieniać swe położenie względem obwodu przy czym prąd, powstający przy zbliżaniu magnesu, płynie w kierunku przeciwnym do kierunku prądu, powstającego przy oddalaniu magnesu. Podobna zmiana kierunku następuje również i wtedy, gdy zbliżając lub oddalając magnes,

obracamy go o  $180^\circ$ , zmieniając w ten sposób znak bieguny, którym magnes zwrócony jest do obwodu.

Natężenie prądu, powstającego podczas ruchu magnesu, a co za tym idzie i wartość powstającej wtedy siły elektrobodźczej, będącej źródłem tego prądu, są w tych samych pozostałych warunkach tym większe, im większe jest pole powierzchni objętej przez dany obwód, a więc również im większą ilość zwojów obwód ten zawiera, im silniejszy jest poruszany magnes i im większa jest prędkość jego ruchu względem obwodu. Rodzaj użytego w obwodzie przewodnika nie ma żadnego wpływu na wartość wzbudzonej siły elektrobodźczej, jak to udowodnił Faraday, wykazując, że w obwodzie



utworzonym z dwu cewek, jednej z drutu miedzianego, drugiej z drutu żelaznego, o jednakowych przekrojach i jednakowej ilości zwojów, połączonych w ten sposób, aby prądy, powstające przy zbliżeniu lub oddalaniu magnesu w każdej z nich oddzielnie, miały kierunki przeciwne, prąd przy żadnej zmianie położenia magnesu nie płynie; skąd istotnie wynika, że powstające w nich i skierowane przeciwnie siły elektrodźwiczne są wzajemnie równe.

Analogiczne zjawiska powstają w obwodzie *A* również i wtedy, gdy magnes zastąpimy obwodem z prądem i obwód ten będziemy przybliżali lub oddalali od obwodu *A* albo gdy będziemy, zachowując niezmienną odległość obu obwodów, zmieniali w nim natężenie prądu lub wreszcie, gdy nie zmieniając ani ich wzajemnej odległości ani też natężenia płynącego w drugim obwodzie prądu, będziemy obwód *A* rozciągali lub zginali tak, aby pole objętej przez ten obwód powierzchni zwiększało się lub zmniejszało.

W tych wszystkich przypadkach natężenie prądu wzbudzonego będzie tym większe, im większa będzie przenikliwość magnetyczna środowiska; w tych samych więc pozostałych warunkach otrzymamy o wiele większe odchylenie galwanometru *G*, gdy drut obwodu *A* nawiniemy na rdzeń żelazny.

Z zestawienia tych faktów wynika, że prąd w obwodzie *A* powstaje wtedy, gdy z tych lub innych powodów zmienia się strumień indukcji magnetycznej, objętej przez obwód. Tym się tłumaczy nazwa siły elektrodźwicznej *i* n d u k o w a n e j, jaką nadajemy sile elektrodźwicznej, powstającej wtedy w obwodzie i będącej źródłem płynącego w tym obwodzie prądu *i* n d u k o w a n e g o. Siła ta jest, jak widzieliśmy, tym większa, im szybsza jest zmiana strumienia indukcji, objętego przez obwód.

Oznaczmy wartość chwilową (w ciągu czasu *dt*) tej siły elektrodźwicznej przez  $\mathcal{E}_i$  i przypuśćmy, że tak, jak w przypadku prądu stałego, natężenie prądu indukowanego ma w danej chwili we wszystkich przekrojach drutu, tworzącego dany obwód, tę samą wartość *i*; wtedy energia wywiązana w obwodzie w ciągu *dt* sekund wyniesie  $\mathcal{E}_i \cdot i \cdot dt$ . W najprostszym z rozpatrywanych przez nas przypadków, energia ta powstaje przy



przesuwaniu układu indukującego (magnesu lub obwodu z prądem) względem danego obwodu, jest więc rzeczą naturalną źródła jej szukać w pracy, powstającej przy tym przesunięciu.

O ile pominiemy pracę, zużytą na nadanie pewnej prędkości układowi indukującemu, przesuwanie tego układu wtedy tylko wymagać będzie pracy, gdy indukcja prądu powodować będzie powstawanie sił, przeciwdziałających temu przesuwaniu, a więc innymi słowy, gdy prąd indukowany (a przeto i siła elektrobodźcza) będzie miał kierunek taki, aby równoważna danemu obwodowi przepona magnetyczna działała na układ indukujący siłami, przeciwdziałającymi zmianie jego położenia. Ten wniosek, stanowiący treść reguły, sformułowanej przez Lenza (1834 r.) i następnie teoretycznie uzasadnionej przez Helmholtza (1847 r.), jest przez doświadczenie potwierdzony. Tak np. przy przybliżaniu magnesu, zwróconego biegunem północnym do danego obwodu, prąd indukowany ma kierunek taki, że ta strona obwodu, która jest zwrócona do magnesu, staje się równoważna dodatnio namagnesowanej powierzchni przepony magnetycznej, przy oddalaniu tak samo zwróconego magnesu — ujemnie namagnesowanej, (rys. 293); gdy do obwodu kołowego przybliżamy również kołowy obwód z prądem, równoległy do danego obwodu, prąd indukowany płynie w kierunku przeciwnym do kierunku prądu indukującego. Ogólnie mówiąc, jeżeli patrzymy w kierunku linii sił pola magnetycznego, to w przypadku, gdy strumień indukcji objętej obwodem wzrasta, widzimy prąd indukowany płynący w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, gdy strumień indukcji maleje — w kierunku zgodnym z tym ruchem.

Z a ł ó ż m y, że wartość siły elektrobodźczej indukowanej zależy jedynie od prędkości względnej układu indukującego i badanego obwodu, że więc w tych samych pozostałych warunkach zachowa ona tę samą wartość, gdy zamiast układu indukującego będziemy przesuwali dany obwód z prędkością, równą co do wartości, lecz skierowaną przeciwnie. To założenie, całkowicie potwierdzone przez doświadczenie w przypadkach, gdy obwód podlegający indukcji jest obwodem zamkniętym, pozwala obliczyć pracę, wykonaną podczas danego przesunięcia.



Przypuśćmy, że przez dany ruchomy obwód płynie prąd o natężeniu  $i$  oraz że działające na obwód siły pola magnetycznego przesunęły go do położenia, w którym objęty przez obwód strumień indukcji zwiększył się o  $d\Psi$ ; praca sił pola wynosi wtedy  $i \cdot d\Psi$  (p. rozdz. VII, wzór 23a). W rozpatrywanym przez nas przypadku praca przy przesuwaniu wykonana jest przeciwko siłom pola przez siły zewnętrzne, kierunek więc prądu indukowanego (a więc  $i$  siły elektrobodźczej indukowanej) jest przeciwny do tego kierunku prądu, przy którym obwód byłby przesuwany przez siły pola, a który uważać będziemy za dodatni.

Mamy zatem

$$\mathcal{E}_i \cdot i \cdot dt = - i d\Psi, \quad (1)$$

skąd

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}, \quad (1a)$$

gdzie siła elektrobodźcza wyrażona jest w jednostkach elektromagnetycznych. Gdy  $\mathcal{E}_i$  wyrażamy w woltach, wzór (1a) przybiera postać

$$\mathcal{E}_i = - 10^{-8} \frac{d\Psi}{dt}. \quad (1b)$$

Wzór ten możemy stosować również i we wspomnianym wyżej przypadku, gdy indukcja wzbudzona jest przez zmianę natężenia prądu, płynącego w obwodzie sąsiednim; wtedy bowiem zmiana ta powoduje zmianę natężenia pola magnetycznego prądu  $i$ , co za tym idzie, zmianę strumienia indukcyjnego przez obwód, poddany działaniu indukcyjnemu; zjawisko więc zachodzi tak, jak gdybyśmy zblizali lub oddalali dany układ od układu indukującego o niezmiennym natężeniu prądu.

Wzór (1) był bezpośrednio sprawdzony przez W. Webera (1846r.). Wewnątrz nieruchomej cewki o osi, skierowanej ze wschodu na zachód, Weber umieścił cewkę ruchomą zawieszoną na dwu niciach. Weber wyznaczał okres wahanja otwartej cewki oraz dekrement logarytmiczny jej wahnień  $\Lambda_0$ . Następnie umieszczał w pobliżu cewki 4 magnesy, zwrócone jednoimiennymi biegunami w tę samą stronę, tak aby ich osie magnetyczne były prostopadle do płaszczyzny połud-



nika magnetycznego i mierzył okres wahan i dekrement logarytmiczny wahań cewki, której końce były tym razem połączone metalicznie, wobec czego cewka stanowiła obwód zamknięty. Prąd indukowany, powstający przy odchyłaniu cewki od położenia równowagi i wzbudzony przez zmianę strumienia indukcji wewnętrzznego pola magnetycznego, miał, zgodnie z podaną wyżej regułą Lenza, kierunek taki, że siły pola magnetycznego tego prądu przeciwdziałały tej zmianie, a zatem tłumili wahan cewki. Dekrement logarytmiczny  $\Delta_1$  był więc tym razem większy od  $\Delta_0$ . Następnie Weber odsuwał magnesy i przepuszczając prąd przez cewkę nieruchomą wyznaczał dekrement wahań cewki ruchomej otwartej  $\Delta'_0$  i zamkniętej  $\Delta_2$ . Różnice  $\Delta_1 - \Delta_0$  oraz  $\Delta_2 - \Delta'_0$  były miarą działań indukcyjnych pól magnetycznych magnesów i cewki nieruchomej.

Natężenie tych pól Weber mierzył przepuszczając słaby prąd przez cewkę ruchomą i wyznaczając jej odchylenie  $\alpha$  od położenia równowagi w każdym z tych pól oddzielnie. Uwzględniając, że w obu przypadkach środowisko było to samo, wobec czego strumienie indukcji, objęte przez cewkę, były odpowiednio równe  $C \cdot H_m$  i  $C \cdot H_c$ , gdzie  $H_m$  — natężenie pola magnesów,  $H_c$  — natężenie pola cewki,  $C$  — jednakowy w obu przypadkach współczynnik proporcjonalności, znajdujemy, że tłumienie, proporcjonalne do pracy, wykonanej przeciwko siłom pola magnetycznego indukującego, jest wobec tej samej mniej więcej prędkości ruchu cewki w obu przypadkach proporcjonalne do kwadratu natężenia pola. Tłumienia zatem muszą być w takim stosunku wzajemnym, jak kwadraty natężeń

$$\frac{\Delta_2 - \Delta'_0}{\Delta_1 - \Delta_0} = \left( \frac{H_c}{H_m} \right)^2.$$

W doświadczeniach Webera

$$\Delta_0 = 0,002541; \quad \Delta_1 = 0,002638; \quad \Delta'_0 = 0,002796; \quad \Delta_2 = 0,005423;$$

$$\alpha_c = 101,9; \quad \alpha_m = 19,1.$$

Mamy

$$\frac{\Delta_2 - \Delta'_0}{\Delta_1 - \Delta_0} = \frac{0,002627}{0,000097} = 27,1$$

$$i \quad \left( \frac{\alpha_c}{\alpha_m} \right)^2 = \left( \frac{H_c}{H_m} \right)^2 = \left( \frac{101,9}{19,1} \right)^2 = 28,5,$$

a więc całkowicie w tych warunkach pomiaru wystarczająca zgodność.

Przyjmując zgodnie z założeniami, na których oparliśmy się przy wyprowadzaniu wzoru (1), że natężenie prądu indu-



kowanego związane jest z siłą elektrodźwczą indukowaną prądem Ohma, mamy

$$i = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d\Psi}{dt}, \quad (1c)$$

skąd ilość elektryczności, przepływająca przez obwód w ciągu czasu  $dt$ ,

$$de = i \cdot dt = -\frac{1}{r} d\Psi. \quad (a)$$

Przypuśćmy, że działanie indukcyjne trwało  $t$  sek, przy czym wartość strumienia indukcji, objętego przez dany obwód, zmieniła się od  $\Psi_0$  do  $\Psi_1$ . Wartość naboju, który w ciągu tego czasu przepłynął przez obwód, otrzymamy sumując wartości naboju elementarnych, wyrażone wzorem (a)

$$e = \int de = \int_0^t idt = -\frac{1}{r} \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} d\Psi = -\frac{\Psi_1 - \Psi_0}{r}. \quad (2)$$

Wartość ta jest więc całkowicie wyznaczona przez początkową i końcową wartość strumienia indukcji, objętego przez obwód, oraz przez jego opór i nie zależy zupełnie od czasu, w ciągu którego nastąpiła zmiana tego strumienia.

Nabój ten możemy zmierzyć włączając do obwodu, poddanego działaniu indukcyjnemu, tzw. galwanometr balistyczny, w którym okres wahanja części ruchomej znacznie większy od okresów wahanja części ruchomych zwykłych galwanometrów, jest bardzo wielki w porównaniu z czasem  $t$  trwania prądu indukowanego.

Niech  $a$  będzie stałą dynamiczną takiego galwanometru (p. rozdz. VII, str. 506). Moment siły chwilowej, jaką prąd indukowany działa na ruchomą część galwanometru, równy jest, jak wiadomo,  $ai$ , wobec czego chwilowy moment impulsu, jaki ta część otrzymuje, wynosi

$aidt$ , całkowity zaś moment impulsu  $a \int_0^t idt = a \cdot e$ . Przyjmując, że

w ciągu czasu  $t$  część ruchoma galwanometru nie zdążyła się odchylić od położenia równowagi, mamy

$$a \cdot e = B_b \cdot \omega, \quad (b)$$



gdzie  $\omega$  oznacza prędkość kątową, nabytą przez ruchomą część galwanometru,  $B_b$  — moment bezwładności tej części (p. tom I, str. 135, wzór f).

Stąd

$$e = \frac{B_b \cdot \omega}{a}.$$

Energia ruchu w ten sposób nabyta zużyje się na pracę przeciwko momentowi kierującemu  $D$  części ruchomej. W galwanometrach o ruchomej cewce praca ta przy wzroście kąta odchylenia  $\alpha$  o  $d\alpha$  równa jest  $D \cdot \alpha \cdot d\alpha$ , musimy więc mieć

$$\int_0^{\alpha_1} D \cdot \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2} B_b \cdot \omega^2$$

lub

$$\frac{1}{2} D \alpha_1^2 = \frac{1}{2} B_b \cdot \omega^2,$$

skąd

$$\sqrt{D} \cdot \alpha_1 = \sqrt{B_b} \cdot \omega$$

i

$$e = \frac{B_b \cdot \omega}{a} = \frac{\sqrt{B_b \cdot D}}{a} \cdot \alpha_1.$$

Podstawiając  $B_b$  ze wzoru  $T = 2\pi \sqrt{\frac{B_b}{D}}$ , mamy

$$e = \frac{1}{2\pi a} \cdot D \cdot T \cdot \alpha_1. \quad c$$

Nabój  $e$  jest proporcjonalny do kąta odchylenia. Wzór ten jest słuszny tylko wtedy, gdy, jak o tym była mowa wyżej, okres wahań  $T$  jest bardzo wielki w porównaniu z czasem  $t$ . Warunek ten można spełnić, nadając części ruchomej znaczny moment bezwładności.

Pomiary w ten właśnie sposób wykonane przez Lentza (1835 r.) potwierdziły ten wniosek i tym samym pośrednio wzór (1).

Natężenie prądu jest, jak to wynika z tego wzoru, tym większe, im mniejszy jest opór elektryczny obwodu. Jeżeli więc przewodnik liniowy zastąpimy przez bryłę przewodzącą, natężenie prądu indukowanego może w niej osiągnąć bardzo znaczne wartości; tego rodzaju prąd nazywamy prądem masowym lub wirowym lub wreszcie prądem Foucault'a.



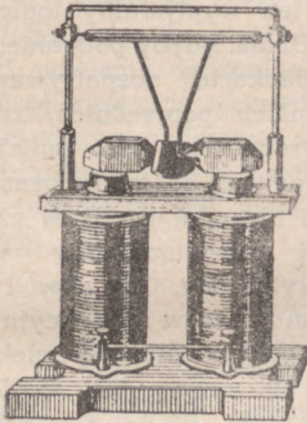
Ciepło Joule'a wywiązane wtedy w bryle może nieraz ogrzać ją do bardzo wysokiej temperatury. Praca sił zewnętrznych zużyta na pokonanie sił pola magnetycznego prądu indukowanego, przeciwdziałających przesuwaniu bryły w polu magnetycznym zewnętrznym, jest równoważna ilości wywiązanego ciepła, tak że mamy

$$Q = \frac{1}{J} W_z.$$

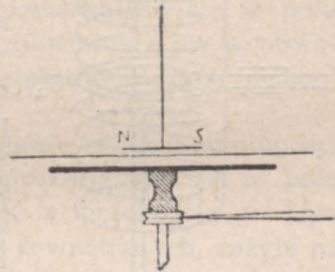
Mierząc zatem pracę wykonaną i wywiązane ciepło, możemy wyznaczyć mechaniczny równoważnik ciepła  $J$ . Zgodność otrzymanych tą drogą wartości (Violle, 1870 r., d'Arsonval, 1891 r., L. Weber, 1895 r.) z wartościami otrzymanymi przy użyciu innych metod stanowi również potwierdzenie słuszności założeń, użytych do wyprowadzenia wzoru (1).

Tej metody pierwszy użył Joule, mierząc ciepło wywiązane przy obracaniu w polu magnetycznym cewki o rdzeniu żelaznym.

Ogrzewanie się bryły, będącej siedliskiem prądów masowych, występuje bardzo wyraźnie w tzw. wahadle Foucault'a (rys. 294). Gruba płyta miedziana, wahając się koło osi poziomej, przechodzi między biegunami elektromagnesu. Gdy elektromagnes jest wzbudzony,



rys. 294



rys. 295

tłumienie wahań jest tak gwałtowne, że bez względu na początkowy kąt wychylenia bryły, nawet w miernym polu magnetycznym, wykonywa co najwyżej parę wahań o szybko zmniejszającej się amplitudzie. Jeżeli jednak wahań te będziemy podtrzymywali, temperatura bryły w ciągu krótkiego stosunkowo czasu dość znacznie wzrośnie.

W tych to prądach wirowych należy, jak na to wskazał Faraday, szukać wyjaśnienia zjawiska, odkrytego jeszcze



w 1824 r. przez Arago. Nad tarczą miedzianą, mogącą się obracać dookoła osi pionowej, zawieszona jest na nici igła magnetyczna, oddzielona od tarczy płytka szklana, zabezpieczająca igłę przed prądami powietrza, powstającymi przy ruchu tarczy. Gdy tarczę wprawimy w ruch obrotowy, igła odchyli się od swego położenia równowagi o kąt tym większy, im szybszy będzie ruch tarczy, przy dostatecznie wielkiej prędkości ruchu obrotowego tarczy igła też się będzie obracała w tę samą stronę.

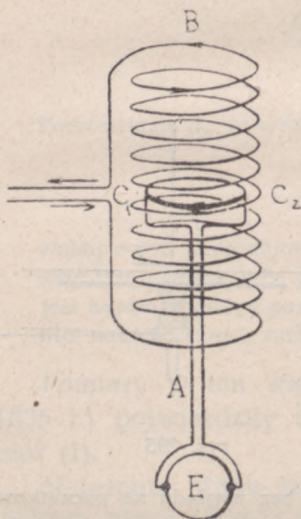
## 2. — ELEMENTARNE SIŁY ELEKTROBODŹCZE INDUKCJI.

Z przyjętego przez nas wyżej i potwierdzonego, jakeśmy widzieli, przez doświadczenie założenia, że prądy indukowane związane są z siłą elektrobodźczą indukowaną prawem Ohma, zdawałoby się wynikać, że różnica potencjałów dwu punktów obwodu, poddanego działaniu indukcyjnemu, równa jest, zgodnie z wywodami ust. 5 rozdz. V, *ir*. Istotnie,

wniosek ten wypływałby logicznie z prawa Ohma, gdyby podobnie, jak w przypadkach, rozpatrywanych w rozdziałach poprzednich, źródło siły elektrobodźczej było umiejscowione w pewnej dokładnie oznaczonej części obwodu; wtedy w części pozostałej obowiązywałby wzór wyżej przytoczony. Gdy obwód jest siedliskiem prądów indukcyjnych, takie umiejscowienie siły elektrobodźczej nie zawsze jest możliwe.

Umieścimy wewnątrz cewki *AB* obwód zamknięty  $C_1C_2$  (rys. 296) i zwiększamy natężenie prądu płynącego w cewce proporcjonalnie do czasu; wtedy zmiana strumienia indukcji, odniesiona do jednostki czasu,

będzie miała wartość stałą, wobec czego i płynący przez obwód prąd indukowany będzie prądem stałym. Jeżeli jednak połączymy dwa przeciwległe punkty obwodu  $C_1$  i  $C_2$  z elek-



rys. 296



trometrem, elektrometr nie wykaże nam żadnej różnicy potencjałów (Perucca).

Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku wszystkie elementy długości obwodu  $C_1$   $C_2$  znajdują się w zmiennym polu magnetycznym, musimy przyjąć, że wszystkie one są siedliskiem sił elektrodźwicznych elementarnych i że w każdym z nich obowiązuje zależność

$$d\mathcal{E}_i = i \cdot dr \quad (3)$$

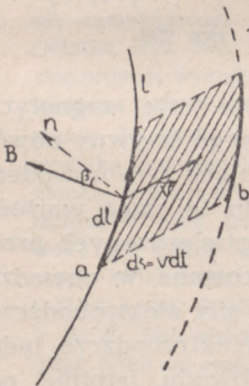
gdzie  $d\mathcal{E}_i$  oznacza siłę elektrodźwiczną elementarną, której siedliskiem jest dany element,  $dr$  — opór tego elementu,

Wobec tego jednak, że wszystkie siły elementarne mają ten sam kierunek, otrzymujemy dla całego obwodu

$$\mathcal{E}_i = \int d\mathcal{E}_i = i \int dr = i \cdot r, \quad (3a)$$

zgodnie z przyjętym przez nas założeniem.

Uogólniając ten wywód na wszystkie inne przypadki indukcji, powiemy, że siedliskiem siły elektrodźwicznej indukowanej są wszystkie elementy obwodu, znajdujące się w polu magnetycznym zmiennym lub też przesuwające się w polu magnetycznym. Siła elektrodźwiczna, ujawniająca się w obwodzie zamkniętym, jest sumą tych sił elektrodźwicznych elementarnych.



rys. 297

Niech  $dl$  będzie elementem długości obwodu  $L$ , poruszającym się w polu magnetycznym z prędkością  $v$  (rys. 297). Praca sił zewnętrznych, zużyta na przesunięcie  $dl$  z położenia  $a$  do położenia  $b$ , równa jest, jak wiemy,  $i \cdot d\Psi$ , gdzie  $d\Psi$  jest strumieniem indukcji przez powierzchnię, opisaną przez element podczas ruchu (por. rozdz. VII, ust. 4). Mamy zatem zgodnie z naszymi poprzednimi wywodami

$$d\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (a)$$



Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt, jaki prędkość  $v$  tworzy z elementem  $dl$  i przez  $\beta$  kąt, jaki wektor indukcji  $B$  tworzy z normalną do powierzchni  $dS$ . Będziemy mieli

$$d\Psi = B \cdot dS \cdot \cos \beta,$$

po podstawieniu zaś

$$dS = ds \cdot dl \cdot \sin \alpha = v \cdot dt \cdot dl \cdot \sin \alpha,$$

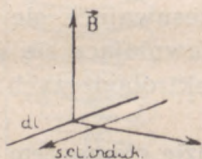
ostatecznie

$$d\Psi = B \cdot v \cdot dt \cdot dl \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta, \quad (4)$$

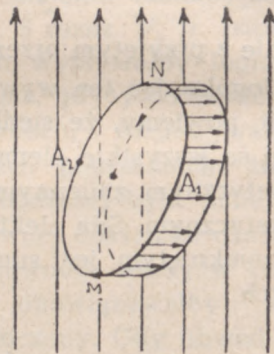
skąd

$$\xi_i = - B \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot v \cdot dl.$$

Kierunek siły elektrobodźczej indukowanej jest, oczywiście, i tym razem wyznaczony przez regułę Lenza: prąd w elemencie ma kierunek taki, że siły pola magnetycznego, działające na dany element, przeciwdziałają jego przesuwaniu się w polu (rys. 298).



rys. 298



rys. 299

Przypuśćmy teraz, że w jednostajnym polu magnetycznym przesuwamy równoległe do niego samego sztywny obwód  $MA_1NA_2$  (rys. 299). Strumień indukcji, objęty tym obwodem, będzie miał w każdym położeniu obwodu tę samą wartość, wobec czego, w myśl wywodów ust. I, potwierdzonych przez doświadczenie, siła elektrobodźcza indukowana w obwodzie będzie stale równa zero. Tę samą wartość siły elektrobodźczej otrzymujemy sumując elementarne siły elektrobodźcze indukowane w poszczególnych elementach obwodu. Istotnie, podzielmy cały obwód na elementy o równych długościach  $dl$ ;

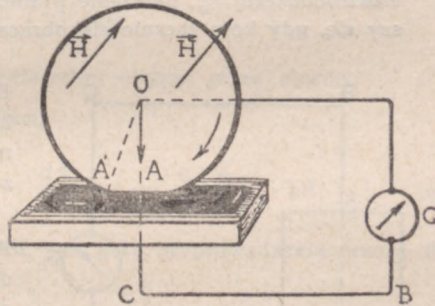


elementarne siły elektrodobdźcze indukowane w kaźdej parze przeciwnegłtych elementów, takich jak przy  $M$  i  $N$ , równe i działające w tym samym kierunku, będą przy sumowaniu tych sił wzdłuż obwodu wzajemnie się znośiły, na całkowitą więc siłę elektrodobdźczą indukowaną otrzymamy i przy takim obliczaniu wartość zero.

W tym przypadku górna  $A_2NA_1$  i dolna  $A_2MA_1$  części obwodu będą tworzyły jak gdyby dwa jednakowe ogniwa, połączone równolegle. Gdybyśmy obwód w punktach  $A_1$  i  $A_2$  przecięli (obwód otwarty), przy przesuwaniu pojawiłaby się różnica potencjałów na końcach kaźdej z oddzielnych części obwodu. Przy tym kierunku ruchu i kierunku pola, jak na rys. 299 punkt  $A_1$  miałby potencjał wyższy niż punkt  $A_2$ .

W obwodach zamkniętych wartość siły elektrodobdźczej indukowanej pozostanie jak o tym wiemy (p. ust. I) bez zmiany, gdy obwód, podlegający indukcji zatrzymamy, wprawimy zaś w ruch z prędkością równą i przeciwnie skierowaną układ indukujący. W tego więc rodzaju obwodach w wzorze (4) oznacza prędkość względną dwu działających na siebie układów.

Twierdzenia ust. I stosują się również i do przypadków tzw. indukcji jednobiegunowej, otrzymywanych przy użyciu układów analogicznych do koła Barlowa (p. rozdz. VII, str. 500). Niech  $OA$  będzie początkowym położeniem wycinka koła, łączącego oś  $O$  z rtęcią w korytku  $C$  i w ten sposób zamykającego obwód  $OGBGA$  (rys. 300, w którym grubość wycinka sprrowadzona jest dla uproszczenia do grubości przewodnika liniowego). Przy obrocie w kierunku wskazanym strzałką pole obwodu jak gdyby się rozciąga, zwiększając się od  $OGBCA$  do  $OGBCA'O$  o  $A'OC$ . Siła elektrodobdźcza indukowana powstaje w wycinku  $OA$ , gdyż tylko ta część jest w ruchu. Oznaczmy przez  $dt$  czas, w ciągu którego wycinek przeszedł z położenia  $OA$  do  $OA'$ , przez  $T = \frac{2\pi}{\omega}$



rys. 300



czas jednego obrotu. Wartość strumienia indukcji, przechodzącego przez powierzchnię  $A'OA$ , jest w takim stosunku do strumienia przechodzącego przez powierzchnię całego koła, jak  $dt$  do  $T$ , mamy przeto

$$\frac{d\Psi}{\Psi} = \frac{dt}{T}$$

ub

$$d\Psi = \frac{\Psi}{T} \cdot dt = \frac{B \cdot \pi r^2}{2\pi} \omega \cdot dt = \frac{1}{2} Br^2 \cdot \omega \cdot dt,$$

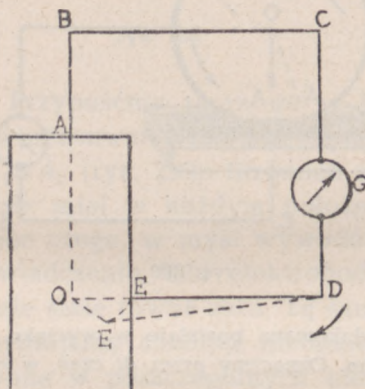
skąd siła elektrodźwiczna indukowana

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} Br^2 \omega.$$

Siła ta, skierowana przeciwnie do siły elektrodźwicznej zewnętrznej  $\mathcal{E}_z$ , powoduje zmniejszenie natężenia prądu, które, gdy koło było nieruchome, miało wartość  $i$ . Chcąc podczas ruchu koła, utrzymać to samo natężenie, należy zewnętrzną siłę elektrodźwiczną zwiększyć o  $\mathcal{E}_i$ . Jeżeli więc poprzednio energia, dostarczana co sekunda przez źródło zewnętrzne, była równa  $\mathcal{E}_z \cdot i$ , to podczas ruchu koła będzie wynosiła  $(\mathcal{E}_z + \mathcal{E}_i) i$ . W ciągu więc  $T$  sek (t. zn. podczas jednego obrotu koła) dodatkowa energia, którą musi dostarczyć źródło zewnętrzne wyniesie

$$\mathcal{E}_i \cdot i \cdot T = \frac{1}{2} Br^2 \omega \cdot i \cdot \frac{2\pi}{\omega} = i \cdot B \cdot \pi r^2,$$

a więc tyle, ile wynosi praca sił pola przy obracaniu koła (p. rozdz. VII, ust. 4). W przypadku źródła zewnętrznego o stałej wartości siły elektrodźwicznej  $\mathcal{E}_z$ , natężenie prądu, płynącego przez obwód, zmniejszy się, gdy koło zacznie się obracać.



rys. 301

W słynnym doświadczeniu Faradaya drut jednym swym końcem dotykał osi, koło które może obracać się magnes, drugim zaś środka magnesu (rys. 301).

Prąd indukcyjny w obwodzie  $ABCGDE$  powstawał zarówno wtedy gdy obwód obracał się koło osi  $BO$ , jak i wtedy, gdy obwód był nieruchomy, magnes zaś obracał się koło tej osi. W obu przypadkach pole obwodu jak gdyby się rozciąga, zwiększając się od  $OABCGDEO$  do  $OABCGDE'O$  o  $EDE'$ .



We wszystkich przeto przypadkach indukcji elektromagnetycznej całkowita siła elektrobodźcza indukcji w obwodzie zamkniętym wyraża się wzorem (1 a).

W rozdziale VII rozpatrywanie działań magnetycznych prądu doprowadziło nas do wzoru (9) str. 469

$$\vec{A} = \text{rot } \vec{H} = k \cdot 4\pi \vec{j}_n,$$

gdzie czynnik  $k$  zależy od wyboru jednostek natężenia pola magnetycznego i gęstości prądu.

Uwzględniając wynikający z prawa Ohma związek

$$\kappa \vec{E} = \vec{j},$$

otrzymujemy dla przewodników liniowych

$$\text{rot } \vec{H} = k \cdot 4\pi \kappa \cdot \vec{E}. \quad (\text{b})$$

W przypadku obecnie przez nas rozpatrywanym całkowita siła elektrobodźcza indukcji, równa, jakśmy widzieli, sumie sił elektrobodźczych, wynosi

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{k} \oint E_l \cdot dl,$$

gdzie  $dl$  jest elementem długości obwodu.

Strumień indukcji magnetycznej, objętej przez obwód, równy jest, jak wiadomo,

$$\Psi = \int B_n \cdot dS,$$

gdzie  $dS$  jest elementem powierzchni objętej przez obwód.

Ze wzoru (1a) otrzymujemy

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{k} \oint E_l \cdot dl = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int B_n \cdot dS. \quad (\text{c})$$

Rozumując w ten sam sposób, jak przy wyprowadzaniu wzoru (9) rozdz. VII, znajdziemy, że

$$\oint E_l \cdot dl = \int C_n \cdot dS,$$

gdzie  $dS$  ma to samo znaczenie, co we wzorze (c), i

$$\vec{C} = \text{rot } \vec{E}.$$



Podstawiając do wzoru (c) otrzymujemy

$$\frac{1}{k} \int \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int B_n \cdot dS, \quad (5)$$

skąd

$$\frac{1}{k} \text{rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

W środowiskach jednorodnych i równokierunkowych, w których poza tym  $\mu$  nie jest funkcją czasu ani też natężenia pola magnetycznego, możemy, podstawiając

$$\vec{B} = \mu \vec{H},$$

napisać

$$\frac{1}{k} \text{rot } \vec{E} = - \mu \frac{d\vec{H}}{dt}. \quad (5a)$$

Gdy umówimy się natężenie pola elektrycznego wyrażać w jednostkach elektrostatycznych, natężenie pola elektromagnetycznego, w jednostkach elektromagnetycznych, będziemy musieli przyjąć  $k$  za równe  $\frac{1}{c}$ . Równania (b) i (5a) przybiorą wtedy postać następującą

$$\frac{4\pi \times \vec{E}}{c} = \text{rot } \vec{H}$$

$$\frac{\mu}{c} \cdot \frac{d\vec{H}}{dt} = - \text{rot } \vec{E}. \quad (6)$$

Równania te są jedną z postaci równań, wyprowadzonych przez Maxwella (1873 r.). Jak wynika z poczynionych przez nas przy ich wyprowadzeniu założeń, stosują się one do obwodów zamkniętych i sztywnych tzn. nie zmieniających swego kształtu podczas działań indukcyjnych.

### 3. — INDUKCJA WŁASNA. — SPÓŁCZYNNIK I JEDNOSTKA INDUKCJI WŁASNEJ.

Wartość siły elektrobodźczej indukowanej będzie wyrażała się wzorem (Ia) również i w tym przypadku, gdy do obwodu, poddanego działaniu indukcyjnemu, włączymy niezależne od indukcji źródło siły elektrobodźczej  $\xi_i$ . W takim obwodzie będziemy mieli

$$\mathcal{E} \pm \xi_i = i \cdot r, \quad (7a)$$



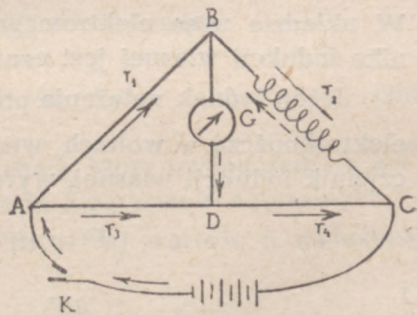
gdzie znak  $+$  odpowiada zgodnym kierunkom siły elektrodźwicznej indukowanej i siły elektrodźwicznej dołączonej, znak  $-$  kierunkom przeciwnym. Podstawiając (1a) otrzymamy

$$\mathcal{E} = i \cdot r \mp 10^{-8} \frac{d\Psi}{dt}, \quad (7b)$$

przy czym przez  $\Psi$  rozumiemy zarówno strumień indukcji, wzbudzony przez pole magnetyczne prądu płynącego w danym obwodzie, jak również przez pola magnetyczne innych obwodów z prądem lub magnesów trwałych. Gdy strumienie indukcji tych pól zewnętrznych pozostają bez zmiany, zmienia się zaś jedynie strumień indukcji pola magnetycznego danego obwodu, wtedy powstająca w obwodzie na skutek tej zmiany siła elektrodźwiczna indukowaną nazywamy siłą elektrodźwiczną indukcji własnej, prąd zaś indukowany — prądem indukcji własnej lub, używając terminologii Faradaya, ekstraprądem. Taki ekstraprąd pojawia się w obwodzie np. przy zamykaniu obwodu, gdy pole magnetyczne obwodu równe początkowo zeru wzrasta do pewnej wartości stałej, lub przy przerywaniu obwodu, gdy strumień indukcji własnej pola obwodu spada nagle do zera. W pierwszym przypadku siła elektrodźwiczna indukcji własnej będzie, zgodnie z regułą Lenza, skierowana przeciwnie do siły elektrodźwicznej, włączonej w obwód, ekstraprąd będzie więc miał kierunek przeciwny do powstającego w obwodzie prądu; w drugim przypadku siła elektrodźwiczna indukcji własnej będzie miała kierunek ten sam, co siła elektrodźwiczna poprzednio działająca w obwodzie, ekstraprąd będzie więc miał kierunek ten sam, w jakim płynął poprzednio w obwodzie prąd stały.

Niech ABCD (rys. 302) będzie mostkiem Wheatstone'a o tak dobranych oporach, aby czyniły zadość warunkowi

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4},$$



rys. 302



i niech gałąź  $BC$  o oporze  $r_2$  będzie utworzona przez cewkę o znacznej stosunkowo ilości zwojów. Gdy obwód nagle zamkniemy, w obwodzie powstanie siła elektrodźwiczna indukcji własnej, która w cewce  $BC$  będzie miała kierunek wskazany strzałką kropkowaną; siła ta wzbudza prąd, który płynąc w gałęzi  $BD$  od  $B$  do  $D$ , spowoduje krótkotrwałe, lecz nieraz bardzo znaczne wychylenie galwanometru  $G$ . Przy nagłym przerwaniu obwodu ekstraprąd w cewce będzie miał kierunek wskazany strzałką pełną, w gałęzi z galwanometrem będzie on płynął od  $D$  do  $B$ .

Strumień indukcji, objęty danym obwodem, jest, jak wiadomo, proporcjonalny do natężenia pola, a, co za tym idzie, do wzbudzającego to pole natężenia prądu, możemy więc napisać

$$\Psi_{11} = L_{11} \cdot i, \quad (8)$$

gdzie  $i$  jest natężeniem prądu w danym obwodzie,  $L_{11}$  współczynnikiem zależnym od rodzaju środowiska oraz od kształtu danego obwodu. W środowiskach o stałej przenikliwości magnetycznej  $\mu$ , niezależnej od natężenia prądu wzbudzającego pole,  $L_{11}$  ma dla obwodów nie zmieniających swego kształtu (sztywnych) wartość stałą. Współczynnik  $L_{11}$  nazywamy współczynnikiem indukcji własnej.

Podstawiając do wzoru (8) wymiary strumienia indukcji i natężenia prądu (wyrażonego w jednostkach elektromagnetycznych), otrzymujemy

$$M^{1/2} L^{3/2} T^{-1} = [L_{11}] \cdot M^{1/2} L^{1/2} T^{-1},$$

skąd

$$[L_{11}] = L. \quad (8a)$$

W układzie więc elektromagnetycznym jednostką współczynnika indukcji własnej jest centymetr.

Jeżeli jednak natężenia prądu mierzymy w amperach, siłę elektrodźwiczną w woltach, wtedy oznaczając przez  $L_{11}^{(elm)}$  współczynnik indukcji własnej, wyrażony w cm, otrzymujemy

$$\Psi = 10^{-1} L_{11}^{(elm)} \cdot i_a$$

i

$$\mathcal{E}_i = -10^{-8} \frac{d\Psi}{dt} = -10^{-8} \frac{d(L_{11}^{(elm)} \cdot i_a)}{dt}.$$



Wtedy wygodniej jest wziąć za jednostkę spólczynnika indukcji własnej jednostkę długości  $10^9$  raza większą od cm, równą zatem mniej więcej długości ćwierci południka ziemskiego. Tę jednostkę nazywamy *k w a d r a n t e m* lub częściej *h e n r y*, od nazwiska fizyka amerykańskiego, J. Henry'ego, który jeszcze przed Faraday'em zaobserwował i badał (od 1827 r.) zjawiska, związane z indukcją własną.

Wzór (7a) przybierze w tym przypadku, gdy poza tym odrzucimy chwilowo znaczki przy  $L$ , postać następującą

$$\mathcal{E} - \frac{d(Li)}{dt} = ir,$$

gdy bowiem strumień indukcji wzrasta, a więc gdy  $\frac{d(Li)}{dt} > 0$ , siła elektrobodźcza indukowana jest skierowana przeciwnie do  $\mathcal{E}$ , całkowita więc siła elektrobodźcza czynna chwilowo w obwodzie jest równa różnicy wartości bezwzględnych  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{E}_i$ , gdy zaś strumień indukcji własnej maleje, a więc gdy  $\frac{d(Li)}{dt} < 0$ , siła elektrobodźcza całkowita równa jest sumie wartości bezwzględnych  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{E}_i$ ; w obu zatem przypadkach musimy w równaniu (9) wziąć znak —.

Przypuśćmy, że spólczynnik indukcji własnej posiada wartość stałą (obwód sztywny, środowisko o stałej wartości  $\mu$ ), mamy wtedy

$$\mathcal{E} = i \cdot r + L \frac{di}{dt}. \quad (9a)$$

Temu równaniu możemy uczynić zadość kładąc

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r} + Ae^{-\frac{rt}{L}}, \quad (9b)$$

gdzie  $A$  jest pewną wielkością stałą, którą wyznaczamy z warunków dodatkowych,  $e$  — zasadą logarytmów naturalnych.

Istotnie, podstawiając do wzoru (9a) wartość  $i$ , wyrażoną wzorem (9b) oraz

$$\frac{di}{dt} = -A \frac{r}{L} e^{-\frac{rt}{L}},$$



otrzymujemy tożsamość

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{r} \cdot r + Ar \cdot e^{-\frac{rt}{L}} - L \cdot A \cdot \frac{r}{L} e^{-\frac{rt}{L}}.$$

Przy zamykaniu obwodu mamy w chwili  $t = 0$  również  $i = 0$ , wobec czego

$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} = - Ar,$$

skąd

$$A = - \frac{\mathcal{E}}{r}. \quad (9c)$$

Oznaczmy przez  $i_0$  tę wartość natężenia prądu, jaką otrzymujemy z prawa Ohma,

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}}{r},$$

wtedy

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r} - \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{rt}{L}} = \frac{\mathcal{E}}{r} (1 - e^{-\frac{rt}{L}}) = i_0 (1 - e^{-\frac{rt}{L}}). \quad (9d)$$

Stąd wynika, że natężenie prądu w obwodzie nie od razu dochodzi do wartości stałej, lecz wzrasta stopniowo i to tym prędzej, im większy jest stosunek oporu omowego do współczynnika indukcji własnej. Zazwyczaj wyprowadza się do wzoru (9d) wielkość odwrotną

$$\tau = \frac{L}{r}. \quad (9e)$$

W układzie elektromagnetycznym opór  $r$  ma wymiar prędkości, mamy bowiem (p. rozdz. VII, ust. 2)

$$[i]_{elm} = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1} \quad \text{i} \quad [V]_{elm} = M^{1/2} L^{1/2} T^{-2},$$

stąd

$$[r] = \frac{[V]}{[i]} = LT^{-1},$$

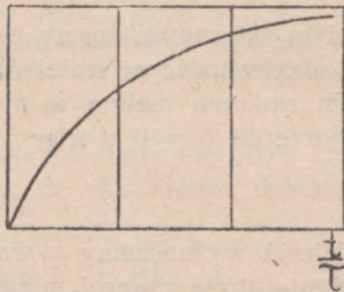
a zatem

$$[\tau] = \frac{L}{L \cdot T^{-1}} = T,$$

jest to tzw. stała czasu danego obwodu; im  $\tau$  jest większe, tym wolniej będzie natężenie prądu dochodziło do swej warto-



ści granicznej  $i_0$ . Odkładając na osi odciętych  $\frac{t}{\tau}$ , na osi rzędnych natężenie prądu  $i$ , otrzymujemy krzywą wzrostu prądu z czasem (rys. 303a), z której wynika, że ściśle biorąc,  $i$  staje się równe  $i_0$  dopiero po upływie nieskończenie długiego czasu; najczęściej jednak po upływie ułamka sekundy różni się ono bardzo mało od  $i_0$ , stała czasu bowiem w przypadkach, do których możemy stosować te wzory, jest na ogół niewielka: tak np. w drucie miedzianym o grubości 0,1 cm, zwiniętym w koło



rys. 303a

o promieniu 50 cm,  $L = 4,55 \cdot 10^{-6}$  henry,  $r = 0,068$  oma, stała czasu wynosi  $67 \cdot 10^{-6}$  sek; po upływie zatem mniej więcej jednej tysięcznej sekundy natężenie prądu różni się będzie od wartości wyznaczonej z prawa Ohma o jedną milionową. W cewkach nawiniętych na rdzeniach żelaznych, czas ten będzie o wiele większy (rzędu kilkunastu lub nawet kilkudziesięciu sekund), wtedy jednak obliczanie tego czasu ze wzoru (9a) może nam dać jedynie wartości przybliżone, gdyż w takim obwodzie  $\mu$  jest funkcją natężenia prądu.

Nabój elektryczny, który na skutek indukcji własnej przepłynął przez obwód w czasie ustalania się prądu, równy jest, jak to ustaliliśmy w ust. I (wzór 2), zmianie strumienia indukcji, podzielonej przez opór. Biorąc więc pod uwagę, że początkowa wartość strumienia indukcji była równa zero, końcowa zaś  $L \cdot i_0$ , znajdujemy, że bezwzględna wartość tego naboju wynosi

$$e_i = \frac{L i_0}{r}. \quad (10)$$

Nabój ten przepływa w kierunku przeciwnym do kierunku, w jakim płyną naboje pod działaniem siły elektrodźwicznej stałej  $\mathcal{E}$ , wobec czego całkowita wartość naboju, przepływającego przez obwód, podczas ustalania się prądu, jest mniej-



sza od tej ilości, która by w ciągu tego samego czasu przepłynęła z prądem stałym

$$e = e_s - e_i = e_s - \frac{Li_0}{r}. \quad (10a)$$

Przypuśćmy teraz, żeśmy nagle wyłączyli z obwodu źródło siły elektrodźwicznej stałej  $\mathcal{E}$ , np. zwierając jego bieguny oporem znikomo małym w porównaniu z oporem obwodu. We wzorze (9)  $\mathcal{E} = 0$ , a więc

$$i = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (11)$$

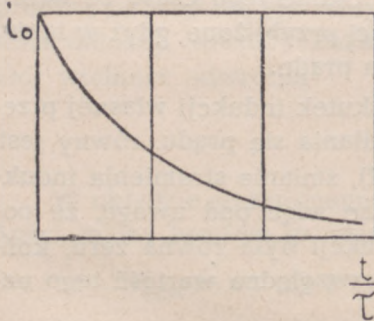
gdzie  $A$  wyznaczamy z warunku, żeby w chwili  $t = 0$  natężenie  $i$  było równe  $i_0$ , a zatem

$$A = i_0.$$

Mamy przeto wzór

$$i = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (11a)$$

odkładając tak, jak poprzednio, na osi odciętych  $\frac{t}{\tau}$ , na osi rzędnych  $i$  (rys. 303b), otrzymamy krzywą symetryczną do krzywej rys. 303a. Przez obwód płynąć



rys. 303b

będzie w tym samym kierunku, co prąd wzbudzony przez stałą siłę elektrodźwiczną  $\mathcal{E}$ , prąd indukowany, stopniowo zanikający. Nabój elektryczny, przepływający z tym prądem w kierunku zgodnym z kierunkiem  $\mathcal{E}$ , będzie równy

$$e_i = \frac{Li_0}{r}, \quad (11b)$$

końcowa bowiem wartość strumienia indukcji równa jest zeru.

Z porównania tego wzoru ze wzorem (10) wynika, że wyłączenie siły elektrodźwicznej powoduje przepływ dodatkowego naboju, równego co do wartości bezwzględnej temu naboju, jaki przy włączaniu siły elektrodźwicznej przepłynął w kierunku



ku odwrotnym. Ilość więc elektryczności, jaka przepłynęła przez obwód w czasie, gdy obwód był siedliskiem prądu, jest ta sama, jaką byśmy otrzymali, zakładając, że przez cały ten czas przez obwód płynął prąd stały o natężeniu  $i_0$ .

Tym się tłumaczy, że mówiąc w ust. I o pomiarze naboju, jaki na skutek indukcji, spowodowanej przez zmianę zewnętrznego pola magnetycznego, przepłynął przez obwód, nie uwzględnialiśmy w rachunku zjawiska indukcji własnej.

Podobnie rzecz się ma z energią, dostarczoną przez źródło siły elektrobodźczej. W ciągu  $dt$  sek źródło dostarcza energii

$$\mathcal{E} \cdot i \cdot dt = i^2 r \cdot dt + L \cdot i \cdot di, \quad (11)$$

przez czas zatem ustalania się prądu

$$\int_0^t \mathcal{E} \cdot i \cdot dt = \int_0^t i^2 r dt + L \int_0^{i_0} i di = \frac{1}{J} Q + \frac{L \cdot i_0^2}{2}, \quad (11a)$$

gdzie  $Q$  oznacza ciepło Joule'a, wywiązane w obwodzie,  $\frac{Li_0^2}{2}$  pracę, jakiej musiało dostarczyć źródło siły elektrobodźczej, aby wytworzyć w przestrzeni otaczającej obwód pole magnetyczne prądu. Praca ta wyraża energię elektromagnetyczną prądu, towarzyszącą powstaniu prądu w obwodzie, albo innymi słowy, energię magnetyczną pola, wzbudzonego przez prąd.

Istotnie, gdy wyłączymy z obwodu źródło siły elektrobodźczej  $\mathcal{E}$ , prąd indukowany w obwodzie wywiąże ilość ciepła, równą, jak to wynika ze wzoru (11a), w którym przyjmiemy  $\mathcal{E} = 0$  i przestawimy granice całkowania drugiego wyrazu,

$$\frac{1}{J} Q = \frac{1}{2} Li_0^2.$$

Jednocześnie więc z zanikaniem prądu i co za tym idzie z zanikaniem pola magnetycznego prądu znika również energia elektromagnetyczna prądu, przechodząc, jak w danym przypadku, w energię cieplną.



Gdy wyłączenie źródła siły elektrobodźczej  $\mathcal{E}$  spowodowane jest przez przerwanie obwodu, np. przez otwarcie klucza  $K$  (rys. 302), wtedy energia elektromagnetyczna prądu przechodzi w energię elektrostatyczną: w miejscu przerwania obwodu na końcach drutu powstaje różnica potencjałów, która niekiedy (przy znaczniejszej wartości współczynnika indukcji własnej) i szybkim przzerwaniu obwodu może spowodować rozbrojenie iskrowe tych końców (iskra otwarcia).

