



AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA  
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH  
W BYDGOSZCZY

Sesja Naukowa  
Mechanika Stosowana

WYDZIAŁ  
MECHANICZNY

ZESZYTY NAUKOWE NR 243

# MECHANIKA 54

BYDGOSZCZ – 2004





REDAKTOR NACZELNY  
dr hab. Lucyna Drozdowska, prof. nadzw. ATR

REDAKTOR DZIAŁOWY  
prof. dr hab. inż. Maciej Woropay

OPRACOWANIE TECHNICZNE  
inż. Edward Gołata, Ewa Olawińska

© Copyright  
Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej  
Bydgoszcz 2004

ISSN 0208-6395

Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej  
ul. Ks. A. Kordeckiego 20, 85-225 Bydgoszcz, tel. (052) 3749482, 3749426  
e-mail: [wydawucz@atr.bydgoszcz.pl](mailto:wydawucz@atr.bydgoszcz.pl) <http://www.atr.bydgoszcz.pl/~wyd>

---

Wyd. I. Nakład 80 egz. Ark. aut. 16,50. Ark. druk. 21,75. Zamówienie nr 12/2004  
Oddano do druku i druk ukończono w październiku 2004 r.  
Uczelniany Zakład Małej Poligrafii ATR Bydgoszcz, ul. Ks. A. Kordeckiego 20

## PRZEDMOWA

Z satysfakcją przekazujemy Państwu materiały poświęcone Sesji Naukowej „Mechanika Stosowana 2004”.

Oddział bydgoski PTMTiS powstał przeszło 30 lat temu, ale dopiero ostatni okres istnienia zaowocował bardziej zauważalnym działaniem. W 1998 roku odbyła się pierwsza Sesja Naukowa „Dynamika i Wibracje”. Duże zainteresowanie jej tematyką oraz rozwój środowiska naukowego sprawiły, że zdecydowaliśmy się kontynuować te spotkania. W roku 2000 odbyła się Sesja „Mechanika Stosowana 2000”, następna – o podobnym tytule – w roku 2002 i wreszcie obecna.

Najtrudniejsze były początki, dlatego raz jeszcze dziękujemy Panom Prof. Andrzejowi Tylikowskiemu i Prof. Józefowi Niziołowi za pomoc oraz życzliwość, a także Zarządowi Głównemu i jego ówczesnemu przewodniczącemu Panu Prof. Eugeniuszowi Świtońskiemu.

Tematyka obecnej Sesji „Mechanika Stosowana 2004” – podobnie jak i poprzednich – jest bardzo szeroka i w związku z tym organizatorzy nie zdecydowali się podzielić przyjętych artykułów tematycznie. Na spotkaniu zaprezentowane zostaną również referaty plenarne i sesja plakatowa.

Mechanika stosowana jest i pozostanie podstawą konstrukcji i technologii oraz eksploatacji maszyn i urządzeń. Zastosowane programy komputerowe należą do znakomitych narzędzi rozwiązywania zagadnień mechaniki stosowanej. Wspomaganie komputerowe ogranicza czas poświęcony na żmudne obliczenia i rozszerza możliwości analizy, modelowania oraz wnioskowania.

Twórcza myśl naukowa, której zasięg w technice ciągle się poszerza, zawsze opiera się na wynikach badań naukowych. Rozwój kształtuje nasz pogląd na naturę zjawisk otaczającej rzeczywistości i jest wynikiem naszej czynnej woli oraz dążenia do poznania prawdy. W oryginalnych artykułach naukowych z zakresu szeroko rozumianej mechaniki stosowanej przedstawiono jeden z głównych trendów obserwowanych w naszym kraju, a określanym jako podejście systemowe do procesów zachodzących w nauce i technice. Problematyka prac uwzględnia także szeroko rozumiane bezpieczeństwo i efektywność. Treść przedstawionych referatów świadczy o dalszym rozwoju mechaniki stosowanej.

Gorąco dziękujemy wszystkim osobom uczestniczącym w pracach Komitetu Organizacyjnego i Naukowego, pracownikom Katedry Mechaniki Stosowanej oraz władzom Wydziału Mechanicznego i Akademii Techniczno-Rolniczej za życzliwą pomoc i patronat.

**Przewodniczący  
Komitetu Naukowego  
prof. dr hab. inż. Krzysztof Wernerowski**

**Przewodniczący  
Komitetu Organizacyjnego  
dr hab. inż. Henryk Holka  
prof. nadzw. ATR**

20.	Bartosz Nowak, Jerzy Najar: Analiza numeryczna naprężeń w endoprotezie stawu biodrowego z uwzględnieniem wpływu geometrii na wyężenie.....	219
21.	Maria Olejniczak, Mykhaylo Delyavskyy, Lubov Onyshko: Analiza statyczna tarczy włóknistej ze szczelinami .....	231
22.	Anna Podhorecka: Analiza drgań belek z uwzględnieniem efektów geometrycznie nieliniowych przy zastosowaniu metody elementów czasoprzestrzennych .....	241
23.	Robert Ran, Mykhaylo Delyavskyy, Adam Podhorecki: Obliczenia stanu naprężeń w złożonych układach płytowych o nieciągłych warunkach brzegowych .....	253
24.	Jan Sadowski: Wyznaczanie dynamicznego materiałowego modułu rozdzielenia dla wybranych stopów metalowych .....	263
25.	Jerzy Sawicki, Tomasz Paczkowski: Obróbka elektrochemiczna krzywoliniowych powierzchni obrotowych .....	273
26.	Justyna Sobczak-Piąstka: Pełzanie płyt na podłożu lepkosprężystym.....	287
27.	Krzysztof Wernerowski: Analiza wibroizolatora gumowego z regulacją sztywności.....	299
28.	Arnold Wilczyński, Marek Kociszewski: Badanie modułu sprężystości przy zginaniu płyt drewnopochodnych o strukturze warstwowej.....	307
29.	Tadeusz Z. Woźniak: Modelowanie kinetyki równoczesnego rozpadu austenitu na dwa produkty .....	315
30.	Janusz Zachwieja: Analiza numeryczna obciążenia statycznego oraz drgań płaszcza walczaka obrotowego .....	329

## Spis treści

1. Józef Kubik, Michał Pakuła: Techniki ultradźwiękowe w badaniach <i>in vitro</i> materiałów kostnych. Przegląd zastosowań .....	7
2. Andrzej Tylikowski: Stateczność dynamiczna konstrukcji pod wpływem czasowo-przestrzennych obciążeń przypadkowych .....	23
3. Arkadiusz Mężyk, Eugeniusz Świtoński: Minimalizacja drgań napędów elektromechanicznych .....	33
4. Józef Nizioł: Tłumienie drgań płyt i membran w ujęciu probabilistycznym .....	49
5. Adam Podhorecki: Metoda elementów czasoprzestrzennych w zastosowaniu do rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych .....	59
6. Katarzyna Cabańska-Placzkiewicz, Maciej Wilczyński: Vibrations of the plate with a viscoelastic interlayer .....	67
7. Mieczysław Cieszko, Marcin Kempański: Zastosowanie granicznych modeli przestrzeni porów do interpretacji danych porozymetrii rtęciowej .....	75
8. Mieczysław Cieszko, Wojciech Kriese: Opis anizotropowej struktury przestrzeni porów wiązki kwadratowych włókien ułożonych w siatce kwadratowej. Zastosowanie metryki przestrzeni Minkowskiego .....	89
9. Paweł Frankowski, Henryk Holka: Optymalizacja drgań wydzielonego obszaru układu dyskretno-ciągłego .....	101
10. Joanna Grabowska, Marek Krawczuk, Wiesław Ostachowicz, Magdalena Palacz: Detekcja nieciągłości w pręcie na podstawie analizy propagacji fali Lamba .....	111
11. Elżbieta Grochowska, Jakub Marcinowski, Antoni Matysiak: Badania doświadczalne rozprężanych belek zespolonych stalowo-betonowych .....	121
12. Jacek Jackiewicz: Metoda prognozowania zniszczenia i rozwoju mikro-uszkodzeń w stalach Ni-Mo-Cr w zakresie temperatury przejścia materiału ze stanu plastyczności w stan kruchości .....	131
13. Ryszard Jedliński: Wybrane zagadnienia dotyczące sprawności pojazdu samochodowego .....	141
14. Dariusz Kasprzak: Wyznaczanie trajektorii idealnych i rzeczywistych .....	155
15. Katarzyna Kazimińska, Mariusz Kaczmarek, Bartosz Nowak: Właściwości i wytwarzanie cieczy magnetycznych .....	167
16. Jan Kochański, Józef Kubik: Pomiar prędkości fazowej fal ultradźwiękowych w nasyconym materiale porowatym. Metoda widma amplitudowego .....	179
17. Jarosław P. Lewandowski, Mykhaylo Delyavskyy: Metoda rozwiązania cienkich płyt anizotropowych .....	187
18. Stanisław Mroziński: Wpływ sekwencji programu obciążenia na przebieg procesu stabilizacji stali 45 .....	197
19. Jacek Nitka, Dariusz Buchaniec, Mykhaylo Delyavskyy: Metoda rozwiązywania płyty ciągłej wzmocnionej kratownicami .....	209

## KOMITET NAUKOWY

prof. dr hab. inż. **Krzysztof Wernerowski** – przewodniczący

prof. dr hab. inż. **Józef Kubik**

prof. dr hab. inż. **Eugeniusz Świtoński**

prof. dr hab. inż. **Andrzej Tylikowski**

prof. dr hab. inż. **Wiesław Ostachowicz**

prof. dr hab. **Józef Nizioł**

prof. dr hab. inż. **Antoni Matysiak**

prof. dr hab. inż. **Arnold Wilczyński**

dr hab. inż. **Bronisław Siołkowski**, prof. nadzw. ATR

dr hab. inż. **Adam Podhorecki**, prof. nadzw. ATR

## KOMITET ORGANIZACYJNY

dr hab. inż. **Henryk Holka**, prof. nadzw. ATR – przewodniczący

dr hab. inż. **Jerzy Gołaś**, prof. nadzw. ATR

dr inż. **Jerzy Sawicki** – sekretarz

dr inż. **Maria Olejniczak**

dr inż. **Jan Sadowski**

mgr inż. **Jan Żolnierczyk**

**Katarzyna Łaz**

**Cecylia Sarbinowska**

TECHNIKI ULTRADŹWIĘKOWE W BADANIACH  
*IN VITRO* MATERIAŁÓW KOSTNYCH.  
PRZEGLĄD ZASTOSOWAŃ

Józef Kubik, Michał Pakuła

Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej  
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego  
ul. Chodkiewicza 30. 85-064 Bydgoszcz

W pracy zaprezentowano główne metody ultradźwiękowe stosowane w laboratoryjnych badaniach materiałów kostnych: metodę fali ciągłej i impulsowej, metody mikroskopii ultradźwiękowej i rozpraszania wstecznego. Zdefiniowano ilościowe miary wykorzystywane do charakteryzowania materiałów kostnych w oparciu o pomiary ultradźwiękowe oraz przedyskutowano ważniejsze problemy metodologiczne wynikające ze specyfiki badanych materiałów. Zwrócono uwagę na takie elementy jak niewielkie wymiary dostępnych próbek, niejednorodność i anizotropia materiałów oraz wielofazowy charakter ośrodka. W pracy zebrano reprezentatywne dane liczbowe dla wybranych rodzajów materiałów pochodzenia ludzkiego i zwierzęcego, wyznaczone z pomocą omawianych metod.

Słowa kluczowe: fala ultradźwiękowa, kość zbita i gąbczasta

## 1. WSTĘP

W ostatnich latach obserwuje się gwałtowny wzrost zainteresowania i intensywny rozwój technik ultradźwiękowych w zastosowaniu do diagnozowania i oceny stopnia zaawansowania chorób układu kostnego takich jak: osteoporoza, osteopenia i osteomalacja. Uznana zaletą metody ultradźwiękowej w badaniach *in vivo* jest to, że jest to metoda praktycznie nieinwazyjna dla organizmu. W badaniach laboratoryjnych (*in vitro*) zaś metoda ultradźwiękowa jest wygodna z uwagi na jej nieniszczący charakter, pozwalając na prowadzenie wielokrotnych pomiarów na tej samej próbce (np. w celu badania własności materiałów w różnych kierunkach).

Głównym celem ultradźwiękowych badań kości *in vitro* jest wyznaczanie własności materiałowych. Początkowo badania te były przede wszystkim skoncentrowane na określeniu modułów sprężystości [1,16], przy zastosowaniu metod fali ciągłej lub metod fali impulsowej. Rozwój technik ultradźwiękowych, zwłaszcza zastosowanie metody szerokopasmowej spektroskopii ultradźwiękowej, pozwolił na rozszerzenie zakresu badań i wyznaczanie współczynnika tłumienia lub związanych z nim wielkości charakteryzujących absorpcję w materiałach kostnych jako funkcje częstotliwości oraz wyznaczanie charakterystyk dyspersyjnych [4,10,12]. Aktualnie rozwijane zastosowania ultra-



dźwięków koncentrują się także na wyznaczaniu charakterystyk strukturalnych takich jak udział objętościowy porów oraz ich charakterystyczne wymiary.

Celem niniejszej pracy jest omówienie ważniejszych metod ultradźwiękowych stosowanych w badaniach *in vitro* materiałów kostnych. Pod uwagę wzięto powszechnie znane i stosowane metody fali impulsowej, metodę fali ciągłej oraz względnie nowe techniki badania materiałów kostnych, takie jak metody mikroskopii ultradźwiękowej i rozpraszania wstecznego. Obok przedstawienia idei pomiaru oraz charakterystyk otrzymywanych wyników zwrócono uwagę na ważniejsze problemy wynikające z zastosowań omawianych metod ultradźwiękowych do badań kości. Ponadto mając na względzie bardzo aktualnie dyskutowany w literaturze problem konsekwencji dwufazowej natury kości, w szczególności kości gąbczastych, rozważono istotne problemy interpretacji badań ultradźwiękowych kości jako materiałów dwufazowych.

## 2. METODA FALI CIĄGŁEJ

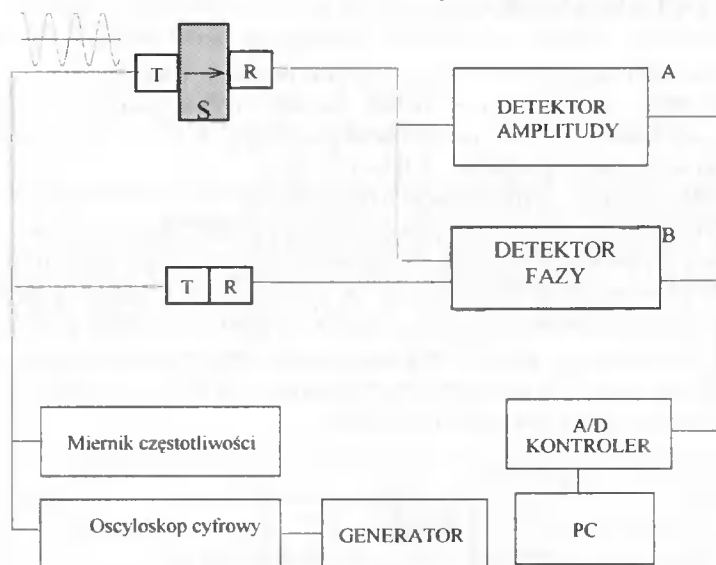
Metodę *fali ciągłej* wykorzystuje się głównie do wyznaczania prędkości propagacji fali, która z kolei może być źródłem informacji o własnościach sprężystych materiału. Ze względu na nieniszczący charakter oraz na fakt, że w pomiarach ultradźwiękowych można wykorzystywać próbki o niewielkich wymiarach (typowe grubości próbek mogą wynosić ok. 1 cm, a nawet mniej) możliwe jest względnie proste określanie własności materiału w różnych kierunkach. W szczególności można także wyznaczyć rolę nasycenia materiału, własności dyspersyjne czy rodzaj anizotropii tkanki kostnej. W pracy [1] zaproponowano zastosowanie fali ciągłej do wyznaczania prędkości fazowej, którą określa się rejestrując przesunięcie fazowe pomiędzy sygnałem przechodzącym przez próbkę a sygnałem odniesienia mierzonym przy użyciu tych samych głowic będących w bezpośrednim kontakcie. Typowe rozwiązanie układu pomiarowego przedstawia rysunek 1.

Sinusoidalny sygnał z generatora jest podawany na głowicę nadawczą. Głowica odbiorcza będąca w bezpośrednim kontakcie z głowicą nadawczą (kanał odniesienia) daje sygnał odniesienia. W równoległym kanale pomiarowym fala generowana w nadajniku jest odbierana po przejściu przez próbkę. Pojawiająca się przy zmianie częstotliwości  $f$  różnica faz  $\Delta\phi$  w kanale pomiarowym i kanale odniesienia jest rejestrowana przez detektor fazy i stanowi podstawę do obliczania prędkości fazowej zgodnie ze wzorem (1):

$$V = 2\pi L \frac{\Delta f}{\Delta\phi}, \quad (1)$$

gdzie:

$L$  – grubość próbki.



Rys. 1. Układ pomiarowy do metody fali ciągłej

W zastosowaniach metod ultradźwiękowych do badań elementów materiałów o niewielkich wymiarach często wprowadza się bezwymiarowy parametr definiowany jako stosunek wymiaru poprzecznego próbki  $d$  do długości fali  $\lambda$ , oznaczany tutaj jako  $K$ . Z uwagi na dyspersję geometryczną wymiary próbek i częstotliwości pomiarowe dobiera się tak, aby spełniony był jeden z dwóch przypadków. Pierwszy, gdy  $K$  dąży do nieskończoności ( $d \gg \lambda$ ) i można przyjąć, że w materiale propaguje się fala objętościowa, lub gdy  $K$  dąży do zera ( $d \ll \lambda$ ), kiedy w elemencie propaguje się tzw. fala prętowa. Biorąc pod uwagę koszty w większości przypadków  $K$  jest rzędu dziesiątek i przyjmuje się, że w takim osrodku propaguje się fala objętościowa i mierzona prędkość fali związana jest z modułem Younga zależnością (1):

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad k = \sqrt{\frac{E}{3(1-2\nu)}} \quad (2)$$

gdzie:

$\rho$  – gęstość badanego materiału,

$k$  – moduł objętościowy,

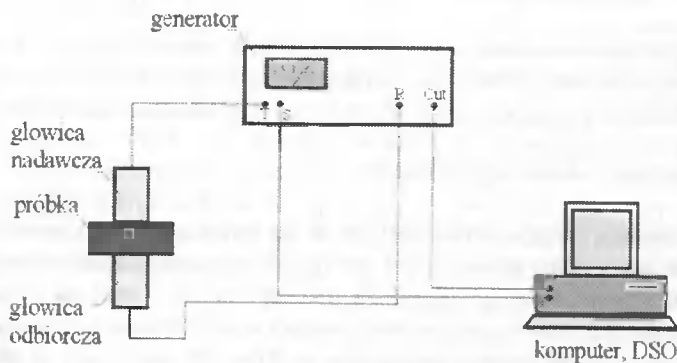
$E$  i  $\nu$  – odpowiednio moduł Younga i liczba Poissona.

### 3. METODA IMPULSOWA

Do najbardziej wygodnych i najczęściej stosowanych w badaniach zarówno materiałów kości zbitej jak i gąbczastej należy technika wykorzystująca *impulsową falę ultradźwiękową*. Głównym celem takich badań jest:

- wyznaczenie prędkości propagacji fali w materiale,
- wyznaczenie parametrów określających tłumienie fal w zależności od kierunku, nasycenia, przygotowania i pochodzenia materiału.

Wyróżnia się impulsową metodę fali przechodzącej i metodę echa. W impulsowej metodzie fali przechodzącej wykorzystuje się dwie głowice (nadajnik i odbiornik sygnałów) umieszczone naprzeciwko siebie, pomiędzy którymi znajduje się badany materiał. Sygnał wychodzący z głowicy pokonuje drogę płyn-próbka-płyn, jest odbierany przez głowicę odbiorczą i w zależności od rozwiązania układu pomiarowego przekazywany na oscyloskop, gdzie jest rejestrowany (rys. 2).



Rys. 2. Układ pomiarowy do metody fali impulsowej w zanurzeniu

Wśród wielu rozwiązań układów pomiarowych, w których badania przeprowadza się dla kości wypełnionych szpikiem jak i materiałów modyfikowanych (usunięty szpik), najbardziej efektywną wydaje się metoda fali przechodzącej w zanurzeniu. Pozwala ona uniknąć wielu technicznych problemów związanych np. z nieodpowiednim, w szczególności niepowtarzalnym, sprzężeniem akustycznym pomiędzy przetwornikiem a próbką, oraz z silnymi własnościami tłumiącymi kości. Jednocześnie jednak w przypadku wykorzystywania wyłącznie sygnałów czasowych istnieją problemy związane z ewolucją kształtu impulsu (trudnością określeniu jego początku) mające swe źródło w dyspersji częstotliwościowej prędkości i tłumieniu zależnym od częstotliwości. W przeciwieństwie do metody fali ciągłej, która wykorzystuje falę monochromatyczną o danej częstotliwości fala impulsowa może być traktowana jako suma fal monochromatycznych o pewnym rozkładzie amplitudowym i fazowym.

Warto dodać, że często wykorzystywana w badaniach nieniszczących innych materiałów ultradźwiękowa metoda echa nie znalazła szerszego zastosowania w badaniach tkanki kostnej. Cechą charakterystyczną tej techniki jest wykorzystywanie jednej głowicy, która naprzemiennie „pracuje” jako nadajnik i odbiornik impulsów (sygnał nadawczy z głowicy wnika do materiału, odbija się od drugiego brzegu próbki i jest odbierany). W efekcie impuls falowy musi pokonać przynajmniej dwukrotną grubość próbki, co

przy silnym tłumieniu fal w takim ośrodku wymagałoby stosowania dużych, nie zawsze osiągalnych lub niewskazanych ze względu na zjawiska nieliniowe sygnałów nadawczych.

### 3.1. Pomiary w oparciu o sygnały czasowe

Stosując zanurzeniową metodę impulsową wyznaczanie prędkości propagacji fali w ośrodku o pomijalnej dyspersji (zależności prędkości fali od częstotliwości), może odbywać się przez pomiar czasu przejścia impulsu przez układ pomiarowy  $t_c$  (tzw. TOF - Time of Flight). Przy znanej grubości próbki  $L$  i odległości pomiędzy przetwornikami  $S$  oraz prędkości w płynie  $V_p$ , prędkość fali  $c_{TOF}$  określa się zgodnie ze wzorem [2,7,17]:

$$c_{TOF} = \frac{V_p L}{V_p t_c + L - S}. \quad (3)$$

Z uwagi na fakt, że w metodzie fali impulsowej opartej na sygnałach czasowych pojawia się problem z precyzyjnym określeniem początku impulsu i związany z nim błąd odczytu szczególnie widoczny dla pomiarów na cienkich próbkach, dla bardziej dokładnego określenia czasu przejścia często uwagę koncentruje się na inny charakterystyczny punkt impulsu (maksimum lub minimum impulsu, punkt pierwszego przecięcia z osią czasu itp.). Aby dodatkowo zminimalizować ten błąd często stosuje się pomiar odniesienia w samym płynie, przy niezmienionej odległości między głowicami. Na tej podstawie wyznacza się opóźnienie czasowe  $\Delta t$  pomiędzy charakterystycznymi punktami impulsu przechodzącego przez próbkę i płyn, z którego oblicza prędkość fali [2,17]. Podobnie jak w metodzie fali ciągłej wyznaczanie prędkości fali w materiale wykorzystuje się do określenia własności mechanicznych tkanki kostnej.

Jeżeli  $A_K$  i  $A_W$  są odpowiednio amplitudami fali impulsowej przechodzącej przez tkankę kostną i płyn odniesienia o niewielkiej absorpcji (najczęściej woda), to tłumienie fali charakteryzuje się przez współczynnik tłumienia, który można określić następująco:

$$\alpha = \frac{1}{L} \ln \left( \frac{A_K}{A_W} \right), \quad (4)$$

gdzie  $L$  jest grubością próbki. Współczynnik tłumienia stanowi źródło informacji o dyssypacyjnych procesach w materiale i ewentualnej niejednorodności, ponieważ jego wielkość zależy od mechanizmów osłabiania fal, takich jak tarcie wewnętrzne i rozpraszanie.

### 3.2. Szerokopasmowa spektroskopia ultradźwiękowa

Bardzo istotnym problemem w badaniach eksperymentalnych materiałów kostnych jest uwzględnienie obserwowanej dyspersji prędkości fal jak i zależności współczynnika tłumienia fali od częstotliwości. W takim przypadku w celu wyznaczenia parametrów propagacji fal niezwykle przydatne jest zastosowanie analizy spektralnej w możliwie szerokim zakresie częstotliwości.

Metoda ta nazywana szerokopasmową spektroskopią ultradźwiękową jest obecnie szeroko wykorzystywanym narzędziem do wyznaczania parametrów falowych na pod-

stawie zarejestrowanych impulsów przechodzących przez tkankę kostną i płyn. Współcześnie stosowane metody spektroskopowe opierają się głównie na tzw. szybkiej transformacie Fouriera – FFT, dostępnej w standardowych bibliotekach oprogramowania i pozwalającej na szybkie wyznaczenie widm amplitudowych i fazowych sygnałów falowych przechodzących przez próbkę kości i przez płyn (rys. 3).

Rozkłady amplitudowe oraz fazowe są podstawą do wyznaczania parametrów falowych: prędkości fazowej i współczynnika tłumienia według następujących relacji (dla układu przedstawionego na rysunku 2) [2]:

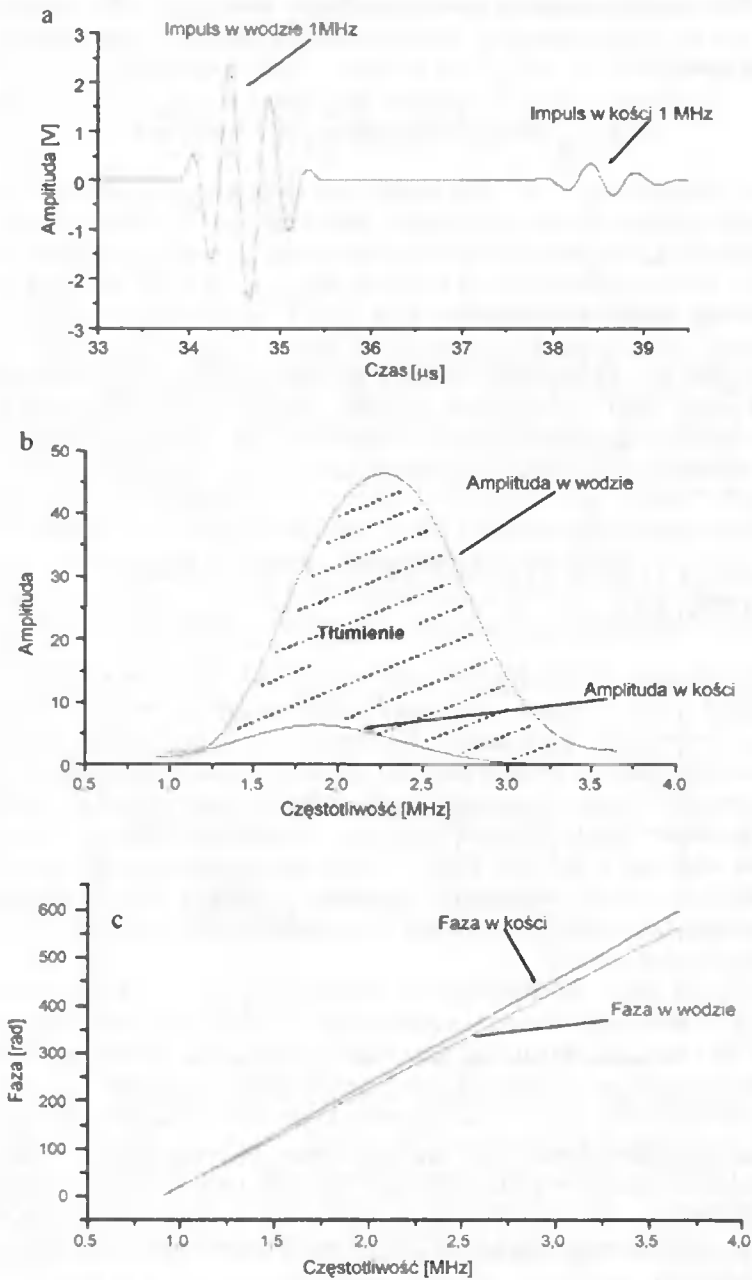
$$V = \frac{2\pi f L}{2\pi n + \varphi_{II} - \varphi_K} \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{1}{L} \ln \left( \frac{A_K(f)}{A_{II}(f)} \right), \quad (6)$$

gdzie  $L$  jest grubością próbki,  $A_K(f)$  i  $A_{II}(f)$  odpowiednio amplitudami, a  $\varphi_K$  i  $\varphi_{II}$  fazami składowych harmonicznych o częstotliwości  $f$  impulsów przechodzących odpowiednio przez próbkę kości i płyn;  $n$  jest całkowitą liczbą długości fal mieszczących się na odcinku  $L$ .

Inną realizacją metody spektroskopii ultradźwiękowej jest technika bazująca na pomiarach dla próbek tego samego materiału, ale o różnej grubości. Na podstawie doświadczeń prowadzonych na kościach gąbczastych (realizowanych w Laboratorium Instytutu) stwierdzono, że założenie o takim samym materiale dwóch sąsiednich próbek (np. kości z tej samej głowy) jest dyskusyjne ze względu na silną niejednorodność i anizotropię kości. Alternatywnym i lepszym rozwiązaniem jest wykonywanie serii pomiarów na próbkach grubszych i kolejnym ich ścinaniu oraz przebadaniu ich na nowo w takich samych warunkach eksperymentalnych.

W 1984 roku Langton wprowadził parametr zwany Szerokopasmowym Tłumieniem Ultradźwiękowym (w skrócie od angielskiego Broadband Ultrasonic Attenuation BUA), [17]. Parametr ten wyznaczony w oparciu o pomiary ultradźwiękowe metodą impulsowej fali przechodzącej i analizę spektralną stał się bardzo użytecznym wskaźnikiem w diagnozowaniu własności strukturalnych tkanki kostnej wykorzystując fakt, że w pewnym zakresie częstotliwości, dla kości ludzkich od 200 kHz do 1 MHz, współczynnik tłumienia wykazuje dodatnią, liniową dyspersję (współczynnik rośnie liniowo w funkcji częstotliwości (rys. 3)).



Rys. 3. Zarejestrowane sygnały czasowe przechodzące przez kość gąbczastą i wodę (a) oraz ich widma amplitudowe (b) i fazowe (c).

W zakresie tym wyznacza się tzw. współczynnik  $BUA$ , który jest tangensem kąta nachylenia dla krzywej tłumienia w funkcji częstotliwości i jest wyznaczany według następującej relacji [2]:

$$BUA = \frac{d}{df} [L\alpha(f)] = \frac{d}{df} \left[ \ln \left( \frac{A_W(f)}{A_K(f)} \right) \right] \left[ \frac{\text{Neper}}{\text{MHz}} \right] \quad (7)$$

Wyższa wartość  $BUA$ , tj. bardziej strome nachylenie krzywej świadczy o lepszym stanie zdrowia pacjenta od którego pobrano tkankę kostną. Wiele prac teoretycznych i eksperymentalnych związanych z pomiarami współczynnika  $BUA$  dla różnego rodzaju kości ukazało się w ciągu ostatnich lat i większość z nich wskazuje, że spadek porowatości determinuje spadek współczynnika  $BUA$  oraz, że dla danej porowatości powiększone wymiary porów powodują zwiększenie wartości tego współczynnika. Warto zwrócić uwagę na fakt, że współczynnik  $BUA$  dla tego samego rodzaju materiału zależy od grubości próbki. Stąd wprowadzono pochodną wielkość  $nBUA$  oznaczającą znormalizowany (odniesiony do grubości próbki) współczynnik  $BUA$ , który jest bardziej reprezentatywną wielkością charakteryzującą materiał kości gąbczastej.

#### 4. WYKORZYSTANIE POMIARÓW ROZPRASZANIA WSTECZNEGO

Z rozchodzeniem fal ultradźwiękowych w ośrodkach niejednorodnych, do jakich należy materiał kostny, związane jest rozpraszanie energii fal w objętości ośrodka i w ogólności we wszystkich kierunkach. Rozpraszanie to uwarunkowane jest występowaniem obszarów, gdzie ma miejsce skokowa zmiana impedancji akustycznej (iloczynu prędkości propagacji i gęstości materiału) i gdzie lokalnie następuje odbicie i załamanie fal na tych granicach opisane prawami Snelliusa. Granicami, na których następuje skokowa zmiana własności w kościach zbitych i gdzie fale są rozpraszane są granice osteonów. Z kolei w kościach gąbczastych rozpraszanie następuje przede wszystkim na granicy pomiędzy beleczkami lub płytkami tworzącymi stały szkielet a płynem wypełniającym przestrzeń porową.

W ośrodkach silnie niejednorodnych, do jakich zaliczane są kości, ma miejsce skomplikowany proces rozpraszania wielokrotnego i w efekcie wzajemne oddziaływanie fal odbitych od i ugiętych na różnych elementach struktury. Wypadkowy sygnał pochodzący od wielokrotnych odbić i ugięć fali wewnątrz badanego materiału i odbierany pod kątem  $180^\circ$  w stosunku do kierunku fali wchodzącej do ośrodka nazywany jest sygnałem wstecznego rozpraszania (backscattering). Obok badań miękkich tkanek biologicznych (p. [24]) wcześniejsze zastosowania metody wstecznego rozpraszania skoncentrowane były na wyznaczaniu wad w materiałach, w szczególności w metalach i kompozytach [20]. Obecnie badania wstecznego rozpraszania są intensywnie prowadzone także dla kości [5,22,23,24].

Ilościową miarą rozpraszania wstecznego jest współczynnik charakteryzujący wypadkową ilość energii odbitej wewnątrz badanego materiału. Współczynnik rozpraszania wstecznego definiuje się jako stosunek przekroju czynnego rozpraszania (differential cross section) mierzonego pod kątem  $180^\circ$  w stosunku do kierunku fali padającej z pewnego obszaru materiału odniesiony do objętości tego obszaru [20]. Pod pojęciem

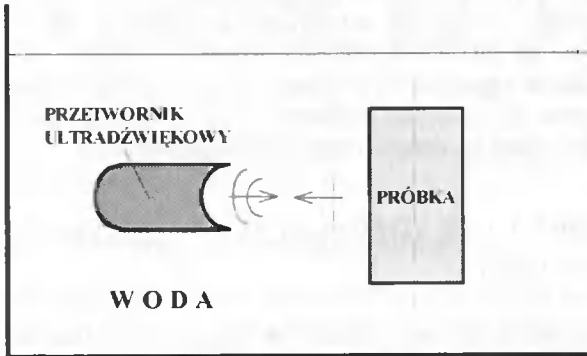
przekroju czynnego rozpraszania rozumie się iloraz całkowitej mocy rozpraszanej do mocy padającej na daną objętość próbki.

Wyznaczenie współczynnika rozpraszania wstecznego  $\eta(\omega)$  dla danej częstości  $\omega$  dokonuje się w oparciu o pomiar tzw. uśrednionej funkcji przejścia rozpraszania wstecznego  $\langle |S(\omega)|^2 \rangle$  przyjmując następującą relację [20]:

$$\eta(\omega) = K \frac{\langle |S(\omega)|^2 \rangle}{V(\omega)} F \quad (8)$$

gdzie:  $K = \frac{R^2}{4T^4}$  i  $F = K \frac{2\alpha(\omega)c\tau e^{4\alpha(\omega)x_0}}{e^{4\alpha(\omega)c\tau} - e^{-4\alpha(\omega)c\tau}}$  reprezentują odpowiednio korektę geometryczną dla danego układu pomiarowego (przede wszystkim korekta dyfrakcyjna) oraz korektę z tytułu tłumienia fali. Ponadto, w powyższych relacjach  $R$  jest odległością przetwornika od ogniska,  $T^2$  jest energetycznym współczynnikiem przejścia fali przez powierzchnię próbki,  $V(\omega)$  oznacza zależną od częstotliwości objętość obszaru próbki mającego udział w mierzonym rozpraszaniu wstecznym,  $\alpha(\omega)$  oznacza współczynnik tłumienia fali w próbce,  $c$  jest prędkością fazową a  $\tau$  jest czasem bramkowania mierzonego sygnału rozpraszanego,  $A(\omega)$  jest 3-dB przekrojem wiązki fali.

Pomiary uśrednionej funkcji przejścia rozpraszania wstecznego  $\langle |S(\omega)|^2 \rangle$  realizuje się najczęściej w zanurzeniu w cieczy przy wykorzystaniu konfiguracji pokazanej na rysunku 4.



Rys. 4. Schemat typowego układu pomiarowego w badaniach rozpraszania wstecznego

Sygnal w postaci fali impulsowej nadawany jest z ultradźwiękowego przetwornika ogniskującego wiązkę, przechodzi przez linię opóźniającą w wodzie i pada na badaną próbkę. Następnie ten sam przetwornik pracuje jako odbiornik sygnału odbitego, w szczególności wewnątrz rozpraszającego. Zastosowanie odpowiedniego bramkowania w dziedzinie czasu pozwala na uchwycenie odpowiedzi materiału (wstecznego rozpraszania) z wnętrza próbki. Funkcję przejścia rozpraszania wstecznego w danym przedziale częstości otrzymuje się przez porównanie amplitud transformaty Fouriera odbitego sygnału z amplitudą transformaty Fouriera sygnału odniesienia, otrzymanego w wyniku odbicia fali od idealnego reflektora usytuowanego w ognisku przetwornika. W celu wyeliminowania zależności funkcji przejścia od konkretnego rozkładu niejednorodności (elementów rozpra-



szających) wyznacza się uśrednioną funkcję przejścia. Uśrednianie odbywa się na zbiorze większej liczby wyników pomiarów wykonanych dla różnych położenia przetwornika względem badanej próbki (w praktyce wygodnym rozwiązaniem jest prowadzenie pomiarów dla cylindrycznej próbki, obracanej względem osi).

Prędkość i współczynnik tłumienia fali, potrzebne dla wyznaczenia parametru rozpraszania wstecznego, mogą być wyznaczone w oparciu o metodę szerokopasmowej spektroskopii ultradźwiękowej. Z kolei funkcję natężenia wiązki łatwo wyznaczyć wykonując pomiary natężenia fali w wodzie z zastosowaniem punktowego przetwornika (np. typu hydrofon) i stosując korektę wynikającą z różnicy prędkości fali w wodzie i w próbce.

W literaturze można znaleźć niezależne dane z pomiarów *in vitro* współczynnika rozpraszania wstecznego dla ludzkiej gąbczastej kości piętowej [5,22,23]. Wyniki Weara w zakresie częstotliwości od 0,4 do 0,8 MHz [24] przedstawiają potęgową zależność współczynnika rozpraszania wstecznego od częstotliwości z wykładnikiem równym  $3,2 \pm 1,4$ . Pomiary Chaffai i innych [5] pokazują, że w zakresie częstotliwości od 0,4 do 1,2 MHz wykładnik potęgowej zależności współczynnika rozpraszania wstecznego od częstotliwości wynosi  $3,38 \pm 0,31$ . Jednocześnie współczynnik tłumienia fali podłużnej w tym zakresie wykazywał w przybliżeniu liniową zależność od częstotliwości.

Badania prowadzone w szerszym zakresie częstotliwości [22], od ok. 1 do 2,5 MHz, pokazały, że współczynnik rozpraszania wstecznego zmienia charakter osiągając dla wyższych częstotliwości wartość stałą. Na uwagę zasługuje fakt, że badania porównawcze współczynnika rozpraszania wstecznego prowadzone *in vivo* dla częstotliwości 2,5 MHz oraz pomiary gęstości kości metodą tomografii komputerowej wykazały dobrą liniową korelację współczynnika rozpraszania wstecznego i gęstości masowej kości (BMD) [23]. Jakkolwiek niezbędne są dalsze prace w celu ustalenia fizycznych podstaw zależności wstecznego rozpraszania i gęstości kości, biorąc pod uwagę rolę struktury badanych tkanek, uzyskiwane wyniki są obiecującą przesłanką dla prowadzenia badań w kierunku diagnostycznego wykorzystania pomiarów wstecznego rozpraszania.

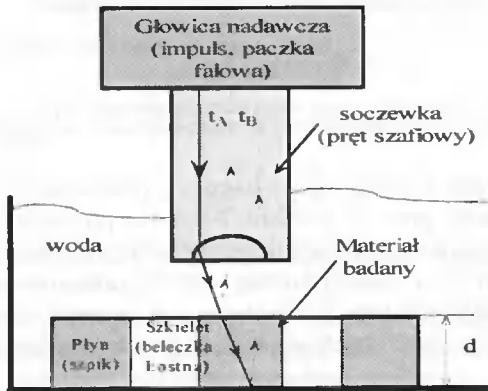
## 5. MIKROSKOPIA ULTRADŹWIEKOWA W BADANIACH TKANKI KOSTNEJ

Pomysł wykorzystania fal ultradźwiękowych wysokiej częstotliwości (50-2000 MHz) w mikroskopii pojawił się już w latach pięćdziesiątych ubiegłego stulecia, jednak dopiero w 1970 r. powstało pierwsze prototypowe urządzenie, które przez następne dwadzieścia lat podlegało ciągłej ewolucji. Początkowo pozwalało ono jedynie na wizualizację struktury materiału na podstawie amplitudy fali odbitej od powierzchni materiału. Obecnie w nowszych mikroskopach ultradźwiękowych wykorzystuje się także informacje zawartą w fazie sygnału akustycznego, która pozwala na wyznaczanie mikroskopowych własności fizycznych materiałów.

Mikroskopia ultradźwiękowa w badaniach tkanki kostnej jest stosunkowo nową dziedziną i obecnie jest intensywnie eksploatowana ze względu na swój nieinwazyjny charakter. Metoda ta pozwala na wielokrotne badanie danego materiału, może stanowić niezależne źródło informacji, oprócz standardowo stosowanych technik badawczych takich jak rentgenografia czy skaningowa spektroskopia elektronowa. W ramach tej metody można wyróżnić [8]:

- badania niskoczęstotliwościowe (dziesiątki MHz), gdzie wyznacza się własności mechaniczne poszczególnych składników kości (szpiku, beleczek kostnych) na podstawie pomiarów prędkości fali akustycznej,
- wysokoczęstotliwościową wizualizację, która pozwala na zobrazowanie danego materiału z dokładnością do ok. 1 mikrometra.

Najważniejszym elementem mikroskopu akustycznego jest element piezoceramiczny najczęściej ZnO lub LiNbO<sub>3</sub> w postaci cienkiej warstwy będący źródłem fali ultradźwiękowej, którego grubość determinuje wybór częstotliwości. Płaska fala akustyczna generowana przez przetwornik jest formowana (ogniskowana) w pręcie (najczęściej wykonanym z szafiru), który pełni także rolę linii opóźniającej. Tak uformowana fala pada na próbkę badanego materiału (rys. 5).



Rys. 5. Idea pomiaru prędkości fali za pomocą mikroskopu ultradźwiękowego

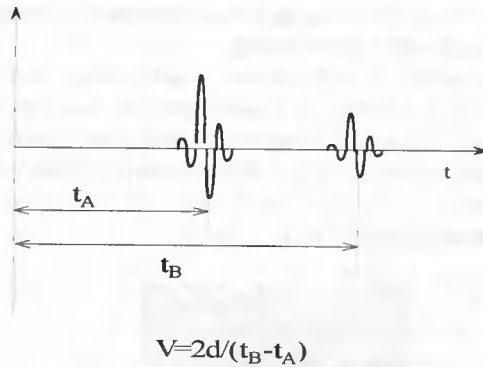
W zależności od rozwiązania technicznego mikroskop może pracować wykorzystując metodę echa lub przejścia (patrz rozdz. 3).

### 5.1. Pomiary prędkości fali akustycznej (podłużnej)

Procedura badawcza opiera się na pomiarze czasu opóźnienia pomiędzy impulsem odbitym od zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni próbki, która ma postać cienkiej warstwy. W metodzie wykorzystuje się głowice ultradźwiękowe o częstotliwościach 50-100 MHz, co przy prędkościach fali w materiałach biologicznych rzędu od 1 do 4 km·s<sup>-1</sup> pozwala na uzyskanie rozdzielczości rzędu dziesiątek mikrometrów i odpowiada rozmiarowi pojedynczej beleczki kostnej lub osteonu. Ważnym elementem procedury badawczej jest właściwe przygotowanie materiału i próbek. W odniesieniu do materiałów kostnych nie ustalono dotąd określonych reguł preparatyki i stąd konieczne jest, aby wraz z przedstawianiem wyników badań omawiać także sposób przygotowania próbek. W eksperymentach prowadzonych na materiałach kostnych zwykle używa się próbek o grubości 0,5-1 mm ciętych z dużą dokładnością (rzędu mikrometrów) diamentową piłą tarczową [7].

W standardowych pomiarach próbki umieszczane są w komorze mikroskopu wypełnionej wodą destylowaną o temperaturze pokojowej. Opóźnienie czasowe pomiędzy impulsem nadanym a przechodzącym przez próbkę mierzone jest przez wewnętrzny

układ lub może być przekazywane na oscyloskop. Przy znanej grubości próbki można obliczyć prędkość fali w danym fragmencie badanego materiału (rys. 6).



Rys. 6. Idea pomiaru prędkości fali akustycznej w mikroskopie ultradźwiękowym (metoda echa)

Tak przeprowadzane badania są wielokrotnie powtarzane i wyniki uśrednione w celu uzyskania większej precyzji pomiaru. Ponieważ prędkość fali akustycznej jest ściśle związana z własnościami sprężystymi materiału, technika ta pozwala na określenie własności poszczególnych faz tkanki kostnej. Ma to zastosowanie np. w badaniach *in vitro* skutków rozwoju różnych chorób kości, np. osteoporozy, która objawia się przez obniżenie własności sprężystych beleczek kostnych oraz zmniejszenie ich objętościowego udziału.

## 5.2. Skaningowa mikroskopia ultradźwiękowa (SMU)

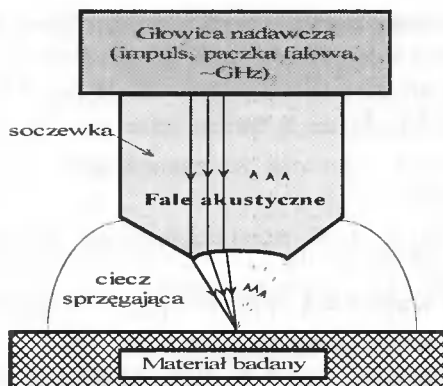
Technika ta operuje częstotliwościami przetworników rzędu tysiąca MHz. Stosowana jest do obrazowania powierzchni tkanki kostnej i wymaga odpowiedniego przygotowania próbek do badań.

Reprezentatywne próbki są wstępnie szlifowane papierem ściernym o grubości ziaren 600-1200, następnie polerowane proszkami aluminium o ziarnistości 1-3  $\mu\text{m}$ . Proces zostaje zakończony, kiedy rysy na powierzchni próbki przestają być widoczne pod mikroskopem. Próbki są nasycone próżniowo i zanurzone w wodzie destylowanej będącej także materiałem sprzęgającym. Pomiar polega na skanowaniu powierzchni impulsem lub paczką falową wysokiej częstotliwości.

Fala akustyczna odbija się od powierzchni próbki (rys. 7), a jej energia jest bezpośrednio związana ze współczynnikiem odbicia zgodnie ze wzorem:

$$R = \frac{Z_b - Z_w}{Z_b + Z_w} \quad (9)$$

gdzie  $Z_b$  i  $Z_w$  są impedancjami akustycznymi odpowiednio materiału badanego (w przypadku tkanki kostnej – beleczka, szpik) i materiału sprzęgającego (woda).



Rys. 7. Idea obrazowania powierzchni materiału w SMU

Impedancja akustyczna natomiast związana jest z własnościami sprężystymi materiału i jest wyrażana jako:

$$Z = \rho V = \sqrt{\rho C}, \quad (10)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością materiału,  $C$  współczynnikiem sprężystości, a  $V$  – prędkością fali w materiale.

Amplituda sygnału odbitego jest proporcjonalna do współczynnika odbicia, stąd jaśniejszy obraz mikroskopowy (większa energia fali) oznacza większą impedancję akustyczną materiału badanego, ponieważ impedancja materiału sprzęgającego (wody) jest stała.

## LITERATURA

- [1] Ashman R.B., Cowin S.C., van Burskirk W.C., Rice J.C., 1984. A continuous wave technique for the measurement of the elastic properties of cortical bone. *Journal of Biomechanics* 17, 349-361.
- [2] Bamber J.C., 1998. Ultrasonic properties of tissues. [In:] *Ultrasound in Medicine*. F.A. Duck, A.C. Baker, H.C. Starritt (eds.). IOP, 57-88.
- [3] Biot M.A., 1956. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low frequency range. *JASA* 28, 2, 168-178.
- [4] Chaffai S., Padilla F., Berger G., Laugier P., 2000. In vitro measurement of the frequency-dependent attenuation in cancellous bone between 0.2 and 2 MHz. *JASA* 108, 3, 1281-1289.
- [5] Chaffai S., Roberjot V., Peyrin F., Berger G., Laugier P., 2000. Frequency dependence of ultrasonic backscattering in cancellous bone: Autocorrelation model and experimental results. *JASA* 108, 5, 2403-2411.
- [6] Cowin S.C., 1999. Bone poroelasticity. *Journal of Biomechanics* 32, 558-562.

- [7] Duck F.A., 1990. Elastic moduli of bone and teeth. Physical properties of tissue – Chapter 5.
- [8] Fonseca R.J.M., 1993. Scanning Acoustic Microscopy – Recent Applications in Materials Science. *Adv. Mater.* **5**, 7/8.
- [9] Hokosawa A., Otani T., Ultrasonic wave propagation in bovine cancellous bone. *JASA* **101**, 1, 558-562.
- [10] Hokosawa A., Otani T., 1998. Acoustic anisotropy in bovine cancellous bone. *JASA* **103**, 5, 2718-2722.
- [11] Hoffmaister B.K., Whitten S.A., Rho Y., 2000. Low-megahertz ultrasonic properties of bovine cancellous bone. *Bone* **26**, 6, 635-642.
- [12] Kaczmarek M., Pakula M., Kubik J., 2000. Multiphase nature and structure of biomaterials studied by ultrasound. *Ultrasonic* **38**, 703-707.
- [13] Katz L.J., Meunier A., 1970. The elastic anisotropy of bone. *Journal of Biomechanics* **20**, 1063-1070.
- [14] Katz L.J., Meunier A., 1997. Scanning Acoustic Microscopy of Human and Canine Cortical Bone Microstructure at High Frequencies. *Bone Research in Biomechanics*, eds. G. Lowet et al., 123-137, IOS Press.
- [15] Laugier P., Droin P., Laval-Jeantet A.M., Berger G., 1997. In vitro assesment of the relationship between acoustic properties and bone mass density of the calcaneus by comparison of ultrasound parametric imaging and quantitative computed tomography. *Bone* **20**, 2, 157-165.
- [16] Lang S.B., 1998. Elastic coefficients of animal bone. *Science* **165**, 287-288.
- [17] Langton C.M., Palmer S.B., Porter R.W., 1984. The measurement of broadband ultrasonic attenuation in cancellous bone. *Engineering in Medicine* **13**, 2, 89-91.
- [18] Litniewski J., Nowicki A., Sawicki A., 2000. Detection of bone disease with ultrasound – comparison with bone densitometry. *Ultrasonics* **38**, 693-697.
- [19] Melish R.W.E., Garrahan N.J., Compson J.E., 1999. Age-related changes in trabecular width and spacing in human iliac crest biopses. *Bone and Mineral* **6**, 331-338.
- [20] O'Donnell M., Miller J.G., 1981. Quantitative broadband ultrasonic backscatter: An approach to nondestructive evaluation in acoustically inhomogenous materials. *J. Appl. Phys.* **52**, 2, 1056-1065.
- [21] Serpe L.J., Rho J.Y., 1995. Broadband ultrasound attenuation values dependence on bone width *in vitro*. *Phys. Med. Biol.* **40**, 1-6.
- [22] Wear K.A., 1999. Frequency dependence of ultrasonic backscatter from human trabecular bone: Theory and experiment. *JASA* **106**, 6, 3659-3664.
- [23] Wear K.A., Garra B.S., 1998. Assessment of bone density using ultrasonic backscatter. *Ultrasound in Medicine and Biology* **24**, 5, 689-695.
- [24] Wear K.A., 2000. Anisotropy of ultrasonic backscatter and attenuation from human cancellous: Implications for relative roles of absorption and scattering in determining attenuation. *JASA* **107**, 6, 3474-4479.



## STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA KONSTRUKCJI POD WPLYWEM CZASOWO-PRZESTRZENNYCH OBCIĄŻEŃ PRZYPADKOWYCH

Andrzej Tylikowski

Instytut Podstaw Budowy Maszyn  
Politechnika Warszawska  
ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa

Obciążenia losowe dużych konstrukcji pochodzące zarówno od wiatru, ruchów skorupy ziemskiej lub fal morskich charakteryzują się przestrzenną korelacją. W pracy przedstawiona jest analiza stateczności dynamicznej typowych konstrukcji jednowymiarowych, takich jak maszty, wieże lub mosty wiszące, poddanych obciążeniu zmiennemu w czasie i przestrzeni prowadzącemu do drgań parametrycznych konstrukcji. Wyprowadzone bezpośrednią metodą Lapunowa dostateczne warunki stateczności wyrażone są przez podstawowe parametry konstrukcji i obciążenia, takie jak współczynnik tłumienia wiskotycznego, wymiary, sztywności oraz intensywności i długości korelacji obciążenia.

Słowa kluczowe: stateczność dynamiczna, metoda Lapunowa, drgania parametryczne, przestrzenna korelacja

### 1. WSTĘP

Dynamika statystyczna w początkowym okresie swojego rozwoju zajmowała się wymuszeniami będącymi jedynie procesami stochastycznymi. Przyjmowano zatem, że wymiary elementu poddanego obciążeniu są na tyle małe, że można zaniedbać przestrzenne zmiany losowe obciążenia. Założenie to jednak jest zbyt upraszczające, gdy wymiary konstrukcji są duże i porównywalne z przestrzennym promieniem korelacji obciążenia. Zjawisko to szczególnie zachodzi przy oddziaływaniu wiatru na konstrukcje cienkościenne mostów. Obserwuje się wówczas powstawanie drgań parametrycznych, przy czym wpływ korelacji przestrzennej może mieć różnorodny wpływ na utratę stabilności. Stochastyczny charakter obciążenia wiatrem był uwzględniony przez Lina i Ariaratnama [5], w analizie pierwszej postaci drgań skrętnych. Ibrahim [4] analizował stateczność momentów statystycznych kąta skręcenia pokładu mostu poddanego obciążeniu wiatrem. Badanie stateczności płaskiej postaci zginania dwuteowych belek poddanych czasowo-przestrzennemu obciążeniu jako stateczności rozwiązań ewolucyjnych było podjęte w pracy [7]. Rozszerzenia tego podejścia dokonał Pavlović [6]. Celem niniejszej pracy jest wprowadzenie konsekwentnego ciągłego modelu do opisu drgań mostu poddanego działaniu sił aerodynamicznych z uwzględnieniem historii obciążenia. Następnie zbadana będzie stateczność dynamiczna nieodkształconej postaci (rozwiązania trywialnego) za pomocą bezpośredniej metody Lapunowa. Zajmiemy się stochastycznym rozszerzeniem pojęcia stateczności w sensie Lapunowa, to znaczy wyznaczymy warunki zapewniające prawdziwość następującego zdania logicznego:

$$\forall_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{r>0} \|u(\cdot,0)\| \leq r \Rightarrow P \left\{ \sup_{t \geq 0} \left\{ \|u(\cdot,t)\|_i \right\} \right\} < \varepsilon \quad (1)$$

Będziemy wówczas mówić o jednostajnej stabilności stochastycznej względem miary odległości  $\|\cdot\|$ .

## 2. RÓWNANIA DRGAŃ SKRĘTNYCH MOSTU

Opisując skręcenie mostu funkcją  $\alpha(t,x)$  uwzględniamy zmienne w czasie oddziaływanie wiatru oraz opóźniony efekt aerodynamiczny Wagnera. Zakładamy ponadto tłumienie wiskotyczne w ośrodku gazowym ze stałym współczynnikiem:

$$\begin{aligned} \alpha_{,tt} + \beta^* \alpha_{,t} + e_1 \alpha_{,xxxx} - e_2 \alpha_{,xx} - a\alpha &= 2(a\alpha + b\alpha_{,x}) \xi(t,x) + \\ + a \int_{-\infty}^t (1 + 2\xi(\tau,x)) [C_1 \exp(-\gamma_1(t-\tau)) + C_3 \exp(-\gamma_3(t-\tau))] \alpha_{,x} d\tau & \quad x \in (0, \ell) \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$e_1 = \frac{EI_w}{I} \quad e_2 = \frac{EI_o}{I} \quad a = \frac{\rho H^2 u^2}{I} \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \quad b = aX_\alpha \quad \beta^* = \beta - b \quad (3)$$

gdzie:  $I$  – masowy moment bezwładności,  $EI_w$  – sztywność paczenia,  $EI_o$  – sztywność skręcania,  $\rho$  – gęstość powietrza,  $H$  – szerokość mostu,  $\ell$  – długość mostu,  $\beta$  – współczynnik tarcia wiskotycznego w ruchu obrotowym,  $x$  – współrzędna,  $u$  – średnia wartość prędkości wiatru,  $u\xi(t,x)$  – czasowo-przestrzenna losowa składowa prędkości wiatru,  $C_1, C_3, \gamma_1, \gamma_3, X_\alpha, \partial c_M / \partial \alpha$  – stałe i funkcje otrzymane na drodze doświadczalnej [3]. Jeżeli przyjmiemy, że turbulentna składowa prędkości wiatru jest gaussowskim szeroko-pasmowym procesem równanie (2) można zapisać w postaci równań ewolucyjnych Itô (por. Chow [1]) w przestrzeni Hilberta  $X$  z iloczynem skalarnym  $\langle \dots \rangle$  nad przestrzenią probabilistyczną  $(\Omega, \beta, P)$ :

$$\begin{aligned} dY_1 &= Y_2 dt \\ dY_2 &= \left[ -e_1 Y_{1,xxxx} + e_2 Y_{1,xx} + aY_1 - \beta^* Y_2 + a(Y_3 + Y_4) \right] dt + 2(aY_1 + bY_2) dW \\ dY_3 &= (-\gamma_1 Y_3 + C_1 Y_2) dt + 2C_1 Y_2 dW \\ dY_4 &= (-\gamma_3 Y_4 + C_3 Y_2) dt + 2C_3 Y_2 dW \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie  $Y_1 = \alpha$ ,  $Y_2 = \alpha_{,x}$ , oraz  $Y_3, Y_4$  są zmiennymi pomocniczymi. Korzystając z zapisu wektorowego mamy:

$$dY = AY dt + [BY] dW \quad x \in (0, \ell) \quad (5)$$

$$Y = \text{col}[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] \quad (6)$$

$W$  jest procesem Wienera o wartościach w przestrzeni Hilberta  $Z$ , z operatorem jądrowym  $Q$ ,  $A: X \supset D(A) \rightarrow X$ ,  $B: X \rightarrow \mathcal{L}(Z, X)$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e_1(\cdot)^{II'} + e_2(\cdot)^{II'} + a & -\beta^* & a & a \\ 0 & C_1 & -\gamma_1 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 & -\gamma_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 2C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2C_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Operator jądrowy  $Q$  wyraża się przez funkcje korelacyjne obciążenia w następujący sposób:

$$E\xi(t, x) = 0 \quad (9)$$

$$E[\xi(t, x_1)\xi(s, x_2)] = K(x_1, x_2)\delta(t - s) \quad (10)$$

gdzie  $K(x_1, x_2)$  jest przestrzenną funkcją korelacyjną procesu prędkości wiatru,  $E$  jest wartością oczekiwaną,  $\delta(t - s)$  jest funkcją  $\delta$ -Diraca, która opisuje czasową korelację, a raczej jej brak. Zakładamy, że pokład mostu jest zamocowany na obu końcach z możliwością paczenia, to znaczy:

$$\alpha(t, 0) = 0 \quad \alpha(t, \ell) = 0 \quad \alpha_{,xx}(t, 0) = 0 \quad \alpha_{,xx}(t, \ell) = 0 \quad (11)$$

Układ równań (4) opisuje drgania parametryczne mostu. Układ ten z warunkami brzegowymi (11) ma rozwiązanie trywialne odpowiadające położeniu równowagi. Celem dalszych rozważań jest wyznaczenie warunków stabilności tego położenia równowagi przy uwzględnieniu zaburzeń losowych, które w szerokim zakresie częstotliwości mają widmo różne od zera, tak aby móc wzbudzić wiele postaci drgań. Ponadto wymiary mostu są na tyle duże, że w analizie należy uwzględnić korelację przestrzenną obciążenia.

### 3. ANALIZA STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ

Badanie stateczności dynamicznej rozpoczynamy od doboru odpowiedniego funkcjonału Lapunowa. Jako funkcjonal przyjmujemy modyfikację sumy energii kinetycznej, sprężystej układu [8]:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[ \left( Y_2 + \beta^* Y_1 \right)^2 + \beta^{*2} Y_1^2 / 4 + e_1 Y_{1,xx}^2 + e_2 Y_{1,x}^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + \gamma Y_1 Y_3 + \delta Y_1 Y_4 \right] dx \quad (12)$$

Jak łatwo zauważyć, pierwsze dwa składniki funkcjonału (12) są zmodyfikowaną energią kinetyczną, podczas gdy dwa następne są energią sprężystą. Funkcjonał jest dodatnio określony, jeżeli stałe  $\gamma$  i  $\delta$  są dostatecznie małe. W celu wyznaczenia warunku

dotadniej określoności posłużymy się nierównościami wariacyjnymi zachodzącymi na zbiorze funkcji spełniających warunki brzegowe (11).

$$\int_0^{\ell} Y_{1,x}^2 dx \geq \lambda_1 \int_0^{\ell} Y_1^2 dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ell} Y_{1,x}^2 dx \geq \lambda_2 \int_0^{\ell} Y_1^2 dx \quad (14)$$

gdzie stałe są równe odpowiednio  $\lambda_1 = \pi^4 / \ell^4$ ,  $\lambda_2 = \pi^2 / \ell^2$ . Korzystając z nierówności (13) i (14) przez sprowadzenie do sumy kwadratów łatwo wykazać, że funkcjonal (12) jest dodatnio-określony, jeżeli stałe  $\gamma$  i  $\delta$  spełniają nierówność:

$$\gamma^2 + \delta^2 < 4(e^1 \lambda_1 + e_2 \lambda_2) + \beta^{*2} \quad (15)$$

Zatem pierwiastek kwadratowy z funkcjonału (12) przyjmujemy jako miarę odległości w definicji stabilności (1):

$$\|Y\| = V^{1/2} \quad (16)$$

W analizie stateczności nie możemy posłużyć się klasycznymi wzorami różniczkowymi ze względu na nieróżniczkowalność procesu Wienera. W celu obliczenia różniczki funkcjonału (12) wzdłuż dowolnego rozwiązania równania ewolucyjnego należy posłużyć się lematem Itô w wersji Curtain i Falba [2]:

$$dV = \langle V'_Y, AY \rangle dt + \frac{1}{2} Tr \left( [BY]^* V''_{YY} [BY] Q \right) dt + \langle V'_Y, [BY] \rangle dW \quad (17)$$

gdzie  $Tr$  jest operatorem,  $V'_Y$  i  $V''_{YY}$  oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą pochodną funkcjonału w sensie Frecheta oraz  $Q$  jest przestrzenną funkcją korelacji. W równaniu (17) pierwszy składnik odpowiada różniczkowaniu w klasycznym sensie, drugi składnik to część śladowa wynikająca z właściwości procesu Wienera, trzeci składnik jest stochastyczny. Wybierając stałe  $\gamma$  i  $\delta$  tak, aby wyzerować współczynniki przy składnikach  $Y_2 Y_3$  oraz  $Y_2 Y_4$  w części deterministycznej to jest przyjmując:

$$\gamma = -2(a + C_1) \quad \delta = -2(a + C_3) \quad (18)$$

Pierwszy „deterministyczny” składnik jest równy:

$$\begin{aligned} \langle V'_Y, AY \rangle = \int_0^{\ell} \left\{ -\beta^* (e_1 Y_{1,x}^2 + e_2 Y_{1,x}^2 - a Y_1^2) / 2 - \beta^* Y_2^2 - \gamma_1 Y_3^2 - \gamma_3 Y_4^2 + \right. \\ \left. + (-a + (C_1 \gamma + C_3 \delta) / 2) Y_1 Y_2 + (\beta^* a - \gamma \gamma_1) Y_1 Y_3 + 2 + (\beta^* a - \delta \gamma_3) Y_1 Y_4 + 2 \right\} dx \end{aligned} \quad (19)$$

Posługując się nierównościami (13) i (14) otrzymujemy dolne dodatnie oszacowanie funkcjonału (19):

$$\begin{aligned} \langle V'_Y, AY \rangle \geq \int_0^{\ell} \left\{ -\beta^* (e_1 \lambda_1 + e_2 \lambda_2 - a) Y_1^2 + 2 - \beta^* Y_2^2 / 2 - \gamma_1 Y_3^2 - \gamma_3 Y_4^2 + \right. \\ \left. + (-a + (C_1 \gamma + C_3 \delta) / 2) Y_1 Y_2 + (\beta^* a - \gamma \gamma_1) Y_1 Y_3 + 2 + (\beta^* a - \delta \gamma_3) Y_1 Y_4 + 2 \right\} dx \end{aligned} \quad (20)$$

Korzystając z rozkładu operatora w bazie przestrzeni  $X$  otrzymujemy część śladową różniczkki funkcyjalu:

$$\frac{1}{2} Tr \left( [BY]^* V_{YY}'' [BY] Q \right) = 2 \int_0^{\ell} \left[ (aY_1 + bY_2)^2 + C_1^2 Y_2^2 + C_3^2 Y_2^2 \right] Q(x, x) dx \quad (21)$$

Wstawiając nierówność (19) i równanie (21) do (17), całkując względem czasu od  $t = s$  do  $t = \tau_\delta(t) = \min(\tau_\delta, t)$ , gdzie  $\tau_\delta$  jest losowym czasem wyjścia realizacji rozwiązania z obszaru  $\|y\| \leq \delta$  oraz uśredniając warunkowo względem  $\sigma$  – algebry generowane przez zdarzenia, które zaszły do chwili  $s$ , otrzymujemy:

$$EV(\tau_\delta(t)) \leq V(s) - E \int_s^{\tau_\delta(t)} \int_0^{\ell} Y^* G Y dx dt \quad (22)$$

gdzie macierz  $G$  jest określona, jednak ze względu na przestrzenną korelację uwzględnioną w funkcji korelacyjnej  $K$  jest ona funkcją zmiennej  $x$ . Jeżeli  $\int_0^{\ell} Y^* G Y dx$  jest funkcjonałem dodatnio określonym, to funkcjonał Lapunowa (12) spełnia oszacowanie:

$$EV(\tau_\delta(t)) \leq V(s) \quad (23)$$

Zatem funkcjonał (12) jest nadmartynałem. Postępując analogicznie jak w dowodzie nierówności Czebyszewa dowieść można, że rozwiązanie trywialne równania (5) jest jednostajnie stochastycznie stabilne względem miary odległości (16). Efektywna postać warunków stabilności zależy od właściwości przestrzennej funkcji korelacyjnej. Zakładając np., że funkcja korelacyjna  $K$  jest statystycznie jednorodna, to znaczy  $K(x_1, x_2) = K(x_1 - x_2)$  w składniku śladowym występuje  $K(0)$ . Wówczas warunek stabilności jest równoważny dodatniej określoności macierzy  $G$  o postaci:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{12} & g_{22} & 0 & 0 \\ g_{13} & 0 & \gamma_1 & 0 \\ g_{14} & 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \beta^* (e_1 \lambda_1 + e_2 \lambda_2 - a) / 2 - 2a^2 K(0) \\ g_{22} &= \beta^* / 2 - 2(b^2 + C_1^2 + C_3^2) K(0) \\ g_{12} &= [-a + C_1(a + C_1) + C_3(a + C_3)] / 2 - 2abK(0) \\ g_{13} &= (\beta^* a - \gamma_1) / 2 \\ g_{14} &= (\beta^* a - \gamma_3) / 2 \end{aligned} \quad (25)$$

Macierz  $G$  jest dodatnio określona, jeżeli  $g_{22} > 0$  oraz  $\det G > 0$ . Podsumowując warunkami stabilności jednostajnej są nierówności (15) oraz warunki Sylwestra dodatniej określoności macierzy  $G$ .

#### 4. STABILNOŚĆ DRGAŃ GIĘTNO-SKRĘTNYCH MOSTU WISZĄCEGO SPRZEŻONYCH AERODYNAMICZNIE

W celu wyznaczenia ogólniejszego modelu ruchu pokładu mostu wiszącego należy uwzględnić sprzężenia, w tym sprzężenia silnie nieliniowe między przemieszczeniami pionowymi i skrętnymi [9]. Oddziaływanie wiatru sprowadzone jest do obciążenia momentami i siłami rozłożonymi po długości mostu. Efekt aerodynamiczny powoduje powstanie sprzężenia między przemieszczeniem i skręceniem. Jest ono tym silniejsze, im większa jest prędkość wiatru. Opisując skręcenie mostu funkcją  $\alpha(t, x)$ , przemieszczenie pionowe funkcją  $\eta(t, x)$  oraz pomijając sprzężenie sprężyste między funkcjami równania ruchu mają postać [3]:

$$\alpha_{,tt} + \beta^* \alpha_{,t} + e_1 \alpha_{,xxxx} - e_2 \alpha_{,xx} - a\alpha - f\eta_{,t} = 2(a\alpha + b\alpha_{,t} + f\eta_{,t}) \xi(t, x) + a \int_{-\infty}^t (1 + 2\xi(\tau, x)) [C_1 \exp(-\gamma_1(t - \tau)) + C_3 \exp(-\gamma_3(t - \tau))] (\alpha_{,t\tau} + d\eta_{,t}) d\tau \quad (26)$$

$$\eta_{,tt} + \beta_1^* \alpha_{,t} + e_3 \alpha_{,xxxx} - e_4 \alpha_{,xx} - a_1 \alpha - b_1 \alpha_{,t} = 2(a_1 \alpha + b_1 \alpha_{,t} + f_1 \eta_{,t}) \xi(t, x) + a_1 \int_{-\infty}^t (1 + 2\xi(\tau, x)) [C_1 \exp(-\gamma_1(t - \tau)) + C_3 \exp(-\gamma_3(t - \tau))] (\alpha_{,t\tau} + d\eta_{,t}) d\tau \quad (27)$$

$x \in (0, l)$

gdzie obowiązują oznaczenia (3), oraz

$$e_3 = \frac{EI_v}{m} \quad e_4 = \frac{S}{m} \quad \beta_1^* = \beta_2 - f_1 \quad (28)$$

gdzie:  $m$  – masa,  $EI_v$  – sztywność zginania,  $S$  – stała składowa siły osiowej,  $\beta_1$  – współczynnik tarcia wiskotycznego w ruchu mostu w płaszczyźnie pionowej,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $d$ ,  $f$  – stałe doświadczalne. Wskutek sprzężenia aerodynamicznego otrzymujemy układ równań opisujących drgania skrętne i w płaszczyźnie pionowej. Rozwiązania układu (26)-(27) spełniają warunek brzegowy (11) oraz warunki zamocowania przegubowego:

$$\eta(t, 0) = 0 \quad \eta(t, l) = 0 \quad \eta_{,xx}(t, 0) = 0 \quad \eta_{,xx}(t, l) = 0 \quad (29)$$

Zmieniając zmienne zapisujemy równania dynamiki w postaci równań ewolucyjnych Itô:

$$\begin{aligned}
dY_1 &= Y_2 dt \\
dY_2 &= \left[ -e_1 Y_{1,xxxx} + e_2 Y_{1,xx} + aY_1 - \beta^* Y_2 + fY_4 + a(Y_5 + Y_6) \right] dt + \\
&\quad + 2(aY_1 + bY_2 + fY_4) dW \\
dY_3 &= Y_4 dt \\
dY_4 &= \left[ -e_3 Y_{3,xxxx} + e_4 Y_{3,xx} - \beta_1^* Y_4 + a_1 Y_1 + b_1 Y_2 + a_1 (Y_5 + Y_6) \right] dt + \\
&\quad + 2(a_1 Y_1 + b_1 Y_2 + f_1 Y_4) dW \\
dY_5 &= (-\gamma_1 Y_5 + C_1 Y_2 + C_1 f Y_4) dt + 2C_1 (Y_2 + f Y_4) dW \\
dY_6 &= (-\gamma_3 Y_6 + C_3 Y_2 + C_3 f Y_4) dt + 2C_3 (Y_2 + f Y_4) dW
\end{aligned} \tag{30}$$

W celu wyznaczenia warunków stabilności jednostajnej wybieramy funkcjonal Lapunowa w postaci:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} \int_b \left[ \left( Y_2 + \beta^* Y_1 / 2 \right)^2 + \beta^{*2} Y_1^2 / 4 + e_1 Y_{1,xx}^2 + e_2 Y_{1,x}^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( Y_4 + \beta_1^* Y_3 / 2 \right)^2 + \beta_1^{*2} Y_3^2 / 4 + e_3 Y_{3,xx}^2 + e_4 Y_{3,x}^2 + Y_5^2 + Y_6^2 + \right. \\
&\quad \left. + \gamma Y_1 Y_5 + \delta Y_1 Y_6 + \varepsilon Y_3 Y_5 + \varphi Y_3 Y_6 \right] dx
\end{aligned} \tag{31}$$

gdzie stałe  $\gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$  powinny być na tyle małe, aby funkcjonal był dodatnio określony. Korzystając z nierówności wariacyjnych (13) i (14) otrzymujemy dolne oszacowanie funkcjonału w postaci:

$$V \geq \frac{1}{2} \int_0^t Y^* G Y dx \tag{32}$$

gdzie:

$$Y = \text{col}[Y_1, Y_2, Y_1, Y_2, Y_5, Y_6] \tag{33}$$

$$G = \begin{bmatrix}
\beta^{*2} & 2 + e_1 \lambda_1 + e_2 \lambda_2 & \beta^* & 2 & 0 & 0 & \gamma / 2 & \delta / 2 \\
& \beta^{*2} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \beta_1^{*2} & 2 + e_3 \lambda_1 + e_4 \lambda_2 & 0 & \varepsilon / 2 & \varphi / 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\gamma / 2 & 0 & 0 & \varepsilon / 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\delta / 2 & 0 & 0 & \varphi / 2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{34}$$

Warunki Sylwestra dostarczają ograniczenia stałych  $\gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ . Skorzystanie z lematu Itô służy do wyznaczenia różniczki funkcjonału (31). Postępując analogicznie jak w punkcie 3 otrzymujemy warunki wystarczające stabilności rozwiązania trywialnego jako warunki dodatniej określoności macierzy  $R$ :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{34} & 0 & 0 \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ 0 & r_{25} & 0 & r_{45} & \gamma_1 & 0 \\ 0 & r_{26} & 0 & r_{46} & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

gdzie:

$$r_{11} = \beta^* (e_1 \lambda_1 + e_2 \lambda_2 - a) / 2 - 2(a^2 + a_1^2)K(0)$$

$$r_{22} = \beta^* / 2 - 2(b^2 + b_1^2 + C_1^2 + C_3^2)K(0)$$

$$r_{33} = \beta_1^* (e_3 \lambda_1 + e_4 \lambda_2) / 2$$

$$r_{44} = \beta_1^* / 2 - 2(f^2 + f_1^2 + C_1^2 + C_3^2)K(0)$$

$$r_{12} = \left[ 1 + \beta^* (C_1 / \gamma_1 + C_3 / \gamma_3) / 2 \right] / 2 - 2(ab + a_1 b_1)K(0)$$

$$r_{13} = -\beta_1^* a_1 / 2$$

$$r_{14} = -a_1 / 2 - \beta^* f \left[ 1 + a(C_1 / \gamma_1 + C_3 / \gamma_3) \right] - 2(af + a_1 f_1)K(0)$$

$$r_{23} = -\beta_1^* [b_1 + a_1 (C_1 / \gamma_1 + C_3 / \gamma_3)] / 4$$

$$r_{24} = -(f + b_1) / 2 - 4(bf + b_1 f_1 + C_1^2 f + C_3^2 f)K(0)$$

$$r_{25} = -\left[ a + C_1 (1 + \beta^* a / 2\gamma_1) \right] / 2$$

$$r_{26} = -\left[ a + C_3 (1 + \beta^* a / 2\gamma_3) \right] / 2$$

$$r_{34} = -\beta_1^* a_1 f (C_1 / \gamma_1 + C_3 / \gamma_3) / 4$$

$$r_{45} = -a_1 (1 + \beta_1^* a_1 / 2\gamma_1) / 2$$

$$r_{46} = -(C_3 f + a_1 (1 + \beta_1^* / 2\gamma_3)) / 2$$

Warunki stabilności Sylwestra sprowadzają się do żądania, aby wszystkie główne podwyznaczniki macierzy  $R$  były dodatnie, to znaczy:

$$\begin{vmatrix} r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{45} & \gamma_1 & 0 \\ r_{46} & 0 & \gamma_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} r_{33} & r_{34} & 0 & 0 \\ r_{34} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ 0 & r_{45} & \gamma_1 & 0 \\ 0 & r_{46} & 0 & \gamma_3 \end{vmatrix} > 0$$

itd. aż do warunku

$$\det R > 0$$

## LITERATURA

- [1] Chow P.L., 1982. Stability of nonlinear stochastic-evolution equations. J. Math. Anal. 89, 400-419.
- [2] Curtain R.F., Falb P.L., 1965. Stochastic differential equations in Hilbert space. J. Diff. Equations 10, 412-430.
- [3] Beliveau J.G., Vaicatis R., Shinozuka M., 1977. Motion of suspension bridge subject to wind loads. J. Eng. Mech. Div. ASCE 103, 1189-1205.
- [4] Ibrahim R.A., 1985. Parametric random vibration. Research Studies Press, Letchworth.
- [5] Lin Y.K., Ariaratnam S.T., 1980. Stability of bridge motion in turbulent winds. J. Struct. Mech. 8, 1-15.
- [6] Pavlović R., 2000. Stabilnost kontinualnih sistema pod dejstvom slučajne pobude. Univerzitet u Nišu–Mašinski Fakultet, Niš.
- [7] Tylikowski A., 1986. Stochastic stability of a thin-walled beam subjected to a time and space-dependent loading. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 66, T97-T98.
- [8] Tylikowski A., 1991. Stochastyczna stabilność układów ciągłych. PWN Warszawa.
- [9] Hyun C.H., Yun C.B., 1988. Nonlinear dynamic analysis of suspension bridges under random wind loads by stochastic linearization. Probabilistic Engineering Mechanics 3, 102-111.

## DYNAMIC STABILITY OF STRUCTURES SUBJECT TO TIME AND SPACE DEPENDENT LOADINGS

### Summary

Random loadings of wind turbulences, sea waves and the earth's crust acting on large structures are characterized by the spatial correlation. In the present paper dynamic stability of one dimensional structures such as masts, towers, chimneys and suspension bridges subject to space and time dependent loading is investigated. Via Liapunov direct method sufficient stability conditions are derived. The stability conditions are expressed by geometrical and stiffness data, the viscous damping coefficient as well as intensities and correlation lengths of loading.

Keywords: dynamic stability, Liapunov method, parametric vibrations, spatial correlation



## MINIMALIZACJA DRGAŃ NAPĘDÓW ELEKTROMECHANICZNYCH

Arkadiusz Mężyk, Eugeniusz Świtoński

Katedra Mechaniki Stosowanej  
Politechnika Śląska  
ul. Konarskiego 18a, 44-100 Gliwice

W pracy omówiono sposób modelowania elektromechanicznych układów napędowych maszyn roboczych. Opisywane badania dotyczą układów składających się z silnika asynchronicznego i przekładni zębatej. Do modelowania przekładni zastosowano metodę hybrydową sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych. Opracowane modele matematyczne wykorzystano do analizy wrażliwości i optymalizacji układu. Omówiono zastosowane algorytmy obliczeń oraz przedstawiono wyniki optymalizacji układu napędowego maszyny roboczej.

Słowa kluczowe: dynamika układów napędowych, analiza wrażliwości, optymalizacja

### 1. WPROWADZENIE

Badania w zakresie wykorzystania metod programowania matematycznego prowadzone w odniesieniu do zagadnień dynamiki maszyn zmagają się z poszukiwaniem rozwiązań, które zapewnią stabilną realizację założonego procesu oraz minimalizację niekorzystnych oddziaływań na otoczenie. Bezpośrednia, intuicyjna analiza wpływu cech konstrukcyjnych na zjawiska dynamiczne możliwa jest tylko w najprostszych przypadkach. Dla bardziej złożonych modeli badania takie mogą być skutecznie wspomagane przez zastosowanie metod modelowania, analizy wrażliwości i optymalizacji. Początkowo zastosowania procedur optymalizacyjnych dotyczyły głównie zagadnień statycznych, takich jak np. minimalizacja kosztów, masy, gabarytów lub maksymalizacja przenoszonej mocy itp. Obecnie coraz częściej analiza wrażliwości i optymalizacja stają się narzędziem rozwiązywania złożonych zagadnień dynamiki układów maszynowych oraz wspomagania procesu projektowania [1]. Optymalizacja układów dynamicznych wymaga opracowania modeli fizycznych, umożliwiających matematyczny opis badanych zjawisk. Wyznaczane na ich podstawie charakterystyki odpowiedzi częstotliwościowych są szeroko stosowane w procesie optymalizacji, kontroli poziomu drgań i doskonaleniu modeli MES [4].

### 2. MODELOWANIE ZJAWISK DYNAMICZNYCH

Mechaniczną część układu napędowego najczęściej stanowią przekładnie zębate, które modeluje się w postaci dyskretnej lub dyskretno-ciągłej, z uwzględnieniem

nieliniowych charakterystyk sztywności ząbów, luzów obwodowych, podatności podparć, sztywności wałów i korpusów, sił żyroskopowych itp. Model układu mechanicznego opisuje układ równań różniczkowych zwyczajnych, który w postaci macierzowej ma następującą postać:

$$M\ddot{q} + (C_v + C_g)\dot{q} + Kq = \underline{Q} \quad (1)$$

gdzie:

- $M, C_v, C_g, K$  – macierze bezwładności, tłumienia, efektu żyroskopowego i sztywności,
- $q$  – macierz kolumnowa współrzędnych uogólnionych,
- $\underline{Q}$  – macierz kolumnowa sił uogólnionych.

Charakter przebiegów czasowych wielkości dynamicznych zależy również w znacznym stopniu od charakterystyki i mocy silnika napędowego. Model silnika elektrycznego jest opisem zjawisk elektromagnetycznych związanych z powstawaniem i działaniem pola magnetycznego w maszynie. Dynamiczne równania ruchu modelu maszyny asynchronicznej mogą być sformułowane w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt} Li + Ri = U \quad (2)$$

$$M_{el} = \frac{1}{2} i^T \frac{\hat{c}}{\hat{c}\varphi_1} Li$$

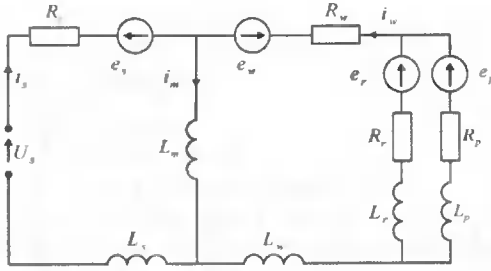
gdzie:

- $L, R, i, U$  – macierze indukcyjności, rezystancji, prądów i napięć zasilających,
- $M_{el}$  – moment silnika,
- $\varphi_1$  – kąt obrotu wirnika.

Jednoczesne rozwiązanie równań ruchu modelu układu mechanicznego (1) i elektrycznego (2) umożliwia badanie zjawisk dynamicznych w układzie elektromechanicznym. Sprzężenie pomiędzy układami realizowane jest przez kąt obrotu wirnika  $\varphi_1$  wyznaczany z modelu układu mechanicznego oraz moment elektromagnetyczny  $M_{el}$  obliczany z modelu silnika elektrycznego.

## 2.1. Modelowanie silnika asynchronicznego

Zjawiska dynamiczne występujące w maszynach asynchronicznych opisywane są zazwyczaj układem nieliniowych równań różniczkowych [8]. Nieliniowości te wynikają z charakteru powiązań pomiędzy wielkościami mechanicznymi i elektrycznymi. Do analizy maszyn indukcyjnych wykorzystuje się zazwyczaj jeden z dwuosiowych układów współrzędnych: układ składowych symetrycznych [1,2] lub układ współrzędnych osiowych  $(\alpha, \beta)$ , wirujący względem stojana z prędkością kątową  $\omega_s$ . Dla silnika asynchronicznego dwuklatkowego zazwyczaj wystarcza przyjęcie modelu z dwoma obwodami zastępczymi w wirniku (rys. 1).