W nielicznych prostych przypadkach można znając własności magnetyczne środowiska, jak również kształt obwodu, obliczyć jego współczynnik indukcji własnej.

Tak np. w przypadku długiej i wąskiej cewki mamy

$$\Psi_{11} = \mu \cdot H \cdot S \cdot n = \mu \cdot 4\pi n_1 i \cdot S \cdot n, \quad (12)$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę wszystkich zwojów cewki,  $n_1$  liczbę zwojów, przypadających na 1 cm długości cewki (por. wzór 15, rozdz. VII). Podstawiając

$$S = \pi r^2$$

oraz uwzględniając, że

$$n_1 = \frac{n}{l},$$

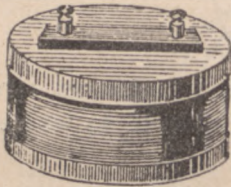
gdzie  $l$  — długość cewki, otrzymujemy

$$L_{11} = \frac{\Psi}{i} = \frac{4\pi^2 r^2 \cdot n^2}{l} \mu \text{ cm} = 10^{-9} \cdot \frac{4\pi^2 r^2 \cdot n^2}{l} \mu \text{ henry}. \quad (12a)$$

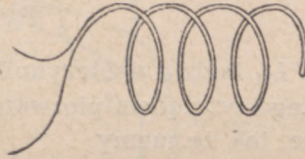
Gdy cewka nawinięta jest na rdzeniu żelaznym,  $\mu$  jest funkcją  $i$ , wobec czego stosunek strumienia indukcji do natężenia prądu nie ma wartości stałej. Często jednak oblicza się ten stosunek dla tej wartości natężenia prądu, przy której cewka jest zazwyczaj używana, i otrzymaną w ten sposób liczbę przyjmuje się za równą wartości współczynnika indukcji własnej obwodu. Wzoru (12) nie można jednak stosować do cewek krótkich i szerokich, wtedy trzeba go zastąpić przez wzory dokładniejsze (między innymi wzory Maxwella i Stefana), których tu przytaczać nie będziemy.



Tego rodzaju kształt mają właśnie tzw. cewki wzorcowe (rys. 304), w których drut nawinięty jest na rdzeniu marmurowym lub drewnianym. Dobierając odpowiednio przekrój i ilość zwojów można otrzymać cewki o różnych współczynnikach indukcji własnej (zazwyczaj od 0,01 do 10 henry). Cewki te używane są przy doświadczalnym wyznaczaniu współczynnika  $L_{11}$  (p. ust. 5).



rys. 304

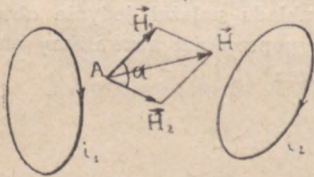


rys. 305

Czasem chodzi o otrzymanie obwodów o możliwie małej indukcji własnej. Można to osiągnąć albo przez zmniejszenie powierzchni objętej przez przewodnik, składając przewodnik tak, aby prąd w dwu stykających się elementach długości płynął zawsze w kierunkach przeciwnych (rys. 305) albo też nawijając w cewce kolejne zwoje (a raczej grupy zwojów) w kierunkach przeciwnych.

#### 4. — INDUKCJA WZAJEMNA. — SPÓŁCZYNNIK INDUKCJI WZAJEMNEJ.

Przypuśćmy teraz, że mamy do czynienia z układem dwu obwodów 1 i 2, będących siedliskiem prądów stałych o natężeniach, równych odpowiednio  $i_1$  i  $i_2$  (rys. 306) i niech  $\Psi_{1,2}$



rys. 306

oznacza tę część strumienia indukcji, wysyłanego przez obwód 2, która objęta jest obwodem 1. Wartość tego strumienia, proporcjonalna do natężenia prądu  $i_2$  jest równa

$$\Psi_{1,2} = L_{1,2} \cdot i_2, \quad (a)$$

gdzie  $L_{1,2}$  jest wielkością, zależną od rodzaju środowiska, kształtu obwodów 1 i 2 oraz ich wzajemnego położenia; w środowi-



skach o stałej zdolności magnetycznej  $\mu$  jest ona niezależna od natężenia prądu. Wielkość tę, mającą, jak widzimy, wymiar ten sam, co współczynnik indukcji własnej, nazywać będziemy współczynnikiem indukcji wzajemnej obwodu pierwszego względem obwodu drugiego.

Analogicznie można napisać, że ta część strumienia indukcji, wysyłanego przez obwód 1, która przechodzi przez obwód 2, jest równa

$$\Psi_{21} = L_{21} i_1, \quad (b)$$

gdzie  $L_{21}$  będzie współczynnikiem indukcji wzajemnej obwodu drugiego względem pierwszego. Współczynniki te są wzajemnie równe, tak że mamy

$$L_{12} = L_{21}.$$

Pole magnetyczne utworzonego w ten sposób układu będzie polem wypadkowym pól obwodów pierwszego i drugiego, tak że natężenie  $\vec{H}$  w dowolnym punkcie  $A$  pola (rys. 306) będzie sumą geometryczną natężeń pól  $\vec{H}_1$  i  $\vec{H}_2$ , wzbudzonych przez prądy, płynące w danych obwodach. Stosując wzór 24 rozdz. IV i uwzględniając, że

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 + 2H_1H_2 \cos \alpha,$$

na wartość energii tego pola otrzymujemy

$$U = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dv = \frac{\mu}{8\pi} \int H_1^2 dv + \frac{\mu}{8\pi} \int H_2^2 dv + \frac{2\mu}{8\pi} \int H_1H_2 \cos \alpha \cdot dv. \quad (c)$$

Pierwsza z tych całek jest energią tego pola magnetycznego, z jakim mielibyśmy do czynienia, gdyby do układu należał jedynie obwód pierwszy. Energia ta, którą w ustępie poprzednim nazwaliśmy energią elektromagnetyczną prądu jest równa

$$U' = \frac{\mu}{8\pi} \int H_1^2 dv = \frac{1}{2} L_{11} \cdot i_1^2.$$

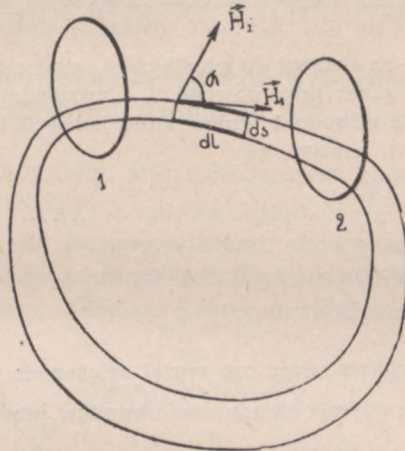
Podobnie druga całka wyraża energię pola elektromagnetycznego prądu w drugim obwodzie

$$U'' = \frac{\mu}{8\pi} \int H_2^2 dv = \frac{1}{2} L_{22} \cdot i_2^2.$$



Dla znalezienia wartości trzeciej całki weźmiemy za element objętości odcinek strugi indukcji pola magnetycznego prądu, płynącego w obwodzie 1. Oznaczając długość tego odcinka przez  $dl$ , przekrój przez  $dS$  (rys. 307), napiszemy, że

$$\mu H_1 H_2 \cos \alpha \cdot dv = \mu H_1 dS \cdot H_2 \cdot \cos \alpha \cdot dl.$$



rys. 307

Czynnik  $\mu H_1 dS$  wyraża wartość  $d\Psi$  strumienia indukcji, przepływającego przez przekrój  $dS$  strugi, a tym samym, jak wiemy, przez dowolny przekrój strugi; czynnik  $H_2 \cos \alpha \cdot dl$  wyraża pracę natężenia  $H_2$  pola magnetycznego prądu w obwodzie 2.

Sumując wzdłuż całej strugi otrzymamy

$$\int \mu H_1 dS \cdot H_2 \cos \alpha \cdot dl = \mu H_1 dS \oint H_2 \cos \alpha \cdot dl.$$

Praca natężenia pola magnetycznego wzdłuż drogi zamkniętej tylko wtedy nie jest równa zero, gdy droga przecina obwód prądu, wzbudzającego pole, a więc w danym przypadku obwód 2. Całka zatem będzie miała wartość różną od zera jedynie dla tych strug indukcji wysyłanych przez obwód 1, które są objęte obwodem 2. Dla tych strug

$$\oint H_2 \cos \alpha \cdot dl = 4\pi i_2.$$

(p. rozdz. VII). Sumując teraz strumienie indukcji przechodzące przez tego rodzaju strugi znajdziemy, że

$$\frac{2}{8\pi} \int \mu H_1 H_2 \cos \alpha \cdot dv = \frac{2}{8\pi} \cdot 4\pi i_2 \int \mu H_1 dS = i_2 \cdot \Psi_{21},$$



gdzie  $\Psi_{21}$  jest tą częścią strumienia indukcji, wysyłanego przez prąd obwodu 1, która przechodzi przez obwód 2, i która jest równa

$$\Psi_{21} = L_{21} \cdot i_1,$$

wobec czego

$$\frac{2}{8\pi} \int \mu H_1 H_2 \cos \alpha \cdot dv = L_{21} \cdot i_1 \cdot i_2. \quad (c)$$

Równie dobrze za element  $dv$  moglibyśmy wziąć odcinek strugi indukcji, wysyłanej przez prąd obwodu 2, i uwzględniając, że praca natężenia  $H_1$  pola obwodu 1 wzdłuż strug indukcji, objętych wzorem 1, jest równa  $4\pi i_1$ , napisać, że

$$\frac{2}{8\pi} \int \mu H_1 H_2 \cos \alpha \cdot dv = L_{12} i_1 i_2. \quad (d)$$

Z zestawień wzorów (c) i (d) wynika, że

$$L_{21} = L_{12},$$

zgodnie z przyjętym przez nas wyżej założeniem.

Całkowita więc energia układu dwu obwodów prądu wyniesie

$$U = \frac{1}{2} L_{11} \cdot i_1^2 + L_{12} \cdot i_1 \cdot i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2. \quad (13)$$

Niech badanymi obwodami będą dwie cewki kołowe, nawinięte jedna na drugą, o tej samej długości  $l$ . Oznaczając ilość zwojów cewek odpowiednio przez  $n'$  i  $n''$ , będziemy mieli w przybliżeniu

$$L_{11} \cdot i_1 = 4\pi \frac{n'^2}{l} \mu S \cdot i_1; \quad L_{12} \cdot i_1 = 4\pi \frac{n' n''}{l} \mu \cdot S \cdot i_1$$

(por. wzór 12, ust. 3) oraz

$$L_{22} \cdot i_2 = 4\pi \cdot \frac{n''^2}{l} \mu S \cdot i_2; \quad L_{12} \cdot i_2 = 4\pi \frac{n' n''}{l} \mu \cdot S \cdot i_2,$$

skąd

$$\frac{L_{11}}{L_{12}} = \frac{n'}{n''} \quad \text{i} \quad \frac{L_{22}}{L_{12}} = \frac{n''}{n'}, \quad (14)$$

wobec czego

$$\frac{L_{11}}{L_{12}} \cdot \frac{L_{22}}{L_{12}} = 1$$

i ostatecznie

$$L_{11} \cdot L_{22} = L_{12}^2. \quad (14a)$$



Przekształcając odpowiednio wyrażenie na energię wzajemną dwu obwodów, możemy wyrazić współczynnik indukcji wzajemnej wzorem, wyprowadzonym przez Neumanna (1845 r.)

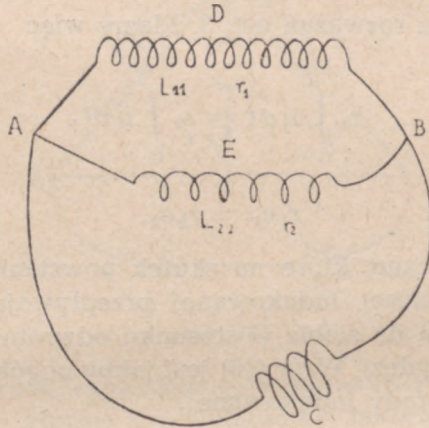
$$L_{12} = \mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 \cdot ds_2, \quad (15)$$

gdzie  $ds_1$  i  $ds_2$  oznaczają elementy długości danych dwu obwodów,  $r$  — ich wzajemną odległość,  $\varepsilon$  — kąt, jaki tworzą ze sobą.

Zazwyczaj współczynniki indukcji wzajemnej wyznacza się podobnie, jak współczynniki indukcji własnej, doświadczalnie.

#### 5. — WYZNACZANIE WSPÓLCZYNNIKÓW INDUKCJI WŁASNEJ I INDUKCJI WZAJEMNEJ.

Przypuśćmy, że bezpośredniemu działaniu indukcyjnemu pola magnetycznego podlega jedynie część obwodu, np. cewka C obwodu CAB (rys. 308), do której przybliżamy lub od której



rys. 308

oddaliśmy magnes. Prąd indukowany, powstający w tej cewce, rozdzieli się w punktach A i B pomiędzy dwa przewodniki ADB o oporze omowym  $r_1$  i współczynniku indukcji własnej  $L_{11}$  oraz AEB o oporze  $r_2$  i współczynniku indukcji własnej  $L_{22}$ . Zakładając, że te dwie gałęzie nie działają na siebie wzajemnie, znajdziemy, że

$$V_A - V_B = r_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt}. \quad (a)$$



Oznaczmy przez  $t_1$  dowolną chwilę, poprzedzającą zmianę strumienia indukcji w cewce  $C$ , przez  $t_2$  — chwilę, w której strumień ten przestał się już zmieniać, ze wzoru (a) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (V_A - V_B) dt &= r_1 \int_{t_1}^{t_2} i_1 dt + L_{11} \int_{t_1}^{t_2} \frac{di_1}{dt} dt = \\ &= r_2 \int_{t_1}^{t_2} i_2 dt + L_{22} \int_{t_1}^{t_2} \frac{di_2}{dt} dt. \end{aligned} \quad (b)$$

We wzorze tym

$$L_{11} \int_{t_1}^{t_2} \frac{di_1}{dt} dt = 0; \quad L_{22} \int_{t_1}^{t_2} \frac{di_2}{dt} dt = 0,$$

jak to wynika z rozważań ust. 3. Mamy więc

$$r_1 \int_{t_1}^{t_2} i_1 dt = r_2 \int_{t_1}^{t_2} i_2 dt, \quad (16)$$

lub

$$r_1 e_1 = r_2 e_2.$$

Naboje elektryczne, które na skutek powstania w obwodzie siły elektrobodźczej indukowanej przepływają przez każdą z dwu gałęzi, są do siebie w stosunku odwrotnym do oporów omowych tych gałęzi. Wzór (16) jest jakby uogólnieniem prawa Kirchhoffa na prądy indukowane.

Opierając się na tym, możemy do wyznaczenia bezwzględnej wartości współczynnika indukcji własnej użyć metody, opracowanej przez Maxwella (1862 r.), następnie zaś nieco zmiennej przez Rayleigha (1880 r.).

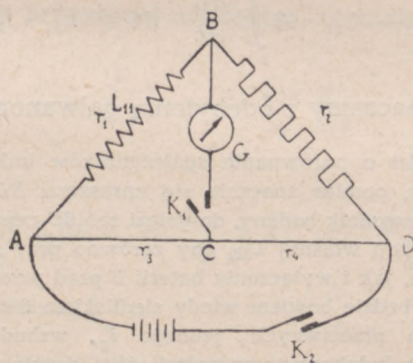
Badany przewodnik o nieznanym oporze  $r_1$  i nieznanym współczynniku  $L_{11}$  stanowi jedną z gałęzi mostu Wheatstone'a (rys. 309), którego gałęzie pozostałe o oporach  $r_2, r_3, r_4$  mają współczynniki indukcji własnej bardzo małe w porównaniu z  $L_{11}$  (tego rodzaju opory o możliwie małej indukcji własnej oznaczamy na rysunkach zazwyczaj tak, jak opór  $r_2$ , przewodniki



zaś o znaczniejszej indukcji własnej tak, jak przewodnik w gałęzi  $AB$ , i wreszcie przewodniki o małym oporze omowym i znaczniejszej indukcji — tak, jak przewodniki  $D$  i  $E$  (rys. 308). Dobieramy opory  $r_2, r_3, r_4$  tak, aby przy włączeniu do obwodu gałęzi z galwanometrem balistycznym  $G$  (przez zamknięcie klucza  $K_1$ ) galwanometr się nie odchyłał. Wtedy, jak wiadomo (p. rozdz. V, str. 383)

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4} \quad \text{lub} \quad r_1 = r_2 \cdot \frac{r_3}{r_4}.$$

Przy tym pomiarze gałąź z galwanometrem włączamy dopiero wtedy, gdy prąd w obwodzie się ustali, a więc, gdy uprzednio do obwodu włączymy przez zamknięcie klucza  $K_2$  baterię  $B$ .



rys. 309

Następnie nie wyłączając galwanometru z obwodu (a więc nie podnosząc klucza  $K_1$ ) wyłączamy baterię  $B$  (otwierając klucz  $K_2$ ), co powoduje powstanie w obwodzie siły elektrodźwicznej indukowanej, którą z uwagi na bardzo małą wartość współczynnika indukcji własnej pozostałych części obwodu możemy uważać za umiejscowioną w gałęzi  $AB$ . Mamy zatem

$$\mathcal{E}_i = - L_{11} \frac{di_1}{dt},$$

gdzie  $i_1$  — natężenie prądu, który płynął w tej gałęzi.

Prąd otwarcia, wzbudzony przez tę siłę elektrodźwiczną i płynący przez obwód zamknięty  $ABDCA$ , rozgałęzia się



w punktach  $B$  i  $C$ . Stosując twierdzenia, dotyczące prądów rozgałęzionych, znajdujemy, że natężenie prądu, płynącego w gałęzi, zawierającej galwanometr, jest w każdej chwili równe

$$i_g = -L_{11} \frac{di_1}{dt} \cdot \frac{r_2 + r_4}{r_g(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_1 + r_3)(r_2 + r_4)} \quad (c)$$

lub oznaczając ułamek przez  $A$

$$i_g = -L_{11} \frac{di_1}{dt} \cdot A. \quad (d)$$

Ilość elektryczności, która przez gałąź  $BC$  przepłynie z prądem otwarcia, wyniesie

$$e_g = -L_{11} \cdot A \int_t^{\infty} \frac{di_1}{dt} \cdot dt = L_{11} \cdot i_1 \cdot A. \quad (e)$$

Nabój ten wyznaczamy z odchylenia galwanometru (p. ust. I).

Gdy chodzi o porównanie współczynników indukcji własnej dwu przewodników, pomiar znacznie się upraszcza. Włączamy wtedy do gałęzi  $AB$  przewodnik badany, do gałęzi zaś  $BD$  cewkę o tak dobranym oporze i indukcji własnej  $L_{22}$ , aby zarówno przy zamykaniu obwodu galwanometru, jak i wyłączeniu baterii  $B$  prąd przez gałąź  $BC$  nie płynął. Gałąź ta będzie bowiem wtedy siedliskiem dwu prądów równych, o kierunkach przeciwnych: jednego  $i'_g$ , wzbudzonego przez siłę elektrobodźczą indukowaną w gałęzi  $AB$  i drugiego  $i''_g$ , wzbudzonego przez siłę elektrobodźczą indukowaną w gałęzi  $BD$ , przy czym

$$i'_g = -L_{11} \frac{di_1}{dt} \cdot A' = i''_g = -L_{22} \frac{di_1}{dt} A''$$

gdzie

$$A' = \frac{r_2 + r_4}{r_g(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_2 + r_4)(r_1 + r_3)}$$

$$A'' = \frac{r_1 + r_3}{r_g(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_2 + r_4)(r_1 + r_3)}$$

Skąd

$$L_{11}(r_2 + r_4) = L_{22}(r_1 + r_3)$$

lub z uwagi, że

$$r_1 = r_2 \cdot \frac{r_3}{r_4}; \quad L_{11} = L_{22} \cdot \frac{r_3}{r_4}$$



i ostatecznie

$$\frac{L_{11}}{L_{22}} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (f)$$

Do takich właśnie pomiarów służą cewki wzorcowe, o których była mowa w ust. 3.

Z dość licznych metod wyznaczania współczynnika indukcji wzajemnej dwu obwodów przytoczymy tylko następującą. Do jednego z obwodów włączamy galwanometr balistyczny i mierzymy jego odchylenie w chwili, gdy przerywamy prąd w obwodzie pierwszym. Jeżeli natężenie tego prądu wynosi  $i_1$ , siła elektrodźwiczna indukowana w obwodzie drugim jest równa

$$\mathcal{E}_{i,2} = -L_{12} \frac{di_1}{dt},$$

nabój zaś, który przepłynął z prądem, wzbudzonym przez tę siłę i równym

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_{i,2}}{r} = \frac{L_{12}}{r_2} \frac{di_1}{dt},$$

wyniesie

$$e_i = \int_t^{\infty} i_2 dt = -\frac{L_{12}}{r_2} \int_t^{\infty} di_1 = \frac{L_{12} \cdot i_1}{r_2}, \quad (g)$$

skąd można wyznaczyć  $L_{12}$ .

#### 6. — CEWKA INDUKCYJNA (RUHM KORFFA). — PRĄDNICA I MOTOR (SILNIK) PRĄDU STAŁEGO.

Wróćmy teraz do rozpatrywanego wyżej przypadku dwu cewek o przekroju kołowym, nawiniętych jedna na drugą i przypuśćmy, że w obwód jednej z cewek, który nazwiemy obwodem baterii lub obwodem pierwszorzędnym, może być od czasu do czasu włączane źródło siły elektrodźwicznej  $\mathcal{E}$ . Oznaczając przez  $i_1$  natężenie chwilowe prądu w tym obwodzie, przez  $i_2$  natężenie chwilowe prądu indukowanego w drugiej, nie połączonej z zewnętrznym źródłem siły elektrodźwicznej cewce — obwodzie wtórnym — otrzymamy dla obwodu baterii równanie

$$\mathcal{E} = r_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}. \quad (17)$$



Jeżeli obwód wtórny jest otwarty lub też zamknięty bardzo wielkim oporem (jeżeli np. końce cewki wtórnej są połączone wilgotnym sznurem o znacznej długości), działanie obwodu wtórnego na obwód baterii możemy pominąć i wzór (17) przepisać w postaci

$$\mathcal{E} = r_1 i_1 + L_{11} \cdot \frac{di_1}{dt} \quad (17a)$$

lub oznaczając przez  $\Psi_1$  strumień indukcji, wysyłany przez obwód baterii i przechodzący przez pojedynczy zwoj tego obwodu, oraz uwzględniając, że

$$L_{11} \cdot i_1 = \Psi_{11} = n' \Psi_1,$$

(p. wzór 12), gdzie  $n'$  — liczba zwojów obwodu baterii,

$$\mathcal{E} = r_1 i_1 + n' \frac{d\Psi_1}{dt}. \quad (17b)$$

Dla obwodu wtórnego, będącego siedliskiem prądu indukowanego, będziemy mieli

$$0 = r_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt}. \quad (17c)$$

Przyjmując, że współczynniki indukcji są związane ze sobą wzorem (14) otrzymujemy

$$L_{12} = \frac{n''}{n'} L_{11} = \frac{n''}{n'} \cdot \frac{\Psi_{11}}{i_1} = n'' \cdot \frac{\Psi_1}{i_1}$$

(p. wzór *g*, ust. 4), gdzie  $n''$  — liczba zwojów obwodu wtórnego. Stąd siła elektrodźwiczna indukowana na skutek indukcji wzajemnej w obwodzie wtórnym

$$\mathcal{E}_i^{(2)} = - n'' \frac{d\Psi_1}{dt}, \quad (17d)$$

stosunek zatem tej siły do siły elektrodźwicznej indukcji własnej w obwodzie pierwszorzędym

$$\mathcal{E}_i^{(1)} = - L_{11} \cdot \frac{di_1}{dt} = - n' \cdot \frac{d\Psi_1}{dt}$$

wynosi

$$\frac{\mathcal{E}_i^{(2)}}{\mathcal{E}_i^{(1)}} = \frac{n''}{n'} = m; \quad (18)$$

stosunek ten nazywamy stosunkiem przetworzenia.



W chwili zamykania obwodu

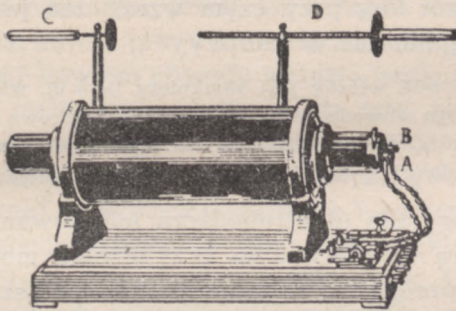
$$\mathcal{E}_i^{(1)} = -\mathcal{E},$$

w tej przeto chwili mamy

$$\frac{\mathcal{E}_i^{(2)}}{\mathcal{E}} = m. \quad (18a)$$

Jeżeli obwód wtórny jest otwarty ( $i_2 = 0$ ), różnica potencjałów na końcach tego obwodu jest prawie dokładnie równa  $\mathcal{E}_i^{(2)}$ . Biorąc więc za obwód baterii cewkę o niewielkiej ilości zwojów grubego drutu, za obwód zaś wtórny cewkę o znacznej ilości zwojów drutu cienkiego (opór  $r_2$  duży, natężenie  $i_2$  — małe), otrzymujemy w tym obwodzie siłę elektrobodźczą  $\mathcal{E}_i^{(2)}$  wielokrotnie większą od siły elektrobodźczej  $\mathcal{E}_i^{(1)}$ , której wartość w chwili przerywania obwodu pierwszorzędnego może znów znacznie przewyższać przyłożoną siłę elektrobodźczą.

Układ takich dwu cewek stanowić będzie tzw. transformator lub przetwornicę, których prototypem jest cewka indukcyjna, używana dzisiaj w postaci mało różniącej się od tej, jaką nadał jej w 1851 r. Ruhmkorff.



rys. 310

Na rdzeniu żelaznym nawinięta jest cewka pierwszorzędna o stosunkowo niewielkiej ilości zwojów (mniej więcej od 100 do 50), której końce  $A, B$  mogą być przyłączone do zewnętrznego źródła prądu (rys. 310); na niej nawinięta jest



cewka wtórna o bardzo wielkiej ilości zwojów (rzędu nieraz kilkuset tysięcy) drutu cienkiego, z której końcami połączony jest iskiernik  $CD$ ; zsunięcie końców tego iskiernika zamyka obwód cewki. Rdzeń składa się z pęczka prętów żelaznych, odizolowanych jeden od drugiego, aby w ten sposób zmniejszyć natężenie powstających w nim prądów wirowych; rdzeń stanowi otwarty obwód magnetyczny (p. rozdz. VIII str. 534), w którym odmagnesowujące działanie końców jest dość znaczne, wobec czego magnetyzm szczątkowy ma wartość stosunkowo niewielką. Poza tym do obwodu cewki pierwszorzędnej włączony jest przerywacz (p. niżej, nie oznaczony na rysunku), automatycznie co pewien czas zamykający i otwierający obwód baterii.

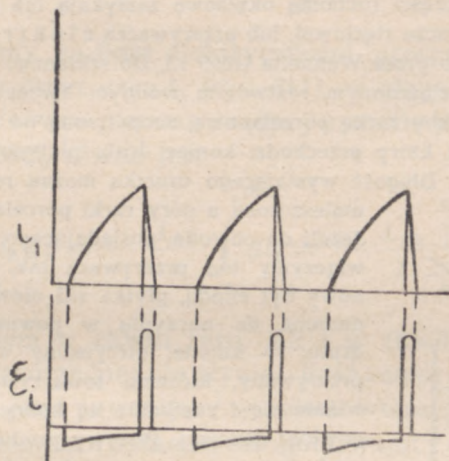
Cewka Ruhmkorffa, jak zresztą i inne typy transformatorów, nie czyni zadość tym założeniom, na których oparliśmy wywód wzoru (18), tak, że danie dokładnej teorii zjawisk, zachodzących w cewce, nastęrcza bardzo znaczne trudności. Poprzestajemy wobec tego na przybliżonym jedynie opisie zjawisk, zachodzących przy zamykaniu i otwieraniu obwodu pierwszorzędnego. Przy zamykaniu obwodu pierwszorzędnego (innymi słowy, przy włączaniu do tego obwodu zewnętrznego źródła siły elektrodźczej  $\mathcal{E}$ ) natężenie prądu stopniowo wzrasta (p. wzór 9b), przy czym wzrost ten jest początkowo szybszy, następnie zaś wolniejszy.

Gdy obwód wtórny jest zamknięty ( $i_2 \neq 0$ ), wtedy działanie indukcyjne tego obwodu nieco zwiększa początkowe wartości natężenia prądu  $i_1$ , działanie to bowiem jest skierowane przeciwie do działania indukcji własnej obwodu pierwszorzędnego.

Wobec tego siła elektrodźcza indukowana w obwodzie wtórnym, którą w pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć zgodnie ze wzorem (17c) za proporcjonalną do szybkości zmian natężenia prądu  $i_1$ , będzie początkowo wzrastała bardzo szybko, następnie zaś stopniowo malała. Siła ta będzie miała kierunek przeciwny do kierunku natężenia prądu. Odkładając na osi odciętych czas, na osi rzędnych — natężenie prądu  $i_1$  i siłę elektrodźczą indukowaną  $\mathcal{E}_i$ , otrzymamy dla tej fazy zjawiska zależność  $i_1$  oraz  $\mathcal{E}_i$  od czasu mniej więcej taką, jaką wyrażają schematyczne krzywe  $i_1$  i  $\mathcal{E}_i$  (rys. 311).



W cewce Ruhmkorffa o rdzeniu żelaznym strumień indukcji magnetycznej nie jest proporcjonalny do natężenia prądu  $i_1$ , zdolność bowiern magnetyczna żelaza nie jest wielkością stałą (por. rozdz. IV, ust. 6), tym samym nie jest stały współczynnik indukcji wzajemnej danych obwodów, równanie więc 17c nie może być tu stosowane.



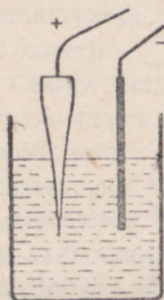
rys. 311

Przy wyłączeniu z obwodu pierwszorzędного źródła siły elektrobodźczej natężenie prądu  $i_1$  spada do zera w czasie stosunkowo bardzo krótkim, jeżeli, jak to bywa zazwyczaj w cewce Ruhmkorffa, obwód przy tym wyłączeniu staje się obwodem otwartym, opór bowiem obwodu wzrasta nagle do bardzo wielkiej wartości (stała czasu zbliża się do zera, ust. 3). Siła elektrobodźcza indukowana w obwodzie wtórnym, o kierunku zgodnym z kierunkiem prądu  $i_1$ , wzrasta bardzo gwałtownie dochodząc do pewnej najwyższej wartości i następnie spada. Im szybszy jest spadek natężenia prądu, tym większa jest najwyższa wartość siły elektrobodźczej indukowanej. Gdy do zamykania i otwierania obwodu pierwszorzędного użyjemy automatycznych przerywaczy, po otwarciu obwodu nastąpi ponowne jego zamknięcie, tak że otrzymamy ciąg identycznych krzywych.

W małych cewkach przerywaczem takim jest najczęściej tzw. młotek Neefa, w którym sprężysta blaszka stalowa, zamykająca obwód pierwszorzędny, jest w chwili powstania w nim prądu przy-



ciągana przez magnesujący się wtedy rdzeń żelazny. To przyciągnięcie powoduje otwarcie obwodu, prąd przestaje płynąć, rdzeń przestaje być magnesem, wobec czego blaszka cdskakuje i znów zamyka obwód pierwotny. Przerwywacz ten nie nadaje się jednak do prądów silniejszych. Wtedy używa się przerwywaczy mechanicznych, w których części ruchome okresowo zamykają lub otwierają obwód (np. przerwywacze rtęciowe), lub przerwywacza elektrolitycznego, zbudowanego przez Wehnelta (1899 r.). Do szklanego naczynia, wypełnionego rozcieńczonym roztworem wodnym kwasu siarkowego, zanurza się jakby rurkę porcelanową, zaopatrzoną na dole w niewielki otwór, przez który przechodzi koniec drutu platynowego o średnicy 1 do 2 mm. Długość wystającego drucika można regulować śrubką,



rys. 312

umieszczoną u góry rurki porcelanowej (rys. 312). Jeżeli do obwodu, posiadającego indukcję własną, włączymy ten przerwywacz tak, aby drut platynowy był anodą, płytka zaś ołowiana również zanurzona do naczynia w pewnej odległości od drutu, — katodą, otrzymamy w obwodzie prąd przerywany, któremu towarzyszyć będzie pojawianie się i zanikanie na końcu drutu świecącej powłoki gazowej. Przerwy prądu w małych przyrządach tego typu mogą nieraz zachodzić co parę dziesięciotysięcznych sekundy, w większych — co parę tysięcznych. Działanie tego przerwywacza mimo licznych badań (Simon, 1899 r., Klupathy, 1902 r., Goldhammer, 1902 r. i inni) nie jest, jak dotychczas, całkowicie wyjaśnione.

Przy użyciu przerwywaczy mechanicznych nagłość przerywania wzrasta, gdy, jak to pierwszy wskazał Fizeau (1853 r.), punkty w których następuje przerwanie, połączy się ze zbrojami kondensatora o odpowiednio dobranej pojemności. Wpływ kondensatora można w pierwszym grubym przybliżeniu wytłumaczyć w ten sposób, że zmniejsza on różnicę potencjałów, powstającą w miejscu przerwania pod działaniem indukcji własnej i mogącą spowodować w tym miejscu wytworzenie się iskry elektrycznej i tym samym przedłużenie trwania prądu. Takie wyjaśnienie jednak, nie uwzględniające powstawania wtedy w obwodzie drgań elektromagnetycznych, nie może być uważane za wystarczające. Poprzestając tu jedynie na stwierdzeniu wpływu, jaki wywiera kondensator, teorii tego zjawiska, które między innymi obszernie rozpatrzył Armagnat (1905 r.), omawiać tutaj nie będziemy.

Gdy końce cewki wtórnej połączone są dużym oporem, przebieg zjawiska jest mniej więcej taki sam, jak w przypadku



cewki otwartej. Ze wzoru (17c), w którym pomijamy działanie indukcji własnej obwodu wtórnego, otrzymujemy

$$i_2 = - \frac{L_{1,2}}{r} \frac{di_1}{dt},$$

skąd znajdujemy, że ilość elektryczności, przepływająca przez obwód wtórny przez czas  $t_1$  (rys. 311), w ciągu którego natężenie prądu w cewce pierwszorzędnej przeszło przez wszystkie możliwe wartości, równa jest

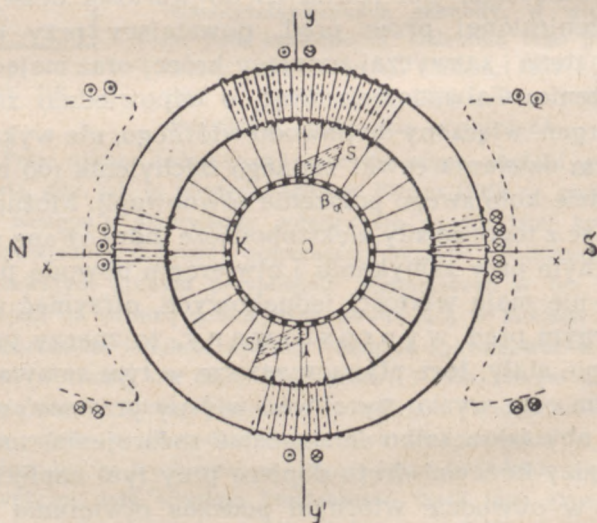
$$e = \int_{t=0}^{t_1} i_2 dt = - \frac{L_{1,2}}{r} \int_{i_1^{(0)}}^{i_1^{(t_1)}} di_1 = - \frac{L_{1,2}}{r} \left. i_1 \right|_0^0 = 0,$$

zarówno bowiem w chwili zero, jak i w chwili  $t = t_1$ , prąd w cewce pierwszorzędnej nie płynie. Ilość zatem elektryczności, którą przenosi prąd powstający w cewce wtórnej przy zamykaniu obwodu pierwszorzędnego, na ogół trwający dłużej i mający mniejsze natężenie, jest równa co do wartości bezwzględnej ilości przeniesionej przez prąd, powstający przy otwarciu obwodu baterii i zazwyczaj trwający krócej oraz mający większe natężenie. Galwanometr więc, o odpowiednio znacznym okresie drgań, włączony do obwodu wtórnego, nie wykaże przy normalnym działaniu cewki żadnego odchylenia (co najwyżej drgać będzie koło swego położenia równowagi). Można jednak korzystając z tego, że siły elektrodźwiczne indukowane w obwodzie wtórnym przy zamykaniu i otwieraniu obwodu pierwszorzędnego nie mają wartości jednakowych, otrzymać w obwodzie wtórnym prąd w p r o s t o w a n y, to znaczy prąd, jakkolwiek nie stały, lecz płynący zawsze w tym samym kierunku. W tym celu wystarczy obwód wtórny przerwać na takiej długości, aby iskra (albo inna postać rozbrojenia) mogła powstać między końcami drutu dopiero przy tym napięciu, jakie powstaje w obwodzie wtórnym podczas otwierania obwodu pierwszorzędnego. Prąd w obwodzie wtórnym będzie wtedy płynął tylko w jednym kierunku; przy prądach zamknięcia cewka wtórna będzie stanowiła obwód otwarty. Tym sposobem cewka indukująca może służyć za źródło prądu o wysokim napięciu.



Częściej jednak, zwłaszcza w technice, używane są, jako źródła prądu tzw. dynamomaszyny lub prądnice, w których energia elektryczna prądu powstaje kosztem energii mechanicznej. Nie wchodząc w szczegóły działania i budowy tych dynamomaszyn poprzestaniemy na krótkim i schematycznym rozpatrzeniu prądnicy prądu stałego, będącej pierwowzorem wszystkich obecnie używanych, a mianowicie prądnicy, w której prąd powstaje w przewodniku, nawiniętym na tzw. pierścień Pacinotti'ego, (1865 r.) lub Gramme'a (1871 r.), obracający się w polu magnetycznym.

Analogiczne prądnice, w których prąd powstawał przy obracaniu przewodnika w polu magnetycznym zbudowali, niezależnie jeden od drugiego, już w 1832 r. Pixii i Ritchie. Ich prądnice, nazywane podówczas maszynami magnetoelektrycznymi, dawały jednak prąd nie stały, lecz zmieniający się sinusoidalnie (p. rozdz. IX, ust. 1). Odkrycie Pacinotti'ego, o parę lat wcześniejsze od odkrycia Gramme'a, przeszło niezauważone, tym się tłumaczy nazwa pierścienia Gramme'a, nadawana powszechnie temu twornikowi.



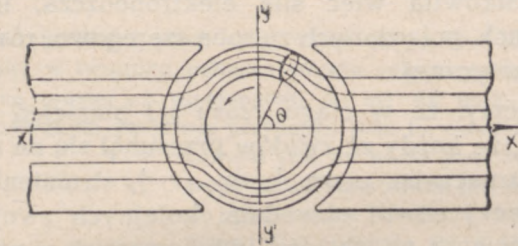
rys. 313

Pierścień ten z żelaza lanego, na którym nawinięty jest spiralnie izolowany drut, znajduje się w polu magnetycznym NS (rys. 313). Co kilka lub kilkanaście zwojów drut, nawi-



nięty na pierścieniu, połączony jest metalicznie z tzw. kolektorem (k). Jest to walec osadzony na osi twornika, zbudowany ze sztabek miedzianych, równoległych do jego osi i oddzielonych jedna od drugiej izolatorem. Drut jest połączony z kolektorem w ten sposób, że początek każdej grupy zwojów  $\alpha$  połączony jest z jedną z tych sztabek, koniec  $\beta$  — ze sztabką sąsiednią, z którą znów połączony jest początek następnej grupy zwojów. Kolektor obracając się razem z twornikiem dotyka stale dwu nieruchomych elektrod  $S_1$  i  $S_2$ , stanowiących bieguny prądnicy. Są to tzw. szczotki (miotelki) prądnicy.

Pole magnetyczne w przestrzeni, w której znajduje się twornik, nie jest polem jednostajnym: wielka zdolność magnetyczna żelaza sprawia, że linie sił skupione są prawie całkowicie w pierścieniu, w którego środku natężenie pola ma wartość niewiele różną od zera. Rozmieszczenie więc linii sił wtedy, gdy twornik nie wiruje, jest mniej więcej takie, jak na rys. 313 a. Niech jeden ze zwojów (lub jedna z grup zwojów), znaj-



rys. 313a

dują się w danej chwili w pobliżu linii  $yy'$ , którą nazywać będziemy linią obojętną. Można bez wielkiego błędu przyjąć, że strumień indukcji, przechodzący przez zwoj w danym położeniu, równy jest połowie strumienia indukcji  $\Psi$ , wysyłanego przez biegun północny  $N$  magnesu, wzbudzającego dane pole. Oznaczmy przez  $\theta$  kąt, jaki tworzy płaszczyzna zwoju z płaszczyzną, prostopadłą do płaszczyzny rysunku i przesuniętą przez oś pola  $xx'$ ; strumień indukcji, objęty zwojem, jest funkcją kąta  $\theta$ , tak że mamy

$$\psi_{\theta} = f(\theta).$$



Gdy twornik obracamy w kierunku wskazanym strzałką wartość bezwzględna strumienia indukcji  $\Psi$  stopniowo maleje od wartości  $\frac{\Psi}{2}$ , jaką ma gdy  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  do wartości zero, którą przybiera, gdy  $\theta = 0$ ; przy dalszym wzroście kąta strumień indukcji co do wartości bezwzględnej wzrasta, przechodząc jednak przez obwód zwoju ze strony przeciwnej do tej, przez jaką wchodził przy ruchu od  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  do  $\theta = 0$ . Wobec tego przez cały ten czas kierunek siły elektrobodźczej w zwoju pozostaje bez zmiany.

Przy tym kierunku pola i kierunku ruchu, jak na rys. 313 siła elektrobodźcza w zewnętrznych częściach zwoju skierowana jest poza płaszczyznę rysunku.

We wszystkich więc zwojach, znajdujących się w danej chwili w położeniach, którym odpowiadają wartości kątów  $\theta$ , zawarte między  $-\frac{\pi}{2}$  i  $+\frac{\pi}{2}$ , siły elektrobodźcze mają kierunki te same, całkowita więc siła elektrobodźcza, indukowana w tych zwojach, połączonych ze sobą szeregowo, równa jest ich sumie arytmetycznej.

Przypuśćmy, że w ciągu czasu  $\Delta t$  pierścień obrócił się o taki kąt  $\alpha$ , że każdy ze zwojów przesunął się na miejsce następnego. Oznaczając przez  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$  strumienie indukcji, objęte w danej chwili obwodami kolejnych zwojów jednej połowy pierścienia, na wartości indukowanych w nich sił elektrobodźczych otrzymamy

$$\varepsilon_i^{(1)} = -\frac{\psi_1 - \psi_0}{\Delta t}; \quad \varepsilon_i^{(2)} = -\frac{\psi_2 - \psi_1}{\Delta t}, \quad \varepsilon_i^{(3)} = -\frac{\psi_3 - \psi_2}{\Delta t} \dots \dots$$

$$\varepsilon_i^{(p)} = -\frac{\psi_p - \psi_{p-1}}{\Delta t},$$

wobec tego całkowita siła elektrobodźcza, indukowana w tej połowie pierścienia, gdy  $p$  jak to bywa zazwyczaj, jest liczbą wielką,

$$\varepsilon'_i = \sum \varepsilon_i^{(p)} = -\frac{\psi_p - \psi_0}{\Delta t}.$$



Zakładając, że na pierścieniu nawinięte jest  $n$  zwojów, mamy

$$\Delta t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{2\pi}{n\omega} = \frac{1}{nN},$$

gdzie  $\omega$  oznacza prędkość kątową ruchu obrotowego pierścienia,  $N$  — liczbę obrotów na sekundę, skąd

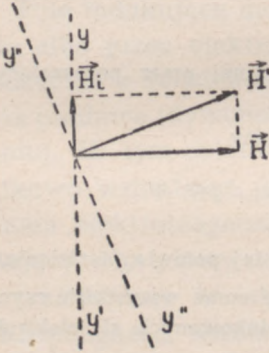
$$\mathcal{E}'_i = -nN(\psi_p - \psi_0) = nN(\psi_0 - \psi_p)$$

Uwzględniając, że strumienie indukcji w początkowym i końcowym położeniu zwoju są co do wartości bezwzględnej równe  $\frac{\Psi}{2}$ , różniąc się jedynie znakiem na wartość bezwzględną siły elektrobodźczej, otrzymujemy

$$\mathcal{E}'_i = nN\Psi. \quad (19)$$

Siła elektrobodźcza indukowana w drugiej połowie pierścienia  $\mathcal{E}''_i$  równa co do wartości bezwzględnej sile  $\mathcal{E}'_i$  jest skierowana przeciwnie, tak że te dwie połowy są jakby dwoma jednakowymi ogniwami, połączonymi równolegle (p. rozdz: V, ust. 3 c).

W rzeczywistości przebieg zjawiska jest nieco odmienny. Prąd indukowany w tworniku wzbudza własne pole magnetyczne, którego oś leży na prostej  $yy'$  prostopadłej do osi  $xx'$  pola indukcyjnego. W rozpatrywanym przez nas przypadku pole to, o natężeniu  $H_i$ , skierowane jest ku górze (rys. 314), pole więc wypadkowe skierowane jest w taką stronę, że płaszczyzna obojętna prostopadła do niego,  $y''y''$ , odchyła się w kierunku ruchu od położenia początkowego  $yy$ . Chcąc zatem, aby szczotki dotykały kolektora w płaszczyźnie obojętnej musimy je przesunąć o pewien kąt w kierunku ruchu.



rys. 314

Na szczotkach prądnicy powstaje zatem (przy otwartym obwodzie prądnicy) różnica potencjałów, równa co do wartości bezwzględnej

$$\mathcal{E}_i = n \cdot N \cdot \Psi. \quad (19a)$$

Ściśle biorąc, siedliskiem siły elektrobodźczej indukowanej jest w każdym zwoju jedynie ta jego część prostopadła do płaszczyzny



rysunku, która leży na zewnętrznej stronie pierścienia; równoległa bowiem do niej część, leżąca wewnątrz pierścienia, znajduje się w polu o znikomo małym natężeniu (p. wyżej), części zaś równoległe do płaszczyzny rysunku znajdują się właściwie poza obrębem pola. Niech  $l$  będzie długością tej części użytecznej, siła elektrodobcza indukowana w tej części będzie, zgodnie ze wzorem (4) równa

$$\mathcal{E}_i^{(p)} = -B_r \cdot v \cdot l,$$

gdzie  $B_r$  jest składową prostopadłą do odcinka  $l$ , a więc składową w kierunku promienia twornika, wektora indukcji. Oznaczając przez  $a$  odległość tego odcinka czynnego od środka twornika; przez  $N$  liczbę obrotów na sekundę, mamy

$$v = 2\pi a \cdot N,$$

skąd

$$\mathcal{E}_i^{(p)} = -B_r \cdot 2\pi N \cdot a \cdot l. \quad (a)$$

Siła ta ma wartość zmienną, równą zeru, gdy  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , wtedy bowiem  $B_r = 0$ , następnie wzrastającą aż do  $\theta = 0$  ( $B_r = B$  ma wtedy wartość możliwie największą) i znów malejącą aż do zera przy  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Podczas jednego półobrotu wartość strumienia indukcji, przecinanego przez poruszający się odcinek, wynosi  $\Psi \left( \frac{\Psi}{2} \right)$  przy obrocie od  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  do  $\theta = 0$  i tyleż przy obrocie od  $\theta = 0$  do  $\theta = +\frac{\pi}{2}$ . Przyjmijmy na przeciętną wartość siły  $\mathcal{E}_i$  tę wartość, którą otrzymamy, podstawiając na  $B_r$  przeciętną wartość wektora indukcji, otrzymaną ze wzoru

$$B_p = \frac{\Psi}{\pi a l}$$

gdzie  $\pi a l$  jest polem powierzchni, opisanej przez poruszający się odcinek.

Podstawiając do wzoru (a) otrzymamy

$$\mathcal{E}_i^{(p)} = -\frac{\Psi}{\pi \cdot a l} \cdot 2\pi N \cdot a \cdot l = -2N \cdot \Psi.$$

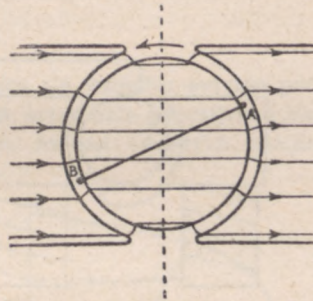
Jeżeli liczba  $\frac{n}{2}$  zwojów, nawiniętych na tej połowie pierścienia, jest dostatecznie wielka, możemy przyjąć, że suma wszystkich czynnych chwilowo w tej połowie pierścienia indukowanych sił elektrodobczych jest mniej więcej równa  $\frac{n}{2} \mathcal{E}_i^{(p)}$  tak, że na jej wartość bezwzględną otrzymujemy

$$\mathcal{E}_i = \frac{n}{2} \mathcal{E}_i^{(p)} = nN\Psi. \quad (19b)$$



W rzeczywistości wartość  $E_i$  waha się koło tej wartości, odchylenia jednak są tym mniejsze, im większa jest ilość  $n$  nawiniętych zwojów.

Stąd jednak wynika, że przy nawinięciu takim, jak na pierścieniu Gramme'a (tzw. nawinięcie pierścieniowe): znaczna część nawiniętego drutu nie jest wcale siedliskiem siły elektrobodźczej i służy jedynie do metalicznego połączenia krótkich stosunkowo odcinków czynnych. Tym się tłumaczy zastąpienie w maszynach współczesnych pierścienia walcem, obracającym się koło swej osi geometrycznej, na którym przewodniki nawinięte są wzdłuż zewnętrznych tworzących walca. Przy tym nawinięciu bębnowym zwiększa się znacznie długość czynna przewodników, nieczynne są bowiem jedynie krótkie druty, łączące odcinki czynne i leżące na podstawach walca (rys. 315, gdzie płaszczyzna rysunku jest prostopadła do osi walca,  $A$  i  $B$  są punktami przecięcia z tą płaszczyzną części przewodników, równoległych do osi). Nie wpływa to, rzecz prosta, na wartość indukowanej siły elektrobodźczej, która, jak to wynika ze wzorów (19a) i (19b) nie zależy zupełnie od długości czynnych części przewodnika, lecz jedynie od ilości zwojów  $n$ , ilości obrotów  $N$  na sekundę oraz od wartości indukcji  $\varphi$ , wysyłanego przez układ indukcyjny.