Rys. 1. Model obwodowy silnika indukcyjnego z dwoma zastępczymi obwodami w wirniku, gdzie:  $i_s$ ,  $i_p$ ,  $i_r$  – prądy stojana, klatki pracy, klatki rozruchowej,  $L_m$ ,  $L_s$  – indukcyjności uzwojeń związane ze strumieniami magnetycznymi głównym i rozproszenia stojana,  $L_w$ ,  $L_r$ ,  $L_p$  – indukcyjności uzwojeń związane ze strumieniami rozproszenia wspólnymi dla obu klatek, klatki rozruchowej i klatki pracy sprowadzone na stronę stojana,  $p$  – liczba par biegunów,  $R_s$  – rezystancja stojana,  $R_r$ ,  $R_p$  – rezystancje klatki rozruchowej i klatki pracy sprowadzone na stronę stojana,  $U_s$  – napięcie zasilające,  $e_s$ ,  $e_w$ ,  $e_r$ ,  $e_p$  – napięcia rotacji w obwodach stojana i wirnika

## 2.2. Modelowanie przekładni zębatach

Badanie skrętnych, poprzecznych i wzdłużnych drgań elementów układu oraz sprzążeń występujących pomiędzy poszczególnymi postaciami drgań wymaga opracowania rozbudowanych, przestrzennych modeli fizycznych. Model przestrzenny jest dzielony na podukłady, którymi zazwyczaj są wały z kołami zębatymi. Podukłady oddziałują na siebie za pomocą sił międzyzębnych lub sił reakcji podpór. Ruch pojedynczego wałka opisuje następujące równanie różniczkowe w postaci macierzowej:

$$M_w \ddot{q}_w + (C_{v_w} + C_{g_w}) \dot{q}_w + K_w q_w = Q_w + F_w \quad (3)$$

gdzie:

- $M_w, C_{v_w}, K_w, C_{g_w}$  – macierze bezwładności, tłumienia, sztywności i efektu żyroskopowego pojedynczego,  $i$ -tego wałka przekładni,
- $q_w$  – macierz kolumnowa współrzędnych uogólnionych węzłów,
- $Q_w$  – macierz kolumnowa zewnętrznych sił uogólnionych przyłożonych do poszczególnych węzłów  $i$ -tego wałka,
- $F_w$  – macierz kolumnowa sił oddziaływań podukładów pomiędzy sobą, w tym przypadku sił międzyzębnych,
- $n$  – liczba ząbów.

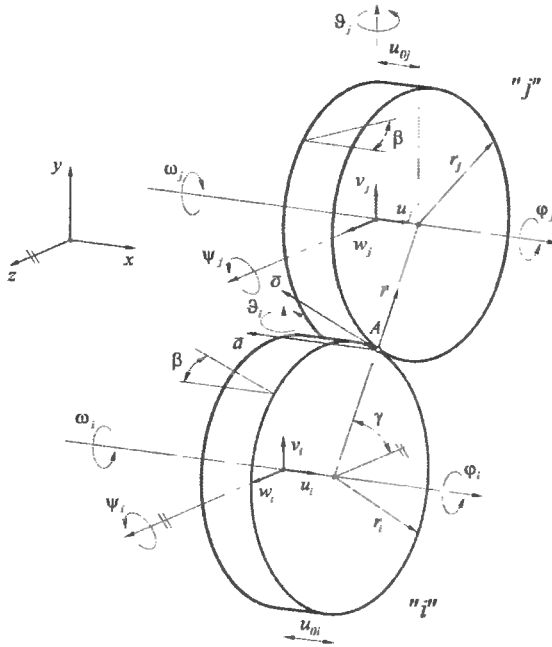
Do analizy szerokiego spektrum częstości własnych stosowana jest metoda hybrydowa. W takim przypadku wałek dzielony jest na odkształcalne, belkowe elementy skończone, natomiast koło zębate, którego sztywność jest o kilka rzędów wyższa od sztywności wałka, traktowane jest jako bryła sztywna.

Siłę normalną w ząbieniu wyznacza się z następującej zależności:

$$F_z = k_z (\delta_i^T q_i - \delta_j^T q_j) \quad (4)$$

gdzie:

- $\delta_i, \delta_j$  – macierze kolumnowe geometrycznych parametrów kół zębatych.



Rys. 2. Jednostopniowa przekładnia walcowa:  $u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_i$  – przemieszczenia liniowe i kątowe względem układu współrzędnych  $i$ -tego węzła.  $u_{0i}, u_{0j}$  – współrzędne bieguna ząbienia względem środków masy kół zębatych.  $\omega$  – prędkość kątowa elementu

Macierze kolumnowe geometrycznych parametrów kół zębatych określa się uwzględniając zależności pomiędzy wektorami przemieszczeń punktów styku w biegunie ząbienia oraz wersorem osi prostopadłej do płaszczyzny ząbienia a współrzędnymi uogólnionymi węzłów, w których umieszczono koła zębate:

$$\delta_i = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ r_i \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + u_{0i} (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \\ -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ r_i \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + u_{0i} (\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \\ r_i \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (5)$$

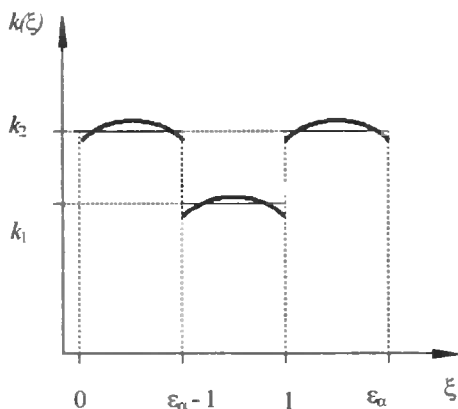
$$\delta_j = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -r_j \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + u_{0j} (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \\ -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ -r_j \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + u_{0j} (\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \\ -r_j \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie:

- $\alpha$  – kąt przyporu (dla obrotów zębnika w lewo  $\alpha = \alpha_n$ , dla obrotów w prawo  $\alpha = \pi - \alpha_n$ ),
- $\alpha_n$  – nominalny kąt przyporu,
- $\beta$  – kąt pochylenia linii zęba,
- $\gamma$  – kąt określający konfigurację układu,
- $u_{o1}, u_{o2}$  – odległości bieguna zazębienia od węzłów modelu określających środki ciężkości pierwszego i drugiego koła zębatego,
- $r_1, r_2$  – promienie koła podziałowego pierwszego i drugiego koła zębatego.

### 2.2.1. Zmienna sztywność zazębienia

Jednym z głównych czynników mających wpływ na charakter zjawisk dynamicznych w przekładniach zębatych jest zmienna sztywność zazębienia. Zależy ona od sztywności jednej pary zębów zmiennej wzdłuż odcinka przyporu oraz liczby par zębów będących aktualnie w zazębieniu, wyrażonej za pomocą liczby przyporu  $\varepsilon_{\alpha}$ . Zmiany sztywności powodowane są również różną liczbą zębów będących w przyporze. Przebieg zmian sztywności zazębienia podczas współpracy dwóch kół zębatych o zębach prostych przedstawiono na rysunku 3. Wartości całkowitej sztywności zazębienia, wyznaczone dla przypadku zmiennej sztywności zazębienia jednej i dwóch par zębów, można z dobrym przybliżeniem aproksymować odcinkami linii prostych.



Rys. 3. Przebieg zmiennej sztywności zazębienia o zębach prostych

Przy założeniu stałych wartości współczynnika sztywności dla zazębienia jednoparowego i dwuparowego przebieg zmian sztywności w przybliżeniu opisuje następująca funkcja:

$$k(\xi) = \begin{cases} k_2 & 0 \leq \xi \leq \varepsilon_{\alpha} - 1 \\ k_1 & \varepsilon_{\alpha} - 1 < \xi < 1 \end{cases} \quad (7)$$

gdzie:

- $\xi$  – względna współrzędna wzdłuż odcinka przyporu odniesiona do podziałki zazębienia.

Stosunek sztywności zazębienia dwuparowego do jednoparowego jest mniejszy od 2 i zazwyczaj wynosi 1,7. Wartość tego stosunku zależy od przełożenia przekładni, wartości współczynników przesunięcia zarysu oraz liczby przyporu.

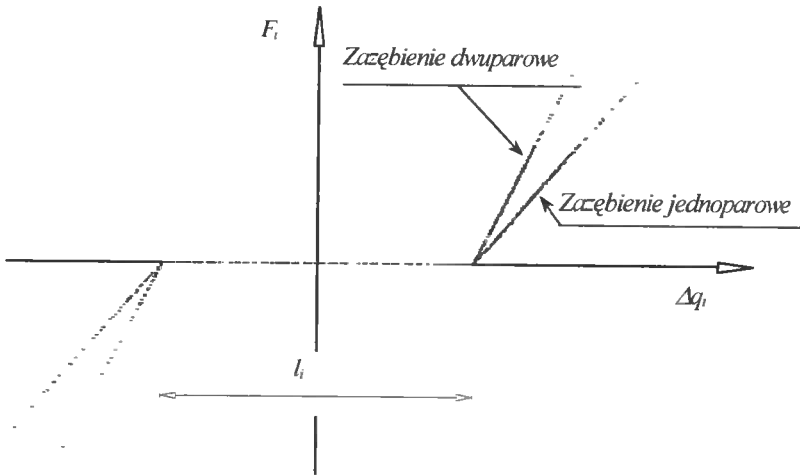
### 2.2.2. Luzy

Zapewnienie odpowiedniego luzu w połączeniach ruchowych jest konieczne dla prawidłowej pracy mechanizmu. Najprostszym sposobem symulacji występowania luzu w zazębieniu jest opisanie siły dynamicznej w zazębieniu następującą funkcją:

$$F(k, \Delta q) = k(q) \begin{cases} (\Delta q - 0,5l) & \Delta q > 0,5l \\ 0 & -0,5l \leq \Delta q \leq 0,5l \\ (\Delta q + 0,5l) & \Delta q < -0,5l \end{cases} \quad (8)$$

gdzie:

- $F$  – siła w parze kinematycznej,
- $\Delta q$  – różnica współrzędnych uogólnionych,
- $k(q)$  – współczynnik sztywności,
- $l$  – zadana wartość luzu.



Rys. 4. Wyniki symulacji luzu i zmiennej sztywności zazębienia przekładni

## 3. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI I OPTYMALIZACJA

### 3.1. Badanie wrażliwości częstości własnych

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia pochodnych wartości własnych względem parametrów konstrukcyjnych, które występują w postaci jawnej lub uwikłanej w macierzach sztywności i bezwładności. Dla układu, w którym nie występuje tłumienie oraz brak wielokrotnych wartości własnych, pochodną wybranej częstości własnej można wyznaczyć zatem z następującej zależności:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial b_j} = X_i^T \left( \frac{\partial K}{\partial b_j} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial b_j} \right) X_i \quad (9)$$

gdzie:

$\lambda_i$  – wartość własna  $i$ ,

$X_i$  – unormowany wektor własny odpowiadający  $i$ -tej wartości własnej.

### 3.2. Badanie wrażliwości funkcji zmiennych w czasie

Analiza wrażliwości przebiegów czasowych jest procesem złożonym, gdyż wymaga rozwiązania modelu matematycznego układu. Model taki, opisany we współrzędnych stanu, jest dodatkowo funkcją wybranych zmiennych decyzyjnych. Równania ruchu układu można zapisać następująco:

$$\dot{x} = f(x, b) \quad (10)$$

$$x(t_0) = h(b) \quad (11)$$

gdzie:

$x(t) = [x_1(t), \dots, x_m(t)]^T$  – macierz kolumnowa zmiennych stanu,

$b = [b_1, \dots, b_n]^T$  – macierz kolumnowa zmiennych decyzyjnych,

$t_0$  – czas początkowy.

Czas  $t_k$ , określający moment wystąpienia badanego stanu układu, może być również zmienna decyzyjna. W ogólnym przypadku opisany jest wtedy następującą funkcją:

$$F(t_k, x(t_k), b) = 0 \quad (12)$$

Wybrana funkcja celu może zawierać człon całkowity dotyczący opisu w pewnym przedziale czasu oraz człon opisujący stan układu w określonej chwili czasu  $t_k$ :

$$\psi = g(t_k, x(t_k), b) + \int_{t_0}^{t_k} T(t, x, b) dt \quad (13)$$

Różniczkując funkcjonal (13) względem  $b$ , po przekształceniach uzyskuje się wyrażenie:

$$\frac{d\psi}{db} = G^T(t_k, x(t_k), b) \frac{\partial x(t_k)}{\partial b} + \frac{\partial g}{\partial b} - \frac{\left[ \frac{\partial g}{\partial t_k} - \frac{\partial g}{\partial x} \cdot f(t_k) \right] \frac{\partial F}{\partial b}}{\dot{F}(t_k)} + \int_{t_0}^{t_k} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial T}{\partial b} \right) dt \quad (14)$$

$$G^T(t_k, x(t_k), b) = \left[ \frac{\partial g(t_k)}{\partial x} \right]^T - \frac{\left[ \frac{\partial g}{\partial t_k} + \frac{\partial g}{\partial x} f(t_k) + T(t_k) \right] \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]^T}{\dot{F}(t_k)} \quad (15)$$

Pochodne cząstkowe, które występują w wyrażeniach (14) i (15), mogą być określone analitycznie, z wyjątkiem członu  $\hat{c}x(t_k)/\hat{c}b$ , gdyż  $x(t)$  wyznacza się poprzez numeryczne całkowanie równań ruchu. Określenie brakującego wyrażenia wymaga rozwiązania dodatkowych układów równań różniczkowych, których liczba zależy od wybranej metody, rozmiarów zadania i liczby zmiennych decyzyjnych. Do sformułowania tych równań stosowana jest m.in. metoda bezpośredniego różniczkowania. W metodzie bezpośredniego różniczkowania formułuje się dodatkowe zadanie początkowe, uzyskane przez zróżniczkowanie równań modelu (10) i (11) względem  $b$ .

$$\frac{\hat{c}\dot{x}}{\hat{c}b} = \frac{\hat{c}f}{\hat{c}x} \cdot \frac{\hat{c}x}{\hat{c}b} + \frac{\hat{c}f}{\hat{c}b} \quad (16)$$

$$\frac{\hat{c}x(t_0)}{\hat{c}b} = \frac{\hat{c}h}{\hat{c}b}$$

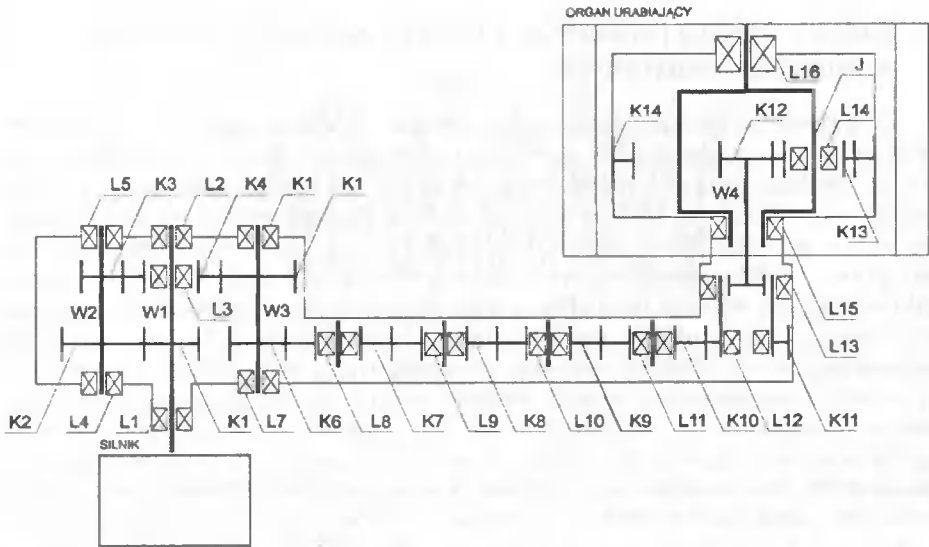
Rozwiązanie zadania początkowego (16) określa wartości pochodnych  $\hat{c}x(t)/\hat{c}b$ , brakujących w równaniach (14) i (15). Zaletą metody bezpośredniego różniczkowania jest stosunkowo prosty algorytm oraz możliwość obliczania pochodnej  $\hat{c}x(t)/\hat{c}b$  jednocześnie z  $x(t)$ . Wadą jest konieczność rozwiązania dużej liczby dodatkowych równań różniczkowych.

#### 4. DOBÓR CECH KONSTRUKCYJNYCH ELEMENTÓW UKŁADU NAPĘDOWEGO

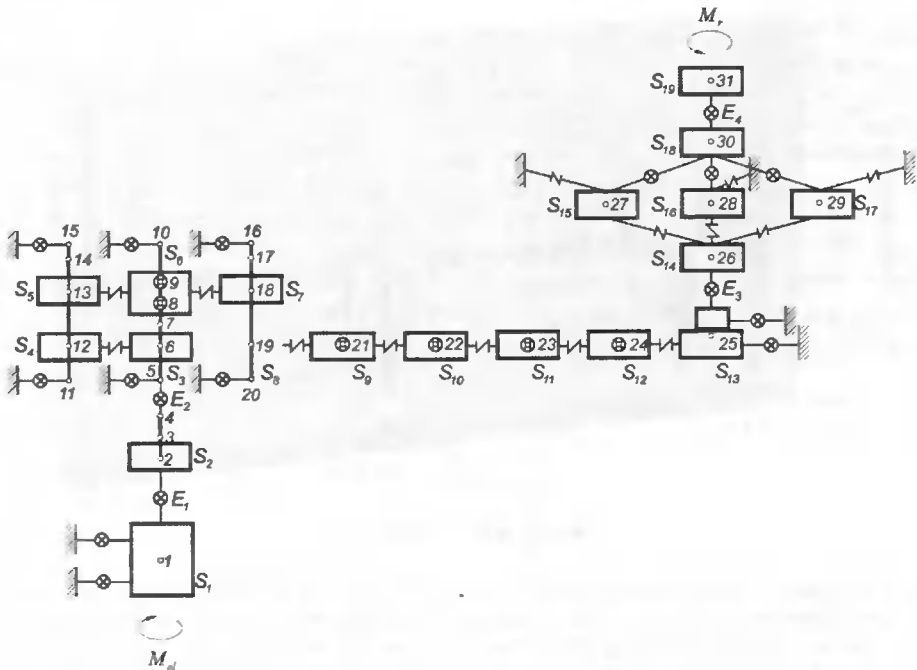
Rozpatrywany układ napędzany jest asynchronicznym, jednoklatkowym silnikiem elektrycznym, który zamodelowano za pomocą modelu obwodowego z jednym obwodem zastępczym w wirniku. Rozwiązanie modelu silnika elektrycznego połączonego z modelem układu mechanicznego umożliwia określenie charakterystyki dynamicznej momentu napędowego.

Przestrzenny model dynamiczny części mechanicznej napędu ma 119 stopni swobody. Zarówno jego strukturę, jak i parametry określa się na podstawie dokumentacji konstrukcyjnej prototypu układu napędowego. Wyboru liczby stopni swobody oraz podziału na elementy skończone dokonuje się analizując postać konstrukcyjną i dominujące postaci drgań (rys. 5,6).





Rys. 5. Schemat kinematyczny układu napędowego

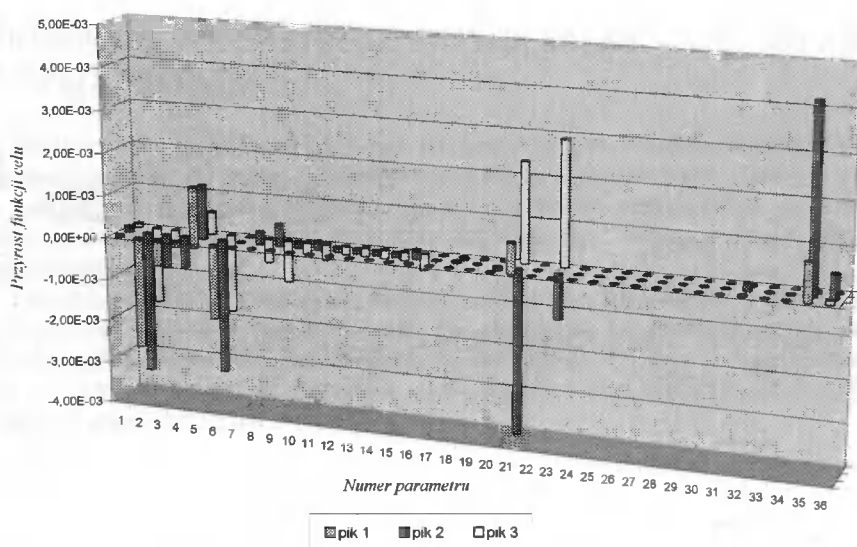


Rys. 6. Model drgań giętno-skrętnych układu napędowego

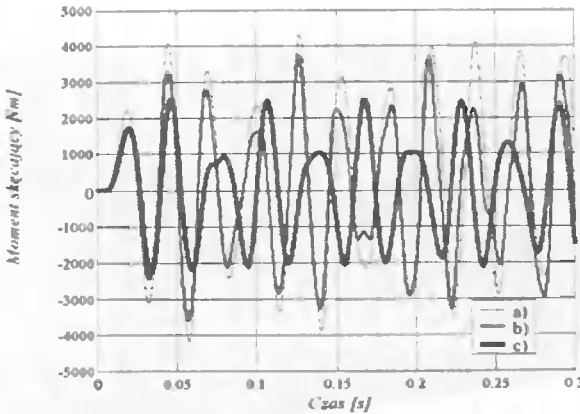
Na rysunku 6 zastosowano następujące oznaczenia: 1..31 – numery węzłów podziału na elementy skończone, E1-E4 – elementy sprężysto-tłumiące, modelujące fragmenty wałów, S1-S19 – sztywne elementy skończone.

#### 4.1. Badanie wpływu parametrów silnika na zjawiska dynamiczne w parach kinematycznych

Ze względu na sprzężenia elektromechaniczne w układzie napędowym, parametry części mechanicznej mają wpływ na wielkości dynamiczne w części elektrycznej i odwrotnie. Zbadanie tego wpływu jest możliwe za pomocą analizy wrażliwości z wykorzystaniem modelu dynamicznego badanego układu. Badając wrażliwość układu określono wpływ najważniejszych parametrów silnika indukcyjnego, takich jak: indukcyjność główna, indukcyjności rozproszenia, rezystancja fazy stojana oraz rezystancja klatki wirnika, na wartości oddziaływań dynamicznych (rys. 7) w poszczególnych parach kinematycznych układu mechanicznego. Spośród parametrów modelu części mechanicznej do optymalizacji wybrano sztywność wałka bezpieczeństwa umieszczonego w silniku napędowym pomiędzy węzłami 2 oraz 4 (rys. 6). Duża wrażliwość maksymalnych wartości sił w części mechanicznej na parametry elektromagnetyczne wskazuje, że pominięcie zjawisk dynamicznych w silniku napędowym może prowadzić do znacznych błędów w otrzymanych wynikach symulacji komputerowych, szczególnie w stanach nieustalonych. Jednoczesne zastosowanie parametrów mechanicznych i elektrycznych zapewnia uzyskanie najmniejszych wartości maksymalnych oddziaływań dynamicznych w parach kinematycznych układu, co przedstawiono na rysunku 8.



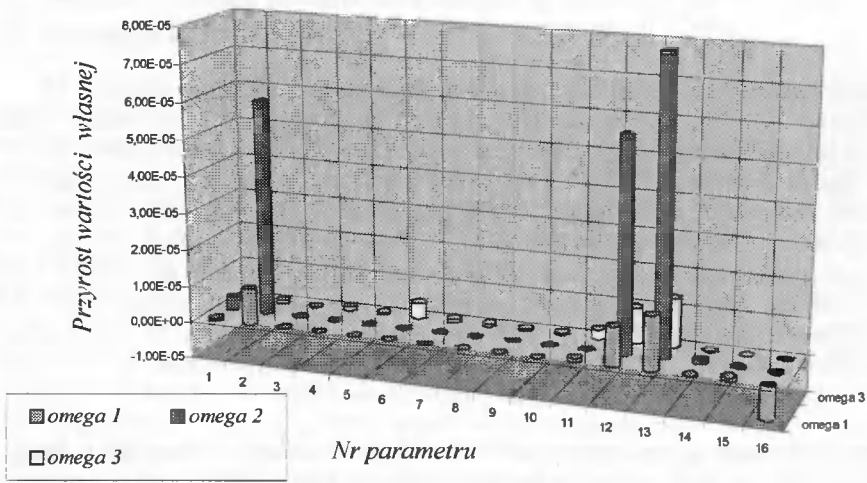
Rys. 7. Względne przyrosty wartości maksymalnych funkcji celu opisujących moment na wale wyjściowym podczas rozruchu układu, spowodowane przyrostem wartości parametrów modelu części elektrycznej (1÷5) i mechanicznej (6÷36), gdzie: 1- $L_m$ , 2- $L_v$ , 3- $L_r$ , 4- $R_s$ , 5- $R_r$ , 6÷21 – masowe momenty bezwładności i masy, 22÷36 – wybrane współczynniki sztywności wałków, ząbów i łożysk



Rys. 8. Przebiegi momentu skręcającego wałka wejściowy dla układu: a) przed optymalizacją, b) po optymalizacji wybranych parametrów silnika napędowego, c) po optymalizacji silnika oraz sztywności wałka

#### 4.2. Badanie wrażliwości wartości własnych układu napędowego

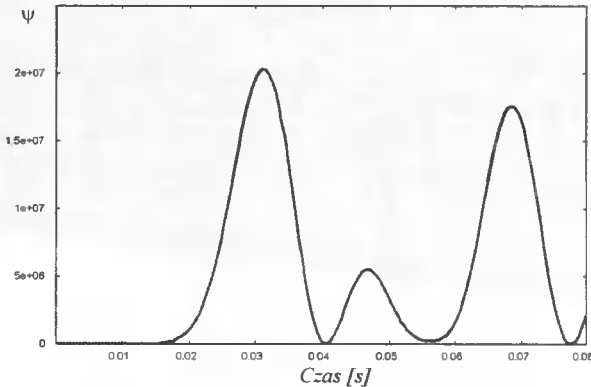
Podczas optymalizacji charakterystyk dynamicznych, opisanych zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości, należy uwzględnić również zmiany wartości własnych i wektorów własnych, wynikające ze zmian wartości parametrów modelu. Zbiór zmiennych decyzyjnych do optymalizacji powinno się określać uwzględniając wyniki analizy wrażliwości wartości własnych. W opisywanym przypadku analizowano trzy najniższe, niezerowe wartości własne. Analizę wrażliwości przeprowadzono metodą sprzężoną, która może być stosowana również do układów z wielokrotnymi wartościami własnymi. Wyniki obliczeń wskazują, że współczynnik sztywności wałka bezpieczeństwa (parametr nr 2 na rysunku 9) ma niewielki wpływ na podstawową niezerową częstotliwość własną i stosunkowo duży wpływ na drugą częstotliwość. Można zatem założyć, że zmiany wartości parametru w procesie optymalizacji nie powinny powodować znacznych zmian podstawowej częstotliwości własnej układu.



Rys. 9. Przyrosty wartości własnych ze względu na przyrost poszczególnych współczynników sztywności skrętniej

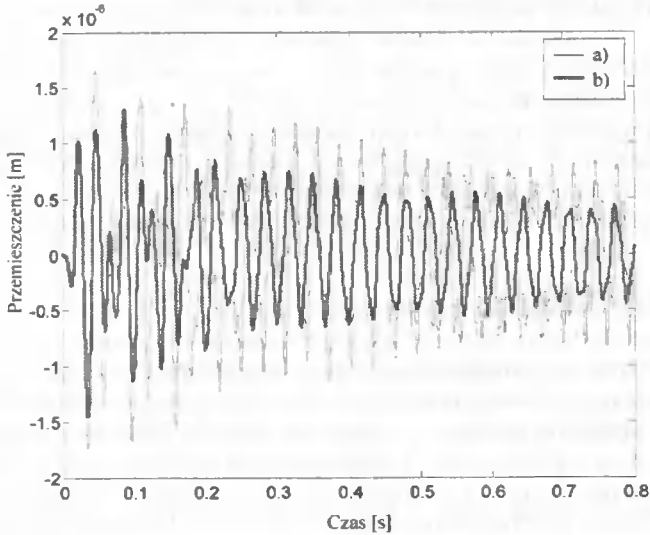
### 4.3. Minimalizacja amplitud sił dynamicznych

Ze względu na ograniczenia techniczne przy wprowadzaniu zmian parametrów silnika napędowego, optymalizację ograniczono do doboru sztywności skrętniej wałka bezpieczeństwa, zainstalowanego w silniku napędowym.



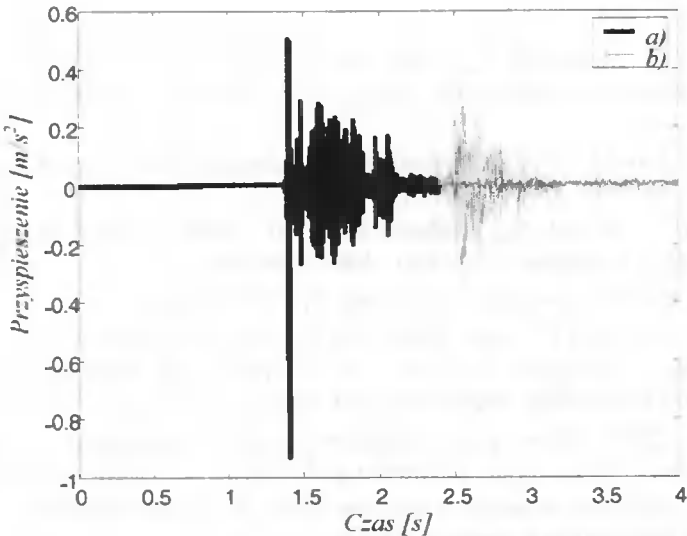
Rys. 10. Funkcja celu  $\psi(t) = M_{15}^2(t)$

Przyjęto funkcję celu opisującą wartości maksymalne siły w wybranej parze kinematycznej układu (rys. 10). Do określenia funkcji celu wybrano moment dynamiczny na wale głównym maszyny. Określono optymalną wartość współczynnika sztywności, którą wprowadzono do modelu dynamicznego i przeprowadzono symulacje numeryczne zjawisk dynamicznych. Porównano oddziaływania dynamiczne w układzie przed optymalizacją i po optymalizacji, a wyniki symulacji numerycznych dla wybranej pary kinematycznej przedstawiono na rysunku 11.



Rys. 11. Przesunięcie środka jednego z łożysk wału w kierunku osi x: a) przed optymalizacją, b) po optymalizacji

Wykazano, że właściwy dobór sztywności omawianego wałka powoduje zmniejszenie zarówno momentów skręcających w parach kinematycznych układu, jak również oddziaływań w punktach podparcia wałów. Zostało to potwierdzone podczas badań doświadczalnych, polegających na pomiarze przyspieszeń drgań na korpusie przekładni (rys. 12).



Rys. 12. Przebiegi przyspieszeń drgań zarejestrowane na korpusie maszyny podczas rozruchu układu z wałkiem: a) przed optymalizacją, b) po optymalizacji

Weryfikacja założeń przyjętych w procesie modelowania, zastosowanych algorytmów obliczeń i otrzymanych wyników symulacji numerycznych została przeprowadzona na drodze doświadczalnej podczas pomiarów na prototypie maszyny. Przyspieszenia drgań rejestrowano za pomocą dziesięciu czujników rozmieszczonych na korpusie maszyny. Analizując wyniki przeprowadzonych badań doświadczalnych stwierdzono, że zastosowanie w układzie napędowym wałka bezpieczeństwa o współczynniku sztywności określonym w procesie optymalizacji powoduje zmniejszenie wartości chwilowych przyspieszeń drgań we wszystkich punktach pomiarowych.

## 5. PODSUMOWANIE

Badania symulacyjne i optymalizacyjne, przeprowadzane na modelach matematycznych, dostarczają wielu cennych informacji na temat cech dynamicznych układów elektromechanicznych oraz sposobów ich kształtowania. Prezentowane algorytmy mogą być stosowane do określania cech konstrukcyjnych szerokiej klasy elektromechanicznych układów napędowych z silnikami indukcyjnymi. Dalszego uściślenia wymagają stosowane modele matematyczne złożonych układów elektromechanicznych. Efektywność procesu optymalizacji można natomiast zwiększyć przez odpowiedni dobór funkcji celu oraz udoskonalanie algorytmów optymalizacji. Poza klasycznymi metodami programowania matematycznego szerokie możliwości zastosowań otwierają się przed algorytmami genetycznymi i ewolucyjnymi. Szybki rozwój techniki komputerowej zarówno sprzętu, jak i oprogramowania umożliwia znaczne skrócenie czasu obliczeń numerycznych, zmniejszając tym samym znaczenie tego czynnika w procesie doboru metody rozwiązania zadania.

## LITERATURA

- [1] Berczyński S., Marchelek K., 1987. Naukowe podstawy kształtowania właściwości dynamicznych obrabiarek. Szczecińskie Roczniki Naukowe, t. II, z. 1, Szczecin.
- [2] Haug J.E., Arora J.S., 1979. Applied optimal design. Mechanical and Structural Systems. John Wiley & Sons, New York.
- [3] Kruszewski J., Sawiak S., Wittbrodt E., 1999. Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamice konstrukcji. WNT Warszawa.
- [4] Marchelek K., 1991. Dynamika obrabiarek. WNT Warszawa.
- [5] Męzyk A., Świtoński E., 2000. Optimizing dynamic characteristics of machinery. Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, September 2000, Barcelona, Spain.
- [6] Męzyk A., 2002. Influence of parameters of driving asynchronous motor on dynamic forces in a gear train. Engineering Mechanics 9, 3 Czech Republic.
- [7] Męzyk A., 1994. Minimization of transient forces in an electromechanical system. Structural Optimization 8. Springer Verlag.
- [8] Vas P., 1992. Electrical machines and drives. A space theory approach, Oxford University Press.

- [9] Zeman V., Kovar L., 1999. Modelling of Dynamic Properties of Shaft and Rotating Systems. Engineering Mechanics 1, Issue 6 (in Czech).

## MINIMIZATION OF VIBRATIONS OF ELECTROMECHANICAL DRIVE SYSTEMS

### Summary

The paper deals with modelling of electromechanical drive systems of working machines. The presented investigations concern systems consisting of asynchronous motor and gear train. The mechanical system was modeled by using finite element method and finite segment method. Elaborated mathematical models were applied for sensitivity analysis and optimization of a system. Applied algorithms and results of optimization of working machine were discussed.

Keywords: dynamics of electromechanical drive systems, sensitivity analysis, optimization





## TLUMIENIE DRGAŃ PŁYT I MEMBRAN W UJĘCIU PROBABILISTYCZNYM

Józef Nizioł

Katedra Dynamiki Układów Materialnych, Instytut Mechaniki Stosowanej  
Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska  
Al. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków

W pracy przeanalizowano drgania układu dwóch cienkich płyt i dwóch membran połączonych elementem lepkosprężystym. Na jeden z elementów dwuwymiarowych działa obciążenie będące procesem stochastycznym o zadanej funkcji korelacji. Drugi element stanowi dynamiczny eliminator drgań. Podano ogólną metodę wyznaczania funkcji korelacji elementu „chronionego” oraz optymalnego doboru wartości współczynników sprężystości w celu minimalizacji średniej wartości amplitudy drgań płyty lub membrany.

Słowa kluczowe: tłumienie drgań, płyty, membrany, procesy stochastyczne

### 1. WSTĘP

Problemy doboru optymalnych dynamicznych eliminatorów drgań w układach dyskretnych, zarówno w ujęciu liniowym jak i nieliniowym, zostały dobrze rozpracowane. O wiele trudniejszy problem stanowi tłumienie drgań układów ciągłych, zwłaszcza gdy mamy do czynienia z wymuszeniami losowymi. Takim przykładem może być tłumienie eolskich drgań linii elektroenergetycznych. Pomimo losowego charakteru wymuszeń drgania samowzbudne przewodów są tego typu, że duże ich amplitudy pojawiają się dla wąskich, rozdzielonych między sobą przedziałów częstotliwości i wówczas można dobrać odpowiednie tłumiki typu Stockbridge'a nastrojone na cztery częstotliwości rezonansowe, skutecznie zabezpieczające przewody przed zniszczeniem zmęczeniowym na liniach 220 kV [2].

W przypadku drgań wiązek wieloprzewodowych wywołanych opływem wiatru można poprzez odpowiedni dobór odstępników w grupie oraz rozmieszczenie grup odstępników wzdłuż przęsła zdecydowanie obniżyć drgania poszczególnych przewodów [6]. Rozwiązanie znalazło potwierdzenie w praktyce na czteroprzewodowych liniach 750 kV.

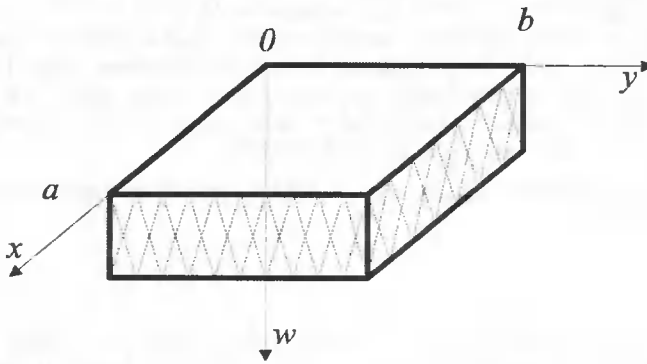
Do interesujących należy monografia [4], w której wykazano możliwość tłumienia dynamicznego jednego układu ciągłego za pomocą innego, połączzonego z nim układem sprężystym. Zagadnienie rozwiązano dla przypadku, gdy na pierwszy układ (membrana, płyta) działa równomiernie rozłożone obciążenie harmoniczne.

W przedstawionej pracy przeanalizowano drgania dwóch płyt i membran połączonych między sobą elementem lepkosprężystym. Górna płyta (membrana) poddana jest obciążeniom losowym (szum biały lub kolorowy). Dolna stanowi dynamiczny eliminator drgań układu podstawowego. Sterując sztywnością walcową płyty, siłą naciągu

membrany dolnej, czy sztywnością elementu lepkosprężystego łączącego wspomniane układy, można dostroić eliminator tak, by wytłumił on drgania układu podstawowego w szerokim zakresie częstotliwości. Dobór eliminatora dynamicznego prowadzi się poprzez minimalizację dyspersji amplitudy drgań układu podstawowego. W artykule przeanalizowano drgania układu dwóch cienkich płyt prostokątnych swobodnie podpartych oraz membran kołosymetrycznych.

## 2. DRGANIA WYMUSZONE UKŁADU DWÓCH CIENKICH PŁYT PROSTOKĄTNYCH POŁĄCZONYCH ELEMENTEM LEPKOSPŘĘŻYSTYM

Rozważmy układ dwóch prostokątnych płyt swobodnie podpartych na brzegu (rys. 1).



Rys. 1. Układ dwóch płyt prostokątnych

Płyty o bokach  $a$  i  $b$  podparte są na brzegach;  $\rho_i$ ,  $d_i$  ( $i=1,2$ ) oznaczają odpowiednio gęstości i grubości płyt. Płyty połączone są elementem lepkosprężystym o współczynniku sprężystości  $k$  i tłumieniu  $c$ . Na górną płytę działa obciążenie  $f(x, y, t)$ . Przemieszczenia poprzeczne płyt oznaczamy  $w_i(x, y, t)$ . ( $i=1,2$ ). Analizujemy małe drgania. Równania ruchu układu przedstawionego na rysunku 1 przyjmują postać:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{w}_1 + c(\dot{w}_1 - \dot{w}_2) + D_1 \Delta^2 w_1 + k(w_1 - w_2) &= f(x, y, t) \\ m_2 \ddot{w}_2 + c(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) + D_2 \Delta^2 w_2 + k(w_2 - w_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$$m_i = \rho_i d_i, \dot{w}_i = \frac{\partial w_i(x, y, t)}{\partial t}, \ddot{w}_i = \frac{\partial^2 w_i(x, y, t)}{\partial t^2}$$

$$\Delta^2 w_i = \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4}, D_i = \frac{E_i d_i^3}{12(1 - \nu_i^2)}, \quad (i=1,2)$$

$E_i$  – moduł Younga,

$\nu_i$  – współczynnik Poissona.

Rozwiązań układu (1.1) poszukujemy w postaci:

$$w_i(x, y, t) = \sum_{m, n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) T_{imn}(t), \quad (i=1, 2) \quad (2)$$

W naszym przypadku funkcje własne są równe:

$$W_{mn}(x, y) = \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b} \quad (3)$$

zaś współrzędne uogólnione  $T_{imn}$  należy wyznaczyć.

Po wstawieniu przewidywanych rozwiązań (2) do układu równań (1), przemnożeniu tak otrzymanych wyrażeń przez funkcje własne, wykonaniu całkowania po obszarze prostokąta i wykorzystaniu warunków ortogonalności funkcji własnych otrzymamy rozdzielone parami ciągi układów równań różniczkowych zwyczajnych na nieznanne funkcje  $T_{imn}(t)$ . Przyjmują one postać:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{1mn} + 2\omega_{1mn}\zeta_{1mn}\dot{T}_{1mn} + \omega_{1mn}^2 T_{1mn} - b_1\dot{T}_{2mn} - h_1 T_{2mn} &= F_{mn}(t) \\ \ddot{T}_{2mn} + 2\omega_{2mn}\zeta_{2mn}\dot{T}_{2mn} + \omega_{2mn}^2 T_{2mn} - b_2\dot{T}_{1mn} - h_2 T_{1mn} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$$F_{mn}(t) = \frac{4}{m_1 ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y, t) \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b} dx dy \quad (5)$$

Dla przypadku gdy  $f(x, y, t) = F_0 F(t)$ , czyli gdy obciążenie jest rozłożone równomiernie po górnej płycie, mamy:

$$F_{mn}(t) = \begin{cases} \frac{16 F_0 F(t)}{m_1 \pi^2 mn} & \text{gd } m, n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{gd } m, n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (6)$$

$$\omega_{1mn}^2 = \frac{D_1}{m_1} \pi^4 \left( \frac{n^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{m^4}{b^4} \right) + \frac{k}{m_1} \quad (7)$$

$$\omega_{2mn}^2 = \frac{D_2}{m_2} \pi^4 \left( \frac{n^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{m^4}{b^4} \right) + \frac{k}{m_2}$$

$$2\omega_{1mn}\zeta_{1mn} = b_1 \frac{c}{m_1}, \quad 2\omega_{2mn}\zeta_{2mn} = b_2 = \frac{c}{m_2}$$

$$h_1 = \frac{k}{m_1}, \quad h_2 = \frac{k}{m_2}$$

Równania (4) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_{1mn} + \frac{c}{m_1} \dot{T}_{1mn} + \omega_{1mn}^2 T_{1mn} - \frac{c}{m_1} \dot{T}_{2mn} - \frac{k}{m_1} T_{2mn} &= F_{mn}(t) \\ \ddot{T}_{2mn} + \frac{c}{m_2} \dot{T}_{2mn} + \omega_{2mn}^2 T_{2mn} - \frac{c}{m_2} \dot{T}_{1mn} - \frac{k}{m_2} T_{1mn} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Równanie charakterystyczne dla układu jednorodnego ( $F_{mn}(t) = 0$ ) ma postać:

$$r^4 - \left( \frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2} \right) r^3 + \left( \omega_{1mm}^2 + \omega_{2mm}^2 \right) r^2 + \left( \frac{c}{m_1} + \omega_{2mm}^2 + \frac{c}{m_2} \omega_{1mm}^2 - 2 \frac{ck}{m_1 m_2} \right) r + \omega_{1mm}^2 \omega_{2mm}^2 - \frac{k^2}{mm_1 mm_2} = 0 \quad (9)$$

Dla przypadku gdy  $D_1 = D_2$ ,  $m_1 = m_2 = m_0$ ,  $a = b$  pierwiastki te są równe:

$$r_{1mn} = \sqrt{-\frac{\pi^2}{m_0} \left( \frac{n^2 + m^2}{a^2} \right)}, \quad r_{2mn} = -r_{1mn} \quad (10)$$

$$r_{3mn} = \left[ -\frac{c}{m_0} + \sqrt{-\left( \frac{2k}{m_0} + \frac{\pi^2}{m_0} \left( \frac{n^2 + m^2}{a^2} \right) + \frac{c^2}{m_0^2} \right)} \right], \quad r_{4mn} = -r_{3mn} \quad (11)$$

Na podstawie znajomości tych pierwiastków można znaleźć ciągi całek szczególnych liniowo niezależnych. Na tej podstawie, stosując metodę wariacji stałych, można wyznaczyć całki układu niejednorodnego (8). Przyjmują one postać:

$$T_{1mn}(t) = \sum_{k=1}^4 \int_0^t Z_{kmm}(\tau) \exp(r_{kmm}(t - \tau)) k \tau \quad (12)$$

$$T_{2mn}(t) = \sum_{k=1}^4 \int_0^t a_{kmm} Z_{kmm}(\tau) \exp(r_{kmm}(t - \tau)) k \tau$$

Szczegółowe wyrażenia na funkcje  $Z_{kmm}(\tau)$  oraz współczynniki form  $a_{kmm}$  można znaleźć w [5]. Rozwiązanie układu (1) można więc zapisać w postaci:

$$w_1(x, y, t) = \frac{16F_0}{m_1 \pi^2} \sum_{\substack{m=1,3,5 \\ n=1,3,5}} \frac{1}{mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} T_{1mn}(t) \quad (13)$$

$$w_2(x, y, t) = \frac{16F_0}{m_1 \pi^2} \sum_{\substack{m=1,3,5 \\ n=1,3,5}} \frac{1}{mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} T_{2mn}(t) \quad (14)$$

Z wyrażen (12), (13) i (14) widać, że jedynie funkcje  $T_{imn}(t)$ , ( $i=1,2$ ) opisują proces stochastyczny. W funkcjach tych pod odpowiednimi wyrażeniami całkowymi, co wynika ze wzorów (5), (6), (8) i (12), występują procesy stochastyczne  $F_{imn}(t)$ , o których założyliśmy, że znane są ich funkcje korelacji.

Naszym zadaniem jest dobór parametrów „ $k$ ” i „ $c$ ” lub tylko „ $k$ ” (przy założonym „ $c$ ”) tak, by zminimalizować wartość średniego kwadratu przemieszczeń górnej płyty  $\sigma_{w_1}^2(t)$ . Funkcja autokorelacji  $K_{w_1 w_2}(x, y; t_1, t_2)$  wyraża się następująco:

$$K_{w_1 w_2}(x, y; t_1, t_2) = \langle w_1(x, y; t_1) w_2(x, y; t_2) \rangle \quad (15)$$

gdzie symbol  $\langle \cdot \rangle$  oznacza średnią po zbiorze realizacji procesu. Wykorzystując (13) mamy:

$$K_{w_1 w_2}(x, y; t_1, t_2) = \frac{256 F_0^2}{m_1^2 \pi^4} \sum_{\substack{m=1,3,5 \\ n=1,3,5}} \sum_{\substack{r=1,3,5 \\ s=1,3,5}} \frac{1}{mnr s} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} \sin \frac{\pi r x}{a} \sin \frac{\pi s y}{b} \cdot \langle T_{1mn}(t_1) \cdot T_{1rs}(t_2) \rangle \quad (16)$$

Pozostaje więc problem wyznaczenia funkcji korelacji  $\langle T_{1mn}(t_1) \cdot T_{1rs}(t_2) \rangle$ . W wyrażeniach na  $T_{1mn}(t)$  w funkcjach  $Z_{kmn}(\tau)$  (wzór (1.12)) występują iloczyny funkcji  $F(t)$  i funkcji deterministycznych. Zapiszmy je w postaci:

$$Z_{kmn}(\tau) = F(\tau) H_{km}(\tau) \quad (17)$$

Oznaczmy przez  $p(z_1, z_2; t_1, t_2)$  dwuwymiarową gęstość rozkładu procesu  $F(\tau)$ . Wówczas mamy:

$$\langle T_{1mn}(t_1) \cdot T_{1rs}(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=1}^4 \int_0^{t_1} H_{kmn}(\tau_1) d\tau_1 \sum_{l=1}^4 \int_0^{t_2} H_{lrs}(\tau_2) d\tau_2 \right] p(z_1, z_2; \tau_1, \tau_2) dz_1 dz_2 \quad (18)$$

Zmieniając kolejność całkowania otrzymamy ostatecznie:

$$\langle T_{1mn}(t_1) \cdot T_{1rs}(t_2) \rangle = \sum_{k=1}^4 \int_0^{t_1} H_{kmn}(\tau_1) d\tau_1 \sum_{l=1}^4 \int_0^{t_2} H_{lrs}(\tau_2) K_{FF}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \quad (19)$$

gdzie:  $K_{FF}(\tau_1, \tau_2)$  jest znaną funkcją autokorelacji funkcji  $F(t)$ .

Ostatecznie funkcja autokorelacji wyrażenia  $w_1(x, y; t_1, t_2)$  przyjmie postać:

$$K_{w_1 w_2}(x, y; t_1, t_2) = \frac{256 F_0^2}{m_1^2 \pi^4} \sum_{\substack{m=1,3,5 \\ n=1,3,5}} \sum_{\substack{r=1,3,5 \\ s=1,3,5}} \frac{1}{mnr s} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} \sin \frac{\pi r x}{a} \sin \frac{\pi s y}{b} \cdot \sum_{k=1}^4 \int_0^{t_1} H_{kmn}(\tau_1) d\tau_1 \sum_{l=1}^4 \int_0^{t_2} H_{lrs}(\tau_2) K_{FF}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \quad (20)$$

Kładąc  $t_1 = t_2 = t$  otrzymamy  $\sigma_{w_1}^2(t)$ .

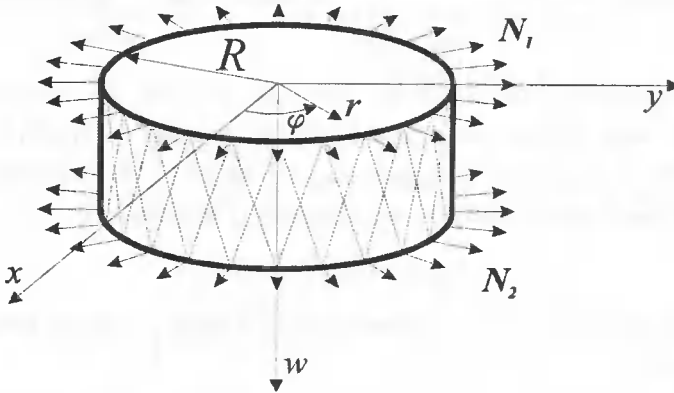
Z wyrażenia:

$$\frac{\partial \sigma_{w_1}^2(t)}{\partial k} = 0 \quad (21)$$

wyznaczyć można wartość parametru sprężystości „k”, zapewniającą minimalizację kwadratu przemieszczenia górnej płyty. Z wyrażenia (20) można również wyznaczyć linie węzłowe płyty górnej.

### 3. DRGANIA WYMUSZONE DWÓCH MEMBRAN KOŁOWOSYMETRYCZNYCH

Rozważmy drgania układu dwóch membran połączonych elementem lepkosprężystym (rys. 2).



Rys. 2. Układ dwóch membran kołowych

Naciągi membran są odpowiednio równe  $N_1$  i  $N_2$ , ich grubości  $d_1$  i  $d_2$ , gęstości powierzchniowe  $\rho_1$  i  $\rho_2$ . Obydwie membrany zamocowane są na okręgach o promieniach  $R$ .

Równania różniczkowe układu przyjmą postać:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{w}_1 + c(\dot{w}_1 - \dot{w}_2) - N_1 \Delta w_1 + k(w_1 - w_2) &= f(r, \varphi, t) \\ m_2 \ddot{w}_2 + c(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) - N_2 \Delta w_2 + k(w_2 - w_1) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:  $m_i = \rho_i d_i$ ,  $\dot{w}_i = \frac{\partial w_i(x, y, t)}{\partial t}$ ,  $\ddot{w}_i = \frac{\partial^2 w_i(x, y, t)}{\partial t^2}$

$$\Delta w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2}, \quad (i=1,2)$$

Całek szczególnych dla jednorodnego układu odpowiadającego (22) ( $f(r, \varphi, t) = 0$ ) poszukujemy w postaci:

$$w_i(r, \varphi, t) = W_i(r, \varphi) T_i(t) \quad (23)$$

W tym przypadku funkcje własne zapisane we współrzędnych biegunowych  $(r, \varphi)$  przyjmują postać:

$$W_{mn}(r, \varphi) = J_n(\lambda_m^n r) (A_{mn} \cos n\varphi + B_{mn} \sin n\varphi) \quad (24)$$

gdzie  $J_n(\lambda r)$  jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju,  $\lambda_m^n$  są pierwiastkami równania  $J_n(\lambda R) = 0$ .

Wykorzystując (23) i (24) układ (22) przyjmie postać:

$$\begin{aligned}
 m_1 \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{mn}(r, \varphi) \ddot{T}_{1mn} + c \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{mn}(r, \varphi) (\dot{T}_{1mn} - \dot{T}_{2mn}) - N_1 \Delta \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{mn}(r, \varphi) T_{1mn} + \\
 + k \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{mn}(r, \varphi) (T_{1mn} - T_{2mn}) = f(r, \varphi, t) \\
 m_2 \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{mn}(r, \varphi) \ddot{T}_{2mn} + c \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{mn}(r, \varphi) (\dot{T}_{2mn} - \dot{T}_{1mn}) - N_2 \Delta \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{mn}(r, \varphi) T_{2mn} + \\
 + k \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{mn}(r, \varphi) (T_{2mn} - T_{1mn}) = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

Mnożąc obie strony tego układu przez funkcje  $W_{ij}(r, \varphi)$  całkujemy względem zmiennych „ $\varphi$ ” i „ $r$ ” odpowiednio w przedziałach  $[0, 2\pi]$  oraz  $[0, R]$ .

Wykorzystując warunki ortogonalności funkcji trygonometrycznych w przedziale  $[0, 2\pi]$  oraz funkcji Bessela  $J_n(\lambda_{nm}^n r)$  z wagą „ $r$ ” w przedziale  $[0, R]$  możemy otrzymać układ równań na nieznanne funkcje  $T_{mn}^n(t)$  podobny jak (4), przy czym obecnie:

$$F_{mn}(t) = \frac{F_0}{m_1 \pi h_{mn}} F(t) \tag{26}$$

gdzie:

$$h_{mn} = \int_0^R J_n(\lambda_{nm}^n r) r dr \tag{27}$$

Obecnie wyrażenia odpowiadające (7)  $\omega_{1mn}^2$ ,  $\omega_{2mn}^2$ ,  $2\omega_{1mn}\zeta_{1mn}$ ,  $2\omega_{2mn}\zeta_{2mn}$  przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 \omega_{1mn}^2 &= \frac{N_1}{m_1} \pi \frac{\lambda_{nm}^n}{R} + \frac{k}{m_1} \\
 \omega_{2mn}^2 &= \frac{N_2}{m_2} \pi \frac{\lambda_{nm}^n}{R} + \frac{k}{m_2} \\
 2\omega_{1mn}\zeta_{1mn} &= \frac{c}{m_1} \qquad 2\omega_{2mn}\zeta_{2mn} = \frac{c}{m_2}
 \end{aligned} \tag{28}$$

Równanie charakterystyczne układu jednorodnego ( $F_{mn}(t) = 0$ ) przyjmie postać identyczną jak (9), zmianie ulegną jedynie współczynniki tego równania. W miejsce współczynników (7) należy podstawić współczynniki (28). Dalsze rozważania mierzące do wyznaczenia funkcji korelacji  $K_{w_1 w_2}(r, \varphi; t_1, t_2)$  przebiegają podobnie jak w rozdziale pierwszym.

W podobny sposób można przeanalizować drgania układu dwóch płyt kołowsymetrycznych połączonych elementem lepkosprężystym. Zmianie ulegną funkcje własne i obecnie przyjmą postać [8]:

$$W_{mm}(r, \varphi) = [J_n(\lambda_m^n r) + A_n J_n(i\lambda_m^n r)](\sin m\varphi + B_m \cos m\varphi), \quad i = \sqrt{-1} \quad (29)$$

Współczynniki  $A_n, B_m$  wyznacza się z warunków brzegowych. Dla  $r = R$  moment zginający, siła poprzeczna i siła osiowa przyjmują postać:

$$M = -D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \right]$$

$$T = D(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right] \quad (30)$$

$$N = -D \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right]$$

Przykładowo dla płyty swobodnie podpartej:  $W(R, \varphi) = 0$ ,  $M(R, \varphi) = 0$ ,  $N(R, \varphi) = 0$ .

#### 4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono ogólną metodę tłumienia drgań jednego dwuwymiarowego układu ciągłego przez podobny drugi układ ciągły. Nowością jest analiza w ujęciu probabilistycznym. Dla układów deterministycznych zjawisko tłumienia dynamicznego występuje [4], gdy spełnione są relacje:  $p_j = 0.5(\omega_{1j} + \omega_{2j})$ , gdzie:  $p_j$  – częstość wymuszającej siły harmoniczej. Częstości  $\omega_{1j}$ ,  $\omega_{2j}$  są częstościami determinującymi drgania przeciwbieżne.

Podane rozwiązanie dotyczyło wymuszeń harmoniczych i dodatkowo nie uwzględniono tłumienia. Podobnie jak dla układów dyskretnych dostrojony eliminator jest bardzo czuły ze względu na dużą „stromość” charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej w pobliżu antyrezonansu. Dlatego jego przydatność praktyczna jest wątpliwa. Wprowadzenie tłumienia w sposób zasadniczy łagodzi ten efekt. Wydaje się, że w przypadku wymuszeń losowych poprzez odpowiedni dobór współczynnika sprężystości „ $k$ ” czy też sztywności walcowej płyty i współczynnika tłumienia „ $c$ ” można dostroić eliminator tak, by tłumił on drgania układu podstawowego w szerokim zakresie. Dostrojenie będzie zależęć od charakteru wymuszeń. Inne będzie dla wymuszenia szerokopasmowego (zbliżonego do białego szumu), a inne dla wąskopasmowego. Przykładowo gdy funkcja korelacji:

$$K_{FF} = \sigma_0^2 \exp\{-\alpha|t_2 - t_1|\} \cos p_j(t_2 - t_1)$$

nastrojenie będzie jak dla wymuszenia harmonicznego (gdy  $\alpha$  jest małe a  $p_j$  duże).

#### LITERATURA

- [1] Nizioł J., 2001. Tłumienie drgań układów ciągłych w ujęciu probabilistycznym. Zesz. Nauk. PK, Mechanika 83, Kraków.



- [2] Nizioł J., 1999. Tłumienie drgań przewodów i osprzętu linii elektroenergetycznych. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz, Mechanika 44.
- [3] Nizioł J., Kozień M., 2001. Drgania lepko-sprężystych powłok małowyniosłych poddanych działaniu wymuszeń losowych. Materiały V Konferencji MARDiH, Kraków-Krynica.
- [4] Oniszczyk Z., 1977. Analiza drgań złożonych układów ciągłych z więzami sprężystymi. Oficyna Wyd. Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów.
- [5] Piszczek K., Nizioł J., 1986. Random Vibrations of Mechanical Systems. PWN – Polish Scientific Publishers Warszawa and Ellis Horwood Limited Chichester.
- [6] Snamina J., 2003. Mechaniczne zjawiska falowe w przewodach elektroenergetycznych linii napowietrznych. Monografia 287, Wyd. Politechniki Krakowskiej.
- [7] Nizioł J., 2003. Tłumienie drgań dwuwymiarowych układów ciągłych w ujęciu probabilistycznym. Wiestnik Technologicznego Uniwersytetu Podiłja, Naukowy Żurnal 6. Chmielnickij.
- [8] Babakow J.M., 1968. Teoria kolebanij. Nauka Moskwa.

## PROBABILISTIC APPROACH TO VIBRATION DAMPING OF PLATES AND MEMBRANES

### Summary

The paper is concerned with the analysis of the complex 2-dimensional continuous systems composed of two plates or membranes connected by a viscoelastic element. One plate (membrane) is subject to a continuous loading which is a stochastic process with a known autocorrelation function. The second plate (membrane) serves as a dynamic vibration absorber. The vibrations of square thin plates and circular membranes have been studied. The criterion of the optimal choice of the absorber is taken as the minimum dispersion of the displacements of the system to which the loading is applied.

Keywords: vibration damping, plates, membranes, stochastic processes



## METODA ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH W ZASTOSOWANIU DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ POCZĄTKOWO-BRZEGOWYCH

Adam Podhorecki

Katedra Mechaniki Konstrukcji  
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7. 85-796 Bydgoszcz

Przedmiotem pracy jest zastosowanie metody elementów czasoprzestrzennych do rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych. Rozpatrzono równanie różniczkowe cząstkowe opisujące szeroki wachlarz takich zagadnień, jak np. nieustalony przepływ ciepła, konsolidacja gruntu związana z przepływem cieczy w porach gruntu, fale tłumione itp.

Słowa kluczowe: metoda elementów czasoprzestrzennych, zagadnienie początkowo-brzegowe

### 1. WSTĘP

Problemy formułowane i analizowane w mechanice kontinuum sprawdzają się do rozwiązywania układów cząstkowych równań różniczkowych względem zmiennych przestrzennych i czasu. Do rozwiązywania takich zagadnień stosuje się obecnie głównie metody numeryczne (komputerowe), a wśród tych metod bezwzględnie przoduje metoda elementów skończonych (MES). Przy stosowaniu MES dokonujemy aproksymacji np. pól przemieszczeń, odkształceń, naprężeń i innych pól w całym analizowanym obszarze przestrzennym, co sprowadza zagadnienie początkowo-brzegowe do układu równań różniczkowych zwyczajnych, które następnie rozwiązujemy metodami analitycznymi lub innymi metodami numerycznymi. Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ) opracował w 1975 roku Kączkowski [1,2]. MECZ jest pewnym wariantem MES, polegającym na aproksymacji pól w całym analizowanym obszarze czasoprzestrzennym, co sprowadza zagadnienie początkowo-brzegowe do układu równań algebraicznych [1÷5]. Dotychczas MECZ stosowano głównie do rozwiązywania szczegółowych problemów początkowo-brzegowych mechaniki ciała stałego (np. [6÷11]). Ostatnie prace wykorzystują metody elementów czasoprzestrzennych przede wszystkim do rozwiązywania problemów nieustalonych z zakresu mechaniki ciała stałego i mechaniki płynów (np. [12÷14]).

Do sformułowania równań ruchu MECZ stosuje się najczęściej zasadę czteropracy wirtualnej (zasadę czasopracy wirtualnej), która odpowiada uogólnionej zasadzie Hamiltona [10]. Możliwe też jest inne sformułowanie MECZ, wykorzystujące do tego celu ważoną metodę residualną (w szczególności metodę Galerkiną). Pierwsze takie sformułowanie MECZ przedstawiono w pracy [10]. Równanie czasopracy wirtualnej, a więc

także i zasada Hamiltona w postaci uogólnionej nie zawsze dadzą się wyrazić prosto jako minimum dobrze określonego funkcjonału. Na tym tle powstają pewne niejasności i nieścisłości. Wydaje się więc celowym dokładne przedstawienie równań ruchu MECZ dla ogólnego przypadku procesów nieustalonych pola i zagadnień dynamicznych. Do tego celu wykorzystano ważną metodę residualną.

## 2. PODSTAWOWE SFORMUŁOWANIA PROCESÓW NIEUSTALONYCH POLA I ZAGADNIEŃ DYNAMICZNYCH

Zakres zagadnień ze zmienną czasową jest duży i obejmuje np. procesy nieustalone przepływu ciepła, rozchodzenia się fal w cieczech, dynamikę budowli.

Wiele zagadnień fizycznych opisuje się równaniem quasi-harmonicznym, w którym występują także pochodne nieznannej funkcji  $\phi$  względem czasu [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \left( Q - \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (1)$$

$$x, y, z \in V, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

gdzie:  $k_x, k_y, k_z, Q$  są zadanymi funkcjami zależnymi od współrzędnych  $x, y, z$  oraz od czasu  $t$ .

Sens fizyczny tych wielkości zależy od rodzaju i charakteru rozpatrywanego zagadnienia. Na przykład w przypadku przepływu ciepła  $k_x, k_y, k_z$  są anizotropowymi współczynnikami przewodnictwa cieplnego,  $Q$  jest funkcją prędkości wytwarzania ciepła, a  $\phi$  jest temperaturą. Równanie (1) uzupełniają warunki brzegowe i początkowe. Przy  $\rho = 0$  równanie (1) jest równaniem nieustalonego przepływu ciepła lub konsolidacją gruntów związaną z nieustalonym przepływem cieczy w porach gruntu. Jeżeli  $\mu = 0$ , to wtedy równanie (1) staje się równaniem falowym (fale elektromagnetyczne, falowanie powierzchniowe cieczy, fale ciśnieniowe itp.). Przy  $\mu \neq \rho \neq 0$  mamy do czynienia z równaniem fali tłumionej, które jest bardzo ważnym równaniem w mechanice cieczy.

## 3. RESIDUALNE SFORMUŁOWANIE MECZ

Najogólniej uznanym sposobem przedstawienia metody elementów skończonych (MES), a co za tym idzie i metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ) jest minimalizacja pewnego funkcjonału  $\chi$  w obszarze  $V$  (w przypadku MES) lub w czasoprzestrzeni  $\Omega \equiv V \times t$  (w przypadku MECZ).

Istnieją liczne zagadnienia mechaniki procesów nieustalonych, które nie dadzą wyrazić się jako minimum dobrze określonego funkcjonału, np. w przypadku obciążeń niezachowawczych. W takiej sytuacji należy stosować inne metody bezpośrednie. Jedną z takich efektywnych metod jest ważna metoda residualna, która jest sposobem przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych.

Do sformułowania istoty MES lub MECZ można dojść na drodze matematycznej wychodząc z równań różniczkowych opisujących zagadnienie. Niech tym równaniem

różniczkowym będzie równanie (1). Dla rozwiązania przybliżonego podzielmy nasz obszar czasoprzestrzenny  $\Omega$  na skończone elementy czasoprzestrzenne (SKECZ), czyli na skończoną liczbę podobszarów  $\Omega_e$ , dla których nieznaną funkcję  $\phi$  opisujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \phi^e(x, y, z, t) &= N_\alpha^e(x, y, z, t) r_\alpha^e, \\ \alpha &= 1, 2, \dots, n, \quad x, y, z, t \in \Omega_e, \quad e = 1, 2, \dots, E, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:  $N_\alpha$  są funkcjami kształtu zależnymi od współrzędnych  $x, y, z$  oraz od czasu  $t$ , zaś  $r_\alpha$  reprezentuje zbiór  $n$  parametrów węzłowych, będących w tym przypadku wprost wartościami  $\phi$  w węzłach SKECZ.

Jeżeli przybliżenie (2) podstawimy do równania (1), to równanie to nie będzie równe zeru, lecz wygeneruje resztę  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x^e \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y^e \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z^e \frac{\partial \phi^e}{\partial z} \right) + \left( Q^e - \mu^e \frac{\partial \phi^e}{\partial t} - \rho^e \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial t^2} \right) &= R^e, \\ x, y, z, t \in \Omega_e. \end{aligned} \quad (3)$$

W tej sytuacji należy zredukować resztę  $R$  do najmniejszej wartości we wszystkich punktach czasoprzestrzeni  $\Omega$ . Minimalizacji reszty  $R$  można dokonać w obszarze  $\Omega$  z funkcją wagi  $W_\beta = W_\beta(x, y, z, t)$ :

$$\sum_{e=1}^E \int \int W_\beta^e R^e dV dt = \sum_{e=1}^E \iint W_\beta^e R^e d\Omega = 0, \quad (4)$$

gdzie: funkcja wagi w szczególności może być równa funkcji kształtu, czyli  $W_\beta = N_\beta$  (metoda Galerkin). W tym przypadku funkcję kształtu definiujemy w sposób charakterystyczny dla metody elementów skończonych. Takie postępowanie nosi nazwę ważonej metody residualnej [15]. W naszym przypadku mamy do czynienia z wyrażeniem:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \int \int W_\beta^e \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x^e \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y^e \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z^e \frac{\partial \phi^e}{\partial z} \right) - \mu^e \dot{\phi}^e - \rho^e \ddot{\phi}^e + Q^e \right] dV dt, \\ \dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \ddot{\phi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie: funkcja  $\phi$  zadana jest wzorem (2).

Całka w podanej postaci wymaga ciągłości pierwszych pochodnych w obszarze między elementami, aby uniknąć nieskończonych wartości drugich pochodnych. Ograniczenie to możemy ominąć dokonując przekształceń poszczególnych całek poprzez zastosowanie przekształcenia Gaussa-Ostrogradskiego i całkowania przez części:

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^E \left[ \int_{t_e} \int_{V_e} \left( \frac{\partial W_\beta^e}{\partial x} k_x^e \frac{\partial \phi^e}{\partial x} + \frac{\partial W_\beta^e}{\partial y} k_y^e \frac{\partial \phi^e}{\partial y} + \frac{\partial W_\beta^e}{\partial z} k_z^e \frac{\partial \phi^e}{\partial z} - \dot{W}_\beta^e \rho^e \dot{\phi}^e + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \dot{W}_\beta^e \mu^e \dot{\phi}^e - W_\beta^e Q^e \right) dV dt - \int_{t_e} \int_{\partial V_e} W_\beta^e \left( k_x^e \frac{\partial \phi^e}{\partial x} n_x^e + k_y^e \frac{\partial \phi^e}{\partial y} n_y^e + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + k_z^e \frac{\partial \phi^e}{\partial z} n_z^e \right) d(\partial V) dt + \int_{t_e} W_\beta^e \rho^e \dot{\phi}^e dV \right]_{t_e}^{t_e'} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

gdzie:  $n_x, n_y, n_z$  są kosinusami kierunkowymi normalnej zewnętrznej kolejno względem osi  $x, y, z$ , natomiast  $\partial V$  jest powierzchnią graniczną (brzegiem) obszaru  $V$ . Druga całka przedstawia całkę po brzegu z przepływu  $k_n \partial \phi / \partial n$ , tzn.:

$$\int_{t_e} \int_{\partial V_e} W_\beta^e \left( k_x^e \frac{\partial \phi^e}{\partial x} n_x^e + k_y^e \frac{\partial \phi^e}{\partial y} n_y^e + k_z^e \frac{\partial \phi^e}{\partial z} n_z^e \right) d(\partial V) dt = \iint_{\partial \Omega_e} W_\beta^e k_n^e \frac{\partial \phi^e}{\partial n} d(\partial \Omega), \tag{7}$$

$\partial \Omega_e = \partial V_e \times t_e$ .

W analizie poszczególnych problemów występują często złożone warunki brzegowe. Warunek brzegowy (7) można wzbogacić o dodatkowe elementy, np.:

$$\iint_{\partial \Omega_e} W_\beta^e \left( k_n^e \frac{\partial \phi^e}{\partial n} + q^e + \alpha^e \phi^e \right) d(\partial \Omega), \tag{8}$$

gdzie: w przypadku przewodnictwa cieplnego  $q$  przedstawia przepływ ciepła przez jednostkę powierzchni i czasu, natomiast  $\alpha \phi$  oznacza straty konwekcyjne. Po wprowadzeniu (2) i (8) do równania (6) otrzymujemy układ równań algebraicznych w postaci:

$$\sum_{e=1}^E (K_{\alpha\beta}^e r_\alpha - F_\beta^e) = 0, \tag{9}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}^e = & \iint_{\Omega_e} \left( \frac{\partial W_\beta^e}{\partial x} k_x^e \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} - \frac{\partial W_\beta^e}{\partial y} k_y^e \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} + \frac{\partial W_\beta^e}{\partial z} k_z^e \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} + \right. \\
& \left. - \dot{W}_\beta^e \rho^e \dot{N}_\alpha^e + \dot{W}_\beta^e \mu^e \dot{N}_\alpha^e \right) d\Omega,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$F_\beta^e = \iint_{\Omega_e} W_\beta^e Q^e d\Omega + \iint_{\partial \Omega_e} W_\beta^e \left( k_n^e \frac{\partial \phi^e}{\partial n} + q^e + \alpha^e \phi^e \right) d(\partial \Omega) - \int_{t_e} W_\beta^e \rho^e \dot{\phi}^e dV \Big|_{t_e}^{t_e'}.$$

Po agregacji, równanie ruchu (9) ma postać:

$$\underline{\chi} = \underline{K} \underline{r} - \underline{F} = \underline{0}. \tag{11}$$

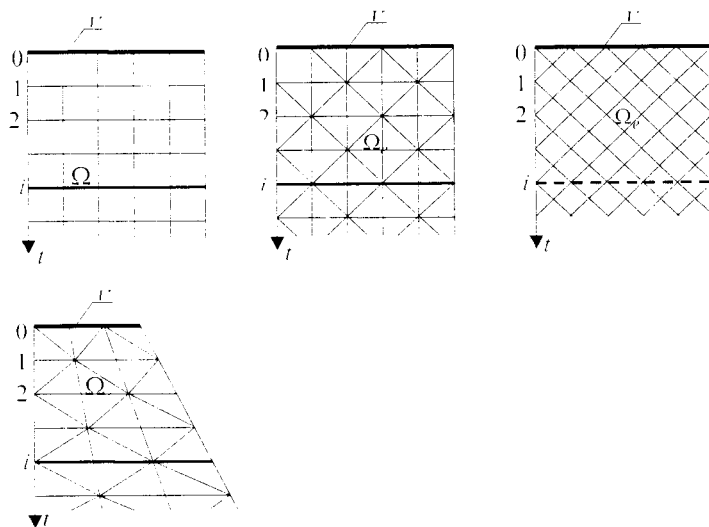
### 4. REKURENCYJNY CHARAKTER RÓWNAŃ MECZ

Niezależnie od sposobu dyskretyzacji (rys. 1), struktura równania ruchu MECZ jest następująca:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}'' & \underline{B}'' & & & & & \\ \underline{C}^1 & \underline{A}^1 + \underline{D}^1 & \underline{B}^1 & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & \underline{C}^i & \underline{A}^i + \underline{D}^i & \underline{B}^i & \\ & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \underline{C}'' & \underline{D}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}'' \\ \underline{r}^1 \\ \dots \\ \underline{r}^i \\ \dots \\ \underline{r}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}'' \\ \underline{F}^1 \\ \dots \\ \underline{F}^i \\ \dots \\ \underline{F}'' \end{bmatrix}, \tag{12}$$

gdzie:  $\underline{A}^i, \underline{B}^i, \underline{C}^i$  i  $\underline{D}^i$  są kwadratowymi macierzami czasoprzestrzennymi po agregacji, w chwili  $i$ . W macierzach tych uwzględnione są występujące warunki brzegowe. Macierze te oczywiście mogą ulegać zmianie w czasie. Równanie (12) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \underline{A}'' \underline{r}'' + \underline{B}'' \underline{r}^1 &= \underline{F}'' \\ \underline{C}^1 \underline{r}'' + (\underline{A}^1 + \underline{D}^1) \underline{r}^1 + \underline{B}^1 \underline{r}^2 &= \underline{F}^1 \\ \dots & \\ \underline{C}^i \underline{r}^{i-1} + (\underline{A}^i + \underline{D}^i) \underline{r}^i + \underline{B}^i \underline{r}^{i+1} &= \underline{F}^i \\ \dots & \\ i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{13}$$



Rys. 1. Przykłady dyskretyzacji obszaru czasoprzestrzennego

Przy analizie zagadnień początkowo-brzegowych na ogół znane są warunki początkowe, np. w postaci:

$$\phi(t=0) = \dot{\phi}^o, \quad \dot{\phi}(t=0) = \dot{\phi}^o. \quad (14)$$

Pierwszy warunek początkowy, na podstawie (2), prowadzi do znajomości parametrów węzłowych:

$$\underline{r}(t=0) = \underline{r}^o. \quad (15)$$

natomiast drugi warunek początkowy dotyczący prędkości tkwi we wzorze na impulsy węzłowe  $F_{\beta}$  (10)<sub>2</sub>. Ostatecznie istotne jest to, że znane warunki początkowe (14) umożliwiają przekształcenie równań ruchu MECZ (13) w formułę rekurencyjną:

$$\underline{r}^{i+1} = (\underline{B}^i)^{-1} \left[ \underline{F}^i - \underline{C}^i \underline{r}^{i-1} - (\underline{A}^i + \underline{D}^i) \underline{r}^i \right], \quad (16)$$

Przy stosowaniu elementów czasoprzestrzennych o kształtach symplektycznych uzyskujemy naturalne rozseparowanie poszczególnych równań (13) lub (16) na mniejsze układy lub pojedyncze równania z jedną niewiadomą [3.4].

Metoda elementów czasoprzestrzennych należy, w podanym sformułowaniu, do metod warunkowo stabilnych, stąd na wymiary SKECZ nałożone są pewne ograniczenia [10.16].

Zbadajmy, jak niewielki błąd w chwili początkowej  $\underline{\delta}^o$  wpływa na proces rekurencyjny:

$$\underline{r}^o = \underline{\delta}^o, \quad \underline{F}^i = \underline{0}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Wzór rekurencyjny (16) zależy od zaburzenia początkowego  $\underline{\delta}^o$  w następujący sposób:

$$\underline{r}^k = \underline{Z}^{k-1} \underline{\delta}^o, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \underline{Z}^0 &= -(\underline{B}^0)^{-1} \underline{A}^0, \\ \underline{Z}^1 &= -(\underline{B}^1)^{-1} \left[ \underline{C}^1 + (\underline{A}^1 + \underline{D}^1) \underline{Z}^0 \right], \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{Z}^j &= -(\underline{B}^j)^{-1} \left[ \underline{C}^j \underline{Z}^{j-2} + (\underline{A}^j + \underline{D}^j) \underline{Z}^{j-1} \right], \\ &j = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

są macierzami przemieszczenia [16]. Schemat obliczeniowy będzie stabilny, tzn.  $\underline{r}$  pozostanie ograniczone ( $j \rightarrow \infty$ ), jeżeli wszystkie wartości własne macierzy przemieszczenia  $\underline{Z}^j$  spełniają następującą nierówność:

$$\left| \lambda^j \right| \leq 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$



Istotną (dominującą) częstość własną  $\lambda'_{max}$  można przyjąć wykorzystując różne oszacowania promienia spektralnego macierzy  $\rho(\underline{Z}^j)$ :

$$\rho(\underline{Z}^j) \leq_k^{max} \sum_{j=1}^n |Z'_{kj}|, \quad \rho(\underline{Z}^j) \leq \sqrt[2m]{tr[(\underline{Z}^j)^{2m}]}, \quad |\lambda'_{max}| \leq \rho(\underline{Z}^j), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

## 5. ZAKOŃCZENIE

Rozpatrzono równanie różniczkowe cząstkowe opisujące szeroki wachlarz zagadnień początkowo-brzegowych (nieustalony przepływ ciepła, konsolidację gruntu związaną z nieustalonym przepływem cieczy w porach gruntu, fale elektromagnetyczne, falowanie powierzchniowe cieczy, fale ciśnieniowe itd.). Do rozwiązania takiego ogólnego i złożonego równania użyto metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ).

Do sformułowania równań ruchu MECZ użyto ważnej metody residualnej. Równania ruchu MECZ to układ równań algebraicznych. Przy znanych warunkach początkowych równania te przechodzą w formę równań rekurencyjnych. Metoda elementów czasoprzestrzennych wydaje się być bardzo dobrym narzędziem do rozwiązywania tego typu problemów.

## LITERATURA

- [1] Kączkowski Z., 1975. The method of finite space-time elements in dynamics of structures. J. Techn. Phys. 16, 1.
- [2] Kączkowski Z., 1976. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. Arch. Inż. Łąd. 22, 1976.
- [3] Kączkowski Z., 1983. O stosowaniu nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych. Mech. Teoret. Stos. 21.
- [4] Bajer Cz., 1987. Triangular and tetrahedral space-time finite elements in vibration analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. 23, 1721-1739.
- [5] Bajer Cz., Podhorecki A., 1989. Space-time element method in structural dynamics. Arch. Mech. 41.
- [6] Kączkowski Z., Żyszko M., 1979. Drgania giętne pręta metodą czasoprzestrzennych elementów skończonych. Arch. Inż. Łąd. 24, 1.
- [7] Kączkowski Z., 1985. O stosowaniu metody elementów czasoprzestrzennych do zagadnień przewodnictwa cieplnego. Arch. Inż. Łąd. 31, 3.
- [8] Witkowski M., 1986. Dynamics analysis of hoist cable using triangular space-time elements. Enging. Trans. 34, 4.
- [9] Podhorecki A., 1986. The viscoelastic space-time element. Comp. Struct. 23.
- [10] Podhorecki A., 1991. Metoda czasoprzestrzennych elementów w geometrycznie nieliniowej teorii lepkosprężystości. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz. Rozprawy 45.

- [11] Huang H., Costanzo F., 2002. On the use of space-time finite elements in the solution of elasto-dynamics problems with strain discontinuities. *Comp. Meth. Appl. Eng.* 191, 46.
- [12] Sin-Chung Chang, Xiao-Yen Wang, Wai-Ming To. 2000. Application of the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method to One-Dimensional Convection-Diffusion Problems. *J. Comp. Phys.* 165, 1.
- [13] Shaw S., Whiteman J.R., 2000. Adaptive space-time finite element solution for Volterra equations arising in viscoelasticity problems. *J. Comp. Appl. Math.* 125, 1-2.
- [14] Hübner B., Walhorn E., Dinkler D., 2004. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *T. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 193.
- [15] Zienkiewicz O.C., 1972. *Metoda elementów skończonych*. Arkady Warszawa.
- [16] Podhorecki A., 1989. Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Rozp. Inż.* 37, 1.

## THE SPACE-TIME FINITE ELEMENT METHOD IN AN APPLICATION TO THE ANALYSIS OF INITIAL-BOUNDARY PROBLEMS

### Summary

The scope of the task is an application of the space-time finite element method to the analysis of initial-boundary problems. The paper present differential equation which defines a wide variety of such problems, for example: a transient heat-flow, a consolidation of a soil influenced by a liquid-flow in a porous soil, damped waves, etc.

Keywords: the space-time finite element method, initial-boundary problems

## VIBRATIONS OF THE PLATE WITH A VISCOELASTIC INTERLAYER

Katarzyna Cabańska-Placzkiewicz, Maciej Wilczyński

Bydgoszcz Academy, Department of Mathematics,  
Technics and Natural Science, Institute of Technology  
85-064 Bydgoszcz, Chodkiewicza 30 str.

In this paper the uniform analytical method [11] has been used for solving a problem of vibrations of the plate with a viscoelastic interlayer. External layers are modelled as Kirchhoff-Love's plates, while the internal layer possesses the characteristics of a viscoelastic, one-directional Winkler foundation. In the case small transverse vibrations of the complex system with damping is excited by the dynamical steady force  $f_1(x, y, t) = P_1 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \sin(\omega_0 t)$  at the point  $x_0, y_0$  and varying in time  $t$ . Numerical results are presented in the diagrams.

Keywords: vibrations, complex plate, numerical results

### 1. INTRODUCTION

Compound systems coupled together by viscoelastic constraints play an important role in various engineering and building structures. Since 1923, Timoshenko's model [1] for various compound constructions has been applied. Vibration analysis of laminated plates was presented in [2, 3] and in many other works.

The problem of nonaxisymmetrical deformation of flexible rotational shells was solved in [4] with the used of the classical Kirchhoff-Love model and improved Timoshenko's model. The dynamic problem of elastic homogeneous bodies was presented in [5]. Vibration analysis of systems of solid and deformable bodies for complex motion was considered in [6].

Vibrations of elastically connected rectangular double-plate compound systems under moving loading are presented in [7]. Vibration analysis of compound systems with vibration damping is a difficult problem. In the above complex cases, especially where viscosity and discrete elements occur, it is recommended to adopt the method of solving a dynamic problem for a system in the domain changing of a complex function [8,9]. The property of orthogonality of free vibrations of complex types was first described in [8] for discrete systems with damping, for discrete-continuous systems with damping in [9] and for continuous systems with damping in [10].

The goal of this paper is to present a method for solving the problem and dynamic analysis of free and forced vibrations for a complex system with damping, which consists of two elastic plates coupled by a viscoelastic interlayer, for various types of dynamic loading.

## 2. FORMULATION PROBLEM

Now consider the free and forced vibrations problems for the complex system with a viscoelastic inertial interlayer. The external layer of the complex system is made as the plate from elastic material which is coupled by a viscoelastic inertial interlayer (Fig. 1). The elastic plate is described by the Kirchhoff-Love's model and simply supported at their ends. The viscoelastic inertial interlayer possesses the characteristics of a homogeneous continuous one-directional Winkler's foundation and has been described by the Voigt-Kelvin's model.

In the practical the complex system with a viscoelastic inertial interlayer is treated as the platform but the dynamical non-steady loading as the mass of coal.

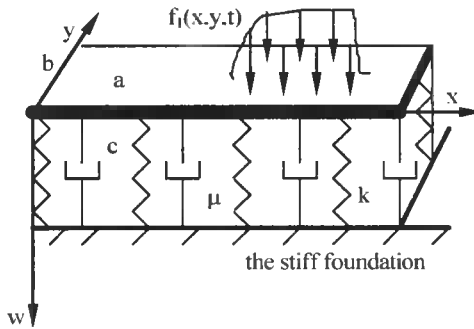


Fig. 1. Vibration of the complex system from elastic plate coupled by a viscoelastic inertial interlayer

In the case small transverse vibrations of the complex system with damping is excited by the dynamical steady force  $f_1(x, y, t) = P_1 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \sin(\omega_0 t)$  at the point  $x_0, y_0$  and varying in time  $t$ .