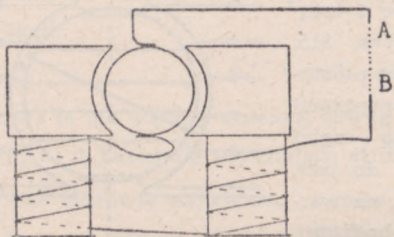


rys. 315

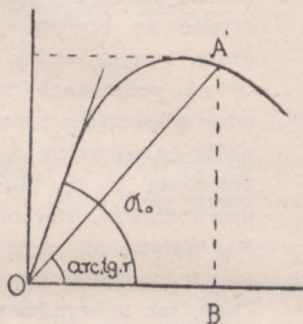
Pole indukujące może być wzbudzane albo przez magnesy stałe albo przez elektromagnesy, zasilane prądem czy to pochodzącym z oddzielnego źródła, czy też wytwarzanym przez samą prądnicę (dynamomaszyny w ściślejszym tego słowa znaczeniu). W tym ostatnim przypadku pole indukujące jest początkowo wzbudzane przez magnetyzm szczątkowy żelaznego rdzenia elektromagnesu (Siemens, 1867 r.). Słaby prąd, powstający w prądnicy na skutek obracania twornika w tym polu, przechodząc w odpowiednim kierunku przez uzwojenie elektromagnesu, wzmacnia pole indukujące, co znowu zwiększa natężenie prądu prądnicy i dalsze zwiększanie się pola indukującego aż do osiągnięcia pewnego stanu równowagi, w którym prądnica, obracana przez parę sił o niezmiennym momencie, będzie miała stałą prędkość kątową.



Przy wzbudzeniu szeregowym (w prądnicach rzędowych) cały prąd, wytworzony przez prądnicę, przechodzi przez elektromagnesy (rys. 316). Obracanie twornika przy otwartym obwodzie zewnętrznym powoduje powstanie na biegunach niewielkiej różnicy potencjałów, pole magnetyczne indukcyjne, wzbudzone przez magnetyzm szczątkowy, pozostaje bez zmiany. Przy zamknięciu obwodu  $AB$  pole magnetyczne wzrasta, ale tylko wtedy, gdy prąd wzbudza pole o tym samym, co pole początkowe, kierunku; gdy kierunek ten jest przeciwny, rdzenie się odmagnesowują, natężenie prądu indukcyjnego spada do zera. Tego typu prądnicą może być wzbudzona jedynie przy



rys. 316



rys. 317

pewnym oznaczonym kierunku obrotu. Różnica potencjałów na biegunach  $V_A - V_B$  zależy nie tylko od natężenia prądu, lecz również i od własności magnetycznych rdzenia; w obwodzie zamkniętym wyraża się ona krzywą taką, jak na rys. 317, gdzie na osi odciętych odkładamy natężenie prądu, na osi rzędnych — różnicę potencjałów. Opór zewnętrzny

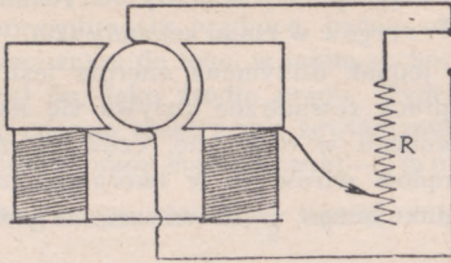
$$r = \frac{V_A - V_B}{i}$$

jest liczbowo równy tangensowi kąta  $A'OB$ ; gdy opór wzrasta, do wartości wyższej od tangensa kąta  $\alpha_0$ , jaki tworzy styczna do krzywej w początkowym jej punkcie  $O$ , prądnicą się nie wzbudza; odwrotnie, gdy opór zewnętrzny spada do wartości bardzo małej, natężenie prądu wzrasta bardzo znacznie.

Gdy obwód elektromagnesu włączony jest równolegle do obwodu twornika (prądnicę upustową), część tylko prądu prądnicę przepływa przez uzwojenie elektromagnesu (rys. 318, gdzie  $R$  jest oporem zmiennym, który reguluje się przez opór elektromagnesu). Dopóki bieguny prądnicę nie są połączone, prądnicą działa tak, jak prądnicą

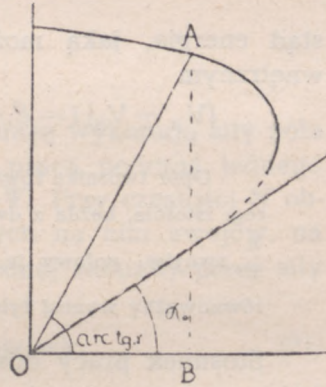


rzędowa; cały prąd indukowany przepływa przez elektromagnes, wzmacniając lub osłabiając pole początkowe zależnie od kierunku



rys. 318

obrotu; i w tym więc przypadku prądnicą się wzbudza jedynie przy obracaniu w jednym tylko wyznaczonym przez pole początkowe kierunku. Odkładając tak, jak poprzednio, na osi odciętych natężenie prądu, płynącego w obwodzie zewnętrznym, na osi rzędnych różnicę potencjałów na biegunach, otrzymamy zależność  $V_A - V_B$  od  $i$  w postaci krzywej rys. 319, gdzie, podobnie jak na krzywej rys. 317 opór zewnętrzny  $r = \operatorname{tg} AOB$ . Gdy opór ten maleje, różnica potencjałów się zmniejsza, aż wreszcie przy wartości granicznej  $r_g = \operatorname{tg} \alpha_0$  prądnicą przestaje działać, natężenie bowiem prądu przepływającego przez elektromagnes o oporze znacznym staje się zbyt małe. Zwarcie więc biegunów powoduje całkowite zanikanie prądu indukowanego.



rys. 319

Oznaczmy przez  $i$  natężenie prądu, wzbudzonego przez twornik, (natężenie prądu w zwojach będzie wtedy równe  $\frac{c}{2}$ ); energia elektryczna, wywiązująca się co sekunda w całym obwodzie, (a więc  $i$  w zwojach twornika) będzie równa  $\mathcal{E}_i \cdot i$  ergów. Energia ta powstaje kosztem pracy zewnętrznej, zużytej na pokonanie oporu, jaki ruchowi twornika stawiają siły magnetyczne pola, działające na zwoje, w których płynie prąd indukowany (p. ust. I). Oznaczając, jak poprzednio, przez  $\omega = 2\pi N$



prędkość kątową twornika, przez  $C$  — wartość momentu działającej na twornik pary sił, na wartość pracy zewnętrznej dostarczanej w ciągu jednej sekundy otrzymamy  $l\mathcal{U}_1 = C \cdot \omega = \mathcal{E}_i \cdot i = nN \cdot \Psi \cdot i$  ergów w ciągu sekundy (20).

W istocie jednak otrzymana energia jest mniejsza; nie cała bowiem praca zewnętrzna zużywa się na wytworzenie prądu indukowanego w obwodzie; część jej zużywa się na wzbudzenie prądów wirowych w tworniku, część na wzbudzenie pola indukującego, część wreszcie na pokonanie tarcia. Wobec tego

$$\mathcal{E}_i \cdot i = l\mathcal{U}_1' < l\mathcal{U}_1$$

Oznaczając przez  $R$  opór twornika, na różnice potencjałów biegunów twornika otrzymujemy

$$V_A - V_B = \mathcal{E}_i - iR,$$

stąd energia, jaką możemy rozporządzać w obwodzie zewnętrznym

$$(V_A - V_B)i = \mathcal{E}_i \cdot i - i^2 R = l\mathcal{U}_1' - i^2 R < l\mathcal{U}_1. \quad (20a)$$

Opór twornika równy jest oporowi  $\frac{n}{4}$  zwojów połączonych w szeregu; istotnie, każda z dwu połów pierścienia ma opór równy oporowi  $\frac{n}{2}$  zwojów; połowy te są połączone równolegle, wobec tego opór równoważny wynosi tyle, co opór  $\frac{n}{4}$  zwojów.

Stosunek pracy dostarczonej do energii rozporządzalnej, który możemy nazwać współczynnikiem skutku użytecznego lub wydajnością prądnicy (p. tom I, str. 388),

$$\eta = \frac{l\mathcal{U}_1'}{\mathcal{E}_i \cdot i - i^2 R}$$

jest zawsze mniejszy od jedności.

Przypuśćmy teraz, żeśmy prądnicę zatrzymali i połączyli jej bieguny z zewnętrznym źródłem prądu tak, żeby przez zwoje twornika płynął prąd w tym samym kierunku, co prąd wytwarzany przez prądnicę. O ile kierunek pola magnetycznego pozostanie bez zmiany, siły pola magnetycznego będą



działały na zwoje w tym samym, co poprzednio, kierunku, wobec czego wypadkowy moment par sił pola, działających na twornik, skierowany w stronę przeciwną do momentu sił zewnętrznych, które obracały prądnicę, będzie obracał twornik w kierunku przeciwnym do tego, w jakim zachodził ruch twornika, gdy służył on, jako źródło prądu. Tym razem przeto układ, zasilany energią elektryczną zewnętrznego źródła prądu staje się źródłem pracy mechanicznej — motorem (silnikiem) elektrycznym. Niech  $\frac{i}{2}$  będzie natężeniem prądu płynącego przez poszczególne zwój twornika,  $\frac{\Psi}{2}$  — strumieniem indukcji magnetycznej przez każdą z połów pierścienia. Gdy twornik wykonuje połowę obrotu, wartość strumienia indukcji, przechodzącego przez zwój, znajdujący się początkowo w płaszczyźnie obojętnej  $YY'$ , zmienia się o  $\Psi$ , praca więc sił magnetycznych równa jest

$$l\mathcal{O}' = \frac{i}{2} \Psi.$$

(p. rozdz. VII, wz. 23b). Taką samą pracę wykonują siły pola podczas drugiego półobrotu, tak że praca podczas jednego obrotu pojedynczego zwoju wynosi  $i \cdot \Psi$ . Przy częstości  $N$  obrotów twornika i liczbie  $n$  nawiniętych na nim zwojów, na wartość pracy, wykonanej w ciągu jednej sekundy przez siły pola otrzymujemy

$$l\mathcal{O}_2 = n \cdot N \cdot i \cdot \Psi \text{ ergów/sek.} \quad (21)$$

Praca ta wykonana jest kosztem dostarczanej z zewnątrz energii elektrycznej. Oznaczmy przez  $V_A - V_B$  różnicę potencjałów, przyłożoną do biegunów motoru; z zasady zachowania energii wynika, że

$$(V_A - V_B) i = i^2 R + l\mathcal{O}_2 = i^2 R + nNi\Psi, \quad (22)$$

skąd

$$i = \frac{V_A - V_B - nN\Psi}{R}. \quad (22 a)$$

Natężenie więc prądu ma wartość mniejszą od tej, którą by miało, gdyby prąd płynął przez twornik nieruchomy, przesu-



wanie się bowiem zwojów twornika powoduje, jak wiadomo powstanie siły elektrobodźczej indukowanej  $\mathcal{E}_i$ , równej co do wartości bezwzględnej  $nN\Psi$  (p. wzór 19 a) i skierowanej przeciwnie do przyłożonej różnicy potencjałów. W przypadku granicznym, gdy opór twornika staje się równy zeru, energia dostarczona z zewnątrz zużywa się całkowicie na pracę mechaniczną; przyłożona różnica potencjałów jest wtedy całkowicie zrównoważona przez siłę elektrobodźczą, indukowaną w tworniku podczas obrotu.

Przypuśćmy, że dwie takie doskonałe maszyny sprzęgliśmy razem w ten sposób, że prądu, otrzymanego z jednej z nich kosztem pracy zewnętrznej  $W_1$ , używamy do obracania twornika drugiej, działającej wtedy, jako motor.

Z zestawienia wzorów (20), (20 a) i (22), w których przyjmujemy  $R = 0$ , wynika, że wtedy

$$W_1 = W_2,$$

pracę zużytą na obracanie prądnicy oddałby z powrotem motor. W motorach rzeczywistych zachodzi podobnie, jak i w prądnicach, i z tych samych powodów rozpraszanie energii, tak że mamy

$$W_1 > W_2.$$

Straty te jednak są na ogół niewielkie: w dobrze zbudowanych maszynach mogą być sprowadzone do 5%, prądnice więc i motory elektryczne zbliżają się już do typu maszyn odwracalnych.

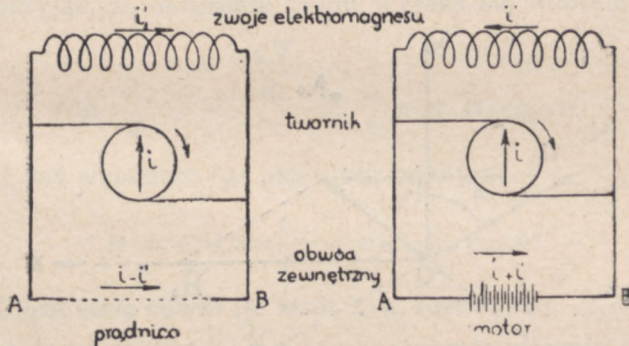
Podobnie, jak i w prądnicach, i w motorach zachodzi przesunięcie płaszczyzny obojętnej; w tym przypadku jednak przesunięcie, jak to łatwo można sprawdzić, zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu.

W motorach wzbudzanych szeregowo (motorach szeregowych) natężenie prądu w tworniku i zwojach elektromagnesu może mieć w chwili ruszania motoru wartość bardzo wielką, wtedy bowiem siła elektrobodźcza indukowana jest równa zeru. Aby natężenie to zmniejszyć, włącza się szeregowo w obwód twornika opór dodatkowy, zmniejszany stopniowo w miarę, jak siła  $\mathcal{E}_i$  wzrasta, i wreszcie całkowicie wyłączany po osiągnięciu stanu statecznego. Przy zmniejszaniu się zewnętrznych oporów mechanicznych motor obraca się prędzej, siła elektrobodźcza indukowana wzrasta, wobec czego natężenie prądu maleje, co znów powoduje zmniejszenie się strumienia indukcji magnetycznej  $\Psi$  i dalsze przyspieszenie biegu motoru, tak że może nastąpić



tw. rozbieganie się motoru. Kierunek ruchu obrotowego twornika nie zależy od kierunku przyłożonej na biegunach różnicy potencjałów, z chwilą bowiem, gdy kierunek ten zmienimy na przeciwny, zmieni się na przeciwny zarówno kierunek prądu w tworniku, jak i kierunek pola magnetycznego, twornik będzie się obracał w tym samym kierunku, co poprzednio.

Nieco inaczej przebiegają zjawiska w motorach wzbudzanych równolegle (motory upustowe). W takich motorach prąd, przechodzący przez zwoje elektromagnesu, ma zawsze kierunek przeciwny do kierunku prądu, jaki by płynął, gdyby maszyna działała, jako prądnica, wzbudzająca prąd o kierunku tym samym, w jakim prąd płynie, gdy twornik działa jako motor (rys. 320). Twornik więc



rys. 320

obraca się w tym samym kierunku, gdy używamy go jako prądnicy, jak i wtedy, gdy służy nam jako motor. Gdy różnica potencjałów na biegunach ma wartość stałą, natężenie prądu w elektromagnesie, a więc i strumień indukcji, zachowuje również wartość mniej więcej stałą (por. krzywą rys. 319); ze wzoru (22) otrzymujemy

$$n \cdot N \cdot \Psi = V_A - V_B - iR,$$

stąd, biorąc pod uwagę, że  $R$  ma wartość zazwyczaj małą, znajdziemy, że

$$N \doteq \frac{V_A - V_B}{n \Psi} \doteq \text{stałej}.$$

Prędkość takiego motoru jest mniej więcej niezależna od jego obciążenia. W tym przypadku praca, którą będzie mógł nam dostarczyć motor,

$$n \cdot N \cdot \Psi \cdot i = K \cdot i$$

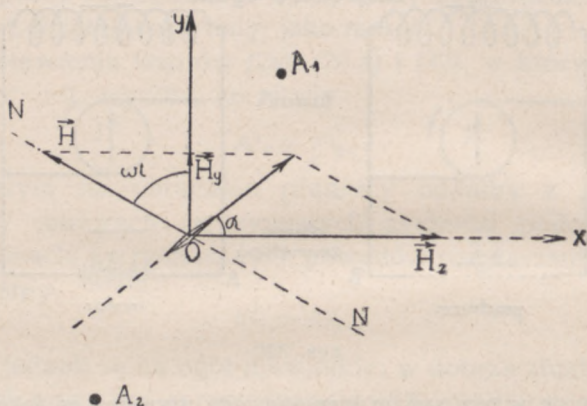
będzie mniej więcej proporcjonalna (przy stałej różnicy potencjałów na biegunach) do natężenia pobieranego przez motor prądu.



## 7. — WYZNACZANIE WARTOŚCI OMA BEZWZGLĘDNEGO.

Na omówionych w niniejszym rozdziale zjawiskach indukcji elektromagnetycznej oparte są metody pomiaru oporu w jednostkach bezwzględnych. Z metod tych omówimy tutaj jedynie dwie: metodę W. Thomsona, lorda Kelvina (1863 r.), użytą następnie przez Rayleigha (1881) i metodę L. Lorenza (1873 r.).

W metodzie Thomsona cewka kołowa o znanej ilości zwojów i dokładnie zmierzonych wymiarach obraca się koło osi pionowej w polu magnetycznym ziemskim. Niech punkty  $A_1$  i  $A_2$  (rys. 321) będą śladami przecięcia się cewki w jej chwilo-



rys. 321

lowym położeniu z płaszczyzną rysunku,  $O$  — śladem pionowej osi obrotu,  $H_x$  — składową poziomą natężenia pola magnetycznego ziemskiego, którego kierunek przyjmijemy za kierunek osi  $X$ . W czasie ruchu cewki zmienia się przechodzący przez nią strumień indukcji pola ziemskiego, w cewce powstaje więc prąd indukowany, wytwarzający pole magnetyczne  $H$ , skierowane wzdłuż normalnej  $NN$  do płaszczyzny cewki i razem z cewką obracające się dokoła osi  $O$ . Pole to ma zawsze kierunek taki, aby przeciwdziałać zmianie strumienia indukcji, objętego przez cewkę.

Jeżeli więc w punkcie  $O$  zawiesimy igielkę magnetyczną o znacznym w porównaniu z okresem obrotu okresem wahań,



igła ta odchyli się w kierunku ruchu cewki od swego pierwotnego położenia (por. ust. I, str. 456) i będzie się wahała koło nowego położenia równowagi, tworzącego z kierunkiem południe-północ kąt  $\alpha$ . Zmieniający się okresowo strumień indukcji, objęty obwodem cewki, wynosi

$$\Psi = n \cdot S \cdot H_z \cdot \sin \omega t,$$

gdzie  $\omega$  jest prędkością kątową ruchu obrotowego cewki,  $n$  — ilością zwojów cewki i gdzie czas  $t$  liczymy od chwili, w której płaszczyzna cewki była prostopadła do osi  $Oy$ .

Gdy prędkość obrotu cewki jest niewielka (p. niżej), możemy przyjąć, że natężenie prądu wyraża się wzorem

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{r} = - \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\omega}{r} n \cdot S \cdot H_z \cos \omega t,$$

wartość zaś wzbudzonego przez ten prąd pola

$$H = C \cdot i = \frac{C}{r} \cdot \omega \cdot n \cdot S \cdot H_z \cos \omega t,$$

gdzie  $C$  jest stałą cewki (p. wzór 25 a, rozdz. VII).

Składowa w kierunku  $x$  tego natężenia zmienia dwa razy w ciągu jednego obrotu swój kierunek, przeciętna jej wartość równa jest zeru; składowa w kierunku osi  $y$  równa

$$\frac{C}{r} \omega \cdot n \cdot S \cdot H_z \cos^2 \omega t$$

ma wartość przeciętną, równą

$$\frac{1}{2} \frac{C}{r} \omega \cdot n \cdot S \cdot H_z.$$

Wartości przeciętne wyznaczamy ze wzorów

$$H_x^{(p)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{C}{r} \omega \cdot n \cdot S \cdot H_z \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t \, dt = 0$$

$$H_y^{(p)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{C}{r} \omega \cdot n \cdot S \cdot H_z \cdot \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2} \frac{C}{r} \omega \cdot n \cdot S \cdot H_z.$$



Wobec tego

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H_y}{H_z} = \frac{C \cdot n \cdot S \cdot \omega}{2r}$$

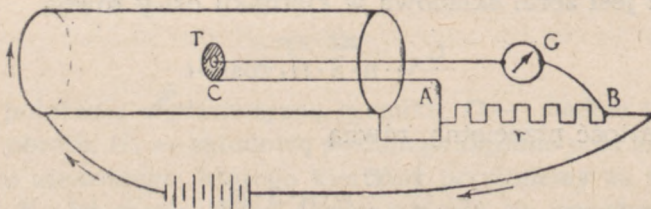
i wreszcie

$$r = \frac{C \cdot n \cdot S \cdot \omega}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{a})$$

gdzie wartości wszystkich wielkości prawej strony wzoru możemy albo obliczyć albo wyznaczyć z pomiarów bezpośrednich. W pomiarze tym okres wahań igły jest zazwyczaj rzędu paru lub kilku sekund, częstość zaś obrotów cewki nie przekracza dziesięciu.

Przy pomiarach bardzo dokładnych należy uwzględnić działanie indukcyjne igły na cewkę oraz indukcję własną cewki. Związek między natężeniem prądu i siłą elektrodźczą indukowaną nie wyraża się już wtedy prawem Ohma, lecz prawem uogólnionym, obowiązującym w przypadku prądów zmiennych (p. rozdz. IX). Wtedy jednak można nadać cewce prędkość większą i tym samym zmniejszyć wahań igły koło nowego położenia równowagi.

W metodzie L. Lorenza układem, podlegającym działaniu indukcyjnemu, jest tarcza metalowa, obracająca się w polu długiej cewki, przez którą płynie stały prąd  $i$  (rys. 322). Gdy



rys. 322

połączymy metalicznie środek tarczy  $O$  z jednym z punktów jej obwodu  $C$  tak, aby tarcza, obracająca się, stale w jednym punkcie dotykała nieruchomego drutu  $AC$ , w utworzonym w ten sposób obwodzie powstanie prąd indukowany (por. rozdz. VIII, str. 531), wzbudzony przez indukowaną siłą elektrodźczą, równą strumieniowi indukcji, przecinanemu w jednostce



czasu przez promień  $OC$ . Oznaczając przez  $a$  promień tarczy, przez  $T$  — okres jednego obrotu, otrzymamy

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\pi a^2 \cdot H}{T} = -\frac{1}{2} a^2 \cdot \omega \cdot H.$$

Podstawiając

$$H = 4\pi n_1 i$$

(p. rozdz. VII, str. 479) i nie uwzględniając znaku, znajdujemy

$$\mathcal{E}_i = 2\pi n_1 \cdot a^2 \cdot \omega \cdot i.$$

Przyłączmy obwód do obwodu cewki w punktach  $A$  i  $B$ , między którymi włączony jest mierzony opór  $r$ , i obracajmy tarczę w takim kierunku, aby siła elektrobodźcza indukowana była skierowana przeciwnie do różnicy potencjałów w punktach  $A$  i  $B$ . Dobierając odpowiednio prędkość ruchu obrotowego tarczy, będziemy mogli doprowadzić natężenie prądu w obwodzie tarczy do zera; przez galwanometr  $G$  nie będzie płynął żaden prąd. Wtedy będziemy mieli

$$\mathcal{E}_i = 2\pi n_1 a^2 \cdot \omega \cdot i = r \cdot i,$$

skąd

$$r = 2\pi n_1 \cdot a^2 \cdot \omega. \quad (b)$$

Smith używając tej metody, znalazł (1914 r.), że opór jednego oma międzynarodowego (p. rozdz. V, ust. I), ustalony na podstawie dawniej wykonanych pomiarów oma bezwzględnego, w rzeczywistości jest nieco od oma bezwzględnego większy, tak że

1 om międzynarodowy = 1,00052 oma bezwzględnego.

Pomiary natężenia prądu w jednostkach bezwzględnych, wykonane m. in. w urzędzie wzorcowym St. Zj. Am. Półn. (Rosas Doruy, Miller, 1912 r.), przy użyciu przyrządów bezwzględnych (p. rozdz. VII, ust. 5, str. 505) pozwoliły stwierdzić, że różnica między amperem międzynarodowym i amperem bezwzględnym nie przekracza 0,0001 ich wartości

1 amp. międzyn. = 0,99993 amp. bezwzględ.



Pomiary wykonane w 1934 r. przez H. L. i R. W. Curtisów dały na wartość ampera międzynarodowego nieco inną wartość, a mianowicie, według nich

$$1 \text{ amp. międzyn.} = 0,999928 \text{ amp. bezwzgl.}$$

Na tych dwóch jednostkach opiera się jednostka międzynarodowa potencjału — volt międzynarodowy; określony jako różnica potencjałów na końcach przewodnika o oporze 1 oma międzyn., przez który płynie prąd równy 1 amp. międzyn. Jest to jednostka  $\frac{1}{1,01830}$  razy mniejsza od różnicy potencjałów na biegunach otwartego ogniwa Westona (p. rozdz. VI, str. 454), przy czym

$$1 \text{ w. międzyn.} = 1,0004 \text{ wolta bezwzględ.}$$

Z tych danych można i dla wszystkich innych pochodnych jednostek elektrycznych i magnetycznych wyznaczyć stosunek jednostek międzynarodowych do bezwzględnych.

Opierając się na ostatnio wytworzonych pomiarach i biorąc ich przeciętną, Komitet Międzynarodowy Miar i Wąg ustalił w październiku 1946 r. następujący związek między jednostkami bezwzględnymi i międzynarodowymi

$$\begin{aligned} 1 \text{ om międz.} &= 1,00049 \text{ oma bezwzględnego} \\ 1 \text{ amp. międz.} &= 0,99985 \text{ amp.} && \text{''} \\ 1 \text{ volt międz.} &= 1,00034 \text{ wolta} && \text{''} \end{aligned}$$



## ROZDZIAŁ IX

### PRĄDY ZMIENNE. DRGANIA ELEKTROMAGNETYCZNE

#### 1. — PRĄDY ZMIENNE.

Przypuśćmy, że do końców  $A$  i  $B$  liniowego przewodnika o oporze omowym  $r$  i stałym współczynniku indukcji własnej  $L_{11}$  przyłożona jest zmieniająca się okresowo różnica potencjałów

$$V_A - V_B = V_0 \sin \omega t. \quad (a)$$

Przewodnik będzie w tym przypadku siedliskiem prądu, którego natężenie będziemy mogli wyznaczyć z równania 9a na str. 545, podstawiając na miejsce stałej siły elektrodźwicznej  $\mathcal{E}$  zmienną różnicę potencjałów. Odrzucając znaczki przy  $L$  otrzymamy

$$V_0 \sin \omega t = ri + L \frac{di}{dt}. \quad (1)$$

Temu równaniu czyni zadość również zmienna wartość natężenia prądu, o tym samym okresie zmian, co przyłożona różnica potencjałów, lecz o innej fazie początkowej

$$i = i_0 \sin (\omega t - \varphi). \quad (b)$$

Podstawiając do równania (1) tę wartość natężenia oraz wartość pochodnej

$$\frac{di}{dt} = i_0 \omega \cos (\omega t - \varphi) = i_0 \omega \sin \left( \omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right), \quad (c)$$

znajdujemy

$$V_0 \sin \omega t = ri_0 \sin (\omega t - \varphi) + Li_0 \omega \cos (\omega t - \varphi). \quad (d)$$



To równanie powinno być spełnione przy wszystkich wartościach zmiennej  $t$ , a więc równie dobrze dla  $t=0$ , jak i dla  $t = \frac{T}{4}$  (por: rozdz. I, str. 55), wobec czego mamy

$$\begin{aligned} 0 &= -ri_0 \sin \varphi + Li_0 \omega \cos \varphi, \\ V_0 &= ri_0 \cos \varphi + Li_0 \omega \sin \varphi. \end{aligned} \quad (e)$$

Z pierwszego z tych równań otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{r} \quad (2)$$

i

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{r};$$

mnożąc zaś pierwsze z tych równań przez  $\cos \varphi$ , drugie przez  $\sin \varphi$  i dodając je stronami, znajdujemy

$$V_0 \sin \varphi = L\omega \cdot i_0,$$

skąd

$$i_0 = \frac{V_0 \sin \varphi}{L\omega}. \quad (2a)$$

Ze wzoru (2) znajdujemy, że

$$\sin \varphi = \frac{L \cdot \omega}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}},$$

tak że

$$i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \quad (2b)$$

i ostatecznie

$$i = i_0 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{r}\right). \quad (2c)$$

Natężenie prądu nie będzie więc jednocześnie z przyłożoną różnicą potencjału osiągało najmniejszych i największych wartości; podczas narastania przyłożonej różnicy potencjałów prąd indukcji własnej, mając kierunek przeciwny do kierunku prądu, wzbudzonego przez tę różnicę, zmniejsza jego natężenie, w chwili zaś zmniejszania się różnicy potencjałów do zera,



mając ten sam kierunek, co  $V_0$ , przedłuża jego trwanie. Działanie to jest tym wydatniejsze, im dłużej natężenie prądu indukcyjnego zachowuje wartość, którą można porównywać z wartością prądu wzbudzonego przez przyłożoną różnicę potencjałów, i im większy jest stosunek czasu jego trwania do okresu zmian tej różnicy, a więc innymi słowy, im większa jest stała czasu  $\frac{L}{r}$  (p. rozdz. VIII, str. 546) i im większa jest kołowa częstość zmian.

Z tych samych powodów największa wartość natężenia prądu związana jest z największą wartością  $V_0$  przyłożonej różnicy potencjałów nie wzorem Ohma, lecz wzorem (2 b), w którym zamiast oporu omowego mamy wielkość

$$\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2},$$

tw. opór pozorny lub impedancja przewodnika (łac. — impedire — przeszkadzać, stać na zawadzie).

Zwiększając więc indukcję własną przewodnika (np. nawijając przewodnik na rdzeń żelazny), możemy, nie zmieniając oporu omowego między punktami A i B, zmniejszyć natężenie płynącego przez przewodnik prądu. Wielkość  $L\omega$  jest zazwyczaj nazywana oporem indukcyjnym.

Gdy przewodnik stanowi obwód zamknięty, w którym czynna jest zmienna siła elektrobodźcza

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

prąd, płynący w obwodzie, związany jest z siłą elektrobodźczą w ten sam sposób, w jaki w rozpatrywanym wyżej przypadku był związany ze zmienną różnicą potencjałów, zależność bowiem między tymi wielkościami wyraża się i tym razem równaniem (1), w którym  $V_0$  zastępujemy przez  $\mathcal{E}_0$ .

Tego rodzaju siła elektrobodźcza powstaje np. przy równomiernym obracaniu cewki w polu magnetycznym (por. rozdz. VIII, ust. 7).

W induktorze ziemskim, zbudowanym przez Webera, cewka, złożona z dość znacznej ilości zwojów, mogła być ustawiona prostopadle albo do składowej poziomej pola magnetycznego ziemi albo do jego składowej pionowej, w pierwszym przypadku cewka obracała się koło osi pionowej, w drugim — poziomej (rys. 323).



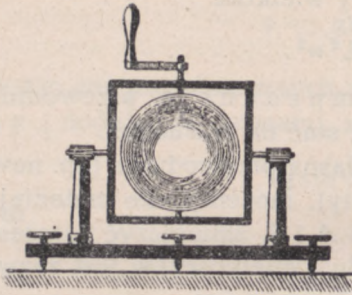
Strumień indukcji, objęty obwodem cewki i równy

$$\Psi = nSH_n = nsH \sin \omega t$$

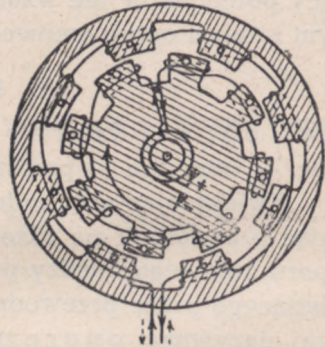
gdzie  $H_n$  — składowa pola ziemskiego, prostopadła do płaszczyzny cewki, zmienia się okresowo, sinusoidalnie; tak samo więc zmieniać się będzie i siła elektrobodźcza indukowana

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} = - nS \cdot H \cos \omega t.$$

Okresowo zmieniającą się siłą elektrobodźczą można również otrzymać z prądnicy, niewiele różniącą się od opisanej wyżej (rozd. VIII, ust. 6) prądnicy prądu stałego.



rys. 323



rys. 324

Na rotorze  $O$  rozmieszczone są w równych odstępach (rys. 324) rdzenie żelazne  $a$ , na których nawinięte są cewki tak, aby przy szeregowym ich połączeniu w dwu sąsiednich cewkach prąd płynął w kierunkach przeciwnych. Podobnie rdzenie  $b$  w tej samej ilości i o tak samo nawiniętych cewkach rozmieszczone są na współosiowej z rotorem nieruchomej części prądnicy (tzw. statorze). Jeżeli teraz jeden z tych układów cewek, np. rotor, połączymy z zewnętrznym źródłem stałego prądu, na rdzeniach tego układu powstaną na przemian dodatnie i ujemne bieguny magnetyczne. Przy obracaniu rotora strumień indukcji magnetycznej, przechodzący przez cewki statora będzie się okresowo zmieniał, okresowo więc będzie się zmieniała i siła elektrobodźcza indukowana, równa, jak to można bez trudu stwierdzić, sumie arytmetycznej sił elektrobodźczych indukowanych w poszczególnych cewkach.



W tym przypadku siedliskiem siły indukowanej są cewki statora, równie dobrze jednak moglibyśmy cewki statora połączyć ze źródłem prądu stałego, wtedy siła elektrobodźcza byłaby indukowana w cewkach rotora. Zazwyczaj jednak rotor łączony jest z zewnętrznym źródłem prądu, wtedy bowiem unika się trudności, jakie, wobec znacznych na ogół natężeń prądu indukowanego, nastęca połączenie źródła tego prądu z obwodem zewnętrznym, w którym prąd ten jest użytkowany.

W chwili, gdy cewki  $a$  znajdują się naprzeciwko cewek  $b$ , strumień indukcji, przechodzący przez cewki  $b$ , ma wartość  $\pm\Psi$ , zależnie od znaku bieguna magnetycznego, znajdującego się w danej chwili przed cewką statora. Wartość strumienia spada do zera, gdy cewki  $a$  znajdują się między cewkami  $b$ . Wobec tego, że w każdej chwili siła elektrobodźcza indukowana ma w każdej cewce wartość i kierunek ten sam, całkowita siła elektrobodźcza waha się między wartościami  $+pnN\Psi$  i  $-pnN\Psi$ , gdzie  $p$  jest liczba par biegunów rotora (por. rozdz. VIII ust.6).

Tym razem zależność siły elektrobodźczej od czasu nie wyraża się już sinusoidą (choć niewiele od niej odbiega), jakkolwiek jednak byłby kształt okresowej funkcji

$$\mathcal{E} = f(t),$$

możemy zawsze, zgodnie z twierdzeniem Fouriera (rozd. I, str. 56), uważać ją za sumę odpowiednio dobranych funkcji sinusów i do każdej z nich stosować wyprowadzone wzory.

Przeciętna wartość siły elektrobodźczej w ciągu jednego okresu będzie zarówno w tym przypadku, jak i w przypadku, rozpatrywanym poprzednio, gdy źródłem prądu był induktor ziemski, równa zero, każdej bowiem wartości, jaką podczas pierwszej połowy okresu przybiera siła elektrobodźcza indukowana, odpowiada podczas drugiej połowy wartość równa i o znaku przeciwnym.

Przeciętną wartość w ciągu jednego okresu siły elektrobodźczej zmieniającej się sinusoidalnie, otrzymujemy ze wzoru

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}_0 \sin \frac{2\pi t}{T} dt = -\frac{\mathcal{E}_0}{T} \left[ \frac{T}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{T} \right]_0^T = 0.$$

W przypadku ogólnym każdy ze składników harmonijnych, na jakie rozkładamy funkcję  $\mathcal{E} = f(t)$ , ma wartość przeciętną w ciągu jednego



okresu równą zero, a ponieważ okresy te są do siebie w stosunku takim, jak liczby całkowite, otrzymujemy i dla okresu drgania zasadniczego (p. str. 56) przeciętną zero.

Tego rodzaju siły elektrobodźcze, których zmiany odpowiadają rozpatrywanym w rozdziale I drganiom złożonym i prostym, nazywać będziemy *zmiennymi* (przemiennymi), wzbudzone zaś przez nie prądy, też, jak to wynika z naszych rozważań poprzednich, zmieniające się okresowo i mające przeciętną wartość w ciągu jednego okresu równą zero, prądami *zmiennymi* (przemiennymi).

Okresowe zmiany kierunku i wartości natężenia prądu, płynącego przed dany obwód, będący siedliskiem zmiennej siły elektrobodźczej, powodować będą, oczywiście, powstawanie w obwodach sąsiednich sił elektrobodźczych również zmieniających się okresowo. Gdy mamy do czynienia tylko z jednym obwodem, poddanym działaniu indukującemu, związek między natężeniem prądu indukowanego w obwodzie wtórnym i natężeniem indukującym otrzymamy z równania

$$L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 = 0.$$

W prostym przypadku, gdy opór omowy  $r_2$  obwodu wtórnego bardzo mało różni się od zera, mamy

$$L_{22} \frac{di_2}{dt} = - L_{12} \frac{di_1}{dt},$$

skąd

$$i_2 = - \frac{L_{12}}{L_{22}} i_1.$$

Prąd w obwodzie wtórnym płynie stale w kierunku przeciwnym do kierunku prądu w obwodzie pierwszorzędym, wobec czego te dwa obwody stale się odpychają.

Tego rodzaju przypadek mamy w doświadczeniu E. Thomsona.

Obwód pierwszorzędny stanowi tu cewka o rdzeniu z prętów żelaznych, obwód wtórny pierścień miedziany, nawinięty na wystający z cewki koniec



rys. 325



rdzenia. Gdy cewkę połączymy ze źródłem zmiennej siły elektrodźwicznej, pierścień jest przez cewkę gwałtownie odpychany. Jeżeli pierścień przytrzymamy tak, aby zachował niezmiennie względem cewki położenie, pierścień ogrzewa się do bardzo nieraz wysokiej temperatury.

W przypadku ogólnym wartość natężenia prądu  $i_2$  otrzymamy rozwiązując układ dwu równań

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 \sin \omega t &= r_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ &= r_2 i_2 + L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

Równaniom tym czynią zadość wartości natężeń prądu, wyrażone wzorami

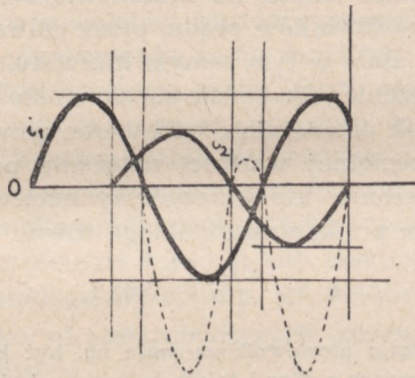
$$i_1 = A_1 \sin(\omega t - \beta_1),$$

$$i_2 = A_2 \sin(\omega t - \beta_2),$$

gdzie  $A_1$  i  $A_2$  są stałymi, których wartość można wyznaczyć znając wartości stałych współczynników w równaniach. Postępując w ten sam sposób, jak przy rozwiązywaniu równania (I), znajdziemy, że

$$\operatorname{tg}(\beta_1 - \beta_2) = -\frac{r_2}{L_{22} \omega}$$

a więc, że różnica faz prądu indukującego i indukowanego jest zawsze większa od  $\frac{\pi}{2}$ , mniejsza od  $\pi$  (tg ujemny), że przeto ułamek



rys. 325a

okresu  $T$  w ciągu którego prądy mają kierunki zgodne, jest mniejszy od ułamka, w ciągu którego mają kierunki przeciwne, innymi słowy, że siły odpychające przeważają nad siłami przyciągającymi. Gdy  $r_2 \rightarrow 0$ ,  $\beta_1 - \beta_2$  dąży do  $\pi$ . Odkładamy (rys. 325a) na osi odciętych



czas. na osi rzędnych natężenia prądów  $i_1$ ,  $i_2$  oraz wielkość  $f$ , proporcjonalną do iloczynu chwilowych wartości tych natężeń  $f = k \cdot i_1 i_2$ . Zgodnym kierunkom prądu, a więc dodatniej wartości  $f$  odpowiadać będzie przyciąganie się obwodów, ujemnym — odpychanie. Przeciętna wartość  $f$ , będąca miarą siły, z jaką działają na siebie wzajemnie te obwody, otrzymamy, sumując pola elementarne, zawarte między krzywą  $f$  i osią  $t$ , i dzieląc otrzymaną sumę przez okres zmian  $T$ , przy czym pole, leżące powyżej osi  $t$  musimy uważać za dodatnie, poniżej — za ujemne. Gdy tak, jak w rozpatrywanym przypadku, różnica faz natężeń prądów jest zawarta między  $\frac{\pi}{2}$  i  $\pi$  suma tych pól jest ujemna, przeciętna więc wartość jest też ujemna: obwody się odpychają.

## 2. — POMIAR ZMIENNEJ SIŁY ELEKTROBODZICZEJ I NATĘŻENIA PRĄDU ZMIENNEGO.

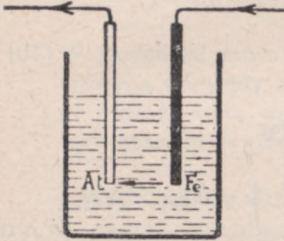
Do pomiaru zmiennych sił elektrobodźczych i zmiennych natężeń prądu nie nadają się na ogół przyrządy używane do pomiaru prądu stałego. Zwyczajny galwanometr, włączony do obwodu z prądem zmiennym, nie wychyli się ze swego położenia równowagi, przeciętne bowiem natężenie prądu w ciągu jednego okresu, zazwyczaj znacznie mniejszego od okresu drgań własnych galwanometru, równe jest, jak to wyżej ustaliliśmy, zeru. Jeżeli jednak na skutek włączenia do obwodu odpowiednich prostowników prądu, przez galwanometr będzie przepływał prąd stale w tym samym kierunku, to, jakkolwiek i tym razem natężenie jego będzie się zmieniało okresowo, spowoduje on jednak pewne stałe odchylenie galwanometru, odpowiadające przeciętnej wartości natężenia podczas połowy okresu. To natężenie, które nazwiemy natężeniem średnim, jest w przypadku prądu sinusoidalnego równe

$$i_s = \frac{2 i_0}{\pi} = 0,63 i_0 \quad (3)$$

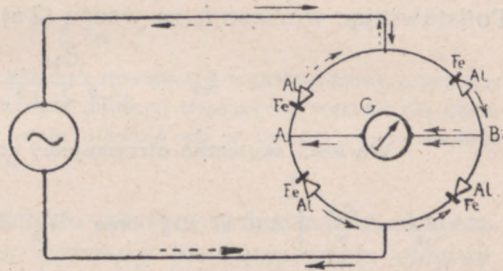
Tego rodzaju prostownikiem może np. być komórka elektrolityczna o elektrodach z glinu i żelaza, zanurzonych do roztworu amonu (rys. 326). Przez taką komórkę prąd przechodzi tylko w takim kierunku, przy którym katodą jest elektroda glinowa. Przy odpowiednim włączeniu w obwód zmiennej siły elektrobodźczej czterech takich komórek prąd w gałęzi  $AB$ , zawierającej galwanometr, będzie miał zawsze ten sam kierunek. Wartość średniego natężenia prądu otrzymujemy ze wzoru



$$i_s = \frac{2}{T} i_0 \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \cdot dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{i_0 T}{2\pi} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \cos \omega t = \frac{2 i_0}{\pi}$$



rys. 326



rys. 327

Innego typu prostownik stanowić będzie układ dwu elektrod metalowych, umieszczonych w próżni. Jeżeli jedną z tych elektrod ogrzejemy do wysokiej temperatury (żarzenia), prąd przechodzić będzie przez ten układ tylko w takim kierunku, przy którym elektroda o temperaturze wyższej jest katodą.

Częściej jednak do pomiarów używa się przyrządów, których wskazania są proporcjonalne do drugiej potęgi mierzonej wielkości, o przeciętnej wartości zawsze różnej od zera; jest bowiem rzeczą oczywistą, że nie może być równy zero ani przeciętny kwadrat natężenia prądu, proporcjonalny do ilości ciepła Joule'a, wywiązanego w obwodzie w ciągu jednego okresu, (inaczej bowiem ciepło wywiązywałoby się w obwodzie tylko przy przepływie prądu w jednym kierunku, przy zmianie zaś kierunku prądu ciepło byłoby przez obwód pochłaniane), ani też przeciętny kwadrat siły elektrobodźczej, zmieniającej się w analogiczny sposób, jak natężenie prądu.

W przypadku sił elektrobodźczych, zmieniających się sinusoidalnie wynosi

$$\mathcal{E}_{sk}^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2}, \quad \text{skąd} \quad \mathcal{E}_{sk} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}},$$

jest tzw. siła elektrobodźcza skuteczna; pierwiastek zaś kwadratowy z przeciętnej wartości kwadratu na-



tężenia prądu w ciągu jednego okresu tzw. natężenie skuteczne — jest równy

$$i_{sk} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \quad (4a)$$

Podstawiając wartość  $i_0$  ze wzoru (2a) otrzymujemy

$$i_{sk} = \frac{\mathcal{E}_{sk}}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \quad (4b)$$

Wartości skuteczne otrzymujemy całkując

$$\mathcal{E}_{sk}^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt \quad \text{oraz} \quad i_{sk}^2 = \frac{i_0^2}{T} \int_0^T \sin^2 (\omega t - \varphi) dt.$$

Znając wartości skuteczne oraz różnicę faz  $\varphi$  natężenia prądu i siły elektrodźwicznej, możemy wyznaczyć pracę prądu zmiennego

$$\begin{aligned} dW &= \mathcal{E}_0 \sin \omega_0 t \cdot i_0 \cdot \sin (\omega t - \varphi) dt = \\ &= \mathcal{E}_0 i_0 (\sin^2 \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi) dt = \\ &= \mathcal{E}_0 i_0 \cos \varphi \sin^2 \omega t dt - \mathcal{E}_0 i_0 \sin \varphi \cdot \frac{1}{2} \sin 2\omega t \cdot dt. \end{aligned}$$

Praca więc wykonana w ciągu jednego okresu będzie równa

$$W = \mathcal{E}_0 i_0 \cos \varphi \int_0^T \sin^2 \omega t dt - \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 i_0 \sin \varphi \int_0^T \sin 2\omega t \cdot dt;$$

z całkowania pierwszego wyrazu otrzymujemy

$$\mathcal{E}_0 i_0 \cdot \cos \varphi \cdot \frac{T}{2},$$

całkowanie zaś drugiego daje nam zero, odnosząc więc pracę do jednej sekundy, otrzymujemy na moc (p. tom I, str. 78) prądu

$$P = \frac{W}{T} = \frac{\mathcal{E}_0 i_0 \cos \varphi}{2} = \mathcal{E}_{sk} \cdot i_{sk} \cdot \cos \varphi. \quad (5)$$

Piszemy wzór (4b) w postaci

$$i_{sk} = \frac{\mathcal{E}_{sk}}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2 \omega^2}{r^2}}} = \frac{\mathcal{E}_{sk}}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\mathcal{E}_{sk}}{r} \cos \varphi,$$



skąd

$$\mathcal{E}_{sk} = r \cdot i_{sk} \cdot \frac{1}{\cos \varphi};$$

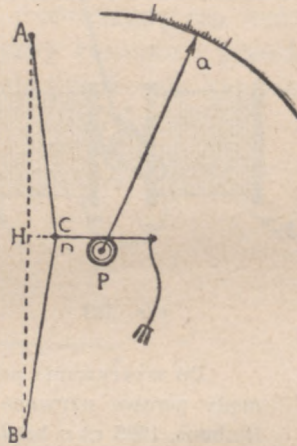
podstawmy tę wartość do wzoru (5), otrzymamy

$$P = i_{sk}^2 \cdot r$$

W przypadku zatem, do którego stosują się wyprowadzone przez nas wzory, a więc, gdy współczynnik indukcji własnej ma wartość dla danego obwodu stałą, praca prądu ujawnia się w postaci ciepła Joule'a, wywiązanego w obwodzie.

Z przyrządów służących do pomiaru tych wartości skutecznych, często stosunkowo używany jest ampermetr cieplny, w którym mierzony prąd przepływa przez cienki prawie dokładnie prostoliniowy drucik, całkowicie pozbawiony indukcji własnej; wydłużenie tego drucika wprawia w ruch wskazówkę, przesuwaną się po odpowiednio wycechowanej skali. Dodanie odpowiednich oporów (też pozbawionych całkowicie indukcji własnej) pozwala na używanie tego przyrządu również jako woltmetra (p. rozdz. VII, ust. 5).

Przyrządy te służą na ogół do mierzenia niewielkich natężeń i niewielkich różnic potencjałów, wskazania ich są zazwyczaj niezależne od częstości prądu. Rys. 328 daje schemat budowy przyrządu tego typu. Prąd przechodzi przez drut AB, połączony w środkowym swym punkcie z naciągniętą przez sprężynę nicią *n*. Nić ta nawinięta jest na bloczku, połączonym ze wskazówką *a*; gdy przy ogrzaniu drutu punkt *C* oddala się od *H*, nić obraca bloczek i wskazówkę.