Here  $\delta(\dots)$  is the Dirac's delta function;  $H(\dots)$  is the Heaviside's function;  $x^* = v^* t$ ,  $v^*$  is the constant speed;  $y = 0.5 b$ ;  $w(x, y, t)$  is the first iteration of the dynamic displacement of the complex plate with damping from the force  $P_1$ ;  $f_1(x_1, y_1, t)$  is the displacement of the complex plate under mass of coal;  $\nu_n$  is the complex eigenfrequencies of forced vibrations;  $x_0, y_0$  are the co-ordinate coal for time  $t = 0$ ;  $b(t)$  is the displacement of coal in the direction of axis  $z$ .

## 3. NUMERICAL RESULTS

In the case small transverse vibrations of the complex plate with damping is excited by the dynamical steady loading  $f_1(x, y, t) = P_1 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \sin(\omega_0 t)$  at the point  $x_0, y_0$  and varying in time  $t$ . Calculations are carried out for the following data:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 10^{10} Pa, \quad E = \{10^8, 10^7, 10^6\} Pa, \quad \rho_1 = 2 * 10^3 Ns^2 m^{-4}, \quad h_1 = 0.2m, \\
 h &= \{0.4, 0.6, 0.8, 1\} m, \quad \nu_o = 0.2, \quad a = 1m, \quad b = 10m, \quad c = \{0, 0.0001\} s, \\
 P_1 &= 2 * 10^3 N, \quad x_o = 0.5a, \quad y_o = 0.5b, \quad v^* = 100ms^{-2}.
 \end{aligned}$$

In order to solve the boundary value problem the following boundary conditions are used:

$$\begin{aligned}
 W_1|_{x=0} = 0, \quad W_1|_{x=a} = 0, \quad W_1|_{y=0} = 0, \quad W_1|_{y=b} = 0, \\
 \frac{d^2 W_1}{dx^2}|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 W_1}{dx^2}|_{x=a} = 0, \quad \frac{d^2 W_1}{dy^2}|_{y=0} = 0, \quad \frac{d^2 W_1}{dy^2}|_{y=b} = 0
 \end{aligned} \quad (1)$$

In order to find the Fourier's  $\Phi_n$  coefficients the following initial conditions have been assumed:

$$\begin{aligned}
 w_{o1} &= A_{s1} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad \dot{w}_{o1} = 0, \quad A_{s1} = 0.0002 \text{ cm}, \\
 w_{o2} &= A_{s2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad \dot{w}_{o2} = 0, \quad A_{s2} = 0.00015 \text{ cm}.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Some results of this problems given in Figures 2-3 present values of moduli of determinant  $|\Delta|$  and values of complex eigenfrequencies  $\nu_{n_1 n_2} = i\eta_{n_1 n_2} \pm \omega_{n_1 n_2}$  of free vibrations for  $n_1 = 1, n_2 = 1$  and damping coefficient  $c = 0.0001 s$ . The complex eigenfrequencies for the various Young's moduli  $E = \{10^6, 10^7, 10^8\} Pa$  and for a small thickness of the inertial interlayer  $h = 0.4 m$  are shown in Figure 2. The complex eigenfrequencies for various thicknesses of the inertial interlayer  $h = \{0.6, 0.8, 1\} m$  and for the Young's module  $E = 10^7 Pa$  are shown in Figure 3.

The diagram of the natural frequencies  $\omega_{n_1 n_2}$  of free vibrations for  $n_1 = 1, n_2 = 1$  and damping coefficient  $c = 0 s$  and for parameters:  $E = 10^7 Pa, h = 0.6 m$  is shown in Figure 4.

The effect of various thicknesses  $h = \{0.4, 0.6\}m$  of the viscoelastic inertial interlayer for the complex plate on the free vibrations is shown in Figures 5-6.

The diagrams in Figures 5-6 show dynamic displacements of the complex plate with a viscoelastic inertial interlayer for  $x = 0.5 a, y = 0.5 b$  in two cases: in the first case – Figure 5 where a large thickness of the interlayer  $h = 0.6 m$  occurs, in the second case – Figure 6 where a small thickness of the interlayer  $h = 0.4 m$  occurs. Calculations of dynamic displacements  $w_1, w$  for the two cases are compared.

In the first case dynamic displacements for the large thickness of the interlayer are fading slowly with time  $t$  than dynamic displacements for which account of a small thickness of the interlayer (in the second case).

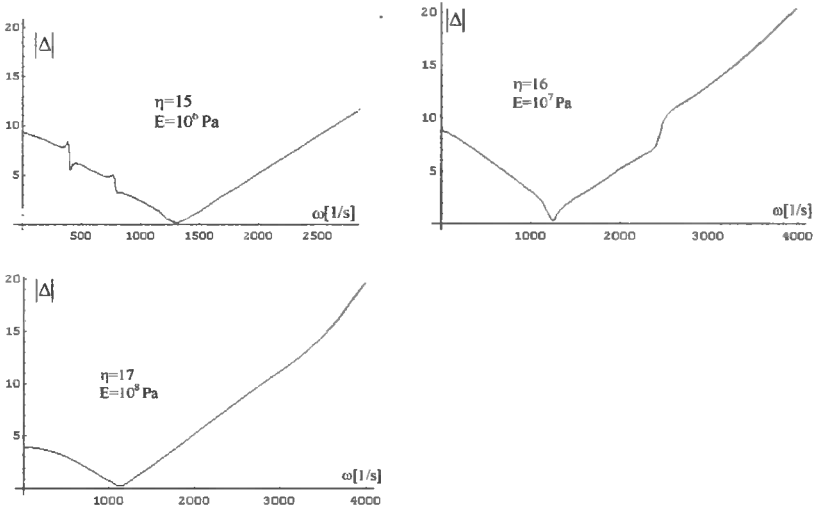


Fig.2. Values of module of determinant  $|\Delta|$  and values of complex eigenfrequencies  $\nu_{n_1 n_2} = i\eta_{n_1 n_2} \pm \omega_{n_1 n_2}$  of free vibrations for  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1$  and  $x = 0.7a$ ,  $y = 0.8b$ ,  $z = 0$ ,  $E = \{10^6, 10^7, 10^8\}$  Pa,  $h = 0.4m$ ,  $c = 0.0001s$

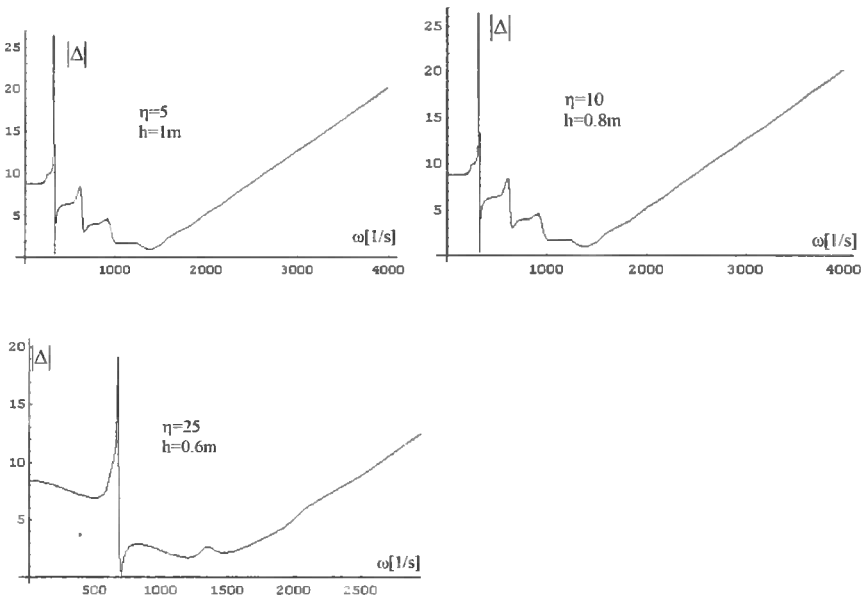


Fig.3. Values of module of determinant  $|\Delta|$  and values of complex eigenfrequencies  $\nu_{n_1 n_2} = i\eta_{n_1 n_2} \pm \omega_{n_1 n_2}$  of free vibrations for  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1$  and  $x = 0.7a$ ,  $y = 0.8b$ ,  $z = 0$ ,  $h = \{0.6, 0.8, 1\}$  m,  $E = 10^7$  Pa,  $c = 0.0001s$

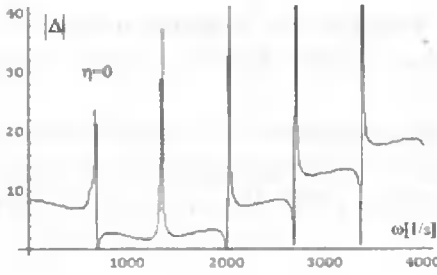


Fig. 4. Values of module of determinant  $|\Delta|$  and values of natural frequencies  $\omega_{n_1, n_2}$  of free vibrations for  $n_1 = 1, n_2 = 1$  and  $x = 0.7 a, y = 0.8 b, z = 0, E = 10^7 Pa, h = 0.6 m, c = 0 s$

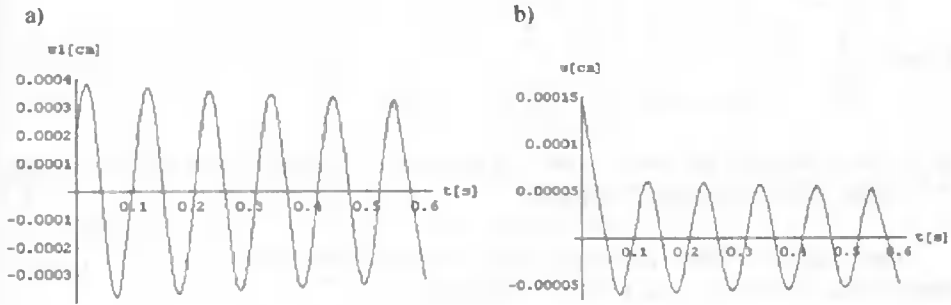


Fig. 5. Free vibrations of the complex plate with damping for thickness  $h = 0.6 m$ : a) the elastic plate, b) the viscoelastic inertial interlayer

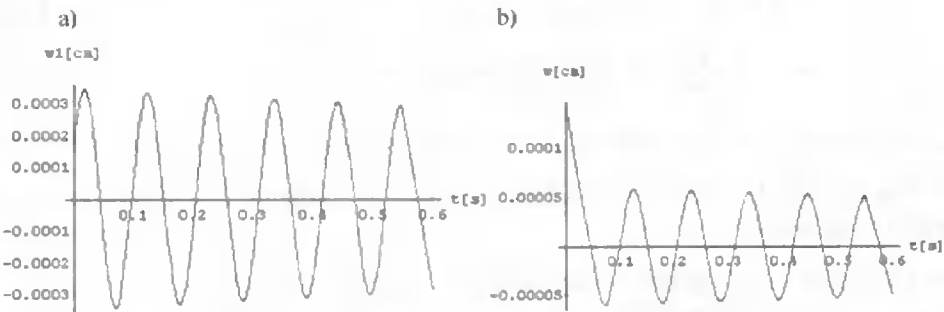


Fig. 6. Free vibrations of the complex plate with damping for thickness  $h = 0.4 m$ : a) the elastic plate, b) the viscoelastic inertial interlayer

Amplitudes of free vibrations for an elastic plate and a viscoelastic inertial interlayer for thickness  $h = 0.6 m$  achieve a value approximately 7% larger than amplitudes of free vibrations for an elastic plate and a viscoelastic inertial interlayer for thickness  $h = 0.4 m$ .

The effect of various damping coefficients  $c = \{0, 0.0001\} s$  of the inertial interlayer for the complex plate on the free vibrations is shown in Figures 5-7 for a large

thickness of the interlayer  $h = 0.6 \text{ m}$ . The diagrams in Figure 7 show dynamic displacements of the complex plate with an elastic inertial interlayer for  $x = 0.5 a$ ,  $y = 0.5 b$ .

Calculations of dynamic displacements  $w_1$ ,  $w$  for the two cases where damping coefficient  $c = 0.0001 \text{ s}$  occurs – Figure 5 are compared with dynamic displacements for  $w_1$ ,  $w$  where damping coefficient  $c = 0 \text{ s}$  does not occur – Figure 6-7.

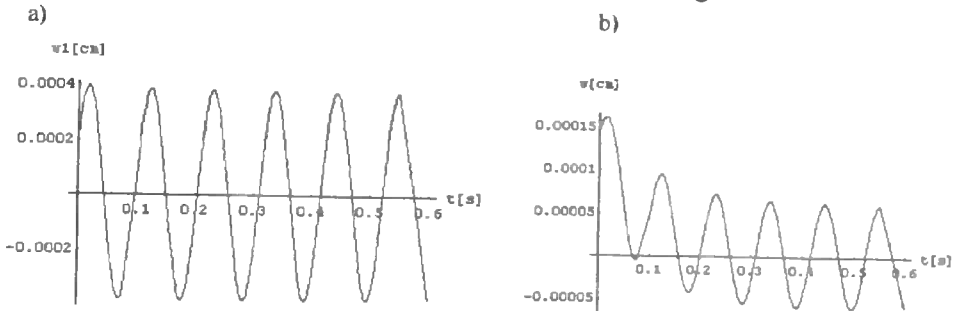


Fig. 7. Free vibration of the complex plate with damping for thickness  $h = 0.6 \text{ m}$ : a) the elastic plate. b) the elastic inertial interlayer

The functions of free vibrations of the complex plate with a viscoelastic inertial interlayer can be written in the form of dual interference:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\eta_{n_1 n_2} t} \left| \Phi_{n_1 n_2} \right| \left[ \text{Re } W_{1n_1 n_2} \cos(\omega_{n_1 n_2} t + \varphi_{n_1 n_2}) + \right. \\
 &\quad \left. + \text{Im } W_{1n_1 n_2} \sin(\omega_{n_1 n_2} t + \varphi_{n_1 n_2}) \right] \\
 w &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\eta_{n_1 n_2} t} \left| \Phi_{n_1 n_2} \right| \left[ \text{Re } W_{n_1 n_2} \cos(\omega_{n_1 n_2} t + \varphi_{n_1 n_2}) + \right. \\
 &\quad \left. + \text{Im } W_{n_1 n_2} \sin(\omega_{n_1 n_2} t + \varphi_{n_1 n_2}) \right]
 \end{aligned} \quad (3)$$

For the complex plate where no damping occur the equality (3) can be rewritten in the following form:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\eta_{n_1 n_2} t} \left| \Phi_{n_1 n_2} \right| W_{1n_1 n_2} \cos(\omega_{n_1 n_2} t + \varphi_{n_1 n_2}), \\
 w &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{-\eta_{n_1 n_2} t} \left| \Phi_{n_1 n_2} \right| W_{n_1 n_2} \cos(\omega_{n_1 n_2} t + \varphi_{n_1 n_2}).
 \end{aligned} \quad (4)$$

Amplitudes of free vibrations for an elastic plate and a viscoelastic inertial interlayer achieve a value approximately 12% smaller than amplitudes of free vibrations for an elastic plate and an elastic inertial interlayer.

In the case small transverse vibrations of the complex plate is excited by the steady dynamical loading  $f_1(x, y, t) = P_1 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \sin \omega_0 t$  acting at the point  $x_0 = 0.5 a$ ,  $y = 0.5 b$  and varying in time  $t$ . Figures 8-9 present the amplitude-



frequency diagrams for the complex plate. The influence of various damping coefficients on the amplitude-frequencies diagrams is illustrated in Figures 8 for  $c = 0$  s and 9 for  $c = 0.0001$  s.

After analysing the results presented in Figure 9 where damping occur in the interlayer we state that the inertial interlayer can be the vibration damper for the elastic plate which is excited by the dynamical steady loading  $f_1(x, y, t)$  at the point  $x_0 = 0.5 a$ ,  $y_0 = 0.5 b$  and varying in time  $t$ .

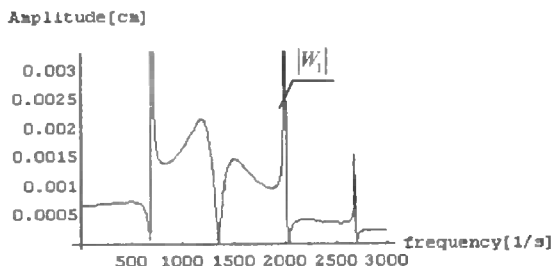


Fig. 8. The amplitude-frequency diagram of the complex plate with an elastic inertial interlayer at the point  $x = 0.7 a$ ,  $y = 0.8 b$ ,  $z = 0$  for  $E = 10^7 Pa$ ,  $h = 0.6 m$ ,  $c = 0$  s

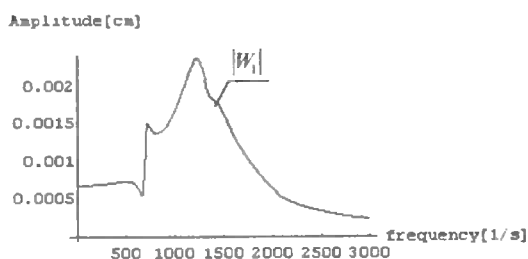


Fig. 9. The amplitude-frequency diagram of the complex plate with a viscoelastic inertial interlayer at the point  $x = 0.7 a$ ,  $y = 0.8 b$ ,  $z = 0$  for  $E = 10^7 Pa$ ,  $h = 0.6 m$ ,  $c = 0.0001$  s

In the case when the damping coefficient is equal to zero presented in Figure 8 the resonance occur in the complex plate for  $\omega_n = \{800, 1400, 1500, 2000\} s^{-1}$  because frequency of free vibrations (Fig. 4) is coinciding with frequency  $\omega_0$  of forced vibrations.

## REFERENCES

- [1] Timoshenko S.P., Wojnowsky-Krygier S., 1959. Theory of Plates and Shell. Arkady, New York, Toronto, London.
- [2] Taranto R.A., McGraw J.R., 1969. Vibratory bending of damped laminated plates. Trans. ASME, J. Eng. Industry 91, 1081-1090.
- [3] Kurnik W., Tylikowski A., 1997. Mechanics of Laminated Elements. Publ. Warsaw Univ. of Tech. Warsaw.
- [4] Pankratova N.D., Nikolaev B., Świtoński E., 1996. Nonaxisymmetrical deformation of flexible rotation shells in classical and improved statements. J. Eng. Mech. 3(2), 89-96.
- [5] Grinchenko V.T., 1978. Equilibrium and Steady-State Vibration of Elastic Bodies of Finite Dimensions [in Russian], Naukova Dumka, Kiev.
- [6] Gulyaev V.I., Lizunov P.P., 1989. Vibration of Systems of Solid and Deformable Bodies under Complex Motion [in Russian], Vyshcha Shkola, Kiev.
- [7] Szcześniak W., 1998. Vibration of elastic sandwich and elastically connected double-plate systems under moving loads. [In:] Building Engineering, Publ. Warsaw Univ. of Tech., No. 132, 153-172.
- [8] Tse F., Morse I., Hinkle R., 1978. Mechanical Vibrations: Theory and Applications. Allyn & Bacon, Boston.
- [9] Nizioł J., Snamina J., 1990. Free vibration of the discrete-continuous system with damping. J. Theor. Appl. Mech. 28(1-2), 149-160.
- [10] Cabańska-Placzkiewicz K., 2000. Problems of vibration control in ecologically-dangerous engineering systems. [In:] The Role of Universities in the Future Information Society (RUFIS 2000), Kiev, 26-27.
- [11] Cabańska-Placzkiewicz K., 1999. Free vibration of the system of two Timoshenko beams coupled by a viscoelastic interlayer. Engineering Transactions 47 (1), 21-37.

## DRGANIA PŁYTY Z LEPKOSPŘĘŻYSTĄ PRZEKŁADKĄ

## Streszczenie

W pracy zastosowano analityczną jednolitą metodę [11] do rozwiązywania zagadnienia drgań płyty z lepkospřężystą przekładką. Zewnętrzne warstwy zamodelowano płytą Kirchhoffa-Love'a, której wewnętrzna warstwa posiada charakter lepkospřężystego, jedno-kierunkowego podłoża Winklera. Małe drgania poprzecznego złożonego układu z tłumieniem są pobudzone dynamiczną ustaloną siłą  $f_1(x, y, t) = P_1 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \sin(\omega_0 t)$  w punkcie  $x_0, y_0$  i zmieniająca się w czasie  $t$ . Wyniki numeryczne przedstawiono na rysunkach.

Słowa kluczowe: drgania, złożona płyta, wyniki numeryczne

## ZASTOSOWANIE GRANICZNYCH MODELI PRZESTRZENI PORÓW DO INTERPRETACJI DANYCH POROZYMETRII RTĘCIOWEJ

Mieczysław Cieszek, Marcin Kempieński

Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej  
Wydział Matematyki, Techniki i Nauk Przyrodniczych  
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego  
ul. Chodkiewicza 30. 85-064 Bydgoszcz

W pracy zaproponowano wykorzystanie kapilarnego i łańcuchowego modelu architektury porów do wyznaczania granicznych rozkładów wymiarów porów materiałów porowatych w oparciu o krzywe potencjału kapilarnego otrzymane metodą wciskania rtęci. Określają one zakres występowania rozkładu wymiarów porów badanego materiału. Wykazano, że model kapilarny, standardowo wykorzystywany w porozymetrii rtęciowej, oraz model łańcuchowy są dwoma granicznymi przypadkami modelu sieciowego architektury porów dla danego rozkładu ich wymiarów. Analizę przeprowadzono w oparciu o wzory dla potencjału kapilarnego warstwy ośrodka o kapilarnej i łańcuchowej architekturze porów, dla dwustronnego wciskania rtęci.

Słowa kluczowe: porozymetria rtęciowa, rozkład wymiarów porów, potencjał kapilarny

### 1. WSTĘP

Rozkład wymiarów porów jest podstawową charakterystyką mikroskopowej struktury przestrzeni porów materiałów porowatych. Umożliwia określenie szeregu makroskopowych parametrów struktury porów (np. porowatości objętościowej, przepuszczalności, powierzchni wewnętrznej) współdecydujących o przebiegu procesów filtracji, transportu masy i energii, reakcji chemicznych, a także o własnościach akustycznych materiałów porowatych [1-3].

Najbardziej rozpowszechniona metoda wyznaczania rozkładu wymiarów porów polega na interpretacji krzywych potencjału kapilarnego, otrzymywanych z pomiaru objętości rtęci wcisniętej w próbkę [4], lub z pomiaru objętości cieczy zwilżającej (woda, alkohol etylowy) usuniętej z próbki (np. przez wyciskanie gazem [2]) pod wpływem progresywnie wzrastającego ciśnienia. Podstawę tej interpretacji stanowi założenie, że ze wzrostem ciśnienia rtęć jest wciskana przeciwko siłom kapilarnym w coraz to mniejsze pory. Jest to równoważne założeniu, że struktura porów rzeczywistego materiału porowatego może być modelowana wiązką równoległych kapilar o statystycznym rozkładzie ich promieni. Umożliwia to bezpośrednie zastosowanie wzoru Washburna wią-

żącego ciśnienie w cieczy z promieniem cylindrycznej kapilary, w której menisk cieczy jest w stanie równowagi. W rezultacie otrzymuje się kumulacyjne krzywe objęściowego rozkładu promieni porów w tak modelowanym materiale porowatym. Podobnie interpretuje się dane uzyskane przy wyciskaniu cieczy. Oczywistym niedostatkim takiego modelu jest nieuwzględnienie sytuacji występujących w rzeczywistych materiałach, w których duże pory połączone są z pozostałymi porami poprzez wąskie przejścia. Uniemożliwia to zapelnienie (opróżnienie) tych porów rtecą (z cieczy) przy ciśnieniu odpowiadającym ich promieniowi. Dlatego wyznaczone w ten sposób krzywe rozkładu wymiarów porów znacznie zaniżają objętość zajmowaną przez duże pory przenosząc ją na objętość zajmowaną przez pory małe. W konsekwencji wielkości określone na podstawie tak otrzymanego rozkładu obciążone są dużym błędem. Krytyka bezpośredniego wykorzystania wzoru Washburna do interpretacji krzywych potencjału kapilarnego w porozymetrii rteciowej znalazła odzwierciedlenie także w pracach innych autorów (np. [8]).

Celem pracy jest pokazanie możliwości wykorzystania kapilarnego i łańcuchowego modelu architektury porów do wyznaczania granicznych rozkładów wymiarów porów materiałów porowatych w oparciu o krzywe potencjału kapilarnego otrzymane metodą wciskania rteci. Wykazano, że oba modele są granicznymi przypadkami modelu sieciowego architektury porów dla danego rozkładu ich wymiarów, a rozkłady wyznaczone w oparciu o te modele określają zakres występowania rozkładu wymiarów porów badanego materiału.

W pracy wyprowadzono wzory dla potencjału kapilarnego warstwy ośrodka o kapilarnej i łańcuchowej strukturze porów, dla dwustronnego wciskania rteci, w których rozkład wymiarów porów jest parametrem funkcyjnym. Właściwy dobór tej funkcji (np. metodą optymalizacji) umożliwia uzyskanie jakościowej i ilościowej zgodności teoretycznych i eksperymentalnych krzywych potencjału kapilarnego.

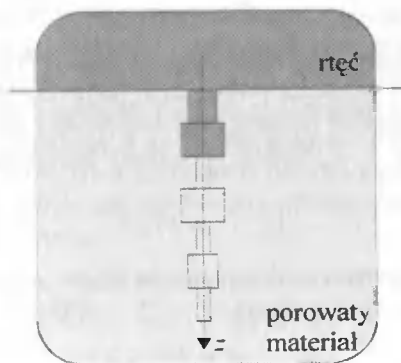
## 2. MODELOWANIE WCISKANIA RTECI W MATERIAŁ POROWATY

W pracy rozważać będziemy modele ośrodków porowatych, w których poszczególne pory są cylindrycznymi kapilarami (ogniwami) o jednakowej długości i statystycznym rozkładzie promieni  $r$  opisywanym funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $\psi(r)$ . O strukturze przestrzeni porów takiego ośrodka decydują dwa niezależne czynniki: rozkład wymiarów ogniw  $\psi(r)$  oraz sposób połączenia ogniw między sobą. Ten drugi czynnik będziemy nazywali architekturą przestrzeni porów. Architektura porów powoduje, że dla takiego samego rozkładu promieni ogniw w modelu materiału jego struktura przestrzeni porów może być różna.

Ze względu na architekturę w pracy będziemy wyróżniać trzy rodzaje modeli przestrzeni porów: kapilarny, łańcuchowy oraz sieciowy. W modelu kapilarnym ogniwa o jednakowym promieniu połączone są szeregowo, tworząc długie, przenikające cały materiał kapilary o stałej średnicy. W modelu łańcuchowym ogniwa połączone są szeregowo w sposób losowy tworząc kapilary o skokowo zmiennej średnicy. W modelu sieciowym natomiast połączone losowo ogniwa tworzą przestrzenną sieć.

Aby opisać proces statycznego wciskania rteci w materiał porowaty rozważymy układ, w którym ośrodek taki o pustych w chwili początkowej porach zajmuje półprze-

strzeń  $z > 0$ , natomiast rtęć będąca z nim w bezpośrednim kontakcie zajmuje półprze-  
strzeń  $z < 0$  (rys. 1). Dla przestrzeni porów szkieletu przyjmujemy łańcuchowy model  
ich architektury. Ogranicza to stopień złożoności matematycznego opisu procesu wci-  
skania rtęci, nie eliminując możliwości oceny wpływu architektury porów na krzywe  
potencjału kapilarnego ośrodka.



Rys. 1. Schemat układu porowaty materiał – rtęć

Biorąc pod uwagę, że rtęć nie zwilża powierzchni większości materiałów, pod  
wpływem ciśnienia  $p$  rtęć wejdzie w kapilary półprzestrzeni ośrodka porowatego, a jej  
meniski zatrzymają się na tych ogniwach, w których ciśnienie w rtęci zostanie zrówno-  
ważone ciśnieniem kapilarnym, tzn. na ogniwach o promieniu  $r$  mniejszym od promienia  
 $r^*$  określonego wzorem:

$$r^* = 2\sigma \cos(\theta) / p, \quad (1)$$

gdzie  $\sigma$  jest współczynnikiem napięcia powierzchniowego rtęci, a  $\theta$  jest kątem zwilżania  
materiału szkieletu przez rtęć.

Ogniwa, których promień spełnia warunek (1) nazywać będziemy za pracą [5]  
ogniwami krytycznymi. Dzielią one wszystkie pozostałe ogniwa na dwie klasy: ogniwa  
nadkrytyczne – o promieniu większym od krytycznego, w które rtęć może wnikać przy  
danym ciśnieniu, oraz ogniwa podkrytyczne – o promieniu mniejszym od krytycznego,  
których wypełnienie przez rtęć o danym ciśnieniu jest niemożliwe.

Używając zaproponowanej nomenklatury, możemy powiedzieć, że w procesie wci-  
skania, rtęć wypełnia tylko nadkrytyczne ogniwa początkowe kapilar, aż do miejsca,  
w którym po raz pierwszy wystąpi ogniwo podkrytyczne. Ze względu na statystyczny  
charakter rozkładu promieni ogniw i stałą wartość jego długości, głębokość położenia  
menisków w kapilarach będzie przyjmowała dyskretne wartości statystyczne równe  
wielokrotności długości ogniw. Jedynie w kapilarach, w których pierwsze ogniwo jest  
podkrytyczne, meniski wystąpią na powierzchni półprzestrzeni ośrodka porowatego.

Oznaczmy przez  $F(z)$  prawdopodobieństwo wystąpienia rtęci w dowolnej kapilarze na  
głębokości  $z$  od powierzchni półprzestrzeni. Funkcja ta dla  $z = 0$  przyjmuje wartość  
jeden:

$$F(0) = 1, \quad (2)$$

natomiast dla  $0 < z \leq a$  funkcja ta jest równa prawdopodobieństwu

$$\eta = \int_{r^*}^{\infty} \psi(r) dr \quad (3)$$

wystąpienia ogniwa nadkrytycznego wśród pierwszych ogniów kapilar. Mamy:

$$F(z) = \eta. \quad (4)$$

Aby wyznaczyć równanie określające postać funkcji  $F(z)$  wewnątrz półprzestrzeni  $z > a$  przyjmujemy, że w jednostce powierzchni półprzestrzeni występuje (średnio)  $m$  kapilar, a przez  $m_z$  oznaczymy liczbę kapilar w jednostce powierzchni, w których rtęć występuje na głębokości  $z$ . Z częstotliwościowej interpretacji prawdopodobieństwa otrzymujemy:

$$m_z = m F(z). \quad (5)$$

Ze wzoru (5) bezpośrednio otrzymujemy, że liczba  $m_{z-a}$  kapilar wypełnionych rtęcią na głębokości  $z-a$  dana jest wzorem

$$m_{z-a} = m F(z-a). \quad (6)$$

Jednakże, jeżeli wziąć pod uwagę jedynie te kapilary jednostkowej powierzchni w których na głębokości  $z-a$  występuje rtęć, to wśród tych kapilar część będzie wypełniona rtęcią również na głębokości  $z$ . Prawdopodobieństwo wystąpienia kapilar wypełnionych rtęcią na głębokości  $z$  wśród kapilar wypełnionych na głębokości  $z-a$  jest równe prawdopodobieństwu wystąpienia ogniwa nadkrytycznego wśród ogniów łączących poziom  $z-a$  i  $z$ . Mamy:

$$m_z/m_{z-a} = \eta. \quad (7)$$

Po uwzględnieniu wyrażeń (5) i (6) otrzymujemy:

$$F(z) = \eta F(z-a). \quad (8)$$

Jest to poszukiwane równanie funkcyjne dla prawdopodobieństwa  $F(z)$  wystąpienia rtęci na głębokości  $z$  od powierzchni półprzestrzeni. Jest ono określone dla  $z > a$ . Funkcja ta musi spełniać warunki (2) i (4).

Rozwiązaniem równania (8), spełniającym warunki (2) i (4), jest wyrażenie:

$$F(z) = \begin{cases} \eta^{[z/a]+1} & dla \quad z/a \notin N, \\ \eta^{[z/a]} & dla \quad z/a \in N, \end{cases} \quad (9)$$

w którym  $[z/a]$  jest częścią całkowitą liczby  $z/a$ . Może być ono aproksymowane z góry funkcją:

$$F_{(i)}(z) = \eta^{z/a+1}, \quad (10)$$

a z dołu funkcją postaci:

$$F_{(j)}(z) = \eta^{z/a}. \quad (11)$$

### 3. POTENCJAŁ KAPILARNY WARSTWY OŚRODKA POROWATEGO

#### 3.1. Model jednostronnego wciskania rtęci

Wykorzystamy funkcję  $F(z)$  głębokości wnikania rtęci, określającej prawdopodobieństwo wystąpienia rtęci na głębokości  $z$  od powierzchni półprzestrzeni ośrodka porowatego, aby wyznaczyć zależność objętości  $V_L(p)$  rtęci wciśniętej w powierzchniową warstwę ośrodka porowatego o grubości  $L$  i polu powierzchni  $S$ , od ciśnienia  $p$  w rtęci. Zależność taka jest ściśle związana z architekturą porów i rozkładem ich wielkości w ośrodku i jest nazywana potencjałem kapilarnym ośrodka porowatego.

Ogólna postać funkcji potencjału kapilarnego ośrodka porowatego o łańcuchowej strukturze porów dana jest wzorem:

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \frac{\overline{r^2}^N}{\overline{r^2}} \frac{1}{L} \int_0^L F(z) dz, \quad (12)$$

gdzie:

$$\overline{r^2}^N = \frac{1}{\eta} \int_{r^*}^{\infty} r^2 \psi(r) dr, \quad (13)$$

jest średnią wartością kwadratu promieni ogniw nadkrytycznych. Przez  $\overline{r^2}$  oznaczono natomiast średnią wartość kwadratu promieni wszystkich ogniw, a przez  $V_o$  całkowitą objętość porów w wyróżnionym elemencie ośrodka:

$$V_o = \pi m L S \overline{r^2}.$$

Wielkość  $\psi(r)/\eta$  może być interpretowana jako gęstość rozkładu prawdopodobieństwa promieni ogniw w zbiorze ogniw nadkrytycznych. Mamy:

$$\int_{r^*}^{\infty} \psi(r) / \eta dr = 1.$$

Wprowadzając funkcję:

$$\vartheta(r) = r^2 \psi(r) / \overline{r^2}. \quad (14)$$

opisującą gęstość rozkładu prawdopodobieństwa względnej objętości ogniw kapilar w ośrodku:

$$\int_0^{\infty} \vartheta(r) dr = 1,$$

wyrażenie (12) możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \left( \frac{1}{\eta L} \int_0^L F(z) dz \right) \int_{r^*}^{\infty} \vartheta(r) dr. \quad (15)$$

Wyrażenie w nawiasie określone jest przez architekturę porów modelowego ośrodka porowatego oraz sposób prowadzenia procesu wciskania rtęci w próbkę.

### **Model kapilarny**

Z modelem kapilarnym ośrodka porowatego w warstwie będziemy mieli do czynienia, jeśli założymy, że grubość warstwy jest mniejsza od długości ogniwa:

$$0 < z < L < a.$$

Wówczas funkcja głębokości wnikania rtęci (9) przyjmuje stałą wartość:

$$F(z) = \eta,$$

a funkcja potencjału kapilarnego (5) redukuje się do postaci:

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \int_{r^*}^{\infty} \mathfrak{S}(r) dr. \quad (16)$$

### **Model łańcuchowy**

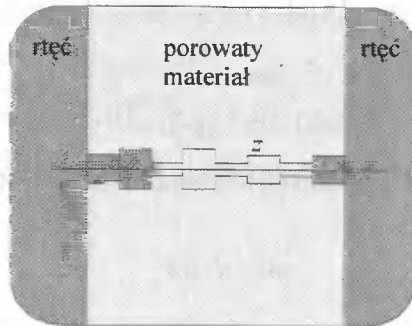
Dla modelu łańcuchowego struktury porów ośrodka porowatego, rozkład rtęci w warstwie przy jednostronnym wciskaniu dany jest wzorem (9), dlatego funkcja potencjału kapilarnego (15) przyjmuje postać:

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \frac{1}{N} \frac{1 - \eta^N}{1 - \eta} \int_{r^*}^{\infty} \mathfrak{S}(r) dr \quad (17)$$

gdzie  $N = L/a$  jest liczbą ogniw w każdej kapilarze warstwy.

## 3.2. Model dwustronnego wciskania rtęci

Wykorzystamy funkcję potencjału kapilarnego (17) dla wciskania rtęci w półprzestrzeń porowatego ośrodka, aby wyznaczyć taką funkcję dla procesu obustronnego wciskania rtęci w warstwę o grubości  $L$  (rys. 2).



Rys. 2. Dwustronne wciskanie rtęci w warstwę ośrodka porowatego



Przebieg wciskania obustronnego rtęci w warstwę może być rozważany równoważnie jako proces realizowany w dwóch etapach, najpierw wciskania np. lewostronnego, a następnie prawostronnego. Przy wciskaniu lewostronnym rtęcią zostaną wypełnione całkowicie wszystkie kapilary nadkrytyczne (o ogniwach nadkrytycznych), a przebieg wciskania prawostronnego rtęci w kapilary podkrytyczne (zawierające również ogniwa podkrytyczne) będzie niezależny od przebiegu wciskania lewostronnego. Wyznamy rozkład rtęci w warstwie, tj. prawdopodobieństwo  $G(z)$  wystąpienia rtęci na głębokości  $z$  od jej powierzchni.

Ponieważ wielkość (patrz wzór (9))

$$F(L) = \eta^N \quad (18)$$

określa prawdopodobieństwo wystąpienia rtęci w dowolnie wybranej kapilarze na głębokości  $L$  od powierzchni warstwy, przy lewostronnym wciskaniu rtęci (kapilara jest całkowicie wypełniona rtęcią), liczba  $m_N$  kapilar całkowicie wypełnionych rtęcią (nadkrytycznych) w jednostce powierzchni warstwy dana będzie wzorem:

$$m_N = m F(L) = m \eta^N. \quad (19)$$

Oznacza to że liczba  $m_p$  kapilar podkrytycznych (częściowo wypełnionych rtęcią) będzie różnicą liczb  $m$  i  $m_N$ . Mamy:

$$m_p = m (1 - \eta^N). \quad (20)$$

Wykorzystując z kolei fakt, że funkcja  $F(z)$ , dana wzorem (9), określa prawdopodobieństwo występowania rtęci na głębokości  $z$  dowolnie wybranej kapilary przy lewostronnym wciskaniu rtęci, liczba  $m_L^-$  kapilar w jednostce powierzchni warstwy, w których taka sytuacja występuje określona jest wzorem:

$$m_L^- = m F(z), \quad (21)$$

natomiast liczba  $m_{pl}^-$  kapilar podkrytycznych wypełnionych lewostronnie rtęcią na głębokości  $z$  będzie różnicą  $m_L^-$  oraz liczby  $m_N$  kapilar nadkrytycznych (całkowicie wypełnionych):

$$m_{pl}^- = m (F(z) - F(L)). \quad (22)$$

Ponieważ zagadnienie wciskania rtęci w kapilary podkrytyczne jest symetryczne, otrzymamy podobne do (22) wyrażenie określające liczbę  $m_{pp}^s$  kapilar podkrytycznych wypełnionych na głębokość  $s$  od prawostronnego brzegu warstwy.

Mamy zatem:

$$m_{pp}^s = m (F(s) - F(L)). \quad (23)$$

Ze względu na zależność  $z+s = L$  otrzymujemy

$$m_{pp}^s = m (F(L-z) - F(L)). \quad (24)$$

Dlatego liczba  $m_p^z$  wszystkich kapilar podkrytycznych zapełnionych na głębokości  $z$  przy obustronnym wciskaniu rtęci w warstwę, będzie sumą kapilar podkrytycznych zapełnionych lewostronnie i prawostronnie do głębokości  $z$ :

$$m_p^z = m_{lp}^z + m_{rl}^z. \quad (25)$$

Po uwzględnieniu (22) i (24) otrzymamy:

$$m_p^z = m(F(z) + F(L-z) - 2F(L)). \quad (26)$$

Liczba  $m^z$  wszystkich kapilar zapełnionych rtęcią na głębokość  $z$  przy obustronnym wciskaniu rtęci będzie natomiast sumą liczby  $m_N$  kapilar nadkrytycznych i liczby  $m_p^z$  kapilar podkrytycznych zapełnionych na głębokość  $z$ .

Biorąc pod uwagę, że prawdopodobieństwo  $G(z)$  występowania rtęci w kapilarze warstwy na głębokości  $z$  przy obustronnym wciskaniu dane jest wzorem:

$$G(z) = m^z / m, \quad (27)$$

z (19) i (26) mamy:

$$G(z) = F(z) + F(L-z) - F(L). \quad (28)$$

Dla aproksymacji z dołu wzorem (11) otrzymujemy

$$G(Z) = \eta(\eta^{NZ} + \eta^{N(1-Z)} - \eta^N) \quad (29)$$

gdzie:  $Z = z/L$ .

Funkcja potencjału kapilarnego warstwy przy dwustronnym wciskaniu rtęci dana będzie wzorem analogicznym do wyrażenia (15):

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \left( \frac{1}{\eta L} \int_0^L G(z) dz \right) \int_{r^*}^{\infty} \mathfrak{G}(r) dr, \quad (30)$$

które po uwzględnieniu (28) redukuje się do postaci:

$$\frac{V_L(p)}{V_o} = \left( \frac{2}{N} \frac{1 - \eta^N}{1 - \eta} - \eta^{N-1} \right) \int_{r^*}^{\infty} \mathfrak{G}(r) dr. \quad (31)$$

#### 4. WPŁYW STRUKTURY PORÓW NA POTENCJAŁ KAPILARNY OŚRODKA

W poprzednim podpunkcie otrzymaliśmy dwa różne wyrażenia dla funkcji potencjału kapilarnego warstwy ośrodka porowatego. Funkcja ta dla modelu kapilarnego struktury porów w warstwie ośrodka porowatego dana jest wzorem (16), natomiast dla modelu łańcuchowego przy jednostronnym i dwustronnym wciskaniu rtęci dana jest wzorami (17) i (31). Z ich postaci wynika, że względna objętość porów w wyróżnionej części ośrodka, zapełnionych rtęcią przy danym ciśnieniu określona jest przez iloczyn dwóch wielkości: udział objętościowy ogniw nadkrytycznych w ośrodku dany całką

$$\int_{r^*}^{\infty} \vartheta(r) dr,$$

oraz współczynnik charakteryzujący stopień zapelnienia ogniw nadkrytycznych ręcą, którego wartość określona jest wyrażeniem występującym przed tą całką. Współczynnik ten zależy od przyjętego modelu architektury porów ośrodka, od sposobu realizacji procesu wciskania ręki, a także od względnej grubości warstwy ośrodka  $N = L/a$ . Postać tego współczynnika określa różnicę pomiędzy uzyskanymi w pracy postaciami funkcji potencjału kapilarnego. Wynika z nich, że jedynie w przypadku modelu kapilarnego wszystkie ogniwa nadkrytyczne zapelniane są ręcą przy danym ciśnieniu. Jest to ewidentny niedostatek tego modelu.

Na rysunku 3 przedstawiono przebiegi krzywych potencjału kapilarnego dla warstwy ośrodka porowatego o kapilarnej i łańcuchowej architekturze porów szkieletu przy dwustronnym wciskaniu ręki. Założono przy tym, że rozkłady rozmiarów porów w obu przypadkach opisane są trójparametrową funkcją wymierną postaci:

$$\psi(r) = \frac{m+n}{\pi r_o} \sin\left(\frac{n-1}{m+n} \pi\right) \frac{(r/r_o)^m}{1+(r/r_o)^{m+n}} \quad (32)$$

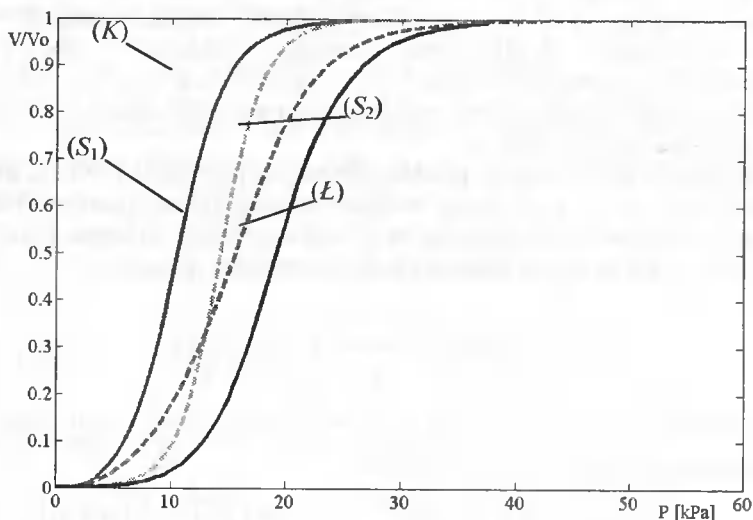
której parametry  $r_o$ ,  $m$  i  $n$  są związane z wartością średnią promienia ogniwa  $\bar{r}$  i średnią wartością jego kwadratu  $\overline{r^2}$  zależnościami:

$$\bar{r} = r_o \frac{\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{(m+n)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(n-2)}{(m+n)}\right)}, \quad \overline{r^2} = r_o^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{(m+n)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(n-3)}{(m+n)}\right)}. \quad (33)$$

Taka postać funkcji (32) zapewnia, że zarówno w zakresie dużych, jak i małych wartości promieni porów ich rozkłady są funkcjami potęgowymi. Wykresy na rysunku 3 sporządzono dla takich samych wartości parametrów funkcji rozkładu:  $r_o = 0,05 \mu\text{m}$ ,  $m = 3$ ,  $n = 6$ , przy  $N = 30$ ,  $\sigma = 0,485 \text{ N/m}$ ,  $\theta = 130$ . Oznacza to, że w obu przypadkach objęściowy rozkład porów w ośrodku jest identyczny. Różnią się one jedynie architekturą przestrzeni porów, tj. sposobem połączenia ogniw. Różnica w przebiegu krzywych potencjału kapilarnego określa zatem stopień ich zależności od architektury przestrzeni porów.

Z rysunku 3 wynika, że w całym zakresie ciśnień objętość ręki wciśniętej w ośrodek o architekturze łańcuchowej porów jest mniejsza od objętości ręki, jaka przy takim samym ciśnieniu zostałaby wciśnięta w ośrodek o architekturze kapilarnej. Obie krzywe reprezentują przy tym graniczne przebiegi funkcji potencjału kapilarnego, jakie dla danego rozkładu objęściowego promieni ogniw mogą osiągać ośrodki o różnej ich architekturze. W modelu kapilarnym wszystkie ogniwa nadkrytyczne ośrodka są zapelniane ręcą przy danym ciśnieniu. Natomiast w modelu łańcuchowym o statystycznym charakterze połączeń ogniw liczba ogniw nadkrytycznych zapelnianych ręcą jest minimalna, ze względu na brak połączeń pomiędzy łańcuchami ogniw. Wystąpienie takich połączeń w ośrodku zmienia architekturę porów z łańcuchowej na sieciową, powodując jednocześnie wzrost liczby ogniw nadkrytycznych zapelnionych przy danym ciśnieniu. W modelu sieciowym bowiem znacznie wzrasta liczba dróg zapelniania każdego ogniwa. W rezultacie krzywe potencjału kapilarnego ośrodka o sieciowej architekturze porów będą leżały pomiędzy krzywymi potencjału kapilarnego ośrodków o architekturze

kapilarnej i łańcuchowej porów. Oznacza to, że modele kapilarny i łańcuchowy są dwoma granicznymi przypadkami sieciowych modeli architektury przestrzeni porów. Funkcje potencjału kapilarnego dla obu tych granicznych przypadków mogą być zatem traktowane jako estymatory funkcji potencjału kapilarnego modeli sieciowych architektury przestrzeni porów materiałów porowatych.



Rys. 3. Krzywe potencjału kapilarnego warstwy porowatego ośrodka o kapilarnej ( $K$ ), łańcuchowej ( $L$ ) i sieciowej ( $S_1$ ,  $S_2$ ) architekturze porów otrzymane dla takiego samego rozkładu promieni ogniw

Na rysunku 3 liniami przerywanymi przedstawiono przykładowe krzywe potencjału kapilarnego dla dwóch modeli sieciowych struktury przestrzeni porów utworzonych z ogniw o takim samym rozkładzie promieni jak ogniwa tworzące model kapilarny i łańcuchowy. Z odmienności przebiegu tych krzywych wynika, że obok rozkładu promieni ogniw w modelu, o kształcie krzywych potencjału kapilarnego ośrodka decyduje także architektura przestrzeni porów.

## 5. ESTYMACJA ROZKŁADU WYMIARÓW PORÓW

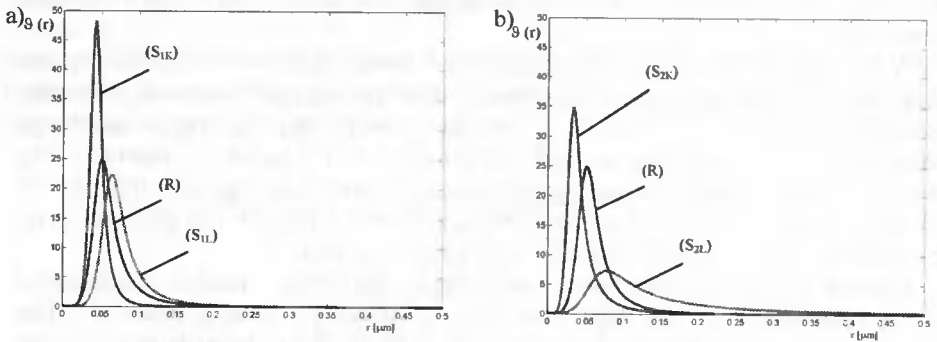
Procedura wyznaczania rozkładów wymiarów porów w materiałach porowatych na podstawie eksperymentalnych krzywych potencjału kapilarnego otrzymywanych metodą porozymetrii rtęciowej wymaga zastosowania modelu struktury przestrzeni porów materiału do interpretacji wyników pomiarów. O jej dokładności decyduje stopień zgodności przyjętego modelu struktury ze strukturą porów badanego materiału porowatego. Ze względu na złożoność struktury porów rzeczywistych materiałów modele takie znajdują się wciąż jeszcze w fazie opracowywania. Uwarunkowania te powodują, że w standardowych porozymetrach rtęciowych rozkłady wymiarów porów wyznaczane są w sposób

przybliżony w oparciu o prosty, kapilarny model struktury przestrzeni porów materiałów porowatych.

W punkcie tym pokażemy, że wykorzystanie modelu kapilarnego i łańcuchowego architektury przestrzeni porów do interpretacji eksperymentalnych krzywych potencjału kapilarnego materiałów porowatych umożliwi wyznaczenie granicznych rozkładów określających zakres występowania rozkładu promieni porów badanego materiału. Aby to wykazać przyjmiemy założenie, że model sieciowy dobrze opisuje przestrzeń porów materiału porowatego oraz wykorzystamy fakt, że model kapilarny i łańcuchowy przestrzeni porów są granicznymi przypadkami modelu sieciowego.

Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w poprzednim punkcie, wyznaczona eksperymentalnie krzywa potencjału kapilarnego materiału porowatego będzie przebiegać pomiędzy krzywymi potencjału kapilarnego dla kapilarnego i łańcuchowego modelu architektury porów wyznaczonymi dla takiego samego rozkładu promieni ogniw jak w materiale (rys. 3). Rozkład ten mógłby być określony na podstawie każdej z tych trzech krzywych potencjału kapilarnego, jeśli byśmy do ich interpretacji zastosowali odpowiadający im model architektury porów. Jednakże, w przypadku badanego materiału porowatego nieznany jest model (sieciowy) jego architektury porów, a w pozostałych dwóch przypadkach sytuacja jest odwrotna: znane są modele, nieznane są natomiast przebiegi krzywych potencjału kapilarnego. Dokładne określenie rozkładu wymiarów porów materiału w tym przypadku jest niemożliwe. Możemy jednak zastosować oba znane modele architektury porów do interpretacji krzywej potencjału kapilarnego materiału. Umożliwia to wyznaczenie krzywych rozkładu ograniczających zakres występowania krzywej rozkładu promieni ogniw w materiale. Wynika to z faktu, że niezależnie od architektury porów modelu, każdemu przesunięciu krzywej potencjału kapilarnego w kierunku większych ciśnień (rys. 3) odpowiada przesunięcie generującej ją krzywej rozkładu wymiarów porów w kierunku mniejszych promieni, i odwrotnie. Oznacza to, że interpretacja krzywej potencjału kapilarnego ośrodka o architekturze sieciowej porów za pomocą modelu kapilarnego umożliwia wyznaczenie granicznego rozkładu porów w zakresie małych ich wymiarów, natomiast taka interpretacja za pomocą modelu łańcuchowego umożliwia wyznaczenie rozkładu granicznego w zakresie dużych porów. Jest to bezpośrednia konsekwencja faktu, że krzywe potencjału kapilarnego dla modeli sieciowych leżą pomiędzy krzywymi potencjału dla modelu kapilarnego i łańcuchowego. Dlatego rzeczywiste krzywe rozkładu porów w materiale będą leżały pomiędzy wyznaczonymi w ten sposób rozkładami granicznymi.

Na rysunku 4 przedstawiono wykresy krzywych rozkładu promieni porów odpowiadające krzywom potencjału kapilarnego przedstawionym na rysunku 3 linią ciągłą ( $R$ ) i wykreślono krzywą rozkładu promieni ogniw na podstawie której sporządzono wykresy potencjałów kapilarnych ośrodków o kapilarnej ( $K$ ) i łańcuchowej ( $L$ ) architekturze porów. Krzywa ta reprezentuje także rozkład wymiarów porów w ośrodkach o sieciowej architekturze, których potencjały kapilarne wykreślono na rysunku 3 liniami przerywanymi ( $S_1$  i  $S_2$ ). Liniami przerywanymi na rysunku 4 przedstawiono natomiast dwie pary wykresów rozkładów porów wyznaczone z krzywych potencjału kapilarnego  $S_1$  i  $S_2$  w oparciu o model kapilarny i łańcuchowy architektury porów. Linie  $S_{1K}$  i  $S_{1L}$  reprezentują rozkłady graniczne dla krzywej  $S_1$ , a linie  $S_{2K}$  i  $S_{2L}$  rozkłady takie dla krzywej  $S_2$ .



Rys. 4. Krzywa rozkładu promieni porów porowatego materiału ( $R$ ) oraz jej rozkłady graniczne wyznaczone dla dwóch sieciowych architektur porów przedstawionych na rysunku 3: a) dla  $S_1$ , b) dla  $S_2$

Wyznaczane na podstawie tych rozkładów wartości średnie promieni ogniw wynoszą odpowiednio:

$$\bar{r}_{S_{1K}} = 0,04, \quad \bar{r}_{S_{1L}} = 0,063 \quad ; \quad \bar{r}_{S_{2K}} = 0,033, \quad \bar{r}_{S_{2L}} = 0,077 \quad (\bar{r}_R = 0,050).$$

Liczby  $\bar{r}_{S_{1K}}$  i  $\bar{r}_{S_{1L}}$  estymują rzeczywistą wartość średnią  $\bar{r}_R$  rozkładu porów w ośrodku o sieciowej architekturze porów, dla którego potencjał kapilarny dany jest krzywą  $S_1$ , natomiast liczby  $\bar{r}_{S_{2K}}$  i  $\bar{r}_{S_{2L}}$  estymują wartość średnią  $\bar{r}_R$  w ośrodku o potencjale kapilarnym  $S_2$ .

## 6. PODSUMOWANIE

W pracy zaproponowano wykorzystanie kapilarnego i łańcuchowego modelu architektury porów do wyznaczania granicznych rozkładów wymiarów porów materiałów porowatych w oparciu o krzywe potencjału kapilarnego otrzymane metodą wciskania rtęci. Rozważono modele ośrodków porowatych, w których poszczególne pory są cylindrycznymi kapilarami (ogniwami) o jednakowej długości i statystycznym rozkładzie promieni  $r$  opisywanym funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $\psi(r)$ . O strukturze przestrzeni porów takiego ośrodka decydują dwa niezależne czynniki: rozkład wymiarów porów (ogniw)  $\psi(r)$  oraz sposób połączenia ogniw między sobą, nazywany w pracy architekturą przestrzeni porów. Ze względu na architekturę w pracy wyróżniono trzy rodzaje modeli przestrzeni porów: kapilarny, łańcuchowy oraz sieciowy. W modelu kapilarnym ogniwa o jednakowym promieniu połączone są szeregowo, tworząc długie, przenikające cały materiał kapilary o stałej średnicy. W modelu łańcuchowym ogniwa połączone są szeregowo w sposób losowy tworząc kapilary o skokowo zmiennej średnicy. W modelu sieciowym natomiast połączone losowo ogniwa tworzą przestrzenną sieć.

W pracy wyprowadzono wzory dla potencjału kapilarnego warstwy ośrodka o kapilarnej i łańcuchowej strukturze porów, dla dwustronnego wciskania rtęci, w których rozkład wymiarów porów jest parametrem funkcyjnym. Umożliwiło to uzyskanie wyrażeń określających krzywe potencjału kapilarnego ośrodków o kapilarnej i łańcuchowej strukturze porów. Wykazano, że obie krzywe reprezentują przy tym graniczne przebiegi

funkcji potencjału kapilarnego, jakie dla danego rozkładu objętościowego promieni ogniów mogą osiągać ośrodki o różnej ich architekturze. W modelu kapilarnym wszystkie ogniwa nadkrytyczne ośrodka są zapełniane rtęcią przy danym ciśnieniu. Natomiast w modelu łańcuchowym o statystycznym charakterze połączeń ogniów liczba ogniów nadkrytycznych zapełnianych rtęcią jest minimalna, ze względu na brak połączeń pomiędzy łańcuchami ogniów. Wystąpienie takich połączeń w ośrodku zmienia architekturę porów z łańcuchowej na sieciową, powodując jednocześnie wzrost liczby ogniów nadkrytycznych zapełnionych przy danym ciśnieniu. W modelu sieciowym bowiem znacznie wzrasta liczba dróg zapełniania każdego ogniwa. W rezultacie krzywe potencjału kapilarnego ośrodka o sieciowej architekturze porów będą leżały pomiędzy krzywymi potencjału kapilarnego ośrodków o architekturze kapilarnej i łańcuchowej porów. Umożliwia to wyznaczenie krzywych rozkładu ograniczających zakres występowania krzywej rozkładu promieni ogniów w materiale.

## LITERATURA

- [1] Scheideger A.E., 1957. The physics of flow through porous media. Univ. Press Toronto.
- [2] Aksielrud G.A., Altszuler M.A., 1987. Ruch masy w ciałach porowatych. WNT Warszawa.
- [3] Leclair P., Swift M.J., Horoshenkov V., 1998. Determining the specific area of porous acoustic material from water extraction data. J. Appl. Phys.
- [4] Webb P.A., Orr C.: Analytical methods in fine particle technology. Micrometitics Instrument Corporation. Norcross, GA USA.
- [5] Czuzmadźew I.A., Markin W.S., Transewicz M.R., 1971. Makrokinetyka procesów w poristych sriedach. Nauka Moskwa.
- [6] Cieszko M., Kempinski M. Zastosowanie łańcuchowego modelu porów do opisu procesu wnikania cieczy w materiał porowaty (praca przygotowana do druku).
- [7] Gerstenkorn T., Śródka T., 1976. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa. PWN Warszawa.
- [8] Diamond S., 1971. A critical comparison of mercury intrusion porosimetry and capillary condensation pore size distribution of Portland cement pastes. Cem. Concr. Res. 11(5), 531-545.

## APPLICATION OF LIMIT PORE SIZE DISTRIBUTION OF POROUS MATERIALS FROM MERCURY INTRUSION CURVES

### Summary

The distribution of pore diameters is the fundamental characteristics of microscopic pore space structure of porous materials. It enables one to determine basic macroscopic parameters of such materials (e.g. volume porosity, permeability or internal surface) that play important role in many physical and chemical processes appearing in

permeable porous materials (e.g. filtration, transport of mass, momentum and energy, wave propagation or chemical reaction).

The wide spread method of determination of pore diameters consists in the interpretation of capillary potential curves obtained from measurement of mercury intrusion into porous sample or from measurement of volume of wetting fluid (water or ethyl alcohol) removed from sample (e.g. by gas extrusion) at progressively increasing pressure. Such interpretation is based on the assumption that at increasing pressure the mercury intrudes against the capillary forces in pores of decreasing diameter. It is equivalent to the assumption that the pore structure of real porous material can be modeled by a bundle of capillaries with random distribution of diameters. Similarly, the data obtained from fluid extrusion are interpreted. That simplified model, however, do not take into account the very common situations appearing in real porous material, where large pores are often joined with other pores by narrow necks. It unable the mercury to fulfill these large pores at pressure corresponding to their diameter. As a result the curves of pore diameter distribution determined in such way reduce the volume of large pores contained in measured material, enlarging the real volume of small pores.

The purpose of this paper is to present the method of determination of limit pore size distribution in porous material based on interpretation experimental capillary potential curves obtained from the mercury intrusion measurement. It is shown that the capillary and chain models of pore architecture applied in the paper are the limit cases of the web model for a given pore size distribution and distributions obtained on the basis of these models determine the range of occurrence of pore size distributions if investigated material.

Keywords: mercury porosimetry, pore size distribution, capillary potential



OPIS ANIZOTROPOWEJ STRUKTURY PRZESTRZENI PORÓW  
WIĄZKI KWADRATOWYCH WŁÓKIEN UŁOŻONYCH  
W SIATCE KWADRATOWEJ.  
ZASTOSOWANIE METRYKI PRZESTRZENI MINKOWSKIEGO

Mieczysław Cieszko, Wojciech Kriese

Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej  
Wydział Matematyki Techniki i Nauk Przyrodniczych  
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego  
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

W pracy sformułowano uogólniony makroskopowy opis anizotropowych własności metrycznych przestrzeni porów ośrodka porowatego utworzonego przez wiązkę równoległych włókien o przekroju kwadratowym i osiach ułożonych regularnie w węzłach siatki kwadratowej. Wykorzystano przy tym podejście, w którym przestrzeń porów szkieletu rozważana jest jako anizotropowa przestrzeń Minkowskiego, której tensor metryczny odgrywa podstawową rolę w opisie zjawisk transportu w takim ośrodku.

Słowa kluczowe: materiał porowaty, przestrzeń Minkowskiego, grupy symetrii

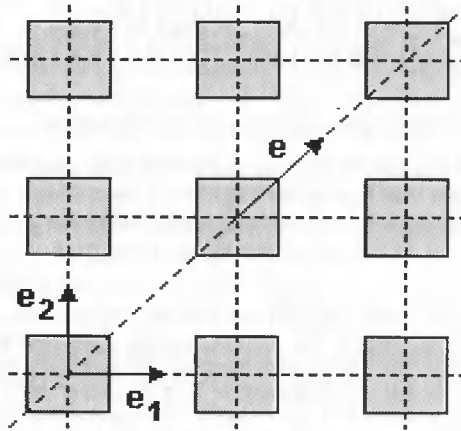
## 1. WSTĘP

W pracy przedstawiono uogólniony makroskopowy opis anizotropowych własności metrycznych przestrzeni porów ośrodka porowatego utworzonego przez wiązkę równoległych włókien o przekroju kwadratowym i osiach ułożonych regularnie w węzłach siatki kwadratowej (rys. 1). Z układami takimi mamy do czynienia przy rozwiązywaniu problemów inżynierskich w różnych dziedzinach. Dotyczy to zarówno własności filtracyjnych i akustycznych układu włókien zanurzonego w płynie, własności termicznych układu prętów paliwowych, chłodzenia wytwarzanych włókien syntetycznych, a także własności elektrycznych ośrodka o nieprzewodzących włóknach umieszczonych w przewodzącym materiale, np. w elektrolicie.

We wszystkich pracach dotyczących opisu procesów transportu zachodzących w takim ośrodku przyjmuje się, że jest on izotropowy w płaszczyźnie prostopadłej do osi włókien (prętów). Jest to bezpośrednią konsekwencją założenia liniowej zależności pomiędzy wektorem gradientu potencjału wywołującego proces transportu i wektorem gęstości strumienia transportowanej wielkości. Wiążący te dwie wielkości współczynnik jest wówczas symetrycznym tensorem drugiego rzędu. Narzuca to silne ograniczenia na rodzaj anizotropii ośrodka, jaki może być opisany takim prawem. Ze względu na symetrię tensora, w najogólniejszym przypadku jest to ortotropia. Opis taki odniesiony do układu włókien uporządkowanych w siatce kwadratowej pociąga za sobą koniecz-

ność uznania takiego ośrodka za makroskopowo izotropowy w płaszczyźnie prostopadłej do osi włókien, a cały ośrodek za transwersalnie izotropowy.

Taka rozbieżność pomiędzy rzeczywistą symetrią mikroskopowej struktury porów rozważanego materiału porowatego a symetrią własności makroskopowych takiego ośrodka powodowaną zastosowaniem liniowego prawa opisującego proces transportu budzi szereg wątpliwości co do dostatecznej ogólności takiego opisu.



Rys. 1. Wiązka kwadratowych włókien uporządkowanych w siatce kwadratowej

Odmienne podejście zaproponowano w pracach [1-3] poświęconych modelowaniu ruchu płynu w nieodkształcalnym ośrodku porowatym o anizotropowej strukturze przestrzeni porów. W pracach tych ruch płynu w porach szkieletu tworzących anizotropową strukturę rozważany jest jako ruch kontinuum materialnego w anizotropowej przestrzeni metrycznej Minkowskiego. Takie podejście umożliwiło otrzymanie opisu, w którym nawet powolne procesy transportu masy płynu, czy procesy propagacji fal o małej amplitudzie opisywane są prawami nieliniowo zależnymi od kierunku przebiegu procesu. Podstawową rolę w tych prawach odgrywa tensor metrycznej przestrzeni porów rozważanej jako przestrzeń Minkowskiego [1,4,5].

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie ogólnej postaci makroskopowej metryki dwuwymiarowej przestrzeni porów ośrodka porowatego utworzonej w płaszczyźnie prostopadłej do osi równoległych kwadratowych włókien uporządkowanych w węzłach siatki kwadratowej. Do opisu własności metrycznych takiej przestrzeni wykorzystano tensor czwartego rzędu o symetriach tensora sztywności, występującego w liniowej teorii sprężystości anizotropowych materiałów. Dokonano rozkładu widmowego tego tensora oraz wyznaczono grupę tensorów opisujących punktowe symetrie siatki kwadratowej. Umożliwiło to zredukowanie ogólnej reprezentacji metryki określonej przez tensor czwartego rzędu do postaci, w której jawnie występują jedynie dwa skalarne parametry, ściśle związane z parametrami krętości porów w kierunkach głównych przestrzeni porów. Wyznaczono także graniczne wartości stopnia anizotropii, jakie może osiągać dwuwymiarowa przestrzeń o symetriach siatki kwadratowej.

## 2. OZNACZENIA I PODSTAWOWE DEFINICJE

*Wektory i tensory.* W rozważaniach prowadzonych w pracy przez  $V$  będziemy oznaczali 3-wymiarową przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych  $R$ , a przez  $V^*$  przestrzeń wektorową dualną do  $V$ . Elementy przestrzeni  $V$  oznaczamy przez  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  i nazywamy wektorami, natomiast elementy przestrzeni  $V^*$  nazywamy kowektorami i oznaczamy „gwiazdką”, np.  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{v}^*$ ,  $\mathbf{w}^*$ . Jeśli  $\mathbf{u} \in V$  i  $\mathbf{v}^* \in V^*$ , wówczas skalar:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} \in R$$

nazywać będziemy iloczynem dualnym wektora  $\mathbf{u}$  i kowektora  $\mathbf{v}^*$ . Kropką  $(\cdot)$  oznaczać będziemy biliniowe działanie zewnętrzne określone na elementach przestrzeni  $V$  oraz  $V^*$  i nazywać będziemy mnożeniem dualnym.

Tensory są rozważane w pracy jako wieloliniowe odwzorowania przestrzeni wektorowych. Są one elementami przestrzeni liniowych będących iloczynami tensorowymi przestrzeni wektorowych. Na przykład tensor  $\mathbf{A} \in V \otimes V^*$  jest endomorfizmem przestrzeni  $V$  i  $V^*$ . Dla  $\mathbf{u} \in V$  i  $\mathbf{v}^* \in V^*$  mamy:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \in V$  i  $\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{A} \in V^*$ . Iloczyny tensorowe wektorów  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}^*$  są najprostszymi postaciami tensorów w przestrzeni  $V \otimes V^*$ .

Ponieważ w dalszych rozważaniach będziemy mieli do czynienia z tensorami drugiego i trzeciego rzędu, dla uproszczenia działań wykonywanych na tych obiektach wprowadzamy alternatywne oznaczenia iloczynów tensorowych. Dla  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w} \in V$  mamy:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \in V \otimes V = \otimes V^2, \quad \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \in \otimes V^3, \quad \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{x} \\ \mathbf{v} & \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \otimes V^3.$$

*Unormowane przestrzenie wektorowe.* Przestrzeń wektorowa  $V$  nazywana jest przestrzenią unormowaną, jeśli została na niej określona rzeczywista funkcja  $u = L_\lambda(\mathbf{u})$ , która spełnia następujące aksjomaty [4]:

$$L_\lambda(u) > 0 \text{ dla } u \neq 0 \text{ oraz } L_\lambda(0) = 0, \quad (1)$$

$$L_\lambda(k u) = k L_\lambda(u) \text{ dla } k > 0, \quad (2)$$

$$L_\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) < L_\lambda(\mathbf{u}) + L_\lambda(\mathbf{v}) \quad (3)$$

dla liniowo niezależnych wektorów  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v} \in V$ .

Funkcja  $L_\lambda(\mathbf{u})$  o własnościach (1÷3) jest nazywana normą przestrzeni wektorowej  $V$ .

Norma  $L_\lambda(\mathbf{u})$  umożliwia określenie odległości między elementami przestrzeni  $V$  spełniającej aksjomaty uogólnionej metryki. Mamy:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv L_\lambda(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (4)$$

Metryka (4), jak wynika z aksjomatów (1÷3), w ogólnym przypadku nie musi być symetryczna ( $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ).

W wielu przypadkach wykorzystując unormowaną przestrzeń wektorową, zamiast metryki  $L_\lambda(\mathbf{u})$  wygodniej jest posługiwać się tensorem metrycznym tej przestrzeni.

Tensor taki definiowany jest wzorem [6]:

$$\mathbf{M}_\Lambda(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_\Lambda^2(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} \in V^* \otimes V^* \quad (5)$$

i ze względu na jednorodność normy  $L_\Lambda(\mathbf{u})$ , daną wzorem (2), ma on następujące własności:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_\Lambda(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \equiv L_\Lambda^2(\mathbf{u}), \quad 2 \mathbf{M}_\Lambda(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \equiv \partial L_\Lambda^2(\mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}. \quad (6)$$

$$\mathbf{M}_\Lambda(k \mathbf{u}) \equiv \mathbf{M}_\Lambda(\mathbf{u}), \quad \text{dla } k > 0. \quad (7)$$

Z własności (7) wynika, że w ogólnym przypadku tensor metryczny  $\mathbf{M}_\Lambda(\mathbf{u})$  zależy od kierunku wektora  $\mathbf{u}$ , natomiast nie zależy od jego długości. Ta własność tensora  $\mathbf{M}_\Lambda(\mathbf{u})$  określa anizotropowe własności unormowanej przestrzeni wektorowej.

*Przestrzeń afiniczna.* Parę  $(P, V)$  złożoną z punktu  $P$  i przestrzeni wektorowej  $V$  będziemy utożsamiali z afiniczną przestrzenią punktową. Takie utożsamienie jest możliwe, bowiem struktura obu obiektów jest izomorficzna. Punkt  $P$  jest nazywany punktem odniesienia, a  $V$  przestrzenią wektorów położenia punktów. Przestrzeń  $(P, V)$  jest unormowana, jeśli przestrzeń wektorowa  $V$  jest unormowana.

### 3. METRYKA MINKOWSKIEGO ANIZOTROPOWEJ PRZESTRZENI PORÓW

W niniejszym punkcie sformułujemy ogólną postać makroskopowej metryki<sup>1</sup>  $L_\Lambda(\mathbf{r})$  dwuwymiarowej przestrzeni porów ( $\mathbf{r} \in V$ ;  $\dim(V) = 2$ ), wykorzystując w rozważaniach tensor  $\mathbf{C} \in \otimes V^{*4}$  czwartego rzędu o symetriach tensora sztywności, występującego w liniowej teorii sprężystości anizotropowych materiałów. Metryka ta ma postać [1,2]:

$$L_\Lambda^4(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} : \mathbf{C} : \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (8)$$

przy czym tensor  $\mathbf{C}$  ma następujące symetrie:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} : \mathbf{C} : \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} : \mathbf{C} : \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} : \mathbf{C} : \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} : \mathbf{C} : \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (9)$$

gdzie  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  są dowolnymi wektorami. Tensor  $\mathbf{C}$  będziemy nazywali tensorem struktury anizotropowej przestrzeni porów. Składowe tensora  $\mathbf{C}$ , obok warunków symetrii (9) oraz żądania dodatniej określoności, ograniczać będzie także warunek wypukłości funkcji (8) lub generowanej przez nią indykatrysy metryki przestrzeni porów danej równaniem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} : \mathbf{C} : \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = 1. \quad (10)$$

<sup>1</sup> ponieważ norma  $L_\Lambda(\mathbf{r})$  przestrzeni  $V$  generuje metrykę  $L_\Lambda(\mathbf{r} - \mathbf{s})$  tej przestrzeni, będziemy zamiennie używali obu tych pojęć.

Norma (8) w sposób jednoznaczny określa postać tensora metrycznego  $M_A(r)$  anizotropowej przestrzeni. Otrzymujemy [1]:

$$M_{,A}(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_A^2(r)}{\partial r \partial r} = \frac{1}{L_{,A}^6(r)} r \cdot \left[ L_{,A}^4(r) (2C + C^T) - 2C : \begin{pmatrix} r r \\ r r \end{pmatrix} : C \right] \cdot r \quad (11)$$

Interesującą postacią metryki (8) otrzymamy dokonując rozkładu widmowego tensora  $C$ . W tym celu w przestrzeni tensorów symetrycznych drugiego rzędu:

$$S^* = \text{sym} \{ \otimes V^{*2} \},$$

definiujemy iloczyn skalarny  $U \diamond V$  dowolnych tensorów  $U, V \in S^*$ . Przyjmujemy:

$$U \diamond V = U : \begin{pmatrix} M^{-1} \\ M^{-1} \end{pmatrix} : V \quad (12)$$

gdzie  $M^{-1}$  jest tensorem metrycznym euklidesowej dualnej przestrzeni wektorowej  $V^*$ . Przestrzeń  $S^*$  jest trójwymiarowa, zatem dowolne trzy liniowo niezależne tensory tej przestrzeni tworzą jej bazę, np.  $\{S_m\}$  ( $m = 1, 2, 3$ ). Ponieważ w przestrzeni  $S^*$  określony został iloczyn skalarny (12), wśród wszystkich możliwych baz możemy wyróżnić bazy ortogonalne, np.  $\{K_m\}$ , spełniające warunek:

$$K_m \diamond K_n = \delta_{mn}, \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (13)$$

Wówczas dowolny tensor  $T \in S^*$  będzie miał reprezentację postaci:

$$T = T_m K_m \quad (14)$$

gdzie:  $T_m = T \diamond K_m$  jest  $m$ -tą składową tensora  $T$  w bazie  $\{K_m\}$ .

Wykorzystując przestrzeń  $S^*$  tensorów symetrycznych drugiego rzędu możemy utworzyć dziewięciowymiarową przestrzeń  $S^* \otimes S^*$  tensorów czwartego rzędu. Wówczas tensor struktury  $C$  będzie elementem tej przestrzeni

$$C \in S^* \otimes S^*$$

i może być przedstawiony w postaci [6.7]:

$$C = \alpha_1 K_1 \otimes K_1 + \alpha_2 K_2 \otimes K_2 + \alpha_3 K_3 \otimes K_3, \quad (15)$$

o ile tensory  $K_n \in S^*$  ( $n = 1, 2, 3$ ) ortonormalnej bazy przestrzeni  $S$  są tensorami własnymi tensora czwartego rzędu  $C$ . Wówczas skalarnie współczynniki  $\alpha_n$  występujące we wzorze (15) będą odpowiednimi jego wartościami własnymi. Wielkości te spełniają równanie:

$$C : \begin{pmatrix} M^{-1} \\ M^{-1} \end{pmatrix} : K_n = \alpha_n K_n, \quad (16)$$

Wykorzystując tensory ortogonalnej bazy  $\{K_n\}$  można utworzyć tensory ortogonalnego rzutu  $P_n$  postaci:

$$P_n = \begin{pmatrix} M^{-1} \\ M^{-1} \end{pmatrix} : K_n \otimes K_n. \quad (17)$$

spełniające warunki:

$$\mathbf{P}_m : \mathbf{P}_n = \begin{cases} \mathbf{P}_n & m = n \\ \mathbf{0} & m \neq n \end{cases}$$

Tensory te umożliwiają ortogonalny rozkład jednostkowego automorfizmu  $\mathbf{J}$  przestrzeni  $S^*$ , dany wzorem:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} : \mathbf{C} : \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right). \quad (18)$$

Zachodzi równość:

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{J}. \quad (19)$$

Za pomocą tensorów rzutu (17) reprezentacja (15) tensora struktury  $\mathbf{C}$  może być przedstawiona w postaci:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} : (\alpha_1 \mathbf{P}_1 + \alpha_2 \mathbf{P}_2 + \alpha_3 \mathbf{P}_3). \quad (20)$$

Z kolei uwzględnienie reprezentacji (15) w definicji metryki (8) daje wyrażenie:

$$L_{\Lambda}^4(\mathbf{r}) = \alpha_1 \left( \mathbf{K}_1 : \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \right)^2 + \alpha_2 \left( \mathbf{K}_2 : \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \right)^2 + \alpha_3 \left( \mathbf{K}_3 : \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \right)^2, \quad (21)$$

z którego można wnioskować, że norma  $L_{\Lambda}^4(\mathbf{r})$  będzie dodatnio określona, jeśli wszystkie wartości własne  $\alpha_n$  będą nieujemne.

Wzory (21) i (11) są ogólnymi postaciami normy i tensora metrycznego dwuwymiarowej przestrzeni porów w materiałach, w których makroskopowa struktura może być charakteryzowana tensorem czwartego rzędu.

Z reprezentacji (20) tensora  $\mathbf{C}$  wynika, że tensor ten będzie wyznaczał metrykę przestrzeni porów o określonej symetrii, jeśli wyróżnione tensory rzutu będą niezmiennicze względem grupy symetrii obrotowej charakteryzującej symetrię tej przestrzeni.

#### 4. GRUPA PUNKTOWYCH SYMETRII SIATKI KWADRATOWEJ

Aby otrzymać jawną postać metryki anizotropowej przestrzeni określonej przez tensor czwartego rzędu, właściwej dla przestrzeni porów ośrodka porowatego, utworzonej przez układ kwadratowych włókien uporządkowanych w siatce kwadratowej (rys. 1), wyznaczmy ortogonalne tensory tworzące grupę punktowych symetrii tej siatki. Za punkt wyjścia przyjmijmy ogólne przedstawienie tensora ortogonalnego  $\mathbf{Q} \in V \otimes V^*$  trójwymiarowej przestrzeni wektorowej  $V$  za pomocą jednostkowego tensora przeciwsprężonego:

$$\mathbf{W} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{M} \quad (22)$$

gdzie  $\mathbf{E}_2 \in \wedge V^2$  jest tensorem antysymetrycznym reprezentującym element powierzchni o jednostkowym polu mierzonym względem metryki Euklidesa.

Reprezentacja tensora ortogonalnego  $\mathbf{Q}$  ma postać:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \sin(\alpha) \mathbf{W} + (1 - \cos(\alpha)) \mathbf{W}^2. \quad (23)$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem obrotu tensora  $\mathbf{Q}$  dookoła osi będącej wektorem osiowym tensora  $\mathbf{W}$ . Wykorzystując jednostkowy tensor antisymetryczny  $\mathbf{E}_3 \in \wedge V^3$  trzeciego rzędu, wektor osiowy  $\mathbf{e}_3$  tensora antisymetrycznego  $\mathbf{E}_2$  możemy przedstawić w postaci :

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3 : \mathbf{S} : \mathbf{E}_2. \quad (24)$$

Wówczas, oznaczając przez  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$  dowolne dwa wersory, które wraz z  $\mathbf{e}_3$  tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni  $V$ , tensor  $\mathbf{W}$  dany będzie wzorem:

$$\mathbf{W} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 \quad (25)$$

gdzie:

$$\mathbf{e}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_i \quad (26)$$

są wersorami dualnymi do  $\mathbf{e}_i$ , spełniającymi zależność:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}' = \delta_i^j. \quad (27)$$

Wektor  $\mathbf{e}_3$  w takim przypadku jest wersorem własnym tensora ortogonalnego  $\mathbf{Q}$ . Z (23) mamy:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3. \quad (28)$$

Jeśli założymy, że przestrzeń  $V$  jest dwuwymiarowa ( $\dim(V) = 2$ ) i zawiera wektory  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$ , wówczas z (25) otrzymujemy:

$$\mathbf{W}^2 = -\mathbf{I}, \quad (29)$$

a reprezentacja (23) redukuje się do postaci:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} \cos(\alpha) + \mathbf{W} \sin(\alpha). \quad (30)$$

Przyjmujemy teraz, że wersory  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$  pokrywają się z głównymi osiami symetrii siatki kwadratowej (rys. 1). Podstawowa symetria siatki kwadratowej wynika z jej niezmienniczości przy obrocie o kąt  $\alpha = \pi/2$ . W takim przypadku tensor obrotu (30) redukuje się do postaci:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}. \quad (31)$$

Ponieważ

$$\mathbf{W}^2 = -\mathbf{I}, \quad \mathbf{W}^3 = -\mathbf{W}, \quad \mathbf{W}^4 = \mathbf{W}^2,$$

automorfizmy

$$\mathbf{W}, \mathbf{I}, -\mathbf{I}, \quad (32)$$

będą należały do grupy symetrii siatki kwadratowej.

Tensor  $\mathbf{I}$  jest automorfizmem tożsamościowym, natomiast  $-\mathbf{I}$  określa symetrię środkową siatki kwadratowej. Nie są to jednakże wszystkie symetrie punktowe tej siatki. Pełną grupę otrzymamy, żądając dodatkowo spełnienia symetrii osiowych siatki kwadratowej.

Wyznamy postać tensora, który w dwuwymiarowej przestrzeni reprezentuje odwzorowanie właściwe symetrii osiowej. Niech wektor  $\mathbf{m}$  wyznacza kierunek osi symetrii. Ponieważ wektor:

$$\mathbf{n} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{m}$$

jest prostopadły do  $\mathbf{m}$ , zatem wektory  $\mathbf{n}$  i  $\mathbf{m}$  tworzą bazę ortonormalną w 2-wymiarowej przestrzeni  $V$ . Dla dowolnego wektora  $\mathbf{u} \in V$  mamy:

$$\mathbf{u} = u_m \mathbf{m} + u_n \mathbf{n} \quad (33)$$

gdzie

$$u_m = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{m}, \quad u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}. \quad (34)$$

Tensor  $\mathbf{V}_m \in V \otimes V^*$  będzie odwzorowywał wektor  $\mathbf{u}$  na wektor  $\mathbf{v}$  symetryczny do wektora  $\mathbf{u}$  względem osi wyznaczonej przez wersor  $\mathbf{m}$ , tj.:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{u}, \quad (35)$$

jeśli reprezentacja wektora  $\mathbf{v}$  będzie postaci:

$$\mathbf{v} = u_m \mathbf{m} - u_n \mathbf{n}. \quad (36)$$

Wykorzystując zależności (34) i (36) w (35), oraz dowolność wektora  $\mathbf{u}$ , dla tensora  $\mathbf{V}_m$  otrzymamy wyrażenie:

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}. \quad (37)$$

Ze wzoru (37) wynika, że tensor symetrii względem osi  $\mathbf{e}_1$  ma postać:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2, \quad (38)$$

natomiast względem osi  $\mathbf{e}_2$  dany jest przez wyrażenie:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 = -\mathbf{V}_1. \quad (39)$$

Biorąc pod uwagę, że wersor  $\mathbf{e}$  wyznaczający przekątną prostokąta (rys. 1) może być przedstawiony poprzez wersory  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$  za pomocą wzoru:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) / \sqrt{2}$$

tensor  $\mathbf{V}$  symetrii względem osi  $\mathbf{e}$  przyjmie postać:

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1. \quad (40)$$

Tensor  $\mathbf{V}$ , podobnie jak tensor (32), jest elementem grupy symetrii siatki kwadratowej. Ponieważ:

$$-\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 = \mathbf{V}_1,$$

zatem pełna grupa symetrii siatki kwadratowej składać się będzie z następujących liniowo niezależnych elementów:

$$\mathbf{I}, \mathbf{V}, \mathbf{V}_1, \mathbf{W}. \quad (41)$$

Tensory:  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_1$  są samosprężone, a tensor  $\mathbf{W}$  jest przeciwsprężony. Tensory  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{V}_1$  tworzą zbiór generatorów grupy symetrii siatki kwadratowej. Oznacza to, że każdy element tej grupy tensorów może być uzyskany jako iloczyn tensorów  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{V}_1$ .