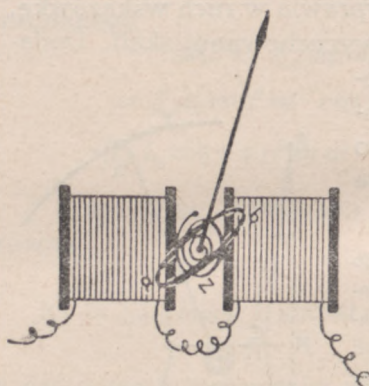


rys. 328

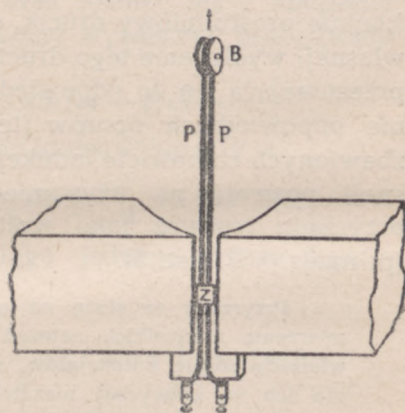
Do mierzenia silniejszych prądów mogą służyć elektrodynamometry (p. rozdz. VII, ust. 5), do mierzenia zaś znacznie większych różnic potencjałów — woltmetry elektrostatyczne (p. rozdz. III, ust. 9), wskazania bowiem tych przyrządów są proporcjonalne do kwadratu mierzonych wielkości.



W praktyce są w pospolitym użyciu ampermetry i woltmetry elektromagnetyczne. W polu magnetycznym dwu cewek *a* i *b* (rys. 329), przez które przepływa mierzony prąd, umieszczona jest sztabka miękkiego żelaza, utrzymywana przez sprężynę w oznaczonym położeniu równowagi. Sztabka ta, stając się w polu cewek magnesem, odchyli się pod działaniem prądu od swego położenia równowagi. Zakładając, co zresztą nie odpowiada dokładnie przebiegowi zjawiska, że namagnesowanie żelaza jest proporcjonalne do natężenia prądu w cewkach, znajdziemy że siły odchylające, równoważone w ostatecznym położeniu równowagi przez siły sprężyste sprężyny, są proporcjonalne do kwadratu natężenia prądu.



rys. 329



rys. 330

Do wykrywania prądów zmiennych, a więc raczej jako tzw. przyrządy zerowe używane są telefony oraz galwanometry wibracyjne (Rubens, 1895 r.) o bardzo małym okresie drgania.

Kształt funkcji  $\mathcal{E} = i(t)$  można wyznaczyć przy pomocy oscylografu (łac. oscillare — drgać, wahać się). W oscylografie Blondela, ulepszonym przez Duddella, prąd zmienny przechodzi przez złożony w dwoje przewodnik *P*, dźwigający zwierciadło *Z*, łączące obie gałęzie przewodnika (rys. 330). Gałęzie te, w których prądy mają zawsze kierunki przeciwne, doznają w polu magnetycznym *NS* przeciwnie skierowanych odchyłeń (por. galwanometer strunowy, str. 512), wobec czego zwierciadło obraca się koło osi równoległej do gałęzi przewodnika. Gdy końce przewodnika przyłączymy drutem o znacz-



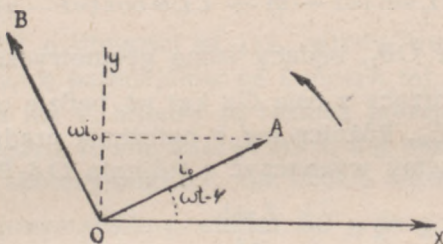
nym oporze, lecz bez indukcji własnej, do obwodu z prądem zmiennym, oscylograf będzie jak gdyby woltmetrem. Odbity od zwierciadła promień światła, padając na błonę fotograficzną, nawiniętą na obracający się ruchem jednostajnym walec, nakreśli na niej krzywą, wyrażającą zmiany różnicy potencjałów w punktach obwodu, do których przyłączony jest oscylograf. Wobec tego, że ruchoma część przyrządu posiada własny okres drgania, granice częstości, w których można oscylograf stosować, są wyznaczone przez te same warunki, o jakich była mowa w rozdz. I, str. 37 i rozdz. II, str. 138 i nast.

W przypadku bardzo wielkiej częstości używany jest oscylograf katodowy, w którym część ruchomą stanowią promienie katodowe.

### 3. — GEOMETRYCZNE METODY RACHUNKU.

Związek między okresowo zmieniającymi się wielkościami, z jakimi mamy do czynienia w przypadku prądów zmiennych, można również wyznaczyć przy pomocy konstrukcji Fresnela, omówionej w ust. 5 rozdz. I.

Odłożmy w kierunku, tworzącym kąt  $\omega t - \varphi$  ze stałą osią  $Ox$ , wektor  $OA$  o długości równej  $i_0$  i obracajmy ten wektor dookoła osi, prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt  $O$  (rys. 331), ze stałą prędkością kątową  $\omega$ .

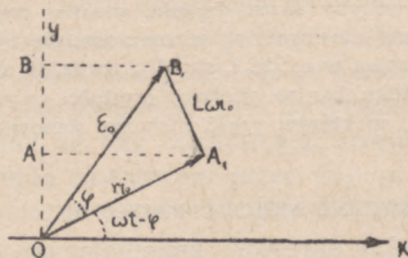


rys. 331

Rzut tego wektora na oś  $Oy$ , prostopadłą do osi  $Ox$ , będzie w każdej chwili  $t$  równy chwilowej wartości natężenia prądu w obwodzie. Podobnie rzut wektora  $\vec{OB}$ , o długości  $\omega$  razy większej, tworzącego z wektorem  $\vec{OA}$  kąt  $\frac{\pi}{2}$ , będzie zawsze równy chwilowej wartości pochodnej  $\frac{di}{dt}$  natężenia prądu względem czasu (por. wzór c, ust. 1). Jeżeli więc w kierunku



OA odłożymy wektor  $\vec{OA}_1$  o długości  $ri_0$ , do końca jego przystawimy pod kątem prostym wektor  $\vec{A_1B_1}$  o długości  $L\omega i_0$  i układ tych dwu wektorów będziemy obracali koło osi O, prostopadłej do płaszczyzny rysunku (rys. 332), z prędkością sta-



rys. 332

łą  $\omega$ , suma rzutów tych dwu wektorów  $\vec{OA}_1$  i  $\vec{OB}_1$  na oś Oy będzie stale równa chwilowej wartości zmiennej siły elektrodźwicznej, włączonej do badanego obwodu, będziemy bowiem mieli zawsze, zgodnie z równaniem (d), w którym  $V_0$  zastępujemy przez  $\mathcal{E}_0$

$$OA' + OB' = ri_0 \sin(\omega t - \varphi) + Li_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t.$$

A zatem wektor  $\vec{OB}_1$ , będący sumą geometryczną wektorów  $\vec{OA}_1$  i  $\vec{A_1B_1}$  i tworzący z osią Ox kąt  $\omega t$ , będzie odtwarzał siłę elektrodźwiczną  $\mathcal{E}_0$ . Różnicę faz  $\varphi$  natężenia prądu i siły elektrodźwicznej możemy wyznaczyć z trójkąta  $OA_1B_1$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L \omega i_0}{ri_0} = \frac{L \omega}{r},$$

zgodnie ze wzorem (2)

Z tego samego trójkąta znajdujemy

$$\mathcal{E}_0^2 = r^2 i_0^2 + L^2 \omega^2 i_0^2,$$

skąd otrzymujemy znany nam już wzór

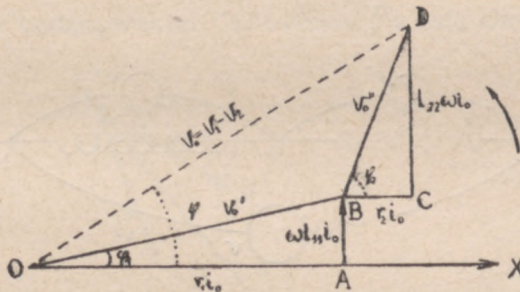
$$i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}}.$$

Gdy, jak to bywa najczęściej, chodzi o ustalenie związku nie między największymi wartościami danych wielkości, lecz mię-



dzy ich wartościami skutecznymi, odkładamy  $i_{sk}$  lub  $\mathcal{E}_{sk}$  zamiast  $i_0$  lub  $\mathcal{E}_0$ , zmniejszając w ten sposób wymiary rysunku w stosunku  $\sqrt{2} : 1$ .

Zastosujmy tę metodę do rozpatrzenia paru prostych przypadków. Niech np. badany przewodnik składa się z dwu części: jednej o znacznie większym oporze i niewielkiej indukcji własnej  $L_{11}$ , drugiej o małym oporze  $r_2$ , lecz za to o znacznej indukcji własnej  $L_{22}$ , i niech przez przewodnik ten płynie prąd  $i$ , którego amplitudę  $i_0$  mamy daną. Odłóżmy w kierunku osi  $Ox$  wektor  $\vec{OA}$  (rys. 333), równy  $r_1 i_0$ , w kierunku zaś prostopadłym do tej



rys. 333

osi wektor  $\vec{AB}$  o długości  $\omega L_{11} \cdot i_0$ , wtedy wektor  $\vec{OB}$  będzie odtwarzał różnicę potencjałów na końcach tej części przewodnika. Różnica faz  $\varphi$ , między tą różnicą potencjałów i natężeniem prądu będzie równa kątowi  $BOA$ ; kąt ten, wobec niewielkiej wartości współczynnika  $L_{11}$ , też będzie niewielki. Do końca wektora  $\vec{AB}$  przystawiamy wektor  $\vec{BC}$  o długości  $r_2 i_0$ , równoległy do wektora  $\vec{OA}$ , a więc i osi  $Ox$ , prąd bowiem ma w całym przewodniku fazę tę samą. Przystawiając do końca wektora  $\vec{BC}$  wektor  $\vec{CD}$  o długości  $\omega L_{22} i_0$ , prostopadły do  $BC$ , znajdziemy, że różnicę potencjałów na końcach tej części przewodnika odtworzy wektor  $\vec{BD}$ , tworzący kąt  $\varphi_2$  z osią  $Ox$ . Różnica potencjałów na końcach całego przewodnika

$$V_0 \sin \varphi = V_0' \sin \varphi_1 + V_0'' \sin \varphi_2$$

nie jest, wobec różnej wartości kątów  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , równa sumie



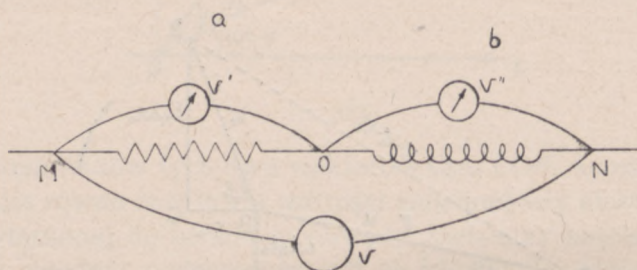
arytmetycznej różnicy potencjałów na końcach poszczególnych części

$$V_0 < V'_0 + V''_0, \quad (a)$$

równość zachodzić będzie jedynie wtedy, gdy kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  będą równe, a więc gdy

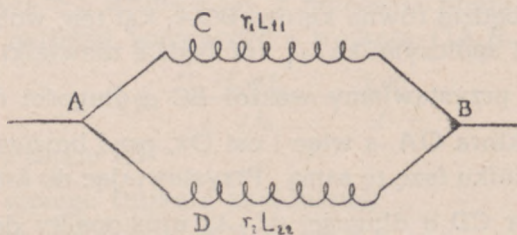
$$\frac{L_{11}}{r_1} = \frac{L_{22}}{r_2}.$$

Nierówność (a) możemy sprawdzić, włączając do obwodu trzy woltmetry na prąd zmienny tak, jak to jest wskazane na rys. 334.



rys. 334

Przypuśćmy teraz, że badany obwód rozgałęzia się w punktach A i B (rys. 335), przy czym opory i współczynniki indukcji własnej gałęzi obwodu są odpowiednio równe  $r_1, L_{11}$  oraz  $r_2, L_{22}$ .



rys. 335

Odlóżmy na osi Ox amplitudę  $V_0$  zmiennej różnicy potencjałów punktów A i B (rys. 336). Natężenie prądu w gałęzi ACB równe jest, jak wiemy,

$$i_1 = i'_0 \sin(\omega t - \varphi_1),$$



gdzie

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L_{11} \omega}{r_1}$$

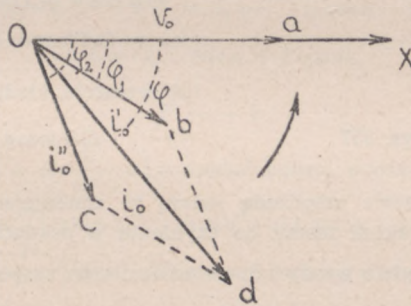
kąt więc między wektorem  $\vec{Ob}$ , odtwarzającym to natężenie w chwili  $t=0$ , do której odnosi się nasz rysunek, i osią  $Ox$  będzie równy  $-\varphi_1$ . Podobnie natężeniu prądu w gałęzi  $ADB$  równemu

$$i_2 = i_0'' \sin(\omega t - \varphi_2),$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{L_{22} \cdot \omega}{r_2},$$

odpowiadać będzie wektor  $\vec{Oc}$  tworzący z osią  $Ox$  kąt  $-\varphi_2$ .



rys. 336

Natężeniu zatem prądu dopływającego do punktu  $B$  lub też w danej chwili wypływającego z tego punktu, równemu sumie natężeń prądów w gałęziach

$$i = i_1 + i_2 = i_0' \sin(\omega t - \varphi_1) + i_0'' \sin(\omega t - \varphi_2) = i_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad (b)$$

odpowie wypadkowa  $\vec{Od}$  wektorów  $\vec{Ob}$  i  $\vec{Oc}$ , tworząca z osią  $Ox$  kąt  $-\varphi$ .

W przypadku ogólnym

$$i_0 < i_0' + i_0'';$$

jeżeli jednak stałe czasu obu gałęzi są jednakowe, a więc gdy

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

prąd rozdziela się w punktach  $A$  i  $B$  tak, jak prąd stały.



## 3. — a. — RACHUNEK PRZY POMOCY WIELKOŚCI UROJONYCH.

Przyjmijmy idąc za Gaussem (1817 r.), że oś  $Ox$  jest osią liczb całkowitych, prostopadła zaś do niej oś  $Oy$  jest osią liczb urojonych, z których każdą można przedstawić w postaci  $b \cdot \sqrt{-1}$ , gdzie  $b$  jest odpowiadającą danemu punktowi na osi liczbą rzeczywistą. Płaszczyzna  $yOx$  jest wtedy tzw. płaszczyzną liczbową, której punkty odpowiadać będą tzw.

liczbom zespolonym, składającym się z części rzeczywistej i części urojonej, tak że np. dla punktu  $A$  (rys. 337) otrzymamy

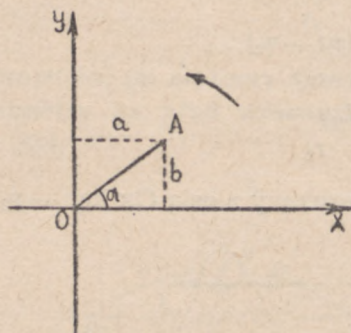
$$a + b\sqrt{-1}$$

lub

$$\begin{aligned} OA \cos \alpha + OA \sin \alpha \cdot \sqrt{-1} &= \\ &= OA (\cos \alpha + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha) \end{aligned}$$

lub wreszcie, kładąc  $\sqrt{-1} = j$ ,

$$OA (\cos \alpha + j \sin \alpha).$$



rys. 337

Niech  $OA$  będzie amplitudą jednej ze zmieniających się okresowo wielkości, z jakimi mamy do czynienia w prądach zmiennych, wektorowi  $\vec{OA}$  będzie wtedy odpowiadała liczba zespolona

$$\bar{A} = A (\cos \alpha + j \sin \alpha) \quad (a)$$

gdzie kreską nad danym symbolem literowym będziemy oznaczali liczby zespolone. Amplituda  $A$  będzie równa

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (b)$$

faza zaś w chwili  $t = 0$

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}. \quad (c)$$

Można udowodnić, czego tu robić nie będziemy, że

$$A (\cos \alpha + j \sin \alpha) = Ae^{j\alpha}, \quad (d)$$

gdzie  $e$  jest zasadą logarytmów naturalnych.

Analogicznie, gdyby  $\alpha$  było ujemne (punkt  $A$  poniżej dodatniej części osi  $Ox$ ) mielibyśmy

$$OA (\cos \alpha - j \sin \alpha) = Ae^{-j\alpha}.$$



Z biegiem czasu kąt, jaki tworzy wektor  $OA$  z osią  $Ox$  wzrasta, popływie więc  $t$  sek. mamy

$$\begin{aligned}\bar{A} &= A \cos(\alpha + \omega t) + Aj \sin(\alpha + \omega t) = Ae^{j(\alpha + \omega t)} = \\ &= Ae^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} = \bar{a} \cdot e^{j\omega t},\end{aligned}\quad (e)$$

gdzie  $\bar{a}$  jest zespoloną amplitudą zmieniającej się okresowo wielkości  $A$ .

Podstawmy do porównania (I) ust. 1 zamiast  $i$

$$\bar{i} = i_0 e^{-j\alpha} e^{j\omega t} = i_0 (\cos\alpha - j \sin\alpha) e^{j\omega t} = \bar{i}_0 \cdot e^{j\omega t},$$

przyjmując tym samym, że w chwili  $t = 0$ , wektor, odpowiadający natężeniu prądu, tworzył z osią  $Ox$  kąt  $-\alpha$ .

Zamiast  $\frac{di}{dt}$  otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{i}}{dt} &= i_0 j\omega e^{-j\alpha} \cdot e^{j\omega t} = i_0 \omega e^{j\omega t} (j \cos\alpha - j^2 \sin\alpha) = \\ &= i_0 \omega \cdot e^{j\omega t} (\sin\alpha + j \cos\alpha),\end{aligned}$$

gdź

$$j^2 = -1$$

Sumie  $r\bar{i} + L \frac{d\bar{i}}{dt}$  odpowiadać będzie wtedy wartość zespolona

$$\begin{aligned}\bar{V} = \bar{\mathcal{E}} &= i_0 e^{j\omega t} (r \cos\alpha - jr \sin\alpha + \omega L \sin\alpha + \omega L j \cos\alpha) = \\ &= i_0 e^{j\omega t} \{ (r + j\omega L) \cos\alpha + (\omega L - jr) \sin\alpha \}.\end{aligned}\quad (f)$$

Napiszmy, że

$$r + j\omega L = \bar{r} = r_0 \cdot e^{j\varphi},\quad (g)$$

gdzie

$$r_0 = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$$

(p. wzór b) oraz

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}$$

(patrz wzór c).

Wtedy

$$\bar{r} \cdot j = rj + j^2 \omega L = jr - \omega L.$$

Wzór więc (f) otrzymamy w postaci

$$\bar{\mathcal{E}} = i_0 e^{j\omega t} (\bar{r} \cos\alpha - j\bar{r} \sin\alpha) = i_0 \cdot \bar{r} (\cos\alpha - j \sin\alpha) \cdot e^{j\omega t} = i_0 \bar{r} e^{-j\alpha} \cdot e^{j\omega t}$$

lub uwzględniając, że

$$\begin{aligned}i_0 e^{-j\alpha} \cdot e^{j\omega t} &= \bar{i}, \\ \bar{\mathcal{E}} &= \bar{i} \cdot \bar{r},\end{aligned}\quad (h)$$

a więc wzór, odpowiadający formalnie prawu Ohma.



Wzór ten możemy przepisać nieco inaczej, biorąc pod uwagę wzór (g)

$$\bar{\mathcal{E}} = i_0 e^{-j\alpha} \cdot r_0 e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = i_0 r_0 e^{j(\varphi-\alpha)} \cdot e^{j\omega t} = i_0 r_0 e^{j\beta} \cdot e^{j\omega t},$$

gdzie oznaczać będzie kąt, jaki w chwili  $t = 0$  wektor, odpowiadający sile elektrodźwicznej, tworzy z osią  $Ox$ ; kąt zatem, jaki wektor ten tworzy z wektorem natężenia prądu jest równy  $\alpha + \beta$ , a więc równy  $\varphi$ , zgodnie z naszymi poprzednimi wywodami.

W podobny sposób otrzymać możemy prawa, formalnie zgodne z prawami Kirchhoffa. Tak np. z warunku, że suma algebraiczna chwilowych wartości natężeń prądów, wchodzących lub wychodzących z danego punktu rozgałęzienia obwodu, równa jest zero

$$\sum i_n \cdot \sin(\omega t - \varphi_n) = 0$$

(p. ustęp poprzedni wzór b), wynika, że wypadkowa wszystkich wektorów, odtwarzających natężenia prądów i użytych z odpowiednim znakiem, (rys. 335 wektorów  $i_0'$  oraz  $i_0''$ , gdzie wektorowi  $i_0$  należy nadać kierunek przeciwny) równa jest zero. Tym samym równa jest zero i wypadkowa wektorów, odtwarzających zespolone amplitudy natężeń prądów, tak że będziemy mieli

$$\sum \bar{i} = 0. \quad (i)$$

Rozpatrzmy teraz zamkniętą część obwodu rozgałęzionego. W każdej gałęzi obwodu mamy oznaczając przez  $\mathcal{E}$  chwilową wartość siły elektrodźwicznej czynnej w danej gałęzi, przez  $V_A - V_B$  chwilową różnicę potencjałów na jej końcach, przez  $i$  wreszcie chwilową wartość natężenia, płynącego z niej prądu

$$V_A - V_B + \mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = i \cdot r.$$

Sumując te wyrażenia wzdłuż wszystkich gałęzi danej części obwodu (w pewnym wybranym przez nas za dodatni kierunku), otrzymamy

$$\sum i r = \sum \left( \mathcal{E} - L \frac{di}{dt} \right)$$

lub

$$\sum \left( i r + L \frac{di}{dt} \right) = \sum \mathcal{E}.$$

Zastępując chwilowe wartości odpowiednimi wartościami zespolonymi i uwzględniając, że sumie

$$i \cdot r + L \frac{di}{dt}$$

odpowiada suma iloczynów  $\bar{i} \cdot \bar{r}$ , otrzymujemy

$$\sum \bar{i} \cdot \bar{r} = \sum \bar{\mathcal{E}} \quad (j)$$

analogicznie do wzoru 12 rozdz. V, ust. 3.



I wreszcie, jak to bezpośrednio wynika ze wzorów (i) i (j), zespolona wartość oporu równoważnego

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2}{\bar{r}_1 + \bar{r}_2},$$

analogicznie do wzoru (16) rozdz. V, ust. 3.

#### 4. — PRĄDY WIELOFAZOWE. — WIRUJĄCE POLE MAGNETYCZNE.

Jeżeli, nie zmieniając liczby elektromagnesów rotora w prądnicę prądu zmiennego (p. ust. I), podwoimy liczbę cewek statora tak, aby dołączone cewki były umieszczone dokładnie w środku między tymi cewkami, które już poprzednio znajdowały się na statorze, a więc, aby odległość między cewkami statora wynosiła teraz czwartą część odległości między jednoimiennymi biegunami elektromagnesów i dodane cewki połączymy szeregowo, otrzymamy nowy obwód, w którym prąd będzie miał w każdej chwili fazę o  $\frac{\pi}{2}$  różniącą się od fazy prądu w obwodzie, utworzonym z poprzednio już rozmieszczonych cewek. Przyjmując więc fazę początkową jednego z tych prądów za równą zeru, otrzymamy na wartość natężeń prądu w każdym z tych obwodów odpowiednio

$$i_1 = i_0 \cdot \sin \omega t \qquad i_2 = i_0 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Podobnie dodając jeszcze jeden układ cewek i rozmieszczając cewki statora tak, aby odstęp między cewkami dwu kolejnych układów wynosił  $1/3$  odległości między jednoimiennymi biegunami elektromagnesów rotora, otrzymamy w poszczególnych trzech obwodach natężenia prądu

$$i_1 = i_0 \sin \omega t; \quad i_2 = i_0 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_3 = i_0 \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Tego rodzaju prądy o identycznych amplitudach, tym samym okresie zmian i o różnicy faz, równej ilorazowi z  $m \cdot 2\pi$  przez niewielką liczbę całkowitą, a więc o natężeniu równym

$$i_{m+1} = i_0 \sin \left( \omega t - \frac{m}{n} \cdot 2\pi \right),$$

gdzie  $m = 0, 1 \dots (n-1)$ , nazywamy prądami  $n$ -fazowymi.



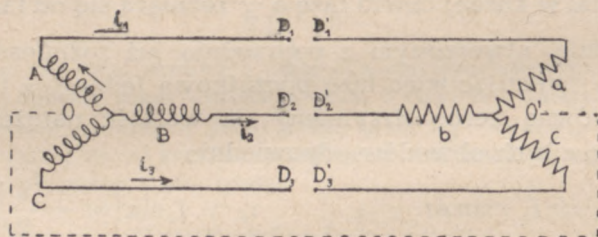
W drugim przeto z wyżej przytoczonych przypadków mamy do czynienia z prądem trójfazowym, w pierwszym, ściśle biorąc, z prądem czterofazowym, nazywanym jednak zazwyczaj dwufazowym, w ostatecznym bowiem wyniku sprowadza się on do dwu różniących się fazą prądów:

$$i_1 = i_0 \sin \omega t; \quad i_2 = i_0 \sin \left( \omega t - \frac{1 \cdot 2\pi}{4} \right) = i_0 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$i_3 = i_0 \sin \left( \omega t - \frac{2 \cdot 2\pi}{4} \right) = i_1; \quad i_4 = i_0 \sin \left( \omega t - \frac{3 \cdot 2\pi}{4} \right) = i_2.$$

Łącząc swobodnie końce każdego układu cewek z obwodem zewnętrznym, otrzymamy tyle niezależnych od siebie obwodów prądu, ile jest w prądnicy niezależnych układów cewek. W przypadku więc prądów trójfazowych tego rodzaju połączenie wymagałoby sześciu drutów. W praktyce jednak układy te są ze sobą łączone. Niech  $A, B, C$  (rys. 338) odtwarzają schematycznie dane układy cewek;

$$AD_1 D_1' a O' d O, \quad BD_2 D_2' b O' d O, \quad CD_3 D_3' c O' d O$$



d

rys. 338

niech będą obwodami zewnętrznymi danych układów. Obwody te są połączone ze sobą z jednej strony w punkcie  $O'$ , z drugiej w punkcie  $O$ , z którym znów połączone są drugie końce układów cewek. Wobec tego trzy druty, które by łączyły końce przewodników  $a, b, c$  odpowiednio z końcami cewek  $A, B, C$  mogą być zastąpione przez jeden drut  $O'dO$ . Natężenie prądu w tym drucie będzie w każdej chwili równe

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = i_0 \sin \omega t + i_0 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + i_0 \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) =$$

$$= i_0 \sin \omega t + i_0 \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - i_0 \cos \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{3} +$$

$$+ i_0 \sin \omega t \cdot \cos \frac{4\pi}{3} - i_0 \cos \omega t \cdot \sin \frac{4\pi}{3}.$$



Uwzględniając, że

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{3} &= -\frac{1}{2}; & \cos \frac{4\pi}{3} &= -\frac{1}{2} \\ \sin \frac{2\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}; & \sin \frac{4\pi}{3} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$i = i_0 \sin \omega t - \frac{1}{2} i_0 \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} i_0 \cos \omega t - \frac{1}{2} i_0 \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} i_0 \cos \omega t = 0.$$

Natężenie prądu w drucie  $Od'O$  jest przeto stale równe zero, prąd wcale przez ten drut nie płynie, wobec czego możemy drut ten usunąć.

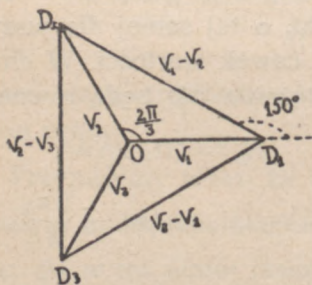
Przy otwartym obwodzie zewnętrznym powstają między punktem  $O$  i punktami  $D_1, D_2, D_3$  różnice potencjałów  $V_1, V_2, V_3$  o amplitudach równych i o różnicach faz równych odpowiednio  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ . Potencjały te możemy przedstawić, jako wektory jednakowej długości, tworzące ze sobą kąty, równe  $\frac{2\pi}{3}$  (rys. 339). Różnicę więc potencjałów  $V_3 - V_1, V_2 - V_3, V_1 - V_2$  odtworzą nam wektory  $\vec{D_1D_3}, \vec{D_3D_2}, \vec{D_2D_1}$ . Z trójkąta  $OD_1D_2$  znajdujemy, że

$$D_1D_2^2 = OD_1^2 + OD_2^2 - 2OD_1OD_2 \cdot \cos \frac{2\pi}{3}.$$

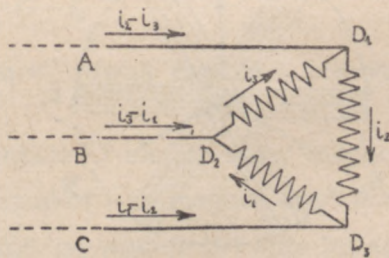
Kładąc  $OD_1 = OD_2 = V_0$ ;  $D_1D_2 = (V_2 - V_1)_0$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} (V_2 - V_1)_0 &= V_0 \sqrt{2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{3} \right)} = 2V_0 \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{2\pi}{3}}{2}} = \\ &= 2V_0 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = V \cdot \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Analogiczne wzory otrzymamy dla  $(V_3 - V_2)_0$  z trójkąta  $OD_2D_3$  i dla  $(V_1 - V_3)_0$  z trójkąta  $OD_1D_3$ .



rys. 339



rys. 34)



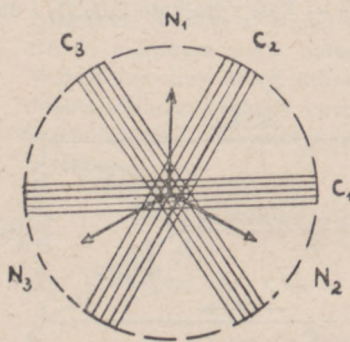
Amplituda zatem różnicy potencjałów między punktami  $D_1, D_2, D_3$  jest  $\sqrt{3}$  razy większa od amplitudy potencjałów między każdym z tych punktów i punktem  $O$ .

Ten sposób łączenia obwodów nazywamy łączeniem w gwiazdę.

Połączmy teraz wszystkie trzy układy cewek szeregowo, w punktach zaś ich połączenia dołączmy do nich zewnętrzne części obwodu  $AD_1, BD_2, CD_3$  (rys. 340). Prądy te będą miały w nich natężenia odpowiednio równe  $i_1 - i_2, i_3 - i_1, i_2 - i_3$ . Powtarzając ten sam rachunek, jakiego dopiero co użyliśmy, stwierdzimy, że tym razem amplitudy prądów w drutach  $AD_1, BD_2, CD_3$  będą  $\sqrt{3}$  razy większe od amplitudy  $i_0$ . W obwodach otwartych różnice potencjałów punktów  $D_1, D_2, D_3$  będą miały amplitudę taką, jak siła elektrobódzczą indukowaną w każdym z poszczególnych układów cewek. To połączenie nosi nazwę połączenia w trójkąt.

Prądy wielofazowe pozwalają otrzymać bez wprowadzania w ruch obwodów prądu pole magnetyczne wirujące tzn. takie pole, którego natężenie, zachowując stale tę samą wartość, zmienia w sposób ciągły swój kierunek, obracając się jednostajnie z oznaczoną prędkością kątową.

Niech np.  $C_1, C_2, C_3$  będą identycznymi cewkami, których osie  $ON_1, ON_2, ON_3$  tworzą ze sobą kąty równe  $\frac{2\pi}{3}$ . Jeżeli cewki połączymy ze źródłem prądów trójfazowych tak, aby przez cewkę  $C_1$  płynął prąd  $i_1$ , przez cewkę  $C_2$  prąd  $i_2$  i wreszcie przez cewkę  $C_3$  — prąd  $i_3$ , prądy te wzbudzą pola magnetyczne, mające w środku  $O$  kierunki prostopadłe do płaszczyzny odpowiedniej cewki i natężenie równe odpowiednio  $Gi_1, Gi_2, Gi_3$ , gdzie  $G$  — stała cewki, o tej samej dla wszystkich cewek wartości. W chwili  $t$  natężenia pól będą równe



rys. 341

$$H_1 = Gi_0 \sin \omega t;$$

$$H_2 = Gi_0 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$H_3 = Gi_0 \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$



Przyjmując za oś  $y$  oś pierwszej cewki  $ON_1$ , za oś  $x$  — prostą do niej prostopadłą, znajdziemy, że

$$H_{1x} = 0; \quad H_{2x} = H_2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = H_2 \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$H_{3x} = H_3 \sin \frac{4\pi}{3};$$

$$H_{1y} = H_1; \quad H_{2y} = H_2 \cos \frac{2\pi}{3}; \quad H_{3y} = H_3 \cos \frac{4\pi}{3}.$$

Rzuty zatem pola wypadkowego na osi  $x$  i  $y$  będą równe

$$H_x = Gi_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin \frac{2\pi}{3} + Gi_0 \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sin \frac{4\pi}{3},$$

$$H_y = Gi_0 \sin \omega t + Gi_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos \frac{2\pi}{3} + \\ + Gi_0 \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos \frac{4\pi}{3},$$

skąd po otwarciu nawiasów i po podstawieniu

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

otrzymujemy

$$H_x = \frac{3}{2} \cdot Gi_0 \cos \omega t \quad \text{i} \quad H_y = \frac{3}{2} Gi_0 \sin \omega t.$$

Pole więc wypadkowe o natężeniu stałym

$$H = \frac{3}{2} G \cdot i_0$$

obraca się z prędkością kątową  $\omega$ , równą częstości kołowej zmian prądu.

Przypuśćmy teraz, że w punkcie  $O$  umieściliśmy magnes o stałym momencie magnetycznym  $\vec{M}$  i że magnes ten obracając się w tej samej płaszczyźnie, co wektor  $\vec{H}$  i koło tej samej osi z prędkością kątową  $\omega_1$ , tworzy w chwili  $t=0$  kąt  $\alpha$



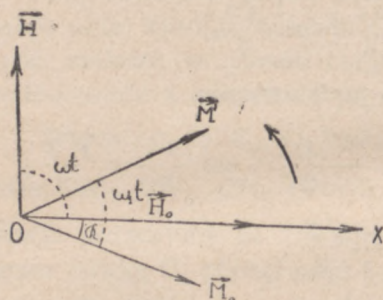
z kierunkiem pola (rys. 342). Moment pary sił, jakim pole działa na magnes w dowolnej chwili  $t$  jest równy (p. rozdz. IV, ust. 2, wzór 5 a)

$$C = M \cdot H \sin \{(\omega - \omega_1) t + \alpha\}.$$

Wartość tego momentu zmienia się okresowo z częstością kołową  $\omega - \omega_1$ , przeciętna jego jest zatem stale równa zero; gdy jednak  $\omega = \omega_1$ , moment pary sił ma wartość stałą, równą

$$C = M \cdot H \sin \alpha \quad (\text{a})$$

Jeżeli wtedy magnes będzie miał do pokonania opór, przeciwdziałający jego ruchowi parą sił o momencie równym  $C$ , będzie on mógł, nie zmniejszając swej prędkości, opór ten przewyciężyć. Przypuśćmy, że w pewnej chwili opór zewnętrzny wzrośnie, magnes zacznie zwalniać swój ruch, kąt  $\alpha$



rys. 342

wyrażający opóźnienie ruchu magnesu względem fazy pola, zacznie wzrastać do takiej wartości  $\alpha_1$ , przy której moment pary sił pola zrównoważy moment sił zewnętrznych, tak że znów będziemy mieli

$$C_x = C = MH \sin \alpha_1,$$

poczem magnes znów się będzie obracał z tą samą częstością kołową.

Tak jednak będzie dopóty, dopóki kąt  $\alpha$  nie osiągnie wartości  $\frac{\pi}{2}$ ; dalsze zwiększenie oporu powodować będzie zmniejszanie się prędkości obrotu magnesu i wreszcie jego zatrzymanie. Największa zatem wartość pracy, jaką magnes będzie mógł wykonać w ciągu jednego obrotu wyniesie

$$W = 2\pi \cdot C_m = 2\pi \cdot M \cdot H, \quad (\text{b})$$

największa zaś wartość jego mocy

$$P = \frac{W}{T} = \frac{2\pi}{T} M \cdot H = M \cdot H \cdot \omega. \quad (\text{c})$$



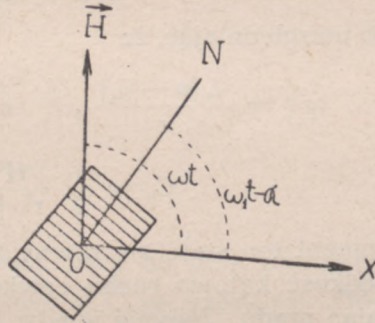
Na tej zasadzie oparta jest budowa synchronicznych (gr. syn — razem z czymś, z kimś, zgodnie z czym, z kim, chronos — czas) motorów prądu wielofazowego lub poprawniej motorów o polu wirującym.

Praca motoru wykonana jest kosztem energii elektrycznej, zużytej na pokonanie sił elektrodźwicznych indukcji, powstających w cewkach na skutek ruchu magnesu. Przerwywając więc połączenie cewek z zewnętrznym źródłem prądu i podtrzymując ruch magnesu siłami zewnętrznymi, możemy zamienić ten motor w prądnicę prądu trójfazowego.

Zastąpmy magnes cewką o obwodzie zamkniętym, mogącą się obracać w tej samej płaszczyźnie, co wektor  $\vec{H}$ , koło tej samej osi, z prędkością kątową  $\omega_1$  (rys. 343) i niech w chwili  $t$ , gdy wektor  $H$  tworzy z osią  $x$  kąt  $\omega t$ , oś cewki  $ON$  tworzy z tą samą osią kąt  $\omega_1 t - \alpha$ . Strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez tę cewkę wynosi

$$\Psi = H \cdot S \cdot \cos\{(\omega - \omega_1)t + \alpha\},$$

gdy zdolność magnetyczną środowiska przyjmujemy za równą jedności i przez  $S$  oznaczamy sumę pól wszystkich zwojów cewki.



rys. 343

Siła elektrodźwiczna indukowana w cewce będzie równa

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} = H \cdot S (\omega - \omega_1) \sin\{(\omega - \omega_1)t + \alpha\}$$

lub kładąc

$$H \cdot S (\omega - \omega_1) = \mathcal{E}_0 \quad \text{i} \quad \omega - \omega_1 = \omega',$$

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_0 \sin(\omega' t + \alpha),$$

skąd natężenie prądu indukowanego (p. wzór 2 c)

$$i = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega'^2}} \sin(\omega' t + \alpha - \varphi).$$



Cewka, będąca siedliskiem tego prądu, staje się równoważną magnesowi o momencie magnetycznym  $S \cdot i$  (p. rozdz. VII, ust. 2), pole działa przeto na cewkę parą sił o momencie

$$\begin{aligned} C &= S \cdot i \cdot H \sin\{(\omega - \omega_1)t + \alpha\} = \\ &= \frac{H^2 S^2 (\omega - \omega_1)}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \sin\{(\omega - \omega_1)t + \alpha - \varphi\} \sin\{(\omega - \omega_1)t + \alpha\} = \\ &= \frac{H^2 S^2}{2\sqrt{r^2 + L^2 (\omega - \omega_1)^2}} \{\cos\varphi - \cos|2(\omega - \omega_1)t + 2\alpha - \varphi|\}. \end{aligned}$$

Drugi z dwu stojących w nawiasie wyrazów przybiera okresowo wartości te same, lecz o przeciwnych znakach, wobec czego przeciętna jego wartość równa jest zeru; na przeciętną zatem wartość momentu  $C$  otrzymamy

$$C_p = \frac{H^2 S^2 (\omega - \omega_1)}{2\sqrt{r^2 + L^2 (\omega - \omega_1)^2}} \cdot \cos\varphi$$

lub uwzględniając, że

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{L(\omega - \omega_1)}{r}, & \cos\varphi &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2 (\omega - \omega_1)^2}}, \\ C_p &= \frac{1}{2} \frac{H^2 S^2 (\omega - \omega_1) r}{r^2 + L^2 (\omega - \omega_1)^2}. \end{aligned} \quad (d)$$

Moment ten staje się równy zeru, gdy  $\omega = \omega_1$ , a zatem, gdy prędkość kątowna ruchu cewki równa jest częstości kołowej zmian prądu. Jedynie wtedy, gdy  $\omega \neq \omega_1$ , cewka znajduje się stale pod działaniem sił pola, o przeciętnej wartości różnej od zera, jedynie więc wtedy może ona w swym ruchu pokonywać opory zewnętrzne, stanowiąc tzw. **asynchroniczny motor prądu wielofazowego**.

Gdy  $\omega_1 = 0$ , a więc w chwili ruszenia motoru moment pary sił ma wartość dość znaczną; w przypadku, gdy moment ten  $C_0$  jest większy od momentu sił zewnętrznych  $C_z$ , motor rusza, przy czym cewka porusza się z coraz większą prędkością, moment zaś sił pola wzrasta do pewnego maximum, odpowiadającego prędkości kątowej

$$\omega_1^{(m)} = \omega - \frac{r}{L} \quad (e)$$



następnie zaś maleje. Stan równowagi będzie osiągnięty wtedy, gdy  $C$  stanie się równe  $C_z$ , w danym więc przypadku ( $C_0 > C_z$ ) przy prędkości kątowej  $\omega_1 > \omega_1^{(m)}$ . Gdy opór zewnętrzny, początkowo mniejszy od  $C_0$ , stopniowo wzrasta, będąc stale zawarty w granicach między  $C_0$  i  $C_m$ , równowaga następuje przy wartości  $\omega_1 < \omega_1^{(m)}$ .

Przepiszmy wzór (d) w postaci

$$C = \frac{H^2 S^2}{2} \cdot \frac{1}{x},$$

gdzie

$$x = \frac{r^2 + L^2 (\omega - \omega_1)^2}{r(\omega - \omega_1)} = \frac{r}{\omega - \omega_1} + \frac{L^2}{r} (\omega - \omega_1).$$

Moment  $C$  będzie miał wartość największą, gdy  $x$  będzie minimum. Przyrównując pochodną  $x$  względem  $\omega_1$  do zera, otrzymujemy

$$\frac{dx_1}{d\omega_1} = \frac{r}{(\omega - \omega_1)^2} - \frac{L^2}{r} = 0,$$

skąd

$$\omega - \omega_1 = \frac{r}{L}$$

i ostatecznie

$$\omega_1^{(m)} = \omega - \frac{r}{L},$$

zgodnie ze wzorem (e)

Największą wartość momentu pary sił pola otrzymamy, podstawiając do wzoru (d) wartość  $\omega_1^{(m)}$  ze wzoru (e). Otrzymamy wtedy

$$C_m = \frac{H^2 S^2}{4L} \quad (f)$$

Największa zatem moc takiego motoru wyniesie

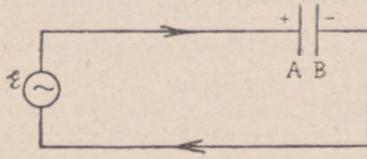
$$P_m = C_m \cdot \omega_1^{(m)} = \frac{H^2 S^2}{4L} \left( \omega - \frac{r}{L} \right). \quad (g)$$

##### 5. — OBWODY PRĄDU ZMIENNEGO Z WŁĄCZONYM KONDENSATOREM.

Połączmy źródło prądu stałego ze zbrojami kondensatora; prąd, jak wiemy, w tego rodzaju obwodzie płynąć nie będzie, zbroje bowiem kondensatora prawie natychmiast naelektryzują się do tego samego potencjału, jaki mają odpowiednie bie-



guny źródła, tak, że różnica potencjałów zbrój, równa sile elektrobodźczej źródła i działająca w przeciwnym do niej kierunku, działanie źródła zrównoważy. Inaczej jednak będzie, jeżeli źródło prądu stałego zastąpimy źródłem prądu zmiennego.



rys. 344

Niech  $A$  (rys. 344) będzie zbroją kondensatora, połączoną drutem o znikomo małym oporze z dodatnim (chwilowo) biegunem źródła. Potencjał tej zbroi będzie w miarę wzrastania siły elektrobodźczej źródła stopniowo wzrastał, drut  $\mathcal{E}A$

będzie siedliskiem prądu, elektryzującego zbroję dodatnio, przy czym w każdej chwili będziemy mieli

$$i = \frac{de}{dt},$$

gdzie  $de$  oznacza wzrost naboju zbroi w ciągu czasu  $dt$ . Nabój ten, działając indukcyjnie na zbroję  $B$ , spowoduje powstanie na niej równoważnego naboju ujemnego  $-de$  oraz odpłynięcie ze zbroi wzdłuż drutu  $B\mathcal{E}$  naboju  $+de$ ; drut  $B\mathcal{E}$  będzie więc również siedliskiem prądu o tym samym kierunku i tym samym natężeniu, co drut  $\mathcal{E}A$ . Zjawisko przeto zachodzić będzie tak, jak gdyby przez kondensator przepływał prąd o natężeniu  $\frac{de}{dt}$ .

Włączmy do obwodu  $\mathcal{E}AB$  żarówkę, odpowiednio dobraną do wartości amplitudy siły elektrobodźczej  $\mathcal{E}_0$ ; gdy w obwodzie będzie czynne źródło zmiennej siły elektrobodźczej o amplitudzie  $\mathcal{E}_0$ , żarówka będzie się paliła; gdy źródło to zastąpimy źródłem prądu stałego o sile elektrobodźczej  $\mathcal{E}_0$ , żarówka palić się nie będzie.

Niech różnica potencjałów na biegunach źródła, zmieniając się od  $+V_0$  do  $-V_0$ , wynosi w chwili  $t$

$$V = V_0 \cdot \sin \omega t;$$

różnica potencjałów zbrój kondensatora będzie się zmieniała w tych samych granicach, z tą samą częstością faz i w warunkach przez nas rozważanych z tą samą, co  $V$  fazą. Nabój na zbroi będzie zatem w chwili  $t$  równy

$$e = CV_0 \cdot \sin \omega t.$$



gdzie  $C$  — pojemność kondensatora; stąd natężenie prądu w obwodzie

$$i = \frac{de}{dt} = C V_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t = C V_0 \omega \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = i_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (6)$$

Prąd będzie więc wyprzedzał czynną w obwodzie różnicę potencjałów o ćwierć okresu. Największa jego wartość  $i_0$  będzie związana z amplitudą  $V_0$  wzorem

$$i_0 = C \omega \cdot V_0 = \frac{V_0}{\frac{1}{C\omega}}. \quad (7)$$

Wielkość  $\frac{1}{C\omega}$  będzie tu wielkością analogiczną do oporu, stanowiąc w danym przypadku tzw. pojemnościowy opór pozorny obwodu. Wartość jej jest tym mniejsza, im większa jest pojemność kondensatora oraz im większa jest częstość zmian prądu. Tak np. w przypadku, gdy bieguny źródła prądu zmiennego o amplitudzie napięcia 220 w i okresie zmian

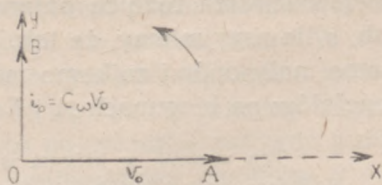
$T = \frac{1}{50}$  sek połączymy ze zbrojami kondensatora o pojemności  $1 \mu f = 10^{-6} f$  przez obwód płynąć będzie prąd o amplitudzie  $i_0$  równej

$$i_0 = C \cdot \omega \cdot V_0 = 10^{-6} \cdot 100\pi \cdot 220 = 0,088 \text{ amp};$$

gdy okres zmniejszy się dziesięciokrotnie, amplituda  $i_0$  wzrośnie dziesięć razy.

Ze wzoru (6) wynika, że wektory, odpowiadające różnicy potencjałów zbrój kondensatora i natężeniu prądu w obwodzie będą tworzyły stałe kąt prosty, jeżeli więc w pewnej chwili,

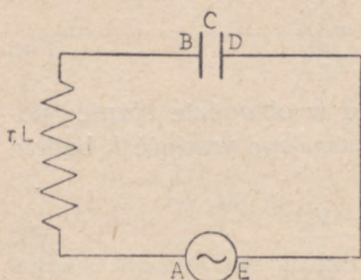
np.  $t=0$ , wektor  $\vec{OA}$  odtwarzający różnicę potencjałów, będzie miał kierunek zgodny z kierunkiem osi  $Ox$ , wektor  $\vec{OB}$ , odtwarzający natężenie prądu w obwodzie, będzie miał w tej samej chwili kierunek osi  $Oy$ .



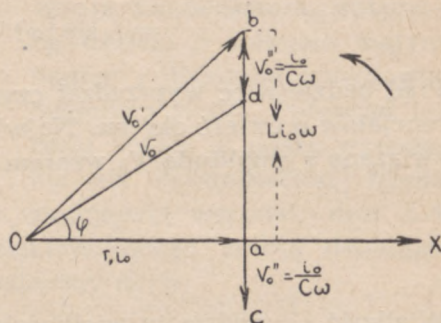
rys. 345



Zastąpmy teraz w badanym obwodzie drut  $\xi A$  o znikomym oporze i znikomo małej indukcji własnej przewodnikiem  $AB$  o oporze  $r$  i współczynniku indukcji własnej  $L$  (rys. 346).



rys. 346



rys. 347

Niech  $i_0$  będzie amplitudą natężenia prądu, płynącego w tym obwodzie. Odlóżmy w kierunku osi  $Ox$  wektor  $\vec{Oa}$  równy  $ri_0$  (rys. 347); amplitudę różnicy potencjałów  $V'_0$  punktów  $A$  i  $B$  obwodu otrzymamy, przystawiając do końca wektora  $Oa$  prostopadły do niego wektor  $\vec{ab}$  o długości  $Li_0 \cdot \omega$ , wektor  $\vec{Ob}$  będzie wtedy tą szukaną amplitudą. Różnica potencjałów zbrój kondensatora o amplitudzie równej, jak wiemy,  $\frac{i_0}{C\omega}$ , jest opóźniona względem natężenia prądu o ćwierć okresu; odtwarzać ją więc będzie wektor  $\vec{ac}$ . Różnicę potencjałów punktów  $A$  i  $D$  obwodu otrzymamy sumując geometrycznie amplitudy różnic potencjałów  $V'$  i  $V''$ . Przystawmy wektor  $\vec{ac}$  do końca wektora  $\vec{ab}$ ; wektor  $\vec{Od}$ , będący sumą geometryczną wektorów  $V'_0$  i  $V''_0$ , odtwarza różnicę potencjałów punktów  $A$  i  $D$  obwodu lub, o ile przyjmiemy, że tak, jak poprzednio, drut  $DE$  ma znikomo mały opór i znikomo małą indukcję własną, różnicę potencjałów na biegunach  $A$  i  $E$  źródła prądu.

Ten wywód, w którym wyodrębniliśmy w obwodzie części, posiadające opór i indukcję własną, możemy zastosować do dowolnego układu przewodników, np. do takiego, w którym i część  $DE$  obwodu



posiada opór i indukcję własną lub który zawiera kilka kondensatorów, połączonych drutami o skończonych wartościach oporu  $r$  i indukcji własnej  $L$ , lub wreszcie, w którym każda z części obwodu posiada zarówno opór omowy, jak i indukcję własną oraz pojemność. Wtedy jednak przez  $r$ ,  $L$  i  $C$  należy rozumieć łączny opór, łączną indukcję własną i łączną pojemność obwodu, obliczoną w ten sposób, w jaki wyznaczamy równoważny opór, indukcję własną i pojemność różnych układów.

Z trójkąta  $Oad$  znajdujemy, że

$$r^2 i_0^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 i_0^2 = V_0^2,$$

skąd

$$i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}, \quad (8)$$

oraz że różnica faz  $\varphi$  napięcia  $V$  i natężenia prądu  $i$  jest równa

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r}; \quad (9)$$

włączenie zatem do obwodu kondensatora zmniejsza, w tych samych pozostałych warunkach, działanie indukcji własnej.

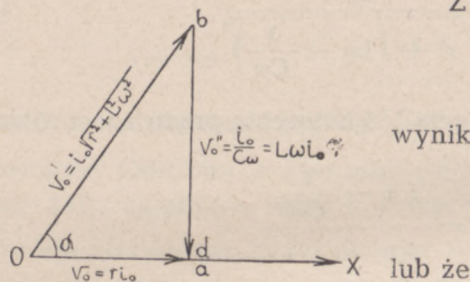
Dopóki opór pojemnościowy mniejszy jest od oporu indukcyjnego, zjawiska w obwodzie zachodzą tak, jak w poprzednio rozpatrywanym przypadku obwodu, nie zawierającego kondensatora, jedyną różnicę stanowić będzie wspomniane wyżej pozorne zmniejszenie współczynnika indukcji własnej; gdy opór pojemnościowy przewyższa opór indukcyjny, zmienia się znak kąta  $\varphi$ : prąd wyprzedza przyłożone napięcie. W przypadku szczególnym, gdy opór pojemnościowy równy jest oporowi indukcyjnemu, amplituda natężenia prądu osiąga wartość największą, różnica zaś faz  $\varphi$  staje się równa zeru. W tym przypadku, odpowiadającym, jak o tym później będzie mowa, rezonansowi (tzw. rezonans napięcia) między danym obwodem i źródłem prądu, różnica potencjałów zarówno punktów  $A$  i  $B$  obwodu, jak i zbrój kondensatora (punktów  $B$  i  $D$ , rys. 348), może znacznie przewyższać różnicę potencjałów bie-



gunów źródła, jak to bezpośrednio wynika z rys. 348, gdzie wektor  $\vec{O}d$ , będący sumą geometryczną wektorów  $\vec{O}b$  i  $\vec{b}a$  i odtwarzający różnicę potencjałów biegunów źródła, ma długość i kierunek te same, co wektor  $\vec{O}a$  o długości  $ri_0$ ,  $\varphi$  bowiem równe jest zeru. Te tzw. przepięcia są tym większe, im większy jest kąt  $\alpha$ , a więc im większy jest stosunek

$$\frac{i_0}{C\omega} : r \cdot i_0 = \frac{1}{C\omega r} = \frac{L\omega}{r}.$$

W obwodzie o oporze omowym bardzo małym w porównaniu z oporem indukcyjnym  $L\omega$  kąt  $\alpha$  zbliża się do kąta prostego, przepięcie staje się bardzo wielkie.



rys. 348

Z równości

$$\frac{1}{C\omega} = L\omega$$

wynika, że

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (10)$$

Niech np. pojemność kondensatora będzie równa  $3,5 \mu\text{f} = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{f}$ , współczynnik indukcji własnej  $L = 2,5$  Henry'ego, opór omowy  $r = 40$  omom, amplituda  $V_0$  różnicy potencjałów na biegunach 125 woltom, wreszcie okres zmian  $T = \frac{1}{50}$  sek. Ze wzoru (8) wyznaczamy amplitudę prądu

$$i_0 = \frac{125}{\sqrt{(40)^2 + (785 - 910)^2}} = 0,91 \text{ amp},$$

wobec czego amplituda różnicy potencjałów punktów A i B, równa

$$V_0' = \sqrt{r i_0^2 + L^2 i_0^2 \omega^2} = i_0 \sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}$$

wyniesie około 736 woltów, amplituda zaś różnicy potencjałów na zbrojach kondensatora równa  $V_0'' = \frac{i_0}{C\omega}$  około 855 woltów.

Wystarczy jednak powiększyć indukcję własną obwodu do 2,9 Henry'ego, aby amplituda natężenia prądu wzrosła do 3,12 amp., ampli-



tuda zaś różnic potencjałów punktów  $A$  i  $B$  do mniej więcej 2840 woltów; tę samą wartość będzie miała również amplituda różnic potencjałów zbrój kondensatora, wtedy bowiem

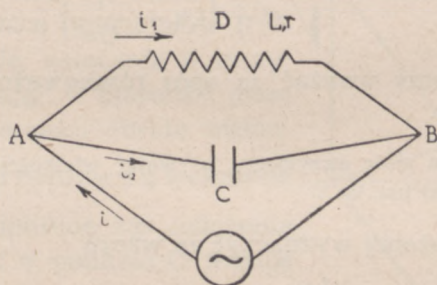
$$L\omega \doteq \frac{1}{C\omega}$$

$r^2$  zaś jest małe w porównaniu z  $(L\omega)^2$ .

Podstawiając wartości  $L$  i  $C$  do wzoru (10) otrzymujemy

$$T = 2\pi \sqrt{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2,9} = 0,0199 \doteq 0,02.$$

Włączmy do obwodu przewodnik  $AB$  i kondensator nie szeregowo tak, jak w poprzednim przypadku, lecz równolegle



rys. 349

(rys. 349). W gałęzi  $ACB$  o znikomo małym oporze natężenie prądu  $i_2$  jest, zgodnie ze wzorem (6), równe

$$i_2 = C\omega V_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (a)$$

gdzie  $V_0$  oznacza amplitudę różnicy potencjałów punktów  $A$  i  $B$ ; w gałęzi  $ADB$  natężenie prądu wynosi (p. wzór 2 c)

$$i_1 = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad (b)$$

gdzie, jak wiemy,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{r}.$$

Stosując regułę Kirchhoffa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) + C\omega r_0 \cos \omega t = \\ &= i_0 \sin(\omega t - \varphi_0). \end{aligned}$$



Postępując podobnie, jak w ustępie I, to znaczy otwierając nawiasy i przyrównując współczynniki przy  $\sin \omega t$  i  $\cos \omega t$  znajdziemy, że

$$i_0 = \frac{|V_0|}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \omega \cdot C \cdot \sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \quad (11)$$

amplituda zatem natężenia ma wartość taką, jaką by miała, gdyby prąd w punktach A i B się nie rozgałęział, lecz płynął przez przewodnik o oporze pozornym

$$R_p = \frac{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \quad (11a)$$

Opór ten możemy uważać za opór równoważny oporom gałęzi ACB i ADB.

Ten sam wzór otrzymamy, używając wielkości urojonych i stosując wzór (k) ust. 2a.

Fazę  $\varphi_0$  możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{L\omega}{r} (CL\omega^2 - 1) + C\omega r. \quad (11b)$$

W szczególnym przypadku, gdy  $\varphi_0 = 0$ , a więc gdy natężenie prądu ma fazę tę samą, co różnica potencjałów punktów A i B, mamy

$$CL\omega^2 = 1 - \frac{Cr^2}{L},$$

tzw. rezonans prądu.

Wtedy

$$C = \frac{L}{r^2 + \omega^2 L^2},$$

skąd

$$R_p = \frac{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}}{\omega C \sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{r^2 + \omega^2 L^2}{\omega L}\right)^2}} = \frac{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}}{\omega C \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{\omega^2 L^2}}} = \frac{L}{rC}. \quad (11c)$$

Gdy opór omowy  $r$  dąży do zera, opór równoważny dąży do nieskończoności, natężenie prądu  $i$  nieograniczenie maleje,

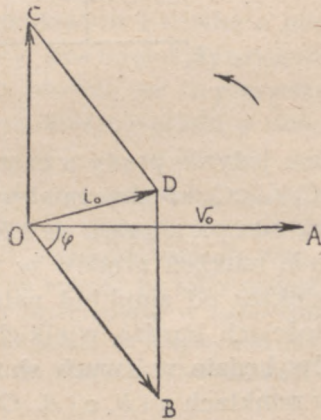


podczas gdy natężenia prądu  $i_1$  i  $i_2$  zachowują wartości skończone. W granicy, gdy  $i=0$ , w obwodzie  $ADBCA$  zachodzi rezonans napięcia, wtedy bowiem mamy

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} \quad \text{lub} \quad L\omega = \frac{1}{C\omega}.$$

Źródło prądu nie dostarcza wtedy obwodowi żadnej energii,  $\varphi$  staje się równe  $\frac{\pi}{2}$ , różnica przeto faz prądów  $i_1$  i  $i_2$  wzrasta

do  $\pi$ . Istotnie, niech wektor  $\vec{OA}$  odzwierciedla przyłożoną w punktach rozgałęzienia różnicę potencjałów (rys. 350). Amplitudę natężenia  $i_1$  otrzymamy, odkładając w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu wektorów wektor  $\vec{OB}$  tworzący z wektorem  $\vec{OA}$  kąt  $\varphi$ ; amplitudę zaś natężenia  $i_2$  wystawiając w punkcie  $O$  wektor  $\vec{OC}$  prostopadły do  $\vec{OA}$ ; wektor  $\vec{OD}$  będzie wtedy odzwierciedlał amplitudę  $i_0$ .



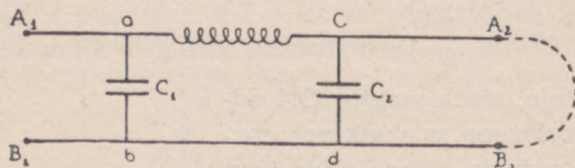
rys 350

Gdy  $\varphi$  stanie się równe  $\frac{\pi}{2}$ , wektory  $\vec{OB}$  i  $\vec{OC}$  będą miały kierunki przeciwne; jednocześnie długości ich staną się równe, jak to wynika bezpośrednio ze wzoru (b), w którym przyjmiemy  $r=0$  i  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ .

Jakiegokolwiek jednak byłyby wartości oporu omowego, współczynnika indukcji własnej i pojemności, prąd w gałęzi, zawierającej kondensator, będzie miał w tych samych pozostałych warunkach amplitudę tym większą, im większa będzie częstość kołowa  $\omega$  zmian prądu, prąd zaś w gałęzi, posiadającej opór omowy i indukcję własną, tym większą, im mniejsza będzie częstość kołowa  $\omega$ . Na tej własności obwodów rozgałęzionych oparta jest budowa tzw. filtrów elektrycznych, które pobieżnie tylko omówimy.

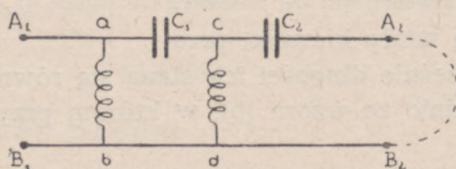


Niech  $A_2B_2$  będą punktami, w których do drutów, doprowadzających prąd z biegunów źródła  $A_1B_1$  (rys. 351) przyłączony jest obwód zewnętrzny. Gdy między  $A_1$  i  $A_2$ ,  $B_1$  i  $B_2$  umieścimy cewki o znacznej indukcji własnej i do obwodu  $A_1A_2B_2B_1$  włączymy równolegle kondensatory  $C_1C_2$ , do punktów  $A_2B_2$  będą mogły ze znaczniejszym natężeniem docho-



rys. 351

dzić jedynie prądy o częstości niskiej, dla których opór gałęzi  $aC_1b$  i  $cC_2d$  będzie miał wartość większą lub nie o wiele mniejszą od oporu gałęzi  $ac$  i  $bd$ . Przy częstościach wielkich amplituda natężeń prądów w gałęziach  $aC_1b$ ,  $cC_2d$  będzie o wiele większa od amplitud natężeń w gałęziach  $ac$ ,  $cA_2$ ; przy częstościach bardzo wielkich włączenie równoległe kondensatorów będzie w swych skutkach równoważne zwarcie obwodu w punktach  $a$  i  $b$ ,  $c$  i  $d$ . Odwrotnie, gdy między  $A_1$  i  $A_2$ ,  $B_1$  i  $B_2$



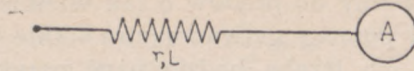
rys. 352

umieścimy kondensatory i do obwodu włączymy równoległe cewki (rys. 352), do punktów  $A_2$ ,  $B_2$  będą dochodziły jedynie prądy o wysokiej częstości, prądy stałe nie będą mogły w ogóle dopływać do tych punktów.

Do wyżej rozpatrywanych przypadków sprowadza się również i zjawisko tzw. połączenia jednobiegunowego. Niech  $A$  będzie dowolnym przewodnikiem odosobnionym, połączonym z jednym biegunem źródła prądu zmiennego, i niech drugi biegun tego



źródła połączone będzie z ziemią (rys. 353). Ciało  $A$  możemy uważać za jedną ze zbroi kondensatora, którego drugą zbroję stanowi ziemia,



rys. 353

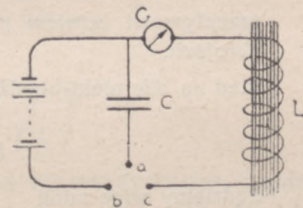
i zastosować do otrzymanego w ten sposób układu wzór (7). We wzorze tym  $C$  będzie oznaczało pojemność przewodnika  $A$  w danych warunkach.

#### 6. — OBWODY DRGAJĄCE.

Gdy z obwodu, zawierającego kondensator i cewkę o niewielkim oporze omowym, wyłączymy po naelektryzowaniu kondensatora zewnętrzne źródło prądu, obwód, jak to pierwszy udowodnił Feddersen (1859 r.), będzie siedliskiem prądu o zmieniającym się okresowo kierunku.

Feddersen obserwował w zwierciadle wirującym iskry, towarzyszącą rozbrajaniu się kondensatora poprzez iskiernik, i stwierdził, że każdorazowe rozbrojenie powodowało przeskakiwanie nie jednej, lecz kilku lub kilkunastu iskiei przy czym kolejno po sobie następujące iskry przeskakiwały w kierunkach przeciwnych, w zwierciadle bowiem widać było wyraźne świecenie to jednej to drugiej elektrody iskiernika; kolejno więc to jedna, to druga elektroda stawała się jaśniejszą od anody świecącej katodą.

Biorąc kondensator o wielkiej pojemności i cewkę o znacznym współczynniku indukcji własnej, otrzymuje się prądy o małej częstotliwości, których istnienie można wykazać, włączając w obwód galwanometr o małym okresie wahań: Tak np. w przypadku, przedstawionym na rys. 354, gdy pojemność  $C$  będzie równa 25 p. f, współczynnik indukcji własnej  $L = 2000$  henry, otrzymamy po naelektryzowaniu kondensatora i wyłączeniu źródła (przez przerwanie połączenia  $ab$ ) w obwodzie  $CGL$ , utworzonym przez połączenie  $a$  z  $c$ , prąd zmienny; który wprawi ruchomą część galwanometru  $G$  w wahania koło położenia równowagi, okres bowiem zmian prądu będzie w tym przypadku równy mniej więcej 1,4 sek.



rys. 354



Zmniejszając stopniowo pojemność i indukcję własną będziemy otrzymywali prądy o coraz to częstszych zmianach, aż wreszcie dojdziemy do prądów o tak wielkiej częstotliwości, że wykrycie ich przy pomocy galwanometra stanie się niemożliwe i że do badania ich trzeba będzie użyć przyrządów innych typów (np. oscylografów katodowych). Tego rodzaju prądy szybko zmienne nazywamy drganiami elektromagnetycznymi. Drgania te zazwyczaj są drganiami szybko zanikającymi, w miarę jednak, jak zmniejsza się opór omowy obwodu, zmniejsza się również i ich tłumienie (p. rozdz. I, str. 31); jednocześnie okres drgań przybliży się asymptotycznie do wartości  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ , przy której, jak to stwierdziliśmy poprzednio, otrzymujemy największą w danych warunkach wartość (w obwodzie o danej pojemności  $C$  i o danym współczynniku  $L$ , zawierającym źródło prądu o danej amplitudzie  $\xi_0$ ) natężenia prądu zmiennego. Możemy więc tę wartość okresu  $T$  uważać za okres drgań własnych obwodu (por. rozdz. II, str. 133), odstępstwa zaś od tej wartości za spowodowane przez tłumienie, mające swe źródło przede wszystkim w oporze omowym przewodników.

Niech w chwili  $t$  różnica potencjałów zbroi kondensatora będzie równa

$$V_A - V_B = \frac{e}{C},$$

natężenie prądu w tej samej chwili wynosić będzie

$$i = -\frac{de}{dt},$$

przepływowi bowiem prądu towarzyszy zmniejszanie się naboju na zbrojach.

Stąd na siłę elektrobodźczą indukcji własnej otrzymujemy

$$L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2e}{dt^2}.$$

Będziemy więc mieli

$$-L \frac{d^2e}{dt^2} - r \frac{de}{dt} = \frac{e}{C}$$

lub

$$L \frac{d^2e}{dt^2} + r \frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = 0, \quad (12)$$



równanie analogiczne do rozpatrywanych już przez nas równań w rozdziale II (równanie 24, str. 142) i w rozdziale VII (równanie f, str. 509). Powtarzając i w tym przypadku to samo rozumowanie znajdujemy, że dopóki

$$\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2} > 0$$

wartość naboju  $e$  na zbrojach kondensatora zmienia się okresowo ze zmniejszającą się stopniowo amplitudą.

Przyjmując, że w chwili  $t = 0$ , nabój posiadał wartość największą, wartość naboju w dowolnej chwili  $t$  znajdziemy ze wzoru

$$e = e_0 \cdot e^{-\frac{r}{2L}t} \cos \omega t = e_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \cos \omega t, \quad (12a)$$

gdzie  $e$  oznacza zasadę logarytmów naturalnych,  $\tau$  — stałą czasu. Częstość kołowa  $\omega_0$  będzie równa

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - r^2}. \quad (12b)$$

(por. str. 510). Gdy  $r$  zbliża się do zera

$$\omega_0 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

skąd

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

W tłumieniu drgań należy również szukać przyczyny rozpraszania się energii elektrostatycznej, jaką w chwili  $t=0$  posiadał kondensator. Moc bowiem zużywana w obwodzie wynosi zgodnie ze wzorem (5)

$$P = \frac{1}{2} V_0 i_0 \cos \varphi$$

gdzie  $\cos \varphi$ , obliczony ze wzoru (9), jest równy

$$\cos \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Moc ta zużywa się przede wszystkim na wywiązywanie ciepła Joule'a w obwodzie drgającym, poza tym w stopniu zazwyczaj niewielkim również i na pokrycie strat, związanych czy to z magnesowaniem rdzenia żelaznego, na którym zazwyczaj nawinięta jest cewka, czy też spowodowanych niejednorodnością dielektryka w kondensatorze.



We wzorze tym  $r$  nie wyraża już tej wartości oporu omowego, jaką dla danego przewodnika otrzymalibyśmy z pomiarów, opisanych w rozdziale V i wykonanych przy użyciu prądu stałego lub nawet prądu zmiennego, lecz o częstości niewielkiej; linie bowiem prądu o wysokiej częstości nie wypełniają tak, jak linie prądu stałego, całego przekroju przewodnika, lecz skupiają się w jego warstwach powierzchniowych; grubość tych warstw, będących siedliskiem prądu, jest tym mniejsza, im większa jest częstość zmian prądu.

Tak np. w badanym przez Zennecka drucie cylindrycznym gęstość prądu w odległości 0,12 mm od powierzchni drutu spada przy częstości  $V = \frac{\omega}{2\pi}$ , równej  $0,5 \cdot 10^5$ , do mniej więcej 65%, przy częstości  $5 \cdot 10^5$  do 25% wartości, jaką ma na powierzchni.

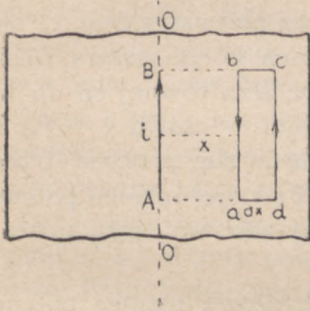
To zjawisko naskórne (ang. skin effect, fr. effet de coque) jest w niewątpliwym związku z indukcyjnym działaniem jednej linii prądu na drugą. Działanie to jest najsilniejsze w środku drutu, tam bowiem znajduje się w bezpośrednim sąsiedztwie najwięcej linii prądu.

Niech  $OO$  będzie osią cylindryczną drutu (rys. 355), przez który przepływa prąd o zmiennym natężeniu i niech  $i$  oznacza tę część prądu, która przechodzi przez środkową część przewodnika o promieniu  $x$ . Wyodrębnijmy z sąsiadującej bezpośrednio części przewodnika bardzo wąski prostokąt  $abcd$ . Gdy natężenie prądu  $i$  się zmienia, zmienia się również strumień indukcji, przechodzący przez prostokąt, wobec czego w wąskich pasmach  $ab$  i  $cd$ , wyciętych z przewodnika i równoległych do osi drutu, powstają prądy indukowane, płynące w pasmie  $ab$  przy wzrastaniu natężenia  $i$  w kierunku przeciwnym do kierunku prądu głównego, w pasmie zaś  $cd$  — w kierunku zgodnym z natężeniem prądu głównego.

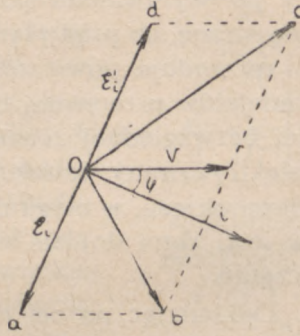
Gdyby rozkład prądu w przewodniku był jednostajny, różnica potencjałów punktów  $A, B$  miałaby w każdej chwili wartość tę samą, co różnica potencjałów punktów  $a, b$  lub  $d, c$  np. wartość  $V$ , mającą względem prądu  $i$  różnicę fazy  $\varphi$  tym większą, im w tych samych pozostałych warunkach większa jest częstość kołowa  $\omega$  (rys. 356). W pasmie  $ab$  do tej różnicy potencjału dochodzi siła elektrobodźczą indukowaną  $\mathcal{E}_i$ , opóźniona o ćwierć okresu względem natężenia prądu  $i$ , w pasmie zaś  $cd$  równa jej i przeciwnie skierowana siła elektrobodźczą  $\mathcal{E}'_i$ , wyprzedzająca o ćwierć okresu natężenie prądu  $i$ . Wypadkowe zatem różnice potencjałów w punktach  $a, b$  oraz  $c, d$  będą odpowied-



nio równe  $Ob$  i  $Oc$ , przy czym  $Oc$  będzie zawsze większe od  $Ob$ , kąt bowiem, jaki wektor  $\vec{V}$  tworzy z  $Oa$  jest zawsze kątem rozwartym, kąt zaś, jaki tworzy z  $Od$  jest zawsze kątem ostrym. Różnice potencjałów będą przeto wzrastały w miarę oddalania się od osi, wzrastać będzie również wraz z odległością  $x$  i gęstość prądu.



rys. 355



rys. 356

Wychodząc z takich mniej więcej założeń W. Thomson (lord Kelvin wyznaczył stosunek wartości oporu  $r_z$ , jaką otrzymujemy, dzieląc wywiązane w obwodzie ciepło Joule'a przez kwadrat skutecznego natężenia prądu, do wartości oporu omowego  $r_0$  w ścisłym tego słowa znaczeniu. Stosunek ten

$$a = \frac{r}{r_0}$$

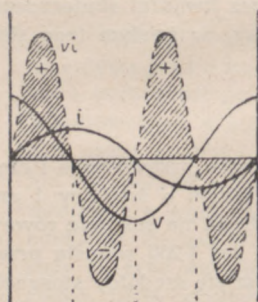
jest, według Thomsona, funkcją kwadratu średnicy przewodnika i częstości zmian prądu. Tak np. w drucie miedzianym o średnicy 1 cm stosunek ten przy częstości mniej więcej 80 drgań na sekundę równy jest prawie dokładnie jedności, przy częstości zaś 1200 wzrasta przeszło dwukrotnie (Hospitalier). Ze zmniejszeniem się średnicy stosunek ten maleje. Stefan, opierając się na wyprowadzonym przez siebie wzorze, wyznaczającym współczynnik indukcji wzajemnej dwu równoległych przewodników, udowodnił (1887 r.), że zmniejszanie się gęstości prądu w miarę przybliżania się do środka drutu możemy w pewnych granicach uważać za proporcjonalne do kwadratu przekroju i częstości kołowej, a za odwrotnie proporcjonalne do kwadratu oporu właściwego.

W miarę zmniejszania się oporu  $r$ , który w dalszym ciągu nazywać będziemy omowym, zmniejszać się będzie i energia rozpraszania. W granicy, gdy  $r = 0$ , rozproszenia energii nie będzie.



Wtedy energia elektryczna  $U_{cls}$  kondensatora, równa w chwili  $t = 0$  całkowitej energii układu, przejdzie w ciągu pierwszej ćwierci okresu drgania w energię magnetyczną, która znów w ciągu drugiej ćwierci okresu przejdzie z powrotem w energię elektryczną; prąd bowiem indukcji własnej, powstający po wyrównaniu potencjałów zbroi i skierowany w tę samą stronę, co prąd płynący podczas pierwszej ćwierci okresu, spowoduje powstanie na zbrojach kondensatora różnicy potencjałów przeciwnej co do znaku, lecz równej co do wartości bezwzględnej różnicy potencjału w chwili  $t = 0$ . Tak naelektryzowany kondensator rozbroi się podczas trzeciej ćwierci okresu, w ciągu zaś ostatniej ćwierci różnica potencjałów jego zbroi dojdzie do tej samej wartości, jaką miała na początku.

Odkładając na osi rzędnych chwilowe różnice potencjałów zbroi kondensatora, chwilowe natężenia płynącego przez obwód prądu i wreszcie iloczyny tych wartości, otrzymamy krzywą  $V, i$ , ograniczającą pola (na rysunku zakreskowane),



rys. 357

równe liczbowo energii pochłoniętej przez obwód (pola powyżej osi odciętych), gdy energia elektryczna przechodzi w magnetyczną, i oddanej przez obwód (pola poniżej osi odciętych), gdy energia magnetyczna przechodzi w energię elektryczną. Pola te są w tym przypadku wzajemnie równe. Zjawisko przebiega zatem analogicznie do wahań wahadła (grawitacyjnego lub sprężystego), nie podlegającego siłom tarcia. Energia potencjalna (odpowiadająca energii elektrycznej) przechodzi całkowicie

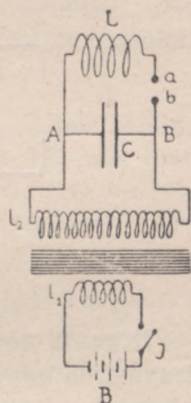
w energię ruchu (odpowiadającą energii magnetycznej) i odwrotnie; wahadło raz wyprowadzone z położenia równowagi (co odpowiada naelektryzowaniu kondensatora) będzie się wahało nieograniczenie długo.

W rzeczywistości jednak stan graniczny nigdy nie jest osiągnięty: energia takiego układu ulega, jak o tym była mowa

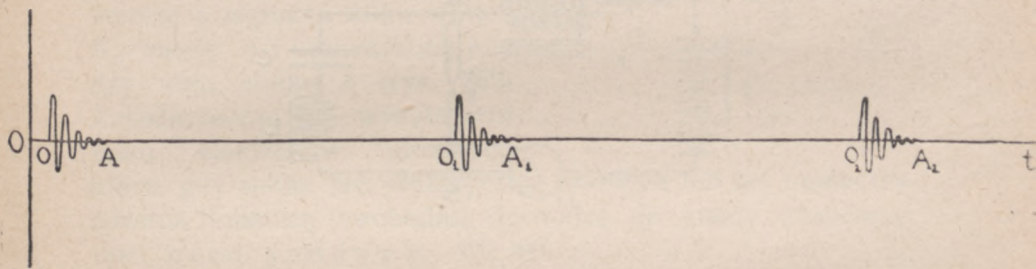


wyżej, stopniowemu rozpraszaniu. Chcąc więc drgania podtrzymać, musimy układowi dostarczyć energii z zewnątrz.

W układzie podobnym do tego, jaki rozpatrywaliśmy wyżej, źródłem energii może być cewka indukcyjna, zasilana przerywanym prądem stałym. W obwód kondensatora  $C$  połączonego z biegunami cewki wtórnej (cewka pierwszorzędna połączona jest z baterią), włączony jest iskiernik  $ab$  (rys 358); gdy różnica potencjałów punktów  $a$  i  $b$ , a co za tym idzie i zbroi kondensatora dojdzie do odpowiednio wysokiej wartości, w iskierniku powstanie iskra, powodująca wahadłowe rozbrojenie kondensatora tak, jak gdyby punkty  $a$  i  $b$  były połączone niewielkim oporem. Prąd, towarzyszący temu rozbrojeniu, o wysokiej zazwyczaj częstotliwości, płynie jedynie przez obwód  $CALB$ , wielka bowiem wartość indukcji własnej wtórnego obwodu cewki powoduje, że przez obwód ten prąd wcale nie płynie; tym sposobem cewka podczas rozbrojenia jak gdyby automatycznie się wylacza. Ponieważ cewka elektryzuje kondensator w odstępach czasu na ogół o wiele więk-



rys. 358

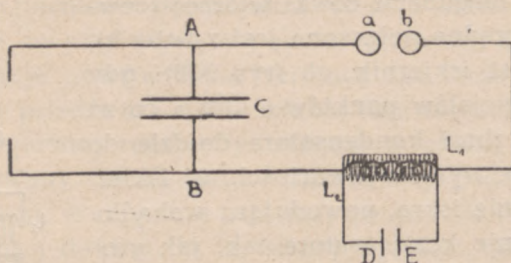


rys. 359

szych od czasu trwania drgań w obwodzie kondensatora, popolicie szybko zanikających, przebieg zjawiska schematycznie odtworzy rys. 359. Krzywe  $OA$ ,  $O_1A_1$ ,  $O_2A_2 \dots$  odtwarzają ciągi drgań, zachodzących w obwodzie kondensatora po każdorazowym jego naelektryzowaniu przez cewkę.

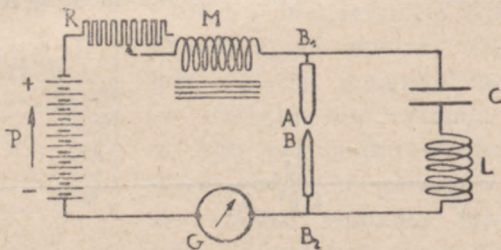


W układzie, danym przez Teslę, cewka obwodu kondensatora o niewielu zwojach z grubego drutu miedzianego stanowi obwód pierwszorzędny, indukujący drgania elektromagnetyczne w obwodzie wtórnym, utworzonym przez cewkę o wielkiej ilości zwojów, na której końcach *D* i *E* powstaje w ten sposób bardzo wielka różnica potencjałów, dochodząca do miliona woltów o bardzo wysokiej częstotliwości.



rys. 360

Drgania te są drganiami zanikającymi (gasnącymi), dla otrzymania bowiem drgań nie zanikających — niegasnących — należałoby stale doprowadzać energię do obwodu drgającego. Tego rodzaju obwód o drganiach niegasnących otrzymujemy, włączając do obwodu drgającego łuk elektryczny *AB* (rys. 361), zasilany przez źródło prądu stałego, oddzielone od ob-



rys. 361

wodu drgającego cewką o dostatecznie wielkim współczynniku indukcji własnej, aby drgania obwodu nie przechodziły przez obwód źródła. Prąd zmienny zmniejsza i zwiększa okresowo natężenie prądu stałego, przepływającego przez elektrody węglowe, co powoduje okresowe zmiany temperatury łuku. W łuku powstają wtedy okresowe zmiany ciśnienia, które w przypadku dostatecznie niskiej częstotliwości (p. rozdz. I, ust. 31)

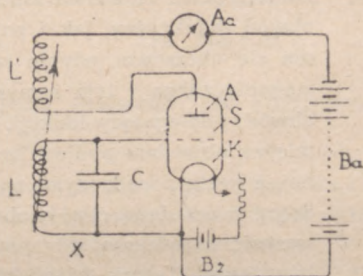


ujawniają się w postaci dźwięku. Stąd nazwa łuku śpiewającego, jaki nadaje się temu układowi. Gdy do cewki  $L$  wsuniemy rdzeń żelazny, ton łuku się obniża, wzrasta bowiem indukcja własna obwodu, gdy zaś do cewki tej wsuniemy inną cewkę, stanowiącą obwód zamknięty, ton się podnosi; działanie bowiem indukcji wzajemnej osłabia działanie indukcji własnej (p. rozdz. VIII, ust. 4).

Drgania w ten sposób otrzymywane można upodobnić do drgań struny skrzypcowej, wzbudzanych przez pociągnięcie smyczka; struna drga, jakkolwiek smyczek przesuwają się w jednym tylko kierunku. Można również porównać je z drganiami w rurach organowych przez wdmuchiwany do nich stały prąd powietrza.

Najczęściej jednak używane są tzw. obwody lampowe, w których drgania są podtrzymywane przez energię obwodu, zawierającego tzw. triodę (rurę o trzech elektrodach).

Lampę tę, której działanie omówimy jedynie bardzo ogólnikowo, stanowi rura szklana, o możliwie daleko posuniętej próżni, zawierająca katodę  $K$ , ogrzewaną do żarzenia przez baterię o napięciu kilku woltów  $B_2$ , anodę  $A$  i umieszczoną między nią siatkę  $S$  (rys. 362). Katoda, żarząc się, wysyła strumień elektronów ujemnych, które, gdy siatka jest elektrycznie obojętna lub też naelektryzowana dodatnio, swobodnie dochodzą do anody, stanowiąc tzw. prąd anodowy.



rys. 362

Prąd ten, zgodnie z podanym w rozdz. V określeniem kierunku prądu, uważamy za płynący od anody do katody.

Lampę tę włącza się w obwód drgający w ten sposób, żeby cewka  $L'$  obwodu lampy mogła działać na cewkę  $L$  obwodu drgającego, przy czym współczynnik indukcji wzajemnej  $L_{12}$  może być zmieniany w dość szerokich granicach, siatka zaś lampy winna być odpowiednio połączona z obwodem drgającym.



Działanie lampy możemy, z grubsza rzecz biorąc, wyjaśnić, jak następuje. W chwili zamknięcia obwodu lampy siatka nie jest naelektryzowana, wobec czego przez obwód lampy przepływa prąd anodowy (zazwyczaj rzędu tysięcznych części ampera); prąd ten płynąc przez cewkę  $L'$ , powoduje powstanie w cewce  $L$  siły elektrobodźczej indukowanej, która elektryzuje siatkę ujemnie tak, że natężenie prądu anodowego spada, co znów powoduje indukowanie w cewce  $L$  siły elektrobodźczej o kierunku przeciwnym, niż poprzednio, w skutku czego siatka elektryzuje się dodatnio, prąd anodowy wzrasta.

Wten sposób energia, dostarczona przez indukcję z obwodu lampy, może wyrównać straty energii obwodu drgającego, spowodowane przez tłumienie.

Do otrzymania drgań niegasnących może służyć również prądnica wysokiej częstości, doprowadzona do wielkiego stopnia doskonałości przez Alexandersona. W prądniczy tej oba obwody, zarówno obwód indukcyjny, jak i podlegający indukcji, są nieruchome; zmienia się okresowo jedynie reluktancja (p. rozdz. VII, ust. 6) obwodu magnetycznego i tym samym strumień indukcji, przechodzący przez obwód, podlegający indukcji. Zmiana ta powstaje na skutek obracania między obwodem podlegającym indukcji i indukującym tarczy żelaznej, z gęsto nasadzonymi na niej zębami. Strumień indukcji, przechodzący przez daną cewkę obwodu, podlegającego indukcji, ma wtedy wartość największą, gdy naprzeciwko cewki znajduje się jeden z zębów tarczy. Tarczy tej, na której nie są nawinięte żadne druty, można nadać znaczną prędkość i osiągnąć w ten sposób częstość, dochodzącą do 100 000 zmian na sekundę.

Drgania, wzbudzone w danym obwodzie, mogą pobudzić do drgania inny obwód, odpowiednio z danym obwodem sprzężony. Rozróżniamy trzy rodzaje sprzężeń. Przy tzw. sprzężeniu indukcyjnym cewka obwodu drgającego jest cewką pierwszorzędną, cewka zaś obwodu pobudzanego do drgania, jest cewką wtórną (rys. 363 a). Miarą sprzężenia jest tu wielkość

$$\frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}} \quad (13)$$

(por. rozdz. II, wz 36).



Przy sprzężeniu bezpośrednim cewka obwodu pobudzanego stanowi część cewki obwodu pobudzającego (rys. 363 b); sprzężenie jest tym większe, im większa jest w stosunku do całości cewki ta jej część, która jest wspólna obu obwodom. Wreszcie przy sprzężeniu elektrostatycznym obwody oddziałują na siebie wzajemnie poprzez kondensatory  $C_3$ ,  $C_4$  (rys. 363 c), sprzężenie wzrasta w miarę wzrostu pojemności tych kondensatorów.

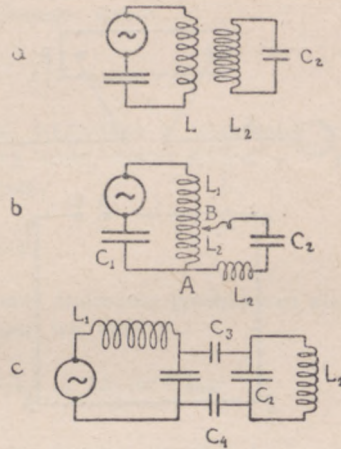
W tego rodzaju obwodach sprzężonych okres drgań zależy nie tylko od własności każdego z danych obwodów oddzielnie, a więc nie tylko od okresu ich drgań własnych, lecz również i od wartości sprzężenia.

Zjawiska podlegają tym samym prawom, co sprzężone układy sprężyste (p. rozdz. II, ust. 8).

Wpływ sprzężenia należy uwzględnić przy użyciu tzw. falomierzy, to znaczy układów o zmiennej pojemności, w których układ drgający wzbudza drgania wymuszone. Regulujemy pojemność falomierza tak, aby prąd w nim indukowany miał natężenie możliwie największe, przy czym do obserwacji zmian natężenia służyć może albo czuły ampermetr cieplny albo po prostu lampka żarowa, którą doprowadza się do możliwie największej jasności. Wtedy okres drgań falomierza, który wyznaczamy ze znanych nam wartości współczynnika indukcji własnej i pojemności, równy jest okresowi drgań układu wzbudzającego. Wniosek ten jednak jest tylko wtedy słuszny, gdy sprzężenie obu obwodów jest luźne.

## 7. — ROZCHODZENIE SIĘ DRGAŃ ELEKTROMAGNETYCZNYCH WZDŁUŻ DRUTÓW.

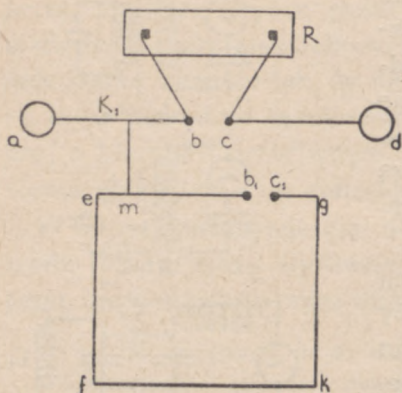
Przy bardzo wielkiej częstotliwości drgań lub też znacznej długości drutów, stanowiących obwód drgający, założenie nasze, że prąd ma w danej chwili we wszystkich punktach obwodu to samo natężenie i ten sam kierunek, że więc innymi słowy,



rys. 363 a, b, c



wszystkie odcinki obwodu są w danej chwili siedliskiem identycznych zjawisk elektromagnetycznych, nie odpowiada już, jak to, o ile chodzi o drgania wysokiej częstości, pierwszy wyznał Hertz (1881 r.), istotnemu przebiegowi zjawisk.



rys. 364

Dla otrzymania drgań o wysokiej częstości Hertz użył oscylatora (wibratora) liniowego. Wibrator taki składa się z dwu drutów prostoliniowych  $ab$  i  $cd$  (rys. 364), i dwu większych kul  $a$  i  $d$ , umieszczonych na bardziej oddalonych końcach tych drutów; małe kulki  $b$  i  $c$ , umieszczone na zbliżonych do siebie końcach drutów, stanowią iskiernik  $bc$ . Druty są połączone z cewką indukcyjną  $R$ . Dobierając odpowiednio promienie kul  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  i długości oraz średnice przewodników  $ab$  i  $cd$  otrzymujemy obwód drgający otwarty o bardzo małym okresie drgań własnych.

W oscylatorze Hertza kule  $a$  i  $d$  stanowią jakby zbroje zewnętrzna i wewnętrzną jednego kondensatora, którego pojemność możemy wyznaczyć ze wzoru

$$e = C(V_1 - V_2)$$

gdzie  $e$  nabój elektryczny na każdej zbroy,  $V_1$  i  $V_2$  — potencjały zbroy kondensatora. Mamy zawsze

$$V_2 = -V_1,$$

wobec czego

$$e = 2C \cdot V_1. \quad (a)$$

Nabój na kuli  $a$  jest równy

$$e = \frac{R}{9 \cdot 10^{11}} V_1, \quad (b)$$

gdzie  $R$  jest wyrażone w centymetrach,  $e$  — w kulombach,  $V_1$  — w woltach; tę samą wartość bezwzględną ma, oczywiście, nabój ujemny na kuli  $d$ . Mamy zatem

$$C = \frac{1}{2} \frac{R}{9 \cdot 10^{11}} \text{ faradów.}$$



Hertz używał kul o promieniu 15 cm, wobec czego pojemność układu wynosiła

$$C = \frac{7,5}{9 \cdot 10^{11}} \text{ f.}$$

Spółczynnik indukcji własnej w tego rodzaju układzie można, według H. Poincaré'go, wyznaczyć z przybliżonego wzoru

$$L = 2l\mu \left( \ln \frac{4l}{d} - 1 \right),$$

gdzie  $l$  łączna długość drutów  $ab$  i  $cd$ , wynosząca w większości doświadczeń Hertza 150 cm,  $d$  — średnica drutu, równa 0,5 cm,  $\mu = 1$ . Po podstawieniu i obliczeniu otrzymujemy

$$L = \frac{1850}{10^9} \text{ henry.}$$

Skąd zakładając, co zresztą nie odpowiada istotnemu przebiegowi zjawiska, że tłumienie jest bardzo małe (por. wz. 12a)

$$T = 2\pi \sqrt{LC} = 2\pi \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \sqrt{1850 \cdot 7,5} \doteq 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ sek.}$$

Połączmy dowolny punkt  $k_1$  oscylatora z przewodnikiem  $efgk$ , przerwany w punktach  $b_1$ ,  $c_1$ , tworzących bieguny iskiernika. Gdy punkty te znajdują się tak, jak na rys. 364, w niejednakowej odległości od drutu łączącego  $k_1m$ , z chwilą uruchomienia oscylatora zaczynają również przeskakiwać iskry i między punktami  $b$  i  $c_1$ . Iskry te są tym silniejsze (lub też przeskakują przy tym większej odległości biegunów iskiernika), im większa jest różnica odległości punktów  $b_1$  i  $c_1$  od punktu  $m$ . Jeżeli iskiernik obwodu bocznego  $efgk$  umieścimy tak, aby odległości  $b_1m$  i  $c_1m$  były jednakowe (a więc np. gdy iskiernik znajduje się w środku gałęzi  $fk$ , punkt zaś  $m$  w środku gałęzi  $eg$ ), iskra nie przeskakuje. Ponieważ iskrzenie zachodzi tylko między punktami o niejednakowym potencjale, z opisanego wyżej przebiegu zjawiska wynika, że potencjały punktów obwodu bocznego stopniowo jedynie przybierają tę wartość, jaką w danej chwili posiada punkt  $k_1$  oscylatora i że opóźnienie jest tym większe, im dalej od punktu  $m$  znajduje się dany punkt obwodu. W przypadku, przedstawionym na rysunku, w chwili, gdy potencjał punktu  $b_1$  posiada tę wartość, jaką o  $\Delta t$  sek wcześniej posiadał potencjał punktu  $m$ , potencjał punktu  $c_1$  posiada wartość, odpowiadającą wcześniejszej.



(np. o  $\Delta t_1$  sek, gdzie  $\Delta t_1 > \Delta t$ ) wartości potencjału punktu  $m$ . Zastąpienie drutu  $meikg$  drutem z innego materiału, o innej grubości, w niczym na przebieg zjawiska nie wpływa, jeżeli tylko różnica odległości  $mb_1$  i  $meigkc$ , pozostaje bez zmiany.

Pierwowzorem doświadczenia Hertza było doświadczenie Wheatstone'a, wykonane w 1834 r. Wheatstone rozbrajał kondensator poprzez dwa obwody nie połączone ze sobą metalicznie, i mierzył odstęp czasu, jaki upływa między przeskoczeniem iskier w iskiernikach zawartych w samych obwodach i iskrą między obwodami. Obserwując obrazy tych iskier w zwierciadle wirującym, po raz pierwszy przez niego właśnie użytym do tego celu, stwierdził, że obraz iskry między obwodami jest nieco przesunięty względem obrazów iskier w samych obwodach. (Zwierciadło było umieszczone tak, że obrazy wszystkich trzech iskier były na nim jednocześnie widoczne i obracało się dookoła osi, równoległej do dróg iskrowych). W doświadczeniu Wheatstone'a każdy z drutów poszczególnych obwodów miał długość 402 m, opóźnienie, odczytane na oko z przesunięcia obrazu iskry między obwodami w stosunku do iskier w obwodach, wynosiło  $\frac{1}{1152000}$  sek, stąd prędkość rozchodzenia się zaburzeń

$$402 \cdot 1152000 \doteq 463000 \text{ km/sek.}$$

Zjawisko zatem zachodzi tak, jak gdyby dana wartość potencjału lub, mówiąc ogólniej, dane zaburzenie elektryczne rozchodziło się wzdłuż drutu  $meikg$  z pewną prędkością skończoną, niezależną od rodzaju przewodnika.

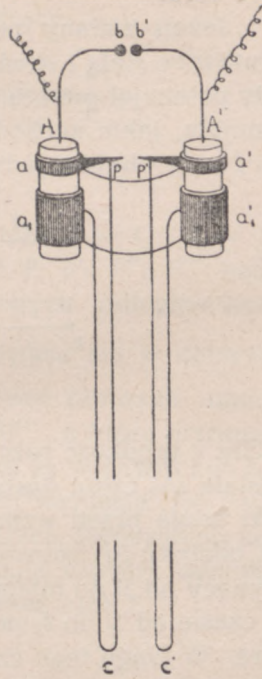
Układ doświadczenia Hertza nie pozwala jednak wyznaczyć tej prędkości. Pomiar ten można wykonać używając układu, danego przez Blondlota i stanowiącego pewną odmianę układu, użytego przez Hertza.

Oscylator  $bb$ , zasilany, tak jak poprzednio, przez cewkę indukcyjną (rys. 365), jest połączony z wewnętrznymi zbrojami kondensatorów  $A$  i  $A'$ , w których każda ze zbroi zewnętrznych jest rozdzielona na dwie odrębne części ( $a$  i  $a_1$ , na jednym kondensatorze,  $a'$  i  $a'_1$  — na drugim), tworząc jakby pierścienie. Górne pierścienie  $a$  i  $a'$  są zacpatrzone w ostrza  $p$  i  $p'$ , tworzące iskiernik. Każde z tych ostrzy jest połączone długim o (długości mniej więcej kilometra) drutem ( $pca_1$  — w jednym kondensatorze,  $p'c'a'$  — w drugim) z dolnym pierścieniem odpowiedniego kondensatora. Poza tym przeciwległe pierście-



nie obu kondensatorów są połączone ze sobą wilgotnymi sznurami, o bardzo wielkim oporze. Podczas elektryzowania wewnętrznych zbroi kondensatorów na zbrojach zewnętrznych powstają naboje indukowane, przy czym nabój znaku przeciwnego pozostaje na zbroi, nabój zaś tego samego znaku, co nabój zbroi wewnętrznej, przechodzi przez sznur na zbroję zewnętrzną drugiego kondensatora (naboje bowiem zbroi wewnętrznych kondensatorów  $A$  i  $A'$  są w każdej chwili znaków przeciwnych). W ten sposób zbroje zewnętrzne są zawsze naelektryzowane nabojami równoważnymi o znakach przeciwnych. W chwili, gdy w  $bb'$  powstaje iskra, obwód  $Abb'A'$  staje się obwodem drgającym. Zbroje wewnętrzne kondensatora nagle się wtedy rozbrajają, wobec czego naboje zbroi zewnętrznych też nagle zostają zwolnione. Pierścienie  $a$  i  $a'$  rozbrajają się przez iskiernik  $pp'$ , zbroje zaś  $a_1$  i  $a'_1$  poprzez druty  $a_1cp$  i  $a'_1c'p'$  oraz ostatecznie przez ten sam iskiernik  $pp'$ , w którym otrzymuje się w ten sposób dwie kolejno po sobie następujące iskry. Pierwsza z nich przeskoczy w chwili, gdy zaburzenie z  $a$  (lub z  $a'$ ) przejdzie do  $p$  (lub  $p'$ ), druga zaś w chwili, gdy zaburzenie z  $a_1$  (lub  $a'_1$ ), przejdzie do tych samych punktów wzdłuż drutu  $a_1cp$  (lub  $a'_1c'p'$ ). Czas więc, jaki upłynie między jedną iskry i drugą, będzie równy czasowi, zużytemu przez zaburzenie na przebycie drogi  $a_1cp$  (lub  $a'_1c'p'$ ). Dzieląc długość drutu przez czas, jaki upłynął od pierwszej iskry do drugiej, możemy wyznaczyć prędkość rozchodzenia się wzdłuż drutów:

O wiele jednak dokładniejsze wyniki otrzymuje się mierząc prędkość rozchodzenia się wzdłuż dwu równoległych drutów (Lecher, 1890 r.). Przypuśćmy, że na końcach dwu drutów równoległych w punktach  $B$  i  $B_1$  wytwarzamy zmieniające się

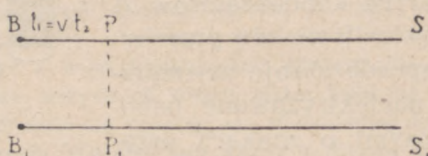


rys. 365



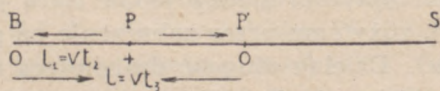
sinusoidalnie o stałym okresie wartości potencjału, tak, aby w każdej chwili potencjały  $B$  i  $B_1$  były równe, lecz o przeciwnych znakach i niech w chwili  $t = 0$  potencjały te mają wartość zero.