## 5. MAKROSKOPOWA METRYKA PRZESTRZENI PORÓW UKŁADU WŁÓKIEN KWADRATOWYCH

Wykorzystamy liniowo niezależne, samosprężone tensory:  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_1$ , charakteryzujące symetrię siatki kwadratowej, aby ogólną postać metryki (21) zredukować do postaci opisującej makroskopową strukturę przestrzeni porów ośrodka utworzonego przez układ kwadratowych włókien ułożonych w siatce kwadratowej. W tym celu z tensorów  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_1$  utworzymy bazę ortonormalną w przestrzeni tensorów symetrycznych  $S^* = \text{sym}\{\otimes V^{*2}\}$ . Mnożąc tensory  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_1$  lewostronnie przez tensor metryczny  $\mathbf{M}$  otrzymujemy symetryczne tensory będące elementami przestrzeni  $S^*$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{I} \quad , \quad \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V} \quad , \quad \bar{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}_1 \quad . \quad (42)$$

Ponieważ przestrzeń  $S^*$  jest trójwymiarowa, a tensory  $\mathbf{M}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}_1$  są liniowo niezależne, zatem tworzą one bazę tej przestrzeni. Łatwo można sprawdzić, że tensory te są ortogonalne względem iloczynu skalarnego, zdefiniowanego wzorem (12):

$$\mathbf{M} \diamond \bar{\mathbf{V}}_1 = 0 \quad , \quad \mathbf{M} \diamond \bar{\mathbf{V}} = 0 \quad , \quad \bar{\mathbf{V}}_1 \diamond \bar{\mathbf{V}} = 0 \quad .$$

Tensory  $\mathbf{M}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}_1$  nie są natomiast unormowane. Biorąc pod uwagę, że

$$\mathbf{M} \diamond \mathbf{M} = \mathbf{M} : \mathbf{M}^{-1} = 2 \quad , \quad \bar{\mathbf{V}}_1 \diamond \bar{\mathbf{V}}_1 = 2 \quad , \quad \bar{\mathbf{V}} \diamond \bar{\mathbf{V}} = 2 \quad ,$$

jako ortonormalne tensory, przyjmujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \right) , & \mathbf{K}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{V}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \right) \\ \mathbf{K}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^1 \end{pmatrix} \right) . \end{aligned} \quad (43)$$

Wykorzystując zależności (43), tensory rzutu ortogonalnego (17) przyjmą postać:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{M}^{-1} \otimes \mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} - \mathbf{P}_1 \quad , \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{J} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 \quad . \quad (44)$$

Tensory (43) umożliwiają przedstawienie wyrażenia (21) dla metryki przestrzeni porów, w postaci odpowiadającej strukturze o symetrii siatki kwadratowej. Przyjmuje ono postać:

$$L_{\lambda}^+(\mathbf{r}) = p (\mathbf{r} \circ \mathbf{r})^2 + q \left( (\mathbf{r} \circ \mathbf{e}_1)^2 + (\mathbf{r} \circ \mathbf{e}_2)^2 \right) \quad . \quad (45)$$

gdzie  $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$  jest iloczynem skalarnym wektorów  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  w przestrzeni  $V$ , natomiast

$$p = \alpha_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)/2 \quad , \quad q = \alpha_2 - \alpha_3 \quad , \quad (46)$$

Niezmienniczość metryki (45) przy zamianie miejscami wersorów  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$  jest odzwierciedleniem symetrii przyjętej struktury porów ośrodka.

Występujące w (45) parametry skalarne  $p$  i  $q$  mogą być wyrażone przez wielkości o ściśle określonym znaczeniu geometrycznym, jeśli uwzględnimy bezpośredni związek metryki  $L_A(\mathbf{r})$  przestrzeni porów z krętością porów  $\delta(\mathbf{n})$  porowatego ośrodka. Związek ten, dla dowolnego kierunku określonego euklidesowym wersorem  $\mathbf{n}$ , dany jest wzorem [1,2]:

$$\delta^2(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = L_A^2(\mathbf{n}). \quad (47)$$

Wówczas metryka (45) może być przedstawiona w postaci:

$$L_A^4(\mathbf{r}) = \delta_0^4 \left[ (\mathbf{r} \circ \mathbf{r})^2 + 4(\alpha - 1) (\mathbf{r} \circ \mathbf{e}_1)^2 (\mathbf{r} \circ \mathbf{e}_2)^2 \right]. \quad (48)$$

gdzie:

$$\alpha = \delta_p^4 / \delta_0^4, \quad (49)$$

przy czym parametry  $\delta_0$  i  $\delta_p$  są krętościami porów ośrodka porowatego w kierunkach głównych (odpowiednio)  $\mathbf{e}_1$  (lub  $\mathbf{e}_2$ ) i  $\mathbf{e}$  przestrzeni porów (rys. 1). Z postaci normy (48) wynika, że jest ona dodatnio określona dla dowolnych wartości parametrów  $\delta_0$  i  $\delta_p$ . Parametr  $\alpha$  jest miarą anizotropii struktury przestrzeni porów. Dla przestrzeni izotropowej  $\alpha = 1$ . Zakres zmienności tego parametru dodatkowo ogranicza warunek (3) wypukłości funkcji  $L_A(\mathbf{r})$ . Z warunku tego otrzymujemy:

$$1/2 < \alpha < 2.$$

Oznacza to, że maksymalny stopień anizotropii przestrzeni porów o symetrii siatki kwadratowej nie może przekroczyć wartości  $\sqrt[4]{2}$ .

Wykorzystując normę (48), funkcję krętości porów, daną wzorem (47), możemy zapisać za pomocą wyrażenia:

$$\delta^4(\mathbf{n}) = \delta_0^4 \left[ 1 + 4(\alpha - 1) (\mathbf{n} \circ \mathbf{e}_1)^2 (\mathbf{n} \circ \mathbf{e}_2)^2 \right], \quad (50)$$

a we współrzędnych biegunowych redukuje się do postaci:

$$\delta^4 = \delta_0^4 \left[ 1 + (\alpha - 1) \sin^2(2\varphi) \right], \quad (51)$$

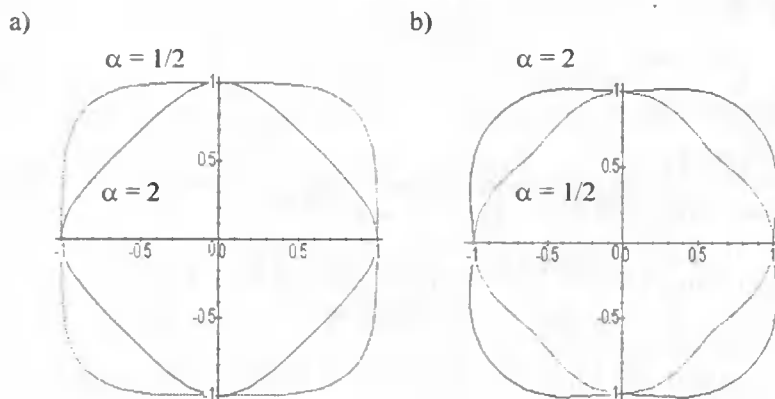
gdzie  $\varphi$  jest kątem pomiędzy wersorami  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{n}$ .

Biorąc pod uwagę, że wektor:

$$\mathbf{r}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} / \delta(\mathbf{n}),$$

ma jednostkową długość względem metryki Minkowskiego, odwrotność funkcji krętości porów będzie opisywać dwuwymiarową powierzchnię indykatrysy przestrzeni Minkowskiego.

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy linii indykatrys dla granicznych wartości krętości porów  $\delta_p$  oraz odpowiadające im wykresy funkcji krętości porów  $\delta(\mathbf{n})$ . Z postaci tych wykresów wynika, że żądanie wypukłości indykatrysy przestrzeni Minkowskiego nie pociąga za sobą wypukłości funkcji krętości porów  $\delta(\mathbf{n})$ .



Rys. 2. Wykresy indyktrisy (a) i funkcji krętości porów (b) anizotropowej przestrzeni porów o punktowych symetriach siatki kwadratowej, odpowiadające granicznym wartościom parametru krętości  $\delta_p$

## 6. PODSUMOWANIE

W pracy sformułowano ogólną postać makroskopowej metryki dwuwymiarowej przestrzeni porów ośrodka porowatego utworzonej w płaszczyźnie prostopadłej do osi równoległych włókien o przekroju kwadratowym uporządkowanych w węzłach siatki kwadratowej. Do opisu własności metrycznych takiej przestrzeni wykorzystano tensor czwartego rzędu o symetriach tensora sztywności występującego w liniowej teorii sprężystości anizotropowych materiałów.

Dokonano rozkładu widmowego tego tensora oraz wyznaczono grupę tensorów opisujących punktowe symetrie siatki kwadratowej. Umożliwiło to zredukowanie ogólnej reprezentacji metryki określonej przez tensor czwartego rzędu do postaci, w której jawnie występują dwa skalarnie parametry ściśle związane z parametrami krętości porów w kierunkach głównych przestrzeni porów. Wyznaczono także graniczne wartości stopnia anizotropii, jakie może osiągać dwuwymiarowa przestrzeń o symetriach siatki kwadratowej.

Otrzymana w pracy postać metryki może być wykorzystana do opisu procesów transportu masy, ciepła, ładunku, a także opisu własności akustycznych nasyconych płynem ośrodków porowatych, których anizotropowa struktura przestrzeni porów charakteryzowana jest przez grupę punktowych symetrii siatki kwadratowej. Przeprowadzone rozważania wykazały, że nawet w przypadku tak prostej struktury przestrzeni porów szkieletu, pełny opis zachodzących w nim procesów wymaga wykorzystania rozszerzonego podejścia, w którym koncepcja anizotropowej przestrzeni Minkowskiego odgrywa podstawową rolę.

## LITERATURA

- [1] Cieszko M., 2001. *Mechanika płynu w anizotropowej przestrzeni porów materiałów przepuszczalnych. Zastosowanie przestrzeni Minkowskiego*. Wyd. Akademii Bydgoskiej.
- [2] Cieszko M., 2000. *Application of Minkowski Space to Description of Anisotropic Pore Space Structure in Porous Materials*. ZAMM 80, 129-132.
- [3] Cieszko M., 2000. *Mechanics of Fluid in Anisotropic Space. Modelling of Fluid Motion in Porous Medium*. [In:] *Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials*, W. Ehlers (ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.
- [4] Rund H., 1959. *The Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.
- [5] Thompson A.C., 1988. *Minkowski Geometry*. Encyclopaedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press.
- [6] Rychlewski J., 1988. *Symmetry of Tensor Functions and Spectral Theorem*. *Advances in Mechanics* 11(3), 77-125.
- [7] Rychlewski J., 1995. *Unconventional Approach to Linear Elasticity*. *Arch. Mech.* 47, 149-171.

DESCRIPTION OF ANISOTROPIC PORE SPACE STRUCTURE  
OF BUNDLE OF SQUARE FIBRES ARRANGED IN SQUARE NET.  
APPLICATION OF MINKOWSKI SPACE METRIC

Summary

In the paper the generalized macroscopic description is formulated for anisotropic pore space structure of porous material formed by bundle of square fibres arranged in square net. In considerations the pore space of porous material is modeled as anisotropic Minkowski space the metric tensor of which plays the fundamental role in description of transport phenomena in such medium.

Keywords: porous material, Minkowski space, groups of symmetry

## OPTIMALIZACJA DRGAŃ WYDZIELONEGO OBSZARU UKŁADU DYSKRETNO-CIĄGŁEGO

Paweł Frankowski, Henryk Holka

Katedra Mechaniki Stosowanej  
Wydział Mechaniczny ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy omówiono dwa wydzielone zagadnienia. W pierwszym za pomocą strukturalnej syntezy podatności określono warunki jakie muszą być spełnione, aby w wyznaczonych punktach konstrukcji drgania były równe zero. Rozważana konstrukcja reprezentuje układ dyskretno-ciągły. W dalszej części pracy ilość punktów rozszerzono do trzech, a następnie poszukiwano takich optymalnych warunków, aby drgania we wszystkich wybranych punktach były minimalne.

Słowa kluczowe: drgania, optymalizacja drgań, podatność

### 1. WSTĘP

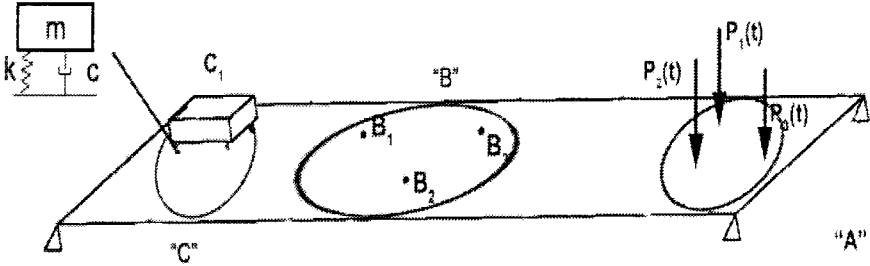
Jedną z metod sterowania drganiami w wybranych punktach konstrukcji jest modyfikacja strukturalna. Polega ona na zmianie jego struktury poprzez dołączenie układu dodatkowego. W niniejszej pracy rozpatrywano układ dyskretno-ciągły. Problemem otwartym tak postawionego zadania jest metoda opisu rozpatrywanego modelu. Ponieważ w rozpatrywanej pracy układy ciągłe są gabarytowo duże i trudne do opisu analitycznego, wybrano metodę opisu bazującą na syntezie podatności dynamicznych [1]. Metoda ta jest o tyle wygodna, że pozwala łączyć podatności układów ciągłych i dyskretnych. Po drugie, podatności układów ciągłych można wyznaczyć analitycznie, numerycznie – metodą MES lub zmierzyć doświadczalnie. Liczba punktów w których będziemy mierzyli podatności – i to jest wielką zaletą tej metody – jest ograniczona tylko do liczby połączeń z układami dyskretnymi i ewentualną liczbą dodatkowych wybranych punktów konstrukcji. Wymienioną powyżej metodą określono warunki, jakie muszą być spełnione, aby w wybranym punkcie konstrukcji drgania były równe zero. Jeżeli ilość interesujących nas punktów zwiększymy (w niniejszej pracy do trzech), to zadanie znacznie się komplikuje, a drgania w dodatkowych dwóch punktach nie będą już równe i mogą nawet osiągać znaczne wartości.

Celem pracy był optymalny dobór dołączonej lub istniejącej w innym punkcie konstrukcji masy tak, aby drgania w wybranym obszarze konstrukcji były minimalne.

Powyższe zadanie można opisać bardziej praktycznie: posadować istniejącą maszynę w takim miejscu, aby drgania w wydzielonym obszarze hali (obszarze laboratorium) były minimalne.

## 2. SYNTEZA PODATNOŚCI

Analizowany będzie układ liniowy ciągły o podatności  $\gamma$ , do którego w obszarze C zamocowano podukład dyskretny o podatności  $\beta$ , rysunek 1.



Rys. 1. Model układu

Należy zapewnić wymagany i optymalny poziom drgań w obszarze B w punktach  $B_1$ ,  $B_2$  i  $B_3$ , poprzez dobór lub odpowiednie umiejscowienie istniejącej w punkcie w obszarze C konstrukcji, układu o podatności  $\beta$ , jeżeli w obszarze A działa „n” sił o postaci  $P_i = \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ . Dla uproszczenia obliczeń przy określonej liniowości układu założono, że w obszarze „A” działa tylko jedna siła, co nie ogranicza ogólności rozważań. Układ ciągły  $\gamma$  opisany jest macierzą podatności, w której elementami są podatności pomierzone w interesujących nas punktach konstrukcji.

$$\gamma(i\omega) = \begin{bmatrix} \gamma_{AA} & \gamma_{AB} & \gamma_{AC} \\ \gamma_{BA} & \gamma_{BB} & \gamma_{BC} \\ \gamma_{CA} & \gamma_{CB} & \gamma_{CC} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Zachodzi równość  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ . Ogólny schemat połączenia przedstawiono na rysunku 2. Interesująca nas podatność  $\alpha_{AB}$  po syntezie wyznaczana jest ze schematu przedstawionego na rysunku 3.

Po zwinięciu obwodu otrzymujemy poszukiwaną podatność  $\alpha_{B,A}(i\omega)$ :

$$\alpha_{B,A} = \frac{\gamma_{B,A}(\gamma_{CC} + \beta_{CC}) - \gamma_{B,C}\gamma_{CA}}{\gamma_{CC} + \beta_{CC}} \quad (2)$$

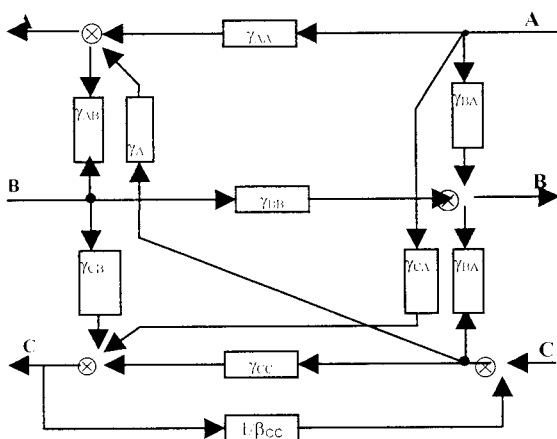
Ze wzoru (2) wynika, że dobierając odpowiednio podatność  $\beta_{CC}$ , możemy sterować poziomem drgań w punktach  $B_i$ .

Można bowiem zapisać:

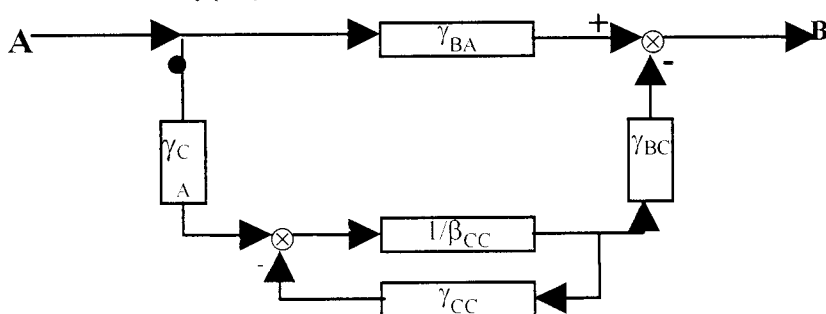
$$\begin{bmatrix} z_A \\ z_B \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{AA} & \alpha_{AB} & \alpha_{AC} \\ \alpha_{BA} & \alpha_{BB} & \alpha_{BC} \\ \alpha_{CA} & \alpha_{CB} & \alpha_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

lub inaczej:

$$Z_B(i\omega) = \alpha_{B,A}(i\omega) \cdot P(t) \tag{4}$$



Rys. 2. Schemat strukturalny połączenia



Rys. 3. Schemat blokowy podatności  $\alpha_{B,A}$

Współrzędna  $Z_B(\omega)$  będzie równa zero, gdy  $\alpha_{B,A}(i\omega) = 0$ , co będzie spełnione, gdy licznik (2) jest równy zero.

$$\gamma_{B,A}(\gamma_{CC} + \beta_{CC}) - \gamma_{B,C}\gamma_{C,A} = 0 \tag{5}$$

W powyższym wzorze wszystkie występujące podatności z wyjątkiem  $\beta_{C,C}$  są dane. Można stąd dobrać takie  $\beta_{C,C}$ , aby warunek (5) został spełniony.

### 3. OPTIMALIZACJA PODATNOŚCI

Przyjęto, że kryterium oceny optymalizacji podatności będzie miało postać:

$$\min \sum |\alpha_{B_i,1}| \tag{6}$$

Wobec czego funkcja dla której będziemy szukali optimum przyjmuje postać:

$$\alpha_{B_iAOpl} = \sum_{i=1}^n \left| \gamma_{B_iA} + \frac{\gamma_{B_iC} \cdot \gamma_{CS}}{\gamma_{CC} + \beta_{CC}} \right| \quad (7)$$

Przy założeniu, że masa jest sztywno przytwierdzona do podłoża otrzymujemy:

$$\beta = -\frac{I}{m\omega^2} \quad (8)$$

i podstawiając do (7) otrzymujemy podatność  $\alpha_{B_iA}$  w funkcji masy.

Dla tej funkcji szukane będzie minimum, obliczając:

$$\frac{\partial \alpha_{B_iAOpl}}{\partial m} = 0 \quad (9)$$

#### 4. PRZYKŁAD LICZBOWY

Analizowany będzie układ dyskretno-ciągły o podatności  $\gamma$ , do którego w obszarze „c” przymocowano na stałe podukład dyskretny o podatności  $\beta$ .

Należało zapewnić wymagany i optymalny poziom drgań w punktach  $B_1, B_2, B_3$  dobierając odpowiednio masę  $m$  w punkcie „c”.

Dla rozpatrywanego przykładu podatności  $\alpha_{B_{1,A}}, \alpha_{B_{2,A}}, \alpha_{B_{3,A}}$  wyrażać będą się wzorem:

$$\alpha_{B_iA} = \gamma_{B_iA} - \frac{\gamma_{B_iC} \gamma_{CA}}{\gamma_{CC} + \beta_{CC}} \quad (10)$$

dla  $i = 1, 2, 3$ .

Przy założeniu, że masa  $m$  jest na stałe przymocowana w obszarze „c” otrzymujemy:

$$\beta_{CC} = -\frac{I}{m\omega^2} \quad (11)$$

Podstawiając (11) do (10) otrzymujemy  $\alpha_{B_iA}(m)$ :

$$\alpha_{B_iA} = \gamma_{B_iA} - \frac{\gamma_{B_iC} \gamma_{CA}}{\gamma_{CC} - \frac{I}{m\omega^2}} \quad (12)$$

Przyjęto następnie, że należy znaleźć taką masę, przy której suma podatności będzie najmniejsza. Wobec tego funkcja, której minimum będzie szukane przyjmie po przekształceniach postać:

$$\alpha_{BAOpl} = \sum_{i=1}^3 \left| \gamma_{B_iA} - \frac{\gamma_{B_iC} \gamma_{CA} m \omega^2}{\gamma_{CC} m \omega^2 - I} \right| \quad (13)$$



i stąd:

$$\alpha_{B_1Opt} = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\gamma_{B1i}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \right| \quad (14)$$

Zakładamy, że układ pracuje przy częstotści  $\omega = 90$  rad/s. Rozpisując wartości bezwzględne otrzymujemy:

$$\left| \frac{\gamma_{B1i}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \right| = \begin{cases} \frac{\gamma_{B1i}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \\ \text{dla } \frac{\gamma_{B1i}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \geq 0 \\ \frac{\gamma_{B1i}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \\ \text{dla } \frac{\gamma_{B1i}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

Po rozwiązaniu nierówności:

$$\frac{\gamma_{B1i}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \leq 0 \quad (16)$$

otrzymujemy wartości mas, przy których funkcje:

$$\alpha_{B_iA} = \frac{\gamma_{B1i}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \quad (17)$$

zmieniają znak: określa nam to przedziały; w których funkcja  $\alpha_{B_1Opt}$  ma taką samą postać. Dla naszego przykładu otrzymano następujące wartości mas:  $m_1 = -4,26$  kg,  $m_2 = 1,23$ ,  $m_3 = 1,84$ ,  $m_4 = 2,39$ .

Dla wszystkich punktów  $B_i$  i zmierzonych wartości podatności  $\gamma$  oraz dla przyjętej częstotści  $\omega$  funkcja  $\alpha_{B_1Opt}$  przyjmie postaci:

$$\alpha_{B_1Opt} = \frac{\gamma_{B1i}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} + \frac{\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} + \frac{\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \quad (18)$$

dla  $m \in (-\infty; -4,26) \cup (2,39; +\infty)$

$$\begin{aligned} \alpha_{BAOpt} = & \frac{\gamma_{B1A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} + \\ & + \left( -\frac{\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \right) + \\ & + \frac{\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \end{aligned} \quad (19)$$

dla  $m \in (4,26; 1,23 >$

$$\begin{aligned} \alpha_{BAOpt} = & -\frac{\gamma_{B1A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} + \\ & -\frac{\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} + \\ & -\frac{\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \end{aligned} \quad (20)$$

dla  $m \in (1,23; 1,84 >$

$$\begin{aligned} \alpha_{BAOpt} = & \frac{\gamma_{B1A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} + \\ & -\frac{\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} + \\ & -\frac{\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2}{\gamma_{CC}m\omega^2 - 1} \end{aligned} \quad (21)$$

dla  $m \in (1,84; 2,39)$

Spełniając warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum lokalnego obliczamy:

$$\frac{\hat{c}\alpha_{BAOpt}}{\hat{c}m} = 0 \quad (22)$$

Dla  $m \in (-\infty; -4,26 > \cup < 2,39; +\infty)$  pochodna będzie miała postać:

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{c}\alpha_{B,ABOpt}}{\hat{c}m} = & \frac{(\gamma_{CC}m\omega^2 - 1)(\gamma_{B1A}\gamma_{CC}\omega^2 - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}\omega^2) - \gamma_{CC}\omega^2(\gamma_{B1A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2)}{(\gamma_{CC}m\omega^2 - 1)^2} + \\
 & + \frac{(\gamma_{CC}m\omega^2 - 1)(\gamma_{B2A}\gamma_{CC}\omega^2 - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}\omega^2) - \gamma_{CC}\omega^2(\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2)}{(\gamma_{CC}m\omega^2 - 1)^2} + \\
 & + \frac{(\gamma_{B3A}\gamma_{CC}\omega^2 - \gamma_{B3C}\gamma_{CA}\omega^2) - \gamma_{CC}\omega^2(\gamma_{B3A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B3A} - \gamma_{B3C}\gamma_{CA}m\omega^2)}{(\gamma_{CC}m\omega^2 - 1)^2}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Warunek (22) będzie spełniony, gdy:

$$\begin{aligned}
 & (\gamma_{CC}m\omega^2 - 1)(\gamma_{B1A}\gamma_{CC}\omega^2 - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}\omega^2) + \\
 & - \gamma_{CC}\omega^2(\gamma_{B1A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B1A} - \gamma_{B1C}\gamma_{CA}m\omega^2) + \\
 & - (\gamma_{CC}m\omega^2 - 1)(\gamma_{B2A}\gamma_{CC}\omega^2 - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}\omega^2) + \\
 & - \gamma_{CC}\omega^2(\gamma_{B2A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B2A} - \gamma_{B2C}\gamma_{CA}m\omega^2) + \\
 & - (\gamma_{CC}m\omega^2 - 1)(\gamma_{B3A}\gamma_{CC}\omega^2 - \gamma_{B3C}\gamma_{CA}\omega^2) + \\
 & - \gamma_{CC}\omega^2(\gamma_{B3A}\gamma_{CC}m\omega^2 - \gamma_{B3A} - \gamma_{B3C}\gamma_{CA}m\omega^2) = 0
 \end{aligned} \tag{24}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

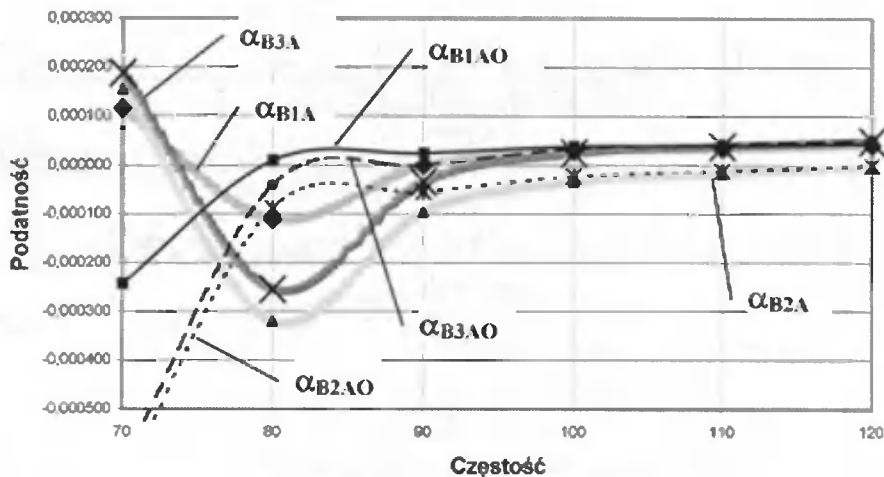
$$\begin{aligned}
 -\gamma_{B1A}\gamma_{CC}\omega^2 + \gamma_{B1C}\gamma_{CA}\omega^2 + \gamma_{CC}\gamma_{B1A}\omega^2 - \gamma_{B2A}\gamma_{CC}\omega^2 + \gamma_{B2C}\gamma_{CA}\omega^2 + \gamma_{CC}\gamma_{B2A}\omega^2 + \\
 -\gamma_{B3A}\gamma_{CC}\omega^2 + \gamma_{B3C}\gamma_{CA}\omega^2 + \gamma_{CC}\gamma_{B3A}\omega^2 = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

Równanie (25) nie jest spełnione dla żadnej wartości  $m$ , wobec czego  $m \in \emptyset$ .

Dla pozostałych przedziałów zachodzi podobna relacja, wobec czego ekstrema funkcji będą na końcach przedziałów.

Po podstawieniu wartości mas do (14) otrzymujemy dla  $m = -4.26158$   $\alpha_{ABOpt} = 0.000105$ , dla  $m = 1.842639$   $\alpha_{ABOpt} = 0.000125909$ , dla  $m = 2.399808$   $\alpha_{ABOpt} = 0.000083$ . Jako optymalną przyjęto masę  $m = 2.399808$  kg i obliczono podatności.

Wyniki przedstawiono na wykresie.



Rys. 4. Wykresy  $\alpha_{B1A}$  w funkcji częstotliwości  $\text{-----}$  przed optymalizacją,  $\text{—}$  po optymalizacji

Analizując otrzymane wyniki stwierdzono, że dla częstotliwości 90 rad/s nastąpiło zmniejszenie  $\Sigma|\alpha_{B1A}|$  z 0,00013 przed optymalizacją do 0,000079 po optymalizacji. Nastąpiło również zmniejszenie  $\Sigma|\alpha_{B1A}|$  dla sąsiadujących częstotliwości, np. dla częstotliwości 80 rad/s z 0,000687 do 0,000139.

## 5. WNIOSKI

1. Dobierając odpowiednio podatność dodatkowego układu  $\beta_{CC}$  możemy sterować drganiami w wybranych punktach konstrukcji.
2. Po optymalizacji znacznie zmniejszyła się podatność dla określonej częstotliwości w wybranych punktach konstrukcji.
3. Wydaje się celowym przeprowadzenie powyższych zadań optymalizacji innymi metodami.

## LITERATURA

- [1] Holka H., 1987. Receptances Synthesis by Means of Block diagrams. VII World Congress on IFTOM Sevilla.
- [2] Kaczorek K., 1999. Teoria sterowania i systemów. WNT Warszawa.
- [3] Niederliński A., 1971. Układy wielowymiarowe automatyki. WNT Warszawa.
- [4] Frankowski P., 2004. Optymalizacja drgań układów dyskretno-ciągłych. Jubileuszowa Międzyn. Konf. Nauk. Olsztyn.

## OPTIMIZATION OF VIBRATION OF THE SEPARATED AREA OF DISCRETE-CONTINUOUS SYSTEMS

### Summary

The paper consists of two separated problems. In the first by the structural synthesis of receptances were described conditions, which have to be done for in the selected points of the construction vibrations were equal zero. Consider construction represents discrete-continuous system. In the second part amount of points was increased to three and optimized conditions were found that vibrations in all selected points was minimized.

Keywords: vibrations, optimization of vibration, flexibility



## DETEKCJA NIECIĄGŁOŚCI W PRĘCIE NA PODSTAWIE ANALIZY PROPAGACJI FALI LAMBA

Joanna Grabowska<sup>1</sup>, Marek Krawczuk<sup>3</sup>,  
Wiesław Ostachowicz<sup>2</sup>, Magdalena Palacz<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institut Maszyn Przepływowych PAN, ul. Fiszera 14, 80-952 Gdańsk

<sup>2</sup>Akademia Morska, Wydział Nawigacyjny, Al. Zjednoczenia 3, 81-345 Gdynia

<sup>3</sup>Wydział Elektrotechniki i Automatyki, PG, ul. Narutowicza 11, 80-952 Gdańsk

Praca przedstawia opis metody wykrywania nieciągłości w prętach z wykorzystaniem zjawiska propagacji fali Lamba w ośrodku sprężystym. Do zamodelowania omawianego zagadnienia zastosowano metodę elementów spektralnych. Opracowano elementy prętowe z nieciągłościami w postaci pęknięcia zmęczeniowego, skokowej zmiany pola przekroju poprzecznego czy niejednorodności materiału, z jakiego wykonane są badane pręty, według teorii prętów elementarnej i Love'a. Przedstawiono wpływ nieciągłości na zmiany w propagującej fali Lamba.

Słowa kluczowe: elementy spektralne, detekcja uszkodzeń

### 1. WPROWADZENIE

Artykuł omawia próbę identyfikacji nieciągłości występujących w elemencie prętowym na podstawie analizy zmian propagującej fali Lamba. Wykrywanie uszkodzeń w elementach konstrukcji budowlanych lub mechanicznych w początkowej fazie ich rozwoju stanowi poważne wyzwanie dla współczesnej techniki. W ostatnich latach prowadzone są intensywne prace nad zastosowaniem metod wibracyjnych do oceny stanu konstrukcji. Do chwili obecnej opracowano wiele metod detekcji uszkodzeń opartych o analizę modalną. Techniki te są z powodzeniem stosowane do monitorowania stanu technicznego urządzenia, w którym pojawienie się uszkodzenia powoduje zmiany w kilku niższych częstościach i postaciach drgań własnych. Analiza wyższych częstości prowadzi do wyznaczenia parametrów modalnych z większymi błędami. Można temu zapobiec zwiększając stopień złożoności modelu, co prowadzi do znacznych utrudnień numerycznych związanych między innymi z czasem obliczeniowym. Wiadomo również, że małe uszkodzenia powodują niewielkie zmiany parametrów modalnych. Są to zmiany rzędu błędów pomiarowych. Dlatego też ostatnie badania prowadzone są w kierunku wykorzystania zmian w propagowaniu się fal w strukturach.

Przedmiotem niniejszej pracy jest omówienie zagadnienia propagacji fali Lamba w prętach z nieciągłościami w postaci jednostronnego, nie propagującego pęknięcia zmęczeniowego, skokowej zmiany pola powierzchni czy niejednorodności materiału, z jakiego wykonane są badane pręty. Modele prętów zbudowane są z wykorzystaniem metody elementów spektralnych, która podobna jest do metody elementów skończonych, z tym, że w metodzie elementów spektralnych elementy macierzy sztywności są

wyznaczane w dziedzinie częstotliwości. Pozwala to na dokładny opis tak zwanej sztywności dynamicznej układu.

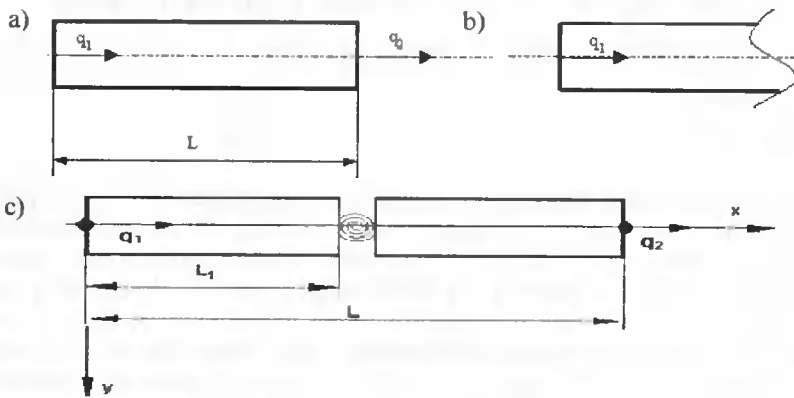
Pierwsza część artykułu omawia sposoby budowania macierzy sztywności dynamicznej spektralnych elementów prętowych według teorii elementarnej i Love'a. Następnie przedstawiona jest procedura wyznaczania podatności elementu sprężystego modelującego poprzeczne pęknięcie zmęczeniowe. Ostatnia część pracy zawiera opis proponowanej metody detekcji uszkodzeń opartej o zmiany w propagujących sygnałach wraz z podsumowaniem i wnioskami.

## 2. MODELE PRĘTÓW

Rozdział ten zawiera opis opracowanych modeli elementów spektralnych wg teorii elementarnej i Love'a.

### 2.1. Teoria elementarna

Model spektralnego elementu skończonego opartego na teorii elementarnej przedstawiony jest na rysunku 1a. Element ma długość  $L$  i stały przekrój  $A$ . Element posiada dwa węzły, po jednym stopniu swobody w każdym węźle (przemieszczenia wzdłużne).



Rys. 1. Model spektralnego elementu skończonego dla teorii elementarnej i teorii Love'a – a), model elementu throw-off – b), model elementu z nieciągłością – c)

Teoria elementarna zakłada, że odkształcenia wzdłuż osi neutralnej pręta są stałe we wszystkich punktach przekroju. Odkształcenia poprzeczne są niewielkie i można ich nie uwzględniać. Równanie różniczkowe opisujące zagadnienie dla pręta wg teorii elementarnej przedstawia się następująco:

$$EA \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Warunki brzegowe przyjmują postać:

$$u_0; \quad Q_u = EA \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (2)$$



gdzie:  $u_0$  to średnie przemieszczenia osiowe,  $E$  to moduł Younga,  $A$  jest polem przekroju poprzecznego pręta, a  $\rho$  oznacza gęstość materiału.

Element spektralny opracowany zgodnie z teorią elementarną opisany jest przez Doyle'a [1]. Macierze sztywności dynamicznej dla dwuwęzłowego elementu spektralnego  $K_{df}$  oraz elementu throw-off  $K_{dt}$  można przedstawić w następującej formie:

$$K_{df} = \frac{ikEA}{(1 - e^{-2ikl})} \begin{bmatrix} 1 + e^{-2ikl} & -2e^{-ikl} \\ -2e^{-ikl} & 1 + e^{-2ikl} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$K_{dt} = ikEA$$

gdzie:  $k$  jest liczbą falową obliczaną w funkcji częstości  $\omega$  oraz własności materiałowych  $\rho$ ,  $E$  wyznaczamy z zależności:

$$k = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (4)$$

## 2.2. Teoria Love'a

Model spektralnego elementu skończonego opartego na teorii Love'a jest przedstawiony na rysunku 1. Element ma długość  $L$  i stały przekrój poprzeczny  $A$ . Posiada dwa węzły, w każdym węźle jeden stopień swobody – przemieszczenia wzdłużne. Modyfikacja teorii Love'a oparta jest na założeniu, że każdy punkt materialny pręta ma prędkość w kierunku poprzecznym. Oznacza to, że energia kinetyczna zależy od dodatkowych wielkości, niemniej jednak energia naprężeń jest taka sama jak dla teorii elementarnej. Pole przemieszczeń jest więc identyczne, a równanie różniczkowe charakteryzujące zagadnienie jest w niewielkim stopniu zmodyfikowane i może zostać wyrażone w następujący sposób [1]:

$$EA \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + v^2 \rho J \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) - \rho A \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

przy czym warunki brzegowe przyjmują postać:

$$u_0; \quad Q_n = EA \frac{\partial u_0}{\partial x} + v^2 \rho J \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad (6)$$

gdzie:  $J$  oznacza biegunowy moment bezwładności pola przekroju poprzecznego pręta, a  $\nu$  to współczynnik Poissona materiału.

Liczbę falową dla tego modelu określa zależność:

$$k = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EA - v^2 \rho J \omega^2}} \quad (7)$$

Należy zauważyć, że liczba falowa  $k$ , w przeciwieństwie do teorii elementarnej, może przyjmować postać czysto urojoną. W takim przypadku cała energia wejściowa zostanie wykorzystana przez ruch poprzeczny.

### 2.2.1. Prętowy element spektralny wg teorii Love'a

Model elementu przedstawiony jest na rysunku 1a. Rozwiązanie równania przyjmuje się jak w przypadku teorii elementarnej:

$$\hat{u}_0 = A_0 e^{-ikx} + B_0 e^{-ik(L-x)} \quad (8)$$

Stałe  $A_0$  i  $B_0$  wyznacza się z warunków brzegowych w węzłach:

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(x=0) &= \hat{q}_1 \\ \hat{u}_0(x=L) &= \hat{q}_2 \end{aligned} \quad (9)$$

co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-ikL} \\ e^{-ikL} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Siły wewnątrz elementu mogą być wyrażone za pomocą równania (6). Siły węzłowe zaś wyznacza się stosując warunki węzłowe:

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 &= \hat{Q}_n(x=0) \\ \hat{F}_2 &= \hat{Q}_n(x=L) \end{aligned} \quad (11)$$

Biorąc pod uwagę wyrażenia opisujące przemieszczenia wzdłużne oraz siły węzłowe otrzymuje się następujące wyrażenie:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik(-EA + \rho v^2 J \omega^2) & ik(-EA + \rho v^2 J \omega^2) p_1 \\ ik(EA - \rho v^2 J \omega^2) p_1 & k(EA - \rho v^2 J \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Wykorzystując zależności pozwalające na wyrażenie stałych  $A_0$  i  $B_0$  w funkcji przemieszczeń węzłowych można obliczyć zależność pomiędzy siłami węzłowymi i przemieszczeniami węzłowymi. Wyznaczona w ten sposób macierz jest kwadratową, symetryczną macierzą określającą dynamiczną macierz sztywności  $K_{eff}$  elementu spektralnego opartego na teorii Love'a.

### 2.2.2. Spektralny element throw-off dla teorii Love'a

Dla elementu throw-off (rys. 1b), opartego na teorii Love'a, przemieszczenia wzdłużne ogólnie mogą być zapisane w podobny sposób, jak dla teorii elementarnej:

$$\hat{u}_0 = A_0 e^{-ikx} \quad (13)$$

Stałą  $A$  można znaleźć z następującego warunku węzłowego:

$$\hat{u}_0(x=0) = \hat{q}_1 \quad (14)$$

co prowadzi do następującego równania:

$$A_0 = \hat{q}_1 \quad (15)$$

Siły wewnętrzne elementu można wyrazić przy użyciu formuły z równania (6). Siły węzłowe można znaleźć z następującego warunku węzłowego:

$$\hat{F}_1 = \hat{Q}_0(x=0) \quad (16)$$

Biorąc pod uwagę wzory na przemieszczenia osiowe i zwężenie boczne siły węzłowe można wyrazić w następujący sposób:

$$\hat{F}_1 = \left[ ik \left( -EA + \rho v^2 J \omega^2 \right) \right] \hat{q}_1 \quad (17)$$

Zależność w nawiasie kwadratowym w równaniu (17) opisuje dynamiczną macierz sztywności  $K_{df}$  spektralnego elementu throw-off opartego na teorii Love'a.

### 2.2.3. Spektralny element prętowy z poprzecznym pęknięciem zmęczeniowym dla teorii Love'a

Wyprowadzenie macierzy sztywności dynamicznej dla elementu zbudowanego w oparciu o teorię elementarną przedstawione jest w [3]. Spektralny element prętowy z poprzecznym pęknięciem zmęczeniowym oparty na teorii Love'a został przedstawiony na rysunku 1c. Element posiada dwa węzły, w każdym węźle po jednym stopniu swobody. Przemieszczenia wzdłużne  $u_0$  dla lewej i prawej części pręta elementu:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{0,1}(x) &= A_1 e^{-ikx} + B_1 e^{-ik(L_1-x)} & \text{dla } x \in (0, L_1) \\ \hat{u}_{0,2}(x) &= A_2 e^{-ik(L_1+x)} + B_2 e^{-ik[L_1-(L_1+x)]} & \text{dla } x \in (0, L-L_1) \end{aligned} \quad (18)$$

przy czym liczba falowa  $k$  opisana jest równaniem (7).

Stałe  $A_1, B_1, A_2$  i  $B_2$  można wyznaczyć stosując następujące warunki brzegowe:

– na lewym końcu elementu: ( $x = 0$ ):

$$\hat{u}_{0,1}(0) = \hat{q}_1, \quad (19)$$

– w miejscu pęknięcia ( $x = L_1$  dla  $\hat{u}_{0,1}(x)$  i  $x = 0$  dla  $\hat{u}_{0,2}(x)$ ):

$$\hat{u}_{0,2}(0) - \hat{u}_{0,1}(L_1) = \Theta_w \frac{\partial \hat{u}_{0,1}(L_1)}{\partial x}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{0,1}(L_1)}{\partial x} = \frac{\partial \hat{u}_{0,2}(0)}{\partial x}, \quad (21)$$

gdzie  $\Theta_w$  jest podatnością w kierunku wzdłużnym, wyznaczaną zgodnie z prawami mechaniki pęknięcia (patrz rozdział 3) zależność (20) określa skokową zmianę przemieszczeń wzdłużnych, natomiast zależność (21) wyraża zgodność sił osiowych.

– prawy koniec elementu ( $x = L-L_1$ ):

$$\hat{u}_{0,2}(L-L_1) = \hat{q}_2, \quad (22)$$

przy czym  $\hat{q}_1$  i  $\hat{q}_2$  to przemieszczenia węzłowe.

Wykorzystując funkcje aproksymujące przemieszczenia spektralne w prawej i lewej części elementu oraz uwzględniając warunki brzegowe można wyznaczyć stałe  $A_1, B_1, A_2$  i  $B_2$  jako funkcje spektralnych przemieszczeń węzłowych:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = W^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

przy czym:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & e^{-ik_w L_1} & 0 & 0 \\ (-1 + ik_w \theta_w) e^{-ik_w L_1} & (-1 - ik_w \theta_w) & e^{-ik_w L_1} & e^{-ik_w(L-L_1)} \\ -ik_w e^{-ik_w L_1} & ik_w & ik_w e^{-ik_w L_1} & -ik_w e^{-ik_w(L-L_1)} \\ 0 & 0 & e^{-ik_w L} & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Węzłowe siły osiowe wyznacza się z następujących zależności:

– w lewym węźle ( $x = 0$ ):

$$\hat{F}_1 = EA \frac{\hat{c}u_{0,1}(0)}{\hat{c}x} - v^2 \rho \cdot J \cdot \omega^2 \frac{\hat{c}u_{0,1}(0)}{\hat{c}x}, \quad (25)$$

– w prawym węźle ( $x = L-L_1$ ):

$$F_2 = EA \frac{\hat{c}u_{0,2}(L-L_1)}{\hat{c}x} - v^2 \rho \cdot J \cdot \omega^2 \frac{\hat{c}u_{0,2}(L-L_1)}{\hat{c}x} \quad (26)$$

Zależność pomiędzy siłami węzłowymi a przemieszczeniami węzłowymi można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{bmatrix} = K_w \cdot \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

gdzie:  $K_w$  jest macierzą sztywności dynamicznej daną związkiem:

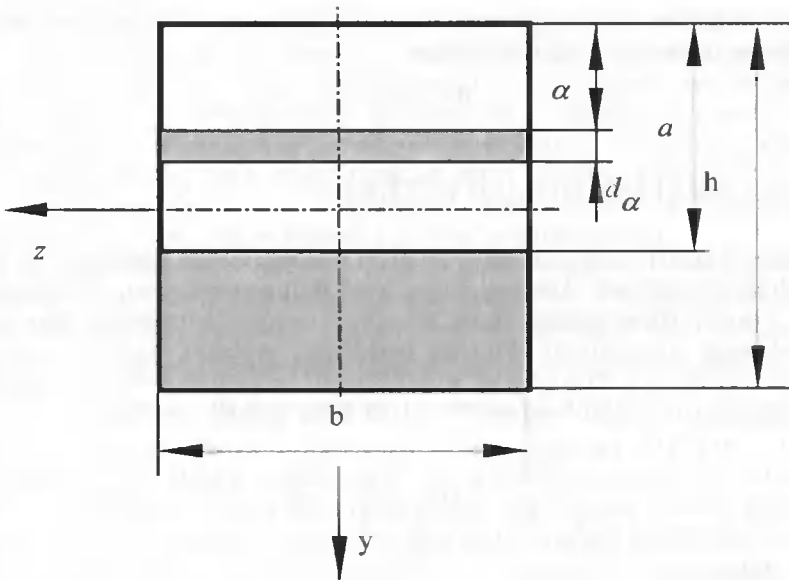
$$K_w = (EA - v^2 \rho \cdot J \cdot \omega^2) \cdot \begin{bmatrix} ik_w & -ik_w e^{-ik_w L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ik_w e^{-ik_w L} & ik_w \end{bmatrix} \cdot W^{-1} \quad (28)$$

### 3. PODATNOŚĆ W MIEJSCU PEKNIĘCIA

Podatność w miejscu pęknięcia dla skończonego spektralnego elementu prętowego wyznacza się zgodnie z teorią Castigliano:

$$c_{ij} = \frac{\hat{c}^2 U}{\hat{c}P_i \hat{c}P_j} \quad (29)$$

gdzie  $U$  oznacza energię odkształcenia sprężystego elementu w którym pojawiło się pęknięcie.  $P$  oznacza niezależne siły węzłowe działające w elemencie.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny pręta w miejscu pęknięcia

Zakładając, że pęknięcie nie powoduje sprzężeń między przemieszczeniami poprzecznymi i wzdłużnymi energię odkształcenia sprężystego można zapisać jako:

$$U = \frac{1}{E} \int_A (K_I^2) dA, \tag{30}$$

gdzie  $A$  oznacza pole powierzchni pęknięcia,  $K_I$  jest współczynnikiem intensywności naprężeń wywołanych siłami osiowymi dla pierwszego przypadku powstawania pęknięć. Współczynniki te wyznacza się następująco:

$$K_I = \frac{P}{A} \sqrt{\pi a} \cdot f_w \left( \frac{a}{h} \right) \tag{31}$$

gdzie  $P$  są siłami odpowiednio osiowymi i zginającymi działającymi na układ,  $a$  i  $h$  są pokazane na rysunku 2,  $f$  jest funkcją korygującą przyjętą w następującej postaci:

$$f_w \left( \frac{a}{h} \right) = f_p \left( \frac{a}{h} \right) = \sqrt{\frac{\tan(\pi a / 2h)}{\pi a / 2h}} \cdot \frac{0,752 + 2,02(a/h) + 0,37[1 - \sin(\pi a / 2h)]^3}{\cos(\pi a / 2h)} \tag{32}$$

Po prostych przekształceniach podatności elementu sprężystego modelującego pęknięcie poprzeczne w elemencie wyraża się w następujący sposób:

$$c = \frac{2}{Eb} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} f_w^2(\bar{\alpha}) d\bar{a}; \tag{33}$$

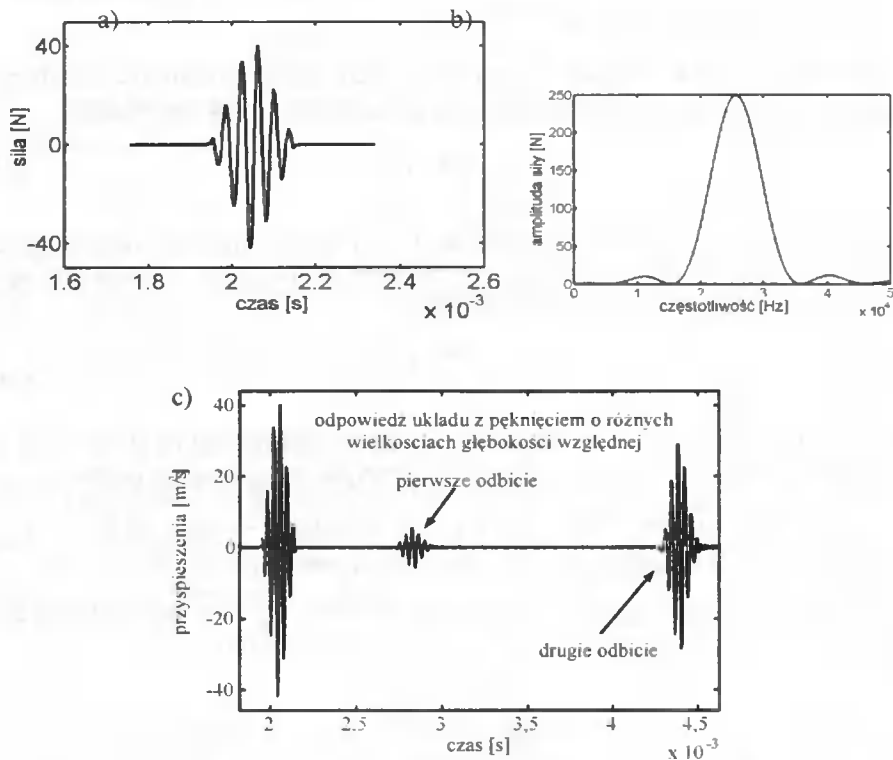
gdzie  $\bar{a} = \frac{a}{h}$ ,  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{h}$  – patrz rysunek 2.

W postaci bezwymiarowej podatność w miejscu pęknięcia wyznacza się korzystając z następujących formuł matematycznych:

$$\theta = EA \cdot c \quad (34)$$

#### 4. WYNIKI ANALIZY NUMERYCZNEJ

Obliczenia numeryczne wykonano dla pręta wspornikowego zawierającego następujące rodzaje nieciągłości: skokową zmianę przekroju poprzecznego, niewielkie, powstałe w procesie wytwarzania różnice własności fizycznych materiału oraz jednostronne pęknięcie zmęczeniowe. Przyjęto następujące wymiary geometryczne pręta i lokalizację nieciągłości: długość 6 m, wysokość 0,02 m, szerokość 0,02 m. Własności fizyczne materiału to: moduł Younga  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa, gęstość  $\rho = 7850$  kg·m<sup>-3</sup>, liczba Poissona  $\nu = 0,3$ . Dla każdego przykładu nieciągłość zlokalizowano w odległości 2/3 długości od utwierdzonego końca pręta. Do modelowania pręta wykorzystano spektralny element prętowy opracowany według teorii Love'a. Koniec swobodny pobudzano sygnałem trójkątnym modulowanym sygnałem sinusoidalnym o przebiegu zilustrowanym na rysunku 3a.



Rys. 3. Sygnał wymuszający – a), FFT sygnału wymuszającego – b), przykładowa odpowiedź układu – c)

Przykładową odpowiedź układu wyznaczoną dla pręta z nieciągłością przedstawiono na rysunku 3c. Można zauważyć pojawienie się dodatkowego odbicia od tej nieciągłości. Na podstawie przeprowadzonej analizy można powiedzieć, że dla różnych rodzajów nieciągłości kolejne odbicia pojawiają się przesunięte w czasie, zwłaszcza w przypadku tych związanych ze zmianą własności fizycznych materiału. Zjawisko to spowodowane jest inną prędkością propagacji fali w ośrodku. Z otrzymanych rezultatów wynika również, że między wymuszeniem a poszczególnymi odbiciami pojawiają się przesunięcia fazowe, inne w każdym z przypadków nieciągłości.

Z wyżej wymienionych przyczyn podjęto próbę identyfikacji rodzaju nieciągłości na podstawie zmian wskaźnika autokorelacji informującego o występowaniu przesunięcia fazowego między sygnałami. Współczynnik autokorelacji, który jest zależnością pomiędzy sygnałem odniesienia lub wymuszeniem  $x_{ref}$  a sygnałem odbitym od nieciągłości lub utwierdzenia, dla przesunięcia czasowego lub opóźnienia  $\tau$  dany jest związkiem:

$$R(\tau) = \sum_{t=1}^N x_{ref}(t)x(t + \tau), \quad (35)$$

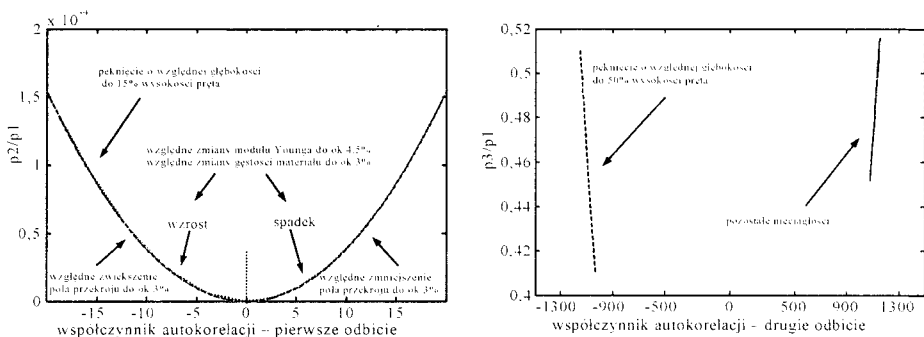
gdzie  $N$  jest liczbą próbek. Wartości dodatnie tego współczynnika oznaczają zgodność w fazie badanych sygnałów, natomiast ujemne – przesunięcie fazowe między badanymi sygnałami.

Drugą analizowaną wielkością była chwilowa moc sygnału dla dwóch kolejnych odbić, która jest proporcjonalna do kwadratu wartości chwilowych lub wartości bezwzględnych sygnału. Moc sygnału w dziedzinie czasu zapisuje się:

$$x_{pwr} = \sum_{n=1}^N x^2(n) = \sum_{n=1}^N |x(n)|^2 \quad (36)$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę próbek.

Wyniki analizy wpływu rodzaju nieciągłości na przebieg zmian współczynnika autokorelacji pokazane są na wykresach z rysunku 4. Badania przeprowadzono dla prętów opisanych w rozdziale 2. W pierwszej kolejności analizowano nieciągłość w postaci jednostronnego pęknięcia zmęczeniowego. Badano wpływ zmian względnej głębokości pęknięcia (od 0.5% do 50% wysokości pręta) na przebieg zmian współczynnika autokorelacji. Z przeprowadzonej analizy wynika, że współczynnik autokorelacji przyjmował wartości ujemne dla obu badanych odbić. Oznacza to, że wystąpiło przesunięcie fazowe między wymuszeniem a odbiciem od nieciągłości.



Rys. 4. Stosunek mocy sygnału odbitego od nieciągłości do mocy wymuszenia w funkcji współczynnika autokorelacji

Kolejne obliczenia wykonano dla nieciągłości w postaci skokowej zmiany pola przekroju poprzecznego pręta w zakresie od 50% do 150% wielkości początkowej. Na podstawie uzyskanych wyników analizy zauważono, że w przypadku zwiększania pola powierzchni przekroju poprzecznego pręta współczynnik autokorelacji dla pierwszego odbicia przyjmował wartości ujemne, natomiast dla zmniejszania – wartości dodatnie. Natomiast współczynnik obliczony dla drugiego odbicia przyjmował wartości dodatnie zarówno w przypadku zwiększania, jak i zmniejszania pola przekroju poprzecznego.

Ostatnią serię obliczeń przeprowadzono dla nieciągłości w postaci różnych własności fizycznych materiału. Zmieniano moduł Younga o  $\pm 4,5\%$  wartości początkowej albo gęstość materiału o  $\pm 3\%$  wartości początkowej. W przypadku zwiększania tych wielkości współczynnik autokorelacji dla pierwszego odbicia przyjmował wartości ujemne, dla zmniejszania – dodatnie. Współczynnik autokorelacji dla drugiego z odbić był dodatni we wszystkich przypadkach.

Z rysunków wynika, że na podstawie przeprowadzonej analizy sygnału można odróżnić jedynie pęknięcie zmęczeniowe od innych rodzajów nieciągłości. W pozostałych przypadkach możliwe jest tylko określenie wpływu nieciągłości na sztywność układu. Na podstawie analizy pojedynczych odbić sygnału nie można jednoznacznie zidentyfikować rodzaju nieciągłości.

## LITERATURA

- [1] Doyle J.F., 1997. Wave propagation in structures. Springer-Verlag New York, Inc.
- [2] Doyle J.F., 1988. A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation. International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis 3, 1-5.
- [3] Palacz M., Krawczuk M., 2002. Analysis of Longitudinal Wave Propagation in a Cracked Rod by the Spectral Element Method. Computers and Structures 80, 1809-1816.



## DISCONTINUITIES IDENTIFICATION IN RODS WITH THE ANALYSIS OF LAMB WAVE PROPAGATION

### Summary

The article presents a description of damage identification method in rods, which is based on the analysis of changes that appear in propagating Lamb waves. For proper modelling of the problem spectral element method was used. New spectral rod element with discontinuities, based on the elementary and Love theories is developed. The discontinuities analysed are the fatigue open and not propagating crack, the change in cross section area and material discontinuities. The influence of discontinuities on the Lamb wave propagation process is analysed.

Keywords: spectral elements, damage detection



## BADANIA DOŚWIADCZALNE ROZPRĘŻANYCH BELEK ZESPOLONYCH STAŁOWO-BETONOWYCH

Elżbieta Grochowska, Jakub Marcinowski, Antoni Matysiak

Zakład Konstrukcji Budowlanych  
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska  
Uniwersytet Zielonogórski  
ul. Z. Szafrana 2, 65-616 Zielona Góra

Artykuł dotyczy konstrukcji zespolonych stalowo-betonowych. W celu podniesienia nośności dźwigara zespolonego, rozprężono go w górnej jego części (w płycie betonowej), a następnie stan ten „zamrożono” umieszczając w tej strefie pręt ze stali o wysokiej wytrzymałości. Aby potwierdzić słuszności założeń teoretycznych, na podstawie których wyprowadzono wzory do obliczania belek zespolonych rozprężanych, przeprowadzono badania doświadczalne. Wyniki tych badań zamieszczono w prezentowanej pracy.

Słowa kluczowe: stal, beton, rozprężanie, badania doświadczalne

### 1. KONCEPCJA ROZPRĘŻANIA

Koncepcję sprężania konstrukcji stalowych, przedstawioną między innymi w pracach [1,2] przejęto od sprężania konstrukcji betonowych [3]. Efekty sprężania konstrukcji stalowych są inne niż żelbetowych, gdyż stal ma cechy wytrzymałościowe takie same przy ściskaniu, jak i rozciąganiu. Rozwój konstrukcji stalowych sprężanych nastąpił w latach pięćdziesiątych ubiegłego stulecia. W latach sześćdziesiątych zrealizowano wiele obiektów inżynierskich tego typu.

Sposób rozprężania konstrukcji stalowych został zgłoszony do opatentowania w 1966 r. i autor wynalazku uzyskał patent [4]. Ściśnięte pręty oparte na elementach kotwiących połączonych z konstrukcją oddziałują na tę konstrukcję (por. [5]) siłą rozciągającą. Pierwsze badania i analizy dotyczące zachowania się konstrukcji opisano w pracy [5]. W następnym okresie powstało wiele prac dotyczących rozprężanych konstrukcji stalowych [6,7].

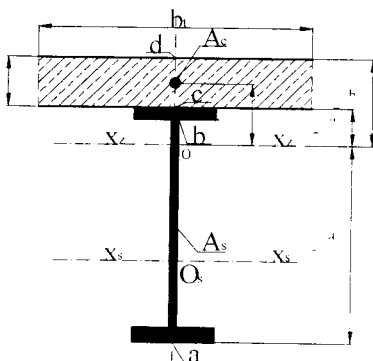
W 1978 r. ukazała się pierwsza publikacja dotycząca rozprężania konstrukcji żelbetowych sprężano-rozprężanych [8], a w 1986 r. przedstawiono w referacie [9] propozycję rozprężania konstrukcji zespolonych.

Rozprężanie konstrukcji zespolonych stalowo-betonowych ma na celu zmniejszenie naprężeń w ściskanej strefie betonu, w poszczególnych fazach obciążenia konstrukcji. W niektórych etapach obciążenia, zwłaszcza przed obciążeniem eksploatacyjnym, można dopuścić podczas rozprężania, do powstania w betonie naprężeń rozciągających, mniejszych od wytrzymałości obliczeniowej betonu na rozciąganie. Efekt rozprężania zależy od zmniejszenia lub nawet całkowitego wyeliminowania naprężeń ściskających w betonie, przed oddaniem obiektu do eksploatacji.

Koncepcja rozprężania polega na wprowadzeniu do przekroju siły rozciągającej (np. siłownikiem śrubowym) i utrwaleniu jej („zamrożeniu”) poprzez umieszczenie w strefie rozciąganej prętów stalowych, które przyjmą funkcję rozporu i w efekcie będą ściskane.

## 2. PODSTAWY OBLICZENIOWE

W konstrukcjach zespolonych stalowo-betonowych oraz w konstrukcjach rozprężanych muszą być spełnione warunki wytrzymałościowe we wszystkich etapach obciążenia. Na rysunku 1 przedstawiono przekrój belki zespolonej stalowo-betonowej.



Rys. 1. Przekrój belki zespolonej stalowo-betonowej

Naprężenia wywołane obciążeniem zewnętrznym w konstrukcji zespolonej, odpowiednio w górnych włóknach betonu, górnych i dolnych włóknach belki stalowej wyznacza się ze wzorów:

$$\sigma_{zh} = -\frac{M_p e_h}{I_z n} \leq R_b, \quad (1a)$$

$$\sigma_{zng} = -\frac{M_p e_g}{I_z} \leq f_{td}, \quad (1b)$$

$$\sigma_{znd} = \frac{M_p e_d}{I_z} \leq f_{td}. \quad (1c)$$

Naprężenia w pręcie sprawdza się wzorem:

$$\sigma_c = -\frac{S}{A_c} \leq f_{dc}. \quad (2)$$

Naprężenia w konstrukcji zespolonej rozprężanej w górnych włóknach betonu, górnych i dolnych włóknach belki stalowej wyznacza się z następujących wzorów:

$$\sigma_{zh} = \frac{S}{A_c n} + \frac{(S e - M_p) e_h}{I_z n} \leq R_{bz}, \quad (3a)$$

$$\sigma_{zsg} = \frac{S}{A_c} + \frac{(S e - M_p) e_g}{I_z} \leq f_d, \quad (3b)$$

$$\sigma_{znd} = \frac{S}{A_c} - \frac{(S e - M_p) e_d}{I_z} \leq f_d, \quad (3c)$$

gdzie:

- $M_p$  – moment zginający wywołany obciążeniem zewnętrznym,
- $I_z$  – sprowadzony moment bezwładności przekroju zespolonego,
- $n = E_s / E_b$  – stosunek modułów sprężystości stali i betonu,
- $e, e_h, e_g, e_d$  – odległości według rysunku 1,
- $S$  – wartość siły rozprężającej,
- $A_c$  – pole przekroju pręta rozprężającego,
- $f_d$  – wytrzymałość obliczeniowa stali elementu podstawowego (belki),
- $f_{dk}$  – wytrzymałość obliczeniowa stali elementu rozprężającego,
- $R_b$  – wytrzymałość obliczeniowa betonu na ściskanie,
- $R_{bz}$  – wytrzymałość obliczeniowa betonu na rozciąganie.

### 3. BADANIA DOŚWIADCZALNE

#### 3.1. Opis badanej konstrukcji

Zaprojektowano i wykonano model belki zespolonej swobodnie podpartej o długości 2700 mm. Konstrukcję stalową wykonano z dwuteownika walcowanego I 160, ze stali St3S. Płytę betonową grubości 80 mm zazbrojono prętami ze stali 34GS o średnicy 8 mm, i wykonano z betonu klasy B15. Strzemiona wykonano ze stali St3S, z prętów o średnicy 4,5 mm. Elementy zapewniające zespolenie płyty z dwuteownikiem wykonano ze śrub o średnicy 20 mm. W płycie betonowej został umieszczony pręt rozprężający o średnicy 24 mm ze stali o wysokiej wytrzymałości. Pręt rozprężający owinięto czterokrotnie taśmą izolacyjną w celu zabezpieczenia go przed przyczepnością do betonu i umieszczono w płycie przed betonowaniem. Szczegóły modelu pokazano na rysunku 2.

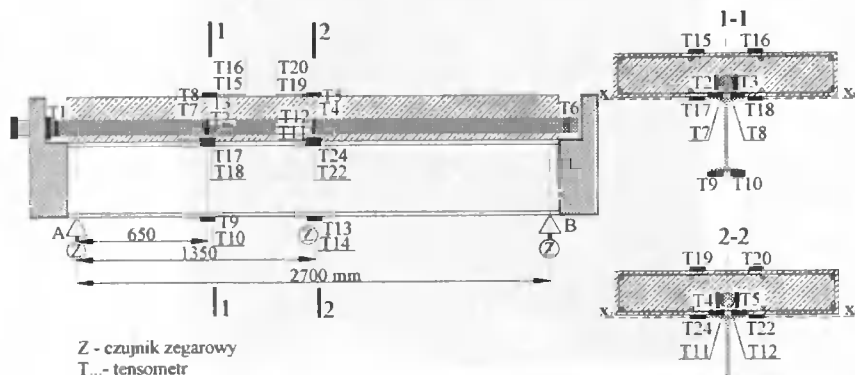
Rozprężanie konstrukcji realizowano za pomocą urządzenia śrubowego, które wykonano z śruby M30 kl. 8.8, z nakrętką na stałe zamocowaną do konstrukcji oporowej (rys. 3). Urządzenie śrubowe zamocowano do jednego końca belki stalowej. Do drugiego końca zamocowano blok oporowy (rys. 4). Ściskanie pręta rozprężającego następowało w wyniku wkręcania śruby w stały element belki (rys. 3. 5).



o rezystancji  $R = 105,4 \Omega$ , a w betonie za pomocą tensometrów elektrooporowych typu Pb Kn 30-130 o rezystancji  $R = 133,7 \Omega$ . Współczynnik czułości odkształceniowej tensometrów przyklejonych do stali wynosił  $k = 2,21$ , zaś tensometrów przyklejonych do betonu –  $k = 2,69$ . Numery naklejonych tensometrów na pręcie rozprężającym, belce stalowej i płycie betonowej pokazano na rysunku 5.

Zestaw badawczy składał się z mostka tensometrycznego 3-kanalowego UM 131 oraz skrzynek rozdzielczych 10-kanalowych AG 111.

Przemieszczenia pionowe (ugięcia) mierzono czujnikami zegarowymi umieszczonymi pod belką, w środku rozpiętości oraz pod podporami A i B (rys. 5).



Rys. 5. Widok i przekroje badanej konstrukcji wraz z rozmieszczeniem tensometrów elektrooporowych i czujników zegarowych

### 3.2. Przebieg badań doświadczalnych

Przeprowadzono kilka serii pomiarowych przy obciążaniu, odciążaniu, rozprężaniu i odprężaniu konstrukcji zespolonej stalowo-betonowej. Cykle badań belki obejmowały:

- obciążenie belki siłami zewnętrznymi i wykonanie odczytów,
- rozprężenie konstrukcji i wykonanie odczytów,
- rozprężanie belki zespolonej jednoczesnym obciążaniem i dokonywanie odczytów.

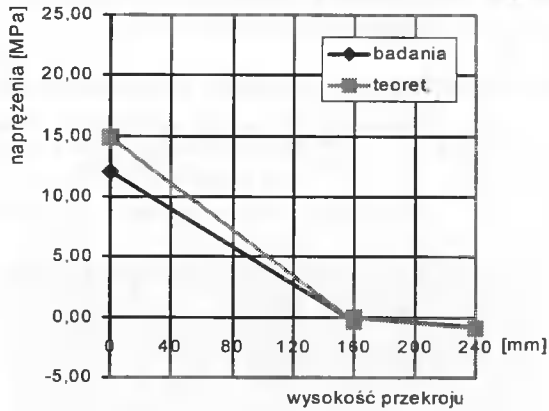
Model wykonano z następujących materiałów konstrukcyjnych:

- beton B15:  $R_b = 8,1 \text{ MPa}$ ,  $R_{bz} = 0,75 \text{ MPa}$ ,  $E_b = 23,1 \text{ GPa}$ ,
- stal I 160: St3S,  $f_d = 215 \text{ MPa}$ ,  $E_s = 205 \text{ GPa}$ ,  $n = 8,87$ ,  $I_{160}$ ,  $A_s = 22,8 \text{ cm}^2$ ,  $I_s = 935 \text{ cm}^4$ ,
- charakterystyki przekroju zespolonego (zastępczego):  $A_z = 62,89 \text{ cm}^2$ ,  $I_z = 3189,54 \text{ cm}^4$ ,
- stal rozprężająca: pręt o średnicy  $\phi 24 \text{ mm}$ , pole przekroju poprzecznego  $A_c = 4,52 \text{ cm}^2$ , wytrzymałość na rozciąganie  $R_m = 858 \text{ MPa}$ .

### 3.3. Cykl rozprężania konstrukcji z obciążaniem

Badania realizowano w następujących etapach:

- Etap I – rozprężenie konstrukcji zespolonej siłą  $S = 36,89 \text{ kN}$ .

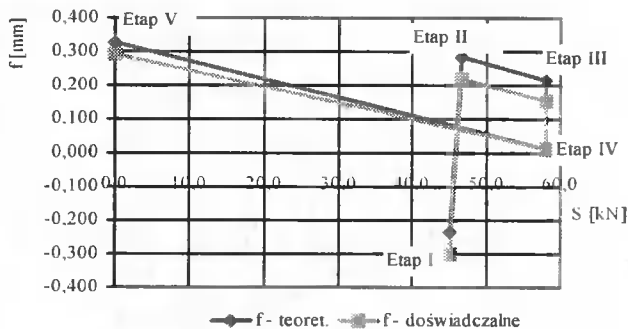


Rys. 9. Rozkład naprężeń w przekroju 2-2 (końcowy etap)

W tabeli 2 zestawiono wartości ugięć w kolejnych etapach rozprężania i obciążania konstrukcji obliczone na podstawie założeń teoretycznych i odczytane z czujników zegarowych, w środku rozpiętości konstrukcji. Na rysunku 10 przedstawiono graficznie wzrosty i spadki ugięć powstałe w wyniku przeprowadzonych operacji.

Tabela 2. Zestawienie ugięć

Etap	S [kN]	Ugięcia $f$ [mm]		Porównanie [%]
		teoret.	doświadcz.	
I	36.89	-0.236	-0.300	27,12
II	38.78	0.284	0.220	22,54
III	49.26	0.217	0.154	29,03
IV	48.64	0.013	0.010	23,08
V	0.00	0.325	0.292	10,15

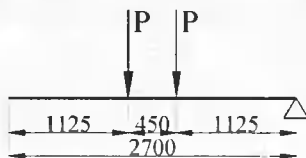
Rys. 10. Zależność ugięcia  $f$  od siły rozprężającej  $S$



- Etap II – obciążenie rozprężonej konstrukcji siłami skupionymi  $P = 4,59$  kN, zgodnie z rysunkami 6 i 7. Wystąpił wzrost siły rozprężającej do wartości  $S = 38,78$  kN.
- Etap III – doprężenie konstrukcji; wzrost siły rozprężającej do wartości  $S = 49,26$  kN.
- Etap IV – częściowe odciążenie konstrukcji, pozostało obciążenie o wartości  $P = 2,70$  kN w postaci dwóch sił skupionych (rys. 7); siła rozprężająca zmalała do wartości  $S = 48,64$  kN.
- Etap V – odprężenie konstrukcji,  $S = 0$  kN,  $P = 2,70$  kN.



Rys. 6. Stanowisko badawcze. Belka obciążona ciężarem zewnętrznym



Rys. 7. Schemat statyczny obciążenia modelu belki

W tabeli 1 zestawiono naprężenia otrzymane podczas badań doświadczalnych i wyznaczone zgodnie z zasadami teoretycznymi oraz porównanie procentowe wyników.

Badania rozpoczęto od rozprężenia konstrukcji zespolonej. Konstrukcję rozprężono w etapie I siłą  $S = 36,89$  kN.

W etapie II, po uprzednim rozprężeniu konstrukcji obciążono ją zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunkach 6 i 7 siłami skupionymi o wartości  $P = 4,59$  kN. Siła rozprężająca wzrosła do wartości  $S = 38,78$  kN. Zatem przyrost siły rozprężającej wyniósł  $\Delta S_d = S_{II} - S_I = 38,78 - 36,89 = 1,89$  kN, a przyrost siły rozprężającej wyznaczony zgodnie z zasadami teoretycznymi był równy  $\Delta S_t = 1,79$  kN.

W kolejnym etapie doprężono konstrukcję; siła rozprężająca wzrosła do wartości  $S = 49,26$  kN.

W etapie IV usunięto część obciążenia zewnętrznego, a siła rozprężająca nieznacznie zmalała do wartości  $S = 48,64$  kN ( $\Delta S = S_{III} - S_{IV} = 49,26 - 48,64 = 0,62$  kN).

W etapie V zwolniono całkowicie rozprężanie (czujniki wskazywały zerową wartość siły rozprężającej), a w konstrukcji pozostały naprężenia od obciążenia zewnętrznego.

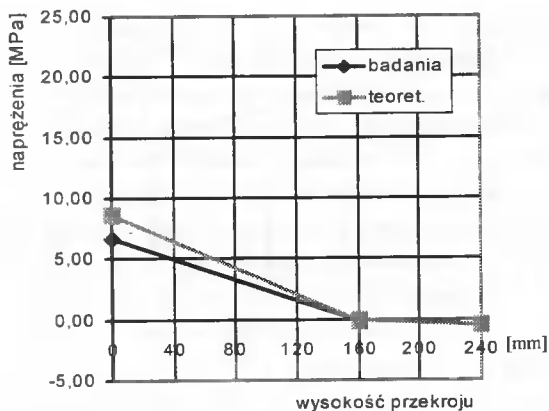
Poziomy naprężen podane w tabeli 1 przedstawiono na rysunku 1. Naprężenia wyznaczono w przekrojach 1-1 i 2-2 oznaczonych na rysunku 5.

Tabela 1. Porównanie naprężen obliczonych teoretycznie i uzyskanych z badań doświadczalnych

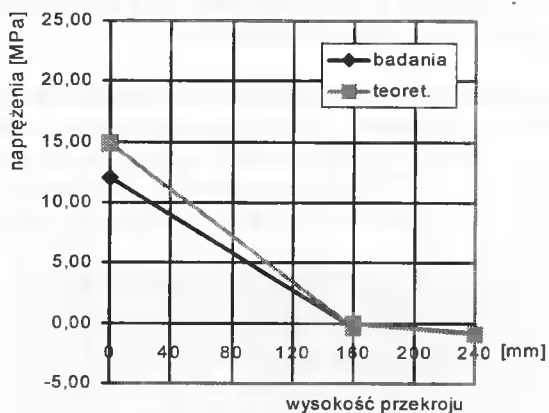
Etap	Poziom naprężen	Naprężenia [MPa]				Porównanie %	
		Przekrój 1-1		Przekrój 2-2		1-1	2-2
		d	t	d	t		
I S = 36.89 kN	a	-2.13	-2.28	-2.32	-2.28	6.58	1.75
	b	6.86	6.05	6.77	6.05	10,51	11.90
	c	0.65	0.68	0.75	0.68	4.41	10,29
	d	1.20	1.15	1.22	1.15	4,35	7.00
II S = 38.78 kN	a	11.13	12,23	20.41	22.87	9.00	10.76
	b	7.42	6.03	6.49	5.79	23,05	12.09
	c	0.60	0.68	0.60	0.65	11.76	7.69
	d	0.33	0.33	-0.22	-0.31	0.00	29.03
III S = 49.26 kN	a	10.20	11.58	20.41	22.23	11.92	8.19
	b	7.42	7.75	8.35	7.51	4.26	11.18
	c	0.80	0.87	0.80	0.85	8.04	5.88
	d	0.70	0.66	0.02	0.02	6.06	0.00
IV S = 48.64 kN	a	4.73	5.58	10.20	11.86	15.23	14.00
	b	8.35	7.78	8.16	7,64	7.32	6.81
	c	0.90	0.88	0.78	0.86	2.27	9.00
	d	1.10	1.00	0.68	0.62	10.00	9.68
V S = 0 kN	a	6.68	8.59	12.06	14.87	22.23	18.90
	b	-0.19	-0.19	-0,37	-0.33	0.00	12.12
	c	-0.02	-0.02	-0.04	-0.04	0,00	0.00
	d	-0.47	-0.52	-0,84	-0.89	9.61	5.62

d – doświadczalne, t – teoretyczne

Na rysunkach 8 i 9 przedstawiono końcowe rozkłady naprężen, odpowiednio w przekrojach 1-1 i 2-2.



Rys. 8. Rozkład naprężen w przekroju 1-1 (końcowy etap)

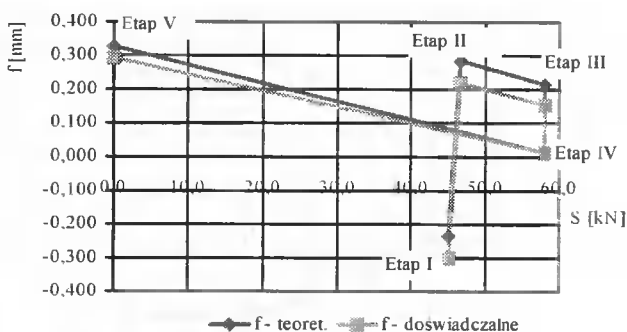


Rys. 9. Rozkład naprężeń w przekroju 2-2 (końcowy etap)

W tabeli 2 zestawiono wartości ugięć w kolejnych etapach rozprężania i obciążania konstrukcji obliczone na podstawie założeń teoretycznych i odczytane z czujników zegarowych, w środku rozpiętości konstrukcji. Na rysunku 10 przedstawiono graficznie wzrosty i spadki ugięć powstałe w wyniku przeprowadzonych operacji.

Tabela 2. Zestawienie ugięć

Etap	S [kN]	Ugięcia / [mm]		Porównanie [%]
		teoret.	doświadcz.	
I	36.89	-0,236	-0.300	27.12
II	38.78	0,284	0.220	22.54
III	49.26	0,217	0.154	29.03
IV	48.64	0,013	0.010	23.08
V	0.00	0,325	0.292	10.15

Rys. 10. Zależność ugięcia  $f$  od siły rozprężającej  $S$

#### 4. ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

Podczas wszystkich obciążeń zastosowanych w czasie przeprowadzonych badań konstrukcja zachowywała się zgodnie z przewidywaniami i założeniami teoretycznymi. Dotyczy to zarówno obciążeń zewnętrznych, jak i sił rozprężających. Sprawnie działającym okazało się również urządzenie śrubowe służące do wywoływania siły ściskającej pręt, oddziałującej na konstrukcję w sposób określony jako rozprężający.

Przedstawione badania przeprowadzono na jednym modelu. Otrzymane pewne różnice wyników podczas poszczególnych obciążeń można wytłumaczyć niedokładnością wykonania modelu, jak i posiadanego oraz zastosowanego sprzętu pomiarowego

#### LITERATURA

- [1] Bródka J., Klobukowski J., 1965. Sprężone konstrukcje stalowe. Arkady Warszawa.
- [2] Karczewski J., 1981. Sprężone konstrukcje stalowe. Wyd. Politechniki Warszawskiej.
- [3] Iwański A.M., 1953. Konstrukcje żelbetowe. PWT Warszawa.
- [4] Matysiak A., 1971. Sposób wstępnego sprężania konstrukcji metalowych. Patent nr 42836. Warszawa.
- [5] Matysiak A., 1971. Nowy sposób i podstawy teoretyczne wprowadzania wstępnych naprężeń w konstrukcjach metalowych. XVII Konferencja Naukowa KI PAN i KN PZITB, Krynica.
- [6] Libura S., Parzniewski Z., 1981. Rozprężanie dźwigarów stalowych. Inżynieria i Budownictwo 6.
- [7] Strzelecki J., 1987. Analiza statyczna dźwigarów sprężano-rozprężanych. Praca doktorska. Warszawa.
- [8] Drewnowski S., 1978. Betonowe konstrukcje mostowe sprężano-rozprężane. PWN Warszawa-Lódź.
- [9] Matysiak A., 1986. Analiza celowości sprężania wkładkami ściskаныmi zespolonych elementów zginanych. I Konferencja Naukowa Konstrukcje Zespolone, Zielona Góra.
- [10] Grochowska E., 2003. Zastosowanie wkładek ściskanych w rozprężaniu konstrukcji zespolonych. Praca doktorska, Zielona Góra.

#### THE EXPERIMENTAL INVESTIGATION STEEL-CONCRETE COMPOSITE BEAM EXPANDED IN THEIR UPPER PARTS

##### Summary

A steel girder strictly connected in its upper side with the thick concrete slab is subject of interest in this paper. To improve stress distribution within the section the additional expansion is introduced in the upper part of the composite girder. The

expanding force is carried into effect by the hydraulic or screw jack. The strut of the jack is taken over by the steel rod properly anchored in the upper flange of the steel girder. In this manner the additional tensile force is „freezed” for ever within the upper part of the composite girder. In this paper are introduced the experimental investigation the composite beam expanded in their upper parts.

Keywords: steel, concrete, expand, experimental investigation

## METODA PROGNOZOWANIA ZNISZCZENIA I ROZWOJU MIKROUSZKODZEŃ W STALACH Ni-Mo-Cr W ZAKRESIE TEMPERATURY PRZEJŚCIA MATERIAŁU ZE STANU PLASTYCZNOŚCI W STAN KRUCHOŚCI

Jacek Jackiewicz

Katedra Mechaniki Stosowanej  
Wydział Mechaniczny ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

Treścią artykułu jest metoda prognozowania zniszczenia i ewolucji mikro-uszkożeń w stalach Ni-Mo-Cr w zakresie temperatury przejścia materiału ze stanu plastyczności w stan kruchości. W tym celu zastosowano hybrydowy model kruchego i ciągliwego pęknięcia stali, wykorzystujący podstawowe założenia do mikromechanistycznego opisu pęknięcia stali sformułowane przez Beremina [2] i Needlemana [8]. Model ten został ujednoczony w wyniku modyfikacji modelu Gursona [4], służącego pierwotnie jedynie do symulacji rozwoju sferoidalnych mikropustek wokół siarczków w stali, poprzez uwzględnienie możliwości pojawienia się również silnie spłaszczonych elipsoidalnych form uszkodzeń rozpatrywanych jako mikropęknięcia w sąsiedztwie węglików. Wyniki numerycznych symulacji prawdopodobieństwa pojawienia się kruchego przelomu standardowych próbek typu zwartego w zakresie temperatury przejścia materiału ze stanu plastyczności w stan kruchości zostały zweryfikowane próbami eksperymentalnymi szacującymi rozrzut wartości odporności materiału na pęknięcie kruche.