Jeżeli zmiany potencjału istotnie rozchodzą się wzdłuż drutów ze stałą i skończoną prędkością, wtedy w chwili  $t = t_2$ , gdy potencjał punktu  $B$  osiąga wartość największą, zmiany potencjału, jakie zachodziły w tym punkcie w czasie od  $t = 0$  do  $t = t_2$ , obejmą jedynie odcinek drutu  $BP$ , długości  $l_1 = vt_2$ ,



rys. 366

gdzie  $v$  prędkość rozchodzenia się zaburzeń wzdłuż drutu, pozostała zaś część drutu będzie miała ten sam stan elektryczny, jaki miała przed wzbudzeniem oscylatora. Wzrost potencjału na odcinku  $BP$  spowodowany będzie przez prąd elektryczny, płynący od  $B$  do miejsc o potencjale niższym. Niech następnie w czasie od  $t_2$  do  $t_3$  potencjał  $B$  zmniejsza się stopniowo aż do zera. W ciągu tego czasu zaburzenia elektryczne przesuną się z punktu  $P$  dalej, tak że zmiany potencjału, jakim punkt  $B$  podlegał w ciągu czasu  $t_3$ , obejmą odcinek  $l = vt_3$ , tę zaś wartość potencjału, jaką w chwili  $t_2$  posiadał punkt  $B$ , będzie miał w chwili  $t_3$  punkt  $P$ . Schemat więc rozkładu największych i zerowych wartości potencjału będzie taki w chwili  $t = t_3$ , jak na rys. 367.

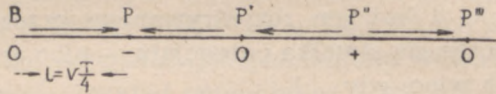


rys. 367

Gdy dalej potencjał  $B$  zmieni swój znak na odwrotny, dochodząc do pewnej największej (biorąc bezwzględnie) wartości, a następnie znów zmniejszy się do zera, zaburzenie przejdzie dalej, dochodząc do punktów, odległych od  $B$  o  $l_3 = vt_4$ ,



gdzie  $t_4$  oznacza czas, w ciągu którego potencjał  $B$  wraca do zera po przejściu kolejno przez wszystkie możliwe wartości dodatnie i ujemne, zawarte między wskazanymi wyżej granicami. Schemat rozkładu potencjału da nam rys. 368, gdzie strzałki oznaczają kierunki prądów w drucie.



rys. 368

W rozpatrywanym przez nas przypadku  $t_3 = t_3$  i  $t_4 = T$ , okresowi zmian oscylatora, punkty więc  $P, P', P'', P'''$  będą się znajdowały w jednakowych wzajemnych odległościach, równych  $l = v \cdot \frac{T}{4}$ . Jeżeli potencjał  $B$  będzie się w dalszym ciągu zmieniał w ten sam sposób, na miejsce zaburzeń, umiejscowionych w chwili  $t_4 = T$ , na odcinku  $BP'''$ , a które przesuną się dalej, przyjdą z  $B$  nowe zaburzenia, tak że w chwili  $t = 2T$  długość odcinka objętego zaburzeniami wyniesie  $l = 2vT$ . Przez analogię z rozchodzeniem się zaburzeń sprężystych nazwiemy długością fali  $\lambda$  danego zaburzenia długość odcinka drutu, na jaką się przesunie zaburzenie przez czas  $T$

$$\lambda = vT.$$

Gdy zaburzenia dojdą do końca drutu, zachodzące tam zmiany potencjału, które dalej rozchodzić się już nie będą mogły, będą powodowały z powrotem zmiany potencjału wzdłuż tej części drutu, wzdłuż której przed chwilą się przesunęły, przy czym potencjał dodatni będzie powodował dodatnie zmiany potencjału; koniec drutu stanie się, jak gdyby nowym źródłem zaburzeń. Wzdłuż drutu rozchodzić się będą zaburzenia okresowe w dwu przeciwnych kierunkach, w ostatecznym przeto wyniku otrzymamy zjawisko analogiczne do fali stojącej, jakąśmy rozpatrywali w rozdz. I.

Na końcu drutu będzie zawsze strzałka potencjału, tam bowiem amplituda zmian wartości potencjału będzie największa, prąd zaś będzie miał tam stale natężenie równe zero — poza drut bowiem płynąć nie będzie — wobec czego na końcu



drutu będzie zawsze węzeł natężenia prądu. Strzałki potencjału będą zatem odległe od strzałek natężenia prądu o ćwierć długości fali.

Tego rodzaju fala będzie mogła istnieć trwale tylko wtedy, gdy długość drutu będzie równa albo połowie fali, a więc  $\frac{1}{2} vT$  — w punkcie *B* bowiem rozpatrywanego przez nas układu zawsze znajduje się strzałka potencjału — albo wielokrotności tej połowy, a więc, gdy

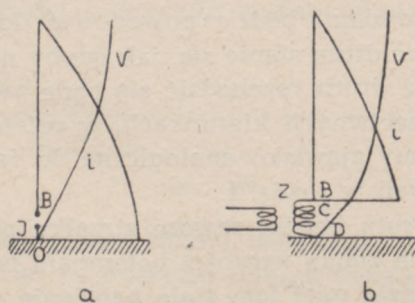
$$2l = n \cdot \lambda = n \cdot v \cdot T.$$

Układ węzłów i strzałek będzie zatem przypominał układ węzłów i strzałek w drgającym słupie powietrza, znajdującym się w rurze z obu końców zamkniętej.

Potencjałowi będzie w tym przypadku odpowiadała nadwyżka ciśnienia, natężenia prądu — prędkość ruchu cząstek (por. rozdz. I, ust. 2).

W chwili więc, gdy po ustaleniu się tego stanu równowagi potencjał w *B* przybiera wartość największą, wartości potencjałów punktów drutu, jako też natężeń płynących w poszczególnych odcinkach drutu prądów będą dla  $n=1$ , to znaczy że znów sięgniemy do analogii akustycznych, dla drgania zasadniczego (p. rozdz. I, ust. 56), odtwarzały krzywe *V* oraz *i* na górnym rysunku 370.

Gdy, jak to bywa, w antenach telegrafu bez drutu, punkt *B* jest jednym z biegunów iskiernika *I*, którego biegun jest połączony z ziemią (rys. 369a) lub też jest połączony z ziemią przez cewkę *C*, pobudzaną do drgania przez zewnętrzny obwód drgający *Z* (rys. 369b),

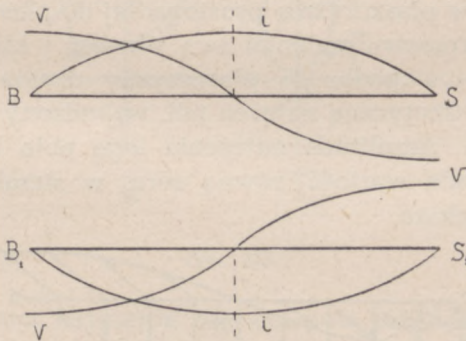


rys. 369



w punktach  $O$  i  $D$  jest zawsze węzeł potencjału i strzałka prądu. Drganiu zasadniczemu odpowiadają wtedy krzywe  $V$  oraz  $i$  (rys. 369). Długość drutu jest równa mniej więcej ćwierci długości fali.

Zupełnie w ten sam sposób zachodzą zjawiska i na drugim drucie, różniąc się jedynie znakami, tak że w punktach  $P$  i  $P_1$  leżących w jednakowych odległościach od początku drutów, zaburzenia są w każdej chwili równe i o znakach przeciwnych. W chwili zatem odpowiadającej maximum wartości potencjałów w strzałkach, rozkład potencjałów i natężeń prądu w obu drutach odtwarzają krzywe rys. 370. Prąd, mający w obu drutach największe natężenie w środkowej części drutu, będzie w drucie  $BS$  płynął od  $B$  do  $S$ , w drucie zaś  $B_1S_1$  — od  $S_1$  do  $B_1$ .



rys. 370

Tym zmianom potencjałów i natężeń prądu towarzyszą zmiany pola elektrycznego i magnetycznego w otaczającej druty przestrzeni.

Przyjmijmy, że i w tym przypadku pole elektryczne, wzbudzone przez chwilowy nabój na danym odcinku drutu, możemy rozpatrywać w sposób podobny, jak pole elektrostatyczne. a więc uważać natężenie pola, wzbudzonego przez chwilową elektryzację danej części drutu za proporcjonalne do chwilowej gęstości elektrycznej  $\sigma$  na danym odcinku. Okresowym więc zmianom potencjału towarzyszyć będą okresowe zmiany natężenia pola. Zmiany te będą miały największą amplitudę w strzałkach potencjału, w węzłach zaś — równą zero. Uwzględniając, że wektor  $\vec{E}$  natężenia pola, prostopadły do powierzchni



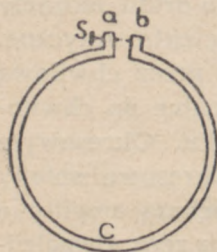
drutu, skierowany jest od powierzchni naelektryzowanej dodatnio i ku powierzchni naelektryzowanej ujemnie, stwierdzimy, że w przestrzeni między drutami pole wypadkowe jest zawsze równe sumie arytmetycznej pól każdego z drutów oddzielnie, w punktach zaś leżących poza tą przestrzenią ma natężenie na ogół małe; wobec czego można bez wielkiego błędu przyjąć, że pole wypadkowe istnieje jedynie w płaszczyźnie drutów. Strzałki i węzły pola będą leżały w strzałkach i węzłach potencjału.

W podobny sposób zmienia się i natężenie pola magnetycznego prądów, płynących w drutach. Wektor  $\vec{H}$  natężenia tego pola, leżący w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku prądu, a więc w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny drutów, będzie okresowo zmieniał swą wartość i kierunek. Pole wypadkowe prostopadłe do płaszczyzny drutów będzie zawsze sumą arytmetyczną natężeń pól, wzbudzonych przez prądy w drutach. Amplituda natężenia tego pola będzie miała w węzłach prądu wartość równą zero, w strzałkach zaś — wartość największą.



rys. 371

W przypadku więc, gdy  $n = 1$ , rozkład natężeń pól elektrycznego i magnetycznego w chwili, gdy potencjał punktu  $B$  osiąga wartość największą, odtwarzają krzywe  $ab$  i  $cd$ , leżące w dwu wzajemnie prostopadłych płaszczyznach.



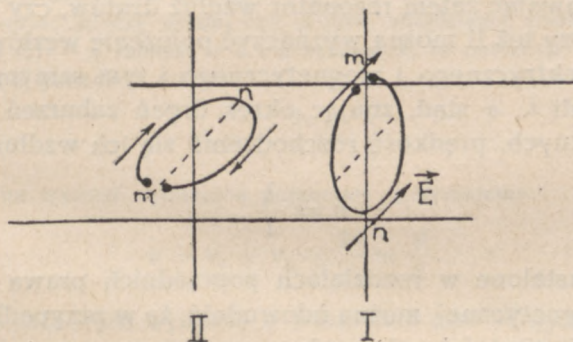
rys. 372

Położenie węzłów i strzałek można wyznaczyć przy pomocy tzw. rezonatorów. Rezonatorem Hertza jest gruby drut miedziany, zgięty w koło, którego końce swobodne, tworzące iskiernik, można zbliżać lub oddalać, wkręcając odpowiednio śrubę mikrometryczną  $S$  (rys. 372).



Rezonatorem może być również opisany w ust. 6 falomierz (rezonator Blondlota).

Umieścimy ten rezonator między drutami tak, aby zarówno jego płaszczyzna, jak i oś symetrii  $mn$  były prostopadłe do płaszczyzny przesuniętej przez druty (rys. 373, płaszczyzna drutów prostopadła do płaszczyzny rysunku położenie I). Strumień indukcji magnetycznej, objęty obwodem rezonatora, jest



rys. 373

stale równy zero, natężenie bowiem pola magnetycznego jest zawsze równoległe do płaszczyzny rezonatora. Na dolną i górną połowę rezonatora działa natężenie pola elektrycznego w tym samym kierunku, w górnej jednak części, przerywanej przez iskiernik, działanie to, według Hertza, jest słabsze, aniżeli w dolnej, wobec czego działanie wypadkowe powoduje powstanie na biegunach iskiernika różnicy potencjału, która może doprowadzić do iskry. Iskry zachodzić będzie mogły i wtedy, gdy rezonator obrócimy o  $180^\circ$  tak, że iskiernik znajdzie się na dole. Jeżeli jednak rezonator obrócimy o  $90^\circ$ , a więc jeżeli oś symetrii  $mn$  będzie leżała w płaszczyźnie drutów, iskry stanie się niemożliwe, gdyż działania natężenia pola elektrycznego będą się wzajemnie równoważyły.

Jeżeli teraz rezonator ustawimy tak, aby płaszczyzna jego była równoległa do płaszczyzny przesuniętej przez druty, oś zaś symetrii  $mn$  — do drutów prostopadła (rys. 373, położenie II), wtedy, gdy środek rezonatora będzie leżał w węźle pola



elektrycznego, natężenie tego pola, działając na dwie połowy rezonatora, rozdzielone linią symetrii  $mn$ , w kierunkach przeciwnych (por. rozdz. I ust. 6), wytworzy na biegunach iskiernika różnicę potencjału; w tym samym kierunku działać będzie jednocześnie siła elektrobodźcza, indukowana przez zmienny strumień indukcji magnetycznej, objęty obwodem rezonatora. W tym przeto położeniu i w tym punkcie drutu iskra będzie najsilniejsza.

Przesuwając zatem rezonator wzdłuż drutów, czy to w położeniu I czy też II można wyznaczyć położenie węzłów i strzałek pól elektrycznego i magnetycznego i tym samym znaleźć długość fali  $\lambda$ , a stąd, znając okres drgań zaburzeń elektromagnetycznych, prędkość rozchodzenia się ich wzdłuż drutów

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Stosując ustalone w rozdziałach poprzednich prawa indukcji elektromagnetycznej, można udowodnić, że w przypadku drgań o znacznej częstości, gdy wpływ oporu omowego przewodników jest w porównaniu z działaniem indukcji własnej znikomą, mały,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (14)$$

gdzie  $c$  oznacza stosunek jednostki elektromagnetycznej do jednostki elektrostatycznej natężenia prądu  $\epsilon$  i  $\mu$  — zdolności elektryczną i magnetyczną środowiska, w którym znajdują się druty.

Niech  $V$  będzie chwilową wartością potencjału,  $\frac{\partial V}{\partial x}$  — chwilowym spadkiem potencjału w danym punkcie  $P$  drutu. Związek między natężeniem prądu w drucie i siłą elektrobodźczą, powstałą na skutek zmieniania się wartości potencjału wzdłuż drutu, wyrazi się wzorem

$$ri = -\frac{\partial V}{\partial x} - L \frac{di}{dt}, \quad (a)$$

gdzie  $L \frac{di}{dt}$  wyraża siłę elektrobodźczą indukcji.

Zakładając, że zmiany potencjału punktu  $P$  zachodzą dostatecznie wolno, abyśmy mogli do chwilowych wartości naboju i potencjału



stosować wzory rozdz. III (por. wyżej), napiszemy, że zgodnie ze wzorem 22b tego rozdziału, potencjał w punkcie  $P$  drutu cylindrycznego o promieniu  $R$  będzie miał w przypadku, gdy na drut nie działają inne ciała naelektryzowane, wartość

$$V_1 = \frac{2e}{\epsilon} \ln \frac{k}{R}. \quad (b)$$

Potencjał w punkcie  $P$  zależy jednak i od naboju w przeciwległym punkcie  $P_1$  drugiego drutu. Nabój ten o znaku przeciwnym do znaku naboju punktu  $P$  jest zawsze równy temu naboju. Oznaczając przez  $d$  odległość między osiami obu drutów, znajdziemy, podstawiając do wzoru (b) —  $e$  zamiast  $+e$  i  $d$  zamiast  $R$ , że potencjał pola naboju  $P_1$  ma w punkcie  $P$  wartość

$$V_2 = -\frac{2e}{\epsilon} \ln \frac{k}{d},$$

skąd na wartość ostateczną potencjału otrzymujemy

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2e}{\epsilon} \ln \frac{d}{R}. \quad (c)$$

Potencjał ten jest wyrażony w jednostkach elektrostatycznych, chcąc więc wyrazić go w jednostkach elektromagnetycznych, musimy prawą stronę wzoru (c) pomnożyć przez  $c$  (p. rozdz. VII, ust. 2). Będziemy więc mieli

$$V_{elm} = \frac{2e \cdot c}{\epsilon} \ln \frac{d}{R} \quad (d)$$

i

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial e}{\partial x} \cdot \frac{2c}{\epsilon} \ln \frac{d}{R}. \quad (e)$$

Niech teraz  $i_1$  będzie natężeniem prądu wchodzącego do elementu objętości drutu  $dS \cdot dx$ , zawierającego punkt  $P$ ,  $i_2$  — natężeniem prądu wychodzącego. Uwzględniając, że  $e$  jest wartością naboju, odniesioną do jednostki długości przewodnika i że jednostka elektromagnetyczna naboju jest  $c$  razy większa od jednostki elektrostatycznej, znajdujemy, że

$$\frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} dt \cdot dx = (i_1 - i_2) dt, \quad (f)$$

gdzie  $e$  podobnie, jak we wzorze (d), jest wyrażone w jednostkach elektrostatycznych.

Skądinąd wiemy, że

$$i_2 = i_1 + \frac{\partial i}{\partial x} dx,$$



podstawiając do wzoru (f), znajdujemy

$$\frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} \cdot dt \cdot dx = - \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dt \cdot dx$$

lub

$$\frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial i}{\partial x}. \quad (g)$$

Biorąc pod uwagę wzór (e), wzór (a) przepiszemy w postaci następującej

$$ri = - \frac{\partial e}{\partial x} \cdot \frac{2c}{\epsilon} \ln \frac{d}{R} - L \frac{\partial i}{\partial t};$$

weźmy pochodną względem  $t$

$$r \frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial t} \cdot \frac{2c}{\epsilon} \ln \frac{d}{R} - L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (h)$$

oraz pochodną względem  $x$  równania (g)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 e}{\partial x \cdot \partial t} = - \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}.$$

Po podstawieniu do (h) będziemy mieli, zmieniając porządek wyrazów i dzieląc przez  $L$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \cdot L} 2 \ln \frac{d}{R} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{r}{L} \frac{di}{dt}. \quad (i)$$

Na wartość  $L$ , odniesioną do jednostki długości drutu, można, uwzględniając działanie prądu w jednym drucie na prąd w drugim, przyjmując z dostatecznym przybliżeniem

$$L = \mu \cdot 2 \ln \frac{d}{R}.$$

Ostatecznie więc

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{r}{\mu \cdot 2 \ln \frac{d}{R}} \cdot \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (15)$$

Gdybyśmy rozwiązali to równanie, którego wyprowadzenie podaliśmy za Wüllnerem, stwierdzilibyśmy, że dopóki spólczynnik

$$\frac{r}{\mu \cdot 2 \ln \frac{d}{R}}$$

posiada wartość dostatecznie wielką, aby nie można było jej pominąć, zaburzenia elektromagnetyczne nie rozchodzą się wzdłuż drutów z prędkością oznaczoną. Czoło zaburzenia będzie poruszało się najprędzej, wobec czego długość odcinka, będącego siedliskiem tego



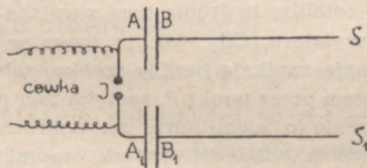
zaburzenia, będzie się stopniowo zwiększała. Jeżeli więc w pewnej chwili spowodujemy w punktach  $B$  i  $B_1$  nagłą zmianę potencjału, w punktach  $P$  i  $P_1$  zmiana ta będzie o wiele wolniejsza, przy czym zmniejszanie się nagłości zmian potencjału będzie tym wyraźniejsze, im w większej odległości od  $B$  i  $B_1$  będą leżały punkty  $P$  i  $P_1$ . Podobnie będzie z natężeniem prądu; nagłość i amplituda zmian natężenia będą w miarę oddalania się od punktów, w których zaburzenie zostało wywołane, stopniowo malały. Tym się tłumaczy nazwa dyfuzji prądu, jaką dajemy temu zjawisku; wtedy nie może być, oczywiście, mowy o oznaczonej, niezależnej od rodzaju drutu i od częstości zmian, prędkości rozchodzenia się zaburzeń; z pomiaru otrzymuje się jedynie przeciętną prędkość, która, jak to wykazały pomiary Fizeau (1850 r.), wykonane przy użyciu metody, analogicznej do metody, użytej przez tego fizyka do pomiaru prędkości światła (patrz tom III), może w różnych przewodnikach być różna (w żelazie 100 000 km/sek, w miedzi — 180 000 km/sek).

Jeżeli jednak mamy do czynienia z przewodnikiem doskonałym dla którego  $r = 0$ , lub co bardziej odpowiada istotnym warunkom doświadczenia, jeżeli częstość zaburzeń jest dostatecznie wielka, aby wskutek zjawiska naskórnego zaburzenia elektromagnetyczne zachodziły jedynie na powierzchni drutów, równanie (15) możemy zastąpić równaniem

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \quad (16)$$

które możemy rozwiązać w ten sam sposób, jak analogiczne równanie (3) rozdz. I. W tym przypadku, jak to pierwszy stwierdził Kirchhoff, zaburzenie rozchodzi się z prędkością stałą, wyrażoną wzorem (14)

Do wywołania zmiennych zaburzeń na końcach drutów  $B$  i  $B_1$  Lecher, który, jak to wyżej było wspomniane, pierwszy wykonał tego rodzaju pomiary, posługiwał się oscylatorem



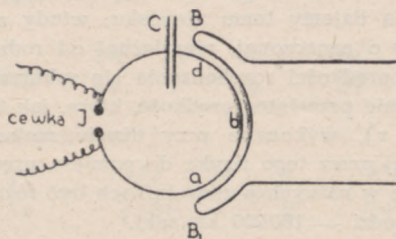
rys. 374

Hertza; w oscylatorze tym końcowe kule na drutach są zastąpione przez kwadratowe płytki  $A$  i  $A_1$  (rys. 374). Oscylator ten jest sprzężony elektrostatycznie z równoległymi do płytek  $A$  i  $A_1$  płytkami  $B$  i  $B_1$ , do których są dolutowane druty  $BS$



i  $B_1S_1$ . Okresowe zmiany potencjału płytek  $A$  i  $A_1$  powodują przez indukcję elektrostatyczną również okresowe zmiany potencjałów płytek  $B$  i  $B_1$ .

Nieco odmienny jest układ, wprowadzony (1891 r.) przez Blondłota: obwodem wzbudzającym jest tu drut, zgięty w koło, którego końce swobodne tworzą iskiernik  $I$ . W obwód włą-



rys. 375

czony jest kondensator  $C$ , który niekiedy sprowadza się po prostu do przerwy w drucie  $abdJ$ , tak że zbrojami kondensatora są końce tego drutu (rys. 375). Zaburzenia są indukowane w drutach  $B$  i  $B_1$ , połączonych ze sobą drutem  $BB_1$ .

Używając tego typu oscylatorów spotykamy się ze zjawiskiem odkrytym przez Sarasina i de la Rive'a i nazwanym niezbyt szczęśliwie rezonansem wielokrotnym. Sarasin i de la Rive stwierdzili, że używając stale tego samego oscylatora, a więc drgań o tej samej częstotliwości, zmieniając zaś rezonatory, otrzymuje się w wyniku pomiarów różne długości fal na drutach, odpowiadające, jak to stwierdzili w pomiarach późniejszych, drganiom własnym użytego do pomiarów rezonatora. Dalsze badania (przede wszystkim Bjerknessa i H. Poincarégo) ustaliły, że źródła tego zjawiska należy szukać w tłumieniu drgań oscylatora. Gdy, jak to bywa w oscylatorach Herta i Blondłota, drgania zanikają bardzo szybko, zaburzenie odbite, przechodząc z powrotem przez punkt  $P$ , spotyka tam później wysłane przez oscylator zaburzenie o amplitudzie na ogół znacznie mniejszej od amplitudy zaburzenia odbitego; w tych warunkach fala stojąca powstać nie może. Zjawisko wtedy zachodzi tak, jak gdyby oscylator wysyłał pojedyncze zaburzenie; zaburzenie takie pobudza rezonator do drgania dwa razy: raz idąc od oscylatora do końca drutu, drugi raz — w drodze powrotnej. Jeżeli punkty  $P$  i  $P_1$  są umieszczone w takiej odległości od końca drutów  $S$  i  $S_1$ , że wracające zaburzenie wzmacnia wzbudzone poprzednio drganie rezonatora, a więc innymi słowy, gdy droga  $PS + SP$  przebyta jest przez zaburzenie w ciągu



Jednego okresu (lub wielokrotności okresów) drgań rezonatora, a przede równa jest długości fali rezonatora lub jej wielokrotności, w danym miejscu stwierdzimy istnienie strzałki zaburzeń. Gdy punkt  $P$  przeniesiemy w jedną lub drugą stronę o ćwierć długości fali rezonatora, droga zaburzenia zmieni się o pół długości fali; zaburzenie wracające osłabi drganie rezonatora: otrzymamy węzeł zaburzenia.

Ostatnio do wzbudzania drgań w drutach używane są obwody o drganiach niegasnących (Mercier, 1923 r.), których okres drgania można wyznaczyć z bardzo wielką dokładnością. Obwód taki jest luźno sprzężony z układem dwu drutów, który doprowadzamy do rezonansu przy pomocy tzw. mostu. Jest to drut łączący dwa przeciwległe punkty drutów (np.  $P$  i  $P_1$ ), w których tym samym powstaje węzeł potencjału (węzeł pola elektrycznego) i oczywiście, strzałka prądu (pola magnetycznego). Przesuwając ten most wzdłuż drutów zmieniamy okres własny drgań obwodu drutów, dostrajając go do okresu drgań obwodu wzbudzającego. Sposób ten jest analogiczny do tego, jakim posługujemy się w metodzie Kundta, przy dostrajaniu drgań słupa powietrza w rurze do częstości drgań pocieranego pręta (p. rozdz. II, ust. 7).

Według Lechera,  $v$  równe jest  $3,291 \cdot 10^{10}$  cm/sek, gdy druty znajdują się w powietrzu; jest to niewątpliwie liczba zbyt wielka, jak tego dowodzą wyniki pomiarów późniejszych (Blondlot,  $v = 2,976 \cdot 10^{10}$ ; a zwłaszcza Mercier,  $v = 299\,360$  km/sek.). Zestawiając wyniki, otrzymane przez różnych badaczy i biorąc pod uwagę stopień dokładności ich pomiarów, za najprawdopodobniejszą wartość w ten sposób wyznaczonej prędkości musimy przyjąć wartość otrzymaną przez Merciera przy umieszczeniu drutów w próżni

$$v = 2,9979 \cdot 10^{10} \text{ cm/sek} \quad (17)$$

więc prawie dokładnie równą tej wartości  $c$ , którą obecnie przyjmujemy za najprawdopodobniejszą (p. ust. 9). Możemy zatem napisać

$$v = c. \quad (17a)$$

Gdy, jak to najczęściej bywa w zastosowaniach technicznych, okres zmian prądu wynosi  $\frac{1}{50}$  sek, długość fali

$$\lambda = cT$$



jest równa 6000 km. Jeżeli więc używamy drutów o długości małej w porównaniu z tą długością fali, możemy przyjąć tak, jakśmy to przyjmowali poprzednio, że natężenie prądu, o takiej częstotliwości zmian ma we wszystkich punktach obwodu wartość tę samą.

Inaczej jednak będzie, gdy obwód ma długość tego samego rzędu, co długość fali, wtedy należy uwzględnić dyfuzję prądu (p. wyżej). Wpływ dyfuzji jest szczególnie wielki w liniach telefonicznych, gdzie okres zmian prądu jest stosunkowo mały oraz w liniach telegraficznych przy wysyłaniu krótkotrwałych zaburzeń, stanowiących sygnały elektromagnetyczne.

#### 8. — ZAŁOŻENIE MAXWELLA. — FALE ELEKTROMAGNETYCZNE.

Z doświadczeń opisanych w ustępie poprzednim wynika, że w rozchodzeniu się zaburzeń elektromagnetycznych wzdłuż drutów same druty odgrywają rolę podrzędną, polegającą na odgraniczeniu tej części przestrzeni, w której zaburzenia zachodzą z największym natężeniem, — części leżącej między drutami, — od części poza drutami, w której natężenia pól elektrycznego i magnetycznego są o wiele mniejsze, a nawet, gdy druty znajdują się w niewielkiej odległości, prawie dokładnie równe zero. Można by twierdzić, sięgając po analogię do akustyki, że mamy tu do czynienia z czymś podobnym do rozchodzenia się drgań sprężystych w powietrzu wypełniającym rurę o sztywnych ścianach; druty tak, jak ściany rury, wyznaczają jedynie kierunek rozchodzenia się zaburzeń.

Takie objaśnienie zjawiska byłoby zgodne z założeniami teorii Faraday'a — Maxwella (p. rozdz. III, ust. 5), według której siedliskiem zjawisk elektrycznych jest środowisko, w którym znajdują się naelektryzowane przewodniki, powierzchnie zaś przewodników są granicami pola elektrycznego; w danym jednak przypadku zjawisko jest o wiele bardziej złożone od zjawisk, do których objaśnienia stosowaliśmy poprzednio te założenia (rozdz. III, ust. 5). Mamy tu bowiem do czynienia nie z jednym tylko polem, lecz dwoma: elektrycznym i magnetycznym, ściśle ze sobą związanymi, jak to stwierdzają omówione wyżej doświadczenia. Dla wyjaśnienia zaś możliwości i istoty tego związku, który, w przypadku obwodów zamkniętych założenia Ampere'a, całkowicie, jakśmy to wyżej stwierdzili, wyjaśniają, założenia Faraday'a — Maxwella w tej posta-



ci, jakąśmy się dotychczas posługiwali, są niewystarczające. Wymagają one uzupełnienia, które, podobnie, jak matematyczne opracowanie i pogłębienie poglądów Faraday'a, dał (1869 r.) Maxwell na wiele lat przed wykonaniem opisanych w ustępie poprzednim doświadczeń.

Rozpatrzmy jeszcze raz zjawisko rozbrajania się kondensatora płaskiego poprzez drut, łączący jego zbroje. Podczas rozbrajania drut ten jest siedliskiem prądu, płynącego ze zbroi naelektryzowanej dodatnio do zbroi o naboju ujemnym; pierwszą z tych zbroi możemy uważać za miejsce wypływu prądu, drugą — za miejsce odpływu; obwód jest w tym przypadku obwodem otwartym. Z chwilą jednak, gdy prąd zaczyna przez drut przepływać, rozpoczyna się zmniejszanie się naboju na zbroi dodatniej, tak że każdej chwili mamy

$$i = - \frac{de}{dt} \quad \text{lub} \quad i + \frac{de}{dt} = 0.$$

To zmniejszanie się naboju dodatniego (i towarzyszące mu zmniejszanie się wartości bezwzględnej naboju ujemnego na drugiej zbroi kondensatora) powoduje z kolei zmniejszanie się natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  i wektora indukcji elektrycznej  $\vec{D}$  między zbrojami kondensatora.

Chwilową wartość tego wektora otrzymujemy ze znanego wzoru

$$D = \frac{\Phi}{S} = \frac{4\pi e}{S}$$

gdzie  $\Phi$  oznacza strumień indukcji, przechodzący przez dowolny przekrój kondensatora, równoległy do jego zbroi. Mamy zatem

$$\frac{de}{dt} = \frac{S}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Zgodnie z obrazem, przy którego pomocy próbowaliśmy wyjaśnić założenia Faraday'a - Maxwella (p. rozdz. III, ust. 4), zmianie wektora indukcji odpowiada między zbrojami zjawisko analogiczne do ruchu naboju w przewodniku podczas przepływu prądu. Rozwijając tę analogię przyjmujemy, że przez



kondensator przepływa prąd o gęstości (wyrażonej w jednostkach elektromagnetycznych)

$$j = \frac{1}{S} \frac{de}{dt}. \quad (17)$$

Maxwell zakłada, że ten prąd przesunięcia, istniejący tylko podczas zmian pola elektrycznego, wytwarza w otaczającej go przestrzeni pole magnetyczne zupełnie w ten sam sposób, jak prąd płynący w przewodniku, że więc do prądu przesunięcia możemy stosować wszystkie prawa, dotyczące działań magnetycznych i indukcyjnych, wywieranych przez prądy.

W świetle tych założeń rozpatrywany przez nas obwód nie jest, jak to przyjmowaliśmy, obwodem otwartym, lecz zamkniętym.

Podstawmy w pierwszym z równań (6) rozdz. VIII zamiast

$$kE = j,$$

gdzie  $j$  jest gęstością prądu przewodzenia, gęstość prądu przesunięcia

$$j = \frac{1}{S} \frac{de}{dt} = \frac{1}{S} \cdot \frac{S}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (\epsilon E)}{\partial t}.$$

Dla jednorodnych i równokierunkowych środowisk nieprzewodzących  $\epsilon$  i  $\mu$  mają wartość stałą i we wszystkich punktach jednakową) otrzymamy wtedy układ równań

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H}; \quad \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} \quad (18)$$

$\vec{E}$  i  $\vec{H}$  są tym razem funkcją nie tylko czasu, lecz również i położenia w przestrzeni)

Gdy częstość zmian zaburzeń, rozchodzących się wzdłuż drutów, jest dostatecznie wysoka, prędkość ich rozchodzenia się jest, jak wiemy, niezależna od rodzaju drutów i całkowicie wyznaczona przez własności środowiska, w którym zanurzone są dane druty. W tym przypadku zatem można zupełnie nie uwzględniać prądów przewodzenia i przypisać powstawanie zmiennych pól magnetycznych zmiennym prądom przesunięcia. Prądy te, powstające na skutek zmian potencjałów na końcach drutów, wytwarzają pole magnetyczne w bezpośrednio



otaczającej je przestrzeni, zmiany pola magnetycznego powodują z kolei powstawanie prądów przesunięcia w dalej od źródła zaburzeń położonych częściach przestrzeni, te zaś prądy znów wzbudzają dookoła siebie pole magnetyczne i tak dalej. W ten sposób w przestrzeni, otaczającej pierwotne miejsce zaburzenia, rozchodzą się stopniowo zaburzenia elektromagnetyczne ze skończoną prędkością

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (18a)$$

zależną wyłącznie od elektrycznych i magnetycznych własności środowiska. Zjawisko zatem zachodzi podobnie, jak w przypadku odkształceń sprężystych, gdzie wychylenie z położenia równowagi danej warstwy środowiska powoduje zmianę ciśnienia, co znów z kolei wytrąca z położenia równowagi cząstki warstw dalszych.

Moglibyśmy, rzecz prosta, równie dobrze za źródło drgań elektromagnetycznych uważać nie prądy przesunięcia, lecz zmiany pola magnetycznego (por. oscylator Blondlota), które powodują powstanie indukowanych prądów przesunięcia, tak, jak za źródło zaburzeń sprężystych możemy uważać nie wychylenia z położenia równowagi, lecz zmiany ciśnienia w danym elemencie objętości środowiska.

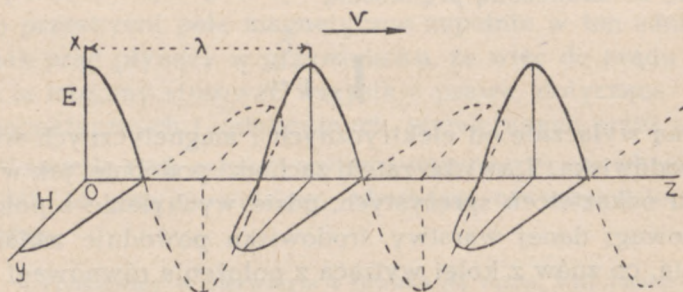
W ten sposób powstaje fala zaburzeń elektromagnetycznych, której czołem jest zależnie od sposobu jej wzbudzenia, albo płaszczyzna, albo powierzchnia kul lub walca albo wreszcie jakakolwiek powierzchnia. We wszystkich jednak przypadkach wzajemnie prostopadłe kierunki drgań elektrycznych i magnetycznych są prostopadłe również do kierunku rozchodzenia się zaburzeń. Fale elektromagnetyczne są falami poprzecznymi.

Gdy drgania elektromagnetyczne są drganiami sinusoidalnymi, rozkład natężeń pola elektrycznego i pola magnetycznego w chwili  $t$  odtworzą krzywe rys. 376.

Z tych założeń, które, jak widzimy, całkowicie wyjaśniają rozchodzenie się zaburzeń elektromagnetycznych wzdłuż drutów, wynika, że druty warunkują jedynie, jak już o tym wyżej mówiliśmy, granice fali i że zaburzenia elektromagnetyczne rozchodziłyby się w podobny sposób po usunięciu drutów,

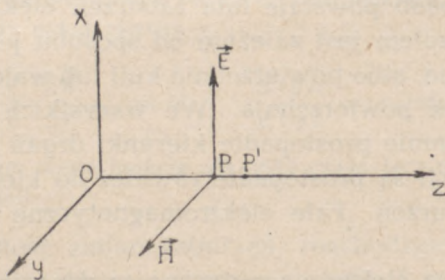


z prędkością skończoną, zależną od rodzaju środowiska. A zatem zaburzenie elektromagnetyczne, wytworzone w pewnym punkcie przestrzeni, nie ujawniłoby swych działań na ciała sąsiednie natychmiastowo, lecz dopiero, po upływie pewnego czasu, potrzebnego do przebycia odległości między miejscem zaburzenia a ciałem, podlegającym działaniu tego zaburzenia.



rys. 376

Rozpatrzmy rozchodzenie się w kierunku osi  $Oz$  płaskiej fali elektromagnetycznej w środowisku jednorodnym i równokierunkowym; czoło fali będzie wtedy równoległe do płaszczyzny  $xOy$  (rys. 377). Przyjmijmy, że drgania natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$



rys. 377

zachodzą wzdłuż prostych równoległych do osi  $Ox$ , drgania zaś wektora magnetycznego  $\vec{H}$  wzdłuż prostych równoległych do osi  $Oy$ . Faza każdego z tych drgań w punkcie  $P$  będzie w chwili  $t$  zależna jedynie od fazy (w danej chwili) w punkcie  $O$  i od odległości  $z$  punktu  $P$  od płaszczyzny  $xOy$ .



Natężenie pola magnetycznego  $\vec{H}$  w punkcie  $P$  osi  $Oz$  jest związane ze zmianami pola elektrycznego w tym punkcie pierwszym z równań (18). Uwzględniając, że, zgodnie z przyjętymi przez nas założeniami  $H_x, H_z, E_y$  i  $E_z$  są równe zeru oraz, że wektory te są funkcjami jedynie  $t$  i  $z$  otrzymujemy

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (a)$$

(por. rozdz. VII, ust. 2, wzór 8a).

Zmiany zaś pola magnetycznego związane są z natężeniem pola elektrycznego w danym punkcie pola drugim z równań (18).

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = - \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (b)$$

Wartości wektorów  $\vec{E}$  i  $\vec{H}$ , zmieniając się z czasem, zmieniają się również i ze zmianą położenia danego punktu na osi  $Oz$ . Związek między tymi zmianami otrzymamy rugując  $\vec{H}$  (dla wyznaczenia zmian  $\vec{E}$ ) lub  $\vec{E}$  (dla wyznaczenia zmian  $\vec{H}$ ) z równań (a) i (b). Biorąc pochodną pierwszego równania względem  $t$ , drugiego względem  $z$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= - \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial t} \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial z} &= - \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (c)$$

skąd

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{c}{\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

i ostatecznie

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad (19)$$

(a więc równanie, analogiczne do równania (3) rozdz. I, str. 13) Stosując to samo rozumowanie, jakim posługiwaliśmy się podówczas, stwierdzimy, że zaburzenia elektryczne rozchodzą się w dielektryku z prędkością

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

w próżni zaś ( $\epsilon = 1, \mu = 1$ ) z prędkością

$$v = c \text{ cm/sek.}$$



Z tą samą prędkością rozchodzą się zaburzenia magnetyczne. Istotnie biorąc pochodną równania (a) względem  $z$ , równania (b) względem  $t$ , otrzymamy

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial z} = - \frac{\partial^2 H}{\partial z^2},$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial z},$$

skąd

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}. \quad (19a)$$

Gdy zaburzenie zmienia się sinusoidalnie i rozchodzi się w postaci fali płaskiej, wartość zaburzenia w punkcie odległym od źródła zaburzeń o  $z$  wynosi

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{v} \right) = E_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right),$$

$$H = H_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right).$$

Natężenie pola elektrycznego ma tą samą fazę, co natężenie pola magnetycznego. Podstawiając wartości  $E$  i  $H$  do równania (a), otrzymujemy

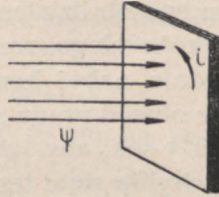
$$\frac{\varepsilon}{c} E_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{vT} \right) = \frac{1}{v} H_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{vT} \right),$$

$$H_0 = \frac{v \cdot \varepsilon}{c} E_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon \mu}} E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0. \quad (19b)$$

Tego rodzaju ciągi drgań, spotykając się w jednym punkcie przestrzeni, spowodują powstanie zjawisk interferencji, analogicznych do tych, jakie rozpatrywaliśmy w rozdz. I. Zjawiska te w przypadku szczególnym, gdy interferujące ciągi fal o tych samych amplitudach będą biegły we wzajemnie przeciwnych kierunkach, ujawnią się w postaci fal stojących. Istnienie takich fal, a tym samym słuszność podstawowego założenia Maxwella, stwierdził Hertz w słynnym doświadczeniu, wykonanym w 1888 r. Zaburzenia, wysyłane przez oscylator odbijały się od płyty metalowej, będącej dla drgań elektromagnetycznych zwierciadłem, w znaczeniu takim, jakie określiliśmy w rozdz. I, ust. 12. Płyta bowiem dla drgań tych jest całkowicie nieprzezroczysta.



Istotnie, niech w pewnej chwili trafia daną płytę (rys. 378) strumień indukcji magnetycznej  $\Psi$ . Strumień ten wzbudzi w płycie prądy indukowane, wysyłające ze swej strony strumień indukcji o kierunku przeciwnym do kierunku strumienia  $\Psi$ . Gdy  $\Psi$  zachowuje wartość stałą, energia prądów indukowanych przechodzi w ciepło Joule'a, i prądy te stopniowo przestają płynąć, wobec czego strumień  $\Psi$  przechodzi nieosłabiony przez płytę. Gdy jednak zmiany wartości  $\Psi$  są częste, prądy indukowane zmniejszają wartość strumienia indukcji, wchodzącego do płyty. W doświadczeniu Hertza częstość zmian była dostatecznie wielka, aby indukowane w płycie siły elektrobodźcze



rys. 378

miały wartość znaczną, co w połączeniu z niewielkim oporem omowym płyty i wynikającym stąd bardzo wielkim natężeniem prądu indukowanego powodowało prawie całkowite pochłonięcie strumienia  $\Psi$  na powierzchni płyty. Prąd powstający w płycie wysyłał wtedy strumień indukcji  $\Psi'$  w kierunku przeciwnym. Przebieg zatem zjawiska jest taki, jak gdyby strumień  $\Psi$  odbijał się przynajmniej częściowo od powierzchni płyty. Im lepszym przewodnikiem jest materiał danej płyty, tym odbicie jest zupełniejsze. Przewodnik doskonały ( $r = 0$ ) byłby również doskonałym zwierciadłem.

Drgania odbite interferowały z drganiami padającymi, tworząc między oscylatorem i zwierciadłem falę stojącą, której węzły i strzałki Hertz wyznaczał przy pomocy rezonatora (p. ust. 7). Okazało się, że w pobliżu zwierciadła znajdował się zawsze węzeł pola elektrycznego i strzałka pola magnetycznego; węzły więc pola elektrycznego są i tym razem przesunięte o ćwierć długości fali względem węzłów pola magnetycznego, podobnie, jak węzły nadwyżki ciśnienia względem węzłów przesunięcia z położenia równowagi w fali sprężystej (p. rozdz. I, str. 52).

Te wyniki zostały następnie potwierdzone przez Sarasina i de la Rive'a, którzy zwiększając powierzchnię zwierciadła, osiągnęli większą, niż Hertz dokładność pomiarów.



9. — BEZPOŚREDNIE WYZNACZENIE WARTOŚCI  $c$ .

Wartość  $c$ , stosunku jednostki elektromagnetycznej do jednostki elektrostatycznej naboju, można wyznaczyć bezpośrednio, mierząc dany nabój kolejno w jednostkach elektrostatycznych i elektromagnetycznych i porównując otrzymane na tej drodze liczby. Tego rodzaju pomiar wykonali (1859 r.) W. Weber i R. Kohlrausch. Metoda pomiaru była następująca. Kondensator, którego zbroja zewnętrzna była połączona z ziemią, rozbrajano poprzez galwanometr i wyznaczano kąt wychylenia igły, mierząc w ten sposób działanie magnetyczne, jakie przez czas trwania krótkotrwałego rozbrojenia wywiera na igłę wyznaczony poprzednio nabój kondensatora. Następnie włączano galwanometr w obwód prądu stałego, który zamykano na taki przeciąg czasu  $\tau$  sek, aby igła pod działaniem pola magnetycznego prądu odchyliła się o ten sam kąt, co poprzednio. Przyjmując, że w obu przypadkach przez galwanometr przepłynęła ta sama ilość elektryczności, ze stosunku zmierzonych wielkości

$$i \cdot \tau = e_{elm}$$

oraz  $e_{els}$  otrzymuje się wartość  $c$  równą

$$c = \frac{e_{els}}{e_{elm}}.$$

Wyznaczenie wartości naboju kondensatora wymagało w metodzie Webera i Kohlrauscha dwu pomiarów potencjału (a raczej napięcia względem ziemi) jego zbroi wewnętrznej. Pierwszy pomiar był wykonywany bezpośrednio po naelektryzowaniu kondensatora i uziemieniu jego zbroi zewnętrznej; oznaczmy ten potencjał przez  $V_0$ . Następnie łączono zbroję wewnętrzną kondensatora z dużą odosobnioną elektrycznie kulą; nabój zbroi przechodził częściowo na kulę, po czym połączenie przerywano i mierzono po raz drugi potencjał zbroi wewnętrznej  $V_1$ . Niech  $\frac{1}{n}$  oznacza ten ułamek naboju początkowego, który przeszedł ze zbroi na kulę. Mamy wtedy

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1},$$

skąd

$$n = \frac{V_0}{V_0 - V_1} \quad \text{i} \quad \frac{1}{n} = \frac{V_0 - V_1}{V_0}.$$



Jeżeli więc wyznaczmy w jakikolwiek sposób nabój kuli (Weber i Kohlrausch używali do tego celu wagi skręceń), tym samym, znając  $\frac{1}{n}$ , wyznaczmy i nabój, pozostały na kondensatorze.

Czas  $\tau$  można obliczyć, opierając się na następujących prostych rozważaniach. Użyjmy do pomiarów galwanometru, składającego się z drutu, zwiniętego w koło o promieniu  $R$  i ustawionego w ten sposób, że płaszczyzna koła jest płaszczyzną południka magnetycznego, oraz z igły o momencie magnetycznym  $M$ , umieszczonej równolegle do tej samej płaszczyzny w odległości  $x$  od środka koła. Gdy prąd płynący przez drut ma natężenie równe jednostce elektromagnetycznej natężenia prądu, obwód z prądem równoważny jest magnesowi o osi prostopadłej do płaszczyzny południka i o momencie magnetycznym

$$M' = \mu \cdot i \cdot S = \mu \cdot 1 \cdot \pi R^2$$

(por. wzór I, rozdz. VII, str. 458) lub kładąc  $\mu = \mu_0 = 1$ ,

$$M' = \pi R^2.$$

Natężenie pola magnetycznego prądu w miejscu, zajmowanym przez igłę wynosi

$$H = \frac{M'}{x^3} = \frac{\pi R^2}{x^3}$$

(tzw. drugie położenie Gaussa, p. rozdz. IV, wz. 14). Moment więc pary sił, działającej na igłę,

$$C = \frac{\pi R^2}{x^3} \cdot M.$$

Moment ten udziela igle przyspieszenie

$$\gamma = \frac{C}{B} = \frac{\pi R^2}{x^3} \cdot \frac{M}{B},$$

gdzie  $B$  — moment bezwładności igły (p. tom I, str. 126, wz. 6). Moment  $C$  działa przez czas ; prędkość kątowa nabyta w ciągu tego czasu przez igłę jest równa

$$\omega = \frac{\pi R^2}{x^3} \cdot \frac{M}{B} \cdot \tau.$$

Jeżeli więc okres wahań igły wynosi  $T$  sek, igła odchyli się o kąt

$$\alpha = \omega \cdot T = \frac{\pi R^2}{x^3} \cdot \frac{M}{B} \cdot \tau \cdot T.$$

Stąd nabój ( w jednostkach elektromagnetycznych), który spowodował to wychylenie

$$e_{elm} = i \cdot \tau = 1 \cdot \tau = \frac{\alpha \cdot x^3 \cdot B}{\pi R^2 \cdot M \cdot T}.$$



Wszystkie wielkości z prawej strony wzoru możemy wyznaczyć bezpośrednio, tym samym możemy obliczyć  $e_{elm}$  i znaleźć  $c$ .