Słowa kluczowe: sprężysto-plastyczna mechanika pęknięcia, ciągły wzrost pęknięcia, kruche pęknięcie, temperatura przejścia materiału ze stanu plastyczności w stan kruchości

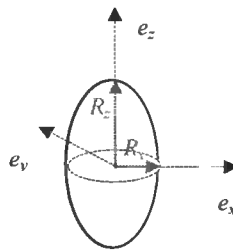
### 1. WPROWADZENIE

Siarczki zawarte w stali o średniej i dużej wytrzymałości wywierają ujemny wpływ na odporność materiału na jego pęknięcie. Szczególnie szkodliwy wpływ siarczków uwidacznia się w stalach Ni-Mo-Cr w pobliżu zakresu temperatury kruchości (czyli granicznej temperatury poniżej której mogą powstawać kruche pęknięcia o ograniczonym wymiarze powodujące powstanie kruchego przelomu na dużej przestrzeni przy niekorzystnych warunkach obciążenia) oraz powyżej tej temperatury, to znaczy gdy jest możliwe tworzenie się wokół siarczków mikropustek. Wówczas to makropęknięcie jest inicjowane w materiale w wyniku łączenia się mikropustek powstałych wokół siarczków. Oznacza to, że w temperaturach powyżej temperatury kruchości o odporności na pęknięcie tego rodzaju materiału decyduje wielkość i rozkład siarczków. Natomiast w temperaturach niskich (poniżej temperatury kruchości), gdy występuje

całkowicie kruchy przełom siarczki nie wykazują znaczącego wpływu na proces pęknięcia. Główną rolę przy pękaniu w tych temperaturach odgrywają węgliki.

## 2. ZMODYFIKOWANY MODEL GURSONA

Spośród konstytutywnych modeli porowatych ciał stałych istotną rolę w opisie ciągliwego pęknięcia stali odegrał model Gursona [4]. Model ten jest modelem ciała stałego odkształcającego się plastycznie ze sferoidalnymi pustkami. Został on zmodyfikowany przez Gologanu i wsp. [3], w wyniku wprowadzenia bardziej złożonego elipsoidalnego kształtu mikropustek (rys. 1), które po spełnieniu odpowiednich warunków dotyczących ich wymiarów mogą być również rozpatrywane jako mikropęknięcia.



Rys. 1. Geometria mikropustki

Zmodyfikowany model Gursona był podstawą do sformułowania następującego warunku plastyczności:

$$\tilde{\Phi}_{EGM}(\mathbf{S}, \langle \sigma_{\kappa} \rangle, \langle f^* \rangle, \xi) = \frac{S_{eqv}^{(A)}}{D_{nom}} - \langle \sigma_{\kappa} \rangle = 0 \quad (1)$$

gdzie  $S_{eqv}^{(A)}$  jest ekwiwalentem makroskopowego tensora naprężenia  $\mathbf{S}$ , uwzględniającym anizotropię materiału, która jest wywołana przez kierunek ustawienia spłaszczonego elipsoidalnych mikropustek w jego macierzy (patrz [1]),  $\langle \sigma_{\kappa} \rangle$  jest średnią miarą granicy plastyczności, a parametr

$$D_{nom} \equiv \sqrt{g_{EGM}^2 - 2g_{EGM}q_{EGM}f_{EGM} \cosh\left(\frac{\chi S_h}{\langle \sigma_{\kappa} \rangle}\right) + (q_{EGM}f_{EGM})^2} \quad (2)$$

określa stan deterioracji materiału. W wyrażeniu (2) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\chi \equiv \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\ln\langle f^* \rangle} \left[ (\sqrt{3} - 2) \ln\left(\frac{e_{EGM}}{E_{EGM}}\right) \right] \right]^{-1},$$

$$S_h \equiv \alpha_{EGM} (S_{xx} + S_{yy}) + (1 - 2\alpha_{EGM}) S_{zz},$$

$$\alpha_{EGM} \equiv (1 + E_{EGM}^2) / (3 + E_{EGM}^4),$$

$$q_{EGM} \equiv (q - 1) \cosh^{-1} \xi + 1,$$

$$f_{EGM} \equiv \langle f^* \rangle + g_{EGM} - 1,$$

$$g_{EGM} \equiv \begin{cases} 1 & \xi \geq 0 \\ \frac{E_{EGM}^3}{\sqrt{1 - E_{EGM}^2}} + 1 & \xi < 0. \end{cases}$$

Skalarna funkcja  $\chi$  zależy od logarytmicznego współczynnika kształtu  $\xi \equiv \ln(R_z/R_x)$  i średniej miary porowatości materiału  $\langle f^* \rangle$ . Parametry  $e_{EGM}$  i  $E_{EGM}$  są określone przez:

$$e_{EGM} \equiv \sqrt{1 - \exp(-2|\xi|)} \quad (3)$$

$$\frac{(1 - e_{EGM}^2)^{n^*}}{e_{EGM}^3} = \langle f^* \rangle \frac{(1 - E_{EGM}^2)^{n^*}}{E_{EGM}^3} \quad (4)$$

gdzie:

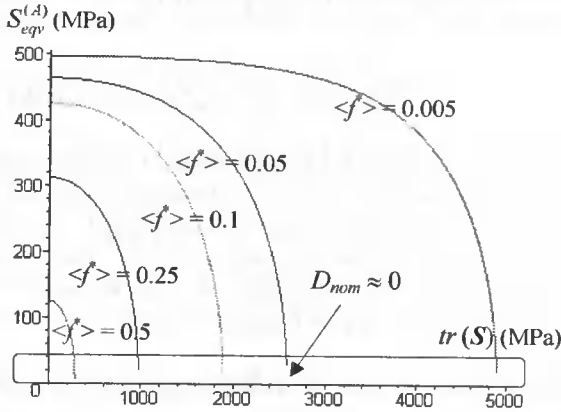
$$n^* = \begin{cases} 1 & \text{dla } \xi \geq 0 \\ 0.5 & \text{dla } \xi < 0. \end{cases}$$

$\tilde{S}_{eqv}^{(A)} \equiv S_{eqv}^{(A)} / D_{nom}$  reprezentuje w warunku plastyczności (1) napężenie efektywne, które posiada osobliwą wartość, jeśli  $D_{nom}$  dąży do zera.

Rysunek 2 przedstawia graniczne powierzchnie plastyczności określone na podstawie warunku (1), gdy  $\langle \sigma_\kappa \rangle = 500$  MPa, a  $\xi = 0$  (tzn. gdy mikropustki są kuliste). Sformułowany tutaj warunek plastyczności (1), uwzględniający uszkodzenie materiału wyraża wyniki badań doświadczalnych, które zostały ujęte w postaci diagramu Hencky'ego [5]. Diagram Hencky'ego (rys. 3) jest wykresem dwuwymiarowej zależności ekwiwalentu von Misesa  $S_{eqv}$  makroskopowego tensora napężenia  $S$  od napężenia średniego  $S_m$ . Na wykresie tym linia graniczna uszkodzenia materiału jest odcinkiem paraboli zawartym pomiędzy dwoma punktami  $P_W$  i  $P_S$ . Współczynnik wieloosiowości stanu napężenia został zdefiniowany jako

$$q_M \equiv S_{eqv} / S_m. \quad (5)$$

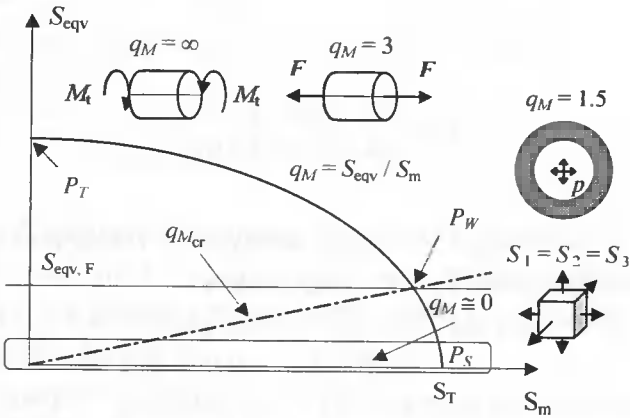




Rys. 2. Graniczne powierzchnie plastyczności spełniające warunek (1), gdy  $\langle \sigma_{\kappa} \rangle = 500$  MPa i  $\xi = 0$

Na rysunku 3 punkt  $P_w$  określa krytyczną wartość  $q_{M_{cr}}$  tego współczynnika. Rozpatrywany materiał ulega uszkodzeniu, gdy spełniony jest następujący warunek:

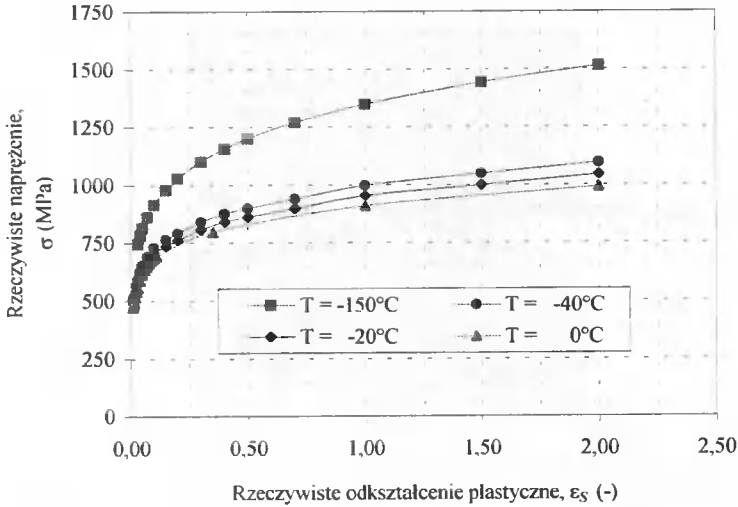
$$0 \leq q_M \leq q_{M_{cr}} \quad (6)$$



Rys. 3. Diagram Hencky'ego

### 3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

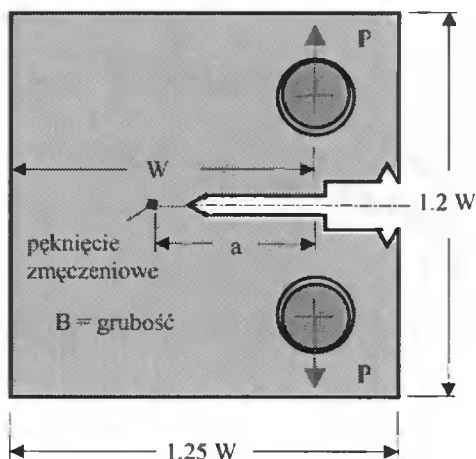
Podstawowe założenia i sformułowania matematyczne dotyczące modelowania zniszczenia i rozwoju mikrouszkodzeń w stalach Ni-Mo-Cr w zakresie temperatury przejścia materiału ze stanu plastyczności w stan kruchości zostały zweryfikowane za pomocą przykładów obliczeniowych. Właściwości matrycy badanego materiału, stali 22 NiMoCr 3 7 są przedstawione na rysunku 4.



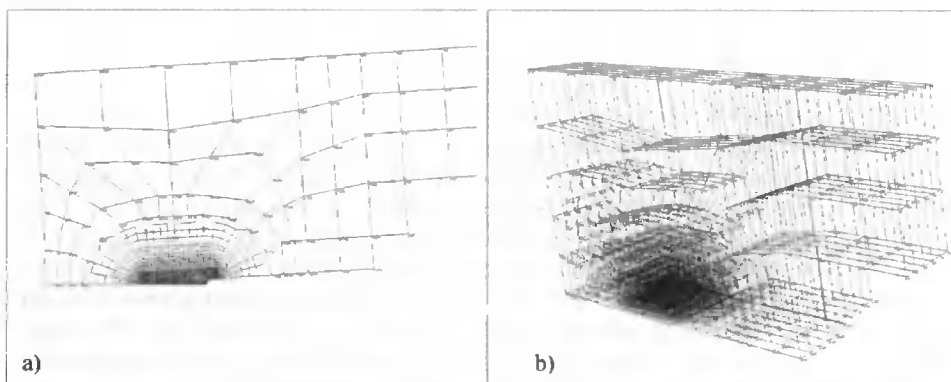
Rys. 4. Krzywe zależności rzeczywistego naprężenia od rzeczywistego odkształcenia plastycznego dla badanej stali 22 NiMoCr 3 7 w zakresie temperatur od  $-150^\circ\text{C}$  do  $0^\circ\text{C}$

### 3.1. Symulacja wzrostu pęknięcia w próbce typu zwartego

Rozciągana próbka typu zwartego (rys. 5) została zamodelowana za pomocą dwu- i trójwymiarowych elementów skończonych. W przypadku modelu dwuwymiarowego rozpatrzono płaski stan odkształcenia. Istotne szczegóły modeli tej próbki są przedstawione na rysunku 6. Rejestrując przebieg doświadczeń rozciągania próbki 1T C(T) o grubości 25 mm i szerokości 50 mm w zakresie temperatur od  $-40^\circ\text{C}$  do  $0^\circ\text{C}$  uzyskano wykresy siły reakcji próbki  $F$  od przemieszczenia  $V_{LL}$  (patrz [7]), które porównano z wynikami symulacji komputerowych (rys. 7). Celem symulacji komputerowych było określenie wpływu stabilnego wzrostu pęknięcia ciągłego przed rozłamem kruchym materiału na jego przejście ze stanu plastyczności w stan kruchości. Do prognozowania kruchego pęknięcia wykorzystano następujące założenie: przekroczenie granicy spoistości materiału związane z powstaniem w materiale makropęknięcia propagującego się krucho jest wywołane przez lokalną mikrokoncentrację naprężeń wokół jednego z węglików doprowadzającą do jego pęknięcia i zainicjowania przełomu rozdzielczego. Jako potencjalne obszary, w których mogą pojawić się zarodki kruchych pęknięć w materiale przyjęto miejsca występowania odkształceń plastycznych. Rozkład, różnorodność wymiarów oraz kierunków położenia tych zarodków zostały opisane probabilistycznie.



Rys. 5. Schemat próbki typu zwanego

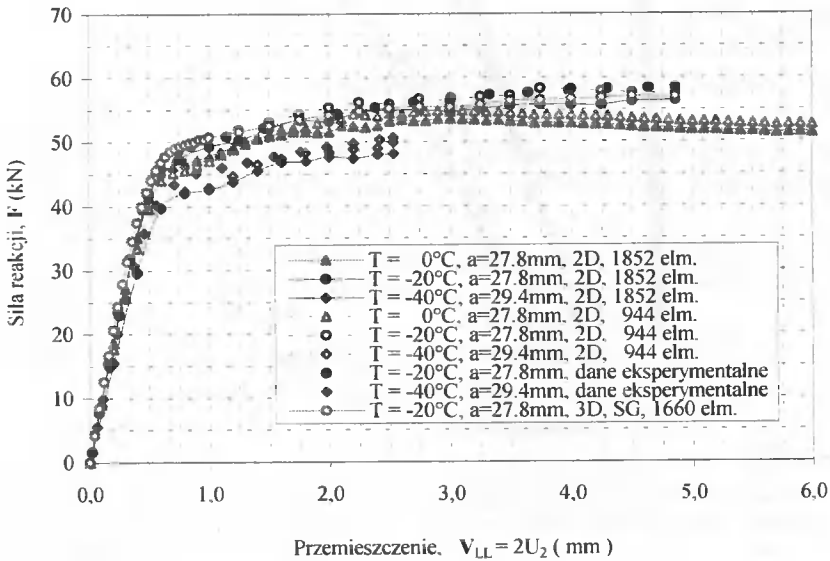


Rys. 6. Dwu- i trójwymiarowe siatki elementów skończonych modelu próbki typu zwanego

Wartości stałych materiałowych zostały określone za pomocą tzw. zadania odwrotnego, polegającego na realizacji symulacji komputerowych wykorzystujących mikromechaniczny opis pęknięcia stali, które odwzorowują przebiegi standardowych prób laboratoryjnych badań odporności materiału na pęknięcie. Wyznaczone stałe materiałowe (patrz [6]) to: początkowa porowatość materiału  $f_0 = 0.002$ , krytyczna porowatość materiału wywołująca koalescencję mikropustek  $f_c = 0.05$ , charakterystyczna długość skali wykorzystywana w tzw. opisie nielokalnym materiału  $l_c = 0.25$  mm oraz parametry statystyki Weibulla  $m = 22$  i  $\sigma_u = 2528$  MPa.

W celu zmniejszenia wpływu wymiarów elementów skończonych na wyniki symulacji komputerowych związanych z zagadnieniem osłabienia materiału, które jest wywołane przez jego stopniową deteriorację, wykorzystano nielokalny opis materiału. Spowodowało to uzyskanie dobrej korelacji pomiędzy wynikami symulacji komputerowych a obserwacjami doświadczalnymi (rys. 7). Wyznaczona dla stali 22 NiMoCr 37

krytyczna wartość całki Rice'a w momencie inicjacji ciągłego pęknięcia materiału w temperaturach  $-40^{\circ}\text{C}$ ,  $-20^{\circ}\text{C}$  i  $0^{\circ}\text{C}$  wynosi  $J_I = 55,8 \text{ kJ}\cdot\text{m}^{-2}$ .



Rys. 7. Krzywe zależności siły reakcji próbki  $F$  od przemieszczenia  $V_{LL} = 2U_2$

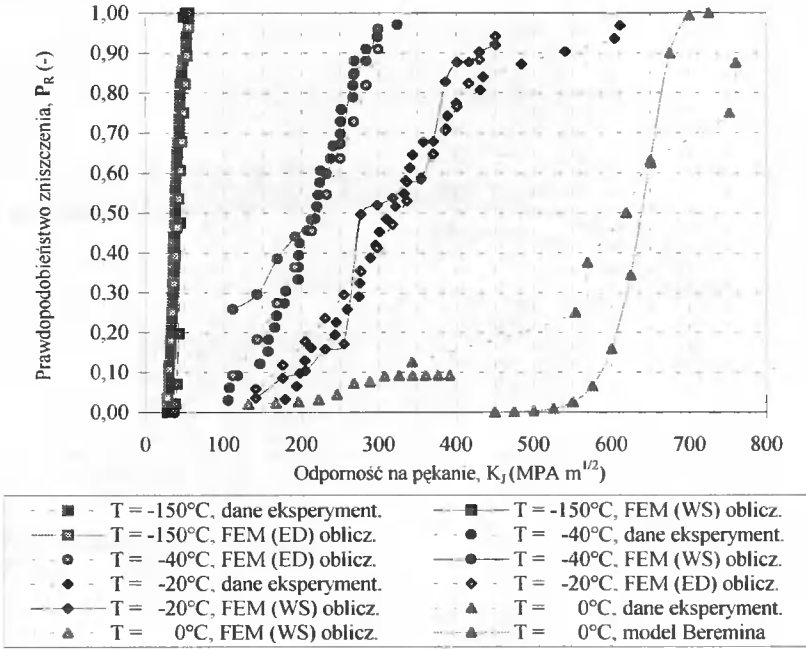
### 3.2. Prognozowanie rozrzutu wartości odporności materiału na pęknięcie kruche

Numeryczne analizy bazujące na modelach statystyki Weibulla (WS), dyssypacji energii (ED) i Beremina pozwoliły oszacować prawdopodobieństwo zniszczenia materiału w zależności od jego odporności na pęknięcie (rys. 8). Obliczone maksymalne wartości naprężeń Weibulla w poszczególnych temperaturach są następujące:

$$\sigma_{W_{max}}(T = -40^{\circ}\text{C}) = 2395 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{W_{max}}(T = -20^{\circ}\text{C}) = 2289 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{W_{max}}(T = 0^{\circ}\text{C}) = 2261 \text{ MPa}.$$



Rys. 8. Prawdopodobieństwo zniszczenia w zależności od odporności na pękanie

#### 4. WNIOSKI

W artykule przedstawiono metodę prognozowania zniszczenia i ewolucji mikroszkodzeń w stalach Ni-Mo-Cr w zakresie temperatury przejścia materiału ze stanu plastyczności w stan kruchości. Zastosowanie tej metody pozwoliło wysnuć następujące wnioski:

1. Materiały zawierające w lokalnym układzie odniesienia (którego oś z jest równoległa do naprężenia głównego  $S_1$  – patrz rys. 1) mikropustki w kształcie nieznacznie spłaszczonych lub znacznie wydłużonych elipsoid mogą być rozpatrywane jako materiały wyjściowo izotropowe z kulistymi mikropustkami do momentu ich koalescencji, jeśli ewolucja ich kształtu nie powoduje powstania istotnych mikrokoncentracji naprężeń w materiale, tzn. utworzenia się form mikropustek w kształcie znacznie spłaszczonej elipsoidy
2. W zakresie temperatury przejścia materiału ze stanu plastyczności w stan kruchości istotne zaokrąglenie się wierzchołka makropęknięcia w chwili jego inicjacji powoduje ciągły przyrost długości pęknięcia. Jednak proces ten jest metastabilny, ponieważ zawarte w materiale węgliki w określonych warunkach mogą natychmiastowo spowodować zaostrenie się konturu wierzchołka makropęknięcia i w konsekwencji jego dalsze propagowanie się w sposób kruchy.
3. W początkowym stadium formowania się ciągłej formy makropęknięcia kierunek przyrostu jego długości jest zgodny z utworzonym w materiale próbki typu zwartego pasmem ścinania mającym swój początek w wierzchołku pęknięcia.

## LITERATURA

- [1] Andrieux F., Sun D.-Z., Riedel H., 1999. Verbesserte konstitutive Modelle zur Beschreibung von Umformprozessen. Numerische Implementierung und Experimente. IWM-Bericht Z5/99, Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik IWM, Juli 1999.
- [2] Beremin F.M., 1983. A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel. *Met. Trans.* 14A, 2277-2287.
- [3] Gologanu M., Leblond J.B., Devaux J., 1993. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids. Case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids* 41, 1723-1754.
- [4] Gurson A.L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part I: Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Eng. Mater. Technol.* 99, 2-15.
- [5] Hencky H., 1943. Ermüdung, Bruch, Plastizität. *Stahlbau* 16, 95-97.
- [6] Jackiewicz J., Kuna M., 2003. Non-local regularization for FE simulation of damage in ductile materials. *Comput. Mater. Sci.* 28, 684-695.
- [7] Poussard C., Sainte Catherine C., 2003. ESIS TC 8 – Numerical Round Robin on Micro-Mechanical Models: Specification of Phase III for the Simulation of the Brittle to Ductile Transition Curve. CEA Saclay, SEMI/LCMI/RT/02-027/A, March 2003.
- [8] Tvergaard V., Needleman A., 1984. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall.* 32, 157-169.

## METHOD OF PREDICTING THE FAILURE AND MICRO-DEFECTS EVOLUTION IN Ni-Mo-Cr STEELS IN THE DUCTILE-TO-BRITTLE TRANSITION REGIME

### Summary

The subject of the article is the method of predicting the failure and micro-defects evolution in Ni-Mo-Cr steels in the ductile-to-brittle transition regime. To achieve this goal, the hybrid model for the brittle and ductile cracking of steel, based on the micromechanical description of fracture founded by Beremin [2] and Needleman [8], was applied. This model was developed into the enhanced Gurson-type [4] model incorporating effects of the micro-void aspect ratio. According to the role of the dominant microdefects in the material, the fracture criterion was formulated for situations when the cleavage crack initiation is preceded by ductile crack growth giving a large scatter to the values of fracture toughness. The established method was checked by comparisons of standardised experimental fracture tests with micromechanical FEM-simulations.

Keywords: elastic-plastic fracture mechanics, ductile crack growth, cleavage fracture, ductile-to-brittle transition regime



## WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE SPRAWNOŚCI POJAZDU SAMOCHODOWEGO

Ryszard Jedliński

Katedra Techniki Ciepłej i Metrologii  
Wydział Mechaniczny ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

Masowy rozwój motoryzacji stwarza szereg nowych problemów natury technicznej oraz związanych z ochroną środowiska naturalnego człowieka. W dążeniu do obniżania kosztów eksploatacji zwraca się szczególną uwagę na zużycie paliwa i innych materiałów eksploatacyjnych. Mniejsze zużycie paliwa to mniej szkodliwych spalin. W artykule dokonano analizy sprawności ogólnej pojazdu w aspekcie strat mocy w poszczególnych zespołach. Rozważono przypadek ruchu prostoliniowego na poziomym odcinku drogi.

Słowa kluczowe: pojazd samochodowy, sprawność, zużycie paliwa

### 1. ANALIZA CZYNNIKÓW WPLYWAJĄCYCH NA SPRAWNOŚĆ POJAZDU SAMOCHODOWEGO

Przy projektowaniu samochodu konstruktor musi posiadać możliwość obliczenia przeciętnych strat zachodzących w mechanizmach układu napędowego, w celu wyznaczenia rzeczywistej wartości dysponowanej mocy na kołach, od której zależą własności trakcyjne samochodu. Na rysunku 1 przedstawiono siły działające na pojazd samochodowy poruszający się ruchem prostoliniowym na drodze poziomej.

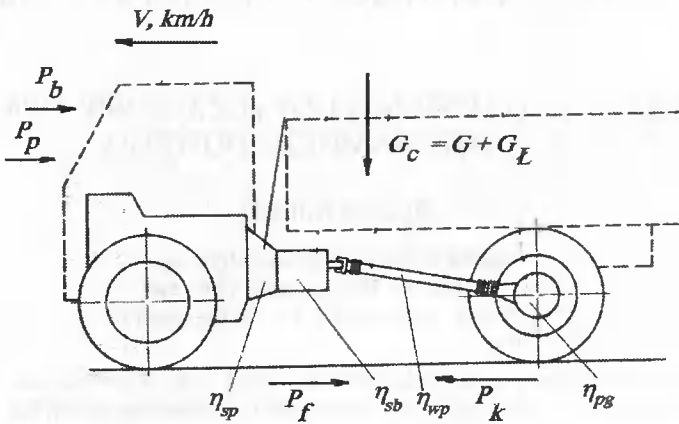
Umieszczone na schemacie oznaczenia przedstawiają:

- $P_p$  – opór powietrza,  $N$ .
- $V$  – prędkość ruchu postępowego samochodu,  $km/godz.$ .
- $G_c$  – ciężar całkowity (suma ciężaru własnego  $G$  i ciężaru ładunku  $G_L$ ),  $N$ .
- $P_K$  – siła napędowa,  $N$ .
- $P_f$  – siła oporów toczenia,  $N$ .
- $\eta_{sp}$ ,  $\eta_{śś}$ ,  $\eta_{wp}$ ,  $\eta_{pk}$  – odpowiednio sprawności: sprzęgła, skrzynki biegów, wału przegubowego, przekładni głównej.

Współczynnik sprawności  $\eta$ , który jest ilorazem wielkości mocy uzyskanej i mocy włożonej charakteryzuje wielkość strat wewnętrznych, będących następstwem wewnętrznych czynników wymuszających. Wewnętrznymi czynnikami wymuszającymi są również siły bezwładności zależne od mas elementów konstrukcyjnych i momentów bezwładności. Rozpatrując pojazd samochodowy jako maszynę roboczą przeznaczoną do wykonania pracy użytecznej z wykorzystaniem ładowności skrzyni ładunkowej i realizowanej z określoną prędkością roboczą należy uwzględnić w analizie również



zewewnętrzne czynniki wymuszające (opory toczenia, poślizgi kół jezdnych, opory powietrza).



Rys. 1. Schemat układu napędowego samochodu i działających sił

Takie postawienie zadania umożliwia kompleksową analizę i sterowanie czynnikami dla maksymalizacji celu, którym jest zapewnienie odpowiedniej wydajności środków transportowych i minimalizacji zużycia materiałów eksploatacyjnych.

Dla oceny efektywności wykorzystania mocy silnika pojazdu i strat tej mocy oraz szeroko rozumianej sprawności posłużono się równaniem bilansu mocy:

$$N_S \cdot \eta_m = N_K = N_f + N_\delta + N_p + N_b \quad (1)$$

gdzie:

- $N_S$  – moc silnika przekazana do skrzynki biegów,
- $N_f$  – moc zużywana na pokonanie oporów toczenia,
- $N_\delta$  – moc tracona w wyniku poślizgu kół napędowych,
- $N_p$  – moc zużywana na pokonanie oporów powietrza,
- $N_b$  – moc zużywana na pokonanie oporów bezwładności,
- $\eta_m$  – sprawność mechaniczna układu napędowego.

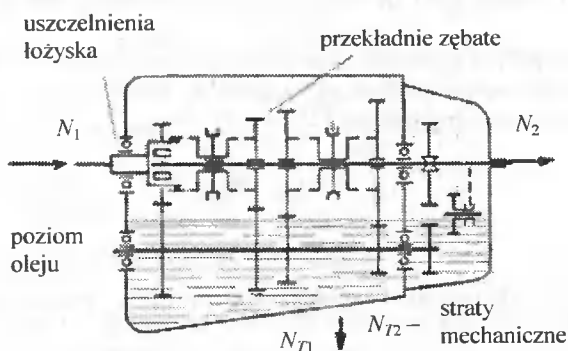
Poniżej przeanalizowano czynniki wpływające na poszczególne składowe bilansu.

## 1.1. Działanie wewnętrznych czynników wymuszających

### 1.1.1. Sprawność mechaniczna układu napędowego

Jeżeli w mechanizmach napędowych samochodu zastosowane jest **sprzęgło cierne**, to w czasie pracy samochodu pracuje ono bez poślizgu. Jedyne straty energetyczne związane ze sprzęgłem ciernym, to straty wentylacyjne powstające na skutek obrotu sprzęgła w osrodku powietrza wewnątrz osłony (powietrze zagrzewa się i część energii mechanicznej zostaje w ten sposób zamieniona na energię cieplną i wypromieniowana na zewnątrz). Sprawność mechaniczna sprzęgła ciernego jest zależna od prędkości obrotowej, a nie od wielkości przenoszonego momentu. Jako wartość średnią sprawności sprzęgła ciernego można przyjąć:  $\eta_{sp} = 0,998$  [1].

**Skrzynka biegów** stanowi kolejne ogniwo układu napędowego, w której dokonuje się transformacja momentu obrotowego i prędkości kątowej (rys. 2).



Rys. 2. Schemat skrzynki biegów pojazdu samochodowego i źródeł powstawania strat mocy

Charakter pracy elementów skrzynki biegów wymusza potrzebę ich ciągłego smarowania. Dotyczy to współpracujących kół zębatych, wielowypustów i łożysk. Konieczność zapobieżenia wyciekom oleju stwarza potrzebę zastosowania niezawodnych uszczelnień o wysokiej trwałości eksploatacyjnej.

Wychodząc z pojęcia sprawności możemy napisać:

$$\eta_{SB} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_S - N_T}{N_S} = \frac{N_S - (N_{T1} + N_{T2})}{N_S} = 1 - \left( \frac{N_{T1}}{N_S} + \frac{N_{T2}}{N_S} \right) \quad (2)$$

gdzie:

$N_S$  – moc silnika przekazana do skrzynki biegów,

$N_T$  – moc utracona w skrzynce biegów, to jest zamieniona na ciepło na skutek tarcia mechanicznego i hydraulicznego ( $N_{T1}$  – w łożyskach, uszczelnieniach na pokonanie oporów hydraulicznych,  $N_{T2}$  – na pokonanie oporów tarcia w przekładniach).

Dla ustalonej prędkości obrotowej moce można zastąpić momentami i wtedy sprawność skrzynki biegów możemy wyrazić w sposób następujący:

$$\eta_m = \frac{M_S - M_T}{M_S} = 1 - \left( \frac{M_{T1}}{M_S} + \frac{M_{T2}}{M_S} \right) \quad (3)$$

W związku z tym, że skrzynki biegów pojazdów pracują w większości sytuacji eksploatacyjnych w obszarze mocy maksymalnych, decydujący dla wartości współczynnika sprawności jest iloraz  $\frac{M_{T2}}{M_S}$ .

W miarę wzrostu momentu obrotowego opory wewnętrzne w skrzynce biegów wzrastają [1]. Dotyczy to w głównej mierze oporów będącym następstwem tarcia w przekładniach zębatych. W zakresie niskich momentów obrotowych, tempo wzrostu oporów jest jednak wolniejsze od tempa wzrostu przyłożonego momentu i dlatego

sprawność skrzynki biegów będzie początkowo wzrastała. W zakresie większych momentów obrotowych opory tarcia międzyzębnego zaczynają wzrastać szybciej i wtedy sprawność skrzynki biegów albo się ustala (bieg bezpośredni), albo może się obniżyć (biegi niższe).

W świetle powyższych rozważań istotnymi dla oceny sprawności skrzynki biegów są straty na pokonanie oporów tarcia w przekładniach, zależne od ilości i rodzaju przekładni. W związku tym możemy napisać [2]:

$$\eta_m = \eta_{pw}^{n_w} \cdot \eta_{pst}^{n_{ps}} \quad (4)$$

gdzie:

$\eta_{pw}$ ,  $n_w$  – odpowiednio współczynnik sprawności mechanicznej przekładni zębatej walcowej oraz ilość par przekładni walcowych w układzie,

$\eta_{ps}$ ,  $n_{ps}$  – odpowiednio współczynnik sprawności mechanicznej przekładni zębatej stożkowej oraz ilość par przekładni stożkowych w układzie.

W tabeli 1 zamieszczono średnie wartości współczynników sprawności mechanicznej elementów układu napędowego [1].

Tabela 1. Wartości współczynników sprawności

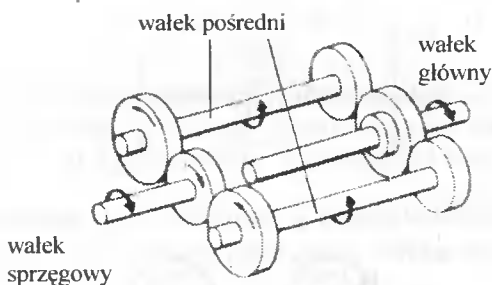
Łp.	Parametr	Wartość
1	$\eta_{pw}$	0.985 ... 0.99
2	$\eta_{ps}$	0.975 ... 0.98

Zasadniczym sposobem uzyskania wysokiej sprawności przekładni zębatych jest:

- wysoka jakość wykonania kół zębatych,
- odpowiednia sztywność elementów układu napędowego,
- stosowanie odpowiednich materiałów smarnych,
- przestrzeganie czasokresów obsługiwanego technicznego, w tym wymiany oleju.

Rozwiązaniem sprzyjającym zmniejszeniu obciążeń poszczególnych kół zębatych i poprawy wskaźników sztywności jest zastosowanie w skrzynce biegów dwóch wałków pośrednich.

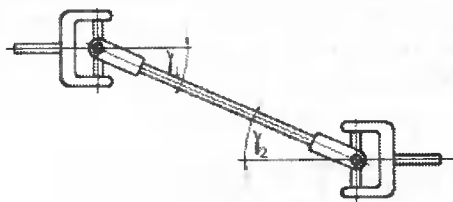
Zastosowanie w skrzynce biegów dwóch wałków pośrednich (rys. 3) powoduje, że moment obrotowy przekazywany z wałka sprzęgłowego dzieli się równomiernie pomiędzy wałki pośrednie. Umożliwia to użycie węższych kół zębatych, co przy dodatkowym braku synchronizatorów (włączanie biegów za pomocą sprzęgieł przesuwanych) wpływa na znaczne zmniejszenie długości skrzynki. Pod względem użytkowym skrzynki z dwoma wałkami pośrednimi wyróżniają się dużą odpornością na przeciążenia mechaniczne, niezawodnością działania i prostotą konstrukcji elementów składowych. Dokładne ustawienie kół umożliwia precyzyjny, równy podział momentu obrotowego pomiędzy wałki pośrednie, uniknięcie drgań poprzecznych wałka głównego oraz naprężeń wewnętrznych w wałkach pośrednich.



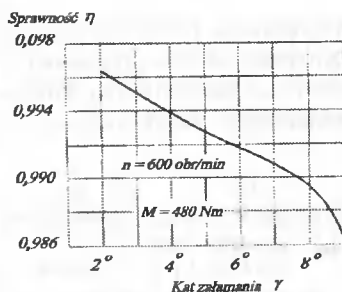
Rys. 3. Skrzynka biegów z dwoma wałkami pośrednimi

Zadaniem **wałów napędowych** jest doprowadzenie napędu do oddalonych od siebie zespołów układu napędowego.

Ogólną budowę i sprawność dwuprzegubowego wału napędowego w zależności od kąta odchylenia  $\gamma$  przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Wał z przegubami krzyżakowymi

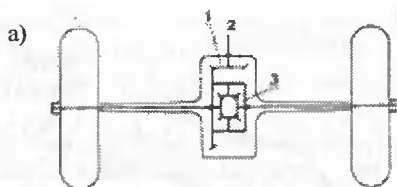


Rys. 5. Sprawność dwuprzegubowego wału napędowego

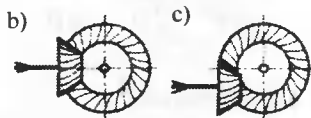
W celu utrzymania równomierności prędkości obrotowej wału napędowego z krzyżakowymi przegubami w dopuszczalnych granicach oraz zabezpieczenia wysokiej sprawności mechanicznej stosowane są następujące środki:

- kąty załamania w przegubach wału napędowego przy samochodzie z pełnym ładunkiem tak się dobiera, aby odkształcenia resorów tylnych przy ruchu pojazdu dawały mniej więcej równe dwustronne odchylenia kątowe od położenia przy obciążeniu statycznym.
- długość wału napędowego powinna być tak dobrana, aby graniczne odkształcenia resorów nie powodowały powstania w przegubach kątów załamania osi wałów przekraczających kąty dopuszczalne.

Zasadniczym zespołem **mostu napędowego**, w którym występują straty mechaniczne w przekładniach jest zespół przekładni głównej (rys. 6).



1 – koło atakujące przekładni głównej, 2 – koło talerzowe, 3 – mechanizm różnicowy,



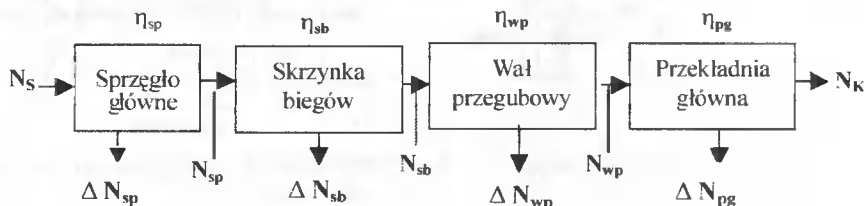
b – przekładnia główna stożkowa      c – przekładnia główna hipoidalna

$$\eta_{pg} = 0,95 \dots 0,98$$

$$\eta_{pg} = 0,92 \dots 0,95$$

Rys. 6. Ogólna budowa mostu napędowego i sprawność przekładni

Uwzględniając powyższe rozważania całkowity udział strat wewnętrznych mocy w mechanizmach układu przeniesienia napędu można określić ogólnym współczynnikiem sprawności mechanicznej, którego wartość można wyznaczyć na podstawie schematu strukturalnego przedstawionego na rysunku 7.



Rys. 7. Przepływy mocy od silnika do kół napędowych pojazdu

W związku z tym, że  $N_{sp} = N_s$ :

$$\eta_{mc} = \eta_{sp} \cdot \eta_{sb} \cdot \eta_{wp} \cdot \eta_{pg} \quad (5)$$

Zewnętrznymi czynnikami wymuszającymi określone zachowanie się pojazdu samochodowego i jego właściwości trakcyjne są:

- opory bezwładności
- opory toczenia,
- straty mocy na poślizg kół napędowych,
- opory powietrza.

### 1.1.2. Siły bezwładności

Siły **bezwładności** stanowią sumę sił bezwładności przeciwdziałających przyspieszaniu samochodu:

$$P_b = m \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{\sum M_{bs}}{r_d} \quad (6)$$

Pierwszy składnik równania przedstawia opór bezwładności mas samochodu poruszających się ruchem postępowym. Drugi składnik równania stanowi łączny opór bezwładności, pochodzący od mas elementów wykonujących ruch obrotowy, do których zalicza się:

- koła jezdne samochodu,
- układ korbowy łącznie z pozostałymi elementami wirującymi silnika,
- koło zamachowe,
- elementy wirujące skrzynki biegów oraz wał napędowy,
- mechanizm różnicowy z przekładnią główną i półosiami.

Największą wartością momentu oporu bezwładności charakteryzują się koła samochodu oraz układ korbowy silnika łącznie z kołem zamachowym i sprzęgłem. Natomiast do pominięcia są wartości tego momentu dla pozostałych elementów wirujących [3].

Moment stycznych sił bezwładności kół samochodu oblicza się z zależności:

$$M_{bsk} = I_K \cdot \frac{d\omega_K}{dt} \quad (7)$$

gdzie:

$I_K$  – biegunowy moment bezwładności kół.

$\omega_K$  – prędkość kątowna kół jezdnych.

Moment stycznych sił bezwładności silnika zredukowany na oś kół napędzanych:

$$M_{bss} = I_S \cdot \frac{d\omega_K}{dt} \cdot i_c \quad (8)$$

W praktyce dla obliczeń wpływ mas wirujących na opór bezwładności uwzględnia się za pomocą współczynnika  $\delta_a$ :

$$P_b = m \cdot \frac{dV}{dt} \cdot \delta_a \quad (9)$$

Zmniejszenie wpływu mas wirujących na opory bezwładności jest możliwe w wyniku:

- zmniejszenia masy wirujących elementów,
- zmniejszenia wymiarów wirujących elementów,
- łagodnego przyspieszania pojazdu.

## 1.2. Zewnętrzne czynniki wymuszające

**Opór toczenia** samochodu wywołują siły przeciwdziałające toczeniu się jego kół. Opór toczenia koła, zaopatrzonego w pneumatyczne ogumienie, na twardej nawierzchni drogowej jest wywołany przez następujące straty powstające przy toczeniu się koła [3]:

- straty związane z tarcieniem powstającym między elementami bieżnika i podłoża przy przemieszczaniu się poszczególnych elementów bieżnika względem podłoża podczas odkształcania się opony,

- straty na tarcie wewnętrzne w materiale opony wywołane przez histerezę w odkształconej oponie,
- straty aerodynamiczne wskutek ruchu obrotowego koła oraz straty mechaniczne na tarcie w łożyskach koła.

Dla pojazdu poruszającego się ruchem prostoliniowym na odcinku poziomym opór toczenia oblicza się z uproszczonego wzoru:

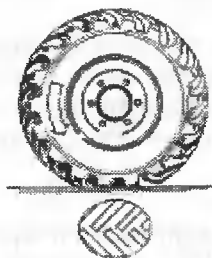
$$P_f = G_C \cdot f$$

gdzie:

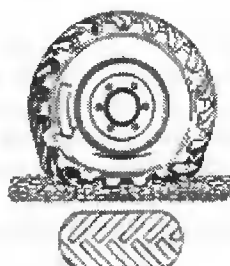
$f$  – współczynnik oporu toczenia.

Opór toczenia koła po twardym podłożu jest powodowany głównie stratami histerezy w oponie w wyniku jej odkształcania. **Wynika z tego, że straty te możemy obniżyć podwyższając ciśnienie powietrza w ogumieniu.**

a)



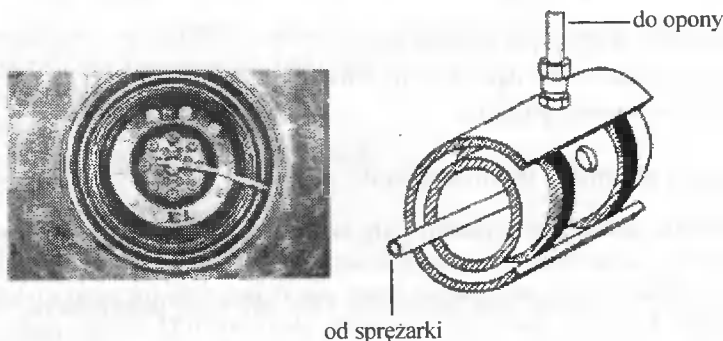
b)



Wysokie ciśnienie w oponie, mała powierzchnia styku, małe opory toczenia, niewielkie zużycie | Niskie ciśnienie w oponie, duża powierzchnia styku, małe naciski jednostkowe, dobra przyczepność

Rys. 8. Warunki współpracy opony z podłożem: a – na podłożu asfaltowo-betonowym, b – na podłożu nieutwardzonym

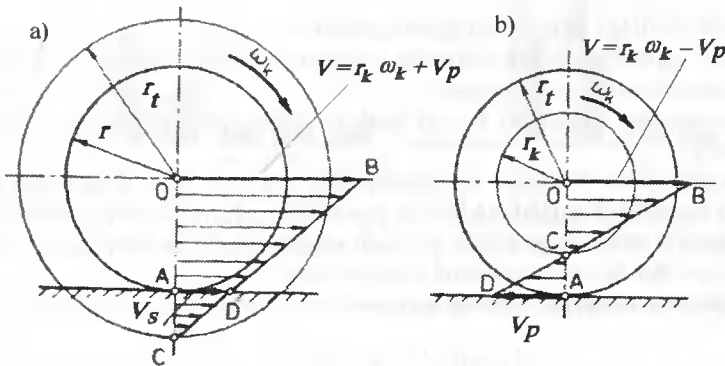
Opór toczenia koła po miękkim podłożu zależy w głównej mierze od odkształcenia tego podłoża. Chcąc w tym przypadku zmniejszyć straty toczenia wynikające z odkształcenia podłoża należałoby zwiększyć powierzchnię styku z podłożem, co osiąga się w wyniku obniżenia ciśnienia powietrza w ogumieniu kół jezdnych (rys. 9).



Rys. 9. Układ zmiany ciśnienia w oponie w czasie jazdy

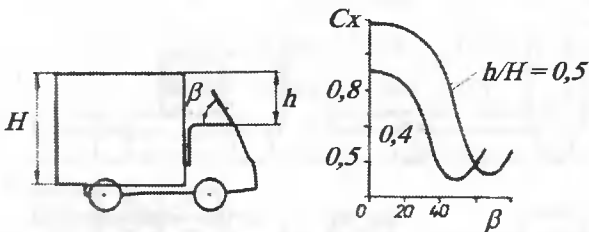
Współczynnik zwiększa się w miarę spadku wartości ciśnienia w ogumieniu przy toczeniu się koła na podłożu asfaltowym; wtedy bowiem elementy ogumienia wchodzące w obszar styku są odpowiednio silniej ściskane, na wyjściu zaś silniej odprężane. Następstwem tego jest zwiększenie oporów związanych z odkształcaniem ogumienia.

Współczesne nowoczesne pojazdy osobowe i ciężarowe są wyposażone w systemy regulacji ciśnienia w ogumieniu w zależności od warunków eksploatacyjnych. Regulacja może odbywać się w wyniku interwencji kierowcy lub automatycznie (rys. 10).



Rys. 10. Koło pojazdu samochodowego toczące się: a – z poślizgiem. b – ze ślizganiem (poślizgiem ujemnym)

Ruchowi koła ogumionego towarzyszy zawsze pewien **poślizg** niektórych elementów bieżnika względem nawierzchni. Skutkiem tego prędkość postępową koła nie jest równa iloczynowi jego prędkości kątowej i promienia. W miarę dalszego wzrostu wartości stosunku reakcji stycznej do obciążenia normalnego udział poślizgu zwiększa się, aż do całkowitego zaniku ruchu potoczystego. Przejawem tego jest albo wyłączny ruch obrotowy koła napędzanego, albo wyłączny ruch postępowy koła hamowanego (rys. 11).



Rys. 11. Zależność współczynnika  $C_x$  od ustawienia spojlera [2]

Zjawisko poślizgu może mieć miejsce przy ruszaniu lub przyspieszaniu pojazdu, a ślizgania – w procesie hamowania.

Wartość współczynnika strat mocy w wyniku poślizgu oblicza się z zależności:

$$\eta_{\delta} = \frac{N_p}{N_K} = \frac{N_K - N_{\delta}}{N_K} = 1 - \frac{P_K \cdot (V_t - V_r)}{P_K \cdot V_t} = 1 - \frac{V_t - V_r}{V_t} = 1 - \delta \quad (10)$$



Producenci opon coraz częściej zastępują swoje opony o ogólnym przeznaczeniu dwoma różnymi typami – z przeznaczeniem na oś kierowaną oraz z przeznaczeniem na oś napędową.

Opony na oś kierowaną mają silnie wzmocnione boki i rzeźbę bieżnika specjalnie zaprojektowaną do zapewnienia równomiernego zużycia się przy zachowaniu dużego przebiegu eksploatacyjnego. Opona na oś napędową charakteryzuje się bardziej rozbudowaną rzeźbą, a przede wszystkim większą jej głębokością, co zwiększa przyczepność.

Wielkość poślizgu można zmniejszyć poprzez:

- dociążenie napędzanych kół jezdnych (powoduje to zagęszczenie podłoża i zwiększenie jego odporności na ścinanie),
- podwyższenie przyczepności kół do podłoża (zwiększona głębokość bieżnika, koła bliźniacze).

**Oporo powietrza** związane są z poruszaniem się pojazdu w środowisku gazowym (atmosfera) i wynikają z działania parcia powietrza na powierzchnię czołową, oporów tarcia powietrza o zewnętrzne ściany pojazdu oraz z oporów wewnętrznego przepływu powietrza przez chłodnicę i urządzenia wentylacyjne.

Oporo powietrza można wyrazić wzorem:

$$P_p = 0,0472 \cdot C_x \cdot A \cdot V^2, \quad N \quad (11)$$

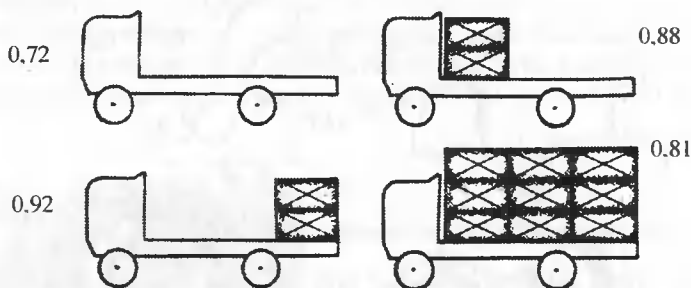
gdzie:

$C_x$  – współczynnik oporu aerodynamicznego,

$V$  – prędkość ruchu postępowego wyrażona w km/godz.,

$A$  – powierzchnia czołowa pojazdu, m<sup>2</sup>.

Współczynnik oporu powietrza  $C_x$  zależy głównie od kształtu przedmiotu poruszającego się w powietrzu oraz w mniejszym stopniu od gładkości jego powierzchni. Powszechnym sposobem podwyższania wartości  $C_x$  w samochodach ciężarowych jest stosowanie tak zwanych odchylaczy strugi powietrza (spojlerów) (rys. 12).

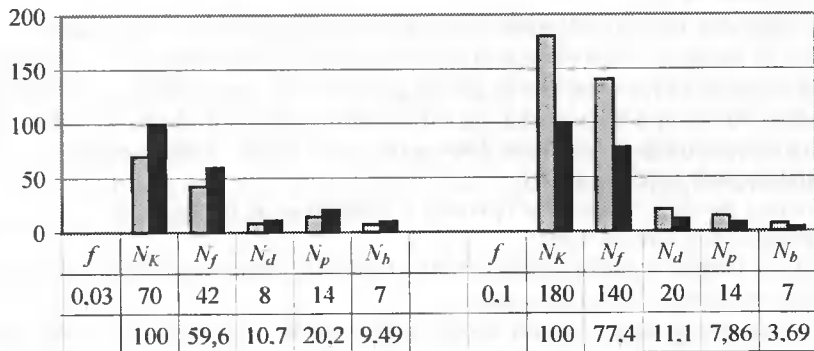


Rys. 12. Zależność  $C_x$  od rozmieszczenia ładunku w samochodzie ciężarowym

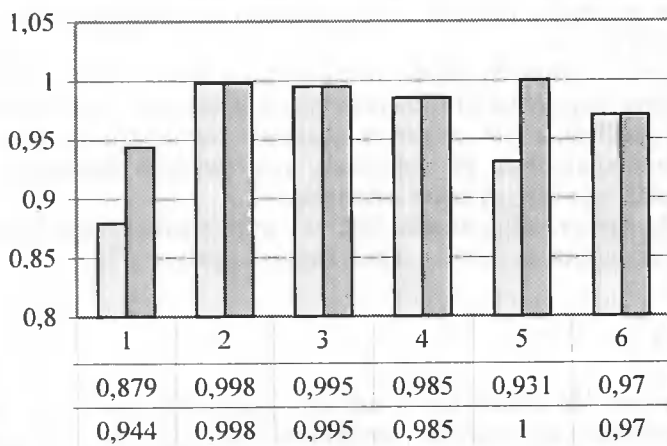
W przypadku przewożenia ładunku na odkrytej skrzyni ładunkowej bardzo ważne jest odpowiednie rozmieszczenie ładunku. Na rysunku 12 przedstawiono wartości  $C_x$  dla różnych przypadków rozmieszczenia ładunku.

## 2. ILUSTRACJA

Dla zilustrowania struktury bilansu mocy w pojeździe samochodowym sporządzono uproszczoną analizę, której wyniki zostały przedstawione na rysunkach 13 i 14.



Rys. 13. Struktura podziału mocy doprowadzonej do kół napędowych pojazdu samochodowego



Rys. 14. Wpływ sprawności poszczególnych zespołów układu napędowego na sprawność mechaniczną ogólną

Do analizy przyjęto następujące założenia dotyczące parametrów technicznych pojazdu:

- ciężar pojazdu wraz z ładunkiem -  $G_c = 60000$ , N,
- prędkość ruchu postępowego -  $V = 83,7$  km/h,
- poślizg kół napędowych -  $\delta = 0,15$ ,
- współczynnik aerodynamiczny -  $C_x$
- powierzchnia czołowa -  $F = 3,0$  m<sup>2</sup>,
- przyspieszenie liniowe -  $a = 1$  m/s<sup>2</sup>,
- promień dynamiczny koła jezdneho -  $r_K = 0,4$  m.

Na rysunku 13 została przedstawiona struktura podziału mocy doprowadzonej do kół napędowych pojazdu samochodowego. Dominujący udział stanowi moc zużywana na pokonanie oporów toczenia. Jest ona zależna w głównej mierze od współczynnika oporu toczenia. Widzimy, że dla  $f = 0,03$  (asfalt) udział tej mocy wynosi ok. 60%, a dla  $f = 0,1$  – ponad 70%.

Dlatego też ważnym zagadnieniem jest utrzymywanie właściwego ciśnienia w ogumieniu. Dla kontroli i sterowania tym ciśnieniem służą rozwiązania coraz częściej stosowane w pojazdach samochodowych, jak np. pompowanie opon azotem. Zalety pompowania azotem wynikają z właściwości, jakimi charakteryzuje się to medium, a więc większą od powietrza gęstością molekularną. Daje to określone efekty, a mianowicie:

- mniejszy opór toczenia opon,
- mniejsze wahania ciśnienia w oponach w zależności od temperatury,
- przedłużenie trwałości opon,
- większe bezpieczeństwo jazdy wskutek lepszych właściwości trakcyjnych i stosowania obojętnego, niepalnego gazu.

W celu zmniejszenia oporów toczenia, przy pracy z naczepą trzyosiową, przy niepełnym wykorzystaniu ładowności stosuje się rozwiązanie umożliwiające uniesienie jednej pary kół jezdnych.

Na zmniejszenie oporów powietrza można wpływać po pierwsze stosując deflektory, jak również w przypadku odkrytej skrzyni ładunkowej rozmieszczając odpowiednio ładunek (rys. 11 i 12).

Uproszczenie konstrukcji układu napędowego i zastosowanie modułowego zespołu napędowego niezależnie od podwyższenia niezawodności wpływa na podwyższenie sprawności ogólnej, a tym samym na obniżenie zużycia paliwa. Dzieje się to na skutek wyeliminowania wału przegubowego, który wymaga starannego wyważenia i nie przekraczania określonych kątów załamania.

Jak wynika z powyższego rysunku (rys. 14), wyeliminowanie wału przegubowego skutkuje podwyższeniem sprawności układu napędowego o ok. 7%.

### 3. WNIOSKI

Przedstawione rozważania nie wyczerpują oczywiście całkowicie problematyki sprawność eksploatacyjnej pojazdów samochodowych. Zagadnienie należałoby rozpatrzeć dla przypadku ruchu krzywoliniowego na wzniesieniu lub spadku. Interesujące byłoby uwzględnienie w układzie napędowym zespołu (sprzęgło lub przekładnia hydrokinetyczna) pracującego w ciągłym poślizgu.

### LITERATURA

- [1] Dębicki M., 1986. Teoria samochodu. Teoria napędu. WNT Warszawa.
- [2] Gaszczuk P., 1992. Energeticzeskaja efektiwnost awtomobilia. Izdatelstwo Swit Lwow.
- [3] Siłka W., 2002. Teoria ruchu samochodu. WNT Warszawa.

## SELECTED PROBLEMS CONCERNING EFFICIENCY OF AUTOMOTIVE VEHICLE

### Summary

Mass development of motorization causes many new problems of technical nature as vehicles those connected with environment protection. In order to decrease running costs special emphasis has been put on the consumption of fuel and other used materials. The smaller the fuel consumption the fewer noxious components. In this article an analysis of the automotive vehicle overall efficiency has been performed as regards power losses occurrence in particularly subassemblies. A case of straight movement on a horizontal road has been considered.

Keywords: motor vehicles, overall efficiency, fuel consumption



## WYZNACZANIE TRAJEKTORII IDEALNYCH I RZECZYWISTYCH

Dariusz Kasprzak

ul. Pająkowskiego 13c/19. 87-100 Toruń

W artykule przedstawiono zastosowanie znanych zagadnień mechaniki klasycznej do wyznaczania torów idealnych i rzeczywistych. Pominięto tematykę oczywistą – na przykład – zasady dynamiki Newtona. Ograniczone ramy artykułu pozwalają zwrócić uwagę jedynie na kilka interesujących przykładów.

Słowa kluczowe: ruch złożony, ruch Lanchestera, sterowanie, optymalizacja

### 1. WSTĘP

W nowych prężnie rozwijających się dziedzinach techniki, np. w mechatronice zakłada się planowanie trajektorii według określonych kryteriów. Przyjmuje się, że technicznie ważnymi geometriami toru są odcinki prostej, odcinki przekrojów stożka lub tory spiralne [6]. Jeżeli w wyniku przeprowadzonej analizy uzyskuje się kilka dopuszczalnych rozwiązań, to często konieczne wydaje się wybranie trajektorii optymalnej. Najczęściej stosowanymi kryteriami optymalizacji mogą być: minimum długości, minimum czasu, minimum energii, itp. Od wielu współczesnych maszyn wymaga się, aby swoje zadanie wykonały w jak najkrótszym czasie. Modele optymalizacyjne zakładające takie kryterium operują najczęściej w obszarze rachunku wariacyjnego. Spośród nich najczęściej stosowanymi są: metoda wykorzystująca zasadę Pontriagina, programowanie dynamiczne Bellmana oraz zadanie w formie Mayera. Proces optymalizacji będzie tym bardziej wiarygodny, im dokładniejszy będzie model matematyczny ruchu. Uwzględnienie pełnego modelu lotu (składającego się niejednokrotnie z układu kilkunastu, a nawet kilkudziesięciu równań) czyni to zadanie nie zawsze opłacalnym.

Stanowi to podstawę poszukiwania analogii między znanymi i dobrze opisanymi zjawiskami fizycznymi a ruchem obiektu. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wybranych zagadnień mechaniki klasycznej mogących mieć wpływ na uproszczenie modelu matematycznego sterownika. Zostaną pominięte zagadnienia oczywiste (np. trzy zasady Newtona). Ograniczono się do następujących zagadnień:

- zasady zmiany pędu i krętu,
- równanie Lagrange'a-Eulera,
- zagadnienia ruchu złożonego,
- ruch w ujęciu Lanchestera.

W artykule przedstawiono problemy w oparciu o obiekt sterowania, jakim jest przeciwpancerne pocisk kierowany, ale również dobrze omawiane zagadnienia można rozszerzyć na inne urządzenia.

## 2. RÓWNIANIE LAGRANGE'A-EULERA, ZASADY ZMIANY PĘDU I KRĘTU

Jedną z metod wariacyjnych optymalizacji jest metoda polegająca na rozwiązaniu zadania w formie Mayera. Oczywiście, jak w każdym zadaniu optymalizacyjnym, chodzi tu o znalezienie spośród całej rodziny dostępnych torów lotu rakiety takiego, który będzie torem optymalnym dla zadanego kryterium z określonym wskaźnikiem jakości. Kryterium tym jest w przypadku ruchu rakiet kryterium minimalno-czasowe. Wspomniana powyżej metoda wykorzystuje w charakterze funkcji tworzącej (nazwa zaproponowana przez prof. Tatarkiewiczza – jako że tworzy ona problem badawczy) równanie Lagrange'a-Eulera w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial q_j} = 0 \quad (1)$$

Oczywiście postać funkcji tworzącej będzie zależna od konkretnego modelu matematycznego poddawanego procesowi optymalizacji. Przykładowe zastosowanie równania (1) do zadania w formie Mayera zostało pokazane w [1].

Aktualnie występuje wiele założeń pozwalających na wyznaczenie równań obiektu, jednakże najczęściej stosowane wydaje się zastosowanie zasady zmiany pędu i krętu. Rozwiązanie takie jest proponowane np. w [5].

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Pi}}{dt} &= \vec{F} \\ \frac{d\vec{K}}{dt} &= \vec{M} \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

$\vec{\Pi}, \vec{K}$  – wektory pędu i krętu układu materialnego.

$\vec{F}, \vec{M}$  – główny wektor sił i główny moment sił zewnętrznych działających na punkt materialny.

Powyższe równania w układzie współrzędnych związanym z obiektem można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Pi}_o}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\Pi}_o &= \vec{F} \\ \frac{d\vec{K}_o}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{K}_o + \vec{v}_o \times \vec{\Pi}_o &= \vec{M} \end{aligned} \quad (3)$$

Po przeprowadzeniu niezbędnych przekształceń i podstawieniu do wzoru na energię kinetyczną otrzymuje się układ równań: ruch środka masy i dookoła środka masy. Pełne wyprowadzenie tych równań można znaleźć np. w [5.8]. Przyjęcie założenia o osiowej symetrii badanego obiektu daje następujące układy równań eulerowskich:

– środka masy

$$\begin{aligned} m(\dot{U} - qW - rV) &= X \\ m(\dot{V} + rU - pW) &= Y \\ m(\dot{W} + pv - qU) &= Z \end{aligned} \quad (4)$$

– dookoła środka masy

$$\begin{aligned} I_x \dot{p} &= L \\ I_y \dot{q} - (I_z - I_x)pr &= M \\ I_z \dot{r} - (I_x - I_y)pq &= N \end{aligned} \quad (5)$$

W równaniach (4) oraz (5) oznaczono:

$U, V, W$  – składowe wektora prędkości,

$p, q, r$  – składowe wektora prędkości obrotowej,

$X, Y, Z$  – składowe wektora sił zewnętrznych,

$L, M, N$  – składowe wektora momentu sił wewnętrznych,

$I_x, I_y, I_z$  – momenty bezwładności wzdłuż odpowiednich osi.

Podsumowując, należy stwierdzić, że zarówno zasady zmiany pędu i krętu, jak i równanie Lagrange'a-Eulera znalazły szerokie zastosowanie w teorii sterowania.

### 3. RUCH ZŁOŻONY W TEORII STEROWANIA

Znalezienie podobieństwa między metodami naprowadzania a znanym z mechaniki klasycznej ruchem złożonym [7,10] stało się możliwe dzięki ujęciu lotu sterowanego jako ruchu nieswobodnego z więzami uogólnionymi [2].

W równaniach takiego ruchu rozgranicza się równania ruchu sterowanego idealnie od ruchu w przestrzeni błędów. Błędami naprowadzania (uchybnymi) są współrzędne ruchu względnego ( $\eta, \zeta$ ). Położenie obiektu w locie sterowanym idealnie określa zmienna  $\xi$ . Do odpowiednich funkcji formowania sygnału sterowania wejść więc zmienne  $\eta$  oraz  $\zeta$  wraz z pochodnymi lub ewentualnie całkami.

Mechanika klasyczna wyodrębnia w ruchu złożonym ruch unoszenia związany z układem obserwacji oraz ruch względny odbywający się względem tego układu.

Kolejnym krokiem na drodze do uzyskania wiarygodnego minimalno-czasowego procesu przechwycenia rakietą samonaprowadzającą się jest przedstawienie tego ruchu w ujęciu macierzowym.

Wprowadzono układ ruchomy, który na ogół wiąże się z poruszającym się obiektem  $0\xi\eta\zeta$ . Ruch ten odbywa się względem układu nieruchomego  $0xyz$ . Przejście między układami ruchomym i nieruchomym opisano następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + x_0 \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta + y_0 \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta + z_0 \end{aligned} \quad (6)$$



Transformacja odwrotna:

$$\begin{aligned}\xi &= a_{11}(x-x_o) + a_{21}(y-y_o) + a_{31}(z-z_o) \\ \eta &= a_{12}(x-x_o) + a_{22}(y-y_o) + a_{32}(z-z_o) \\ \zeta &= a_{13}(x-x_o) + a_{23}(y-y_o) + a_{33}(z-z_o)\end{aligned}\quad (7)$$

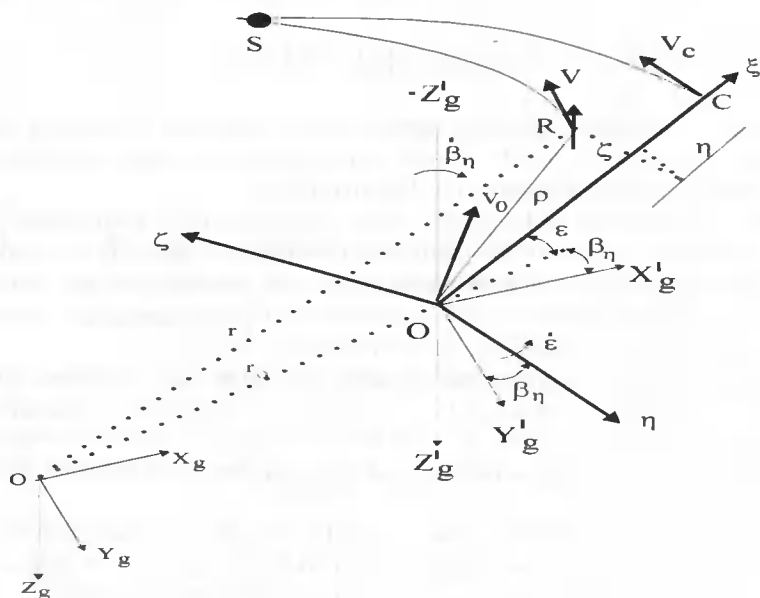
pozwała znaleźć ruch względny przy znanych ruchach: bezwzględnym i unoszenia.

W zależnościach (6) i (7) występują współczynniki  $a_{ij}$ , będące w gruncie rzeczy cosinusami kierunkowymi. Macierzowe ujęcie ruchu złożonego przy wykorzystaniu kątów układu „geograficznego” prowadzi do otrzymania dziewięciu zależności na prędkości i tyłuż na przyspieszenia kątowe. Celowe staje się więc wykorzystanie w macierzy cosinusów kierunkowych „kątów Eulera”. Zależności w ruchu złożonym przedstawia rysunek 1. Kąty pochylenia i odchylenia linii obserwacji celu oznaczono odpowiednio  $\varepsilon$  oraz  $\beta_n$ . Równanie wektorowe ruchu złożonego ma postać:

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{r}_o \quad (8)$$

w równaniu tym:

$$\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \vec{r}_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}; \quad \vec{\rho} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$



Rys. 1. Zależności w ruchu złożonym

Macierz cosinusów kierunkowych wyrażona za pomocą kątów  $\varepsilon$ ,  $\beta_n$  a więc quasi-eulerowskich przyjmie postać:

$$A(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos \beta_n & -\sin \varepsilon \cos \beta_n & \sin \beta_n \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ -\cos \varepsilon \sin \beta_n & \sin \varepsilon \sin \beta_n & \cos \beta_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

→

Zatem wektor  $\mathbf{r}$  położenia obiektu względem nieruchomego układu współrzędnych określa się w zapisie macierzowym w postaci:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos \beta_n & -\sin \varepsilon \cos \beta_n & \sin \beta_n \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ -\cos \varepsilon \sin \beta_n & \sin \varepsilon \sin \beta_n & \cos \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} \quad (10)$$

W ruchu złożonym wyodrębnia się dwie składowe prędkości: prędkość unoszenia oraz prędkość względną. Zależności na te prędkości uzyskuje się drogą zróżniczkowania równania (10). Prędkość bezwzględna w postaci wektorowej ma wówczas postać:

$$V_b = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

lub:

$$\vec{V}_b = A(\varepsilon, \beta_n) \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \frac{dA(\varepsilon, \beta_n)}{dt} + \begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \\ \dot{z}_o \end{bmatrix} \quad (11)$$

przy czym:

– prędkość względną

$$V_w = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

– prędkość unoszenia

$$V_n = \begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \\ \dot{z}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \left( \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \beta_n} \frac{d\beta_n}{dt} \right) = V_o + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \dot{\varepsilon} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \dot{\beta}_n \frac{\partial A}{\partial \beta_n} \quad (13)$$

W równaniach tych pochodne macierzy kierunkowych względem poszczególnych kątów wynoszą:

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon} = \begin{bmatrix} -\sin \varepsilon \cos \beta_n & -\cos \varepsilon \cos \beta_n & 0 \\ \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon \sin \beta_n & \cos \varepsilon \sin \beta_n & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta_n} = \begin{bmatrix} -\cos \varepsilon \sin \beta_n & \sin \varepsilon \sin \beta_n & \cos \beta_n \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \varepsilon \cos \beta_n & \sin \varepsilon \cos \beta_n & -\sin \beta_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

Zależności te stanowią punkt wyjścia do wyznaczenia przyspieszeń w ruchu złożonym. Wspomniane już prace [7,10] rozpatrują przyspieszenie w tym ruchu jako sumę przyspieszeń: względnego, unoszenia oraz Coriolisa. Przeprowadzenie różniczkowania prędkości bezwzględnej po czasie doprowadzi do następujących zależności na przyspieszenia bezwzględne:

$$a_b = A \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} + 2 \frac{dA}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \frac{d^2 A}{dt^2} + \begin{bmatrix} \ddot{x}_o \\ \ddot{y}_o \\ \ddot{z}_o \end{bmatrix} \quad (16)$$

gdzie:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \ddot{\varepsilon} + \frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon^2} \dot{\varepsilon}^2 + \frac{\partial A}{\partial \beta_n} \ddot{\beta}_n + \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_n^2} \dot{\beta}_n^2 \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon^2} = \begin{bmatrix} -\cos \varepsilon \cos \beta_n & \sin \varepsilon \cos \beta_n & 0 \\ -\sin \varepsilon & -\cos \varepsilon & 0 \\ \cos \varepsilon \sin \beta_n & -\sin \varepsilon \sin \beta_n & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_n^2} = \begin{bmatrix} -\cos \varepsilon \cos \beta_n & \sin \varepsilon \cos \beta_n & -\sin \beta_n \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \varepsilon \sin \beta_n & -\sin \varepsilon \cos \beta_n & -\cos \beta_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

Składowymi przyspieszenia (16) są:

- przyspieszenie względne

$$a_w = A(\varepsilon, \beta_n) \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} \quad (20)$$

- przyspieszenie unoszenia

$$a_u = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \left( \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \ddot{\varepsilon} + \frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon^2} \dot{\varepsilon}^2 + \frac{\partial A}{\partial \beta_n} \ddot{\beta}_n + \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_n^2} \dot{\beta}_n^2 \right) + \begin{bmatrix} \ddot{x}_o \\ \ddot{y}_o \\ \ddot{z}_o \end{bmatrix} \quad (21)$$

- przyspieszenie Coriolisa

$$a_c = 2 \frac{dA}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = 2 \left( \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial A}{\partial \beta_n} \dot{\beta}_n \right) \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Program lotu sterowanego idealnie wymaga takich wychyleń sterów, aby siły generowane wychyleniem sterów dawały przyspieszenia bezwzględne działające na obiekt

sterowania. Ponieważ przyspieszenie wypadkowe jest sumą przyspieszeń unoszenia, względnego i Coriolisa, zatem związki sprzęgające dynamikę wychyleń sterów związane są z wielkościami wchodzącymi do wyrażen na składowe przyspieszeń. Są nimi:  $(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $(\varepsilon, \beta_n)$ . Zatem związek między wychYLENIEM sterów a względnymi przemieszczeniami i pochodnymi kątów linii obserwacji celu wyraża się:

$$\begin{aligned}\Phi(\ddot{\delta}_n, \dot{\delta}_n, \delta_n) &= Y(t_{kw}, t_{kc}) [\Psi(\ddot{\eta}, \dot{\eta}, \eta) + \Psi_1(\varepsilon, \dot{\varepsilon})] \\ \Phi(\ddot{\delta}_m, \dot{\delta}_m, \delta_m) &= Y(t_{kw}, t_{kc}) [\Psi_2(\ddot{\zeta}, \dot{\zeta}, \zeta) + \Psi_3(\beta_n, \dot{\beta}_n)]\end{aligned}\quad (23)$$

Zależności (23) określają związki sprzęgające dynamikę wychyleń sterów z sygnałami sterowania. Otrzymane przyspieszenia stają się składnikami równania na wychylenie sterów niezbędne do idealnego sterowania. Błędami sterowania w ruchu przestrzennym są współrzędne ruchu względnego dane w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= V \cos \gamma \sin(\kappa_c - \beta_n) - \xi \dot{\beta}_n \cos \varepsilon \\ \dot{\zeta} &= V [\sin \gamma \cos \varepsilon - \cos \gamma \sin \varepsilon \cos(\kappa_c - \beta_n)] - \xi \dot{\varepsilon}\end{aligned}\quad (24)$$

Samonaprowadzanie w ujęciu ruchu złożonego to przypadek, kiedy biegun obserwacji pokrywa się z położeniem obiektu. Okazuje się więc, że ruch ten jest jedynie ruchem unoszenia. Znacznie upraszcza to wyznaczenie przyspieszeń oraz prędkości w tym ruchu. Obowiązywać będzie zależność (rysunek 1):

$$r = r_o \Rightarrow \xi = \eta = \zeta = 0 \Rightarrow \rho = 0 \quad (25)$$

Związki sprzęgające dynamikę wychyleń sterów z sygnałami sterowania (23) ograniczą się wówczas do zależności:

$$\begin{aligned}\Phi(\ddot{\delta}_n, \dot{\delta}_n, \delta_n) &= Y(t_{kw}, t_{kc}) \Psi_1(\dot{\varepsilon}, \varepsilon) \\ \Phi(\ddot{\delta}_m, \dot{\delta}_m, \delta_m) &= Y(t_{kw}, t_{kc}) \Psi_3(\dot{\beta}_n, \beta_n)\end{aligned}\quad (26)$$

Wypadkowe przyspieszenie będzie się równało przyspieszeniu unoszenia:

$$a_h = a_u = \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} = V_o \sqrt{\dot{\gamma}^2 + \dot{\kappa}^2} \quad (27)$$

Po dokonaniu niezbędnych przekształceń, zależność składowych całkowitego przyspieszenia ruchu złożonego ma postać:

$$a_n = (V \dot{\gamma} \sin \gamma - V \dot{\kappa} \cos \gamma)(k_n - 1) \beta_n + V k_n \dot{\beta}_n \cos \gamma \quad (28)$$

$$a_m = V k_m \dot{\varepsilon} - V \dot{\gamma}(\gamma - \varepsilon) \quad (29)$$

Przyspieszenie bezwzględne jest tu jedynie przyspieszeniem unoszenia. Przyspieszenia względne i Coriolisa przy samonaprowadzaniu się równają się zeru. Otrzymane przyspieszenia wchodzi w skład zależności na wychylenia sterów niezbędne do przestrzennego idealnego sterowania lotem rakiety, do którego powinno dążyć sterowanie rzeczywiste.

Podobne rozważania prowadzone dla zdalnego naprowadzania prowadzi do wniosku iż jest ono w swej istocie ruchem z nieruchomym biegunem obserwacji. Przypadek ten odpowiada następującym warunkom ruchu (rys. 1):

$$r_o = 0 \Rightarrow r = \rho$$

Zależności na całkowite przyspieszenia kierunkowe i w kanale pochylenia w przestrzennym ruchu złożonym dla przypadku zdalnego sterowania mają postać:

$$\begin{aligned} a_n &= \xi \ddot{\beta}_n \cos \varepsilon - (\dot{V} \cos \gamma - V \dot{\gamma} \sin \gamma) (\kappa - \beta_n) - \xi \dot{\beta}_n \dot{\varepsilon} \sin \varepsilon + 2 \dot{\xi} \dot{\beta}_n \cos \varepsilon \\ a_m &= \xi \ddot{\varepsilon} - \dot{V} (\gamma - \varepsilon) + 2 \dot{\xi} \dot{\varepsilon} \end{aligned} \quad (30)$$

Z przeprowadzonej analizy wynikają korzyści, jakie niesie rozpatrywanie ruchu obiektu jako ruchu złożonego. Szczególnie ułatwia to wyprowadzenie zależności na przyspieszenia niezbędne do idealnego kierowania ruchem dla przypadków zdalnego sterowania oraz samonaprowadzania. Zagadnienia przedstawione w tym rozdziale dokładniej zostały przedstawione w [3,4].

#### 4. RUCH LANCHESTERA

Celem poniższych rozważań jest przedstawienie zastosowania ruchu Lanchestera w teorii sterowania rakiet. Rozważania ograniczono do płaszczyzny podłużnej (ruch symetryczny, bez uwzględnienia przechyłu, obrotu wokół osi pionowej, ślizgu itp.). Równania ruchu środka ciężkości zapisano dla ruchu płaskiego w następującej postaci:

$$\begin{aligned} m \dot{V} &= F - P_x - mg \sin \gamma \\ m V \dot{\gamma} &= F + P_z - mg \cos \gamma \end{aligned} \quad (31)$$

Trzecie równanie jest równaniem ruchu obrotowego w postaci:

$$I_x \dot{p} = L \quad (32)$$

Element łuku toru oznaczono  $d\rho$ , wówczas równania (31) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{g} \dot{V} &= \frac{Q}{g} V \frac{dV}{d\rho} = F - P_x - Q \sin \gamma \\ \frac{Q}{g} V \dot{\gamma} &= \frac{Q}{g} V^2 \frac{dV}{d\rho} = F \alpha + P_z - Q \cos \gamma \end{aligned} \quad (33)$$

Program minimalno-czasowy sterowania daje dwa rozwiązania sprowadzające się do:

$$\begin{aligned} n_x &= n_{x \max} \\ n_x &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \text{oraz} \quad \begin{aligned} n_z &= n_{z, t} \\ n_z &= 0 \end{aligned}$$

W powyższych zależnościach literą  $n$  z odpowiednimi indeksami oznaczono przeciążenia działające wzdłuż odpowiednich osi. Na tej podstawie stwierdzono, że:

*Przy rozwiązaniach powyższych dla drugiej fazy lotu sterowanego siła ciągu i opór czołowy równoważą się wzajemnie w każdej chwili, a więc są analogiczne z założeniami dla ruchu Lanchestera.*

Zastosowanie założeń ruchu Lanchestera [9] do ruchu rakiety w płaszczyźnie poziomej spowodowało, że równania (31) oraz (32) przyjęły postać:

$$\begin{aligned} V \frac{dV}{d\rho} &= -g \sin \gamma \\ V^2 \frac{dV}{d\rho} &= g \left( \frac{P_z}{Q} - \cos \gamma \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Stwierdzono, że siła nośna jest proporcjonalna do kwadratu prędkości ze współczynnikiem zależnym jedynie od kąta natarcia. Z drugiego założenia wynika, że w ruchu tym kąt natarcia (i odpowiednio współczynnik siły nośnej) pozostają stałe. Pierwszy odcinek lotu idealnego rakiety samonaprowadzającej się musi odbywać się ze stałym kątem natarcia, stąd nasuwające się przeświadczenie o analogii tego lotu z ruchem Lanchestera.

Po uwzględnieniu znanych zależności na siłę oporu czołowego i siłę nośną określono:

$$\frac{P_z}{P_x} = \frac{V^2}{V_x^2} \quad (35)$$

W efekcie otrzymano równania:

$$\begin{aligned} V \frac{dV}{dz} &= g \\ V^2 \frac{d\gamma}{dz} \sin \gamma &= -g \left( \frac{V^2}{V_x^2} - \cos \gamma \right) \end{aligned} \quad (36)$$

i po przeprowadzeniu niezbędnych obliczeń i przekształceń otrzymano:

$$V \sin \gamma \frac{d\gamma}{dV} = -\frac{V^2}{V_x^2} + \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma - V \sin \gamma \frac{d\gamma}{dV} = \frac{V^2}{V_x^2} \quad (37)$$

Scalkowanie ostatniego wyrażenia doprowadziło do następującego równania:

$$V \cos \gamma = \int \frac{V^2}{V_x^2} dV = \frac{1}{3} \frac{V^3}{V_x^2} + C \quad (38)$$

Równanie (38) jest biegunowym równaniem hodografu. Jeżeli na początku lot będzie odbywał się z prędkością  $V = V_x$  i  $\gamma = 0$ , stała całkowania osiągnie wartość:

$$C = \frac{2}{3} V_x^3$$

Jeżeli  $z = \text{const}$  i  $\gamma = 0$ , to jednym z rozwiązań, jak należało oczekiwać, jest poziomy lot na wysokości:

$$z_0 = \frac{V_x^2}{2g}$$

Aby znaleźć inne rozwiązania, tj. inne możliwe trajektorie lotu idealnego, do równania (38) podstawiono wartość  $V$  i wprowadzono nową bezwymiarową zmienną:

$$\lambda = \frac{2gz}{V_x^2} = \frac{V^2}{V_x^2} \quad (39)$$

i otrzymano:

$$\cos \gamma = \frac{1}{3} \lambda + \frac{C_2}{\sqrt{\lambda}} \quad (40)$$

w powyższym równaniu:  $C_2 = \frac{C_1}{V_x}$

Z przedstawionej analizy wyciągnięto następujące wnioski:

- dla  $C_2 = \frac{2}{3}$  istnieje rozwiązanie odpowiadające lotowi poziomemu – tylko jeden punkt ( $\lambda = 1, \cos \gamma = 1$ )  $\in |\cos \gamma| \leq 1$ ,
- dla dużych wartości  $C_2$  nie istnieją punkty zawierające się w tym przedziale.
- dla  $C_2 > 0$   $\cos \gamma$  przyjmuje tylko wartości dodatnie, natomiast  $\lambda$  zmienia się tylko w niewielkim zakresie (jest zawsze bliska 1),
- dla  $C_2 < 0$   $\cos \gamma$  oraz składowa pozioma prędkości zmieniają się od wartości ujemnych na dużych wysokościach do wartości dodatnich na mniejszych wysokościach,
- dla  $C_2 = 0$  zależność  $\cos \gamma = f(\lambda)$  okazuje się prostą wychodzącą z początku układu współrzędnych i przechodzącą przez punkt ( $\lambda = 3, \cos \gamma = 1$ ).

Który z przedstawionych ruchów będzie miał miejsce w konkretnym przypadku zależy od warunków początkowych (od wartości i kierunku prędkości początkowej) oraz od programu minimalno-czasowego sterowania.

Założenia ruchu Lanchestera (choć wydawać by się mogło, że są one uproszczeniami zbyt daleko idącymi) pozwalają na ich wykorzystanie do ruchu idealnie sterowanego rakiety samonaprowadzającej się według programu minimalno-czasowego. O korzyściach z tym związanych świadczy otrzymanie analitycznych rozwiązań w formie zamkniętej dla przypadku lotu rakiety ze stałą prędkością. W rzeczywistych warunkach lotu należy wykorzystywać jedynie wycinki rozwiązań przytoczonych we wspomnianym opracowaniu. Przedziały tych wycinków wyznacza się dla konkretnych zadań sterowania, a więc warunków początkowych i punktów przełączenia sterowania.

## 5. PODSUMOWANIE

Przedstawione rozważania stanowią jedynie próbę znalezienia powiązań między znanymi i dobrze opisanymi zagadnieniami mechaniki klasycznej a trudnymi w analizie zagadnieniami sterowania obiektów. Co prawda dotyczą one sterowania raket, ale doskonale nadają się do analizy innych obiektów. Tak jak wspomniano we wstępie, niemożliwe jest rozważenie wszystkich zagadnień, które mogą być wykorzystywane w budowie modelu matematycznego, jednakże już te kilka przykładów (te bardziej znane przedstawione w punkcie 2, jak i te mniej znane – w punktach 3 i 4) jest na tyle obiecujących, że stanowią doping do dalszego poszukiwania takich analogii.

Powstanie tego artykułu nie byłoby możliwe, gdyby nie inspiracja naukowa (zwłaszcza w pkt. 3 i 4) **Pana prof. dr. hab. inż. Stanisława Dubiela** z WAT Warszawa.

## LITERATURA

- [1] Dębecki A., Dubiel S., 1988. Konstrukcja rakiety. Cz. 3. Wyd. wewn. WAT 1801/88 Warszawa.
- [2] Dubiel S., 1973. Więzy uogólnione i ich zastosowanie do badania sterowalności obiektów latających. Dodatek do Biuletynu WAT nr 12, Warszawa.
- [3] Dubiel S., Kasprzak D., 1998. Samonaprowadzanie w przestrzeni jako przypadek ruchu złożonego. Materiały II Międzynarodowej Konferencji Uzbrojeniowej „Naukowe Aspekty Techniki Uzbrojenia”, Cz. 1. Waplewo 27-29.10.1998, 79-88.
- [4] Dubiel S., Kasprzak D., 1998. Zdalne naprowadzanie jako szczególny przypadek przestrzennego ruchu złożonego. Materiały IX Konferencji „Sterowanie i regulacja w radiolokacji i obiektach latających”, Biuletyn 1 (29)/98, t. I, Jelenia Góra 16-18.06.1998, 189-198.
- [5] Gacek J., 1997. Balistyka zewnętrzna. Cz. 1. Wyd. WAT Warszawa.
- [6] Heimann B., Gerth W., Popp K., 2001. Mechatronika. Komponenty, metody, przykłady. PWN Warszawa.
- [7] Huber M.T., 1956. Mechanika ogólna i techniczna. PWN Warszawa.
- [8] Kasprzak D., 1997. Minimalno-czasowy problem przechwytywania rakiety samonaprowadzającą się w locie przestrzennym. Rozprawa doktorska, WAT Warszawa.
- [9] von Mises R., 1945. Theory of Flight. New York.
- [10] Suslow G.K., 1960. Mechanika techniczna. PWN Warszawa.

## DETERMINATION OF IDEAL AND TRUE TRAJECTORIES

## Summary

The article shows the use of known facts of classical mechanics in determining the ideal and true trajectories. Some basic and evident issues (like Newton's laws of dynamics for instance) have been left out. The limitations of the article allow only to pay attention on the several most interesting examples.

Keywords: 3-D motion, Lanchester's motion, control, optimization





## WŁAŚCIWOŚCI I WYTWARZANIE CIECZY MAGNETYCZNYCH

Katarzyna Kazimierska, Mariusz Kaczmarek, Bartosz Nowak

Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej  
Wydział Matematyki, Techniki i Nauk Przyrodniczych  
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego  
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

Ferro-ciecze są materiałami magnetycznymi nie występującymi w stanie naturalnym w przyrodzie. Z uwagi na rosnącą liczbę zastosowań tych materiałów (głównie w medycynie, przemyśle wydobywczym i technice) opracowano szereg metod ich otrzymywania. W pracy przedstawiono jedną z metod chemicznego uzyskiwania cieczy magnetycznej. Następnie opisano wyniki własnych badań magnetycznych cieczy wytworzonej na bazie syntezy chemicznej.

Słowa kluczowe: ciecze magnetyczne, paramagnetyki, namagnesowanie, krzywa Langevina

### 1. WSTĘP

W przyrodzie występują w stanie naturalnym trzy rodzaje materiałów magnetycznych: paramagnetyki, diamagnetyki oraz ferromagnetyki. Kryterium klasyfikacji stanowi wartość podatności magnetycznej (oznaczanej najczęściej symbolem  $\chi$ ), określającej zdolność materiału do namagnesowywania się pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego. W przypadku paramagnetyków wartość podatności magnetycznej waha się w granicach od  $10^{-3}$  do  $10^{-6}$ , dla ferromagnetyków wynosi od  $10^{-2}$  do  $10^0$ . Z kolei diamagnetyki cechują się ujemną wartością podatności magnetycznej, która wynosi ok.  $-10^{-5}$ . Oprócz wymienionych powyżej naturalnie występujących materiałów magnetycznych można wyróżnić substancje, których podatność magnetyczna jest w przybliżeniu równa jedności. Substancje te, nazywane cieczami magnetycznymi lub ferro-cieczami, definiowane są jako dwufazowy system, złożony z małych cząsteczek stałych ferro- lub ferrimagnetycznych zawieszonych w cieczy nośnej. Ponieważ wielkość tych cząstek jest rzędu 10 nm (100 Å), ciecze te klasyfikowane są do zawiesin koloidalnych. Przy braku pola magnetycznego ciecze magnetyczne zachowują się jak zwyczajne ciecze newtonowskie, nie wykazują namagnesowania i nie są źródłem pola magnetycznego. W obecności pola magnetycznego ferro-ciecze zachowują się podobnie jak paramagnetyczne gazy o wysokiej przepuszczalności. Źródłem właściwości paramagnetycznych rozważanych cieczy jest to, że każda pojedyncza cząstka ferromagnetyczna zawieszona w cieczy zachowuje się jak pojedyncza domena, posiadająca stałe pole magnetyczne. Pomimo, że atomy lub cząstki substancji paramagnetycznych mają różne od zera wypadkowe momenty magnetyczne w nieobecności pola są one ustawione chaotycznie i jako całość nie wykazują żadnych właściwości magnetycznych. Jeśli paramagnetyk znajdzie się w polu ma-

gnetycznym, momenty magnetyczne ustawiają się w kierunku pola i następuje jego namagnesowanie. Po usunięciu pola, w zależności od rodzaju samej cieczy namagnesowanie zanika błyskawicznie lub z pewnym opóźnieniem. Istotną różnicą pomiędzy cechami paramagnetycznymi cieczy magnetycznej a typowej stałej substancji paramagnetycznej, jak baru, glinu, magnezu, cezu itd. jest fakt, że wzrost namagnesowania ferro-cieczy pod wpływem przykładanego pola magnetycznego o małym natężeniu jest ok. czterokrotnie większy niż w przypadku namagnesowania substancji stałej. Dlatego też ferro-ciecze nazywane są superparamagnetykami.

Dzięki małym średnicom ziaren magnetycznych rzędu 100 Å, energia ruchu molekuł cieczy nośnej teoretycznie może utrzymać je przez dowolnie długi czas w stanie równomiernego zawieszenia – cząstki magnetyczne podlegają ruchom Browna. Jednakże na ciecz działają siły van der Waalsa, które wraz z siłami oddziaływań między dipolami powodują przypadkowe zderzenia cząstek, a w efekcie powstanie zjawiska koagulacji ziaren. Postępująca na skutek koagulacji sedymentacja może pozbawiać ferro-cieczy jej właściwości magnetycznych. Przeciwdziałanie zjawisku koagulacji polega na dodaniu do cieczy środka powierzchniowo aktywnego, który pokrywając cząstki magnetyczne warstwą monomolekularną nie dopuszcza do ich koagulacji.

Za twórcę ferro-cieczy uznaje się Stephena Papella, naukowca z NASA, który w latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia dokonał syntezy cieczy, służącej jako precyzyjne uszczelnienie magnetyczne łopatek wirujących w satelitach. Niemal jednocześnie w grupie pod kierunkiem Ronalda Rosensweiga udało się wytworzyć ferro-cieczy o właściwościach magnetycznych 10-krotnie przewyższających właściwości cieczy Papella. Dalszy istotny krok w rozwoju cieczy magnetycznych nastąpił w 1968 r., kiedy NASA sprzedała pierwszą licencję na cywilne wykorzystanie cieczy. Obecnie ferro-ciecze szeroko wykorzystuje się w różnego rodzaju uszczelnieniach, np. w napędach dyskowych komputerów, a także w urządzeniach wysokich ciśnień (rzędu 3.5 MPa). Ciecze magnetyczne wykorzystywane są w drukarkach atramentowych jako nośniki informacji, w recyklingu metali kolorowych, w obserwacji domen magnetycznych, w czujnikach pomiarowych, włącznikach i przełącznikach. Ostatnie badania wskazują, że w przyszłości ciecze te mogą również znaleźć zastosowania medyczne w zwalczaniu chorób, w tym nowotworowych. Prowadzi się prace nad sztucznym sercem, w którym ciecze magnetyczne miałyby spełniać rolę aktuatorów napędzanych przez przyłożone zewnętrzne pole magnetyczne. Możliwość zewnętrznego sterowania cieczami magnetycznymi sprawia, że mogą one także znaleźć zastosowanie jako nośniki leków, które docierałyby w konkretne miejsce w organizmie.

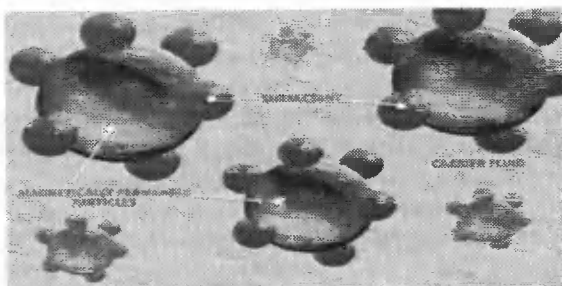
## 2. SKŁAD I CHARAKTERYSTYKA CIECZY MAGNETYCZNYCH

### 2.1. Budowa cieczy magnetycznej

Typowa ciecz magnetyczna składa się z trzech podstawowych składników: cząstek ferromagnetycznych, których jest ok. 5%, substancji powierzchniowo czynnych – 10% oraz z płynu nośnego – 85% (rys. 1).

Cząstki magnetyczne, określane często jako ziarna ferromagnetyczne, mają średnicę od 3 do 15 nm (średnio 10 nm). Cząstki te uzyskiwane są najczęściej z magnetytu lub z ferromagnetycznych metali takich jak kobalt i żelazo oraz ze związków magnetycznych, jak np. ferrytu manganu, ferrytu kobaltu oraz ferrytu manganowo-cynkowego.

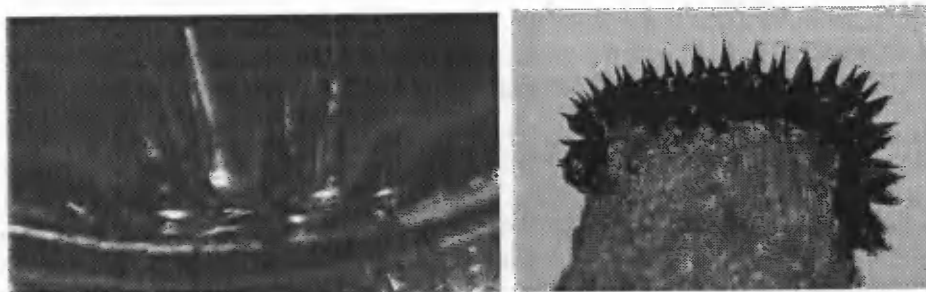
Cząstki magnetyczne pokryte są związkami powierzchniowo czynnymi (surfaktantami), które po dodaniu do roztworu przeciwdziałają aglomeracji poszczególnych cząstek magnetycznych. Przeciwdziałanie to polega na otaczaniu każdej cząstki magnetycznej warstwą substancji powierzchniowo czynnej lub na tworzeniu wokół cząstki warstwy elektrostatycznej. Cieczami bazowymi spełniającymi zadanie nośników jest zwykle woda oraz różnego rodzaju oleje, jak np. zwykły olej syntetyczny lub lekki olej mineralny, a także estry i węglowodory.



Rys. 1. Model budowy cieczy magnetycznej [12]

## 2.2. Zjawisko „jeżenia” się cieczy

Ciecz magnetyczna poddana działaniu pola magnetycznego wykazuje specyficzne właściwości w postaci odkształceń pojawiających się na powierzchni. Kiedy ciecz charakteryzuje się wysoką jakością, już w obecności umiarkowanego pola magnetycznego na jej powierzchni tworzą się tzw. „jeże”.



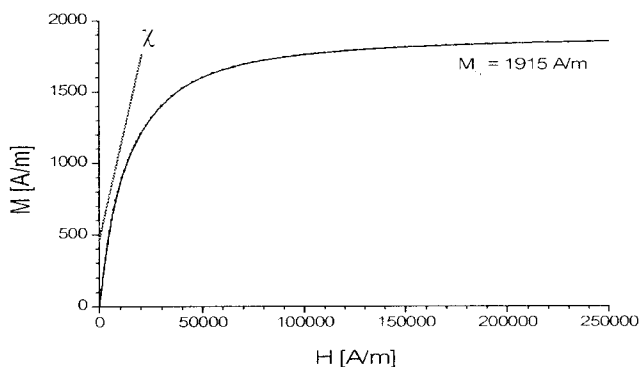
Rys. 2. Zdjęcie „jeży” powstałych na powierzchni cieczy magnetycznej pod wpływem przyłożonego magnesu

Zjawisko „jeżenia” się cieczy związane jest niestabilnością powierzchniową zawieszonych w cieczy cząstek magnetycznych, która objawia się na powierzchni cieczy magnetycznej w postaci małych stale obecnych fal. Amplituda fal powierzchniowych wzrasta ze wzrostem natężenia przykładanego pola magnetycznego i po przekroczeniu pewnej wartości na powierzchni kształtują się „jeże”, które zmieniają rozmiary w zależności od natężenia pola. Zjawisko „jeżenia” jest najskuteczniejszym testem sprawdzenia jakości cieczy magnetycznych.

### 2.3. Właściwości fizyczne ferro-cieczy

Za właściwości fizyczne ferro-cieczy odpowiedzialne są głównie właściwości fazy dyspersyjnej, którą tworzą cząstki ferromagnetyczne lub ferrimagnetyczne. Do najważniejszych właściwości fizycznych, obok właściwości hydrodynamicznych, należą: namagnesowanie, relaksacja magnetyczna, lepkość oraz temperatura punktu Curie.

Namagnesowanie jest związane z właściwościami superparamagnetycznymi, które cechuje to, że po przyłożeniu zewnętrznego pola magnetycznego o małym natężeniu namagnesowanie początkowo wzrasta proporcjonalnie do pola, jednakże dla pewnego natężenia następuje osiągnięcie stanu nasycenia magnetycznego, w którym nie obserwuje się wzrostu namagnesowania przy dalszym wzroście natężenia. Nasycenie magnetyczne, definiowane jako maksymalna wielkość momentu magnetycznego w jednostce objętości, jest wielkością zależną od koncentracji substancji magnetycznych zawieszonych w cieczy. Im większa jest koncentracja cząstek magnetycznych, tym większe jest nasycenie magnetyczne. Ferro-ciecze należą do substancji o niskim nasyceniu magnetycznym, których wartość waha się w granicach od 7.5 do 40 mT, podczas gdy żelazo ma nasycenie magnetyczne 1.7 T. Typowy wykres krzywej namagnesowania dla cieczy magnetycznej przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Wykres krzywej namagnesowania

Na wykresie krzywej namagnesowania (rys. 3) zaznaczono bezwymiarowy parametr  $\chi$ , definiowany jako *podatność magnetyczna*, która, jak wspomniano wcześniej, charakteryzuje zdolność substancji do zmiany jej namagnesowania pod wpływem przyłożonego zewnętrznego pola magnetycznego.

Jedną z najbardziej spektakularnych właściwości fizycznych ferro-cieczy jest efekt magnetolepkościowy. Polega on na zmianie lepkości cieczy magnetycznej pod wpływem przykładanego zewnętrznego pola magnetycznego. Efekt ten zostaje dodatkowo wzmocniony poprzez wewnętrzne mechanizmy tworzenia się klastrów i łańcuchów klastrów w samej cieczy.

W przypadku braku pola magnetycznego, ciecz magnetyczną traktuje się jako zawiesinę koloidalną, dla której lepkość dynamiczną szacuje się ze wzoru Einsteina:

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 + 2.5\phi), \quad (1)$$

gdzie  $\eta$  oznacza lepkość cieczy magnetycznej,  $\varphi$  jest zawartością (stężeniem) substancji stałych, a  $\eta_0$  jest lepkością cieczy nośnej. Wzór (1) stosuje się dla małych stężeń cząstek magnetycznych, zaś dla większych stężeń stosuje się uogólniony związek:

$$\eta = \eta_0 \cdot \frac{1}{1 + a\varphi + b\varphi^2} \quad (2)$$

gdzie:  $a$ ,  $b$ ,  $\varphi_c$  są współczynnikami wyznaczanymi eksperymentalnie i wynoszącymi odpowiednio:

$$a = -2,5, \quad b = \frac{5}{2} \frac{\varphi_c - 1}{\varphi_c^2}, \quad \varphi_c = 0,74.$$

Wartość lepkości dynamicznej w funkcji natężenia pola magnetycznego jest szacowana na podstawie wzoru [7]:

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 + 2,5\varphi + 1,5 \sin^2 \varphi_s) \quad (3)$$

gdzie:  $\sin^2 \varphi_s = 0,5 (1 + \beta^{-2}) - [0,25 (1 + \beta^{-2})^2 - \beta^{-2} \sin^2 \gamma]^{0,5}$ , zaś

$$\beta^{-1} \approx \frac{\mu \langle M \cdot H \rangle}{4\pi a^3 \kappa} = \frac{\mu MH}{4\pi a^3 \kappa} L\left(\frac{\mu MH}{kT}\right), \quad (4)$$

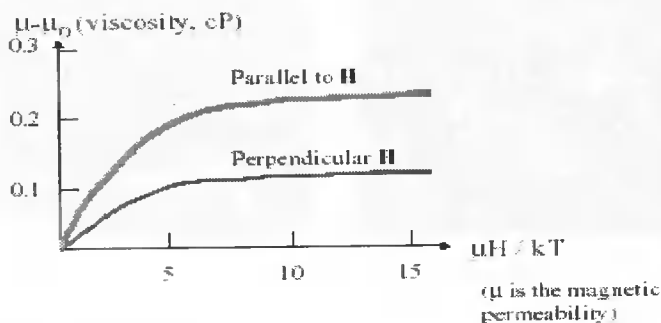
$L$  jest funkcją Langevina, a  $\gamma$  kątem między osią obrotu cieczy a wielkością  $H$ .

Na rysunku 4 przedstawiono wykres zmiany lepkości cieczy magnetycznej w funkcji przykładowego natężenia pola magnetycznego, gdy linie pola ustawione są prostopadle i równoległe do kierunku przepływającej cieczy. Lepkość oferowanych cieczy komercyjnych waha się w granicach od 5 do 25 000 cP (5-25 000 mPa s).

Obok lepkości, ważnym parametrem fizycznym jest gęstość cieczy magnetycznej, którą wyznacza się za pomocą piknometru lub szacuje na podstawie wzoru:

$$\rho = \rho_s \varphi_s + \rho_a (\varphi_n - \varphi_s) + \rho_f (1 - \varphi_n) \quad (5)$$

gdzie:  $\rho$  jest gęstością cieczy magnetycznej,  $\rho_s$  oznacza gęstość fazy stałej (magnetycznej),  $\rho_a$  jest gęstością surfaktanta, a  $\rho_f$  gęstością cieczy nośnej,  $\varphi_s$  oznacza objętość frakcji stałej, a  $\varphi_n$  hydrodynamiczne stężenie objętościowe.



Rys. 4. Efekt magneto-lepkościowy [8]

Gęstość ferro-cieczy jest większa od gęstości samej cieczy nośnej, a ponadto wzrasta ze wzrostem koncentracji fazy stałej. Dodatkowo, w obecności pola magnetycznego obserwuje się pozorną zmianę gęstości cieczy.

Trwałość cieczy magnetycznej wystawionej na działanie czynników atmosferycznych zależy w znacznym stopniu od zdolności parowania cieczy nośnej, która powinna być jak najmniejsza. Ponadto lotność cieczy maleje ze wzrostem jej lepkości.

W tabeli 1 przedstawiono przykładowe własności eksploatacyjne dostępnych cieczy magnetycznych.

Tabela 1. Właściwości fizyczne wybranych cieczy magnetycznych

Ciecz nośna	Nasylenie magnetyczne [A·m <sup>-1</sup> ]	Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]	Lepkość <sup>a</sup> [Pa·s]	Temperatura topnienia <sup>b</sup> [K]	Temperatura wrzenia <sup>c</sup> [K]
Węglowodory	15.90	1050	0.003	278	350
	31.80	1250	0.006	281	350
Woda	15.90	1180	0.007	273 <sup>e</sup>	299
	31.80	1380	0.010	273 <sup>e</sup>	299
Estry	15.90	1150	0.014	217	422
	31.80	1300	0.030	211	422
	47.70	1400	0.035	211	422
Fluorowodory	7.96	2050	2.5	239	456
Diestry	15.90	1185	0.075	236	422

a – mierzona bez pola magnetycznego

b – lepkość 100 Pa·s

c – ciśnienie poniżej 133 Pa

e – temperatura krzepnięcia

Jednym z niezwykle istotnych parametrów, charakteryzującym właściwości magnetyczne materiałów jest temperatura Curie, powyżej której materiały magnetyczne tracą swoje właściwości magnetyczne. W przypadku materiałów magnetycznych ciał stałych temperatura Curie jest zawsze znacznie mniejsza od temperatury wrzenia. W cieczach magnetycznych wynosi ona od 65 do 200°C.

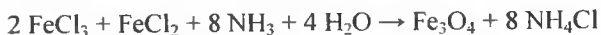
### 3. PRZYGOTOWANIE I BADANIA WŁASNEJ CIECZY MAGNETYCZNEJ

Ze względu na sposób uzyskiwania cząstek różni się trzy podstawowe metody przygotowania cieczy magnetycznych. Pierwsza z metod, zaproponowana przez Papella, polega na mokrym zmieleniu mikrometrycznych ziaren magnetycznych do rozmiarów nanometrów. Druga, najbardziej uniwersalna bazuje na reakcjach strącania tlenków metali. Z kolei trzecia, a zarazem najnowsza wykorzystuje bakterie termofilne, które w procesie oddychania wytwarzają nanometrycznych rozmiarów tlenki żelazowe.

### 3.1. Przygotowanie własnej cieczy magnetycznej

Przygotowanie cieczy magnetycznej oparto na procedurze opisanej w czasopiśmie "Chemical Education", Vol. 76, 943 (1999). Synteza ferro-cząstek bazuje na reakcji łączenia jonów żelaza(II) i żelaza(III) w obecności amoniaku rozpuszczonego w wodzie destylowanej.

Reakcja chemiczna zachodzi według równania:



gdzie składnikami reakcji są:

$\text{FeCl}_3$  – chlorek żelaza trójwartościowego(Fe III),

$\text{FeCl}_2$  – chlorek żelaza dwuwartościowego(Fe II),

$\text{NH}_3$  – amoniak,

$\text{Fe}_3\text{O}_4$  – magnetyt,

$\text{NH}_4\text{Cl}$  – chlorek amonu.

W celu przeciwdziałania aglomeracji cząsteczek magnetycznych do roztworu dodaje się surfaktant – w postaci roztworu wodorotlenku czterometyloamoniowego:  $(\text{CH}_3)_4\text{NOH}$ .

#### 3.1.1. Szczegółowy opis procedury syntezy ferro-cieczy

Syntezę magnetytu rozpoczyna się od dodania  $8 \text{ cm}^3$  1 M roztworu chlorku żelaza(III) i  $2 \text{ cm}^3$  2 M roztworu chlorku żelaza(II) do kolbki o pojemności  $250 \text{ cm}^3$ , umieszczonej na uruchomionym mieszadle magnetycznym. Następnie do kolbki bardzo wolno (przez 5 minut) dodaje się  $100 \text{ cm}^3$  1 M roztworu uwodnionego amoniaku. Po dodaniu wyłącza się mieszadło, usuwa mieszadelko, a ciecz pozostawia się do sedymentacji. Po upływie kilkunastu minut dekantuje się wodę od substancji pozostałej na dnie, którą dalej przelewa się do plastikowego naczynka umieszczonego na mieszadle magnetycznym. W ostatnim etapie dodaje się 2-4  $\text{cm}^3$  roztworu 25% wodorotlenku czterometyloamoniowego –  $(\text{CH}_3)_4\text{NOH}$ . Po wymieszaniu cieczy szklaną bagietką na jej powierzchni powinny pojawić się „jeży” jak na rysunku 5 lub 6, będące potwierdzeniem uzyskania substancji magnetycznej.



Rys. 5. Zdjęcie tworzących się "jeży" na powierzchni cieczy pod wpływem przyłożonego magnesu



gdzie  $H_1$  jest wartością natężenia pola magnetycznego, przy którym funkcja  $f(\xi)$  osiąga wartość maksymalną.

Znając efektywny moment dipolowy można także oszacować średni promień cząstek magnetycznych wg równania:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m_{\text{eff}}}{4\pi \cdot M_s}} \quad (11)$$

gdzie  $M_s$  – oznacza nasycenie magnetyczne.

W dostatecznie małych polach magnetycznych podatność magnetyczną można przedstawić w zależności od częstotliwości, w postaci zespolonej:

$$\chi(f) = \chi'(f) - i\chi''(f) \quad (12)$$

gdzie  $f$  jest częstotliwością pola magnetycznego,  $\chi'(f)$  – charakteryzuje odwracalne procesy namagnesowania, a  $\chi''(f)$  – charakteryzuje procesy dyssypacji energii pola magnetycznego. Część rzeczywistą podatności magnetycznej  $\chi'$  wyznacza się ze wzoru:

$$\chi'(f) = \frac{L_1(f) - L_0(f)}{L_0(f)} \quad (13)$$

gdzie  $L_0$  jest indukcyjnością cewki bez cieczy magnetycznej, zaś  $L_1$ , indukcyjnością cewki wypełnionej cieczą magnetyczną. Część urojona podatności magnetycznej  $\chi''$  wyznacza się w oparciu o równanie:

$$\chi''(f) = \frac{R(f) - R_0(f)}{2\pi \cdot f \cdot L_0(f)} \quad (14)$$

gdzie  $R(f)$  jest opornością cewki z cieczą magnetyczną, natomiast  $R_0(f)$  jest opornością cewki bez cieczy magnetycznej.

Znając wykres podatności magnetycznej w ustawieniu równoległym  $\chi'$ , można dalej wyznaczyć **krzywą namagnesowania** próbki  $M$  w funkcji zmieniającego się natężenia pola magnetycznego  $H$ , korzystając przy tym z zależności, że namagnesowanie równe jest całce z podatności magnetycznej  $\chi'$ :

$$M(H) = \int_0^H \chi' dH \quad (15)$$

gdzie:  $\chi'$  zgodnie z równaniem (3.1) wynosi:

$$\chi'(\xi) = 3\chi_0 \frac{dL(\xi)}{d\xi} = 3\chi_0 \left[ \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\sinh^2 \xi} \right]$$

### 3.2.2. Badania eksperymentalne

Pomiar właściwości magnetycznych cieczy został przeprowadzony wykorzystując aparaturę i metodę opracowaną w Instytucie Akustyki na Uniwersytecie im. Adama

Mickiewicza w Poznaniu. W pomiarach wykorzystano następujące urządzenia: teslometr typ RX 21-Teslometer oraz układ sterujący polem magnetycznym z elektromagnesem (o zakresie 500 mT-1T): Magnet Power Supply typ PZP 8005, wyprodukowany w Zakładzie Doświadczalno – Produkcyjnym RadioPAN.

W doświadczeniu wstępnie zmierzono:

- 1) indukcyjność pustej cewki:  $L_0 = 149,7 \mu\text{H}$ .
- 2) indukcyjność cewki wypełnionej cieczą magnetyczną:  $L_1 = 165,7 \mu\text{H}$ .

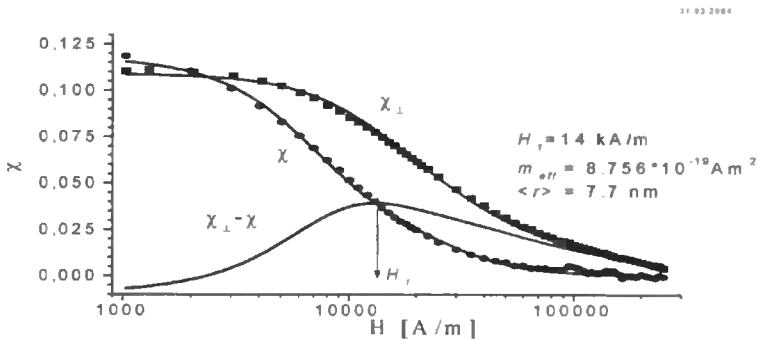
Znając te wielkości obliczono rzeczywistą podatności magnetycznej  $\chi$  zgodnie ze wzorem (13):

$$\chi = \frac{L_1 - L_0}{L_0} = \frac{165,7 - 149,7}{149,7} = 0,107 [-]$$

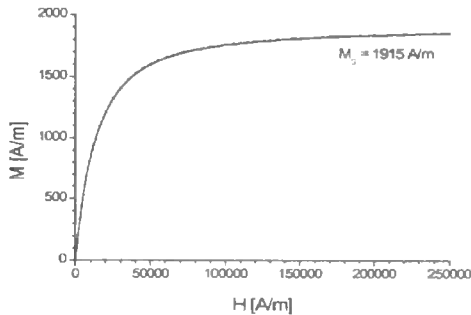
Następnie zmierzono:

- 3) dobroć pustej cewki:  $Q_0 = 0,225$ ,
- 4) dobroć cewki wypełnionej cieczą magnetyczną:  $Q_1 = 0,250 \mu\text{H}$ ,
- 5) indukcje pola w szczelinie bez uruchomienia elektromagnesu:  $B = 1,29 \text{ mT}$ ,
- 6) zmianę indukcyjności oraz dobroci cieczy magnetycznej w funkcji natężenia pola magnetycznego w ustawieniu prostopadłym oraz równoległym linii pola.

Na podstawie danych pomiarowych, zgodnie z rozważaniami przedstawionymi w punkcie 3.2.1, wykreślono krzywą Langevina, pokazaną na rysunku 8 oraz krzywą podatności magnetycznej (rys. 9).



Rys. 8. Wykres krzywej Langevina



Rys. 9. Wykres krzywej namagnesowania

Z krzywej Langevina odczytano wartość natężenia pola magnetycznego dla maksimum funkcji  $f(\xi) = \chi_{\perp}(\xi) - \chi(\xi)$  wynoszącą  $H_1 = 14$  kA/m, a następnie zgodnie ze wzorem (10) i (11), wyliczono moment efektywny cząstki dipolowej, który w tym przypadku wynosi  $m_{eff} = 8.756 \cdot 10^{-19}$  Am<sup>2</sup>, oraz średni promień cząstek magnetycznych, który wynosi:  $r = 7.7$  nm.

#### 4. WNIOSKI KOŃCOWE

Ciecze magnetyczne należą do klasy materiałów o unikalnych właściwościach. Opanowanie technologii wytwarzania i wykorzystanie sterowalnych właściwości cieczy pozwala na rozwiązanie za ich pomocą wielu problemów technicznych. W pracy przedstawiono jeden z mniej złożonych sposobów uzyskania takiej substancji i wyniki jej badań magnetycznych. W najbliższej przyszłości planuje się poszerzenie badań nad właściwościami otrzymanej cieczy w zewnętrznym polu magnetycznym z wykorzystaniem pomiarów ultradźwiękowych. Ponadto podejmuje się próby wyznaczenia właściwości ferro-cieczy wypełniających magnetycznie miękki ośrodek porowaty.

#### LITERATURA

- [1] Enzel P., Adelman N., Beckman K.J., Cambell D.J., 1999. Preparation of an Aqueous-Based Ferrofluids. *Chemical Education* 76, 943.
- [2] van Ewijk G.A. Phase behaviour of mixtures of magnetic colloids and non adsorbing polymer. Praca doktorska.
- [3] Lawnicza L., Alexiou Ch., Bergemann Ch., 2001. Clinical Application of Magnetic Drug. *Journal of Surgical Research* 95.
- [4] Lawniczak A., Milecki A., 1999. Ciecze elektro- i magnetoreologiczne oraz ich zastosowanie w technice. Wyd. Politechniki Poznańskiej.
- [5] Moridis G.J., Borglin S.E., Oldenburg C.M., Becker A., 1998. Theoretical and Experimental Investigations of Ferrofluids for Guiding and Detecting Liquids in the Subsurface. Earth Science Division. Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA 94720.
- [6] Muller H.W., Flow behavior of ferrofluids. Materiały internetowe Max – Planck Institute for Polymer Research: <http://www-theory.mpip-mainz.mpg.de>
- [7] Odenbach S. Magnetic properties of ferrofluids. Materiały internetowe ZARM University – <http://www.zarm.uni-bremen.de>
- [8] Rosensweig R.E., 1997. Ferrohydrodynamics. Dover edition.
- [9] Skumiel A., 1999. Wpływ pola magnetycznego na akustyczne właściwości cieczy magnetycznej. Wyd. Nauk UAM Poznań.
- [10] Shimada K., Akagami Y., Fujita T., Miyazaki T., Kamiyama S., Shibayama A., 2002. Characteristics of magnetic compound fluid (MCF) in a rotating rheometer. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 252.
- [11] <http://faculty.washington.edu/finlayso/ferrofluid.html>; materiały internetowe.
- [12] University of Washington, Department of Chemical Engineering.

- [13] <http://www.carolina.com>: materiały internetowe firmy Carolina.
- [14] <http://www.ferrotec-europe.de>: materiały internetowe firmy FerroTec. Limited.
- [15] <http://www.mrfluid.com>: materiały internetowe firmy LORD MR Technology.
- [16] [http://XeroxTechnology - Ferofluids.htm](http://XeroxTechnology-Ferofluids.htm): materiały internetowe firmy Xerox Technology.

## PROPERTIES AND PREPARATION OF FERROFLUIDS

### Summary

Ferofluids are stable colloidal suspensions of magnetic particles in carrier liquids. The fluids are superparamagnetic having specific magnetic and mechanical properties in the presence of magnetic field. In this paper one of the techniques of preparation of the ferofluids based on chemical synthesis is described. Then, magnetic measurements for the obtained magnetic fluid clearly show that it is material owing magnetic properties.

Keywords: magnetic fluids, paramagnetic, magnetization, Langevin curve

## POMIAR PRĘDKOŚCI FAZOWEJ FAL ULTRADŹWIĘKOWYCH W NASYCONYM MATERIALE POROWATYM. METODA WIDMA AMPLITUDOWEGO

Jan Kochański<sup>1</sup>, Józef Kubik<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instytut Techniki  
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego  
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

<sup>2</sup> Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej  
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego  
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono metodę wyznaczania prędkości fazowej fal ultradźwiękowych w oparciu o przebieg widm amplitudowych sygnałów odbitych od badanej próbki. Metodę zilustrowano przykładami wyznaczając prędkość fazową dla dwóch rodzajów materiałów: aluminium i spieku granulatu szklanego.

Słowa kluczowe: prędkość fazowa, widmo amplitudowe, liczba falowa

### 1. WPROWADZENIE

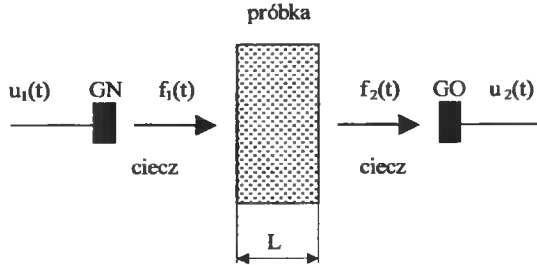
Nieniszczące, ultradźwiękowe metody badań materiałów są znane i stosowane w wielu różnych dziedzinach nauki i techniki. Podstawą do wnioskowania o badanych materiałach (wadach w nich występujących, własnościach sprężystych, strukturze wewnętrznej) jest pomiar parametrów fal ultradźwiękowych propagujących się w badanym materiale, tj. tłumienia i prędkości tych fal, oraz wyznaczenie ich widm: amplitudowego i fazowego. Wyżej wymienione parametry fal oraz ich przebieg w funkcji częstotliwości są jednoznacznie określone przez zespoloną liczbę falową oraz jej przebieg w funkcji częstotliwości. Znane są metody eksperymentalne [1,2,5], wyznaczania tych parametrów, bazujące na transformacji Fouriera fal przechodzących przez badany ośrodek. Znajomość transformat Fouriera sygnałów na wejściu i wyjściu badanego ośrodka (rys. 1), a w szczególności ich ilorazu, stwarza teoretycznie możliwość wyznaczenia ww. parametrów fal. Aby zapewnić dobre sprzężenie głowic ultradźwiękowych (GN – głowica nadawcza, GO – głowica odbiorcza) z badaną próbką pomiar realizowany jest w zanurzeniu (rys. 1). Jeśli oznaczyć transformaty Fouriera impulsów  $f_1(t)$  oraz  $f_2(t)$  odpowiednio przez  $\mathfrak{F}_1(\omega)$  oraz  $\mathfrak{F}_2(\omega)$ , to parametry fal w funkcji częstotliwości można przedstawić w postaci następujących zależności [1,2]:

$$\alpha(\omega) = \frac{20}{L} \log \frac{|\mathfrak{F}_1(\omega)|}{|\mathfrak{F}_2(\omega)|} \quad (1)$$

$$v(\omega) = \frac{2\pi f L}{2\pi n + [\psi_2(\omega) - \psi_1(\omega)]} \quad (2)$$

gdzie:

$|\mathfrak{I}_1(\omega)|$  oraz  $|\mathfrak{I}_2(\omega)|$  oznaczają widma amplitudowe, natomiast wyrażenia  $\psi_1(\omega) = \arg[\mathfrak{I}_1(\omega)]$  oraz  $\psi_2(\omega) = \arg[\mathfrak{I}_2(\omega)]$  – widma fazowe przebiegów  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ ;  $L$  – oznacza grubość próbki,  $\omega$  – pulsację, a  $f$  – częstotliwość drgań.

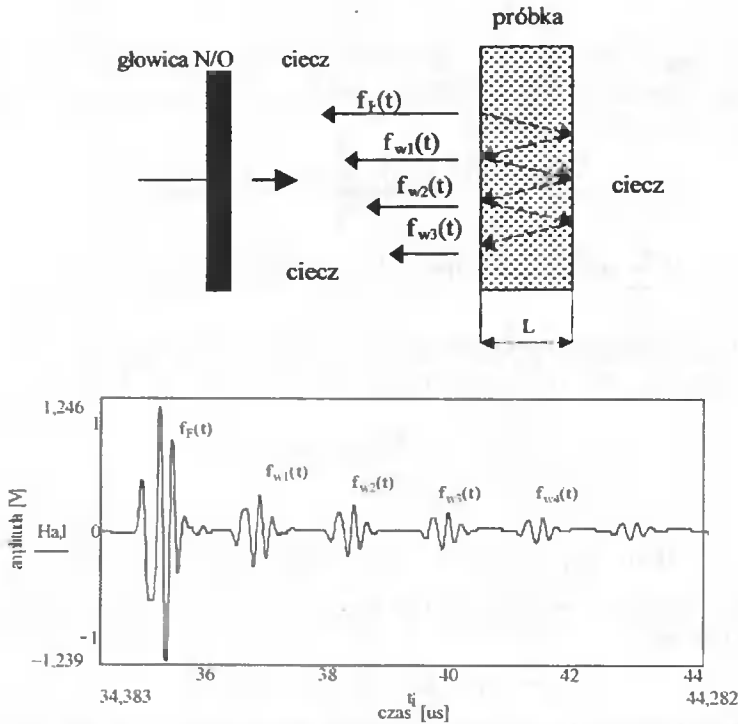


Rys. 1. Idea metody fali przechodzącej:  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  – impulsy falowe,  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  – impulsy napięciowe

W praktyce jednak mierzy się (ze względów oczywistych) sygnały napięciowe  $u_1(t)$  oraz  $u_2(t)$ , a nie  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ . Z tego właśnie powodu zastosowanie powyższej metody do wyznaczania parametrów fal ultradźwiękowych w materiale (przy nieznanoci charakterystyk częstotliwościowych głowic ultradźwiękowych GN i GO) jest niedopuszczalne, gdyż uzyskanych wyników nie można byłoby uznać za prawidłowe. Trudność tę można wyeliminować testując oddzielnie dwie próbki tego samego materiału o różniących się grubościami [1,2]. Uzyskane wyniki będą jednak prawidłowe tylko przy założeniu, że struktury wewnętrzne testowanych próbek są takie same, co w praktyce jest trudne do spełnienia, a w przypadku materiałów porowatych wręcz niemożliwe. Przedstawiona poniżej metoda widm amplitudowych do wyznaczania prędkości fazowej bazuje na pomiarze fal odbitych od jednej próbki, za pomocą jednej głowicy (nadawczo-odbiorczej) i nie wymaga znajomości charakterystyk częstotliwościowych tej głowicy.

## 2. METODA WIDM AMPLITUDOWYCH

Istota wyznaczania prędkości fazowej tą metodą (rys. 2) opiera się na pomiarze serii impulsów: impulsu  $f_r(t)$  odbitego od powierzchni frontowej próbki oraz ciągu impulsów  $f_{w1}(t), f_{w2}(t), f_{w3}(t), \dots$  odbitych od powierzchni granicznych (między cieczą a próbka) wewnątrz próbki i powracających do głowicy nadawczej pełniąc również rolę odbiornika.



Rys. 2. Idea metody echa (fal odbitych):  $f_F(t)$  – impuls odbity od powierzchni frontowej;  $f_{w1}(t)$ ,  $f_{w2}(t)$ ,  $f_{w3}(t)$ , ... – kolejne odbicia wewnętrzne

Transformatę Fouriera zaburzenia falowego  $f(x,t)$  propagującego się w kierunku „x” można wyrazić następująco [4]:

$$\mathfrak{F}[f(x,t)] = \mathfrak{F}[f(0,t)] \exp(-i \cdot k \cdot x) = \mathfrak{F}[f(0,t)] \exp(-i \cdot \beta \cdot x) \exp(-\alpha \cdot x) \quad (3)$$

gdzie:

- $k = \beta - i\alpha$  – zespolona liczba falowa,
- $\alpha$  – współczynnik tłumienia amplitudy fali,
- $\beta$  – dla fal harmonicznyc  $\beta = \omega/v$ , przy czym  $\omega = 2\pi f$  a  $v$  jest prędkością fazową fali.

Zakładając, że pierwszy impuls odbity wewnątrz próbki  $f_{w1}(t) = u(0,t)$ , tzn. ma współrzędną  $x = 0$ , transformatę impulsu odbitego od powierzchni frontowej próbki można wyrazić następująco:

$$\mathfrak{F}[f_1(f)] = \mathfrak{F}[-a \cdot u(-2L,t)] \quad (4)$$

a uwzględniając zależność (3) otrzymamy:

$$\mathfrak{F}[f_1(t)] = -a \mathfrak{F}[u(0,t)] \exp(i2L\beta) \cdot \exp(2L\alpha) \quad (5)$$

gdzie „a” jest stałą rzeczywistą. Podstawiając następnie w tym wyrażeniu stałą  $A = -a \cdot \exp(2L\alpha)$  otrzymamy ostatecznie, dla impulsu odbitego od powierzchni frontowej próbki, jego transformatę w postaci:

$$\mathfrak{Z}[f_r(t)] = -A \cdot \mathfrak{Z}[u(0,t)] \cdot \exp(i2L\beta) \quad (6)$$

Stosując dalej zależność (3) i dokonując prostych przekształceń, transformatę Fouriera ciągu impulsów odbitych wewnątrz próbki (rys. 2) i docierających do głowicy odbiorczej można wyrazić w postaci:

$$\mathfrak{Z}[f_{w1}(t) + f_{w2}(t) + f_{w3}(t) + \dots] = \mathfrak{Z}\left[\sum_{n=0}^{\infty} u(2Ln, t)\right] = \mathfrak{Z}[u(0,t)] \cdot \{1 - \exp[-2L(i\omega/v + \alpha)]\}^{-1}. \quad (7)$$

Ostatecznie, uwzględniając zależności (6) i (7), transformatę ciągu wszystkich impulsów docierających do głowicy odbiorczej można przedstawić w postaci:

$$\mathfrak{Z}[f_r(t) + \sum_{n=0}^{\infty} u(2Ln, t)] = \mathfrak{Z}[u(0,t)] \cdot \{[1 - \exp[-2L(i\omega/v + \alpha)]]^{-1} - A \cdot \exp(i2L\omega/v)\} \quad (8)$$

Analiza związku w nawiasie klamrowym wyrażenia (8) wskazuje, że dla częstotliwości o wartościach:

$$f = v \cdot n \cdot (1/2L) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

w widmie amplitudowym wyrażenia (8) wystąpią minima. W związku z tym nasuwa się oczywisty wniosek: wyznaczając doświadczalnie częstotliwości dla których wystąpią minima widma amplitudowego wyrażenia (8) i znając wartości indeksów „n” odpowiadających tym minimom, można wyznaczyć prędkość fazową ze wzoru:

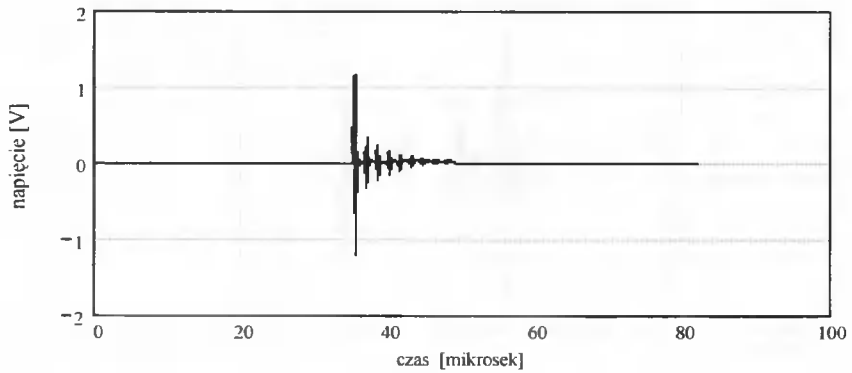
$$v = 2L f/n \quad (10)$$

### 3. POMIARY

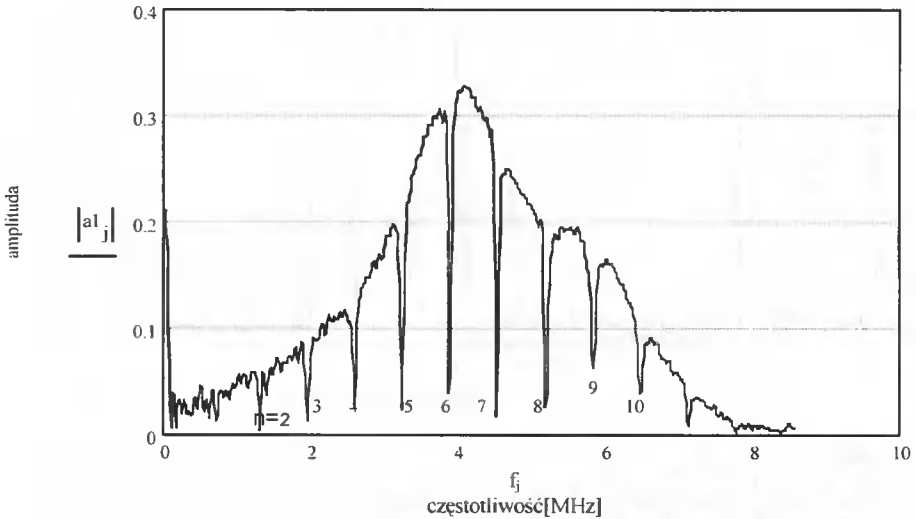
Bazując na przedstawionej wyżej metodzie wykonano pomiary ultradźwiękowe litego aluminium oraz szkła porowatego nasyconego wodą. Testom poddano próbkę wykonaną z aluminium o grubości 5 mm, oraz próbkę ze spiekane granulat szkłanego o ziarnistości 100  $\mu\text{m}$  i grubości 11,3 mm. Zarejestrowane przebiegi czasowe, ich widma amplitudowe oraz obliczone prędkości fazowe przedstawiono dla aluminium na rysunku 3, a dla spiekane granulat szkłanego – na rysunku 4 (pomiar głowicą 1 MHz) i na rysunku 5 (pomiar głowicą 5 MHz).



a)



b)

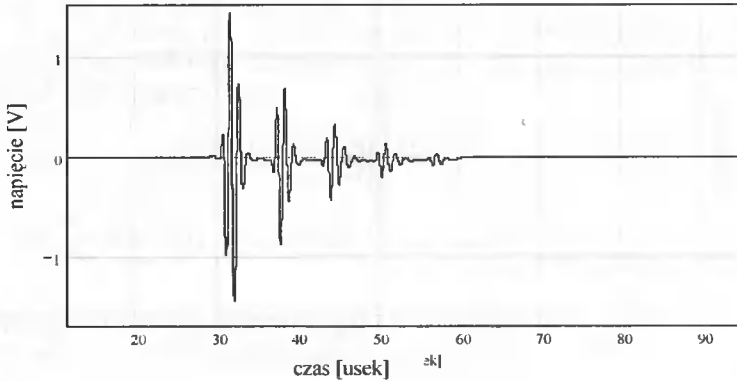


c)

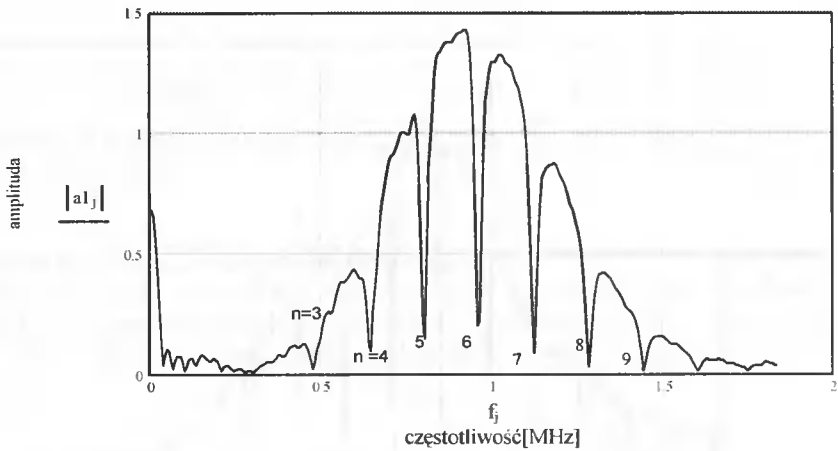
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f$ [MHz]	1.295	1.954	2.580	3.234	3.871	4.534	5.176	5.834	6.460
$v$ [km/sek]	6.475	6.513	6.450	6.468	6.452	6.477	6.470	6.482	6.460

Rys. 3. Wyniki pomiarów prędkości fazowej fal ultradźwiękowych (głowica 5 MHz) w płycie aluminium o grubości  $L = 5$  mm: a) zarejestrowane impulsy. b) widmo amplitudowe tych impulsów. c) wyniki obliczeń prędkości fazowej  $v$  wg zależności (10)

a)



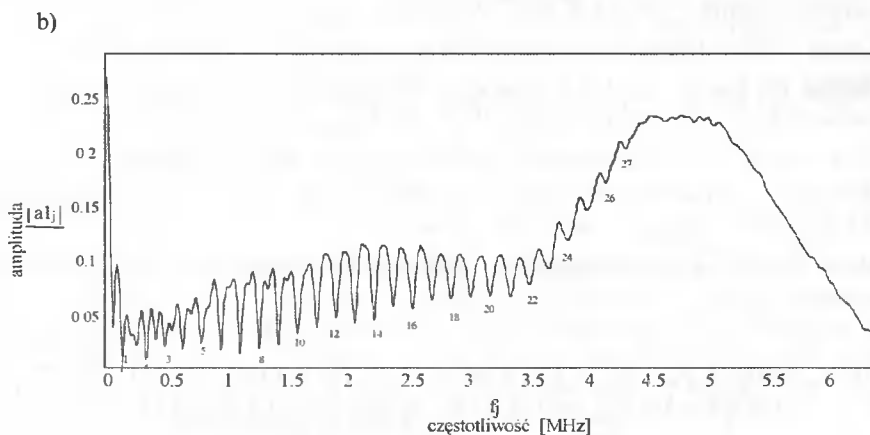
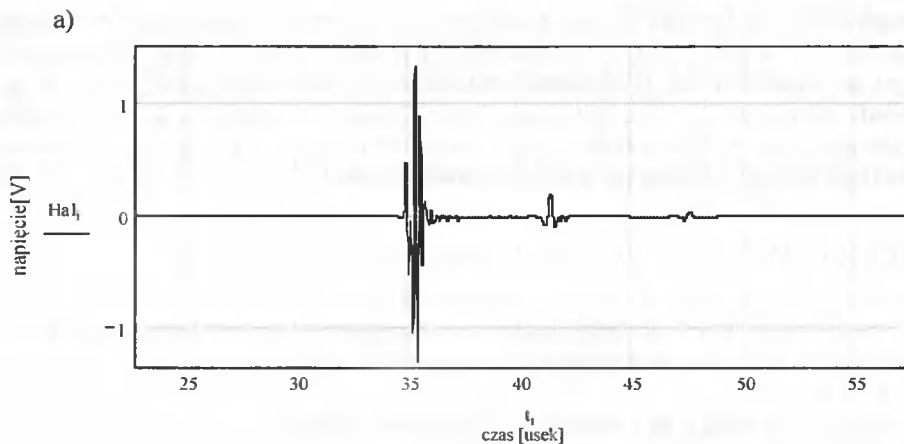
b)



c)

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$f$ [MHz]	0,476	0,646	0,805	0,961	1,123	1,282	1,441	1,6
$V$ [km/sek]	3,601	3,666	3,655	3,636	3,642	3,638	3,635	3,632

Rys. 4. Wyniki pomiarów prędkości fazowej fal ultradźwiękowych (głowica 1 MHz) w nasyconej wodę próbce szkła o ziarnistości  $100 \mu\text{m}$  i grubości  $L = 11.35 \text{ mm}$ : a) zarejestrowane impulsy, b) widmo amplitudowe tych impulsów, c) wyniki obliczeń prędkości fazowej  $v$  wg zależności (10)



c)

N	1	3	5	8	10	12	16	20	24	26
f [MHz]	0.141	0.495	0.795	1.283	1.6	1.918	2.549	3.193	3.835	4.154
v [km/sek]	3.2	3.746	3.609	3.64	3.632	3.628	3.616	3.624	3.627	3.627

Rys. 5. Wyniki pomiarów prędkości fazowej fal ultradźwiękowych (głowica 5 MHz) w nasyconej wodę próbce spieku szkła o ziarnistości 100  $\mu\text{m}$  i grubości  $L = 11.35$  mm: a) zarejestrowane impulsy. b) widmo amplitudowe tych impulsów, c) wyniki obliczeń prędkości fazowej  $v$  wg zależności (10)

#### 4. PODSUMOWANIE

Przedstawiona impulsowa metoda wyznaczania prędkości fazowej fal ultradźwiękowych w oparciu o widmo amplitudowe serii impulsów odbitych od próbki stanowi cenną alternatywę w stosunku do innych znanych metod pomiarowych prędkości (np. metod fazowych fali ciągłej). Szczególną zaletą tej metody jest to, że bazuje ona na pomiarze tylko jednej próbki, co zwłaszcza w pomiarach materiałów porowatych jest

szczególnie ważne (próbka próbce nierówna). Kolejną ważną zaletą zaprezentowanej metody jest to, że przy jej użyciu można mierzyć prędkość w próbkach bardzo cienkich, co jest szczególnie ważne w pomiarach materiałów o dużym tłumieniu, jakimi są np. materiały porowate. Do wad natomiast należy zaliczyć trudność wykonania próbki przejawiającą się w konieczności zachowania równoległości płaszczyzn (frontowej i tylnej), od których odbijają się impulsy wewnątrz próbki.

## LITERATURA

- [1] Kochański J., Kubik J., 2000. Badanie strukturalnych własności materiałów porowatych z zastosowaniem ultradźwięków. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz, Mechanika 47, 147-159.
- [2] Kubik J., Cieszko M., Kaczmarek M., 2000. Podstawy dynamiki nasyconych ośrodków porowatych. PAN, IPPT Warszawa.
- [3] Obraz J., 1983. Ultradźwięki w technice pomiarowej. WNT Warszawa.
- [4] Sachse W., Pao Y.H., 1978. On the determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids. J. Appl. Phys. 49, 8.
- [5] Śliwiński A., 2001. Ultradźwięki i ich zastosowania. WNT Warszawa.
- [6] Piałucha T., Guyott C.C.H., Cawley P., 1989. Amplitude spectrum method for the measurement of phase velocity. Ultrasonic 27.
- [7] Wehr J., 1972. Pomiary prędkości i tłumienia fal ultradźwiękowych. PWN Warszawa.

## DETERMINATION OF PHASE VELOCITY OF ULTRASONIC WAVES IN SATURATED POROUS MATERIAL. AMPLITUDE SPECTRUM METHOD

### Summary

The paper presents a combined experimental and analytical amplitude spectrum method for the measurement of phase velocity of longitudinal ultrasonic waves propagating between the boundaries of the tested sample.

Keywords: phase velocity, amplitude spectrum, wave number

## METODA ROZWIĄZANIA CIENKICH PŁYT ANIZOTROPOWYCH

Jarosław Piotr Lewandowski, Mykhaylo Delyavskyy

Katedra Mechaniki Konstrukcji  
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7. 85-796 Bydgoszcz

W referacie opracowano podejście do rozwiązania płyt cienkich anizotropowych. W ramach danego podejścia określono stan naprężeń i przemieszczeń w cienkiej płycie prostokątnej obciążonej poprzecznie, utwierdzonej na dwóch przeciwległych krawędziach. Dwie pozostałe krawędzie są nieobciążone.

Słowa kluczowe: kompozyt, matryca, płyta cienka anizotropowa, szereg Fouriera, funkcje kształtu

### 1. WSTĘP

Często stosowane nowoczesne materiały konstrukcyjne są strukturalnie niejednorodne. Przykładem takich materiałów są kompozyty, tj. materiały zbudowane z dwóch lub więcej różnorodnych składników wzajemnie nierozpuszczalnych, z których jeden odgrywa rolę spoiwa. Kompozyt charakteryzuje się właściwościami, których nie miały budujące go składniki. W budowie kompozytu można wydzielić 2 fazy [1,2,3]:

- faza I – rozproszona (zbrojenie kompozytu),
- faza II – ciągła (matryca), pełni rolę spoiwa dla fazy rozproszonej oraz stanowi dla niej warstwę ochronną.

W mechanice materiałów kompozytowych rozróżnia się trzy poziomy modelowania materiału:

- mikropoziom – fazy I i II rozpatruje się oddzielnie,
- minipoziom – kompozyt rozpatruje się jako materiał złożony z jednorodnych warstw anizotropowych,
- makropoziom – kompozyt traktujemy jako materiał jednorodny i anizotropowy.

Jeżeli faza I jest objętościowo znacznie większa w porównaniu z fazą II, to taki materiał z dużą dokładnością możemy badać na poziomie makroskopowym (gdzie obowiązującym jest model *continuum materialowego*) i traktować ten materiał jako jednorodny i anizotropowy. W praktyce wiąże się to z wprowadzeniem odpowiednich modułów zastępczych [1,3-5].

## 2. ROZWIĄZANIE PŁYTY CIENKIEJ ANIZOTROPOWEJ

Podstawowe równanie teorii zginania cienkich płyt anizotropowych ma postać [6,7]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = q - p \quad (1)$$

gdzie:

$D_{ij}$  – sztywności płyty,

$w$  – ugięcie płyty,

$q$  – obciążenie poprzeczne przyłożone do powierzchni górnej płyty,

$p$  – obciążenie poprzeczne przyłożone do powierzchni dolnej płyty.

Układ współrzędnych  $x_1, x_2$  wybrano w geometrycznym środku płyty. Mając ugięcie płyty  $w$  możemy wyznaczyć kinematyczne i statyczne charakterystyki stanu naprężeń w płycie:

– kąty obrotów normalnej do powierzchni środkowej

$$\varphi_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

– momenty

$$\begin{aligned} M_{11} &= - \left[ D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ M_{22} &= - \left[ D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ M_{12} &= - \left[ D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

– uogólnione siły tnące

$$\begin{aligned} V_1 &= Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \\ V_2 &= Q_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$$Q_1 = - \left[ D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right]$$

$$Q_2 = - \left[ D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right]$$

### 3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA PODSTAWOWEGO

Rozwiązanie równania (1) podajemy w postaci sumy  $w = w_0 + w_*$  całki ogólnej  $w_0$  jednorodnego równania:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = 0 \quad (5)$$

i całki szczególnej  $w_*$  niejednorodnego równania (1).

Dla określenia całki szczególnej rozkładamy obciążenie zewnętrzne w cztery podwójne szeregi Fouriera:

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{mn} \cos \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + b_{mn} \cos \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 + c_{mn} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + d_{mn} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 \right] \quad (6)$$

Korzystając z powyższego wybieramy rozwiązanie szczególne równania (1) w postaci podobnej:

$$w_* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{mn} \cos \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + B_{mn} \cos \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 + C_{mn} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + D_{mn} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 \right] \quad (7)$$

Podstawiając wyrażenia (6), (7) do (1) i porównując wyrażenia przy jednakowych harmonikach otrzymujemy układ czterech równań algebraicznych względem nieznanych parametrów  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$ ,  $D_{mn}$ .

Przedstawiamy całkę ogólną jednorodnego równania (5) w postaci [8]:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ f_{1(m)}^{[1]}(x_1) \cos \delta_m^{[2]} x_2 + f_{1(m)}^{[2]}(x_2) \cos \delta_m^{[1]} x_1 + f_{2(m)}^{[1]}(x_1) \sin \delta_m^{[2]} x_2 + f_{2(m)}^{[2]}(x_2) \sin \delta_m^{[1]} x_1 \right] \quad (8)$$

gdzie:

$f_{p(m)}^{[j]}$  – nieznanne funkcje.

$$\delta_m^{[j]} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_j}, \quad j = 1, 2$$

$2a_j$  – długość płyty w kierunku  $x_j$ .

Wówczas otrzymujemy [9]:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^8 \left[ R_{r1(m)}^{[1]} W_{r(m)}^{[1]}(x_1) \cos \delta_m^{[2]} x_2 + R_{r2(m)}^{[1]} W_{r(m)}^{[1]}(x_1) \sin \delta_m^{[2]} x_2 + R_{r1(m)}^{[2]} W_{r(m)}^{[2]}(x_2) \cos \delta_m^{[1]} x_1 + R_{r2(m)}^{[2]} W_{r(m)}^{[2]}(x_2) \sin \delta_m^{[1]} x_1 + w_*(x_1, x_2) \right] \quad (9)$$

gdzie:

$R_{rj(m)}^{[j]}$  – nieznanne parametry, które określamy z warunków brzegowych.

$W_{r(m)}^{[j]}$  – funkcje kształtu ugięcia płyty.

Podobnie, korzystając ze wzorów (2), (3), (4) otrzymujemy wyrażenia na kąty obrotów, momenty i uogólnione siły tnące:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\widehat{\partial} w}{\widehat{\partial} x_1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^8 \left[ R_{r1(m)}^{[1]} U_{r(m)}^{[1]}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(x_2) + R_{r2(m)}^{[2]} U_{r(m)}^{[1]}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(x_2) + \right. \\ &\quad \left. - R_{r1(m)}^{[2]} U_{r(m)}^{[2]}(x_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1) + R_{r2(m)}^{[2]} U_{r(m)}^{[2]}(x_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1) \right] + \varphi_1^* \\ \varphi_2 &= \frac{\widehat{\partial} w}{\widehat{\partial} x_2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^8 \left[ R_{r1(m)}^{[1]} V_{r(m)}^{[1]}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(x_2) + R_{r2(m)}^{[1]} V_{r(m)}^{[1]}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(x_2) + \right. \\ &\quad \left. + R_{r1(m)}^{[2]} V_{r(m)}^{[2]}(x_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1) + R_{r2(m)}^{[2]} V_{r(m)}^{[2]}(x_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1) \right] + \varphi_2^* \quad (10) \end{aligned}$$

gdzie:

$$\varphi_1^* = \frac{\widehat{\partial} w^*}{\widehat{\partial} x_1}, \quad \varphi_2^* = \frac{\widehat{\partial} w^*}{\widehat{\partial} x_2}$$

$U_{r(m)}^{[j]}$  – funkcje kształtu kąta obrotu  $\varphi_1$ ,  $j = 1, 2$

$V_{r(m)}^{[j]}$  – funkcje kształtu kąta obrotu  $\varphi_2$ ,  $j = 1, 2$



$$\begin{aligned}
M_{11} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^8 \left\{ R_{r1(m)}^{[1]} \left[ X_{r1(m)}^{[1]k} (x_1) \cos \delta_m^{[2]} (x_2) + X_{r1(m)}^{[1]s} (x_1) \sin \delta_m^{[2]} (x_2) \right] + \right. \\
& + R_{r2(m)}^{[1]} \left[ X_{r2(m)}^{[1]s} (x_1) \sin \delta_m^{[2]} (x_2) + X_{r2(m)}^{[1]k} (x_2) \cos \delta_m^{[2]} (x_2) \right] + \\
& + R_{r1(m)}^{[2]} \left[ X_{r1(m)}^{[2]k} (x_2) \cos \delta_m^{[1]} (x_1) + X_{r1(m)}^{[2]s} (x_2) \sin \delta_m^{[1]} (x_1) \right] + \\
& \left. + R_{r2(m)}^{[2]} \left[ X_{r2(m)}^{[2]s} (x_2) \sin \delta_m^{[1]} (x_1) + X_{r2(m)}^{[2]k} (x_2) \cos \delta_m^{[1]} (x_1) \right] \right\} + M_{11*}
\end{aligned}$$

gdzie:

$$M_{11*} = D_{11} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_2^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$X_{rv(m)}^{[j]}$  – funkcje kształtu momentu zginającego  $M_{1j}$ ,  $j = 1, 2$ .

$$\begin{aligned}
M_{22} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^8 \left\{ R_{r1(m)}^{[1]} \left[ Y_{r1(m)}^{[1]k} (x_1) \cos \delta_m^{[2]} (x_2) + Y_{r1(m)}^{[1]s} (x_1) \sin \delta_m^{[2]} (x_2) \right] + \right. \\
& + R_{r2(m)}^{[1]} \left[ Y_{r2(m)}^{[1]s} (x_1) \sin \delta_m^{[2]} (x_2) + Y_{r2(m)}^{[1]k} (x_1) \cos \delta_m^{[2]} (x_2) \right] + \\
& + R_{r1(m)}^{[2]} \left[ Y_{r1(m)}^{[2]k} (x_2) \cos \delta_m^{[1]} (x_1) + Y_{r1(m)}^{[2]s} (x_2) \sin \delta_m^{[1]} (x_1) \right] + \\
& \left. + R_{r2(m)}^{[2]} \left[ Y_{r2(m)}^{[2]s} (x_2) \sin \delta_m^{[1]} (x_1) + Y_{r2(m)}^{[2]k} (x_2) \cos \delta_m^{[1]} (x_1) \right] \right\} + M_{22*}
\end{aligned}$$

gdzie:

$$M_{22*} = D_{21} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_2^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$Y_{rv(m)}^{[j]}$  – funkcje kształtu momentu zginającego  $M_{2j}$ ,  $j = 1, 2$ .

$$\begin{aligned}
M_{12} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^8 \left\{ R_{r1(m)}^{[1]} \left[ Z_{r1(m)}^{[1]k} \cos \delta_m^{[2]} (x_2) + Z_{r1(m)}^{[1]s} \sin \delta_m^{[2]} (x_2) \right] + \right. \\
& + R_{r2(m)}^{[1]} \left[ Z_{r2(m)}^{[1]s} \sin \delta_m^{[2]} (x_2) + Z_{r2(m)}^{[1]k} \cos \delta_m^{[2]} (x_2) \right] + \\
& + R_{r1(m)}^{[2]} \left[ Z_{r1(m)}^{[2]k} \cos \delta_m^{[1]} (x_1) + Z_{r1(m)}^{[2]s} \sin \delta_m^{[1]} (x_1) \right] + \\
& \left. + R_{r2(m)}^{[2]} \left[ Z_{r2(m)}^{[2]s} \sin \delta_m^{[1]} (x_1) + Z_{r2(m)}^{[2]k} \cos \delta_m^{[1]} (x_1) \right] \right\} + M_{12*} \quad (11)
\end{aligned}$$

gdzie:

$$M_{12*} = D_{16} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$Z_{rv}^{[j]}(m)$  – funkcje kształtu momentu zginającego  $M_{12}$ ,  $j = 1, 2$ .

$$\begin{aligned} V_1 = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^8 \left\{ R_{r1(m)}^{[1]} \left[ P_{r1(m)}^{[1]c} (x_1) \cos \delta_m^{[2]} x_2 + P_{r1(m)}^{[1]s} (x_1) \sin \delta_m^{[2]} x_2 \right] + \right. \\ & + R_{r2(m)}^{[1]} \left[ P_{r2(m)}^{[1]c} (x_1) \cos \delta_m^{[2]} x_2 + P_{r2(m)}^{[1]s} (x_1) \sin \delta_m^{[2]} x_2 \right] + \\ & + R_{r1(m)}^{[2]} \left[ P_{r1(m)}^{[2]c} (x_2) \cos \delta_m^{[1]} x_1 + P_{r1(m)}^{[2]s} (x_2) \sin \delta_m^{[1]} x_1 \right] + \\ & \left. + R_{r2(m)}^{[2]} \left[ P_{r2(m)}^{[2]c} (x_2) \cos \delta_m^{[1]} x_1 + P_{r2(m)}^{[2]s} (x_2) \sin \delta_m^{[1]} x_1 \right] + V_1^* \right\} \end{aligned}$$

gdzie:

$P_{rv}^{[j]}(m)$  – funkcje kształtu siły poprzecznej  $Q_v$ ,  $j = 1, 2$ .

$$V_1^* = Q_1^* + \frac{\partial M_{12}^*}{\partial x_2}$$

$$Q_1^* = \left[ D_{11} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x_1^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w^*}{\partial x_1 \partial x_2^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x_2^3} \right]$$

$$\begin{aligned} V_2 = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^8 \left\{ R_{r1(m)}^{[1]} \left[ Q_{r1(m)}^{[1]c} (x_1) \cos \delta_m^{[2]} x_2 + Q_{r1(m)}^{[1]s} (x_1) \sin \delta_m^{[2]} x_2 \right] + \right. \\ & + R_{r2(m)}^{[1]} \left[ Q_{r2(m)}^{[1]c} (x_1) \cos \delta_m^{[2]} x_2 + Q_{r2(m)}^{[1]s} (x_1) \sin \delta_m^{[2]} x_2 \right] + \\ & + R_{r1(m)}^{[2]} \left[ Q_{r1(m)}^{[2]c} (x_2) \cos \delta_m^{[1]} x_1 + Q_{r1(m)}^{[2]s} (x_2) \sin \delta_m^{[1]} x_1 \right] + \\ & \left. + R_{r2(m)}^{[2]} \left[ Q_{r2(m)}^{[2]c} (x_2) \cos \delta_m^{[1]} x_1 + Q_{r2(m)}^{[2]s} (x_2) \sin \delta_m^{[1]} x_1 \right] + V_2^* \right\} \end{aligned}$$

gdzie:

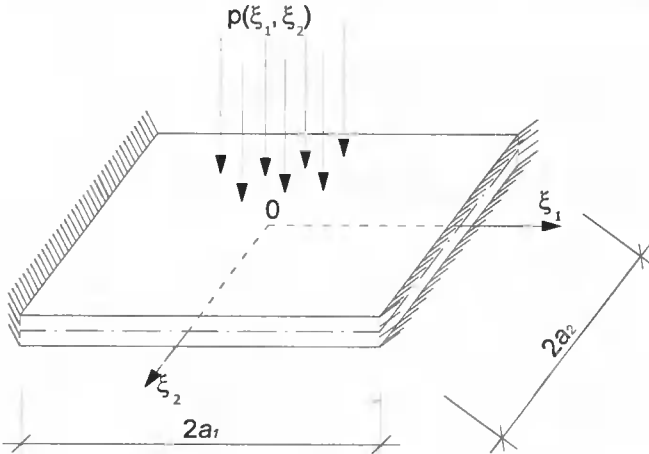
$Q_{rv}^{[j]}(m)$  – funkcje kształtu siły poprzecznej  $Q_2$ ,  $j = 1, 2$ .

$$V_2^* = Q_2^* + \frac{\partial M_{12}^*}{\partial x_1}$$

$$Q_2^* = \left[ D_{16} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x_1^3} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x_1 \partial x_2^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w^*}{\partial x_1^2 \partial x_2} + D_{22} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x_2^3} \right] \quad (12)$$

## 4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Na podstawie otrzymanych wzorów podano rozwiązanie dla płyty obciążonej poprzecznie, utwierdzonej obustronnie na dwóch przeciwległych krawędziach.



Rys. 1. Schemat obliczeniowy

Warunki brzegowe:

$$w|_{x_1=\pm a_1} = 0; \quad \varphi_1|_{x_1=\pm a_1} = 0 \quad (13)$$

$$M_{22}|_{x_2=\pm a_2} = 0; \quad V_2|_{x_2=\pm a_2} = 0 \quad (14)$$

Te warunki spełniamy oddzielnie dla części symetrycznej oraz dla części antysymetrycznej kinematycznych i statycznych charakterystyk płyty. Z wyrażeń (9,10) otrzymujemy:

$$M_{22}|_{x_2=\pm a_2} = \bar{M}_{22}|_{x_2=\pm a_2} + \tilde{M}_{22}|_{x_2=\pm a_2} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{22}|_{x_2=\pm a_2} = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^4 R_{r1(m)}^{[1]} [Y_{r1(m)}^{[1]c}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \right. \\ & + \sum_{r=5}^8 R_{r1(m)}^{[1]} [Y_{r1(m)}^{[1]s}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \sum_{r=1}^4 R_{r2(m)}^{[1]} [Y_{r2(m)}^{[1]s}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \\ & + \sum_{r=5}^8 R_{r2(m)}^{[1]} [Y_{r2(m)}^{[1]c}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \sum_{r=1}^4 R_{r1(m)}^{[2]} [Y_{r1(m)}^{[2]c}(\pm a_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=5}^8 R_{r1(m)}^{[2]} [Y_{r1(m)}^{[2]k} (\pm a_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1)] + \sum_{r=1}^4 R_{r2(m)}^{[2]} [Y_{r2(m)}^{[2]k} (\pm a_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1)] + \\
& + \sum_{r=5}^8 R_{r2(m)}^{[2]} [Y_{r2(m)}^{[2]k} (\pm a_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1)] \Big\} + \tilde{M}_{22} * \Big|_{x_2 = \pm a_2} = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{22} \Big|_{x_2 = \pm a_2} & = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=5}^8 R_{r1(m)}^{[1]} [Y_{r1(m)}^{[1]k}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \right. \\
& + \sum_{r=1}^4 R_{r1(m)}^{[1]} [Y_{r1(m)}^{[1]k}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \sum_{r=5}^8 R_{r2(m)}^{[1]} [Y_{r2(m)}^{[1]k}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \\
& + \sum_{r=1}^4 R_{r2(m)}^{[1]} [Y_{r2(m)}^{[1]k}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \sum_{r=5}^8 R_{r1(m)}^{[2]} [Y_{r1(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1)] + \\
& + \sum_{r=1}^4 R_{r1(m)}^{[2]} [Y_{r1(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1)] + \sum_{r=5}^8 R_{r2(m)}^{[2]} [Y_{r2(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1)] + \\
& \left. + \sum_{r=1}^4 R_{r2(m)}^{[2]} [Y_{r2(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1)] \right\} + \tilde{M}_{22} * \Big|_{x_1 = \pm a_1} = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

$$V_{22} \Big|_{x_2 = \pm a_2} = \tilde{V}_{22} \Big|_{x_2 = \pm a_2} + \tilde{V}_{22} \Big|_{x_1 = \pm a_1} = 0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{22} \Big|_{x_2 = \pm a_2} & = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=5}^8 R_{r1(m)}^{[1]} [\mathcal{Q}_{r1(m)}^{[1]k}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \right. \\
& + \sum_{r=1}^4 R_{r1(m)}^{[1]} [\mathcal{Q}_{r1(m)}^{[1]k}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \sum_{r=5}^8 R_{r2(m)}^{[1]} [\mathcal{Q}_{r2(m)}^{[1]k}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \\
& + \sum_{r=1}^4 R_{r2(m)}^{[1]} [\mathcal{Q}_{r2(m)}^{[1]k}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \sum_{r=5}^8 R_{r1(m)}^{[2]} [\mathcal{Q}_{r1(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1)] + \\
& + \sum_{r=1}^4 R_{r1(m)}^{[2]} [\mathcal{Q}_{r1(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1)] + \sum_{r=5}^8 R_{r2(m)}^{[2]} [\mathcal{Q}_{r2(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1)] + \\
& \left. + \sum_{r=1}^4 R_{r2(m)}^{[2]} [\mathcal{Q}_{r2(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1)] \right\} + \tilde{V}_{22} * \Big|_{x_1 = \pm a_1} = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{22} \Big|_{x_2=\pm a_2} = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^4 R_{r1(m)}^{[1]} [Q_{r1(m)}^{[1]k}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \right. \\
& + \sum_{r=5}^8 R_{r1(m)}^{[1]} [Q_{r1(m)}^{[1]k}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \sum_{r=1}^4 R_{r2(m)}^{[1]} [Q_{r2(m)}^{[1]k}(x_1) \sin \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \\
& + \sum_{r=5}^8 R_{r2(m)}^{[1]} [Q_{r2(m)}^{[1]k}(x_1) \cos \delta_m^{[2]}(\pm a_2)] + \sum_{r=1}^4 R_{r1(m)}^{[2]} [Q_{r1(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1)] + \\
& + \sum_{r=5}^8 R_{r1(m)}^{[2]} [Q_{r1(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1)] + \sum_{r=1}^4 R_{r2(m)}^{[2]} [Q_{r2(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \sin \delta_m^{[1]}(x_1)] + \\
& \left. + \sum_{r=5}^8 R_{r2(m)}^{[2]} [Q_{r2(m)}^{[2]k}(\pm a_2) \cos \delta_m^{[1]}(x_1)] \right\} + \tilde{V}_{22}^* \Big|_{x_2=\pm a_2} = 0 \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\tilde{w} \Big|_{x_1=\pm a_1} = \tilde{w} \Big|_{x_1=\pm a_1} + \tilde{w} \Big|_{x_1=\pm a_1} = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{w} \Big|_{x_1=\pm a_1} = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^8 R_{r1(m)}^{[1]} W_{r1(m)}^{[1]k}(\pm a_1) \cos \delta_m^{[2]} x_2 + \sum_{r=1}^4 [R_{r1(m)}^{[2]} W_{r1(m)}^{[2]k}(x_2) \cos \delta_m^{[1]}(\pm a_1) + \right. \\
& \left. R_{r2(m)}^{[2]} W_{r2(m)}^{[2]k}(x_2) \sin \delta_m^{[1]}(\pm a_1)] \right\} + \tilde{w}^* \Big|_{x_1=\pm a_1} = 0 \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{w} \Big|_{x_1=\pm a_1} = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^8 R_{r2(m)}^{[1]} W_{r2(m)}^{[1]k}(\pm a_1) \sin \delta_m^{[2]} x_2 + \sum_{r=5}^8 [R_{r1(m)}^{[2]} W_{r1(m)}^{[2]k}(x_2) \cos \delta_m^{[1]}(\pm a_1) + \right. \\
& \left. + R_{r2(m)}^{[2]} W_{r2(m)}^{[2]k}(x_2) \sin \delta_m^{[1]}(\pm a_1)] \right\} + \tilde{w}^* \Big|_{x_1=\pm a_1} = 0 \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\phi} \Big|_{x_1=\pm a_1} = \tilde{\phi} \Big|_{x_1=\pm a_1} + \tilde{\phi} \Big|_{x_1=\pm a_1} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} \Big|_{x_1=\pm a_1} = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^8 R_{r1(m)}^{[1]} U_{r1(m)}^{[1]}(\pm a_1) \cos \delta_m^{[2]}(x_2) - \sum_{r=5}^8 [R_{r1(m)}^{[2]} U_{r1(m)}^{[2]}(x_2) \sin \delta_m^{[1]}(\pm a_1) \right. \\
& \left. + R_{r2(m)}^{[2]} U_{r2(m)}^{[2]}(x_2) \cos \delta_m^{[1]}(\pm a_1)] \right\} = 0 \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} \Big|_{x_1=\pm a_1} = & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^8 R_{r2(m)}^{[1]} U_{r2(m)}^{[1]}(\pm a_1) \sin \delta_m^{[2]}(x_2) - \sum_{r=1}^4 [R_{r1(m)}^{[2]} U_{r1(m)}^{[2]}(x_2) \sin \delta_m^{[1]}(\pm a_1) + \right. \\
& \left. + R_{r2(m)}^{[2]} U_{r2(m)}^{[2]}(x_2) \cos \delta_m^{[1]}(\pm a_1)] \right\} = 0 \quad (26)
\end{aligned}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań uzyskamy nieznanne parametry  $R_{rv(m)}^{[j]}$ , zatem na podstawie wcześniej podanych wzorów określamy przemieszczenia, momenty i siły tnące w płycie. Natomiast wartości naprężeń średnich (w materiale określonym modułami zastępczymi) możemy obliczyć ze wzorów:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} x_3, \quad \sigma_{\alpha 3} = \frac{6T_{\alpha}}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - x_3^2 \right), \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (27)$$

## LITERATURA

- [1] Фудзии Т., Дзако М., 1982. Механика разрушения композиционных материалов, перевод с японского С.П. Масленникова под редакцией В.И. Бураева, Мир Москва, 232 с., ил.
- [2] German J., 2001. Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych. Wyd. Politechniki Krakowskiej.
- [3] Кристенсен Р., 1982. Введение в механику композитов. М. Мир Москва, 336 с.
- [4] Делявский М.В., Онышко Л.И., Садивский В.М., 1990. Пространственно-армированные композиционные материалы. Обзор. Деп. в ВИНТИ 20.04.90.-№ 6425-В90. Львов, 27 с.
- [5] Hashin Z., Rosen B.V., 1983. The elastic modul of fiber - reinforced materials // J. Appl. Mech. 31(2), с. 223-232.
- [6] Kączkowski Z., 2000. Płyty – Obliczenia statyczne. Arkady Warszawa.
- [7] Lechnicki S., 1957. Teoria anizotropowych tarcz. ITTL Moskwa.
- [8] Delyavsky M., Krawczuk M., Nagórko W., Podhorecki A., 2002. Pure bending of orthotropic elastic rectangle beam. Engineering Transactions 50 (1-2), с. 55-67.
- [9] Podhorecki A., Delyavskyy M., Ran R., 2003. O pewnej metodzie rozwiązywania układów płaskich złożonych z elementów płytowych. [W:] Budownictwo ogólne. Zagadnienia konstrukcyjne, materiałowe i cieplno-wilgotnościowe w budownictwie. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz, 123-129.

## THE METHOD OF SOLUTION OF THIN ANISOTROPIC PLATES

### Summary

The approach to solving the thin anisotropic plate has been suggested. In the frame of this approach the state of the displacements and stresses in the thin rectangular transversally loaded plate perfectly clamped at the two opposite edges is determined. There is suggested the other two edges are unloaded.

Keywords: composite, matrix, thin anisotropic plate, Fourier's series, function of form

## WPLYW SEKWENCJI PROGRAMU OBCIĄŻENIA NA PRZEBIEG PROCESU STABILIZACJI STALI 45

Stanisław Mroziński

Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn  
Wydział Mechaniczny ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy zamieszczono wyniki oraz analizę niskocyklowych badań zmęczeniowych stali 45 w warunkach obciążeń programowanych blokowych o różnej sekwencji poziomów. Podczas badań stosowano cztery typy programów: stopniowo narastające, stopniowo malejące, stopniowo rosnące a następnie malejące oraz obciążenia o nieregularnym następstwie poziomów. Wyniki badań analizowano w aspekcie wpływu postaci programu obciążenia na przebieg procesu stabilizacji. Analizę procesu stabilizacji prowadzono porównując amplitudę naprężenia dla wybranych stopni programu w kolejnych blokach. Analiza porównawcza tego parametru uwiarydliwia podobieństwo przebiegu procesu stabilizacji podczas obciążenia programowanych oraz stałoamplitudowych.

Słowa kluczowe: obciążenia programowane, trwałość zmęczeniowa, własności cykliczne

### 1. WPROWADZENIE

Jednym z podstawowych założeń metody obliczeń trwałości zmęczeniowej opartej na analizie lokalnych odkształceń i naprężeń jest niezmiennosc parametrów pętli histerezy podczas cyklicznego obciążenia. W pierwszych pracach prowadzonych w zespole prof. S. Kocańdy [2,3,4] na podstawie badań zmęczeniowych materiałów metalowych wskazano na zmiany parametrów pętli histerezy podczas obciążeń stałoamplitudowych i związane z tym trudności jednoznacznego określenia okresu stabilizacji własności cyklicznych.

W pracach prowadzonych przez prof. J. Szalę i współpracowników [6,13,14] na podstawie badań stali 45 w warunkach występowania przeciążeń wykazano, że po każdej zmianie poziomu obciążenia występowało zjawisko umocnienia materiału. Porównanie pętli histerezy przed i po zmianie poziomu obciążenia wskazywało na zmiany własności cyklicznych materiału, a przede wszystkim utratę stanu stabilizacji uzyskanej na poprzednim poziomie obciążenia. Zmiany własności materiału oceniano podczas obciążenia osiowego i zginania.