Ta prosta metoda jest jednak niezbyt dokładna, jak tego dowodzi otrzymana przez Webera i Kohlrauscha wartość

$$c = 3,1114 \cdot 10^{10} \text{ cm/sek,}$$

niewątpliwie zbyt wielka.

O wiele dokładniejsze wyniki daje metoda, użyta po raz pierwszy przez Maxwella (1868 r.) i wkrótce potem przez W. Thomsona (1869 r.). Metoda ta polega na porównywaniu wartości tego samego potencjału w jednostkach elektrostatycznych i elektromagnetycznych. Będziemy wtedy mieli

$$C = \frac{V_{elm}}{V_{els}}.$$

Drut o oporze  $r$ , wyznaczonym w jednostkach elektromagnetycznych przez porównanie z oporem wzorcowym, jest siedliskiem prądu o natężeniu  $i$ . Mierzmy elektrometrem różnicę potencjału na końcach tego drutu, wyznaczając w ten sposób  $V_{els}$ , elektrodynamometrem zaś (p. rozdz. VII, ust. 5) — natężenie prądu w jednostkach elektromagnetycznych. Z porównania wartości

$$V_{elm} = i_{elm} \cdot r_{elm}$$

i wartości  $V_{els}$  otrzymuje się  $c$ .

Metoda Maxwella i Thomsona wielokrotnie później stosowana (między innymi przez Harmuzescu, 1895 r., który wprowadził pewne uproszczenia do techniki pomiarów) w późniejszych czasach ustępuje miejsca innej metodzie, opracowanej przez Ayrtona i Perry'ego (1879 r.) i polegającej na wyznaczeniu pojemności kondensatora w jednostkach elektrostatycznych i elektromagnetycznych. Wyrażając we wzorze

$$e = C \cdot V,$$

dane wielkości kolejno w jednostkach elektrostatycznych i elektromagnetycznych znajdujemy ze wzoru

$$\frac{e_{els}}{e_{elm}} = \frac{C_{els}}{C_{elm}} \cdot \frac{V_{els}}{V_{elm}},$$



że

$$C^2 = \frac{C_{els}}{C_{elm}}. \quad (20)$$

Do tego pomiaru używa się takich kondensatorów, których pojemność w jednostkach elektrostatycznych można bez trudu obliczyć, a więc kondensatorów kulistych, cylindrycznych lub płaskich. Zbroje takich kondensatorów łączy się następnie z dwoma punktami drutu, przez który przepływa prąd  $i_{elm}$ . Jeżeli opór drutu między tymi punktami równy jest  $r_{elm}$ , różnica potencjałów tych punktów, a więc również napięcie na zbrojach kondensatora wynosi

$$V_{elm} = i_{elm} \cdot r_{elm},$$

stąd nabój na każdej z tych zbroi

$$e_{elm} = C_{elm} \cdot V_{elm}.$$

Nabój ten można wyznaczyć przy pomocy odpowiednio wychowanego galwanometru balistycznego lub też elektryzując i rozbrajając kondensator przez galwanometr  $n$  razy na sekundę. (Klemenčič, 1884 r.). Gdy  $n$  jest dostatecznie wielkie, odchylenie galwanometru (o znacznym okresie wahań, p. ust. 2) jest stałe. Mamy wtedy

$$i'_{elm} = n \cdot e_{elm} = n \cdot C_{elm} \cdot i_{elm} \cdot r_{elm},$$

skąd

$$C^2 = \frac{C_{els}}{C_{elm}} = \frac{\varepsilon \cdot S}{4\pi d} \cdot \frac{n \cdot i_{elm} \cdot r_{elm}}{i'_{elm}}.$$

W pomiarach tych środowiskiem między zbrojami kondensatora jest zazwyczaj powietrze, wobec czego  $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1$ .

Tytułem przykładu przytaczamy za Ladenburgiem wartości  $c$  otrzymane przy użyciu wyżej opisanych metod

Maxwell (1868 r.)	$2,842 \cdot 10^{10}$ cm/sek
W. Thomson (1869 r.)	2,825
M'Kichan i King (1874 r.)	2,892
Ayrton i Perry (1879 r.)	2,960



Shida (1880 r.)	2,995 · 10 <sup>10</sup> cm/sek
Stoletow (1881 r.)	2,999
Exner (1882 r.)	2,870
Klemenčič (1884 r.)	2,999
Colley (1886 r.)	3,015
Himstedt (1888 r.)	3,0057
Rosa (1889 r.)	2,999
J. J. Thomson (1890 r.)	2,996
Pellat (1891 r.)	3,0092
H. Abraham (1892 r.)	2,992
Harmuzescu (1895 r.)	3,001
Perot i Fabry (1898 r.)	2,9978
Rosa i Dorsey (1907 r.)	2,9979

Z tych pomiarów najdokładniejsze są, jak się zdaje, pomiary Perota i Fabry'ego oraz Rosy i Dorsey'a. Wobec czego można przyjąć, że

$$c = 2,9979 \cdot 10^{10} \text{ cm/sek,}$$

i tym samym stwierdzić tożsamość tej wielkości z prędkością rozchodzenia się zaburzeń elektromagnetycznych w próżni.

KONIEC TOMU DRUGIEGO



## SKOROWIDZ

- Agona (izogona o zboczeniu 0) 357  
Amper 364  
Ampera definicja o bezwzględny praktycznym układzie jednostek 447  
Amper bezwzględny 474; a. międzynarodowy i bezwzględny 582  
Ampermetr 512; a—a czułość 513; a. cieplny 593; a. elektromagnetyczny 594  
Amperozwój na centymetr 480  
Amplituda drgania 4; pomiar amplitudy drgającego elementu odkształconego środowiska 33  
Anion 423  
Anoda 417  
Antena radiowa 638  
Astatyzowanie ruchomych magnesów 505; a. wewnętrzne; a. zewnętrzne 507  
Asynchroniczny motor 610
- Balistyczny galwanometr 533  
Barwa dźwięku 56  
Baterie: b. kondensatorów 236—239  
Bezwzględna ruchliwość jonów 426—435  
Biegunowe powierzchnie 285—288  
Bieguny magnesu 286—293; b-y magnetyczne ziemi 357; b-y równoważne magnesu 309  
Bocznik p. upust  
Busola, Kompas 353; b. stycznych 503; b-i stycznych stała przyrządu 503; wstaw 503  
Butelka lejdejska 234; b. Lane'a 256—257
- c — pomiar stosunku jednostki elektromagnetycznej do jednostki elektrostatycznej naboju 656 i nast.; — tożsamość wielkości c z prędkością rozchodzenia się zaburzeń elektromagnetycznych w próżni 660  
Cewka — zależność między kierunkiem prądu w cewce i położeniem dodatniego bieguna magnetycznego 478; natężenie pola magnetycznego cewki 479; praca wykonana przez swobodną masę magnetyczną pod działaniem sił pola cewki 480—481; c-i wzorcowe 551; c. Ruhmkorff'a 559 i nast.



- Ciała magnetycznie lepkie 340—341  
 Cień geometryczny 73—75  
 Ciepły ampermetr 593  
 Ciepło Joule'a 372  
 Ciepło właściwe elektryczności (spółczynnik zjawiska Thomson'a) 397  
 Ciepło Peltier'a 413; c. P-a związek ze zdolnością termoelektryczną, równania W. Thomsona 416  
 Ciepło wywiązane w ogniwie otwartym 450; c. chemiczne ogniwa 451; c. voltaiczne ogniwa 451; c. wtórne ogniwa 451  
 Ciśnienie elektrostatyczne 213; c. boczne w strugach indukcji 219  
 Curl  $\vec{H}$  (por. wir  $\vec{H}$ )  
 Częstość kołowa 55  
 Czułość galwanometru 507—511  
 Deklinacja p. zboczenie magnetyczne  
 Deklinator 359  
 Diamagnetyzm 311; pomiar wrażliwości magnetycznej ciał diamagnetycznych 321—327; pierwsze prawo Curie'go 327; teoria diamagnetyzmu Langevina 329; diamagnetyczne ciała 311—321; ciało doskonałe diamagnetyczne 392; dia- i paramagnetyczne ciała — wpływ światła 333  
 Dielektryk: określenie d-a 168; główne d-ki 170; załamanie się strug indukcji na powierzchni rozdziału dwu dielektryków 218—220; stała dielektryczna 257—263; polaryzacja dielektryczna 264; przenikliwość (wrażliwość) d-u 266; elektrety 269; przewodnictwo d-ów 269—273; pozostałość dielektryczna 270—273; zjawisko Johnsen'a—Rahbecka 272; elektrostykacja d-ów 273; piroelektryczne d-ki 273—275; piezoelektryczne d-ki 276—278; d-ki typu soli Seignetta p. seignettoelektryki  
 Dipol elektryczny 264; d. magnetyczny 288—321  
 Dopplera—Fizeau zjawisko 95 i nast.  
 Drgania: harmonijne proste 4; równanie promienia 5; amplituda drgania 4; częstość drgań 31; interferencja 44 i nast.; składanie drgań o tej samej częstości 44; składanie drgań o niejednakowej częstości 53 i nast.; wzór Fouriera 55—56; częstość kołowa 55; dudnienie 60 i nast.; składanie drgań, zachodzących w kierunkach prostopadłych 63 i nast.; zmiana częstości drgań w zależności od ruchu źródła i obserwatora (zjawisko Dopplera—Fizeau) 95 i nast.; d-a elektromagnetyczne 622; d-a niegasnące w obwodzie łuku elektrycznego 628  
 Dyfrakcja p. uginanie  
 Dyfuzja prądu 645; wpływ d. p. w liniach telefonicznych 648  
 Dynamiczna stała galwanometru 506  
 Dynamomaszyny (prądnice) 566  
 Dysocjacja elektrolityczna 423; d-a chemiczna 425; d-i elektrolitycznej teoria Arrheniusa 424—425, 436; d-a roztworu 433



Działanie wzajemne jednego nieograniczonego prostego przewodnika prądu na drugi 492

Dźwięk 54; barwa dźwięku 56; obraz dźwięku 56; odtwarzanie ob-ów dźwięku 56 i nast.; analiza dźwięku 59 i nast.; dudnienie 60 i nast.

Dział bezwzględny 379

Dział międzynarodowy 373

Echo harmonijne 85

Ekstraprąd (Faradaya) 543

Ekwipotencjalne powierzchnie p. powierzchnie poziomu

Elektret 269

Elektrobo-źródła siła 374; e. s. temperatury p. siła elektrobo-źródła temperatury; e. s. indukowana 529—531; e. s. indukcji własnej 543—544

Elektrochemiczny równoważnik 419

Elektrody nie polaryzujące się 424; e-a odniesienia 445; e-a normalna platynowa 446; e-a rtęciowa 447

Elektrodynamiczne działania 496

Elektrodynamometr 513; e. Webera 514; e. Pella'a 514—515; e. 593

Elektrolity 417; e-ów przewodnictwo 429 i nast.

Elektrolityczny przerywacz (Wehnela) 564

Elektroliza 417

Elektromagnes 520; e. Weissa 520—521; e. spolaryzowany 523

Elektromagnetyczne drgania 622; e-ych d-ń tłumienie 623

Elektromagnetycznej fali odbicie 655

Elektromagnetycznych zaburzeń prędkość rozchodzenia się wzdłuż drutów 644 i nast.

Elektrometr 246—257; el. bezwzględny W. Thomson'a 246—248; e. bezwzgl. Bichata i Blondlota 249—250; el. bezwzgl. Bjerknessena 250; el. kwadrantowy 252; el. kapilarny Lippmanna 448

Elektroskop 171—172, 251—252

Elektrostrykcja 273

Elektryczna gęstość powierzchniowa 180

Elektryczne filtry 619

Elektryczne motory 500; e. m. jednobiegunowe 501

Elektryczne pole p. pole elektryczne

Elektryczny termometr 241

Elektryczna zdolność 185

Elektryzowanie ciał: przez potarcie 167, 177—178; przez zetknięcie 168; przez wpływ (influencję) 175—177

Elementy magnetyzmu ziemskiego p. magnetyzm ziemski

Elementy symetrii 484



Energia elektryczna: e. el. kondensatora 239—242; gęstość en. el. 242; en. pola 244—246; en. pola elektromagnetycznego (en. układu dwu obwodów) 552—555

Energia dostarczona przez źródło siły elektrobodźczej 549

Energia pochłaniana podczas cyklu magnesowania 342 i nast.; wzór Steinmetza 344

Energia przenoszona przez fale odkształcenia 29; gęstość en—i 31; pomiar en—i 33 i nast.; pochłanianie en—i 41 i nast.

Energia rozproszona w obwodzie prądu stałego 373

Fala odkształcenia: fala zgęszczenia 2; fala rozrzedzenia 2; czoło fali 2; fala płaska 2—5; fala kulista 2—5; fala podłużna 3; długość fali 3; fala poprzeczna 5; prędkość rozchodzenia się fali 8 i nast.; pomiar prędkości rozchodzenia się w nieogr. środowisku gazowym 17 i nast.; pomiar prędkości rozchodzenia się w rurach 22 i nast.; zależność prędkości od temperatury 25 i nast.; prędkość w środowisku ciekłym 26; energia przenoszona przez fale odkształcenia 29; pomiar tej energii 33 i nast.; gęstość tej energii 31; natężenie 31; pochłanianie 42 i nast.; zasięg fali 43; fale stojące 49 i nast.; zasada Huygensa—Fresnela 69; fale cząstkowe 70; ugięcie się fal 71 i nast.; linia falowa 73; odbijanie się fal 76 i nast.; załamanie się fal 89 i nast.; fala wybuchu 101; jej prędkość rozchodzenia się 101—103; fala pocisku 104

Fala stojąca w układzie Lechera 635—640

Fala zaburzeń elektromagnetycznych 651

Falomierz 631, 641

Ferromagnetyczne ciała 311, 333; f. własności gadolinu i alunu żelazowoamonowego 346; zjawisko nieciągłości magnesowania ciał f-yh (Barckhausen) 351

Ferromagnetyzm 311; f-u teoria Weissa 348 i nast.

Filtry elektryczne 619

Fonautograf 57

Fonograf: Edisona 57; f. strunowy 58

Fouriera wzór 55

Galwaniczne ogniwo 437

Galwanomagnetyczne zjawiska 523; dodatnie, ujemne, poprzeczne, podłużne 524

Galwanometr: o ruchomym magnecie, o ruchomym przewodniku, bezwzględny 505; g. Paschena 507; g. Boys'a 507; g. Thomsona; g. Bois i Rubensa; pancerny; Nernsta i Jaegera 508; g. Deprez'a i d'Arsonvala 511; g. strunowy (Ader, Einthoven) 512; g. balistyczny 533, g. wi-bracyjny; g. strunowy 594; g-u stała dynamiczna 506; g-u czułość 507, 511

Gauss: jednostka indukcji magnetycznej 300

Gęstość elektryczna: powierzchniowa 180; zależność g-i powierzchniowej od krzywizny powierzchni przewodnika 220—222; g. el. objętościowa 203



- Gęstość energii 31; g. en. elektrycznej 242  
 Gęstość magnetyczna: powierzchniowa 290—291; objętościowa 291  
 Gęstość prądu 284, 367  
 Gęstsze akustycznie środowisko 89  
 Gilbert: jednostka cgs siły magnetobodźczej 517  
 Głos: prędkość rozchodzenia się głosu w środowiskach nieogr. 16; próg słyszenia 16; granice częstości 16; pomiar prędkości rozchodzenia się w środowisku gazowym nieograniczonym 17 i nast.; pomiar prędkości w środ. ogr. 22 i nast.; zależność prędkości od temp. 25 i nast.; prędkość w środ. ciekłym 26; w środ. stałym 27 i nast.; natężenie głosu 31; pochłanianie 42 i nast.; interferencja 44 i nast.; fale stojące 49 i nast.; dźwięk 54; ton 54; hałas 54; obraz dźwięku 56; otrzymanie obrazów dźwięku 56 i nast.; odtwarzanie dźwięku 59; analiza dźwięków 59 i nast.; dudnienie 60 i nast.; zasada Huygensa—Fresnela 69 i nast.; uginanie się fal głosowych 71 i nast.; odbijanie się fal głosowych 76 i nast.; echo harmonijne 85; pogłos 86; załamanie się fal głosowych 89 i nast.  
 Gradient potencjału elektrycznego p. spad potencjału  
 Gramofon 59  
 Grzmot 105  
 Gwiazda: łączenie w gwiazdę 606  
 Hałas 54  
 Henry: jednostka współczynnika indukcji własnej (kwadrant) 545  
 Histereza 339; h-y pętla 339—341  
 Homologiczne punkty 483  
 Huk 101  
 Huygensa-Fresnela zasada 69 i nast.  
 Impedancja (opór pozorny) 595  
 Indukcja elektrostatyczna: elektryzowanie przez i-e 175; 198—213; określenie wektora i-ji elektrycznej 198; strumień i-ji e-ej 198; ind. przez powierzchnię zamkniętą 200; związek między wektorem indukcji el-ej i natężeniem pola 200—201; rozbieżność wektora i-ji el. 205; struga indukcji 206; naprężenie i ciśnienie w strugach indukcji 214; załamanie się strug indukcji przy przejściu powierzchni rozdziału dwu dielektryków 218—220  
 Indukcja magnetyczna 316; zależność i-ji m-ej od natężenia pola dla ciał ferromagnetycznych 337  
 Indukcja jednobiegunowa 539  
 Indukcji elementarne siły elektrobodźcze 536 i nast.  
 Indukcji własnej siła elektrobodźcza 543; prąd, współczynnik 544  
 Indukcji wzajemnej współczynnik 552, 555 i nast.  
 Indukowana siła elektrobodźcza 529—531  
 Induktor ziemski Webera 585



Influencja p. indukcja elektrostatyczna

Inklinacja 353

Inklinator 354

Interferencja 44 i nast.; 70; i-ja fal elektromagnetycznych 654  
—655

Iskra otwarcia 550

Izodynamy 357

Izogony 356

Izokliny 357

Izolator p. dielektryk

Jednobiegunowe połączenie 620

Jednostki: masy magnetycznej 300; układ jednostek praktycz-  
nych bezwzględny i międzynarodowy 370—371; j-a elektromagnetyczna  
natężenia prądu 472—473; j-a praktyczna strumienia indukcji magnetycz-  
nej (weber, paramaxwell) 474

Jon 423; j-ów prędkość 435

Kamerton (widełki strojowe) 62, 67

Kapilarny elektrometr Lippmanna 448

Kation 423

Katoda 417

Katodofon 58

Kąt nachylenia (inklinacja) 353

Kąt: padania 78; k. odbicia 78; k. załamania 90; k. graniczny 92

Kierujący magnes 508

Koercja: k-cji natężenie 339

Kolektor 567

Koło Barlow'a 500—501, 539

Koncentracyjne ogniwo 438

Kondensator: k. kulisty 227—229; k. płaski 230—232; pojem-  
ność elektryczna k-a wypełnionego dwoma różnymi dielektrykami 232—234;  
k. cylindryczny (butelka lejdejska) 234; baterie k-ów 236—239; k. włączony  
do obwodu prądu zmiennego 612

Konstrukcja Fresnel'a 595 i nast.; 614 i nast.

Krytyczny opór galwanometru 512

Krzywa zerowa (krzywa zależności J i H) 336

Krzywe rozkładu natężeń zmiennego pola elektrycznego  
i magnetycznego 651—652

„Krzyż” Peltiera 412

Kulomb: k. bezwzględny 186, 474; k. międzynarodowy 186

Kwadrant p. henry 545

Liczba Avogadry 422;

Liczby Hittorfa 425, 428—429, 434

Linia falowa 72



- Linie sił pola elektrycznego 194  
 Linie prądu 368  
 Linia obojętna (w prądnicach) 567  
 Lissajous'a krzywe 67
- Łączenie w gwiazdę; w trójkąt 606  
 Łuk śpiewający 629
- Magnesowanie: przy wprawianiu ciała w ruch obrotowy (Barnett); powstawanie ruchu obrotowego ciała przy magnesowaniu (Einstein i de Haas) 332; działania mechaniczne wywierane na ciało podczas m-a 347  
 Magnesy: naturalne 285; m-s dzwonowy 507; m-s kierujący 508  
 Magnetobodźcza siła 517  
 Magnetoelektryczne maszyny 566  
 Magnetokaloryczne zjawisko 332—333  
 Magnetometr 311; m. Gaussa 360  
 Magneton: Weissa, m. gramowy, m. Bohra 352  
 Magnetostrykcja 348  
 Magnetyczny opór 517  
 Magnetyczny południk 353  
 Magnetyczna przepona 459; m-ej p-y moc 459  
 Magnetyczne teodolity 353  
 Magnetyczne własności: zależność m-yh w-ści ciał ferromagnetycznych od częstości zmian pola magnetycznego 341  
 Magnetyczna wrażliwość: metody wyznaczania m-ej w-ci ciał dia- i paramagnetycznych: Curie'go 322—324; Gouy'a 324; Quincke'go 325; Quet'a 326  
 Magnetyzm szczątkowy 339, 571  
 Magnetyzm ziemski: elementy m-u z-go 355; zakłócenia miejscowe m-u z-go 358; zmiany dzienne i roczne m-u z-go 361; zmiany wiekowe m-u z-go 361  
 Masa magnetyczna 287  
 Manometr: błonowy Wien'a 37; m. Königa 56—57  
 Mechaniczny równoważnik ciepła: pomiary za pomocą prądu wirowego (Violle, d'Arsonval, L. Weber) 535  
 Metale kolejnych reguła 406; metal odniesienia 406—407; m-i siły termoelektryczne (zestawienie) 407  
 Mikrofon 38; m. węglowy 38; m. kondensatorowy 39; m. wstęgowy 40  
 Mikroskop wibracyjny 67  
 Młotek Neefa 563  
 Mocy wartość największa: w motorach synchronicznych 608; w motorach asynchronicznych 611  
 Moment elektryczny 264  
 Moment magnetyczny: magnezu 289—294; m. m-y jednostki powierzchni 459



Most Wheatstone'a 382—383; m. W. podwójny 383—384; m. W. na prąd zmienny 430

Most W. Thomsona 383

Motory elektryczne 500; jednobiegunowe 501; motor 575; m-u rozbieganie się 577; m. szeregowy 576; m. upustowy 577; praca dostarczona przez m. 577; zależność między prędkością m-u i jego obciążeniem 577

Nabój elektryczny: jego określenie 170; podział n-ów na dodatnie i ujemne 171; umiejscowienia n-u na przewodniku 173—174; n-e równoważne 174—177; działania n-jów (prawo Coulomba) 178—185; jednostka elektrostatyczna naboju 186; wymiar tej jednostki 186; jednostka praktyczna n-u: bezwzględna 186; międzynarodowa 186; n. probierczy 188; rozmieszczenie n-u na powierzchni przewodnika 218—222; pomiar n-u elektrycznego 255—257; nabój Ziemi 284; nabój elektryczny elementarny, jego wartość 422

Nadprzewodniki 390; zależność oporu n-ów od natężenia pola magnetycznego 391—392; niejednorodność stanu nadprzewodnictwa 392

Namagnesowanie: stopień namagnesowania 289—290; n-e 335 i nast.; n-e samoistne 349

Napięcie: elektryczne 189; n. galwaniczne 401; n. rozkładu 436; n-a rezonans 615

Naprężenia strug indukcji elektr. 214—216

Naskórne zjawisko 624

Nasylenie namagnesowania 336—337

Natężenie akustyczne 31; pomiar n-a a-go 33 i nast.

Natężenie koercji p. koercja

Natężenie od magnesowujące 334

Natężenie: n. pola elektrycznego 187; związek między natężeniem pola i potencjałem 192—193, 196; wymiar n-a pola w układzie elektrostatycznym 194; jednostka n-a w praktycznym układzie jednostek 194; związek między n-em i wektorem indukcji elektrycznej 200—201; równanie Poisson'a 205; rozbieżność wektora n-a 205; n. w pobliżu powierzchni przewodnika 210; n. przewodzącej powierzchni płaskiej 210—211; n. elektrycznego pola Ziemi 278—281

Natężenie: pola magnetycznego magnesu 292; pomiar n-a pola magnetycznego 296—297; prawo Coulomba 297—299; wymiar i jednostka n-a 300; n-e pola magnesu stałego 302; n-e w położeniach głównych 304

Natężenie prądu elektrycznego 364; n-e skuteczne prądu 592

Nawinięcie pierścieniowe; bębnowe prądnicy 571;

Newton: jednostka siły w układzie praktycznym bezwzględnym 477

Normalna elektroda platynowa 446

Normalny potencjał 446



Obraz akustyczny źródła: rzeczywisty 78; o-z urojony 83; o-z dyfrakcyjny 83

Obszar: słyszenia zewnętrzny 94; o-r ciszy 94

Obwód: zamknięty 365; o-d z dwoma źródłami siły elektrobodźczej, włączonymi równolegle 381; o-d złożony z przewodników niejednorodnych 401; o-dy, w których jedyną czynną siłą elektrobodźczą jest siła, powstająca przy zetknięciu się dwu różniących się stężeniem roztworów 442; o-d pierwszorzędny baterii 559; o-d wtórny 559; o-dy drgające 621; o-d drgający kondensatora (przemiany energii) 625—626; o-dy lampowe 629; o-dy o drganiach niegasnących 647

Odbicie fali elektromagnetycznej 655

Odbijanie się fal: odkształcenia 76 i nast.

Odkształcenia w środowiskach sprężystych: rozchodzenie się odkształceń w środowiskach sprężystych 1—105; fala zgęszczenia 2; fala rozrzedzenia 2; fala płaska 2; czoło fali 2; fala podłużna 3; długość fali 3; fala poprzeczna 5; prędkość rozchodzenia się odkształceń sprężystych 8 i nast.; pomiar prędkości rozchodzenia się w nieograniczonym środowisku gazowym 17 i nast.; pomiar prędkości w środowisku ograniczonym 22 i nast.; zależność prędkości od temperatury 25 i nast.; prędkość rozchodzenia się w środowisku ciekłym 26; w środowisku stałym 27 i nast.; energia, przenoszona przez fale odkształcenia 29 i nast.; gęstość tej energii 31; natężenie 31; pochłanianie energii 41 i nast.; zasada zachowania małych odchyłeń 44; fale stojące 49 i nast.; fala cząstkowa 70; uginanie się fal odkształcenia 71 i nast.; odbijanie się fal odkształcenia 76 i nast.; załamanie się fal odkształcenia 89 i nast.; odkształcenia rozchodzące się z prędkością większą od prędkości głosu 100 i nast.

Odpowiadające sobie elementy powierzchni przewodnika 207

Oersted: jednostka natężenia pola magnetycznego 300

Ognisko zaburzeń 101

Ogniwo Daniella 446

Ogniwo Dolezalka i Krügera 442

Ogniwo galwaniczne (spolaryzowanie woltametry) 437; ogień galwanicznych teoria Nernsta 439 i nast.

Ogniwo koncentracyjne 438

Ogniwo normalne Westona 454

Ogniwo odwracalne 452—453

Ogniwo termoelektryczne 403; temperatura odwrócenia o-wa t-go 408; zdolność termoelektryczna o-wa t-go (różniczkowa siła termoelektryczna) 409

Okresowo zmieniająca się siła elektrobodźcza, otrzymywana w prądniczy 586

Om międzynarodowy 371; om bezwzględny 581

Opór akustyczny 36, 77



Opór elektryczny 368; o. omowy 368; o. właściwy 369, 384; o. wewnętrzny 373; o. zewnętrzny 373; o. szczytkowy 389; o. przewodnika: zmiana o-u p-a, znajdującego się w polu magnetycznym 392—393; metody pomiaru o-ów: m-a podstawienia, m-a różnicowa 385; zmiany o-u elektr. w zależności od natężenia padającego światła 393; o. el. bardzo cienkich przewodników 394; o. el. cienkich płytek metalowych 394; zależność o-u e-go od ciśnienia wywieranego na przewodniki metaliczne 394; zmiana o-u e-go ze wzrostem natężenia prądu (przy dużej gęstości prądu) 394; opór równoważny lub o. rozgałęzienia 378

Opór indukcyjny 585

Opór krytyczny galwanometru 512

Opór magnetyczny 517

Opór mikrofonu 38—39

Opór pojemnościowy 613

Oporu pomiar w jednostkach bezwzględnych: W. Thomsona 578—579; Rayleigh'a, L. Lorenz'a 580

Opór pozorny (impedancja) 585

Opór właściwy: termiczny współczynnik o-u w-go 386; dla sto-  
pów 388; zmiana o-u w-go w temperaturze topnienia 387

Oscylator (wibrator) liniowy Hertza 632—633, 646

Oscylograf 594

Oś p. symetria

Oś magnetyczna 290

Paramagnetyzm 311; pomiar własności magnetycznych ciał paramagnetycznych 321—327; drugie prawo Curie'go 328; prawo Weissa 329; teoria paramagnetyzmu Langevina 330—332; zjawisko magnetokaloryczne 333

Pierścień ochronny 231

Pierścień Pacinotti'ego lub Gramme'a 566

Piezoelektryczność p. dielektryk; zastosowanie do pomiaru zmian ciśnienia akustycznego 40; zastosowanie do wytwarzania ultradźwięków 75

Piroelektryczność p. dielektryk

Pochłanianie energii akustycznej 41 i nast.

Pogłos 86

Pojemność elektryczna 222; wymiar p-ci el. w układzie elektrostatycznym 222; jednostka p-ci el. w tymże układzie 222; jednostka p-ci el. w praktycznym układzie 222; p. el. kuli odosobnionej 223; p. el. nieograniczenie długiego drutu 223; p. el. układu ciał 227; p. kondensatorów 227—239

Pojemnościowy opór 613

Polaryzacja dielektryczna p. dielektryk

Polaryzacja magnetyczna 312—316

Polaryzacji siła elektrobodźczą 437



Pole elektryczne: 186—198; natężenia p-a el-go 187; potencjał w p-u e-ym 188; praca sił p-a el-go 188; irrotacyjność p-a el-go 192; linie sił p-a el-go 194; wektor indukcji p-a el-go 198; twierdzenie Gaussa 200; równanie Poissona 205; teoria pola Faraday'a — Maxwella 213—216; p-e el-e Ziemi 278—281

Pola elektrycznego i magnetycznego zmiany w przestrzeni otaczającej przewodnik, przez który płynie prąd zmienny 639—640

Pole magnetyczne: magnesu 292—311; natężenie p-a m-go 292; siła działająca na magnes w p-u m-ym 293; p-e m-e Ziemi 295, 353; pomiary względne p-a m-go ziemskiego: metodą Borda i metodą Lamonta 356; działanie p-a m-go na zmianę oporu znajdującego się w nim przewodnika 392

Pole magnetyczne prądu 456—460; p. m. kołowego przewodnika prądu elektrycznego 471—472; natężenie p-a m-go wzbudzonego przez element obwodu elektrycznego 489; p. m. nieograniczonego, prostego przewodnika prądu 490; p. m. zgiętego przewodnika prądu 491; p. m. bardzo silne 521

Pole magnetyczne wirujące 606

Pole wielowartościowe 470

Pole wirowe bezźródłowe 469

Położenia główne (metoda Gaussa) 304

Południk magnetyczny 353

Ponderomotryczne siły 481

Potencjał: p. elektryczny 188; wymiar p-u e-go w układzie elektrostатыcznym 192; jednostka p-u w układzie elektrostатыcznym 192; jednostka p-u w układzie praktycznym bezwzględny 192; gradient p-u 196; p. przewodnika 197; powierzchnie poziomu (ekwipotencjalne) 193—194

Potencjał normalny 446

Potencjał w polu magnetycznym magnesu stałego 302

Potencjał pola pojedynczego magnesu 461; p. pola przepony magnetycznej 462

Potencjał Volty (zewnętrzny) 401; różnica p-ów wewnętrzna 402; p. zetknięcia 402; skoki p-u w miejscach spojenia dwu metali 404

Powierzchnie poziomu (ekwipotencjalne): w przypadku kulistego przewodnika 193; w polu naelektryzowanego punktu 194

Pozostałość magnetyczna p. magnetyzm szczytkowy

Półprzewodniki 388

Praca sił pola magnetycznego przy przesunięciu masy magnetycznej (praca wektora  $\vec{H}$  wzdłuż krzywej s) 463—466

Prawo: P. C. Coulomba, dotyczące wzajemnych działań nabożów elektrycznych 178—186; P. Coulomba, dotyczące wzajemnych działań mas magnetycznych 299; P. Curie'go pierwsze P. C. 327; drugie P. C. 328; P. Weissa 329; P-a Kirchhoffa 375—376; P. Ohma 367—374; P. Joule'a 371; P. Volty 402; P-a Faraday'a 417—418;



- P. Biota i Savarta 489; P. Ampère'a o działaniu wzajemnym liniowych przewodników równoległych 493
- Prąd anodowy 629
  - Prądu dyfuzja 645
  - Prąd elektryczny 363; natężenie p-u e-go 364; źródło p-u e-go 364; stały p. e. 365; gęstość p-u e-go 367; linie p-u e-go 368
  - Prądu indukującego i indukowanego wzajemne działanie 589—590
  - Prąd przesunięcia 650
  - Prądu rezonans 618
  - Prąd szczytkowy 436
  - Prądy wielofazowe 603; p. trójfazowy, dwufazowy 604
  - Prąd wirowy lub masowy (p. Foucault'a) 534
  - Prąd wyprostowany 565
  - Prądy zmienne 583 i nast.
  - Prądnice (dynamomaszyny) 566; p. rzędowe 572; p. upustowe 572—573; p. prądu trójfazowego 609; p. wysokiej częstotliwości 630
  - Prędkość rozchodzenia się odkształceń sprężystych 8; pomiar prędkości rozchodzenia się odkształceń głosowych w środowisku nieograniczonym 17 i nast.; pomiar — w środowisku ograniczonym 22; zależność p-ści od temperatury 25 i nast.; prędkość w środowisku ciekłym 26; w środowisku stałym 27 i nast.
  - Prędkość rozchodzenia się zaburzeń elektromagnetycznych wzdłuż drutów 644 i nast.
  - Prężność roztwórcza 443; amalgamatów (roztworów rtęciowych) 444
  - Prostownik elektrolityczny 590—591
  - Próg słyszenia 16, 42
  - Przemiana siła elektrobodźcza 588
  - Przenikliwość elektryczna p. dielektryk
  - Przenikliwość magnetyczna 299
  - Przebiecie 616
  - Przepona magnetyczna 459; moc 459
  - Przerywacz elektrolityczny (Wehnelt'a) 564; prz. rtęciowy 564
  - Przewodnictwo właściwe 368; prz. w półprzewodnikach 388; prz. elektrolitów 429 i nast.; prz. naczyń 430; (pojemność oporu) 431; prz. równoważne roztworów 432
  - Przewodniki elektryczne: 168; głównejsze p-ki 170; dielektryki jako przewodniki 269—273; p-k liniowy 366; starzenie się p-ka 387; p-ki pierwszej klasy 402
  - Przetwornica (transformator) 561
  - Punkt Curie'go p. temperatura C.
  - Punkt krytyczny Villari'ego 348
  - Puszka Faraday'a 176



- Rachunek przy pomocy wielkości urojonych 600 i nast.  
 Reakcje wtórne w elektrolizie 418  
 Reguła Ampère'a 456—457  
 Reguła kolejnych metali 406  
 Reguła kolejnych temperatur 406  
 Reguła Lenza 530; pomiar działań indukcyjnych pól magnetycznych magnesów i cewki przez Webera 531—532  
 Relais (przyrząd przekaźnikowy) 523  
 Reluktancja 517  
 Rezonans napięcia 615; r. prądu 618  
 Rezonans wielokrotny (Sarasin i de la Rive) 646; r. przez sprzężenie przy pomocy tzw. mostu 647  
 Rezonator 59—60; r. powietrzny Helmholtza 60  
 Rezonator Hertza 640; wyznaczenie położenia węzłów i strzałek pola elektrycznego i magnetycznego za pomocą r-a H-a 642  
 Rot  $\vec{H}$  (por. wir  $\vec{H}$ )  
 Rozbieżność (divergentia): określenie 205; r. wektora natężenia pola elektrycznego 205; r. wektora indukcji elektrycznej 205  
 Rozbrajanie kondensatora przez drut łączący jego zbrojenie 649  
 Rozbrojenie wysokiej częstości 627  
 Rozchodzenie się płaskiej fali elektromagnetycznej w środowisku jednorodnym i równokierunkowym 652 i nast.  
 Rozgałęzienie obwodu: proste 377—379; złożone 379—380  
 Równanie ruchu układu ruchomego galwanometru 509—510  
 Równoważne stężenie roztworów 431  
 Równoważnik gramowy 418  
 Rtęciowe elektrody 447  
 Rtęciowy przerywacz 564  
 Ruch przewodnika z prądem w polu magnetycznym 496 i nast.  
 Ruchliwość bezwzględna jonów 426, 435  
 Ruchliwość względna jonów (p. liczby Hittorfa) 428—429, 434  
 Seignettelektryki 347  
 Silnik (motor) 575  
 Siła elektrobodźcza 374; s. e. temperatury, lub s. e. termoelektryczna danego przewodnika (w przewodniku jednorodnym o niejednakowej temperaturze) 399; s. e. termoelektryczna 403; s. e. termoogniwa, w którym oba metale są nadprzewodnikami 409; s. e. wartości 407; wykres Taita 410—411; s. e. polaryzacji 437; s. e. obwodów złożonych z roztworów o różnych stężeniach 442; s. e. ogniwa Westona 454; s. e. ogniwa Daniella 455; s. e. prądnicy 569—570; s. e. skuteczna 591; s-y e-ej termoelektrycznej zależność od obróbki metalu 411—412



- Siła magnetobodźcza 517  
 Siła nośna elektromagnesu 522  
 Siły ponderomotryczne 481  
 Siły, działające na przewodnik prądu umieszczony w polu magnetycznym 485  
 Skineffect p. naskórne zjawisko 624  
 Solenoid 477  
 Spad potencjału 196  
 Spolaryzowany elektromagnes 523  
 Spółczynnik indukcji; własnej i wzajemnej 552; wyznaczenie bezwzględnej wartości 555—558; porównanie 558—559  
 Spółczynnik magnetyczny p. wrażliwość magnetyczna  
 Spółczynnik pochłaniania 42 i nast.; s. załamania 91; s. załamania akustyczny 91  
 Spółczynnik zjawiska Thomsona 397; zjawiska Peltiera 413; zależność sp-ka Peltiera od temperatury 414; sp-k zjawiska Halla 524; Ettinghausena i Nernsta; Euckena i Etzrodta 525  
 Sprzężenie indukcyjne 630; bezpośrednie; elektrostatyczne 631  
 Stała Curie'go 328  
 Stała czasu obwodu 546—548  
 Stała dielektryczna p. dielektryk  
 Stała dynamiczna galwanometru 506  
 Stała Faradaya 421  
 Stator (nieruchoma część prądnicy) 586  
 Stężenie równoważne roztworów 431  
 Stopień dysocjacji roztworu 433  
 Stopień namagnesowania p. namagnesowanie  
 Stopy Heuslera (manganu, miedzi i cyny) 335  
 Stosunek przetworzenia 560  
 Struga indukcji elektrycznej 206; struga jednostkowa 207; naprężenie strug indukcji 214; ciśnienie boczne w strugach indukcji 214; załamanie się strug indukcji na powierzchni rozdziału dwu dielektryków 218—220  
 Struga indukcji magnetycznej 318  
 Struga sił 206  
 Strumień indukcji elektrycznej 198; str. ind. przez powierzchnię zamkniętą 200  
 Strumień indukcji magnetycznej 316—321; znak wartości str. ind. m. 498; str. ind. m. 541  
 Strumień wektora  $\vec{A}$  468  
 Strunowy galwanometr (Ader, Einthoven) 512  
 Strzałka fali stojącej 51; strzałka ciśnienia 52  
 Strzałki potencjału; natężenia prądu 637 i nast.



Symetria: oś symetrii 274; oś biegunowa (heteropolarna) 274; oś izotropii 275; oś główna (optyczna) 275; oś homopolarna 276; symetria pierwszego rodzaju 483; drugiego rodzaju 484; symetrii środek (inwersji) 483

Symetryczna bryła 482—484

Synchroniczne motory 609

Szczotki (miotelki) 567

Szmer 54

Tarcza Rayleigha 33

Telefon elektromagnetyczny 39

Temperatura Curie'go 345—347

Temperatur kolejnych reguła 406

Temperatura odwrócenia lub inwersji (ogniw termoelektrycznych) 408

Temperatura skoku (p. nadprzewodniki) 390; wysokość t-y s-u 391; zależność t-y s-u od natężenia prądu 391

Temperatury wyznaczanie za pomocą termoogniw 411

Teodolity magnetyczne 353

Teoria pola elektrostatycznego Faraday'a Maxwella 213—216; naprężenia i ciśnienia strug indukcji elektrycznej 214; teoria pola elektromagnetycznego 650—654

Termiczny spólczynnik oporu właściwego 386—387

Termodynamiczna teoria ogniw 449

Termoelektryczna siła ogniwa zbudowanego z dwóch nadprzewodników 392

Termoelektryczna zdolność danego ogniwa p. zdolność termoelektr. ogn.; związek t-ej z-ści z ciepłem Peltiera, równania W. Thomsona 416

Termomagnetyczne zjawiska 526—527

Tłumienie elektromagnetyczne ruchomego układu galvanometru 509—511

Ton 54; t. zasadniczy 56; t. wyższy harmonijny 56; t. odbicia 87

Transformator (przetwornica) 561

Trioda 629

Trójkąt: łączenie w t. 606

Trzask 101

Twardość akustyczna 36

Twierdzenie Gaussa, dotyczące strumienia indukcji elektrycznej przez powierzchnię zamkniętą 200—202

Twierdzenie Stokesa 468

Twornik (rotor) 501

Uginanie się fal odkształcenia 71 i nast.; obraz dyfrakcyjny 83

Układ jednostek elektrostatyczny: jednostka el. s. naboju 186; j. el. s. potencjału 192

Układ jednostek elektromagnetyczny 300



Układ jednostek Maxwella 476; u. j. Giorgie'go 476; u. bezwzględny j. praktycznych (M. K. S. A.) 477

Układ jednostek praktyczny: j. naboju w bezwzględnym układzie praktycznym 186; j. naboju w międzynarodowym u. pr. 186; bezwzględna j. praktyczna potencjału 192; bezwzględna j. praktyczna natężenia pola elektrycznego 194

Układ Lechera do wytwarzania stojących fal elektromagnetycznych 635—640

Układ Tesli 628

Ultradźwięki: prędkość rozchodzenia u-ów 24; pochłanianie u-ów 42; uginanie się u-ów 75

Upust (bocznik, shunt) 377—379

Waga Lloyd'a 360

Waga Rayleigh'a i Sidwich'a 515—516

Wahadełko elektryczne 167

Waga skręceń 183

Wariometr 359

Warstwa Heaviside'a 282

Wattmetr 516

Wektor biegunowy (heteropolarny) 484—485

Wektor indukcji magnetycznej 316

Wektor magnetyczny 482

Wektor osiowy 485

Węzeł fali stojącej 51; w. ciśnienia 52

Węzły potencjału; natężenia prądu 637 i nast.

Wiatr elektryczny 222

Wibrator p. oscylator

Widmo magnetyczne 301

Widmo zaburzenia sprężystego 55

Widelki strojowe p. kamerton

Wir wektora  $H$  468

Wirujące pole magnetyczne 606

Wolt: w. bezwzględny 192, 475, 582; międzynarodowy 371

Woltmetr srebrowy 420; w. spolaryzowany 437

Woltmetr elektrostatyczny 593; w. elektromagnetyczny 594

Wrażliwość dielektryczna p. dielektryk

Wrażliwość magnetyczna 314; pomiar wr. m-ej 321—327; wr. m. odniesiona do jednostki objętości 322—327; wr. m. odniesiona do jednostki masy 322; wr. m. ciał diamagnetycznych 327; prawo Curie'go 327; wr. m. ciał paramagnetycznych 328; drugie prawo Curie'go 328; prawo Weissa 329; zmiana wr-ści m-ej pod wpływem światła (Bose, Raha, Specchia, Bhuyan) 333; pomiar wr-ści m-ej ciał ferromagnetycznych 335 i nast.



Wydażność prądniczy lub spólczynnik skutku użytecznego 574  
 Wykres Taita (siła elektrobodżcza termoogniwa) 410—411  
 Wysokiej częstósci rozbrojenie 627

Zależność między momentem magnetycznym i nateżeniem pola w dwóch głównych położeniach 304

Załamanie się fal odkształcenia 89 i nast.; spólczynnik załamania się fali 91; akustyczny spólczynnik załamania 91

Zasada Le Chateliera i Brauna 333

Zasada zachowania małych odchyłeń 44

Zasada zachowania elektryczności 177

Zasięg fali odkształcenia 43; z. sygnałów podwodnych 93

Zboczenie magnetyczne (deklinacja) 353

Zdolność elektryczna 185

Zdolność magnetyczna p. przenikliwość magnetyczna; z. m. ciał ferromagnetycznych 335 i nast.

Zdolność termoelektryczna danego ogniwa (rózniczkowa siła termoelektryczna) 409

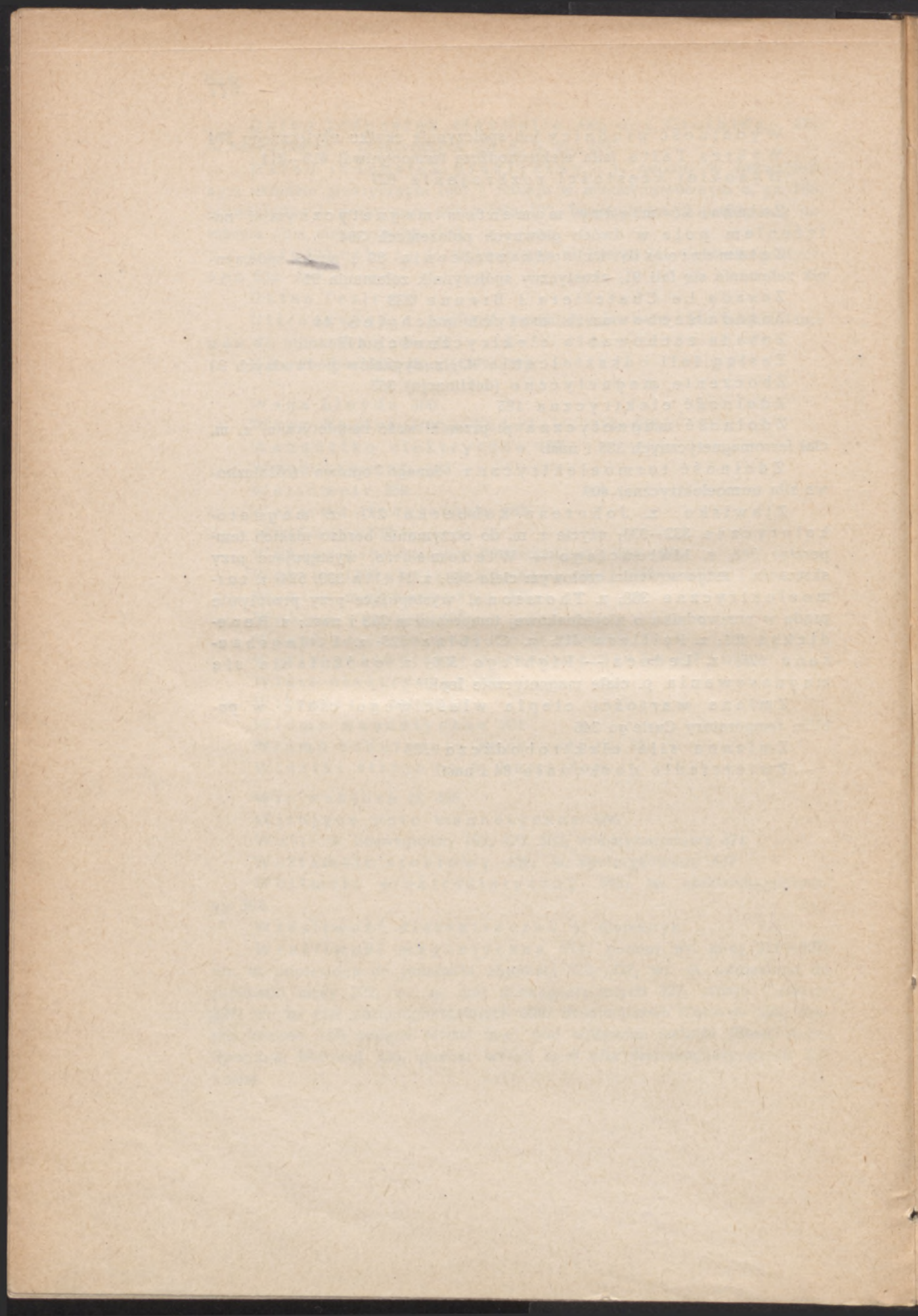
Zjawisko: z. Johnsen-Rahbecka 273; z. magneto-kaloryczne 332—333; użycie z. m. do otrzymania bardzo niskich temperatur 333; z. Mateuciego — Wiedemanna, występujące przy skręcaniu i magnesowaniu czołowym ciała 348; z. Halla 338, 524; z. termoelektryczne 388; z. Thomsona, występujące przy przepływie prądu w przewodniku o niejednakowej temperaturze 395 i nast.; z. Benedicksa 401; z. Peltiera 412; z. Corbin'a 525; z. Etingshausena 525; z. Leduc'a — Righiego 526; z. opóźniania się magnesowania p. ciała magnetycznie lepkie

Zmiana wartości ciepła właściwego ciała w pobliżu temperatury Curie'go 346

Zmienna siła elektrobodżcza 588

Zwierciadło doskonałe 84 i nast.