Stosowane podczas wcześniej omówionych badań przebiegi obciążenia dotyczyły prostych, dwustopniowych programów obciążenia. W przypadku realizacji obciążenia eksploatacyjnego mamy najczęściej do czynienia z losowym następstwem wartości amplitud cykli obciążenia, wartości średnich oraz częstotliwości. W pracy badawczej

prowadzonej w latach 1996-1998 przez zespół prof. J. Szali [11,15] zajmowano się procesem sumowania uszkodzeń zmęczeniowych. Podczas badań stosowano zróżnicowane programy obciążenia oraz różne materiały. W pracy wykazano brak stabilizacji własności cyklicznych oraz niedoskonałość metod obliczeń trwałości bazujących na założeniu istnienia okresu stabilizacji.

W pracach [8,9] Mroziński na podstawie wyników badań stałoamplitudowych trzech metali dokonał analizy danych materiałowych wyznaczanych w różnych okresach żywotności. Największym zakresem zmian spośród badanych materiałów charakteryzował się stop aluminium PA7 i stal 30 HGSA.

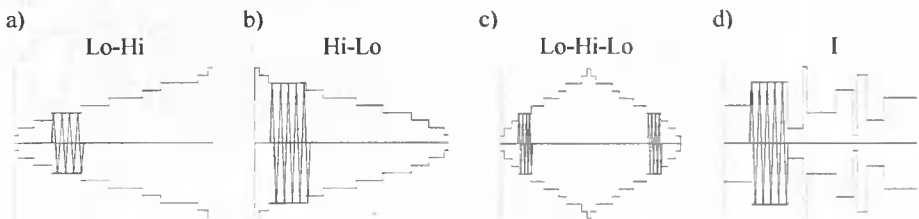
Problemem badawczym jest zarówno sam opis przebiegu zmian własności cyklicznych podczas obciążenia nieregularnego, jak również możliwość przewidywania tego przebiegu np. na podstawie danych uzyskanych podczas obciążeń stałoamplitudowych. Rozwiązanie problemu wymaga analizy porównawczej przebiegu procesu stabilizacji podczas obciążenia nieregularnego i stałoamplitudowego.

Celem podstawowym pracy jest ocena wpływu sekwencji poziomów obciążenia nieregularnego na przebieg procesu stabilizacji stali 45. Celem dodatkowym jest analiza porównawcza procesu stabilizacji podczas obciążenia nieregularnego i stałoamplitudowego.

## 2. OPIS BADAŃ

Próbki do badań zmęczeniowych wykonano z normalizowanej stali 45 zgodnie z normą ASTM [1]. Podczas badań stosowano obciążenie programowane blokowe o różnej kolejności stopni w bloku (rys. 1):

- Lo-Hi – obciążenie narastające (Low-High),
- Hi-Lo – obciążenie malejące (High-Low),
- Lo-Hi-Lo – stopniowo rosnące następnie malejące (Low-High-Low),
- I – nieregularne stopniowane (Irregular)



Rys. 1. Programy obciążenia

Podstawą opracowania parametrów blokowego programu obciążenia był przebieg o nieregularnym następnstwie cykli. Rozkład amplitud w tym przebiegu uzyskano wykorzystując funkcję rozkładu beta

$$f(\varepsilon_{ac}) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \varepsilon_{ac}^{\alpha-1} (1 - \varepsilon_{ac})^{\beta-1} \quad (1)$$

gdzie:

- $B$  – funkcja beta wyrażona funkcją gama  $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ ,  
 $\alpha, \beta$  – parametry rozkładu beta.



Poprzez odpowiedni dobór parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  uzyskano przebieg obciążenia nieregularnego charakteryzowanego wartością maksymalnej amplitudy odkształcenia całkowitego  $\varepsilon_{acmax}$  w jednym bloku programu obciążenia oraz współczynnikiem wypełnienia widma obciążenia  $\zeta$  :

$$\zeta = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{\varepsilon_{aci}}{\varepsilon_{acmax}} \frac{n_i}{n_o} \quad (2)$$

Dla parametrów rozkładu  $\alpha = 3$  i  $\beta = 3$  uzyskano wartość  $\zeta = 0,56$ . Przebieg nieregularny poddano schematyzacji metodą lokalnych ekstremów uzyskując widmo blokowe, które było podstawą opracowania różnych programów obciążenia różniących się kolejnością stopni. Parametry stałe dla stosowanych programów obciążenia pokazano i wyjaśniono w tabeli 1 na przykładzie programu nieregularnego „I”.

Tabela 1. Parametry programów obciążenia

Schemat programu	Parametry			Pozostałe
	Stopień	$\varepsilon_{ac} \%$	$n_i$	
	1	0.15	2	$n_o = 100$ cykli $\zeta = 0.56$
	2	0.3	8	
	3	0.45	9	
	4	0.6	15	
	5	0.75	14	
	6	0.9	17	
	7	1.05	9	
	8	1.2	19	
	9	1.35	5	
	10	1.5	2	

Badania zmęczeniowe wykonano na hydraulicznej maszynie wytrzymałościowej Instron 8501. Podczas badań przyjęto stałą prędkość przyrostu odkształcenia względnego części pomiarowej równą 1%/s. Parametrem sterującym podczas badań było odkształcenie całkowite części pomiarowej próbki mierzone przy wykorzystaniu ekstensometru będącego na wyposażeniu maszyny wytrzymałościowej. Podczas badań rejestracji podlegały całe wybrane bloki obciążenia (100 cykli).

### 3. WYNIKI BADAŃ

#### 3.1. Trwałość zmęczeniowa

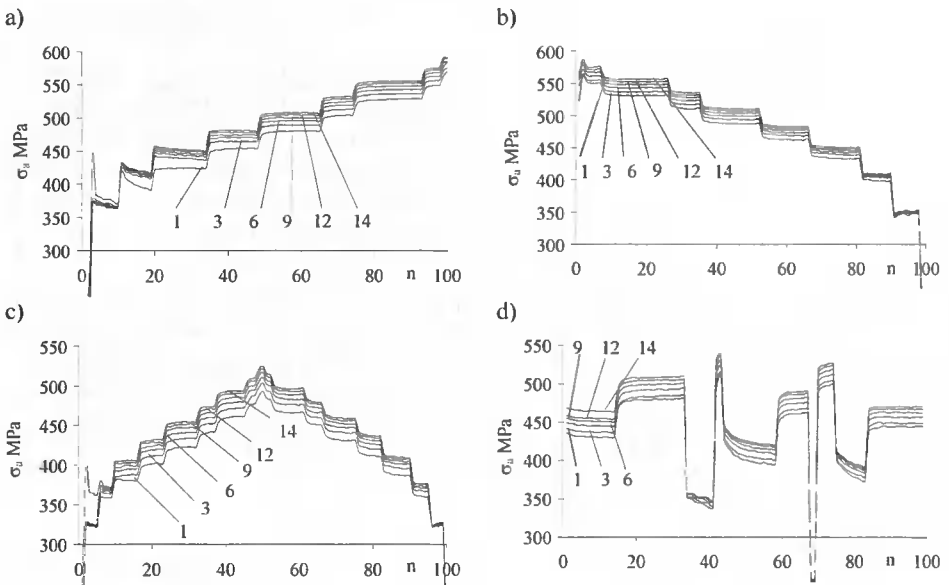
Uzyskane dla poszczególnych typów programów obciążenia liczby powtórzeń bloku programu  $\lambda$  oraz uzyskane trwałości zestawiono w tabeli 2. Jako trwałość zmęczeniową przyjmowano całkowitą liczbę cykli do momentu, w którym na  $i$ -tym poziomie programu nastąpiło około 5% zmniejszenie obciążenia w stosunku do obciążenia maksymalnego na tym poziomie. W tabeli zawarto również wyniki obliczeń wartości średnich trwałości uzyskanej dla poszczególnych programów obciążenia.

Tabela 2. Wyniki badań

Nr próbki	Trwałość zmęczeniowa							
	Lo-Hi		Hi-Lo		Lo-Hi-Lo		I	
	$\lambda$	$2N_f$	$\lambda$	$2N_f$	$\lambda$	$2N_f$	$\lambda$	$2N_f$
1	17.25	3450	17.84	3568	18.77	3754	14.15	2830
2	15.75	3150	14.5	2900	17.7	3540	15.1	3020
3	15.3	3060	15.33	3067	15.5	3100	15.8	3160
Srednia	16.1	3220	15.89	3178	17.32	3465	15.02	3003

### 3.2. Własności cykliczne w bloku

Dla zarejestrowanych podczas badań kolejnych bloków obciążenia określono wartości podstawowych parametrów pętli histerezy, tj. amplitudę naprężenia  $\sigma_a$ , amplitudę odkształcenia plastycznego  $\varepsilon_{ap}$  oraz energię odkształcenia plastycznego  $\Delta W_{pl}$ . W poniższej pracy ze względu na jej objętość analizę ograniczono do naprężenia  $\sigma_a$ . Przebiegi zmian naprężenia  $\sigma_a$  w poszczególnych blokach obciążenia pokazano w formie wykresów na rysunku 2.

Rys. 2. Zmiany  $\sigma_a$  w bloku programu: a) Lo-Hi. b) Hi-Lo. c) Lo-Hi-Lo. d) I

## 4. ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ

### 4.1. Trwałość zmęczeniowa

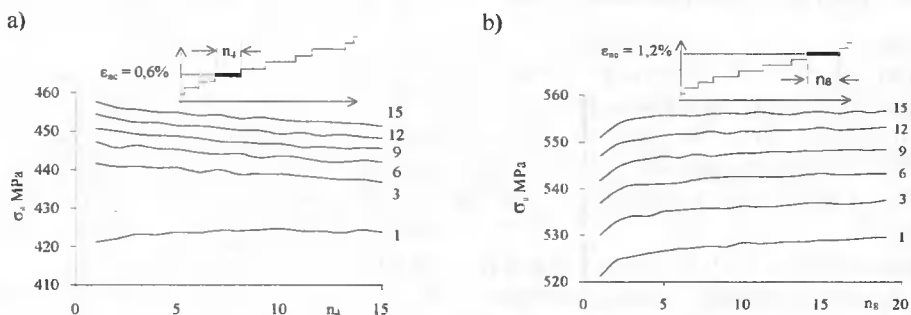
Jak należało oczekiwać, liczba bloków obciążenia  $\lambda$  zrealizowanych do chwili pęknięcia jest dla każdego typu obciążenia bardzo zbliżona. W pracy przeprowadzono analizę wariancji dla czterech średnich trwałości uzyskanych dla poszczególnych ro-

dzajów programów obciążenia. Przeprowadzona analiza na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  wykazała, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o równości średnich wartości trwałości zmęczeniowej uzyskanej dla poszczególnych programów obciążenia. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że kolejność stopni programu obciążenia nie wpływa na trwałość zmęczeniową. O przebiegu stabilizacji decydowała zgodnie z przyjętym założeniem jedynie kolejność cykli w bloku programu.

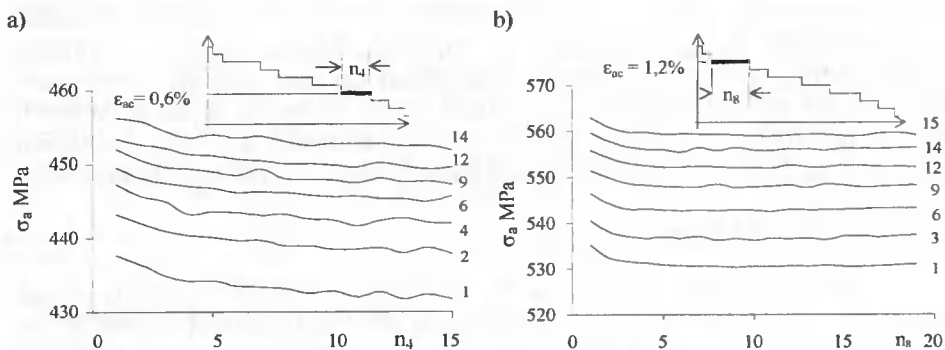
## 4.2. Własności cykliczne

Na podstawie analizy przebiegów  $\sigma_a$  w kolejnych blokach obciążenia można stwierdzić, że niezależnie od programu obciążenia materiał ulega cyklicznemu umocnieniu. Świadczy o tym wzrost naprężenia  $\sigma_a$  na tych samych stopniach w kolejnych blokach programu obciążenia. W pracy poddano szczegółowej analizie przebiegi zmian naprężenia  $\sigma_a$  na poszczególnych stopniach realizowanych programów. Ze względu na ograniczoną objętość poniższej pracy na rysunkach 3-6 pokazano przebiegi  $\sigma_a$  dla dwóch reprezentatywnych stopni o amplitudach  $\varepsilon_{ac} = 0,6\%$  i  $1,2\%$ .

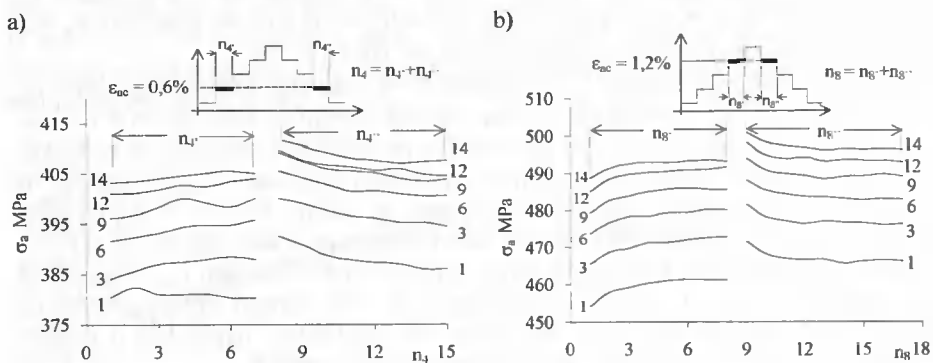
Analiza wykresów pokazanych na rysunkach 3-6 wskazuje, że przebiegi zmian  $\sigma_a$  na stopniach zależą od programu obciążenia. Zmiana amplitudy odkształcenia z większej na mniejszą prowadzi najczęściej do chwilowego osłabienia materiału na kolejnym stopniu i uzyskania na nim nowego poziomu naprężenia stabilizacji  $\sigma_{as}$ . Naprężenie to jest wyższe od naprężenia stabilizacji uzyskanego na danym stopniu w poprzednim bloku. Z kolei przejście na wyższy poziom odkształcenia prowadzi najczęściej do procesu umocnienia materiału i uzyskania nowego naprężenia stabilizacji  $\sigma_{as}$ . Naprężenie to jest również wyższe od naprężenia stabilizacji dla tego samego stopnia obciążenia zrealizowanego w poprzednim bloku. Inny przebieg mają zmiany naprężenia w programach Lo-Hi oraz Lo-Hi-Lo na poziomach odkształcenia  $\varepsilon_{ac} < 0,6\%$ .



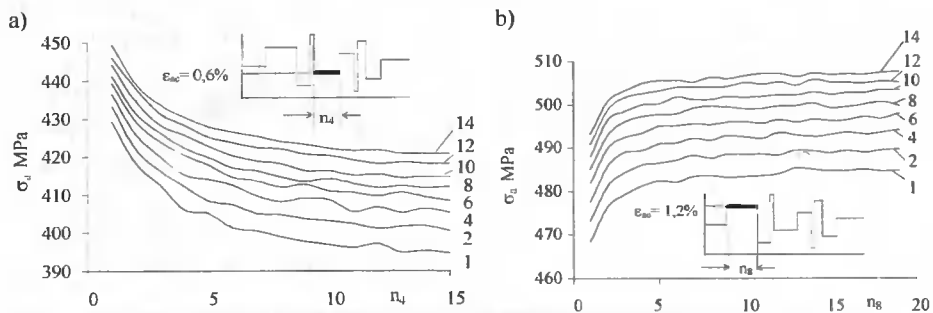
Rys. 3. Zmiany  $\sigma_a$  na dwóch stopniach programu Lo-Hi: a)  $\varepsilon_{ac} = 0,6\%$ , b)  $\varepsilon_{ac} = 1,2\%$



Rys. 4. Zmiany  $\sigma_a$  na dwóch stopniach programu Hi-Lo: a)  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$ , b)  $\epsilon_{ac} = 1,2\%$

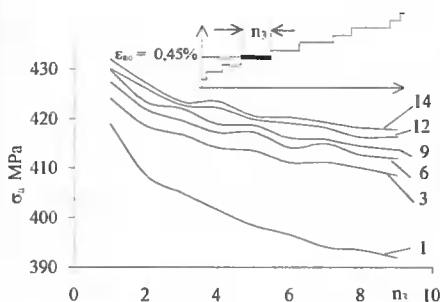


Rys. 5. Zmiany  $\sigma_a$  na dwóch stopniach programu Hi-Lo-Hi: a)  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$ , b)  $\epsilon_{ac} = 1,2\%$

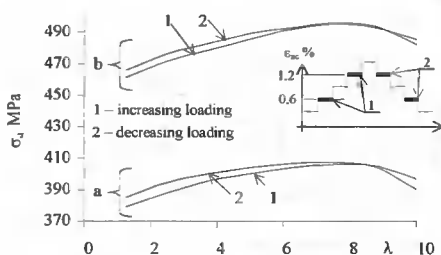


Rys. 6. Zmiany  $\sigma_a$  na dwóch stopniach programu I: a)  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$ , b)  $\epsilon_{ac} = 1,2\%$

Na poziomach tych pomimo przejścia z poziomu niższego na wyższy materiał podlega niewielkiemu osłabieniu. W celu zilustrowania tej własności na rysunku 7 pokazano przebieg zmian  $\sigma_a$  na poziomie  $\epsilon_{ac} = 0,45\%$  dla programu Lo-Hi.



Rys. 7. Zmiany  $\sigma_{as}$  na poziomie odkształcenia  $\epsilon_{ac} = 0,45\%$  dla programu Lo-Hi



Rys. 8. Naprężenie  $\sigma_a$  dla Lo-Hi-Lo na końcu stopni  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$  (a) i  $1,2\%$  (b)

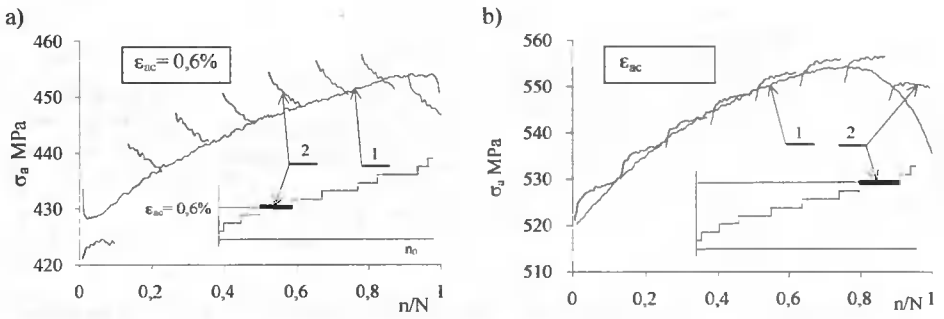
Wyższe naprężenie stabilizacji  $\sigma_{as}$  na stopniu o amplitudzie  $\epsilon_{ac} = 0,45$  w kolejnych blokach wskazuje, że pomimo chwilowego osłabienia na stopniu materiał podlega cyklicznemu umocnieniu.

Na szczególną uwagę zasługują zmiany  $\sigma_a$  podczas obciążenia Lo-Hi-Lo (rys. 5). Przebiegi zmian  $\sigma_a$  w tym programie obciążenia mają inny charakter podczas obciążenia narastającego a następnie malejącego. Poziomy naprężenia stabilizacji  $\sigma_{as}$  na tych samych stopniach podczas obciążenia narastającego a następnie malejącego nie są sobie równe. Niższe wartości naprężenia  $\sigma_a$  można zauważyć podczas obciążenia narastającego, natomiast wyższe podczas obciążenia malejącego. Różnica pomiędzy naprężeniami  $\sigma_a$  na tym samym stopniu podczas obciążenia malejącego i narastającego zmniejsza się wraz z liczbą powtórzeń  $\lambda$  bloków programu obciążenia. Powyższą cechę stali 45 zilustrowano na rysunku 8. Na rysunku pokazano przebieg zmian  $\sigma_a$  w ostatnim cyklu stopni o amplitudzie  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$  i  $\epsilon_{ac} = 1,2\%$  podczas obciążenia narastającego i malejącego. Z położenia wykresów wynika, że różnica pomiędzy naprężeniami  $\sigma_a$  zanika w końcowym okresie żywotności.

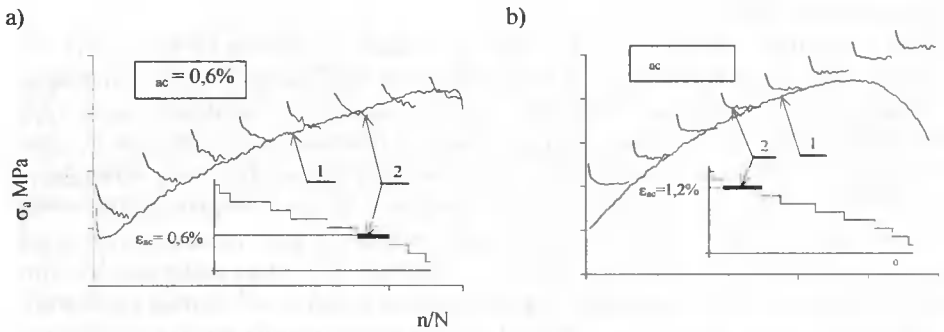
Na podstawie analizy zmian naprężenia  $\sigma_a$  na poszczególnych stopniach programu można zauważyć zależność tego parametru od okresu żywotności. W pracy przeprowadzono analizę porównawczą wielkości zmian naprężenia  $\sigma_a$  dla poszczególnych stopni programu obciążenia blokowego oraz stałoamplitudowego. W celu bezpośredniego porównania przebiegu procesu umocnienia zachodzącego podczas obciążenia stałoamplitudowego i programowanego blokowego na rysunkach 9÷12 pokazano przebiegi zmian  $\sigma_a$  w funkcji trwałości względnej  $n/N$ .

Na podstawie analizy wykresów pokazanych na rysunkach 9÷12 można zauważyć podobieństwo jakościowe oraz ilościowe w przebiegu procesu stabilizacji podczas obciążenia stałoamplitudowego i programowanego. Naprężenia  $\sigma_a$  określające chwilowe własności podczas obciążenia stałoamplitudowego i blokowego mają w tych samych okresach żywotności podobną wartość.

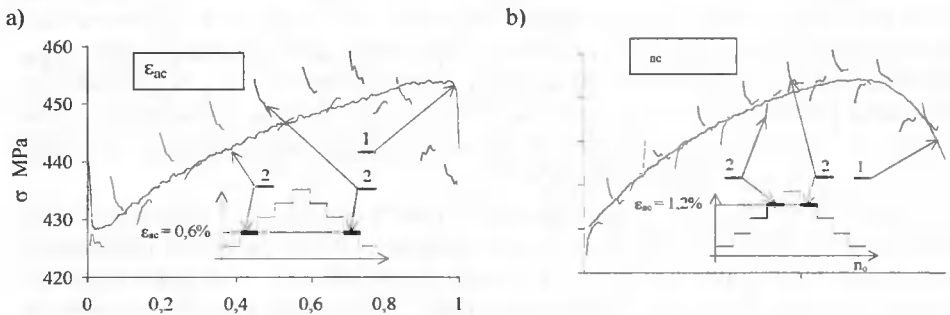
Z wykresów wynika, że materiał pomimo zaburzenia procesu stabilizacji przez zmianę amplitudy odkształcenia na kolejnym stopniu wydaje się „pamiętać” przebieg procesu stabilizacji. Na wykresach zmian  $\sigma_a$  podczas obciążeń programowanych widać bardzo wyraźny trend zmian własności cyklicznych. Trend tych zmian jest bardzo podobny do przebiegu procesu zmian własności cyklicznych mającym miejsce podczas obciążenia stałoamplitudowego. Widoczne jest to dla wszystkich programów obciążenia realizowanych podczas badań.



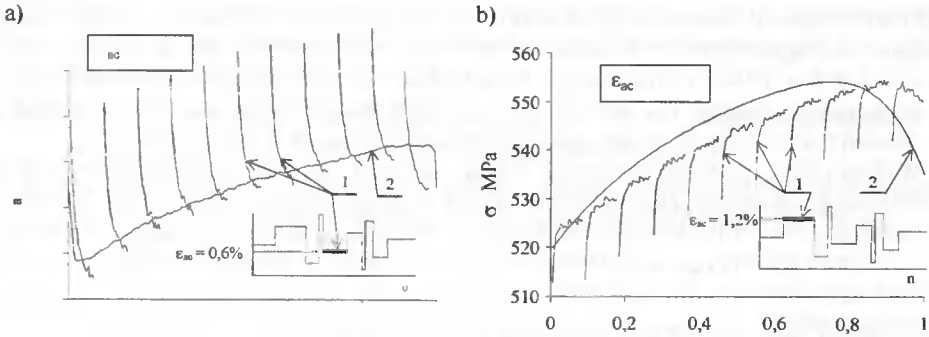
Rys. 9. Zmiany  $\sigma_a$  na dwóch poziomach odkształcenia:  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$  (a) i  $\epsilon_{ac} = 1,2\%$  (b): 1 – obciążenie stałoaamplitudowe, 2 – obciążenie Lo-Hi



Rys. 10. Zmiany  $\sigma_a$  na dwóch poziomach odkształcenia:  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$  (a) i  $\epsilon_{ac} = 1,2\%$  (b): 1 – obciążenie stałoaamplitudowe, 2 – obciążenie Hi-Lo



Rys. 11. Zmiany  $\sigma_a$  na dwóch poziomach odkształcenia:  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$  (a) i  $\epsilon_{ac} = 1,2\%$  (b): 1 – obciążenie stałoaamplitudowe, 2 – obciążenie Lo-Hi-Lo



Rys. 12. Zmiany  $\sigma_a$  na dwóch poziomach odkształcenia:  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$  (a) i  $\epsilon_{ac} = 1,2\%$  (b); 1 – obciążenie stałoaamplitudowe, 2 – obciążenie nieregularne I

Uzyskiwane w końcowych cyklach obciążenia stopni o amplitudzie  $\epsilon_{ac} = 0,6\%$ , i  $\epsilon_{ac} = 1,2\%$  naprężenia  $\sigma_a$  zmierzają do poziomu naprężenia odpowiadającego naprężeniu  $\sigma_a$  dla obciążenia stałoaamplitudowego. Powyższe spostrzeżenie może mieć duże znaczenie praktyczne. Wskazuje bowiem na możliwość przewidywania procesu stabilizacji materiału podczas obciążenia eksploatacyjnego na podstawie znajomości tego procesu dla obciążenia stałoaamplitudowego. Pozwala to prowadzić obliczenia trwałości zmęczeniowej uwzględniając występujące w materiale procesy umocnienia, osłabienia czy stabilizacji. Takie podejście do problemu obliczeń trwałości zmęczeniowej może mieć szczególne znaczenie w przypadku materiałów charakteryzujących się brakiem okresu stabilizacji, np. stopów aluminium czy miedzi. Uwzględnianie podczas obliczeń chwilowych własności tych materiałów określonych podczas badań stałoaamplitudowych może przyczynić się wzrostu skuteczności obliczeń trwałości zmęczeniowej.

## 5. WNIOSKI

Przeprowadzona analiza wyników badań pozwala sformułować następujące wnioski:

1. Kolejność stopni programu obciążenia blokowego nie wpływa na trwałość zmęczeniową.
2. Podczas obciążenia programowanego blokowego, podobnie jak podczas obciążenia stałoaamplitudowego próbek ze stali 45 nie występuje okres stabilizacji własności cyklicznych. Z tego względu wątpliwości budzą metody obliczeń trwałości zmęczeniowej bazujące na założeniu istnienia okresu stabilizacji własności cyklicznych.
3. Na przebieg procesu stabilizacji własności cyklicznych stali 45 na poszczególnych stopniach programu obciążenia blokowego wpływa kolejność stopni programu obciążenia. Zachodzące w materiale zmiany własności cyklicznych, tj. chwilowe umocnienie lub osłabienie zależą od amplitudy odkształcenia stopni występujących po sobie.
4. Przebieg procesu cyklicznego umocnienia zachodzący podczas obciążenia stałoaamplitudowego i programowanego analizowany przy wykorzystaniu amplitudy naprężenia  $\sigma_a$  wykazuje podobieństwo jakościowe dotyczące charakteru zmian własności cyklicznych oraz ilościowe dotyczące wartości chwilowych tego parametru w tych samych okresach trwałości.

5. Podobieństwo ilościowe oraz jakościowe przebiegu procesu stabilizacji podczas obciążenia programowanego i stałoamplitudowego pozwala sformułować tezę o możliwości przewidywania chwilowych własności cyklicznych materiału elementu konstrukcyjnego podczas obciążeń eksploatacyjnych na podstawie danych uzyskanych z badań normatywnych (próby stałoamplitudowe zgodne np. z ASTM i PN).
6. Wykorzystany podczas opisanych badań materiał (stal 45) podczas obciążenia zmiennego charakteryzuje niewielki zakres zmian własności cyklicznych. W celu sformułowania wniosków o charakterze ogólnym niezbędne są badania weryfikacyjne przy wykorzystaniu materiałów o zróżnicowanych własnościach cyklicznych oraz innych opisów procesu zmęczenia, takich jak opis odkształceniowy czy opis energetyczny.

## LITERATURA

- [1] ASTM E606-92. Standard Practice for Strain-Controlled Fatigue Testing.
- [2] Brune W., Kocańda S., 1987. Low cycle fatigue strength of K22MA steel and its welded but joints. *Archiwum Nauki o Materiałach*, t. 8, z. 3.
- [3] Goss Cz., 1982. Doświadczalna i teoretyczna analiza własności stali o podwyższonej wytrzymałości w zakresie małej liczby cykli obciążenia. *Dodatek do Biuletynu 11 (363)*, WAT Warszawa.
- [4] Goss Cz., Kocańda S., 1976. O osłabieniu stali 45 przy małej liczbie cykli zmian obciążenia. *Biuletyn WAT 12*, Warszawa.
- [5] Kaleta J., 1999. Doświadczalne podstawy formułowania energetycznych hipotez zmęczeniowych. *Oficyna Wyd. Politechniki Wrocławskiej*.
- [6] Mroziński S., 1995. Comparison Analysis of Low-cycle Properties of 45 Steel Under Axial Loading and Bending. Doctoral work, University of Technology and Agriculture, Faculty of Mechanical Engineering Bydgoszcz.
- [7] Mroziński S., 1998. Doświadczalna ocena procesu stabilizacji własności cyklicznych materiałów konstrukcyjnych podczas obciążenia stałoamplitudowego i nieregularnego. XVIII Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego. Jachranka k. Warszawy, 14-16 października 1998.
- [8] Mroziński S., 2003. O zmienności danych materiałowych przyjmowanych do obliczeń trwałości zmęczeniowej. II Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji, Augustów, 4-7 czerwca 2003.
- [9] Mroziński S., 2002. Weryfikacja analitycznego opisu petli histerezy. XIX Sympozjum Zmęczenia i Mechaniki Pęknięcia. Bydgoszcz-Pieczyska, 23-26 kwietnia 2002.
- [10] Mroziński S., Topoliński T., 1999. New energy model of fatigue damage accumulation and its verification for 45-steel. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2, 37.
- [11] Szala J., 1998. Hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych. *Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz*.
- [12] Szala J., 1978. The effect of load sequence on fatigue life. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 2, 16.



- [13] Szala J., Mroziński S., 1993. An analysis of the influence of overloads on the fatigue life of 45-steel within the range of low – cycle fatigue. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 4, 31.
- [14] Szala J., Mroziński S., 1995. Plane bending low – cycle fatigue investigations of 45-steel. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 1, 33.
- [15] Szala J., Mroziński S., Boroński D., 1998. Badanie procesu sumowania uszkodzeń zmęczeniowych. Sprawozdanie z projektu badawczego KBN nr 7 T07A03508.

## INFLUENCE OF LOADING PROGRAM SEQUENCE ON THE COURSE OF THE 45 STEEL STABILIZATION PROCESS

### Summary

Results and low-cycle fatigue tests analysis of 45 steel in conditions of block programmed loading with a different sequence of levels were presented in the paper. During tests four types of programs were applied: gradually increasing, gradually decreasing, gradually increasing and decreasing, and irregular. The sequence of levels in the block loading program was the parameter, which diversified the applied programs. The results of tests were analysed in the aspect of influence of loading program character on the course of the stabilization process. The analysis of the stabilization process was performed by comparing the stress loading amplitude for the chosen levels of the program in the following blocks. The comparative analysis showed similarity of the stabilization processes both under the programmed and the constant – amplitude loading.

Keywords: low-cycle properties, fatigue life, programmed loading



## METODA ROZWIĄZYWANIA PŁYTY CIĄGLEJ WZMOCNIONEJ KRATOWNICAMI

Jacek Nitka, Dariusz Buchaniec, Mykhaylo Delyavskyy

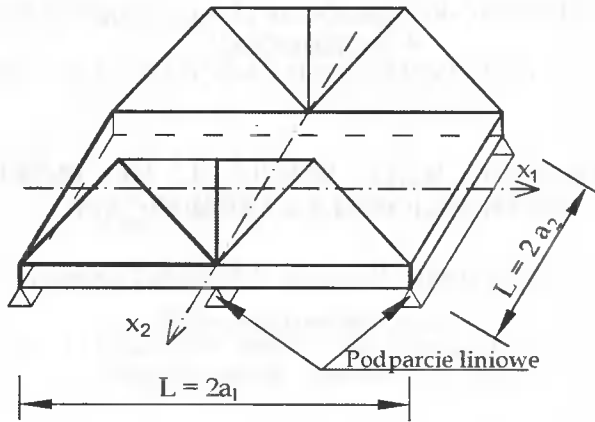
Katedra Mechaniki Konstrukcji  
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy rozpatruje się płytę ciągłą izotropową połączoną w sposób ciągły z kratownicami. Dla rozwiązania takiego układu dokonano rozdziału na płytę i kratownicę, a ich współdziałanie zastąpiono przez nieznanne obciążenie poprzeczne, które wyznacza się z warunków zgodności ugięcia krawędzi płyty i kratownicy.

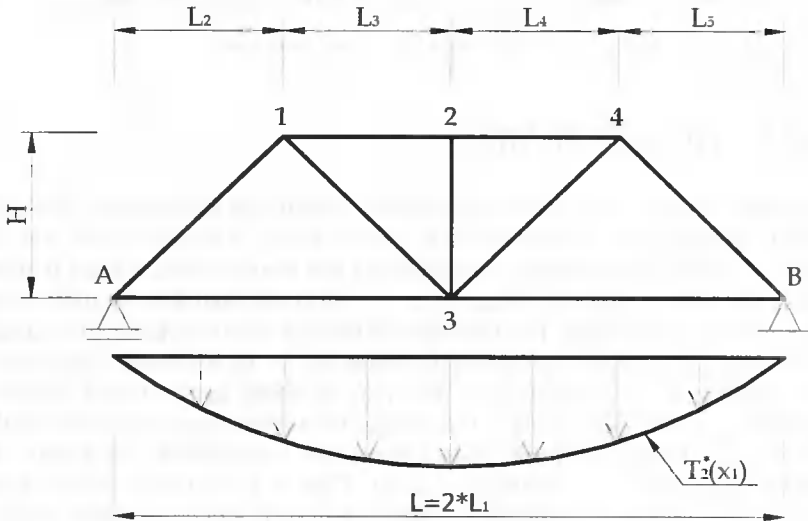
Słowa kluczowe: płyta, kratownica, szereg Fouriera, izotropia

### 1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

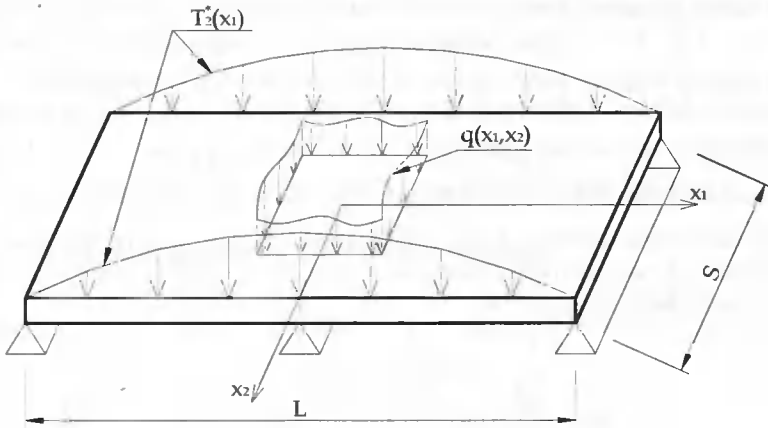
Rozważamy cienką płytę ciągłą swobodnie podpartą na krawędziach podłużnych połączoną na krawędziach poprzecznych w sposób ciągły z kratownicami statycznie wyznaczalnymi (rys. 1). Zakładamy, że kratownica jest nieobciążona, a także pomijamy jej ciężar własny. Rozpatrywany układ możemy traktować jako uproszczony schemat statyczny konstrukcji mostowej. Dla rozwiązania takiego układu dokonujemy rozdziału na płytę i kratownicę, a ich współdziałanie zastąpimy przez nieznanne obciążenie poprzeczne rozłożone w sposób ciągły [1]. Przyjęto, że węzły pasa dolnego kratownicy rozmieszczone są dostatecznie gęsto. To prowadzi do możliwości uproszczenia polegającego na zaniedbywaniu sił poprzecznych i momentów zginających w tym pasie. Każdy element rozpatrujemy oddzielnie (rys. 2, 3). Płytę rozwiązujemy metodą podaną w pracach [1,2], natomiast kratownicę za pomocą funkcji wpływu. Celem pracy jest opracowanie metody wyznaczenia przemieszczeń i sił wewnętrznych przekrojowych w płycie oraz sił normalnych w prętach kratownicy wywołanych obciążeniem zewnętrznym przyłożonym do powierzchni górnej płyty.



Rys. 1. Schemat układu płytowo-kratowego



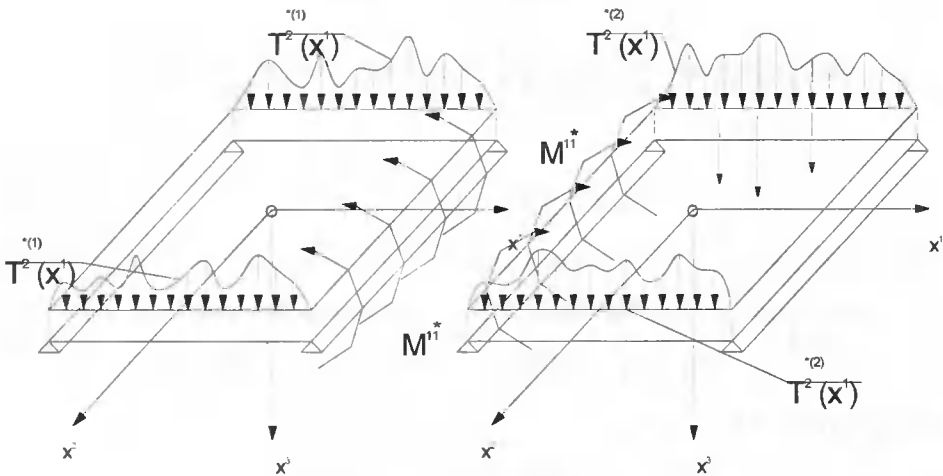
Rys. 2. Schemat kratownicy obciążonej nieznanym obciążeniem poprzecznym



Rys. 3. Płyta obciążona siłami zewnętrznymi i nieznanymi siłami współdziałania

## 2. ROZWIĄZANIE PŁYTY

Dla rozwiązania płyty przecinamy ją na podporach pośrednich i każdą z nich rozpatrujemy oddzielnie, a ich współdziałanie zastępujemy przez nieznanne momenty zginające (rys. 4).



Rys. 4. Schemat obliczeniowy płyty ciągłej

Te momenty podajemy w postaci szeregu trygonometrycznego:

$$M_{11}^* = \sum_{i=1}^K A_i \cos(\delta_i^{[2]} x_2) + B_i \sin(\gamma_i^{[2]} x_2), \quad \delta_i^{[2]} = \frac{(2i-1)\pi}{2a_i}; \quad \gamma_i^{[2]} = \frac{i\pi}{a_i}; \quad (1)$$

ponieważ każdą dowolną funkcję można zawsze rozłożyć w szereg Fouriera. Tutaj:  $A_i, B_j$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) – są to nieznane parametry, które wybieramy tak, aby były spełnione warunki ciągłości kątów obrotu na wspólnej krawędzi dwóch płyt [2.3].

Płyta jest poddana działaniu obciążenia zewnętrznego  $q(x_1, x_2)$  na powierzchni górnej, nieznanymi momentami zginającymi na krawędziach podłużnych, a także obciążenia  $T_2^*(x_1)$  na krawędziach poprzecznych. Aby rozwiązać takie zagadnienie trzeba rozwiązać równanie podstawowe  $k$ -tego przęsła płyty i spełnić warunki brzegowe.

Korzystamy z podstawowego równania teorii płyt cienkich izotropowych opisującego niewiadomą funkcję ugięcia  $w$ :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}, \quad (2)$$

gdzie:  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  oznacza sztywność płyty na zginanie.

Mając wyrażenie na ugięcie wyznaczamy przemieszczenia poziome, momenty i siły poprzeczne w płycie cienkiej izotropowej:

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad (3)$$

$$M_{11} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \quad M_{22} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right],$$

$$M_{12} = -D(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right], \quad (4)$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \quad Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \quad (5)$$

oraz uogólnione siły Kirchhoffa:

$$V_1 = Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \quad V_2 = Q_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}, \quad (6)$$

Rozwiązanie równania (2) składa się z sumy rozwiązań: ogólnego  $w_0$  i szczególnego  $w_*$ :

$$w = w_0 + w_*. \quad (7)$$

W celu określenia całki szczególnej, obciążenie zewnętrzne  $q(x_1, x_2)$  w ogólnym przypadku rozkładamy w cztery podwójne szeregi Fouriera:

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + b_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\delta_n^{[2]} x_2) + c_{mn} \sin(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + d_{mn} \sin(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\delta_n^{[2]} x_2) \right]. \quad (8)$$

W sposób podobny podajemy rozwiązanie szczególne:

$$w_* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + B_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\delta_n^{[2]} x_2) + C_{mn} \sin(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + D_{mn} \sin(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\delta_n^{[2]} x_2) \right]. \quad (9)$$

Podstawiamy wyrażenia (8), (9) do równania (2). Przyrównując wyrażenia przy jednakowych harmonikach uzyskujemy układ liniowych równań algebraicznych względem nieznanych parametrów  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$ ,  $D_{mn}$ .

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:

$$\frac{\hat{c}^4 w_0}{\hat{c} x_1^4} + 2 \frac{\hat{c}^4 w_0}{\hat{c} x_1^2 \hat{c} x_1^2} + \frac{\hat{c}^4 w_0}{\hat{c} x_2^4} = 0, \quad (10)$$

wyberamy w postaci [4]:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_{2k}^{[1]}(x_1) \cos(\delta_k^{[2]} x_2) + f_{1k}^{[1]}(x_1) \sin(\delta_k^{[2]} x_2) + f_{2k}^{[2]}(x_2) \cos(\delta_k^{[1]} x_1) + f_{1k}^{[2]}(x_2) \sin(\delta_k^{[1]} x_1) \right]. \quad (11)$$

gdzie:  $f_{pk}^{[j]}(x_j)$  są to nieznanne funkcje. Podstawiamy wyrażenie (11) do równania (10).

Po rozdzieleniu zmiennych uzyskujemy cztery równania różniczkowe zwyczajne:

$$f_{2k}^{[1]^{(IV)}}(x_1) - 2f_{2k}^{[1]^{(III)}}(x_1) \delta_k^{[2]2} + f_{2k}^{[1]}(x_1) \delta_k^{[2]4} = 0, \quad (12)$$

$$f_{1k}^{[1]^{(IV)}}(x_1) - 2f_{1k}^{[1]^{(III)}}(x_1) \gamma_k^{[2]2} + f_{1k}^{[1]}(x_1) \gamma_k^{[2]4} = 0, \quad (13)$$

$$f_{2k}^{[2]^{(IV)}}(x_2) - 2f_{2k}^{[2]^{(III)}}(x_2) \delta_k^{[1]2} + f_{2k}^{[2]}(x_2) \delta_k^{[1]4} = 0, \quad (14)$$

$$f_{1k}^{[2]^{(IV)}}(x_2) - 2f_{1k}^{[2]^{(III)}}(x_2) \gamma_k^{[1]2} + f_{1k}^{[2]}(x_2) \gamma_k^{[1]4} = 0. \quad (15)$$

Rozwiązanie tych równań ma postać:

$$f_{2k}^{[1]}(x_1) = R_{1k}^{[1]} F_{1(k)}^{[1]}(x_1) + R_{2k}^{[1]} \frac{x_1}{a_1} F_{2(k)}^{[1]}(x_1) + R_{3k}^{[1]} F_{2(k)}^{[1]}(x_1) + R_{4k}^{[1]} \frac{x_1}{a_1} F_{1(k)}^{[1]}(x_1).$$

$$f_{2k}^{[2]}(x_2) = R_{1k}^{[2]} F_{1(k)}^{[2]}(x_2) + R_{2k}^{[2]} \frac{x_2}{a_2} F_{2(k)}^{[2]}(x_2) + R_{3k}^{[2]} F_{2(k)}^{[2]}(x_2) + R_{4k}^{[2]} \frac{x_2}{a_2} F_{1(k)}^{[2]}(x_2).$$

$$f_{1k}^{[1]}(x_1) = R_{5k}^{[1]} \Psi_{1(k)}^{[1]}(x_1) + R_{6k}^{[1]} \frac{x_1}{a_1} \Psi_{2(k)}^{[1]}(x_1) + R_{7k}^{[1]} \Psi_{2(k)}^{[1]}(x_1) + R_{8k}^{[1]} \frac{x_1}{a_1} \Psi_{1(k)}^{[1]}(x_1).$$

$$f_{1k}^{[2]}(x_2) = R_{5k}^{[2]} \Psi_{1(k)}^{[2]}(x_2) + R_{6k}^{[2]} \frac{x_2}{a_2} \Psi_{2(k)}^{[2]}(x_2) + R_{7k}^{[2]} \Psi_{2(k)}^{[2]}(x_2) + R_{8k}^{[2]} \frac{x_2}{a_2} \Psi_{1(k)}^{[2]}(x_2).$$

gdzie:

$$F_{1(k)}^{[1]}(x_1) = \frac{ch(\delta_k^{[2]} x_1)}{\exp(\delta_k^{[2]} a_1)}, \quad F_{2(k)}^{[1]}(x_1) = \frac{sh(\delta_k^{[2]} x_1)}{\exp(\delta_k^{[2]} a_1)},$$

$$F_{1(k)}^{[2]}(x_2) = \frac{ch(\delta_k^{[1]} x_2)}{\exp(\delta_k^{[1]} a_2)}, \quad F_{2(k)}^{[2]}(x_2) = \frac{sh(\delta_k^{[1]} x_2)}{\exp(\delta_k^{[1]} a_2)},$$

$$\Psi_{1(k)}^{[1]}(x_1) = \frac{ch(\gamma_k^{[2]} x_1)}{\exp(\gamma_k^{[2]} a_1)}, \quad \Psi_{2(k)}^{[1]}(x_1) = \frac{sh(\gamma_k^{[2]} x_1)}{\exp(\gamma_k^{[2]} a_1)},$$

$$\Psi_{1(k)}^{[2]}(x_2) = \frac{ch(\gamma_k^{[1]} x_2)}{\exp(\gamma_k^{[1]} a_2)}, \quad \Psi_{2(k)}^{[2]}(x_2) = \frac{sh(\gamma_k^{[1]} x_2)}{\exp(\gamma_k^{[1]} a_2)}.$$

Określamy wzór na ugięcie płyty [5]:

$$w = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^{\tilde{K}} \left[ R_{uk}^{[1]} W_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} W_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] + w_s. \quad (16)$$

Funkcje  $W_{u(k)}^{[j]}$  noszą nazwę funkcji kształtu ugięcia.



Wyznaczamy wzory na przemieszczenia poziome:

$$u_1 = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^K \left[ R_{uk}^{[1]} U_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} U_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] + \frac{\hat{c}w_*}{\hat{c}x_1}, \quad (17)$$

$$u_2 = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^K \left[ R_{uk}^{[1]} U_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} U_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] + \frac{\hat{c}w_*}{\hat{c}x_2}, \quad (18)$$

momenty zginające:

$$M_{11} = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^K \left[ R_{uk}^{[1]} Y_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} Y_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] - D \left[ \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_1^2} + \nu \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_2^2} \right], \quad (19)$$

$$M_{22} = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^K \left[ R_{uk}^{[1]} Y_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} Y_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] - D \left[ \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_2^2} + \nu \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_1^2} \right], \quad (20)$$

momenty skręcające:

$$M_{12} = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^K \left[ R_{uk}^{[1]} Z_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} Z_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] - D(1-\nu) \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_1 \hat{c}x_2}, \quad (21)$$

siły tnące:

$$Q_1 = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^K \left[ R_{uk}^{[1]} T_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} T_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] - D \frac{\hat{c}}{\hat{c}x_1} \left( \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_1^2} + \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_2^2} \right), \quad (22)$$

$$Q_2 = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^K \left[ R_{uk}^{[1]} G_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} G_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] - D \frac{\hat{c}}{\hat{c}x_2} \left( \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_1^2} + \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_2^2} \right), \quad (23)$$

oraz uogólnioną siłę tnącą według Kirchhoffa:

$$F_1 = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^K \left[ R_{uk}^{[1]} K_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} K_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] - D \frac{\hat{c}}{\hat{c}x_1} \left( \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_1^2} + (2-\nu) \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_2^2} \right),$$

$$F_2 = \sum_{u=1}^8 \sum_{k=1}^K \left[ R_{uk}^{[1]} L_{u(k)}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{uk}^{[2]} L_{u(k)}^{[2]}(x_1, x_2) \right] - D \frac{\hat{c}}{\hat{c}x_2} \left( \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_1^2} + (2-\nu) \frac{\hat{c}^2 w_*}{\hat{c}x_2^2} \right). \quad (24)$$

### 3. ROZWIĄZANIE KRATOWNICY

Aby określić przemieszczenie dowolnych punktów dolnego pasma kratownicy pod nieznanym obciążeniem  $T_2^s(x_1)$  (rys. 2) korzystamy z funkcji wpływu sił normalnych

w prętach kratownicy [6]. Funkcje te uzyskujemy rozwiązując kratownice od obciążenia jednostkowego  $\bar{P} = 1$  przyłożonego do pasa dolnego na odległości  $x$  od lewej podpory. Przykładowo podajemy funkcje wpływu sił normalnych dla niektórych prętów kratownicy:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{.1-1} &= \frac{\bar{P}}{2} \frac{\sqrt{h^2 + l_2^2}}{h} \left( 1 + \frac{x_1}{l_1} \right); \quad \bar{N}_{.1-3} = -\frac{\bar{P}}{2} \frac{l_2}{h} \left( 1 + \frac{x_1}{l_1} \right), \\ \bar{N}_{1-3} &= -\frac{\bar{P}}{2} \frac{\sqrt{h^2 + (l_1 - l_2)^2}}{h} \left( 1 + \frac{x_1}{l_1} \right); \quad \bar{N}_{1-2} = \frac{\bar{P}}{2} \frac{l_1}{h} \left( 1 + \frac{x_1}{l_1} \right); \quad \bar{N}_{2-3} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Obciążenia podajemy w postaci szeregu trygonometrycznego z nieznanymi współczynnikami:

$$T_2^*(x_1) = \sum_{i=1}^K R_i \cos \left[ \delta_i^{[1]} (x_1 - a_1) \right] + \sum_{i=1}^K S_i \sin \left[ \delta_i^{[1]} (x_1 - a_1) \right]. \quad (26)$$

Współczynniki szeregu określamy z warunków zgodności ugięć płyty i kratownicy na ich wspólnej krawędzi. Siły w kratownicy od obciążenia  $T_2^*(x_1)$  otrzymujemy z następującej zależności:

$$N_{ip} = \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} \bar{N}_i(x_1) T_2^*(x_1) dx_1. \quad (27)$$

Ugięcie dolnego pasa kratownicy na odległości  $\xi$  od lewej krawędzi określamy za pomocą wzoru Maxwella-Mohra:

$$\Delta_p(\xi) = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{N}_i(\xi) N_{ip}}{EA}, \quad (28)$$

gdzie  $\bar{N}_i(\xi)$  siła w  $i$ -tym pręcie wywołana obciążeniem jednostkowym przyłożonym w punkcie  $\xi$  dolnego pasma kratownicy. Przyrównując ugięcia krawędzi płyty  $w(x_1 = \xi, a_2)$  do ugięcia kratownicy w tych samych punktach (28), otrzymujemy układ równań liniowych algebraicznych na nieznanne współczynniki  $R_i, S_i$ . Zauważmy, że pod obciążeniem  $T_2^*(x_1)$  w dolnym paśmie kratownicy oprócz sił normalnych powstaną momenty zginające, które też będą miały wpływ na przemieszczenia poziome. W danej pracy ten wpływ nie uwzględniamy, co na ogół nie zmienia istoty opracowanej metody.

## 4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Obliczenia wykonano dla płyty jednoprzęsłowej pod obciążeniem stałym  $q = 10 \text{ kN/m}^2$ . Przyjęto dane dla płyty:

$E_p = 27000 \text{ MPa}$  – moduł Younga,  $\nu = 0.3$  – współczynnik Poissona,

$h = 0.3 \text{ m}$  – grubość płyty,  $a_1 = 10 \text{ m}$ ,  $a_2 = 5 \text{ m}$  – wymiary płyty,

dla kratownicy:

$E_k = 205000 \text{ MPa}$ ,  $A = 20 \text{ cm}^2$  – pole przekroju poprzecznego prętów.

Do rozwiązania wybrano dziesięć punktów kolokacji. W tych punktach ugięcia płyty i kratownicy dokładnie pokrywają się. W tabeli 1 podane są wartości ugięć płyty i kratownicy w punktach pośrednich.

Tabela 1. Wartości ugięć płyty i kratownicy w wybranych punktach na krawędzi współpracy płyty z kratownicą

Współrzędne	(0;5)	(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
Kratownica [cm]	1.90615	1.71553	1.52492	1.33430	1.14369	0.95307	0.76249
Płyta [cm]	1.90615	1.73038	1.51020	1.33930	1.14111	0.95460	0.76150
Różnica [%]	0.00	0.865	0.965	0.374	0.226	0.16	0.126

Współrzędne	(7;5)	(8;5)	(9;5)
Kratownica [cm]	0.57184	0.38123	0.19061
Płyta [cm]	0.57244	0.38088	0.19076
Różnica [%]	0.105	0.091	0.079

Maksymalna względna różnica rezultatów (spełnienia warunku współpracy płyty z kratownicą) wyniosła w przybliżeniu 0.965%. Ugięcie w środku płyty wynosi:  $w(0;0) = 2.03737 \text{ [cm]}$ . Tabela 2 ilustruje wpływ kratownicy na ugięcie płyty w przekroju środkowym prostopadłym do płaszczyzny kratownicy. Wiersz górny dotyczy płyty wzmocnionej kratownicą, wiersz dolny – płyty swobodnej.

Tabela 2. Porównanie ugięcia płyty (w przekroju środkowym prostopadłym do płaszczyzny kratownicy) i kratownicy

Współrzędne punktu		(0;5)	(0;4.5)	(0;4)	(0;3.5)	(0;3)	(0;2.5)	(0;2)
Ugięcia [cm]	Płyta – kratownica	1.906	1.889	1.877	1.882	1.903	1.932	1.964
	Płyta	27.315	27.768	28.161	28.499	28.786	29.024	29.215

Współrzędne punktu		(0;1.5)	(0;1)	(0;0.5)	(0;0)
Ugięcia [cm]	Płyta – kratownica	1.993	2.017	2.032	2.037
	płyta	29.362	29.466	29.527	29.548

Widać, że kratownica orientacyjnie piętnaście razy zmniejsza ugięcie płyty. W taki sposób w danej pracy opracowano nową analityczno-numeryczną metodę rozwiązywa-

nia układów kratowo-plytowych, która pozwala z dużą dokładnością spełnić warunki brzegowe dla różnych sposobów połączenia płyty z kratownicą.

## LITERATURA

- [1] Онишко Л., Нітка Я., Берегова Н., Делявський М., 2003. Метод розрахунку напружено-деформованого стану мостової конструкції. 6-й Міжнародний симпозіум українських інженерів – механіків у Львові. Тези доповідей. Львів 21-23 травня, с. 25.
- [2] Тимошенко С.П., Войновски-Кригер С., 1966. Пластины и оболочки. Наука Москва.
- [3] Kączkowski Z., 2000. Płyty – Obliczenia statyczne. Arkady Warszawa.
- [4] Delyavskyy M., Ran R., Grinczenko L., Bereгова N., 2002. Poprzeczne zginanie płyty prostokątnej utwierdzonej na wszystkich krawędziach. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz, Mechanika 53, 65-71.
- [5] Podhorecki A., Delyavskyy M., Ran R., 2003. O pewnej metodzie rozwiązywania układów płaskich złożonych z elementów płytowych. [W:] Budownictwo ogólne. Zagadnienia konstrukcyjne, materiałowe i ciepłno-wilgotnościowe w budownictwie. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz. 123-129.
- [6] Praca zbiorowa pod red. A. Budzianowskiego, 1977. Zbiór zadań z mechaniki budowli. Cz. V. Linie wpływowe płaskich ustrojów prętowych. Skrypty uczelniane 680. Politechnika Śląska. Gliwice.

## METHOD OF CALCULATION OF CONTINUOUS PLATE FORCED WITH TRUSSES

### Summary

A continuous plate connected with trusses at longitudinal edges is considered. For calculating of the construction it is divided in plate and two trusses. Their joint action is modelled by means of unknown load. Unknown load is determined from agreement conditions of displacements for plate and truss.

Keywords: plate, Fourier's series, isotropy, truss

## ANALIZA NUMERYCZNA NAPRĘŻEŃ W ENDOPROTEZIE STAWU BIODROWEGO Z UWZGLĘDNIENIEM WPLYWU GEOMETRII NA WYTĘŻENIE

Bartosz Nowak, Jerzy Najar

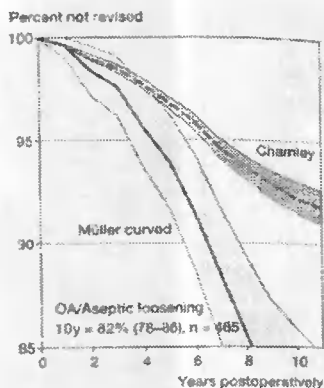
Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej  
Wydział Matematyki Techniki i Nauk Przyrodniczych  
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego  
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono analizę stanu naprężenia w części bliższej kości udowej po całkowitej alloplastyce stawu biodrowego, ze szczególnym uwzględnieniem warstwy cementu kostnego. W obliczeniach MES wykorzystano płaski i przestrzenny model połączenia protezy, tulei cementowej i kości oraz środowisko obliczeniowe ABAQUS CAE w wersji 6.4.

Słowa kluczowe: endoproteza stawu biodrowego, cement kostny, MES

### 1. WSTĘP

Alloplastyka stawu biodrowego stała się w ciągu minionych lat szeroko stosowaną metodą leczenia schorzeń tego złącza. Polega ona na częściowej lub całkowitej wymianie zniszczonych części stawu na sztuczne. Dzięki rozwojowi technologii wytwarzania protez spełniają one ze znaczną niezawodnością funkcje zastępcze stawu biodrowego do co najmniej 10 lat – rysunek 1 [5].

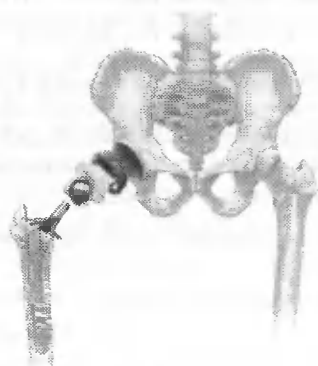


Rys. 1. Prawdopodobieństwo poprawnej pracy endoprotezy stawu biodrowego w zależności od typu zastosowanej protezy [5]

Powodem stosowania endoprotez są rozmaite nieuleczalne koksartrozy lub też urazy mechaniczne powodujące złamania części bliższych kości udowej oraz kości miedniczej. Wynikają z nich zmiany struktury głowy kości udowej oraz części panewkowej, doprowadzając do ograniczenia ruchów. Statystyki pokazują, że najbardziej narażoną grupę stanowią osoby po 60 roku życia, u których dodatkowo stwierdza się osłabienie struktury kostnej w wyniku osteoporozy. W zależności od wieku pacjenta, aktywności życiowej i typu dysfunkcji stosuje się różnego rodzaju protezy.

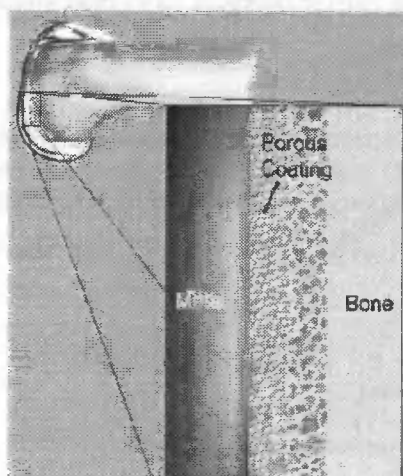
## 2. PROTEZY STAWU BIODROWEGO

Proteza stawu biodrowego składa się z trzpienia, głowy mocowanej w części bliższej kości udowej oraz panewki utwierdzonej w kości miedniczej (rys. 2).

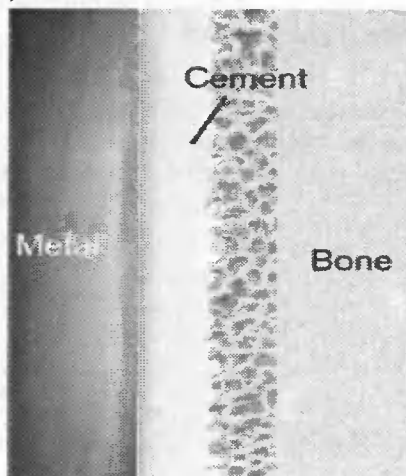


Rys. 2. Endoproteza stawu biodrowego i jej umiejscowienie w organizmie człowieka [6]

a)



b)



Rys. 3. Złącze endoprotezy z kością [6]: a) cementowe. b) bezcementowe

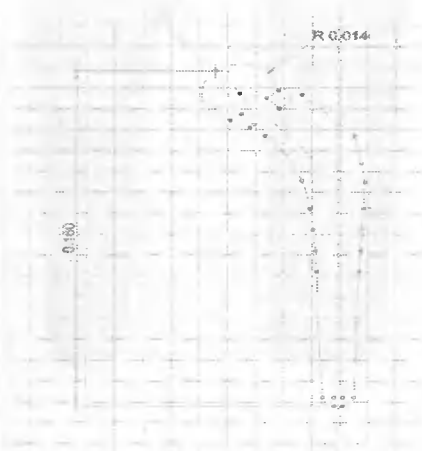
Poszczególne typy protez różnią się, poza kształtem i wielkością, również sposobem mocowania części składowych do kości (złącze cementowe, bezcementowe na wcisk, bezcementowe zrostowe (rys. 3)), stosuje się też różne materiały. Na przykład, trzpienie protez wykonywane są ze stali nierdzewnych, stopów chromu, kobaltu, tytanu i molibdenu, zaś głowy protez mogą być wykonane ze stali nierdzewnych lub spieków tlenku glinu. Panewki natomiast wykonuje się z najczęściej z teflonu, rzadziej ze spieków tlenku glinu.

### 3. SIŁY DZIAŁAJĄCE NA STAW BIODROWY

Staw biodrowy przenosi obciążenia statyczne i dynamiczne, wynikające z masy ciała i sił mięśni działających na staw. Punkty przyłożenia tych sił, ich wartości i kierunki są zmienne i zależą od sposobu podparcia, charakteru i fazy ruchu. Wartość obciążeń występujących w stawach zmienia się w zależności od fazy chodu, w związku ze zmianą środka ciężkości przemieszczającego się w stronę przeciwną do ruchu kończyny obciążanej [4]. Siły w stawie biodrowym zależą więc od fazy styku stopy z podłożem. Rozpatruje się dwie sytuacje obciążenia w stawie biodrowym [3]: fazę obciążenia obunożnego oraz jednożnego. W fazie obunożnej staw biodrowy przenosi do ok. 61% ciężaru ciała, a przy podparciu jednożnym staw obciążony przenosi statycznie do 81% tego ciężaru. W przypadku obciążenia dynamicznego siły te mogą wzrosnąć ponad dwójnasób.

### 4. OBIEKT BADAŃ

Obiektem badań jest zespół złożony z trzpienia z głową (rys. 4), tulei cementowej i kości udowej, w której trzpień jest zamocowany. Parametry geometryczne i materiałowe wyznaczone są na podstawie analizy grupy protez udostępniionych przez Klinikę Chirurgii Urazowej i Ortopedii X Wojskowego Szpitala Klinicznego w Bydgoszczy.



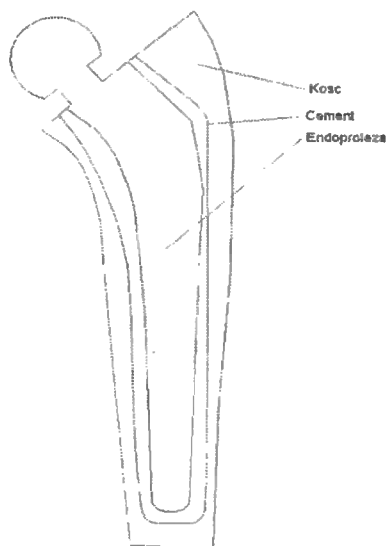
Rys. 4. Widok trzpienia i głowy protezy oraz wymiary charakterystyczne

Wymiary charakterystyczne to: średnica głowy 28 mm i długość trzpienia 160 mm, zadane są również kąty pomiędzy osią trzpienia i osią głowy. Materiał trzpienia to stop tytanu z domieszkami przede wszystkim niklu (ok. 25%). Stałe materiałowe stopu wyznaczone metodą ultradźwiękową wynoszą: moduł Younga  $E = 107$  GPa oraz współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ ; twardość stopu wynosi 35 HRC. Na podstawie analizy literaturowej [1], ustalono geometrię i właściwości warstwy cementu: jest to polimetakrylan metylu o module Younga  $E = 2$  GPa i współczynniku Poissona  $\nu = 0,36$ . Model mechaniczny kości przyjęto z dużym uproszczeniem jako materiał sprężysty izotropowy, a stałe materiałowe ustalono jako średnie z podanych w literaturze [1] wartości dla poszczególnych kierunków: moduł Younga  $E = 13$  GPa oraz współczynnik Poissona  $\nu = 0,38$ .

## 5. MODELE GEOMETRYCZNE ZASTOSOWANE W OBLICZENIACH

W pracy przedstawiono trzy modele połączeń kości, cementu i trzpienia endoprotezy utworzone w preprocesorze graficznym programu ABAQUS CAE. Wykonano studium parametryczne modyfikacji geometrii połączeń, polegające na badaniu wpływu przesunięcia osi trzpienia względem osi tulei cementowej w otworze kostnym o obraną wartość. Celem tego studium było zbadanie błędu mimośrodowości mocowania trzpienia na wartości naprężeń w cemencie i kości pod obciążeniem.

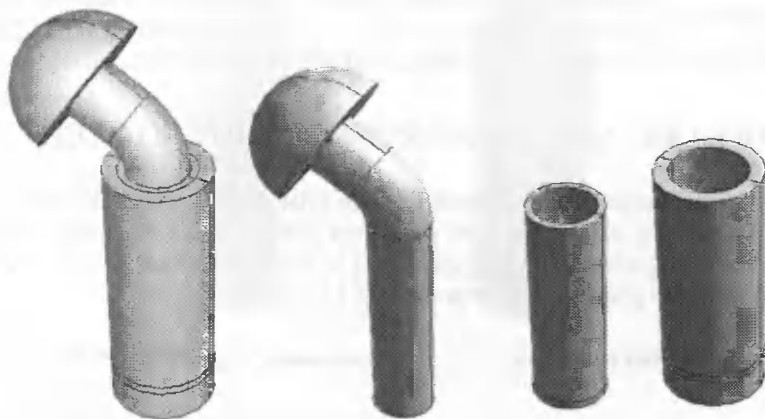
Pierwszy z modeli to płaski model 2D. Odtwarza on przekrój połączenia wymienionych elementów i ma charakter uproszczony. Zbudowany jest z następujących części składowych: trzpienia protezy z głową, warstwy cementu i materiału kostnego (rys. 5). Dla przedstawionego niżej modelu zastosowano dwa warianty modyfikacji geometrii, polegające na przesunięciu osi trzpienia o 1,5 mm i  $-1,5$  mm względem osi cementu. W obliczeniach przyjmowano płaski stan naprężenia.



Rys. 5. Model 2D

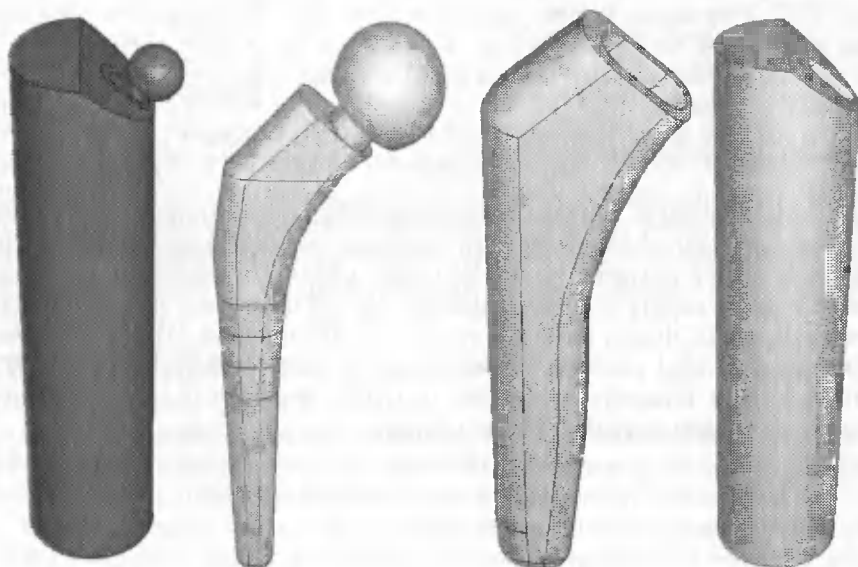


Drugim z modeli jest struktura przestrzenna, stanowiąca duże uproszczenie w stosunku do obiektu rzeczywistego. Zawiera ona takie same elementy jak w płaskim modelu (trzebień z głową, cement kostny, kość). Na rysunku 6 przedstawiono widok modelu 3D oraz poszczególne elementy złożenia.



Rys. 6. Uproszczony model przestrzenny

Trzeci model zawiera dokładne odwzorowanie geometrii protezy i cementu kostnego, natomiast stosowane jest przybliżenie dla kości przez wycięcie odpowiedniego obszaru z kości udowej (rys. 7).



Rys. 7. Przestrzenny model rzeczywisty

W celu sprawdzenia wpływu błędu mimośrodkowości zamocowania trzebień na wartość naprężeń dokonano modyfikacji opisanych w tabeli 1.

Tabela 1. Warianty modyfikacji geometrii

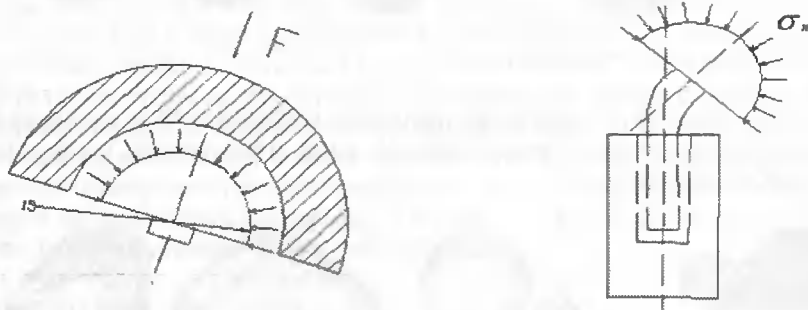
Model	Rodzaj modyfikacji	
2D	Przesunięcie osi trzpienia względem osi tulei cementowej o 1.5 mm	Przesunięcie osi trzpienia względem osi tulei cementowej o -1.5 mm
3D uproszczony	Przesunięcie osi trzpienia względem osi tulei cementowej o 1.5 mm	Przesunięcie osi trzpienia względem osi tulei cementowej o -1.5 mm
3D rzeczywisty	Przesunięcia przestrzenne (przypadek nie analizowany w pracy)	

## 6. MODEL OBCIĄŻENIA I WARUNKÓW BRZEGOWYCH

W modelu obciążenia protezy przyjęto siłę działającą na protezę  $F = 810$  N, co odpowiada obciążeniu statycznemu dla podparcia jednożoznego dla masy ciała równej 100 kg (rys. 8). Tej wielkości siłę wypadkową wytwarza ciśnienie  $\sigma_n = 1,16$  MPa przyłożone do półkuli o podanym wyżej promieniu 14 mm.

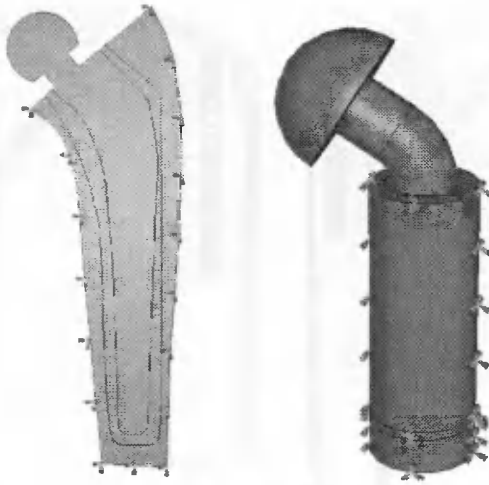
Siła  $F$  pochodząca od masy ciała.

Naprężenia działające na głowę protezy



Rys. 8. Analiza sił działających na głowę protezy

Dla modelu 2D jest to ciśnienie równomierne rozłożone na krawędzi głowy protezy. Przy ustalaniu warunków brzegowych odebrano wszystkie kinematyczne stopnie swobody krawędziom zewnętrznym wycinka kości udowej, co odpowiada sztywnemu połączeniu z dalszą częścią tej kości znajdującej się pod działaniem grup mięśni przyczepionych do części bliższej kości udowej (rys. 9). W strukturze 3D siła reprezentowana jest przez rozkład ciśnienia występującego na całej powierzchni głowy. Przy ustalaniu warunków brzegowych odebrano wszystkie stopnie swobody zewnętrznym powierzchniom obszaru wyciętego z kości udowej.



Rys. 9. Warunki zamocowania

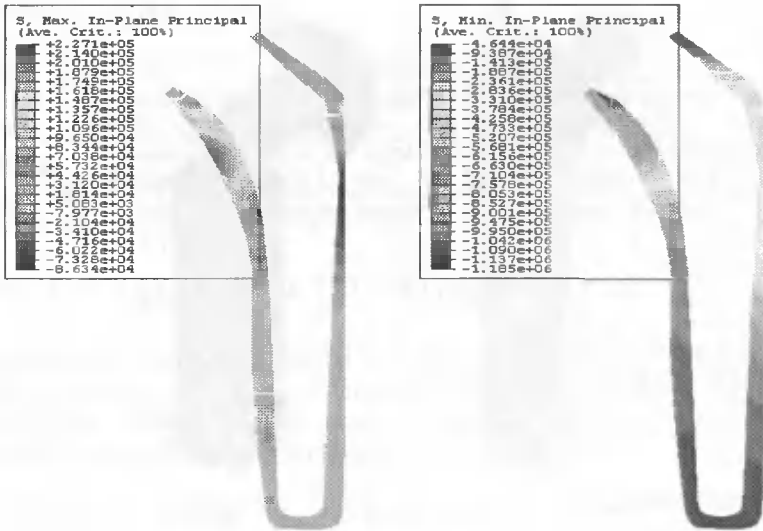
## 7. SIATKI ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Dla wszystkich elementów składowych modelu 2D zastosowano siatki składające się z elementów trójkątnych z przybliżeniem liniowym. Liczba węzłów i elementów zależy od wyboru mimośrodowej modyfikacji geometrii, por. punkt 5. Przy braku przemieszczenia mimośrodowego siatka zawierała 7823 węzły i 15 163 elementy. W przypadku zastosowania przesunięcia mimośrodowego siatki składały się z 7820 węzłów i 15156 elementów oraz odpowiednio 31078 węzłów i 61190 elementów. Dla uproszczonego modelu trójwymiarowego przy braku przemieszczenia mimośrodowego siatka składała się z 2849 węzłów i 6860 elementów czworo- i pięciokątnych (klinowych). Przy modyfikacji polegającej na zmianie mimośradowości liczba węzłów, w każdym przypadku, wynosiła 6193 oraz 17559 elementów typu czworo- i sześciokątnych. Obliczenia wykonano przy narastających obciążeniach w kolejnych sześciu inkrementach, aż do osiągnięcia obciążenia maksymalnego. Studium parametryczne zawierało również wariacje parametrów materiałowych cementu i kości, ze względu na niejednoznaczne dane literaturowe. Wyniki te jednak nie są relacjonowane w niniejszej pracy.

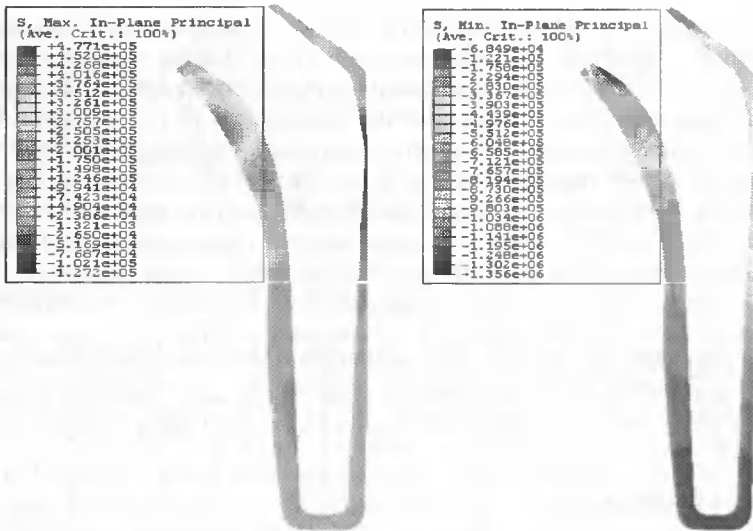
## 8. WYNIKI BADAŃ

Dla rozpatrywanego złożenia elementów struktury endoprotezy (kość, tuleja cementowa, trzpień z głową) obliczono naprężenia statyczne przy obciążeniu powierzchni głowy ciśnieniem 1,16 MPa i podanych w punkcie 5 warunkach zamocowania.

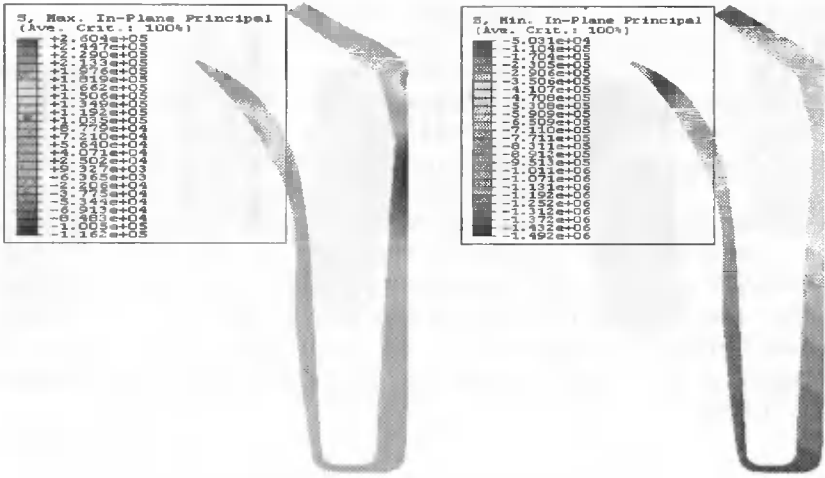
W analizowanych strukturach występują złożone stany naprężeń, których analizie z punktu widzenia wytrzymałości materiałów najwygodniej rozpatrywać badając naprężenia główne. Szczególną uwagę zwrócono na stan wyężenia w tulei cementowej jako najbardziej podatnej na uszkodzenia oraz najbardziej wrażliwej na zmiany mimośradowości montażu. Naprężenia główne dla tej warstwy przedstawione są na kolejnych rysunkach dla rozpatrywanych modeli geometrycznych.



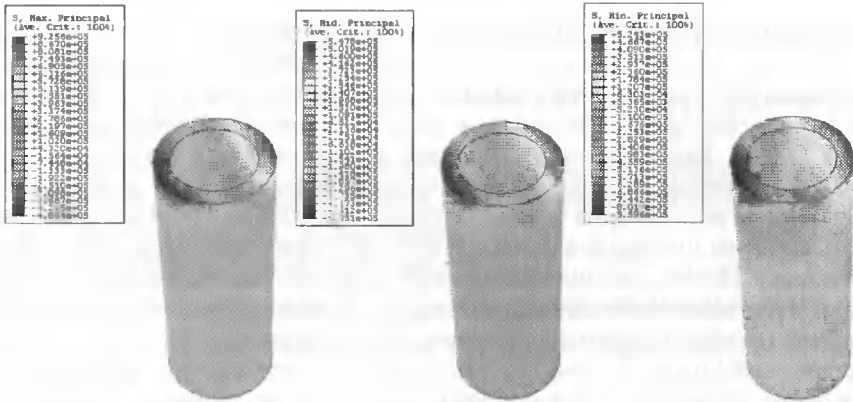
Rys. 10. Naprężenia główne maksymalne i minimalne bez modyfikacji geometrii



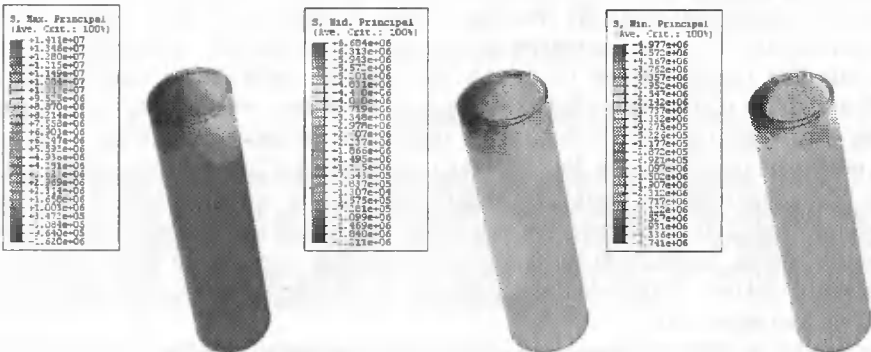
Rys. 11. Naprężenia główne maksymalne i minimalne dla przesunięcia trzpienia o +1,5 mm



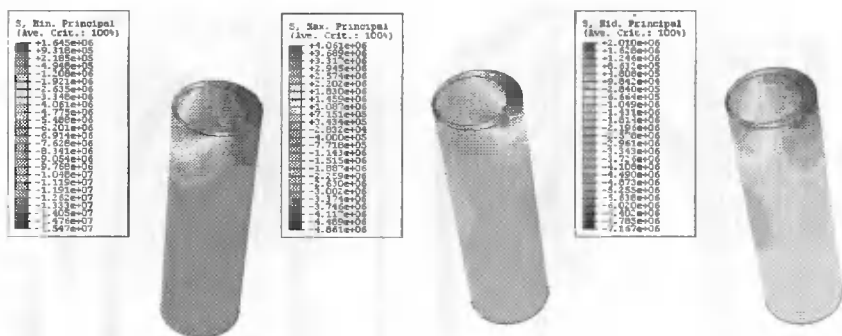
Rys. 12. Naprężenia główne maksymalne i minimalne dla przesunięcia trzpienia o -1.5 mm



Rys. 13. Naprężenia główne maksymalne, średnie i minimalne bez modyfikacji geometrii



Rys. 14. Naprężenia główne maksymalne, średnie i minimalne dla przesunięcia trzpienia o +1.5 mm



Rys. 15. Naprężenia główne maksymalne, średnie i minimalne dla przesunięcia trzpienia o  $-1,5$  mm

## 9. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonej analizy naprężeń głównych stwierdzono, że zarówno w modelu 2D, jak i 3D wartości dopuszczalne naprężeń dla cementu kostnego, które wynoszą wg [7]  $\sigma_r = 50$  MPa przy rozciąganiu i  $\sigma_r = 89$  MPa przy ściskaniu, nie zostały nawet w przybliżeniu osiągnięte w żadnym ze znanych kryteriów wytrzymałościowych (Tresci, Hubera-Misesa, Galileusza). W strukturze geometrycznej 2D, bez modyfikacji mimośrodowej, najbardziej wyęzione obszary występują w warstwie cementu, po stronie przywodzenia w części bliższej kości udowej. Stwierdzono tam maksymalne naprężenia rozciągające o wartości 0,23 MPa i najwyższe naprężenia ściskające wynoszące 1,18 MPa, aczkolwiek z pewnym przesunięciem w przestrzeni. Analizując wpływ zmian mimośrodowości dla tej struktury stwierdzono, że w obu przypadkach, polegających na przesunięciu warstwy cementu względem osi trzpienia, występuje zwiększenie maksymalnych naprężeń rozciągających i ściskających. W modyfikacji polegającej na zwiększeniu warstwy cementu po stronie przywodzenia stwierdza się wzrost maksymalnych naprężeń rozciągających o 53% oraz zwiększenie maksymalnych naprężeń ściskających o 14%. W przypadku polegającym na zmniejszeniu warstwy cementu po stronie przywodzenia (przesunięcie osi trzpienia o  $-1,5$  mm), oprócz obszaru o zwiększonych naprężeniach po stronie przywodzenia, występuje obszar maksymalnych naprężeń rozciągających po stronie odwodzenia. Stwierdzono tam naprężenia o 14% wyższe, w porównaniu z maksymalnymi naprężeniami występującymi w strukturze bez modyfikacji geometrii. Najwyższe naprężenia ściskające natomiast występują znowu po stronie przywodzenia. Wartości tych naprężeń są o 26% większe niż dla przypadku braku modyfikacji geometrii. Dalsze zwiększenie mimośrodowości struktury powoduje zwiększoną tendencję do narastania maksymalnych naprężeń w warstwie cementu kostnego. Ze względu na trudność oszacowania granic błędu mimośrodowości nie są znane zakresy dopuszczalnych odchyłek i związanych z tym niebezpiecznych spiętrzeń stanu naprężenia.