## SPIS NAZWISK

- Abendroth** — sposób otrzymywania krzywych Lissajousa 68  
**Abraham** — elektrometr bezwzględny do mierzenia wysokich napięć 248  
**Adams** — zmniejszanie się polaryzacji z czasem 269  
**Addenbroke** — zależność stałej dielektrycznej od częstości zmian natężenia pola 260  
**Ader** — galwanometr strunowy 512  
**Aepinus** — piroelektryczność 273  
**Alexandersona** — prądnicą wysokiej częstotliwości 630  
**Allard** — zmiana natężenia fal kulistych w miarę wzrastania odległości 40; — zależność pochłaniania energii akustycznej od częstości drgań 43  
**Allan** — drgania struny sztywnej 116  
**Altberg** — uginanie się fal głosowych 76  
**Ampère** — założenia teorii magnetyzmu 329; — reguła związku między kierunkiem odchylenia igły magnetycznej i kierunkiem prądu 456; — wielkości działania magnetycznego obwodu elektrycznego w zależności od natężenia prądu i powierzchni obwodu 458; — badania nad wzajemnym działaniem prądów i magnesów 460; — równoważność 463; — sole-noid 477; — prawo o równoległych przewodnikach liniowych prądu 493  
**Andrew** — niejednorodność stanu przewodnictwa w nadprzewodniku znajdującym się w polu magnetycznym 392  
**Angerer i Ladenburg** — wpływ prędkości wiatru na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w powietrzu 19; — prędkość fali wybuchu w pobliżu źródła zaburzeń 20; — prędkość zaburzeń sprężystych 21; — wpływ niejednorodności fizycznej powietrza na powstawanie echa 88; — rozchodzenie się fali wybuchu 102  
**Antolik** — teoria drgań błony 131  
**Arago, Bouvard, Humboldt, Gay-Lussac i Prony** — prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w powietrzu 20  
**Arago** — współdziałanie wirującej tarczy miedzianej i igły magnetycznej 536  
**Arons** — rozbrojenie kondensatora 270  
**d'Arsonval** — ciepło Joule'a podczas przepływu prądów Foucault'a 535  
**Arrhenius** — teoria dysocjacji elektrolitycznej — 424, 425; — teoria dysocjacji 436  
**Ascoli** — rozważania nad możliwą liczbą układów jednostek elektrycznych 476



- Auerbach — stosunek wzajemny energii tonów drgającej struny — 115; wzór na częstość kamertonu 127
- Avogadry — liczba — 422
- Ayrton i Perry — pomiar wartości  $c$  658
- Backer — pomiar spótczynnika Peltiera 414
- Backhaus — zależność rezonansu od stosunku częstości amplitudy drgań wymuszonych i własnych 141
- Baedecker — opór przewodników b. cienkich 394
- Banerji i Raman — teoria drgań struny 117
- Barkhausen i Lichte — zmiana natężenia dźwięku w wodzie 44
- Barkhausen — zjawisko nieciągłości magnesowania ciał ferromagnetycznych 351
- Barlow — niezależność oporu przewodnika od gęstości prądu 394; — B-a koło 500, 501, 539
- Barnes i West — pomiary przy użyciu tarczy Rayleigha 35
- Barnett — magnesowanie przy wprawianiu ciała w ruch obrotowy 332
- Barton — teoria drgań struny 117
- Barus — p. Seebeck — różnice zachowania się metalu hartowanego i lanego w zjawisku termoelektrycznym
- Batelli — potwierdzenie I-go równania W. Thomsona, pomiary zdolności termoelektrycznej i ciepła Peltiera 416
- Becker — prędkość rozchodzenia się fali wybuchu w rurze 102; — teoria fal wybuchu 103
- Beckmann — zależność właściwości piezoelektrycznych od temperatury 277
- Becquerel — potwierdzenie wzoru Joule'a 373; — reguła kolejnych temperatur 406
- Bell — telefon elektromagnetyczny 39
- Benade — badanie zjawiska Benedicksa 401
- Benedicks — zjawisko 400, 401
- Bennet — sonda z lontem 281
- Berg — metoda wyznaczania spótczynnika zjawiska Thomsona 398
- Berger — odbicie fali podłużnej, rozchodzącej się w środowisku stałym od innego środowiska stałego 83
- Bernard i Bourget — teoria drgań błony 131
- Bernoulli — wzór na częstość drgań słupa gazowego w rurze 155
- Bhargava — teoria drgań struny 117
- Bhuyan — działanie światła na ciała diamagnetyczne 333
- Bichot i Blondlot — elektrometr bezwzględny 249
- Biota i Savarta — doświadczenia nad natężeniem pola magnetycznego obwodu elektrycznego 481; — B-a i S-a prawo 489
- Birkeland — teoria zmian elementów magnetyzmu ziemskiego 361
- Birkeland i Stormer — badania nad zaburzeniami magnetyzmu ziemskiego 362
- Bjerkness — elektrometr bezwzględny 250; — tłumienie drgań oscylatora 646
- Bjerrum — dysocjacja całkowita 436
- Blakley — przesunięcie strzałek na zewnątrz rury drgającej 156, 157
- Blondela oscylograf 594



- Blondlota układ 634, 646, 651; — prędkość rozchodzenia się zaburzeń elektromagnetycznych wzdłuż drutów 647
- Blondlot i Bichot — p. Bichot i Blondlot
- Bodaren i Occhialini — stała dielektryczna gazów 261
- Boehm i Schellbach — załamanie fal głosowych 93
- Boehm — przesunięcie strzałek na zewnątrz rury drgającej 156
- Bohra magneton 352
- du Bois — pole magnetyczne wewnątrz wydrążonej kuli żelaznej 319; — du B. i Rubensa galwanometr 508; — du B. Raymond — aperiodyczność ruchu przy silnym tłumieniu galwanometrów 510
- Boltzmann — pomiar stałej dielektrycznej 257, 260; — stała dielektryczna gazów 260; — pomiary działań elektrodynamicznych w elektrodynamometrze 514
- Borda — metoda pomiarów względnych pola magnetycznego ziemskiego 356
- Borelius — zjawisko Thomsona dla ołowiu i cyny 400; — wyznaczenie stosunku 2-ch spójczników Peltiera 414; — potwierdzenie doświadczalne 2-go równania W. Thomsona 416
- Bose i Raha — zmiana wrażliwości magnetycznej pod wpływem światła 333
- Bössch — metoda pomiaru prędkości rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 22
- Bourget i Bernard — badania drgań błony 131
- Bouvard, Arago, Humboldt, Gay-Lussac i Prony rozchodzenie się zaburzeń sprężystych w powietrzu 20
- Boyle R. W. i Taylor G. B. — niezależność prędkości rozchodzenia się drgań sprężystych w środowisku ciekłym od ich częstości 27; — prędkość w oleju rycynowym 27; — potwierdzenie doświadczalne wzoru na odbicie akustycznej fali płaskiej 77
- Boys'a galwanometr 507
- Brand — nienormalna odległość słyszenia wielkich wybuchów 94; — i Freund — wyznaczania częstości drgań ultradźwięków metodą Kundta 158
- Braun i Rayleigh — teoria drgań struny sztywnej 116
- Bridgman — zmiany oporu właściwego w zależności od ciśnienia 394; — odchylenia od prawa Ohma przy dużych gęstościach prądu 394
- Bridlingmaier — teoria zmian elementów magnetyzmu ziemskiego 361
- Bruhát — wyjaśnienie zjawiska, gdy fala pocisku ma prędkość większą od fali wybuchu 104
- Burton, Tarr, Wilhelm — siła elektrobodźcza termoelektryczna dla nadprzewodników 409
- Buss — sprawdzenie wzoru Helmholtza — Kirchhoffa 23
- Buys — Ballot — doświadczalne sprawdzenie zjawiska Dopplera-Fizeau 100
- Cabrery pomiary wielokrotności magnetonów 352
- Cagniard de la Tour — stosunek częstości drgań podłużnych strun do częstości drgań poprzecznych 118; — syrena 165
- Campbell, Dixon i Parker — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 25



- Canton — elektroskop 171; elektryzowanie przez wpływ 175; piezoelektryczność 274
- Carman i Hubbard — stała dielektryczna gazów 261
- Carrière — tony szczelinowe 162; tony krawędziowe 162
- Carrington — teoria drgań płyt kolistych 132
- Caswell — spólczynnik Peltiera dla par: bizmut — miedź, nikiel — miedź 414
- Cavendish — umiejscowienie naboju na przewodniku 174; — wyprowadzenie wzoru na działania wzajemne ciał naelektryzowanych 183; — sprawdzenie doświadczalne tego wzoru 185
- Cazin — pomiary działań elektrodynamicznych w elektrodynamometrze 514
- Cermak — zależność częstości drgań własnych od stosunku długości węższej części do szerszej 159; — pomiar spólczynnika Peltiera 414
- Champan i Augnelister — teoria zmian elementów magnetyzmu ziemskiego 361
- Chładni — położenie węzłów na drgających prętach 126; — obraz drgań kamertonu 127; — figury Chładniego 131 i dalsze
- Chwolson — odtworzenie graficzne dudnień 62; — opis doświadczenia Vogela 100
- Clausius — pojemność kondensatora płaskiego 232; — uzasadnienie wzoru Joule'a 372; — niezależność rozszczepiania elektrolitu na jony od przepływu prądu 424
- Cochy — teoria elektryzowania przez potarcie 178
- Coelm — badanie elektrolitu w pobliżu elektrod 426; — ruchliwości bezwzględne jonów 434—35
- Colladon i Sturm — prędkość głosu w wodzie 27; — pochłanianie głosu w wodzie 43
- Conrad — sonda kropłowa 281
- Corbin'a zjawisko 525
- Cornish i Eastman — sprawdzenie wzoru Helmholtza — Kirchhoffa 23
- Cosens i Hartridge — wzajemnie dźwięku 54
- Coulomb — wprowadzenie pojęcia naboju elektrycznego 170; — umiejscowienie naboju na przewodniku 174; — prawo C-a 178, 185; — badanie rozkładu naboju na powierzchni przewodnika 221; — wyznaczenie związku między wartością natężenia i odległości danego punktu pola od bieguna magnesu 287, 297, 299; — wzór 299
- Courant i Hilbert — teoria drgań sprzężonych 153
- Cranz — fotografia fal wybuchu 103, 104
- Credner — starzenie się przewodnika platynowego 387
- Curie J. i P. — teoria piroelektryczności 276; — piezoelektryczność 276
- Curie P. — wzór wyrażający zależność naboju piezoelektrycznego od ciśnienia 277; — 2 prawa o wartościach wrażliwości magnetycznej 327—328; — wrażliwość magnetyczna wody 328; — C. stała 328; — punkt (temperatura) 346, 350; — wyznaczanie wrażliwości magnetycznej ciał dia- i paramagnetycznych 322, 324; — pojęcia symetrii 484
- Curtisowie H. L. i R. W. — pomiary wartości ampera międzynarodowego 582



- Cuthberson i Maas — zależność stałej dielektrycznej od temperatury 262
- Czapski S. — zależność siły elektrobodźczej ogniwa od jego temperatury 455
- Dalton i Mallot — pomiary przy użyciu tarczy Rayleigha 35
- Daniella ogniwo 446; — ciepło wywiązane w o. D. 451; — siła elektrobodźcza o. D. 455
- Daum — piroelektryczność 273
- Davy — zależność natężenia prądu od rodzaju materiału przewodnika 367
- Déguisne i Marbe — dalsze udoskonalenie przyrządu Königa 57
- Deprez'a i d'Arsonvala galwanometr 511, 512
- Desaguliers — ustalenie własności przewodników 169
- Desirant i Schoenberg — niejednorodność stanu nadprzewodnictwa 392
- Dieterici — potwierdzenie wzoru Joule'a 373
- Dixon, Campbell i Parker — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 25
- Dozorzyński — pomiar stałej dielektrycznej 261
- Dolezalek — elektrometr kwadrantowy 253
- Dolezalka i Königa ogniwo 442
- Doppler — Fizeau — zjawisko Dopplera-Fizeau 15 i nast.
- Dörning — prędkość rozchodzenia się drgań sprężystych w wodzie 27
- Drude — wzór na odbicie atmosfery fali płaskiej 77; — odbicie fali podłużnej, rozchodzącej się w środowisku stałym od innego środowiska stałego 83
- Duddell — udoskonalenie oscylografu Blondela 594
- Duhamel — drgania struny sztywnej 116
- Dulong — prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w tlenie 24
- Dussaud i Perrot — załamanie fal głosowych 93
- Earnshaw — teoria fal wybuchu 103
- Eastman i Cornish — sprawdzenie wzoru Helmholtza-Kirchhoffa 23
- Ebert i Hoffman — elektrometr bezwzględny 250
- Edison — fonograf 57
- Eguchi — zachowanie polaryzacji przez dielektryk 269
- Einstein i de Haas — powstawanie ruchu obrotowego ciała przy magnesowaniu 332
- Einthoven i Hooggerwerth — strunowy fonograf 58
- Einthoven — galwanometr strunowy 512
- Engel, Vogt i Massolle — katodofon 58
- Erdmann — natężenie pola elektrycznego Ziemi 280
- Ettingshausen i Nernst — zmiana współczynnika zjawiska Halla dla bizmutu 525
- Ettingshausena zjawisko 525; współczynnik zjawiska E.; podłużne zjawisko 526, 527
- Etzrodt — zmiana oporu płytek metalowych pod wpływem zmiany temperatury 393
- Eucken, Etzrodt — wartości siły elektromotorycznej termogniw 407; współczynnik zjawiska Halla 525



- Euler — wzór na prędkość rozchodzenia się drgań w strunie 109
- Ewing — wyjaśnienie zjawisk histerezy 340; — odróżnienie od zjawiska opóźniania się magnesowania 340; pomiary sprawdzające wzór Steinmetza 345
- Exner — sonda jonizująca 281
- Faraday — wprowadzenie terminu „dielektryk” 168; — umiejscowienie naboju na powierzchni przewodnika 173; — puszka F-a 175; — zasada zachowania elektryczności 177; — znak elektryzacji pocieranych ciał 177; — teoria pola elektrycznego 213—216; — pomiar stałej dielektrycznej 260; — prądy indukowane 528; — prawa elektrolizy 418; stała 421; F-a doświadczenie z magnesem obracającym się dokoła przewodnika prądu 540; — F-a ekstraprąd 543; — doświadczenie ilustrujące ruch swobodny masy magnetycznej pod działaniem pola magnetycznego prądu elektr. 470
- Favre — stosunek ciepła chemicznego do ciepła voltaicznego ogniwa 452;
- Favre i Silbermann — sprawdzenie doświadczenia wzoru W. Thomsona 450
- du Fay — ustalenie istnienia tylko dwu rodzajów naboju 171
- Federsen — rozbrojenie się kondensatora poprzez iskiernik 621
- Ferry — zależność stałej dielektrycznej od częstości zmian natężenia pola 260
- Fizeau i Doppler — zjawisko Dopplera-Fizeau 95 i nast.
- Fizeau — wpływ połączenia kondensatora z przerywaczem na pracę przerywacza 564; — pomiar przeciętnej prędkości rozchodzenia się zaburzeń elektromagnetycznych wzdłuż drutów 645
- Fletcher i Wegel — wartość progu słyszenia 32; — zależność progu czułości od częstości drgań 72
- Foe — wyodrębnienie momentu wzbudzonego przez pole zewnętrzne i wypadkowego momentu magnetycznego cząstki elementarnej 332
- Foex — sprawdzenie prawa Weissa 329
- Fontana — badanie elektrostrykcji 273
- Foucault'a prąd 534; — wahadło 535
- Fourier — wzór Fouriera 53, 54, 56, 587
- Franke i Walther — elektryzowanie się pyłu węglowego 178
- Fraser — badanie zjawiska Benedicksa 401
- Fresnel — zasada Huygensa-Fresnela 69 i nast.; — 75; — wzór na stosunek energii wchodzącej i przechodzącej przez dane środowisko 91; F-a konstrukcja 595 i nast.; 614 i nast.
- Fritts — stała dielektryczna gazów 261
- Gans — zmiana wartości natężenia koercji niklu dla wyższych temperatur od 0°C 345
- Gaugain — piroelektryczność 274; — busola 504
- Gauss — twierdzenie G-a, dotyczące strumienia indukcji elektrycznej przez powierzchnię zamkniętą 200; — G-a położenie główne 304 i nast.; 356; — metoda magnetometru 360; — magnetometr dwunilkowy 360; — układ jednostek 473; — rachunek przy pomocy wielkości urojonych 600



- Gay-Lussac, Arago, Bouvard, Humboldt, Prony — prędkość rozchodzenia się zaburzeń w powietrzu 20
- Gellhoff — pomiar amplitudy drgania 33
- George — teoria drgań struny 117
- Gerlach i Schottky — mikrofon wstęgowy 40
- Gilbert — wzbudzenie elektryzowania przez tarcie 168
- Giorgi — układ jednostek 476
- Gmelin — niejednakowa zmiana stężenia elektrolitu w pobliżu obu elektrod 426
- Goldhammer — badanie działania przerywacza elektrolitycznego 564
- Goldman — teoria drgania płyt 133
- Gosh — teoria drgań struny 117
- Gouy — wyznaczanie wrażliwości magnetycznej ciał dia- i paramagnetycznych 324; — G-a badania naboju rozsianego w elektrolicie 449
- Gray — własności przewodników elektrycznych 168; — elektryzowanie przez zetknięcie 169; — pomiary sprawdzające wzór Steinmetza 345
- Grossmanna wzór 493, 494, 495, 496
- Groszkowski — tłumienie drgań elektromagnetycznych 153
- Guericke — odpychanie elektryczne 168
- Gullibrand — zmiany wiekowe magnetyzmu ziemskiego 361
- de Haas i Wiersma — użycie zjawiska magnetoelektrycznego do otrzymania b. niskich temperatur 333
- de Haas, Aubel, Voogd — nadprzewodnictwo stopów 390
- Haber i Tołłoczko, H. i Zawadzki — przewodzenie prądu przez ogrzane niemetaliczne kryształy 418
- Hahnemann i Hecht — twardość akustyczna 36
- Hajeck — doświadczalne sprawdzenie prawa załamania fal głosowych 93
- Hall — odkrycie zjawiska galwanomagnetycznego 523; — dodatniego, ujemnego, poprzecznego, podłużnego 524
- Harmuzescu — pomiary wartości c 658
- Hany — piezoelektryczność 276
- Harrison — zmiana wartości pozostałości magnetycznej niklu dla wyższych temperatur od 0°C 345
- Hartridge i Cosens — wrażenie dźwięku 54
- Heaviside — elektryty 269; warstwa H-a 282
- Hecht i Hahnemann — twardość akustyczna 36
- Heisenberg — działanie wzajemne magnesów elementarnych w ciążach ferromagnetycznych 348
- Helmholtz — wzór na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w gazie, zawartym w rurze 23, 41; — dźwięk 54; — rozkładanie przez ucho dźwięku na tony 59; — rezonator 60; — ulepszenie mikroskopu wibracyjnego 67; — badania drgań struny 117; — teoria drgań sprzężonych 153; — H-a objaśnienie zjawiska elektrod rtęciowych 448; — H-a uzasadnienie reguły Lenza 530; — zmniejszenie błędu w pomiarach za pomocą busoli wstaw 504
- Hertz — oscylator liniowy 632, 646; — rezonans 640; — doświadczenie z rozbiciem fal elektromagnetycznych od powierzchni zwierciadła metalowego 654—655



- Hesechus — załamanie fal głosowych 92
- Heusler — stopy manganu, miedzi i cyny 335, 339
- Heydweiller — punkt krytyczny Vollari'ego dla niklu 348
- Higgins — śpiewający płomień 164
- Hilbert i Courant — teoria drgań sprzężonych 153
- Himsted i Widder — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 25
- v. Hippel — teoria metody pomiaru zmian ciśnienia akustycznego przez pomiar zmian temperatury środowiska 40
- Hittorf — nierówność prędkości kationów i anionów 426; H-a liczby 428, 429, 434
- Hoffman — elektrometr kwadrantowy 253
- Hoffman i Ebert p. Ebert i Hoffman
- Holm — teoria mikrofonu 39
- Hooggerwerf i Einthoven — strunowy fonograf 58
- Hopkinsonowie J. i E. — analogia między obwodem elektrycznym i magnetycznym 518
- Hospitalier — badanie zjawiska naskórnego w zależności od częstości prądu zmiennego 625
- Hubbard i Carman — p. Carman i Hubbard
- Hubbard i Loomis — prędkość rozchodzenia się drgań sprężystych w cieczech 27
- Hughes — mikrofon węglowy 38
- Humboldt, Arago, Bouvard, Gay-Lussac i Prony — rozchodzenie się zaburzeń sprężystych w powietrzu 20
- Humby — uginanie się fal głosowych 76
- Humphreys — prędkość pozorna zaburzeń akustycznych 94
- Huygens — zasada zachowania małych odchyłeń 44; — zasada H-a — Fresnela 69 i nast.; 75
- Idrac — pomiar natężenia pola elektrycznego Ziemi 281
- Jaeger i Steinwehr — stosunek dżuła bezwzględnego do kalorii 373
- Jahn — oziębianie się ogniwa podczas przepływu prądu 452
- Jeżewski — zależność stałej dielektrycznej od pola magnetycznego 262
- John — potwierdzenie wzoru Joule'a 373
- Johnsen — Rahbeck — zjawisko Johnsen-Rahbecka 272
- Jones — znak elektryzacji pocieranych ciał 178
- Joule'a ciepło — energia ujarzmiona w postaci ciepła podczas przepływu prądu elektrycznego przez przewodnik 372
- Kalähne — kolejne położenia drgającej struny 114; — zależność tonu zasadniczego struny od rodzaju środowiska 116; — teoria drgań prętów 125; — teoria drgań płyt 130
- Kalinowski — pomiary wartości elementów magnetyzmu ziemskiego 358
- Kammerlingh Onnes i Wolfke — stała dielektryczna helu 261
- Kammerlingh Onnes i Woltjer — badanie zależności wrażliwości magn. w niskich temperaturach od natężenia pola magn. 329
- Kammerlingh Onnes — nadprzewodniki 389, 390; — doświad-



- czenie z pierścieniem ołowianym 391; — Kam. On. i Tuyn — nadprzewodnictwo indu, irydu 390
- Kapitza pomiary wrażliwości magnetycznej bizmutu 327; — wzrost oporu elektrycznego bizmutu w polu magnetycznym 393; — silne pole magnetyczne 521
- v. Karman — teoria przyrządów fletowych 161; — i Rubach 161, 164
- Kaufmann W. — teoria drgań struny 117
- Kaufmann i Erhardt — zależność własności magnetycznych ciał ferromagnetycznych od częstości zmian pola magnetycznego 341
- Kaye i Sherrat — sprawdzenie wzoru Helmholtza-Kirchhoffa 23; — prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w wodrze i bezwodniku węgla 24
- Keesom — nadprzewodnictwo cyny, galu glinu, cynku 390
- Kircher i Wigand — sonda jonizująca 281
- Kirchhoff — wzór na prędkość rozchodzenia zaburzeń sprężystych w gazie, zawartym w rurze 23, 41; — teoria drgania płyty kolistej 132; — pojemność kondensatora płaskiego 232; — proporcjonalność natężenia prądu do natężenia elektrycznego w danym miejscu drutu 366; — K-a prawa 375, 376; — stałość prędkości rozchodzenia się zaburzeń elektromagnetycznych o wielkiej częstości 645
- Klemencic — stała dielektryczna gazów 261; — pomiar wartości c 659
- Klupathy — badanie działania przerywacza elektrolitycznego 564
- Koch — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 26
- Kohlrausch — elektrometr 256; — różnicowa metoda pomiaru oporów 385
- K. i E. H. Weber — niezależność równoważnika elektrochemicznego srebra od temperatury 421; — K. zastosowanie telefonu do mostku Wheatstone'a na prąd zmienny 430; — K. i Heydweiler — przewodnictwo właściwe czystej wody 432
- Kohlschutter i Tuscher — rozmieszczenie dipoli elektrycznych wzdłuż linii sił 269
- Kolacek — zależność zasadniczego tonu struny od rodzaju środowiska 116
- König — pomiar amplitudy drgań 34; — teoria płytki Rayleigha 35; — manometr K-a 56; — teoria drgań sprzężonych 153; drgania widełek strojowych 154; — teoria rury Kundta 158; — doświadczenie ze zjawiskiem Thomsona 396
- Kranz — wartość progu słyszenia 32
- Kretschmera przyrząd do demonstracji ruchu prostoliniowej gałęzi obwodu elektrycznego w polu magnetycznym 499
- Krigar Mentzel i Raps — drgania struny 114, 115
- Krüger i Strouhal — tony cięte 164
- Kundt — rura Kundta 157 i nast.
- Kurti i Simon — nadprzewodnictwo hafnu, cyrkonu, kadmu 390
- Kusti, Lainé, Rollin i Simon — własności ferromagnetyczne alunu żelazowoamonowego 346



- Lacroix** — nienormalna odległość słyszenia wielkich wybuchów 94
- Ladenburg R. i Angerer** — wpływ prędkości wiatru na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w powietrzu 19; — prędkość fali wybuchu w pobliżu źródła zaburzeń 20; — prędkość zaburzeń sprężystych 21; — wpływ niejednorodności fizycznej powietrza na powstawanie echa 88; — rozchodzenie się fali wybuchu 102
- Laird** — zależność tonu zasadniczego struny od rodzaju środowiska 116
- Lamb** — teoria drgań prętów 125; — teoria drgań płyt kolistych 132
- Lamont'a** udoskonalenie metody Gaussa i zastosowanie do pomiarów natężenia składowej poziomej pola magnetycznego ziemskiego 356
- Lane** — butelka Lane'a 256
- Langevin** — wytwarzanie ultradźwięków 75; — teorie paramagnetyzmu 329; 332; L-a wzory teorii ferromagnetyzmu 349 i nast.
- Laplace** — wzór na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w gazie 17, 24, 25; — równanie L-a, wyrażające wartość  $\text{div}$  w obszarze nie zawierającym nabożów elektrycznych 206; L-a wyznaczenie działania elementarnego 481
- Lebediew** — długość drogi, na jakiej natężenie spada do 0,01 wartości początkowej 42
- Le Chatelier i Braun** — zasada 333
- Lecher** — pomiar współczynnika Peltiera 414; — L-a układ 635—640; pomiary prędkości rozchodzenia się zaburzeń elektromagnetycznych wzdłuż drutów 645 i nast.
- Le Conte** — stwierdzenie istnienia cienia geometrycznego, wytworzonego przez falę głosową 75
- Leduc i Righi** — zjawiska termomagnetyczne 526; — współczynnik 526
- Lefèvre** — pomiar stałej dielektrycznej 260
- Lenard** — elektryzowanie się powietrza w pobliżu wodospadów 178
- Mac Lennan** — otrzymywanie temperatur bliskich zera bezwzględnego 333; M. L. Allen, Wilhelm — nadprzewodnictwo niobu, ołowiu, rutenu, talu, tantalu, toru, tytanu 390
- Lenz** — potwierdzenie wzoru Joule'a 373; L-a reguła 530; — pomiary 534, 538, 543; — pomiar oporu w jednostkach bezwzględnych 580
- Le Roux** — p. zjawisko Thomsona; 398
- Lichte i Barkhausen** — zmiana natężenia dźwięku w wodzie 44
- Lippmanna** elektrometr kapilarny 448
- Lissajous** — wykreślenie drgań złożonych 63; — krzywe L-a 67; 123 — mikroskop wibracyjny 67; — wyznaczanie położeń węzłów na drgających prętach 126
- Lloyd** — waga do wyznaczania zmian składowej pionowej pola magn. ziemskiego 360
- Lodge** — rozmieszczenie dipoli elektr. wzdłuż linii sił 269
- Loomis i Hubbard** — prędkość rozchodzenia się drgań sprężystych w cieczach 27
- Lorenz L.** — metoda pomiaru oporu w jednostkach bezwzględnych 578, 580—81
- Low** — wpływ częstości drgań na ich prędkość rozchodzenia się 24



- Lukas — zmiana natężenia dźwięku w wodzie 44
- Lukinsky i Prilezajew — potencjał zetknięcia 402
- Lummer — trzask bicza 101
- Lutze — sonda kroplowa 281
- Lutz i Schaefer — zależność wysokości tonu od ciśnienia w instrumentach stroikowych 163
- Maas i Cuthberson — p. Cuthberson i Maas
- Mach — prędkość rozchodzenia się fali w pobliżu ogniska wybuchu 101
- Maggi'ego zjawisko 527
- Majorana — zmiana oporu płytek metalowych pod wpływem światła 393
- Mallet i Dalton — pomiary przy użyciu tarczy Rayleigha 35
- Marbe i Déguisne — dalsze udoskonalenie przyrządu Königa 57
- Mariotte — przyrząd służący do odwzorowania odbić kul sprężystych 79
- Marti — prędkość głosu w wodzie 57
- Mascart — elektrometr kwadrantowy 253
- Masław i Rzewkin — granica słyszenia 16
- Massolle, Vogt i Engel — katodofon 58
- Mateucci — Wiedemann — zjawiska występujące przy skręcaniu i magnesowaniu ciała 348
- Mathieu — drgania płyt eliptycznych 131
- Maurain — prędkość przeciętna fal wybuchu 94
- Mauchly — dzienne maximum natężenia pola elektrycznego Ziemi 284
- Maxwell — sprawdzenie doświadczalne prawa Coulomba 185; — wzbudzanie pola elektrycznego przy elektryzowaniu przewodnika 199; — teoria pola elektrycznego 213—216; — poprawka do wzoru na przyciąganie się wzajemnie płytek w elektrometrze W. Thomsona 248; — pozostałość dielektryczna 270; — układ jednostek elektrycznych 476; — jedna z postaci równań 542; — metoda wyznaczania bezwzględnej wartości współczynnika indukcji własnej 556 i nast.; — prąd przesunięcia 650; — równania i teoria 650—654; — pomiar wartości  $c$  658
- Mazur — pomiar stałej dielektrycznej 261
- Meissner i Ochsenfeld — zachowanie się nadprzewodników w polu magnetycznym 327; M. — opór szczątkowy 389
- Mendelssohn i Daunt — nadprzewodnictwo lantanu 390
- Mercadier — wzór na zasadniczy ton kamertonu 127
- Mercier — obwody o drganiach niegasnących 647; — prędkość rozchodzenia się zaburzeń elektromagnetycznych wzdłuż drutów 647
- Mersenne — wyznaczenie częstości drgań struny 111
- Merrit i Nichols — ulepszenie przyrządu Königa 57
- Meyer E. — przyrząd mierniczy, w którym stosowana jest tarcza Rayleigha 35; teoria katodofonu 58
- Michels — stała dielektryczna gazów 201
- Millikan — wartość liczby Avogadry 422; — wartość elementarnego naboju elektrycznego 422
- Modzelewski — rozmieszczenie dipoli wzdłuż linii sił silnego pola elektrycznego 268



- Mönch — potencjał zetknięcia 402  
 Morton i Vinycomb — drgania struny 115  
 Musschenbroek — butelka lejdejska 234
- Nadžanow — termo i fotoelektrody 269  
 Neefa młotek 563  
 Nieklepajew — pochłanianie drgań o wielkiej częstotliwości 42  
 Neumann — współczynnik indukcji wzajemnej dwu obwodów 555  
 Neyreneuff — załamanie fal głosowych 93  
 Neuscheler — pomiary ciśnienia akustycznego, oparte na pomiarze zmian temperatury 40  
 Nernst — teoria ogniw galwanicznych 439; — uogólnienie teorii ogniw ciekłych 443; — N-a i Jaegera galvanometr 508; — N-a Ettingshausena zjawisko 525, 526; zj. podłużne 527  
 Nichols i Merrit — ulepszenie przyrządu Königa 57  
 Niemöller — pomiary działań elektrodynamicznych w elektrodynamometrze 514  
 Niewodniczański i Boorse — opór glinu w niskich temperaturach 390  
 Nobili — pierwsze wyznaczenie doświadczalne rozmieszczenia w przewodniku powierzchni jednokowej gęstości 370; — astatyzowanie wewnętrzne 505, 507  
 Nordheim — badanie zjawiska Benedicksa 401
- Occhialini i Bodaren — p. Bodaren i Occhialini  
 Oersted — odchylenie igły magnetycznej w pobliżu przewodnika, przewodzącego prąd 456
- Ohm — rozkład ruchu okresowego 59; proporcjonalność natężenia prądu do natężenia pola elektrycznego w danym miejscu drutu 366; — O-a prawo 367  
 Ollivier — doświadczenia z wiatrem elektrycznym 222; — rozdzielanie strumienia indukcji magnetycznej w elektromagnesie 520  
 Oppel — tony odbicia 87
- Pacinotti'ego lub Gramme'a pierścień 566  
 Palmy — elektrometr bezwzględny do mierzenia wysokich napięć 248  
 Pan Tcheng Kao — prędkość rozchodzenia się ultradźwięków 24  
 Paschena galvanometr 507  
 Parker, Dixon i Campbell — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 25  
 Partington i Schilling — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 25  
 Patterson i Baedeker — opór przewodników b. cienkich 394  
 Pecllet — znak elektryzacji pocieranych ciał 178  
 Pellata — elektrodynamometr 514, 515  
 Peltier — zjawisko 412 i nast.; krzyż 412; — współczynnik 413; — ciepło 413  
 Pérot — pomiar stałej dielektrycznej 260  
 Perrier — zależność własności piezoelektrycznych od temperatury 277  
 Pérot i Dussaud — załamanie fal głosowych 93  
 Perucca — krzywe histerezy 341, 342, 343; — doświadczenie ilustru-



- jące zmiany własności magnetycznych ciał ferromagnet. zachodzące przy podgrzewaniu 346; — potencjał zetknięcia 402
- Piekara** — pomiar stałej dielektrycznej 261
- Pielemeir** — prędkość rozchodzenia się ultradźwięków 24
- Pierce** — prędkość rozchodzenia się ultradźwięków 24; — zmniejszanie się energii fal ultradźwięków wraz z odległością 42; — interferometr ultradźwiękowy 159
- Pietenpol i Miley** — zmiana oporu właściwego w temperaturze topnienia 387
- Pixii** — prądnicza 566
- Planck** — napięcie galwaniczne 401
- Pliniusz Starszy** — elektryzowanie przez tarcie 168
- Poggendorf** — busola wstaw 503, 504
- Poincaré** — wzór na współczynnik indukcji własnej 633; — tłumienie drgań oscylatora 646
- Poisson** — wzór na odbicie akustycznej fali płaskiej 77; — teoria drgań prętów 125; — teoria drgań błony 131; — równanie Poissona ustalające związek między gęstością elektryczną i potencjałem 205; — pierwsze pomiary składowej poziomej natężenia pola magnetycznego ziemskiego 356
- Pouillet** — niejednakowa zmiana stężenia elektrolitów w pobliżu obu elektrod 426; — użycie busoli stycznych do pomiaru natężenia prądu 503; — busola wstaw 503
- Poulson** — ulepszenie metody odtworzenia dźwięków 59
- Powell i Roberts** — teoria drgań płyt kolistych 132
- Prandtl** — teoria powstawania wirów 161
- Preuss** — badanie nasycenia namagnesowania w kobalcie w polu magn. o dużym natężeniu 337
- Prony, Arago, Bouvard, Humboldt, Gay-Lussac** — prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w powietrzu 20
- Quet** — wyznaczenia wrażliwości magnetycznej ciał dia- i paramagnetycznych 326
- Quincke** — przyrząd do wykazania interferencji fal głosowych 49; — rura Q-go 158; — pomiar stałej dielektrycznej 260; ruch dielektryku w słabo przewodzącej cieczy 272; — wyznaczanie wrażliwości magnetycznej cieczy 325
- Raman i Banerji** — teoria drgań struny 117
- Raps i Krigar-Menzel** — drgania struny 114, 115
- Ratz** — przesunięcie strzałek wewnątrz rury drgającej 156
- Rayleigh** — tarcza R-a 34, 35; — zastosowanie zasady Huygensa-Fresnela do zjawisk akustycznych 75; — wzór na odbicie akustycznej fali płaskiej 77; — odbicie fali zaburzeń sprężystych od ogrzanego słupa powietrza 88; — R. i Braun — teoria drgań struny sztywnej 116; — teoria drgań prętów 125; — teoria drgań płyt 130; — teoria drgań sprzężonych 153; — wpływ zmienności przekroju rury na częstość drgań własnych 159; teoria śpiewającego płomienia 165; — R-a i Sidgwicha — waga 515, 516; — metoda wyznaczania bezwzględnej wartości współczynnika indukcji własnej 566 i nast.
- Rechel** — sprawdzenie wzoru Helmholtza-Kirchhoffa 23



- Reech — wzór na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w gazie 18
- Regener — badanie zjawiska Johnsen-Rahbecka 273
- Regnault — metoda pomiaru rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 21; — prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w rurze, zawierającej badany gaz 22
- Richards i Fabes — doświadczalne potwierdzenie wzoru wyrażającego siłę elektrodźczą ogniw w ciekłych elektrodach 444
- Richardson — teoria śpiewającego płomienia 165
- Riecke i Voigt — piroelektryczność 274; R. — badanie kryształów piroelektrycznych 275, 276
- Riemann — teoria fal wybuchu 103
- Riess — badanie rozkładu naboju na powierzchni przewodnika 221; — energia kondensatora (termometr elektryczny) 241; — ciepło wywiązane przy rozbrojeniu kondensatora 372
- Riesz — zależność progu słyszenia od częstości 42
- Righi — zjawisko termomagnetyczne 526
- Ritchie — prądnicą 566
- Ritz — teoria drgań płyt kwadratowych 133
- Roberts i Powell — teoria drgań płyty kolistej 132
- Roentgen — teoria piroelektryczności 276
- Rosas, Doruy, Miller — pomiary natężenia prądu w jednostkach bezwzględnych 581
- Rose i Roy — prędkość rozchodzenia się ultradźwięków 24
- Rotgart — badanie zjawiska Johnsen-Rahbecka 273
- Rowlanda działanie naboju elektrycznych rozmieszczonych wzdłuż obracającego się pierścienia 473
- Roy i Rose — prędkość rozchodzenia się ultradźwięków 24
- Rubach i Karman — teoria przyrzędów fletowych 161; — tony cięte 164
- Rubens — galwanometr wibracyjny 594
- Ruhmkorffa cewka 559 i nast.
- Rzewkin i Masłow — granica słyszenia 16
- de Saint-Venant — zastosowanie teorii sprężystych S.-V.-a do drgań pręta 121
- Sarasin i de la Rive — rezonans wielokrotny 646; — pomiary interferencji fal elektromagnetycznych 655
- Sato — zachowanie polaryzacji przez dielektryk 269
- Savart N. — drgania struny sztywnej 116
- Savart P. — obliczenie spółczynnika Poissona 121; — powstanie przy podłużnych drganiach pręta drgań podłużnych 126; — badania drgań błony 131; badania drgań płyty kwadratowej 133; — wpływ przekroju rury na częstość drgań własnych 159
- Schaefer i Lutz — zależność wysokości tonu od ciśnienia w instrumentach stroikowych 163
- Schellbach i Boehm — załamanie fal głosowych 93
- Shilling i Partington — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 25
- Schmidt — pochłanianie energii fal sprężystych 42



- Schottky i Gerlach — mikrofon wstęgowy 40; — Schottky — teoria drgań sprzężonych 153
- Schrödinger — pochłanianie energii fal sprężystych 42
- Schubert — zmiany oporu mikrofonu pod działaniem ciśnienia fal akustycznych 38
- Schulze — wpływ materiału rury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w gazie, wypełniającym tę rurę 23; — teoria drgań prętów 121; — badanie drgań płyt kolistych 132
- Schuster i Waetzmann — teoria drgań sprężonych 153
- Scott — fonautograf 57
- Seebeck — teoria drgania struny sztywnej 116; — wyznaczenie stałej wzoru na częstość drgań pręta 124; — rozchodzenie się zaburzeń wzdłuż prętów 125; zjawisko termoelektryczne 403; — zestawienie metali w szereg wg własności termoelektrycznych 407; — różnice zachowania się metalu zahartowanego i lanego (Barus) 412
- Seignette'a sole 347
- Sherrat i Kaye — sprawdzenie wzoru Helmholtza-Kirchhoffa 23; — prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w wodorze i bezwodniku węgla 24
- Shubnikow i Nakhatin — niejednorodność stanu nadprzewodnictwa 392
- Siemensa magnes dzwonowy 507; — elektromagnes 571
- Silsbee — zależność oporu nadprzewodnika od natężenia pola magnetycznego 391, 392
- Simon — badanie działania przerywacza elektrolitycznego 564
- Smith — pomiar oporu ohma bezwzględnego 581
- Sokołowski i Weiss — hałas 54
- Sondhauss — załamanie fal głosowych 93; — śpiewający płomień 165
- Southwell — drgania płyty kolistej 132
- Specchia — zmiana wrażliwości magnetycznej ciała pod wpływem światła 333
- Stäublein — natężenie koercji stali 339
- Stefan — zjawisko naskórne; zależność wartości gęstości prądu od przekroju, oporu właściwego przewodnika i częstości prądu 625
- Steinmetz — wzór na pracę zużytą podczas jednego cyklu magnesowania 344
- Stephenson — zależność od temperatury prędkości rozchodzenia się drgań sprężystych w wodzie 27
- Sterna badania naboju rozszianego w elektrolicie 449
- Steward i Stilles — stwierdzenie uginania się fali głosowej 75
- Stevens — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 25
- Stilles i Steward — stwierdzenie uginania się fali głosowej 75
- Stokes — promieniowanie ogrzanego powietrza 41; — St-a twierdzenie 468
- Störmer — badania nad zaburzeniami magnetyzmu ziemskiego 362
- Strohlke — wyznaczanie węzłów na prętach 126
- Strouhal — tony cięte 163, 164; — St. i Krüger — tony cięte 164
- Strutt — zależność zdolności magnetycznej ciał ferromagnetycznych od częstości zmian pola magn. 341



- Sturgeon'a przyrząd do badania działania pola magnetycznego na przewodnik prądu 458
- Straubel — zmiana temperatury kryształów piroelektrycznych w polu elektrycznym 278
- Struyken — teoria drgań kamertonu 127
- Sturm i Colladon — prędkość głosu w wodzie 27;
- Suhrmann — zależność wysokości temperatury skoku od natężenia prądu 391
- Sutherland — dysocjacja całkowita 436
- Szatmari — prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 22
- Tait'a wykres (siła elektrobodźcza termoogniwa) 410
- Tales z Miletu — przyciąganie elektryczne 168
- Tangel — stała dielektryczna gazów 261
- Taylor G. B. i Boyle R. W. — niezależność prędkości rozchodzenia się drgań sprężystych w środowisku ciekłym od ich częstości 27; — prędkość w oleju rycynowym 27; — potwierdzenie wzoru na odbicie akustycznej fali płaskiej 47; — T-r — wyprowadzenie wzoru na częstość drgań struny 111
- Terada, Tsutoni, Tomano — badanie zjawiska Benedicksa 401
- Tesli układ 628
- Thomsona E. — doświadczenie z cewką i pierścieniem 588, 589
- Thomson W. (lord Kelvin) — pomiary rozkładu naboju na powierzchni przewodnika 221; — pierścień ochronny w kondensatorze 231; — elektrometr bezwzględny 246—248; — elektrometr kwadrantowy 253; — wyjaśnienie zjawiska piroelektryczności 275; — elektroda kropłowa 281; — pomiar objętościowy gęstości elektrycznej w polu Ziemi 281; — punkt krytyczny Villari'ego dla kobaltu 348; — most 383—384; — zmiana oporu przewodnika poddanego działaniu pola magnetycznego 392; — zjawisko przepływu prądu w przewodniku o niejednakowej temperaturze 395, 415; — współczynnik zjawiska T. 397, 407; temperatura odwrócenia w ogniwie termoelektrycznym 408; — pierwsze i drugie równanie wiążące zdolność termoelektryczną danego ogniwa z ciepłem Peltiera 416; — przemiany odwracalne i nieodwracalne w ogniwie termoelektrycznym 415; — ciepło całkowite wywiązane w ogniwie przy przepływie prądu 450; — udoskonalenie galvanometru astatycznego 506, 507; — galvanometr 508, 512; — pomiar oporu w jednostkach bezwzględnych 578; zjawisko naskórne 625; pomiar wartości  $c$  658;
- Toeppler — metoda fotografowania fal zgęszczenia 72
- Tomaszewski — pomiar stałej dielektrycznej 260
- Terada — teoria drgań błony 131; — badanie drgań płyt kwadratowych 133
- Trendelenburg — teoria termofonu 165
- Tschernyscheff — elektrometr bezwzględny do mierzenia wysokich napięć 248
- Urbain, Weiss, Trombe — własności ferromagnetyczne gadolinu 346



- Valentiner — doświadczenie, wytwarzające indukcję elektrostatyczną 175
- Vance — uzupełnienie wzoru Helmholtza-Kirchhoffa 23
- Vigoureux i Watts — siła elektrodobdźca ogniwa Westona 454
- Villard — elektrometr bezwzględny do mierzenia wysokich napięć 248; — długość fali w widmie wybuchu, której odpowiada maksimum energii 103;
- Villari — wpływ rozciągania żelaznego drutu na namagnesowanie 347; — punkt krytyczny 348
- Violle — ciepło Joule'a wywiązane podczas przepływu prądów Foucault'a 535
- Vogel — doświadczenie sprawdzające zjawiska Dopplera-Fizeau 100; — V. i Wien — teoria instrumentów stroikowych 160
- Vogt, Engel i Massolle — katodofon 58
- Voigt — drgania płyt anizotropowych 132; V. i Riecke p. Riecke i Voigt; V. — polaryzacja kryształu piroelektrycznego 276; — związek między piro- i piezoelektrycznością 278
- Volta — potencjał (zewnątrzny metalu) 401; prawo 402
- Waetzmann i Schuster — teoria drgań sprzężonych 153
- Waibel — stała dielektryczna gazów 261
- Walden — zależność ruchliwości jonów elektrolitu od rodzaju rozpuszczalnika 436
- Walther i Franke — p. Franke i Walther
- Warburg — teoria drgań sprzężonych 153; — energia pochłaniana przez ciało podczas cyklu namagnesowania 342; — przewodzenie prądu przez ogrzane szkło 417, 418; W. i Tegetmeier — podobne własności innych niemetalicznych kryształów 418
- Washburn — badanie elektrolitu w pobliżu elektrod 426
- Wąsik — badanie zjawiska Johnsen-Rahbecka 273
- Weber E. H. — prędkość rozchodzenia się drgań wzdłuż struny 109
- Weber W. — prędkość rozchodzenia się drgań wzdłuż struny 109; — wyznaczenie jednostki natężenia prądu elektrycznego 472, 473, 474; — tłumienie elektromagnetyczne układu ruchomego galwanometru 509; — elektrodynamometr 513, 514; sprawdzenie wzoru na indukowaną siłę elektrodobdźczą 531, 532; — ciepło Joule'a wywiązane podczas przepływu prądów Foucault'a 535; — induktor ziemski 585; W. i Kohlrausch R. — pomiar stosunku jednostki elektromagnetycznej do jedn. elektrostatycznej naboju 656—58
- Webster — wzrost oporu elektrycznego ciał ferromagnetycznych w polu magnetycznym 393
- Wehnelt'a przerywacz elektroli-tyczny 564
- Wegel i Fletcher — wartość progu słyszenia 32; — zależność progu słyszenia od częstości drgań 42
- Weiss — prawo o zależności między wrażliwością magnetyczną ciał paramagnet. i temperaturą 329; — wartość namagnesowania niklu w temperaturze 19°C 337; pomiary sprawdzające wzór Steinmetza 345; — zmiana wartości ciepła właściwego ciała w pobliżu temperatury Curie'go 346; — W-a teoria ferromagnetyzmu 348 i nast.



- W., Kammerlingh Onnes, W., Rosenbohm — pomiary wielokrotności magnetonów 352; W-a magneton 352; — W-a elektromagnes 520, 521
- W. i Sokołowski — hałas 54
- Wente — mikrofon kondensatorowy 39; termofon 165
- Werner — zmiany zależności oporu właściwego od ciśnienia 394
- Wertheim — wyznaczenie współczynnika Poissona 121; — przesunięcie strzałek na zewnątrz rury drgającej 156
- West i Barnes — pomiary przy użyciu tarczy Rayleigha 35
- Westona ogniwo normalne 454; ogniwo 582
- Wheatstone — kalejdoskop 123; — drgania płyt kwadratowych 123; most 382—383; — pierwowzór doświadczenia Hertza 634
- Whipple — prędkość fali wybuchu 94
- Widder i Himsted — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 25
- Wien — wartość progu słyszenia 31; — manometr błonowy 37; — zmiana natężenia fal kulistych w miarę wzrostu odległości 40; — zależność progu słyszenia od częstości drgań 42; — teoria drgań sprzężonych 153; — teoria instrumentów stroikowych 160; — badanie elektrostrykcji 273
- Wigand i Kircher — p. Kircher i Wigand; W. — zmiana przewodnictwa atmosfery 282
- Wiśniewski — wzór, wiążący wartości stałej dielektrycznej z budową drobiny 262; — wrażliwość magnetyczna tlenu i azotu 328
- Witkowski — wpływ zmiany temperatury na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych 25, 26
- Wohlwill — obecność miedzi jednowartościowej w roztworze wodnym siarczanu miedzi 420
- Wolff — prędkość rozchodzenia się fali wybuchu 102
- Wolfke — pomiar stałej dielektrycznej 261; W. i Kammerlingh Onnes p. Kammerlingh i Wolfke
- Wood — zależność od temperatury rozchodzenia się drgań sprężystych w wodzie 27; — fotografowanie fal ugiętych 72
- Wüllner — wyniki pomiarów załamania fal głosowych 93; — wyprowadzenie wzoru na drganie prętów 124; — dane, dotyczące pomiarów rozkładu naboju na powierzchni przewodnika 221; — badanie elektrostrykcji 273; — wyprowadzenie równania na prędkość rozchodzenia się zaburzeń elektromagnetycznych wzdłuż drutów 644
- Young — znak elektryzacji pocieranych ciał 177
- Zenneck — zjawisko naskórne 624
- Zernow — porównanie wzoru Königa na odchylenie tarczy Rayleigh'a z danymi doświadczalnymi 35



Biblioteka Główna UMK



300043429060