Z analizy modelu 3D wynika, że najwyższe naprężenia ściskające i maksymalne rozciągające są wyższe i wynoszą odpowiednio  $-0,85$  MPa i  $0,92$  MPa. Maksymalne naprężenia rozciągające dla wszystkich przypadków modyfikacji geometrii występują wyłącznie po stronie przywodzenia w okolicach górnych krawędzi warstw cementu

kostnego, w części bliższej kości udowej. Najwyższe naprężenia ściskające pojawiają się po stronie odwodzenia. Zmiana geometrii w tej strukturze powoduje również podwyższenie naprężeń. Zwiększenie warstwy cementu po stronie przywodzenia powoduje czterokrotne zwiększenie maksymalnych naprężeń rozciągających i zwiększenie najwyższych naprężeń ściskających prawie 17-krotnie. Zmniejszenie warstwy cementu po stronie przywodzenia powoduje 14-krotny wzrost maksymalnych naprężeń rozciągających i zwiększenie najwyższych naprężeń ściskających czterokrotnie.

Z obydwu analiz modelowych nie wynika jeszcze istnienie niebezpieczeństwa uszkodzenia cementu kostnego. Tendencja wykazanych zmian jednakowoż mogłaby służyć za podstawę ostrzeżenia przed przekroczeniem dopuszczalnych wartości wyężnienia materiałowego, zważywszy w szczególności na możliwości skrajnych efektów mimośrodowego montażu z jednej strony, jak i na zjawiska zmęczeniowe i dynamiczne potęgujące te niebezpieczeństwa.

## LITERATURA

- [1] Będziński R., 1997. Biomechanika inżynierska. OWPW Wrocław.
- [2] Bąk R., Burezyński T., 2001. Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego. WNT Warszawa.
- [3] Pauwels F., 1979. Symposium Biomechanik in Orthopädie und Traumatologie. Proceedings Berlin.
- [4] Bergman G., Graichen F., Rohlmann A., 1993. Hip joint loading during walking and running, measured in two patients. *Journal of Biomechanics* 26.
- [5] Hollister S.J. The course of biomechanics.  
<http://www.engin.umich.edu/class/bme456>
- [6] Long M., 1998. Titanium alloys in total hip replacement. *Biomaterials* 19.
- [7] Generation 4 Bone Cement. Technical Brochure. BIOMET ORTHOPEDIC, INC, Warsaw 2001.

## NUMERICAL ANALYSIS OF STRESSES IN HIP PROSTHESIS WITH RESPECT OF INFLUENCE OF GEOMETRY ON MATERIAL'S EFFORT

### Summary

In this paper authors present three geometrical models of cemented artificial bone replacements which consist of stem with head, layer of bone cement and hip bone all created in ABAQUS CAE 6.4 environment. Results of principal stresses analysis in bone cement under static load are computed using FE method. The influence of eccentricity between stem and cement's layer are discussed.

Keywords: artificial bone replacement, hip prosthesis, bone cement, FEM





## ANALIZA STATYCZNA TARCZY WŁÓKNISTEJ ZE SZCZELINAMI

Maria Olejniczak<sup>1</sup>, Mykhaylo Delyavskyy<sup>1</sup>, Lubov Onyshko<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Katedra Mechaniki Konstrukcji  
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

<sup>2</sup> Fizyko-Mechaniczny Instytut im. G.V. Karpenko  
NAN Ukrainy

Zaproponowano metodę określania lokalnego stanu naprężeń i przemieszczeń w tarczy ortotropowej ze szczelinami. Wyprowadzono wzory asymptotyczne rozkładu przemieszczeń i naprężeń w pobliżu szczeliny o małym niezerowym promieniu krzywizny konturu w wierzchołku. Otrzymano wyrażenia uogólnionych współczynników intensywności naprężeń i odpowiednich parametrów ich rozkładu. Przeprowadzono analizy parametryczne dla przypadku dwuosiowego rozciągania tarczy z jedną szczeliną oraz z szeregiem kolinearnych szczelin.

Słowa kluczowe: tarcza włóknista, szczeliny, płaski stan naprężenia

### 1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważmy tarczę izotropową uzbrojoną w jednym z kierunków włóknami ciągłymi izotropowymi. Załóżmy, że taka tarcza zawiera szereg szczelin prostoliniowych ułożonych na jednej linii prostej rozmieszczonej wzdłuż włókien. Szczeliną nazywamy cienkie nacięcie, w którym promień krzywizny konturu jest mały, lecz różny od zera. Zagadnienie rozwiązujemy korzystając z teorii modułów efektywnych. Pozwala ona zastąpić dyskretny materiał włóknokompozytowy materiałem jednorodnym ortotropowym z odpowiednim defektem. Za pomocą modułów efektywnych można przeprowadzić badania na poziomie makroskopowym. Badania te mogą dotyczyć wpływu zawartości objętościowej włókien, ich rozmieszczenia i orientacji oraz wpływu stosunku stałych materiałowych włókien i matrycy na stan naprężeń i odkształceń w tarczy włóknistej.

W pracy stosuje się moduły efektywne [1] otrzymane w wyniku kombinacji podejścia Foighta oraz Rejsa. Korzystając z zasady sumowania liniowego zakładamy, że szczeliny rozmieszczone są w ortotropowej tarczy jednorodnej. Związki fizyczne określone są przez moduły efektywne włóknokompozytu.

Rozpatrzmy tarczę ortotropową ze szczelinami. W celu dalszych rozważań wybierzmy jedną ze szczelin, którą nazywać będziemy szczeliną podstawową. W jej środku wybieramy kartezjański układ współrzędnych  $x_1Ox_2$  tak, żeby oś  $Ox_1$  przechodziła przez wierzchołek szczeliny.

Zagadnienie rozwiązujemy korzystając z teorii funkcji zmiennej zespolonej. W odróżnieniu od materiału izotropowego, gdzie mamy jedną zmienną:  $z = x_1 + ix_2$ , dla materiału ortotropowego określa się dwie zmienne zespolone:  $z_j = x_1 + i\beta_j x_2$  ( $j = \overline{1,2}$ ), gdzie  $\beta_j$  dotyczy urojonej części parametrów zespolonych drugiego rodzaju [2]. Wobec tego pole naprężeń i przemieszczeń w tarczy z materiału ortotropowego określone jest przez dwa potencjały zespolone S. Lechnickiego  $\Phi_1(z_1)$ ,  $\Phi_2(z_2)$  tych zmiennych [2,3]. W celu rozwiązania zagadnienia stosujemy odzwierciedlenie płaszczyzn fizycznych "Z" na płaszczyzny matematyczne "Ξ":

$$z_j = \omega_j(\xi_j) \quad (1)$$

Wobec tego kontury szczelin w płaszczyznach matematycznych przyjmują kształt elipsy. W terminach funkcji odzwierciedlających naprężenia i przemieszczenia określone są za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2 \operatorname{Re} \left[ \mu_1^2 \frac{\Phi_1'(\xi_1)}{\omega_1'(\xi_1)} + \mu_2^2 \frac{\Phi_2'(\xi_2)}{\omega_2'(\xi_2)} \right] \\ \sigma_{22} &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\Phi_1'(\xi_1)}{\omega_1'(\xi_1)} + \frac{\Phi_2'(\xi_2)}{\omega_2'(\xi_2)} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_{12} = -2 \operatorname{Re} \left[ \mu_1 \frac{\Phi_1'(\xi_1)}{\omega_1'(\xi_1)} + \mu_2 \frac{\Phi_2'(\xi_2)}{\omega_2'(\xi_2)} \right]$$

$$u_1 = 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi_1(\xi_1) + p_2 \Phi_2(\xi_2)], \quad u_2 = 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi_1(\xi_1) + q_2 \Phi_2(\xi_2)] \quad (3)$$

$$p_j = a_{11}\mu_j^2 - a_{16}\mu_j + a_{12}, \quad q_j = a_{12}\mu_j^2 + a_{22}\mu_j^{-1} - a_{26} \quad (4)$$

sformułowanych dla płaskiego stanu naprężenia [2,3] oraz związków:

$$\sigma_{13} = -2 \operatorname{Re} \left[ \mu_3 \frac{\Phi_3'(\xi_3)}{\omega_3'(\xi_3)} \right] \quad \sigma_{23} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\Phi_3'(\xi_3)}{\omega_3'(\xi_3)} \right] \quad (5)$$

$$u_3 = 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{\Phi_3(\xi_3)}{\sqrt{b_{44}b_{55} - b_{45}^2}} \right] \quad (6)$$

określonych dla ścinania poprzecznego.

## 2. LOKALNE POLE NAPRĘŻEŃ I PRZEMIESZCZEŃ

W celu wyprowadzenia wzorów opisujących stan naprężeń i przemieszczeń w okolicy wierzchołka szczeliny (punkt  $z_{0j}$ ) przechodzimy zgodnie z przekształceniem:

$$z_j = z_{0j} + \zeta_j \quad (7)$$

do lokalnego układu współrzędnych:  $\zeta_j = x_1 + i\beta_j x_2$  ulokowanego w tym wierzchołku. Przekształceniu (7) w płaszczyznach matematycznych odpowiadają związki:

$$\xi_j = \xi_{0j} + \zeta_j \quad (8)$$

gdzie:  $\xi_{0j}$  jest współrzędną wierzchołka elipsy, w którą przekształca się kontur szczeliny przy odzwierciedleniu (1), natomiast  $\zeta_j$  jest współrzędną lokalną w tej płaszczyźnie.

Uwzględniając związek (8), przekształcenie (1) sprowadzamy do postaci:

$$z_j = \omega_j(\xi_j) = \omega_j(\xi_{0j} + \zeta_j) \quad (9)$$

Punktowi  $z_{0j}$  wierzchołka szczeliny, określonego w płaszczyźnie fizycznej "Z", odpowiada punkt  $\omega_j(\xi_{0j})$  z płaszczyzny matematycznej.

Stan naprężeń w pobliżu wierzchołka szczeliny określamy w lokalnym układzie współrzędnych. Określamy związki pomiędzy zmiennymi lokalnymi:  $\zeta_j$  i  $\xi_j$ . W tym celu rozkładamy potencjały zespolone  $\Phi_j(\xi_j)$  oraz funkcje odzwierciedlające  $\omega_j(\xi_j)$ ,

w okolicy wierzchołka szczeliny (punkt  $\xi_{0j}$ ), w szeregi Taylora [4]:

$$\Phi_j(\xi_j) = \Phi_j(\xi_{0j}) + \Phi_j'(\xi_{0j})\zeta_j + \frac{1}{2!}\Phi_j''(\xi_{0j})\zeta_j^2 + \frac{1}{3!}\Phi_j'''(\xi_{0j})\zeta_j^3 + \dots \quad (10)$$

$$\omega_j(\xi_j) = \omega_j(\xi_{0j}) + \omega_j'(\xi_{0j})\zeta_j + \frac{1}{2!}\omega_j''(\xi_{0j})\zeta_j^2 + \frac{1}{3!}\omega_j'''(\xi_{0j})\zeta_j^3 + \dots \quad (11)$$

Związek analityczny pomiędzy tymi zmiennymi otrzymujemy zachowując w rozkładzie (11) trzy pierwsze wyrażenia:

$$\omega_j(\xi_j) = \omega_j(\xi_{0j}) + \omega_j'(\xi_{0j})\zeta_j + \frac{1}{2!}\omega_j''(\xi_{0j})\zeta_j^2 \quad (12)$$

Uwzględniając, że:

$$\omega_j(\xi_j) - \omega_j(\xi_{0j}) = \zeta_j \quad (13)$$

wyprowadzamy równania kwadratowe względem zmiennej  $\zeta_j$ :

$$\frac{1}{2!}\omega_j''(\xi_{0j})\zeta_j^2 + \omega_j'(\xi_{0j})\zeta_j - \zeta_j = 0 \quad (14)$$

Rozwiązując równania (14) otrzymujemy poszukiwany związek między zmiennymi  $\zeta_j$  i  $\xi_j$ :

$$\zeta_j = -\frac{\omega_j'(\xi_{0j})}{\omega_j''(\xi_{0j})} + \frac{\sqrt{\frac{\omega_j'^2(\xi_{0j})}{\omega_j''(\xi_{0j})} + 2\zeta_j}}{\sqrt{\omega_j''(\xi_{0j})}} \quad (15)$$

Wiadomo [5], że jeśli defekt jest dość cienki ( $\rho < 0.01l$ ), to promień krzywizny konturu defektu w wierzchołku jest zasadniczo mniejszy od jego długości (szczelina spełnia te założenia). W tym przypadku mamy dość proste wyrażenie na promień krzywizny konturu szczeliny w jej wierzchołku:

$$\rho_j = \frac{\omega_j'^2(\zeta_{0j})}{\omega_j''(\zeta_{0j})} \quad (16)$$

Wprowadźmy zmienną lokalną:  $Z_j = \rho_j + 2\zeta_j$  w płaszczyźnie fizycznej "Z", którą nazwiemy uogólnioną zmienną lokalną. W terminach tej zmiennej związek (15) przyjmuje postać:

$$\xi_j = \frac{-\sqrt{\rho_j} + \sqrt{Z_j}}{\sqrt{\omega_j''(\xi_{0j})}} \quad (17)$$

Związek (17) pozwala określić zależności pomiędzy wyższymi potęgami tych zmiennych:

$$\xi_j^2 = \frac{\rho_j - 2\sqrt{\rho_j Z_j} + Z_j}{\omega_j''(\xi_{0j})} \quad (18)$$

$$\xi_j^3 = \frac{-\rho_j^3/2 + 3\rho_j\sqrt{Z_j} - 3Z_j\sqrt{\rho_j} + Z_j^3/2}{\omega_j''(\xi_{0j})^3/2} \quad (19)$$

Podstawiając zależności (17÷19) do rozkładów (10), a potem otrzymane związki do wzorów (3) wyprowadzamy wzory asymptotyczne rozkładów przemieszczeń w okolicy wierzchołka szczeliny:

$$u_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \left\{ p_j \left[ A_j \sqrt{Z_j} + B_j Z_j + C_j Z_j^3/2 + D_j \right] \right\} \quad (20)$$

$$u_2 = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \left\{ q_j \left[ A_j \sqrt{Z_j} + B_j Z_j + C_j Z_j^3/2 + D_j \right] \right\} \quad (21)$$

$$u_3 = 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{A_3 \sqrt{Z_3} + B_3 Z_3 + C_3 Z_3^3/2 + D_3}{\sqrt{b_{44} b_{55} - b_{45}^2}} \right] \quad (22)$$

gdzie:

$$A_k = \frac{\Phi'_k(\xi_{0k})}{\sqrt{\omega_k''(\xi_{0k})}} - \frac{\sqrt{\rho_k} \Phi_k''(\xi_{0k})}{\omega_k''(\xi_{0k})} + \frac{1}{2} \frac{\rho_k \Phi_k'''(\xi_{0k})}{\omega_k''(\xi_{0k})^{3/2}} \quad (23)$$

$$B_k = \frac{\Phi_k''(\xi_{0k})}{2\omega_k''(\xi_{0k})} - \frac{\sqrt{\rho_k} \Phi_k'''(\xi_{0k})}{\omega_k''(\xi_{0k})^{3/2}} \quad (24)$$

$$C_k = \frac{\Phi_k'''(\xi_{0k})}{\omega_k''(\xi_{0k})^{3/2}} \quad (25)$$

$$D_k = -\frac{\sqrt{\rho_k} \Phi'_k(\xi_{0k})}{\sqrt{\omega_k''(\xi_{0k})}} + \frac{\rho_k \Phi_k''(\xi_{0k})}{\omega_k''(\xi_{0k})} - \frac{\rho_k^{3/2} \Phi_k'''(\xi_{0k})}{6\omega_k''(\xi_{0k})^{3/2}} \quad k = \overline{1,3} \quad (26)$$

Z powyższych wzorów widać, że w terminach zmiennej uogólnionej  $Z_j$  struktura rozkładu przemieszczeń w pobliżu wierzchołka zaokrąglonego jest taka sama, jak w okolicy wierzchołka pęknięcia w terminach zmiennej lokalnej  $z_j$ . W związku z tym współczynnik przy  $\sqrt{Z_j}$  we wzorach (20) i (21) będziemy nazywać uogólnionym zespolonym współczynnikiem intensywności naprężeń.

Rozkład naprężeń w pobliżu szczeliny wyznaczamy za pomocą równań fizycznych:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= b_{1111} \frac{\hat{c}u_1}{\hat{c}x_1} + b_{1122} \frac{\hat{c}u_2}{\hat{c}x_2} + b_{1112} \left( \frac{\hat{c}u_1}{\hat{c}x_2} + \frac{\hat{c}u_2}{\hat{c}x_1} \right) \\ \sigma_{22} &= b_{2211} \frac{\hat{c}u_1}{\hat{c}x_1} + b_{2222} \frac{\hat{c}u_2}{\hat{c}x_2} + b_{2212} \left( \frac{\hat{c}u_1}{\hat{c}x_2} + \frac{\hat{c}u_2}{\hat{c}x_1} \right) \\ \sigma_{12} &= b_{1211} \frac{\hat{c}u_1}{\hat{c}x_2} + b_{1222} \frac{\hat{c}u_2}{\hat{c}x_2} + b_{1212} \left( \frac{\hat{c}u_1}{\hat{c}x_2} + \frac{\hat{c}u_2}{\hat{c}x_1} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

oraz korzystając z wyrażen (20), (21). Tutaj  $b_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = \overline{1,2}$ ) są współczynnikami macierzy sztywności materiału ortotropowego.

Składowe tensora odkształceń w pobliżu wierzchołka szczeliny określamy uwzględniając:

$$\frac{\hat{c}Z_i}{\hat{c}x_1} = 2; \quad \frac{\hat{c}Z_i}{\hat{c}x_2} = 2i\beta_i \quad (28)$$

Stąd otrzymujemy:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\hat{c}u_1}{\hat{c}x_1} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=i}^2 \left\{ p_j \left[ \frac{A_j}{\sqrt{Z_j}} + 2B_j + 3C_j \sqrt{Z_j} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \frac{\hat{c}u_2}{\partial x_2} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \left\{ q_j i \beta_j \left[ \frac{A_j}{\sqrt{Z_j}} + 2B_j + 3C_j \sqrt{Z_j} \right] \right\} \\ \gamma_{12} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \left\{ [q_j + i p_j \beta_j] [A_j \sqrt{Z_j} + B_j Z_j + C_j Z_j^2] \right\}\end{aligned}\quad (29)$$

Podstawiając wyrażenia (29) do równań (27) wyprowadzamy asymptotyczne wzory rozkładu naprężeń w okolicy wierzchołka szczeliny:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \left\{ r_j \left[ \frac{A_j}{\sqrt{Z_j}} + 2B_j + 3C_j \sqrt{Z_j} \right] \right\} \\ \sigma_{22} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \left\{ s_j \left[ \frac{A_j}{\sqrt{Z_j}} + 2B_j + 3C_j \sqrt{Z_j} \right] \right\} \\ \sigma_{12} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \left\{ t_j \left[ \frac{A_j}{\sqrt{Z_j}} + 2B_j + 3C_j \sqrt{Z_j} \right] \right\}\end{aligned}\quad (30)$$

Tutaj:

$$\begin{aligned}r_j &= [b_{1111} p_j + b_{1112} q_j + i \beta_j (b_{1112} p_j + b_{1122} q_j)] \\ s_j &= [b_{1122} p_j + b_{2212} q_j + i \beta_j (b_{2212} p_j + b_{2222} q_j)] \\ t_j &= [b_{1112} p_j + b_{1212} q_j + i \beta_j (b_{1212} p_j + b_{1222} q_j)]\end{aligned}\quad (31)$$

### 3. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

#### Przykład 1.

Analizie poddano tarczę jednokierunkowo uzbrojoną. Przyjęto, że szczelina w tarczy ma postać cienkiej elipsy i ukierunkowana jest wzdłuż włókien. Jej długość jest znacznie mniejsza od wymiarów tarczy. Tarczę poddano rozciąganiu jednoosiowemu o intensywności  $p$  prostopadłemu do większej półosi elipsy. W celu określenia parametrów:  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$  zgodnie ze wzorami (23÷25) skorzystamy z potencjałów zespolonych dla tarczy ortotropowej z otworem eliptycznym [6]:

$$\Phi_j(z_j) = N_j z_j + \Phi_j^*(z_j) \quad (32)$$

gdzie:

$$N_j = (-1)^{j+1} p \frac{\beta_{3-j}^2}{2(\beta_3^2 - \beta_1^2)} \quad (33)$$

$$\Phi_j^*(z_j) = (-1)^{j+1} p \frac{(a + \beta_1 b)}{2(\beta_1 - \beta_2)} \frac{a\beta_{3-j}}{z_j + \sqrt{z_j^2 - (a^2 - \beta_j^2 b^2)}} \quad (34)$$

Zmienna zespolona  $z_j$  w płaszczyźnie fizycznej z eliptycznym otworem określona jest wzorem [3]:

$$z_j = \omega_j(\xi_j) = \frac{a - \beta_j b}{2} \xi_j + \frac{a + \beta_j b}{2} \xi_j^{-1} \quad (35)$$

w którym  $a, b$  oznaczają półosie elipsy. Uwzględniając powyższe funkcje, wzór (23) sprowadzamy do postaci:

$$A_j = \left[ \frac{\Gamma_j - a_j}{(1 + \beta_j \varepsilon)^{3/2}} + \frac{2a_j \beta_j \varepsilon}{(1 + \beta_j \varepsilon)^{5/2}} \right] p \sqrt{a}, \quad j = \overline{1,2}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a} \quad (36)$$

Wyrażenia (36) określają uogólnione współczynniki intensywności naprężeń dla szczeliny w postaci cienkiej elipsy. Dla przypadku otwarcia normalnego mamy dwa uogólnione współczynniki intensywności naprężenia ( $A_1, A_2$ ) zamiast jednego ( $K_1$ ), występującego w klasycznej mechanice pęknięcia. Jeśli promień krzywizny w wierzchołku szczeliny dąży do zera, to współczynniki te pokrywają się.

Pozostałe parametry wyznaczane są ze wzorów:

$$B_j = p \frac{a_j (1 - 2\beta_j \varepsilon)}{(1 + \beta_j \varepsilon)^2}, \quad C_j = \left[ -\frac{a_j}{(1 + \beta_j \varepsilon)^{3/2}} \right] \frac{p}{\sqrt{a}}, \quad j = \overline{1,2}. \quad (37)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\beta_2^2}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \frac{1 - \beta_1 \varepsilon}{2}, \quad \Gamma_2 = -\frac{\beta_1^2}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \frac{1 - \beta_2 \varepsilon}{2} \quad (38)$$

$$a_1 = \frac{\beta_2 (1 + \beta_1 \varepsilon)^2}{2(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_1^2 \varepsilon^2)} + \frac{\beta_2^2}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \frac{1 + \beta_1 \varepsilon}{2} \quad (39)$$

$$a_2 = -\frac{\beta_1 (1 + \beta_2 \varepsilon)^2}{2(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_2^2 \varepsilon^2)} - \frac{\beta_1^2}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \frac{1 + \beta_2 \varepsilon}{2} \quad (40)$$

W tabeli I podane są wartości  $A_j, B_j, C_j$  w zależności od parametru  $\varepsilon$  w przedziale  $\varepsilon \in [0; 0.1]$ . Przedstawione wyniki pokazują, że w rozpatrywanym przedziale parametry  $A_j, B_j, C_j$  w istotnym stopniu zależą od promienia krzywizny defektu. Maksymalne odchylenie względne rezultatów dla pęknięcia ( $\varepsilon = 0$ ) i szczeliny eliptycznej o stosunku osi ( $\varepsilon = b/a = 0.1$ ) dla  $A_j$  wynosi 16% oraz dla  $B_j$  78%. Z tego wynika, że nawet przy tak małym otwarciu, szczelinę nie możemy traktować jako pęknięcia.

Tabela 1. Wartości parametrów rozkładu naprężeń dla różnych parametrów otwarcia szczeliny

$\varepsilon$	$\frac{A_1}{K_1}$	$\frac{A_2}{K_1}$	$B_1$	$B_2$	$C_1$	$C_2$
0,00	-0.045527	0.545527	0.043774	-0.293774	-0.043774	0.293774
0,01	-0.044619	0.544594	0.040310	-0.292619	-0.044813	0.295145
0,02	-0.043764	0.543665	0.036947	-0.291460	-0.045998	0.296528
0,03	-0.042956	0.542742	0.033654	-0.290300	-0.047343	0.297917
0,04	-0.042191	0.541823	0.030396	-0.289130	-0.048867	0.299316
0,05	-0.041465	0.540908	0.027141	-0.287950	-0.050594	0.300725
0,06	-0.040776	0.539999	0.023854	-0.286770	-0.052552	0.302143
0,07	-0.040120	0.539094	0.020497	-0.285590	-0.054780	0.303571
0,08	-0.039495	0.538193	0.017026	-0.284390	-0.057332	0.305009
0,09	-0.038898	0.537297	0.013391	-0.283200	-0.060235	0.306456
0,10	-0.038327	0.536405	0.009530	-0.281990	-0.063560	0.307914

**Przykład 2.**

Rozpatrywano tarczę jednokierunkowo uzbrojoną ze szczelinami. Przyjęto, że tarcza zawiera szereg cienkich eliptycznych szczelin o półosiach  $a$  i  $b$ . Środki wszystkich szczelin są rozmieszczone na jednej linii prostej równoległej do kierunku włókien. Tarcza jest obciążona równomiernie rozłożonymi siłami rozciągającymi o intensywności  $p_{11}$  i  $p_{22}$ . Płaszczyzny działania sił są wzajemnie ortogonalne.

Oznaczmy odległość pomiędzy środkami szczelin przez  $l$ . Kartezjański układ współrzędnych  $x_1Ox_2$  wybieramy w środku jednej ze szczelin (podstawowej) tak, żeby oś  $Ox_1$  była skierowana wzdłuż prostej łączącej środki szczelin. Przy takiej orientacji defektów tarczę można rozpatrywać jako ortotropową.

Funkcje naprężeń dla takiego układu wybrano z pracy [3]:

$$\Phi_j(\xi_j) = \sum_{k=1,3}^{\infty} a_{jk} [\xi_j]^k - \lambda_2 \delta^2 m_{j0} a_{j1} a [m_{j0} \xi_j + m_{j1} \xi_j^{-1}] + \quad (41)$$

$$- \delta_4 \varepsilon^4 m_{j0} \left\{ a_{j1} \left[ a^3 (m_{j0} \xi_j + m_{j1} \xi_j^{-1})^3 \right] \right\} + [3m_{j0} a (a_{j1} m_{j1} + a_{j3} m_{j0})] (m_{j0} \xi_j + m_{j1} \xi_j^{-1})$$

gdzie:

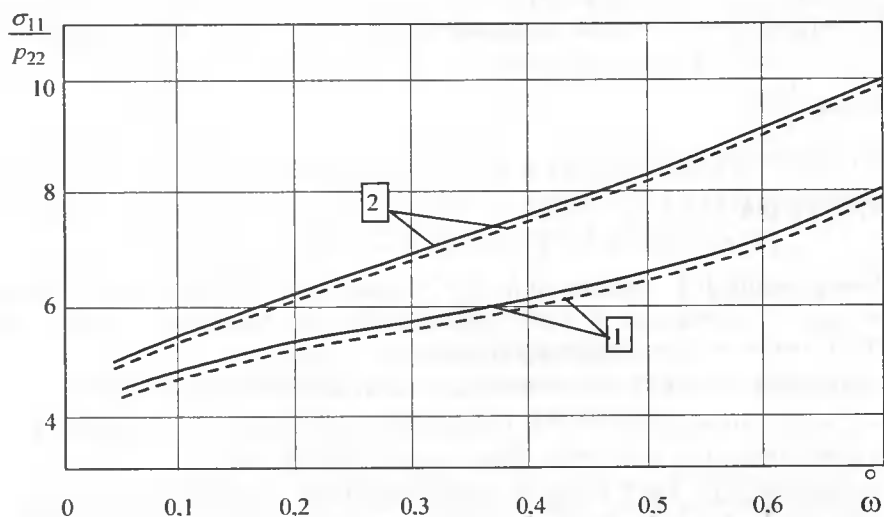
$$m_{j0} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b}{a} \beta_j \right), \quad m_{j1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b}{a} \beta_j \right), \quad \delta = \frac{a}{l}$$

Pozostałe parametry podano w pracy [3].

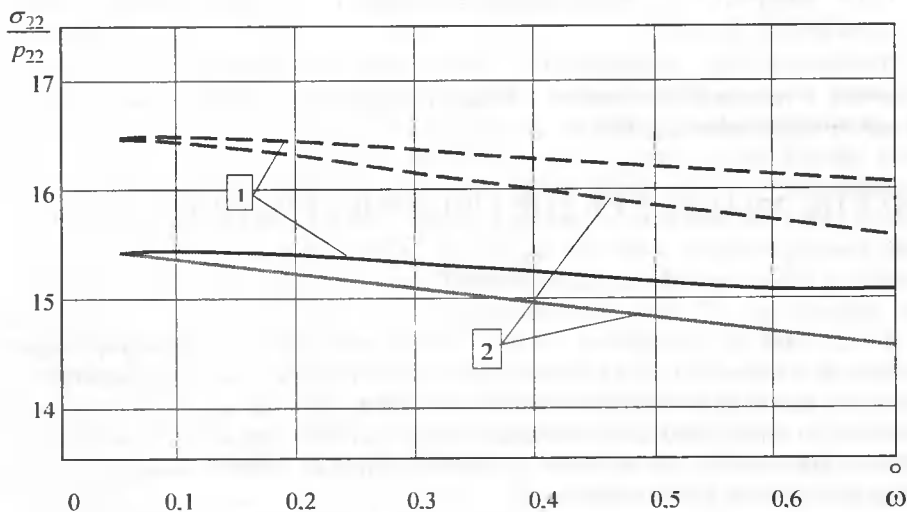
Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono wykresy zmian naprężeń bezwymiarowych:

$$\frac{\sigma_{11}}{p_{22}} \text{ i } \frac{\sigma_{22}}{p_{22}} \text{ w zależności od objętościowej zawartości włókien (parametr } \omega \text{)}.$$





Rys. 1. Zmiana naprężenia  $\sigma_{11}$  w zależności od objętościowej zawartości włókien



Rys. 2. Zmiana naprężenia  $\sigma_{22}$  w zależności od objętościowej zawartości włókien

Krzywe 1 na danych rysunkach odpowiadają jednoosiowemu rozciąganiu tarczy w kierunku prostopadłym do osi defektów ( $p_{11} = 0$ ), natomiast krzywe 2 przedstawiają wyniki dla dwukierunkowego rozciągania ( $p_{11} = p_{22}$ ). Linie ciągłe dotyczą parametru  $\delta = \frac{1}{6}$ , natomiast linie przerywane otrzymano dla  $\delta = \frac{1}{4}$ . Przedstawione krzywe pokazują, że wraz ze zmniejszeniem odległości pomiędzy środkami szczelin (zwiększe-

nie  $\delta$ ) następuje istotne zwiększenie naprężeń  $\frac{\sigma_{22}}{p_{22}}$ , natomiast nie obserwuje się istotnych zmian  $\frac{\sigma_{11}}{p_{22}}$ .

## LITERATURA

- [1] Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Онышко Л.И., 1987. Об одном подходе к оценке напряжений в анизотропном листовом материале с трещиной. Физико-химическая механика материалов 2, 62-66.
- [2] Лехницкий С.Г., 1957. Анизотропные пластинки. Гостехиздат Москва.
- [3] Космодамианский А.С., 1976. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Виша школа, Киев-Донецк.
- [4] Делявский М.В., 1987. Распределение напряжений в анизотропной пластине с трещиновидными дефектами. Физико-химическая механика материалов 1, 117-118.
- [5] Бережницкий Л.Т., Качур П.С., Мазурак Л.П., 1989. До теорії концентраторів напружень із заокругленими вершинами. Фізико-хімічна механіка матеріалів 5, 28-41.
- [6] Делявський М.В., Коркуна М.Д., Опанасович В.К., 1999. Локальні напруження в ортотропній пластині з тріщиноподібним дефектом. Фізико-хімічна механіка матеріалів 3, 48-52.

## STATIC ANALYSIS OF THE FIBER SHEET WITH THE CUTS

### Summary

An approach for determining the local strain-stress state of an orthotropic sheet with thin cut of a small nonzero curvature radius at the tip is developed. The asymptotic formulae of distribution of stresses and displacements near the cut tip are obtained. Expressions of generalized stress intensity factors and following terms of asymptotic expansions are obtained. As examples the biaxial tensile of a sheet having one cut or collinear array of cuts are considered.

Keywords: fiber composed sheet, cuts, plain state of stress

## ANALIZA DRGAŃ BELEK Z UWZGLĘDNIENIEM EFEKTÓW GEOMETRYCZNIE NIELINIOWYCH PRZY ZASTOSOWANIU METODY ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH

Anna Podhorecka

Katedra Mechaniki Konstrukcji  
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR  
ul. Prof. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy rozważa się drgania belek Eulera doznających stosunkowo dużych ugięć. Do rozwiązania tego zagadnienia wykorzystano metodę elementów czasoprzestrzennych.

Słowa kluczowe: belki, metoda elementów czasoprzestrzennych

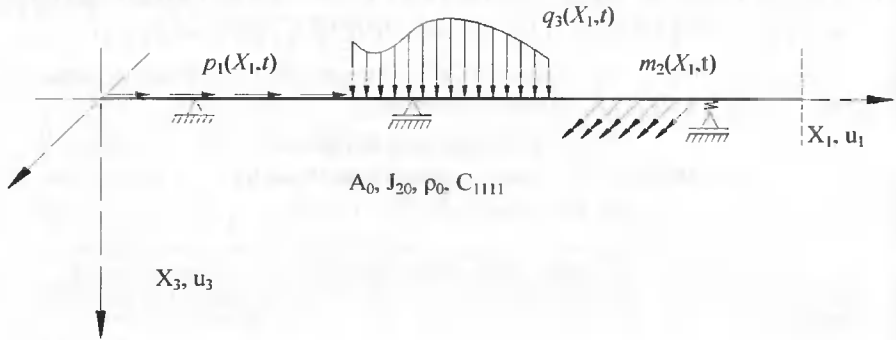
### 1. WSTĘP

Rozwój nowych, współczesnych urządzeń i technik obliczeniowych, pojawienie się nowych materiałów konstrukcyjnych i dążenie do pełnego wykorzystania ich właściwości, tworzenie nowoczesnych systemów konstrukcyjnych, spowodowało istotny wzrost zainteresowania mechaniką nieliniową. Celem badań jest w tym przypadku właściwy opis procesu zachowania się konstrukcji pod działaniem obciążeń, zarówno w zakresie dużych odkształceń i przemieszczeń, jak również z uwzględnieniem efektów fizycznie nieliniowych. Do analizy tego typu złożonych problemów można z powodzeniem stosować metodę elementów czasoprzestrzennych (MECZ), opracowaną przez Kączkowskiego [1,2].

W niniejszej pracy przedstawia się zastosowanie MECZ do analizy dynamicznej belek przy dużych przemieszczeniach. Problematyka belek jest rozważana w bardzo wielu pracach naukowych i inżynierskich. Efekty geometrycznie nieliniowe są na ogół niezbyt dokładnie opisane i nie zawsze znajdują swoje pełne uzasadnienie wynikające z dokładnej analizy podstawowych równań, np. teorii sprężystości. Rozwiązanie rozważanego problemu metodą elementów czasoprzestrzennych prowadzi do równań algebraicznych nieliniowych. Dotychczas MECZ stosowano do analizy belek Eklera i Timoschenki, ale w ramach teorii geometrycznie liniowej (np. [3]). Do analizy zagadnień geometrycznie nieliniowych MECZ stosuje się rzadziej (np. prace [4,5]). Prace naukowe z ostatnich lat dotyczą stosowania metody elementów czasoprzestrzennych do rozwiązywania różnych zagadnień, między innymi z pogranicza mechaniki ciała stałego i mechaniki płynów (np. [6,7]).

## 2. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIA RUCHU

Rozważamy drgania belki odkształcalnej, poddanej działaniu obciążenia dowolnie zmieniającego swoje położenie oraz dowolnie zmieniające się w czasie (rys. 1). Przyjmujemy, że belka nie jest krępa, odkształcenia są stosunkowo małe, słuszna jest hipoteza Bernoulliego o płaskich przekrojach, zginanie odbywa się w jednej płaszczyźnie.



Rys. 1. Schemat statyczny belki

Do opisu deformacji i ruchu belki w teorii skończonych przemieszczeń stosujemy stacjonarny opis Lagrange'a  $\underline{X}$ , w którym występują: pole wektorowe przemieszczeń  $\underline{u}$  i sił masowych  $\rho_0 \underline{f}_0$ , symetryczne pole tensorowe naprężeń Pioli-Kirchhoffa  $\underline{S}$  oraz symetryczne pole tensorowe odkształceń Couchy-Grenna  $\underline{E}$ . Z założenia o płaskich przekrojach wynikają zależności dotyczące przemieszczeń:

$$u_1^0(\underline{X}) = u_1(\underline{X}) - X_3 \frac{\partial u_3}{\partial X_1}, \quad u_2^0(\underline{X}) = 0, \quad u_3^0 = u_3(X_1) \quad (1)$$

gdzie:  $u_1$  i  $u_3$  są składowymi przemieszczeń osi belki. Biorąc pod uwagę (1) oraz założenie o dostatecznie małych odkształceniach otrzymujemy równania geometryczne wyrażone składowymi tensora odkształcenia Greena [8]:

$$E_{11} = \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial X_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial X_1} \right)^2 \right] = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} - X_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \quad (2)$$

$$E_{22} = E_{33} = E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

Założenie o dostatecznie małych odkształceniach umożliwia opisanie tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa prawem liniowym w postaci:

$$S_{ijkl} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (3)$$

gdzie  $C_{ijkl}$  jest tensorem zawierającym parametry materiałowe belki.

Różniczkowe równania równowagi dynamicznej w opisie Lagrange'a mają następującą formę [8]:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[ S_{jk} \left( \delta_{jk} + \frac{\partial u_j^0}{\partial X_k} \right) \right] + \rho_0 (f_{0j} - \ddot{u}_j^0) = 0 \quad (4)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3$$

Następnie dokonujemy redukcji naprężeń względem osi przechodzących przez środek ciężkości (przekrojów poprzecznych), co pozwala przejść z naprężeń na siły przekrojowe, tj. na siły normalne  $N_1'$ , siły poprzeczne  $Q_3'$  i momenty zginające  $M_2'$ :

$$\left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \left( \frac{\partial N_1'}{\partial X_1} + p \right) + \rho A_0 (f_{01} - \ddot{u}_1) = 0$$

$$\frac{\partial Q_3'}{\partial X_1} + q_3 + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \left( \frac{\partial N_1'}{\partial X_1} + p \right) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1^2} N_1' + \rho_0 A_0 (f_{03} + \ddot{u}_3) = 0 \quad (5)$$

$$\left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \left( \frac{\partial M_2'}{\partial X_1} + m \right) - \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) Q_3' + \rho_0 J_{02} \frac{\partial \ddot{u}_3}{\partial X_1} = 0$$

gdzie:

$$N_1' = \int_{A_0} S_{11} dA, \quad Q_3' = \int_{A_0} S_{13} dA, \quad M_2' = \int_{A_0} S_{11} X_3 dA \quad (6)$$

Geometrię przekroju poprzecznego opisują wielkości  $A_0$  – pole przekroju poprzecznego i  $J_{02}$  – główny centralny moment bezwładności przekroju.

Jeżeli z równań (5) wyrugujemy  $Q_3'$ , a składową odkształcenia  $\frac{\partial u_1}{\partial X_1}$  potraktujemy jako wielkość pomijalnie małą w stosunku do jedności, to otrzymujemy dwa równania w postaci:

$$\frac{\partial N_1'}{\partial X_1} + \frac{\partial N_{11}}{\partial t} + p_1' = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_1'}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{11}}{\partial t} + p_3' = 0$$

gdzie:

$$T_1' = \frac{\partial M_2'}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} N_1', \quad T_{11} = Q_3' - \frac{\partial M_{12}}{\partial X_1}$$

$$N_{t1} = -\rho_0 A_0 \dot{u}_1, \quad Q_t = -\rho_0 A_0 \dot{u}_3, \quad (8)$$

$$p_1' = p_1, \quad p_3' = \frac{\partial m_2'}{\partial X_1} + q_3$$

W celu uzależnienia sił przekrojowych od przemieszczeń, przekształcamy wzory (6) wykorzystując związki (2) i (3):

$$N_1' = C_{1111} A_0 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right], \quad M_2' = -C_{1111} J_{02} \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1^2}$$

$$Q_3' = -C_{1111} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( J_{20} \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1^2} \right) + \frac{\partial M_{t2}'}{\partial t} + m_2' \quad (9)$$

W przypadku ciała liniowo sprężystego:

$$C_{1111} = 2\mu + \lambda \quad (10)$$

gdzie:  $\mu, \lambda$  – stałe Lamego.

Do kompletu równań dochodzą jeszcze warunki początkowe

$$u_i(t = t_0) = u_i^0, \quad \dot{u}_i(t = t_0) = \dot{u}_i^0 \quad (11)$$

### 3. RÓWNANIE CZTEROPRACY WIRTUALNEJ

Wszystkie wielkości występujące w równaniach (1÷11) są odpowiednio gładkimi funkcjami współrzędnej  $X_1$  i czasu  $t$ . Rozpatrujemy wirtualną wariację funkcji  $u_i(X_1, t)$ , oznaczoną symbolem  $\delta u_i$ . Zakładamy, że istnieje układ przemieszczeń spełniający równania równowagi (7) i warunki początkowe (11). Rozważamy klasę dowolnych przemieszczeń  $u_i + \delta u_i$  zgodnych z więzami kinematycznymi belki. Na bazie równań (7) możemy utworzyć wyrażenie słuszne w dowolnym interwale czasowym  $\langle t_0, t_1 \rangle$  dla całej belki:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{a'} \left\{ \delta u_1 \left( \frac{\partial N_1'}{\partial X_1} + \frac{\partial N_{t1}'}{\partial t} + p_1' \right) + \delta u_3 \left( \frac{\partial T_1}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{t1}'}{\partial t} + p_3' \right) \right\} dX_1 dt = 0 \quad (12)$$

Po wycalkowaniu przez części i odpowiednim pogrupowaniu otrzymujemy równanie:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta u_1 N_1' + \delta u_3 T_1' \right) dt \Big|_{a'}^{b'} + \int_{t_0}^{t_1} \left( \delta u_1 N_{t1}' + \delta u_3 T_{t1}' \right) dX_1 \Big|_{a'}^{b'} + \int_{t_0}^{t_1} \int_{a'}^{b'} \left( \delta u_1 p_1' + \delta u_3 p_3' \right) dX_1 dt +$$

$$\dots \int_{t_0}^{t_k} \int_{V_0}^{V_k} \left[ \delta \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) N_1^i + \delta \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) T_1^i + \delta \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) N_{t1}^i + \delta \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) T_{t1}^i \right] dX_1 dt = 0, \quad (13)$$

które Kączkowski nazywa równaniem czteropracy wirtualnej [2].

#### 4. RÓWNANIA RUCHU W ZDYSKRETYZOWANEJ CZASOPRZESTRZENI

Obszar czasoprzestrzenny dyskretyzujemy na skończoną liczbę elementów czasoprzestrzennych (SKECZ) o powierzchni  $\Omega_c$ , o dowolnym kształcie i dowolnej liczbie węzłów. Zakładamy, że przemieszczenia elementu skończonego belki opisują trzy składowe:

$$\underline{v}^c(X_1, t) = \begin{Bmatrix} u_1^c \\ \varphi^c \\ u_3^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^c(X_1, t) \\ \varphi^c(X_1, t) \\ u_3^c(X_1, t) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

gdzie:

$$\varphi(X_1, t) = \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \quad (15)$$

W MECZ przemieszczenia  $\underline{v}$  i ich wariacje  $\delta \underline{v}$  i  $\dot{\delta \underline{v}}$  opisują związki:

$$\begin{aligned} v_i^c(X_1, t) &= \Phi_{i\alpha}^c(X_1, t) r_{\alpha}, \quad \dot{v}_i^c(X_1, t) = \dot{\Phi}_{i\alpha}^c(X_1, t) r_{\alpha} \\ \delta v_i &= \Phi_{i\alpha}^c \delta r_{\alpha}, \quad \delta \dot{v}_i^c = \dot{\Phi}_{i\alpha}^c \delta r_{\alpha} \end{aligned} \quad (16)$$

$i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 3w_c$

gdzie:  $w_c$  – liczba węzłów SKECZ,  $r_{\alpha}$  – przemieszczenia węzłów SKECZ,  $\Phi_{i\alpha}^c$  – funkcja kształtu zależna od współrzędnej  $X_1$  i czasu  $t$ .

Przemieszczeniami węzłowymi opisujemy też siły:

$$\begin{aligned} N_1^i &= C_{1111}^c J_0^c \Phi_{1\alpha,1}^c + \frac{1}{2} \Phi_{2\alpha}^c \Phi_{2\beta}^c J_{\alpha\beta} r_{\alpha} \\ N_{t1}^i &= -\rho_0^c J_0^c \Phi_{1\alpha,1}^c r_{\alpha} \\ T_1^i &= \left[ C_{1111}^c J_0^c \Phi_{2\alpha}^c \left( \Phi_{1\beta,1}^c - \frac{1}{2} \Phi_{2\beta}^c \Phi_{2\gamma}^c r_{\gamma} \right) r_{\beta} - C_{1111}^c J_0^c \Phi_{2\alpha,1}^c \right] r_{\alpha} \\ T_{t1}^i &= \left( \rho_0^c J_0^c \Phi_{2\alpha,1}^c - \rho_0^c J_0^c \Phi_{3\alpha,1}^c \right) r_{\alpha} \\ (\cdot) &= \frac{\partial (\cdot)}{\partial t}, \quad (\cdot)_{,l} = \frac{\partial (\cdot)}{\partial X_l} \end{aligned} \quad (17)$$

Podstawiając wzory (16) i (17) do równania czteropracy wirtualnej (13) otrzymujemy równanie w postaci:

$$\sum_{\alpha=1}^k \delta r_{\alpha} \left[ (M_{\alpha\beta}^c - K_{\alpha\beta}^c) r_{\beta} + R_{\beta}^c + R_{\beta}^{0c} \right] = 0 \quad (18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^c &= \iint_{\Omega_c} (\rho_0^c A_0^c \dot{\Phi}_{1\alpha}^c \dot{\Phi}_{1\beta}^c + \rho_0^c J_{02}^c \dot{\Phi}_{2\alpha}^c \dot{\Phi}_{2\beta}^c + \rho_0^c A_0^c \dot{\Phi}_{3\alpha}^c \dot{\Phi}_{3\beta}^c) d\Omega \\ K_{\alpha\beta}^c &= \iint_{\Omega_c} \left\{ C_{1111}^c A_0^c \left[ \Phi_{1\alpha,1}^c \left( \Phi_{1\beta,1}^c + \frac{1}{2} \Phi_{2\beta}^c \Phi_{2\gamma}^c r_{\gamma} \right) + \Phi_{2\alpha}^c \Phi_{2\beta}^c \left( \Phi_{1\gamma,1}^c + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{2} \Phi_{2\gamma}^c \Phi_{2\eta}^c r_{\eta} \right) r_{\gamma} \right] - C_{1111}^c J_{02}^c \Phi_{2\alpha}^c \Phi_{2\beta}^c \right\} d\Omega \\ R_{\beta}^c &= \iint_{\Omega} (\Phi_{1\alpha}^c P_1^c + \Phi_{3\alpha}^c P_3^c) d\Omega \end{aligned} \quad (19)$$

$$R_{\beta}^{0c} = \int_{t_0^c}^{t_1^c} (\Phi_{1\alpha}^c N_1^c + \Phi_{3\alpha}^c T_{11}^c) dX_1 \Big|_{t_0^c}^{t_1^c} + \int_{t_0^c}^{t_1^c} (\Phi_{1\alpha}^c N_{11}^c + \Phi_{3\alpha}^c T_{11}^c) dX_1 \Big|_{t_0^c}^{t_1^c}$$

oznaczają kolejno: macierz bezwładności mas  $M_{\alpha\beta}^c$ , statyczną macierz sztywności  $K_{\alpha\beta}^c$ , macierz impulsów węzłowych od obciążeń zewnętrznych  $R_{\beta}^c$ , macierz impulsów brzegowo-początkowych  $R_{\beta}^{0c}$ .

Równanie (18) musi być spełnione dla dowolnej wariacji przemieszczeń  $\delta r_{\alpha}$ , stąd otrzymujemy układ równań:

$$\overline{K}_{\alpha\beta}^c(t) r_{\beta} + \overline{R}_{\beta}^c = 0 \quad (20)$$

gdzie:

$$\overline{K}_{\alpha\beta}^c = M_{\alpha\beta}^c - K_{\alpha\beta}^c(t), \quad \overline{R}_{\beta}^c = R_{\beta}^c + R_{\beta}^{0c}. \quad (21)$$

Równanie (20) stanowi układ algebraicznych, nieliniowych równań ruchu, ważnych dla całej dyskretyzowanej czasoprzestrzeni. Przy znanych warunkach początkowych:

$$\underline{r}(t = t_0) = \underline{r}^{(0)}, \quad \dot{\underline{r}}(t = t_0) = \dot{\underline{r}}^{(0)} \quad (22)$$

układ ten przekształca się zawsze w nieliniową formułę rekurencyjną [4.5]:

$$\underline{C}^t(\underline{r}^{t-1}, \underline{r}^t) \underline{r}^{t-1} + \underline{H}^t(\underline{r}^{t-1}, \underline{r}^t, \underline{r}^{t-1}) \underline{r}^t + \underline{B}^t(\underline{r}^t, \underline{r}^{t-1}) \underline{r}^{t-1} = \underline{R}^t \quad (23)$$

Warunki zbieżności MES są takie same jak w metodzie elementów skończonych i wiążą się z kształtem SKECZ i funkcjami kształtu. Schemat rekurencyjny musi spełniać warunki stabilności, co sprowadza się do ograniczenia wymiaru SKECZ w kierunku osi  $t$  [9].



### 5: PRZYKŁAD OBLICZEŃ

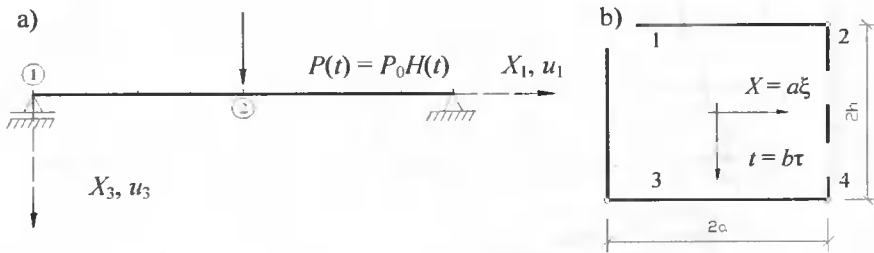
Rozpatrujemy drgania poprzeczne belki o długości 2 [m], obciążonej w punkcie środkowym siłą Heaviside'a (rys. 2a). Pozostałe dane przyjęto następujące:

$$A_0 = 0,45 \cdot 10^{-3} [m], \quad J_{20} = 0,30375 \cdot 10^{-5} [m^4], \quad C_{1111} = 2 \cdot 10^{11} [N/m^2],$$

$$\rho_0 = 7500 [kg/m^3]. \quad P(t) = P_0 H(t)$$

Warunki początkowe mają postać:  $\underline{u} = \underline{0}, \quad \underline{\dot{u}} = \underline{0}.$

Pasmo czasoprzestrzenne dzielimy na prostokątne elementy czasoprzestrzenne (rys. 2b).



Rys. 2. Drgania belki wolnopodpartej: a) schemat statyczny, b) element czasoprzestrzenny

Składowe macierzy kształtu SKECZ przyjmujemy w następującej postaci:

$$\Phi_{1\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + \xi_\alpha \xi) (1 + \tau_\alpha \tau) & \text{dla } \alpha = 1,4,7,10, \\ 0 & \text{dla } \alpha = 2,3,5,6,8,9,11,12, \end{cases}$$

$$\Phi_{2\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{8} (2 + 3\xi_\alpha \xi - \xi_\alpha \xi^3) (1 + \tau_\alpha \tau) & \text{dla } \alpha = 2,5,8,11, \\ \frac{a}{8} \xi_\alpha (1 + \xi_\alpha \xi - \xi^2 - \xi_\alpha \xi^3) (1 + \tau_\alpha \tau) & \text{dla } \alpha = 3,6,9,12, \\ 0 & \text{dla } \alpha = 1,4,7,10, \end{cases} \quad (24)$$

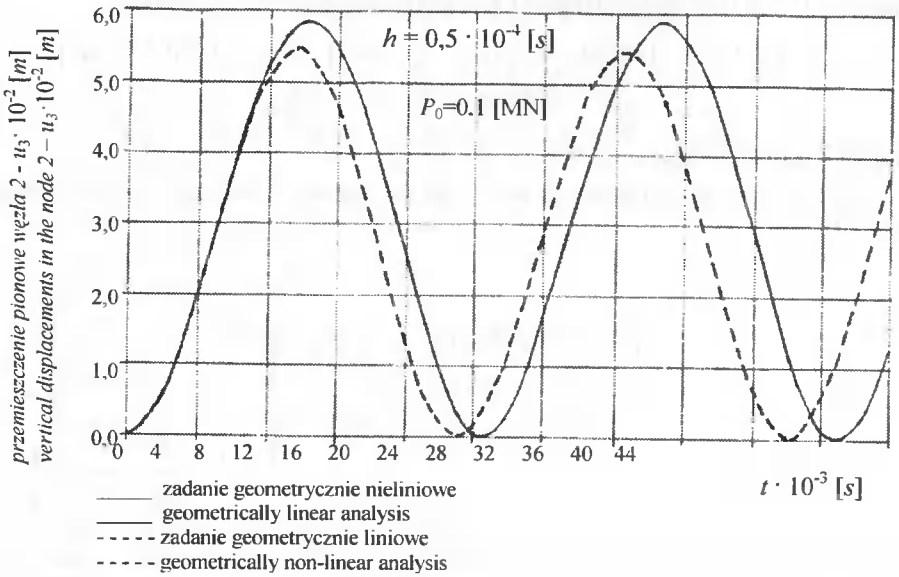
$$\Phi_{3\alpha} = \begin{cases} -\frac{3}{8a} \xi_\alpha (1 - \xi^2) (1 + \tau_\alpha \tau) & \text{dla } \alpha = 2,5,8,11, \\ -\frac{1}{8} (1 - 2\xi_\alpha \xi - 3\xi^2) (1 + \tau_\alpha \tau) & \text{dla } \alpha = 3,6,9,12, \\ 0 & \text{dla } \alpha = 1,4,7,10, \end{cases}$$

gdzie:

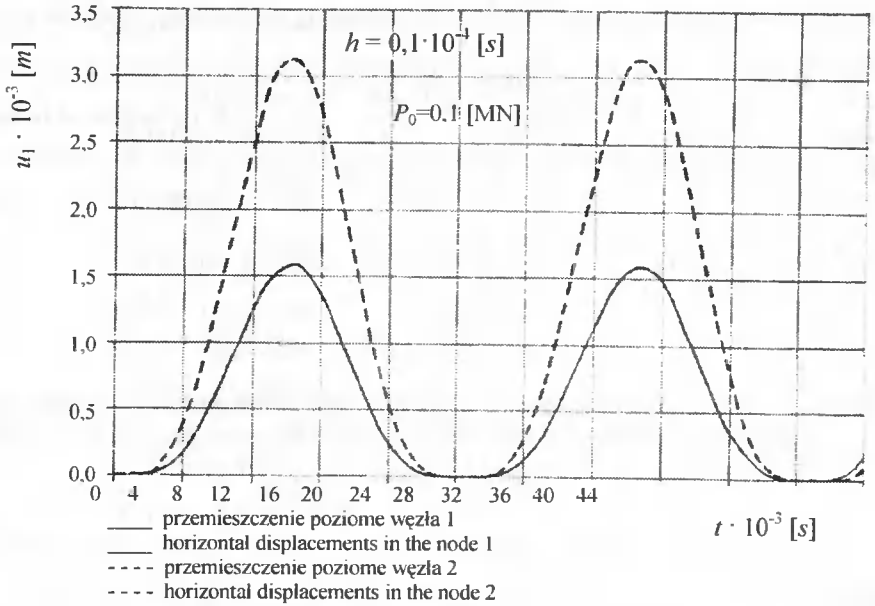
$$\xi_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 4,5,6,10,11,12, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1,2,3,7,8,9. \end{cases} \quad (25)$$

$$\tau_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 7,8,9,10,11,12, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1,2,3,4,5,6. \end{cases}$$

a)



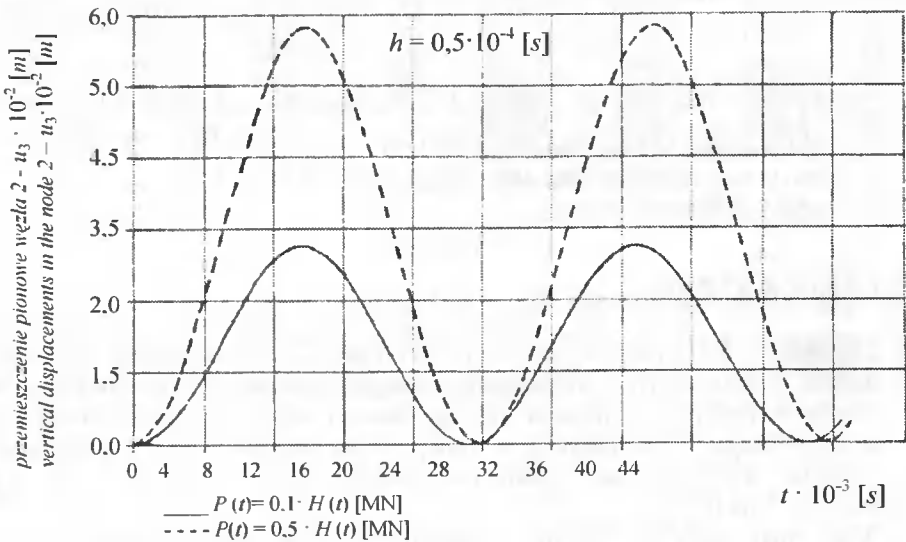
b)



Rys. 3. Drgania wybranych punktów belki: a) przemieszczenie pionowe węzła 2. b) przemieszczenia poziome węzła 1 i 2

Mając funkcje kształtu można na podstawie wzorów (19) obliczyć wyrazy macierzy (21).

Na rysunku 3a przedstawiono wykres ugięcia środkowego punktu belki w funkcji czasu dla dwóch zadań: geometrycznie liniowego i geometrycznie nieliniowego. Przebieg drgań podłużnych sprzężonych z poprzecznymi w podporze przegubowo-przesuwnej pokazano na rysunku 3b. Rysunek 4 przedstawia zmianę w czasie przemieszczenia pionowego punktu środkowego belki dla dwóch przypadków obciążenia. Z analizowanych przykładów wynika, że amplitudy przemieszczeń są dwa razy większe od przemieszczeń statycznych, zmiana siły  $P_0$  powoduje proporcjonalny przyrost przemieszczeń w zadaniach geometrycznie liniowych i nieproporcjonalny przyrost przemieszczeń w zadaniach geometrycznie nieliniowych.



Rys. 4. Drgania pionowe belki w węźle 2 przy zwiększającej się sile Heaviside'a

Dodatkowo dla porównania poprawności obliczeń zastosowanej metody wykonano obliczenia stosując pakiet programów metody elementów skończonych – Statyka, dynamika modeli liniowych (opracowany pod kierunkiem prof. M. Kleibera).

Tabela 1 zawiera zestawienie rzędnych linii ugięcia w węźle środkowym belki, w kolejnych punktach na osi czasu, wyliczone metodą elementów czasoprzestrzennych, metodą bezpośredniego całkowania równań ruchu (metoda Wilsona) i metodą superpozycji modalnej. Rezultaty obliczeń są praktycznie takie same.

Tabela 1. Wybrane wyniki obliczeń sprawdzających

Czas $t \cdot 10^{-4}$ [s]	Ugięcie węzła środkowego belki $u_3 \cdot 10^{-2}$ [m]			Czas $t \cdot 10^{-4}$ [s]	Ugięcie węzła środkowego belki $u_3 \cdot 10^{-2}$ [m]		
	I	II	III		I	II	III
0	0.0000	0.0000	0.0000	112	5.0413	5.1120	5.0150
8	0.1525	0.0939	0.1725	120	4.5963	4.6730	4.5490
16	0.4037	0.3690	0.4497	128	3.9592	4.1020	3.9690
24	0.8209	0.8061	0.8611	136	3.3480	3.4390	3.3100
32	1.4483	1.3760	1.4600	144	2.6000	2.7280	2.5990
40	2.0539	2.0380	2.1220	152	1.8871	2.0180	1.9030
48	2.7912	2.7490	2.8020	160	1.2923	1.3580	1.2720
56	3.5171	3.4600	3.5170	168	0.6902	0.7929	0.7333
64	4.1173	4.1210	4.1690	176	0.3269	0.3607	0.3364
72	4.7327	4.6880	4.6970	184	0.1032	0.0913	0.1122
80	5.1229	5.1230	5.1170	192	0.0081	0.0031	0.0636
88	5.3605	5.3950	5.3720	200	0.2115	0.1021	0.2012
96	5.4848	5.4860	5.4230	208	0.4908	0.3814	0.5200
104	5.3060	5.3890	5.3060				
I – metoda elementów czasoprzestrzennych							
II – metoda bezpośredniego całkowania równań ruchu							
III – metoda superpozycji modalnej							

## 5. ZAKOŃCZENIE

1. Zagadnienie brzegowo-początkowe na przykładzie belki doznającej stosunkowo dużych przemieszczeń i odkształceń rozwiązano przy użyciu metody elementów czasoprzestrzennych. Równania nieprzyrostowe teorii sprężystości sformułowano w uogólnionym opisie Lagrange'a. Następnie na podstawie równania czteropracy wirtualnej wyprowadzono równania ruchu MECZ, które tworzą układ równań algebraicznych nieliniowych.
2. Analizowano wpływ nieliniowości geometrycznych na przemieszczenia, siły przekrojowe oraz częstotliwości drgań. W wielu realnych przypadkach wpływ ten może być istotny tak pod względem ilościowym, jak i jakościowym. Uzyskane wyniki charakteryzują się wysoką dokładnością. Nieliniowe równania ruchu MECZ udało się łatwo rozwiązywać proces, a proces iteracyjny charakteryzował się szybką zbieżnością.
3. Metoda elementów czasoprzestrzennych, jako pewien wariant metody elementów skończonych, stanowi bardzo dobre narzędzie do analizy zagadnień początkowo-brzegowych przy uwzględnieniu różnych efektów nieliniowych.

## LITERATURA

- [1] Kączkowski Z., 1975. The method of finite space-time elements in dynamics of structures. J. Techn. Phys. 16, 1.
- [2] Kączkowski Z., 1976. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. Inż. Łąd. 22, 3.
- [3] Kączkowski Z., Żysko M., 1978. Drgania gietne pręta metodą czasoprzestrzennych elementów skończonych. Arch. Inż. Łąd. 24, 1.



## OBLICZENIA STANU NAPRĘŻEŃ W ZŁOŻONYCH UKŁADACH PŁYTOWYCH O NIECIĄGŁYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH

Robert Ran, Mykhaylo Delyavskyy, Adam Podhorecki

Katedra Mechaniki Konstrukcji  
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono metodę analityczną do obliczeń statycznych układów płytowych o nieciągłych warunkach brzegowych. Poszczególne równania sformułowano według teorii płyt średnich.

Słowa kluczowe: element płytowy, funkcje kształtu, płyta średniej grubości

### 1. WSTĘP

Metody komputerowe bazujące na metodzie elementów skończonych umożliwiają rozwiązywanie dowolnych dźwigarów powierzchniowych, tj. między innymi płyt o specyficznych cechach (zmiennie warunki brzegowe, płyty cienkie, średnie lub grube). W metodach tych utrudniona jest jednak analiza jakościowa, stąd nadal stosowane i rozwijane są metody analityczne. W pracy rozważa się układy płytowe składające się z elementów płytowych średniej grubości. Istnieje wiele sposobów rozwiązania takich elementów płytowych, a wśród nich metoda opracowana przez Prusowa [1]. Metoda ta polega przede wszystkim na specjalnym opisie funkcji przemieszczeń.

Stosowanie układów płytowych w budownictwie jest dość powszechne (np. płyty stropowe, płyty pomostowe mostów). Zdarzają się liczne uszkodzenia takich płyt (np. spękania wspornikowych płyt chodnikowych w mostach) z powodu niewystarczającej lub błędnej analizy statycznej. W tej sytuacji poszukiwanie efektywnych metod analitycznych wydaje się uzasadnione, gdyż właściwie przeprowadzona analiza jakościowa problemu może przyczynić się np. do sformułowania niektórych zaleceń projektowych.

### 2. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE OPISUJĄCE ELEMENT PŁYTOWY

Rozważa się układ płytowy średniej grubości o niejednorodnych warunkach brzegowych obciążony poprzecznie. Taki dowolnie złożony układ płytowy dzielimy na elementy płytowe. Następnie rozwiązujemy poszczególne elementy płytowe z określonymi warunkami brzegowymi oraz warunkami ciągłości przemieszczeń i sił w miejscu połączenia tych elementów. Element płytowy (zwany dalej płytą prostokątną) o grubości  $2h$  wykonany jest z materiału jednorodnego i izotropowego. Przyjmujemy, że

w stanie nieodkształconym powierzchnia środkowa płyty pokrywa się z płaszczyzną  $Ox_1x_2$ .

Płytę średniej grubości opisują następujące funkcje i równania [1]:

a) funkcje przemieszczeń

$$\begin{aligned} u_1 &= - \left[ x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \lambda_0(x_3) \frac{\partial F}{\partial x_1} - \lambda_1(x_3) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right], \\ u_2 &= - \left[ x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \lambda_0(x_3) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda_1(x_3) \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$w = w(x_1, x_2)$$

i odkształceń

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,3} + w_{,\alpha}), \quad \varepsilon_{33} = 0, \quad \text{dla } \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2)$$

b) funkcje opisujące wielkości statyczne, tj. naprężenia

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu)\varepsilon_{\alpha\beta} + \nu e \delta_{\alpha\beta}], \quad \sigma_{\alpha 3} = G\varepsilon_{\alpha 3}, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (3)$$

i siły przekrojowe

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad Q = \int_{-h}^h \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (4)$$

c) podstawowe równania teorii płyt średniej grubości, tj.:

– równanie biharmoniczne

$$\nabla^2 \nabla^2 \bar{w} = \frac{q}{D}, \quad (5)$$

– równanie Helmholtza:

$$\nabla^2 \Phi - \lambda^2 \Phi = 0, \quad (6)$$

– równanie dodatkowe

$$F = \varepsilon^2 \nabla^2 \bar{w}, \quad (7)$$

gdzie:

$\lambda_0(x_3), \lambda_1(x_3)$  – nieparzyste funkcje zmiennej  $x_3$  spełniające warunki  
 $\lambda_j(0) = \lambda_j'(h) = 0$  dla  $j = 0, 1$ ,

- $D$  – sztywność płyty na zginanie i skręcanie,
- $q$  – obciążenie zewnętrzne przyłożone do powierzchni płyty,
- $E$  – moduł Younga,
- $G$  – moduł Kirchhoffa,

- $\nu$  – współczynnik Poissona,
- $\delta_{\alpha\beta}$  – symbol Kroneckera,
- $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$  – dylatacja,
- $\Phi$  i  $F$  – są dowolnymi funkcjami zmiennych  $x_1$  i  $x_2$ ,

natomiast funkcja  $\bar{w}$  określona jest następującym wzorem:

$$\bar{w} = w + k_0 F. \quad (8)$$

### 3. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE OPISUJĄCE ELEMENT PŁYTOWY

W zależności od sposobu podparcia krawędzi elementu płytowego, rozwiązanie podstawowych równań teorii płyt średniej grubości może przyjąć różną postać. Rozwiązanie dla przypadku, w którym warunki brzegowe na przeciwległych krawędziach są symetryczne, pokazano w pracach [2-9]. W naszej pracy rozpatruje się przypadek ogólny i wtedy całość równania (6) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \{ & f_{3m}^{[1]}(x_1) \sin \delta_m^{[2]} x_2 + f_{4m}^{[1]}(x_1) \cos \gamma_m^{[2]} x_2 + f_{3m}^{[2]}(x_2) \sin \delta_m^{[1]} x_1 + \\ & + f_{4m}^{[2]}(x_2) \cos \gamma_m^{[1]} x_1 \}, \end{aligned} \quad (9)$$

a równania (5):

$$\bar{w} = w_0 + w_*, \quad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \{ & f_{m1}^{[1]}(x_1) \cos \delta_m^{[2]} x_2 + f_{m2}^{[1]}(x_1) \sin \gamma_m^{[2]} x_2 + f_{m1}^{[2]}(x_2) \cos \delta_m^{[1]} x_1 + \\ & + f_{m2}^{[2]}(x_2) \sin \gamma_m^{[1]} x_1 \} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} w_* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [ & A_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + B_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\delta_n^{[2]} x_2) + \\ & + C_{mn} \sin(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + D_{mn} \sin(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\delta_n^{[2]} x_2) ] \end{aligned}$$

gdzie:

$$\delta_m^{[1]} = \frac{(2m-1)}{2a_1} \pi, \quad \delta_n^{[2]} = \frac{(2n-1)}{2a_2} \pi. \quad (12)$$



$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$  są parametrami nieznanymi. Dla ich określenia rozkładamy w pierw obciążenia zewnętrzne  $q(x_1, x_2)$ , przyłożone do powierzchni górnej płyty, w cztery podwójne szeregi Fouriera:

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + b_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\delta_n^{[2]} x_2) + c_{mn} \sin(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + d_{mn} \sin(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\delta_n^{[2]} x_2) \right]. \quad (13)$$

Następnie wyrażenia (11) i (13) podstawiamy do równania (5). Przyrównując wyrazy przy jednakowych harmonikach uzyskujemy układ liniowych równań algebraicznych względem nieznanych parametrów  $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ .

W celu wyznaczenia nieznanych funkcji  $f_m^{[j]}(x_j)$  (dla  $i = 1, 2, 3, 4$  i  $j = 1, 2$ ) wyrażenia (9) i (11) podstawiamy do równania (6) i jednorodnego równania (5). W ten sposób z układu równań różniczkowych cząstkowych przechodzimy do układu równań różniczkowych zwyczajnych, zależnych tylko od jednej zmiennej [3]. Ostatecznie poszukiwane funkcje przyjmują postać [9]:

$$\begin{aligned} f_{1m}^{[j]}(x_j) &= R_{1m}^{[j]} F_{1m}^{[j]}(x_j) + R_{2m}^{[j]} F_{2m}^{[j]}(x_j) \frac{x_j}{a_j} + R_{3m}^{[j]} F_{2m}^{[j]}(x_j) + R_{4m}^{[j]} F_{1m}^{[j]}(x_j) \frac{x_j}{a_j} \\ f_{2m}^{[j]}(x_j) &= R_{5m}^{[j]} F_{3m}^{[j]}(x_j) + R_{6m}^{[j]} F_{4m}^{[j]}(x_j) \frac{x_j}{a_j} + R_{7m}^{[j]} F_{4m}^{[j]}(x_j) + R_{8m}^{[j]} F_{3m}^{[j]}(x_j) \frac{x_j}{a_j}, \\ f_{3m}^{[j]}(x_j) &= R_{9m}^{[j]} \cdot F_{5m}^{[j]}(x_j) + R_{10m}^{[j]} \cdot F_{6m}^{[j]}(x_j), \\ f_{4m}^{[j]}(x_j) &= R_{11m}^{[j]} \cdot F_{7m}^{[j]}(x_j) + R_{12m}^{[j]} \cdot F_{8m}^{[j]}(x_j). \end{aligned} \quad (14)$$

Parametry  $R_{km}^{[j]}$  (przy  $k = 1-12$  i  $j = 1, 2$ ) występujące w powyższych wzorach są stałymi, za pomocą których spełniamy warunki brzegowe na krawędziach elementu płytowego, natomiast  $F_{lm}^{[j]}$  (przy  $l = 1-8$  i  $j = 1, 2$ ) są funkcjami podstawowymi, za pomocą których spełniamy podstawowe równania teorii płyt średniej grubości:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{1m}^{[j]}(x_j) &= \frac{\cosh(\delta_m^{[j]} x_j)}{\exp(\delta_m^{[j]} a_j)}, & F_{2m}^{[j]}(x_j) &= \frac{\sinh(\delta_m^{[j]} x_j)}{\exp(\delta_m^{[j]} a_j)}, \\ F_{3m}^{[j]}(x_j) &= \frac{\cosh(\gamma_m^{[j]} x_j)}{\exp(\gamma_m^{[j]} a_j)}, & F_{4m}^{[j]}(x_j) &= \frac{\sinh(\gamma_m^{[j]} x_j)}{\exp(\gamma_m^{[j]} a_j)}. \end{aligned}$$

$$F_{5m}^{[j]}(x_j) = \frac{\cosh\left(\omega_{1m}^{[j]} x_j\right)}{\exp\left(\omega_{1m}^{[j]} a_j\right)}, \quad F_{6m}^{[j]}(x_j) = \frac{\sinh\left(\omega_{1m}^{[j]} x_j\right)}{\exp\left(\omega_{1m}^{[j]} a_j\right)}, \quad (15)$$

$$F_{7m}^{[j]}(x_j) = \frac{\cosh\left(\omega_{2m}^{[j]} x_j\right)}{\exp\left(\omega_{2m}^{[j]} a_j\right)}, \quad F_{8m}^{[j]}(x_j) = \frac{\sinh\left(\omega_{2m}^{[j]} x_j\right)}{\exp\left(\omega_{2m}^{[j]} a_j\right)},$$

gdzie:

$$\omega_{1m}^{[j]} = \sqrt{\lambda^2 + \delta_m^{[3-j]2}}, \quad \omega_{2m}^{[j]} = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_m^{[3-j]2}},$$

$$\delta_m^{[j]} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_j}, \quad \gamma_m^{[j]} = \frac{m\pi}{a_j}. \quad (16)$$

#### 4. OPIS WIELKOŚCI STATYCZNYCH IGOMETRYCZNYCH ELEMENTU PŁYTOWEGO

Podstawiając funkcję (9) i (10) do związków (1) otrzymujemy wyrażenia opisujące przemieszczenia równoległe do płaszczyzny środkowej elementu płytowego o numerze  $n$ :

$$u_1^{(n)} = \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \begin{matrix} U_{1m}^{(n)} \\ 1 \times 6 \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} R_{1m}^{(n)} \\ 6 \times 1 \end{matrix} \right] \cdot \cos\left(\delta_m^{[2]} x_2^{(n)}\right) + \left[ \begin{matrix} U_{2m}^{(n)} \\ 1 \times 6 \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} R_{2m}^{(n)} \\ 6 \times 1 \end{matrix} \right] \cdot \sin\left(\gamma_m^{[2]} x_2^{(n)}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[ \begin{matrix} U_{3m}^{(n)} \\ 1 \times 6 \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} R_{3m}^{(n)} \\ 6 \times 1 \end{matrix} \right] \cdot \sin\left(\delta_m^{[1]} x_1^{(n)}\right) + \left[ \begin{matrix} U_{4m}^{(n)} \\ 1 \times 6 \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} R_{4m}^{(n)} \\ 6 \times 1 \end{matrix} \right] \cdot \cos\left(\gamma_m^{[1]} x_1^{(n)}\right) \right\} + \quad (17)$$

$$+ \sum_{m=1}^M U_p^{(n)} \sin\left(\delta_m^{[1]} x_1^{(n)}\right) \cos\left(\delta_m^{[2]} x_2^{(n)}\right)$$

$$u_2^{(n)} = \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \begin{matrix} V_{1m}^{(n)} \\ 1 \times 6 \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} R_{1m}^{(n)} \\ 6 \times 1 \end{matrix} \right] \cdot \sin\left(\delta_m^{[2]} x_2^{(n)}\right) + \left[ \begin{matrix} V_{2m}^{(n)} \\ 1 \times 6 \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} R_{2m}^{(n)} \\ 6 \times 1 \end{matrix} \right] \cdot \cos\left(\gamma_m^{[2]} x_2^{(n)}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[ \begin{matrix} V_{3m}^{(n)} \\ 1 \times 6 \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} R_{3m}^{(n)} \\ 6 \times 1 \end{matrix} \right] \cdot \cos\left(\delta_m^{[1]} x_1^{(n)}\right) + \left[ \begin{matrix} V_{4m}^{(n)} \\ 1 \times 6 \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} R_{4m}^{(n)} \\ 6 \times 1 \end{matrix} \right] \cdot \sin\left(\gamma_m^{[1]} x_1^{(n)}\right) \right\} +$$

$$+ \sum_{m=1}^M V_p^{(n)} \cos\left(\delta_m^{[1]} x_1^{(n)}\right) \sin\left(\delta_m^{[2]} x_2^{(n)}\right).$$

oraz przemieszczenia prostopadłe do płaszczyzny normalnej:

$$\begin{aligned}
 w^{(n)} = & \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ W_{1m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{1m}^{(n)} \right] \cdot \cos \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \left[ W_{2m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{2m}^{(n)} \right] \cdot \sin \left( \gamma_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \\ & \left[ W_{3m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{3m}^{(n)} \right] \cdot \cos \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) + \left[ W_{4m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{4m}^{(n)} \right] \cdot \sin \left( \gamma_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \end{aligned} \right\} + \\
 & + \sum_{m=1}^M W_p^{(n)} \cos \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \cos \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Korzystając z zależności (4) otrzymujemy wzory opisujące momenty zginające:

$$\begin{aligned}
 M_{11}^{(n)} = & \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ X_{1m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{1m}^{(n)} \right] \cdot \cos \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \left[ X_{2m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{2m}^{(n)} \right] \cdot \sin \left( \gamma_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \\ & \left[ X_{3m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{3m}^{(n)} \right] \cdot \cos \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) + \left[ X_{4m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{4m}^{(n)} \right] \cdot \sin \left( \gamma_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \end{aligned} \right\} + \\
 & + \sum_{m=1}^M X_p^{(n)} \cos \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \cos \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) \\
 M_{22}^{(n)} = & \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ Y_{1m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{1m}^{(n)} \right] \cdot \cos \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \left[ Y_{2m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{2m}^{(n)} \right] \cdot \sin \left( \gamma_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \\ & \left[ Y_{3m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{3m}^{(n)} \right] \cdot \cos \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) + \left[ Y_{4m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{4m}^{(n)} \right] \cdot \sin \left( \gamma_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \end{aligned} \right\} + \\
 & + \sum_{m=1}^M Y_p^{(n)} \cos \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \cos \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right). \quad (19)
 \end{aligned}$$

moment skręcający:

$$\begin{aligned}
 M_{12}^{(n)} = & \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ Z_{1m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{1m}^{(n)} \right] \cdot \sin \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) - \left[ Z_{2m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{2m}^{(n)} \right] \cdot \cos \left( \gamma_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \\ & \left[ Z_{3m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{3m}^{(n)} \right] \cdot \sin \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) - \left[ Z_{4m}^{(n)} \right] \cdot \left[ R_{4m}^{(n)} \right] \cdot \cos \left( \gamma_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \end{aligned} \right\} + \\
 & + \sum_{m=1}^M Z_p^{(n)} \sin \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \sin \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) \quad (20)
 \end{aligned}$$

oraz siły poprzeczne:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{(n)} &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ G_{1m}^{(n)} \right]_{1 \times 6} \cdot \left[ R_{1m}^{(n)} \right]_{6 \times 1} \cdot \cos \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \left[ G_{2m}^{(n)} \right]_{1 \times 6} \cdot \left[ R_{2m}^{(n)} \right]_{6 \times 1} \cdot \sin \left( \gamma_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \\ &+ \left[ G_{3m}^{(n)} \right]_{1 \times 6} \cdot \left[ R_{3m}^{(n)} \right]_{6 \times 1} \cdot \sin \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) + \left[ G_{4m}^{(n)} \right]_{1 \times 6} \cdot \left[ R_{4m}^{(n)} \right]_{6 \times 1} \cdot \cos \left( \gamma_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \end{aligned} \right\} + \\
 &+ \sum_{m=1}^M G_p^{(n)} \sin \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \cos \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) \\
 Q_2^{(n)} &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ T_{1m}^{(n)} \right]_{1 \times 6} \cdot \left[ R_{1m}^{(n)} \right]_{6 \times 1} \cdot \sin \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \left[ T_{2m}^{(n)} \right]_{1 \times 6} \cdot \left[ R_{2m}^{(n)} \right]_{6 \times 1} \cdot \cos \left( \gamma_m^{[2]} x_2^{(n)} \right) + \\ &+ \left[ T_{3m}^{(n)} \right]_{1 \times 6} \cdot \left[ R_{3m}^{(n)} \right]_{6 \times 1} \cdot \cos \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) + \left[ T_{4m}^{(n)} \right]_{1 \times 6} \cdot \left[ R_{4m}^{(n)} \right]_{6 \times 1} \cdot \sin \left( \gamma_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21) \\
 &+ \sum_{m=1}^M T_p^{(n)} \cos \left( \delta_m^{[1]} x_1^{(n)} \right) \sin \left( \delta_m^{[2]} x_2^{(n)} \right).
 \end{aligned}$$

gdzie wielkości:

$$\left[ L_{im}^{(n)} \right]_{1 \times 6}, \left[ V_{im}^{(n)} \right]_{1 \times 6}, \left[ W_{im}^{(n)} \right]_{1 \times 6}, \left[ X_{im}^{(n)} \right]_{1 \times 6}, \left[ Y_{im}^{(n)} \right]_{1 \times 6}, \left[ Z_{im}^{(n)} \right]_{1 \times 6}, \left[ G_{im}^{(n)} \right]_{1 \times 6}, \left[ T_{im}^{(n)} \right]_{1 \times 6} \quad (\text{dla } i = 1, 2, 3, 4)$$

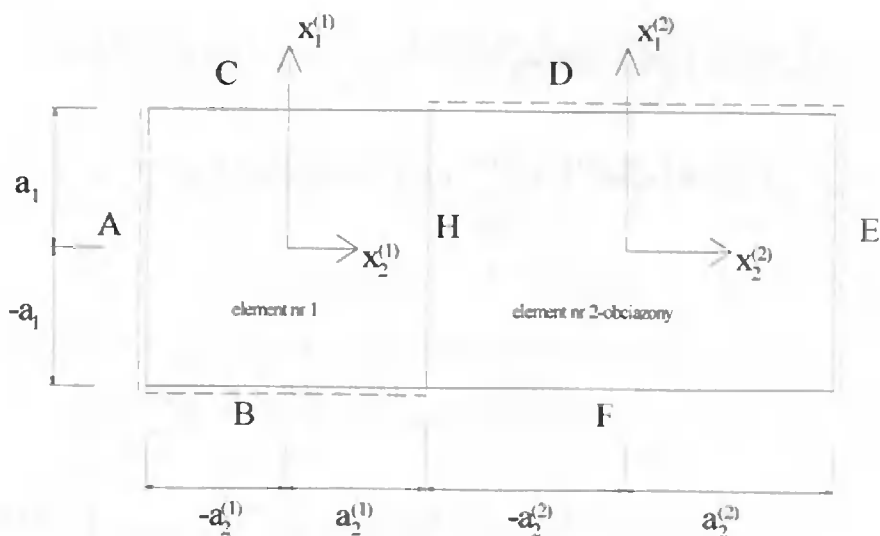
występujące w powyższych wzorach, to sześciowyrazowe wektory zbudowane z tzw. funkcji kształtu danej wielkości geometrycznej bądź statycznej. Funkcje kształtu utworzone są na podstawie funkcji cząstkowych opisanych wzorami (15).  $\left[ R_{im}^{(n)} \right]_{1 \times 6}$  (dla  $i = 1,$

2, 3, 4) to sześciowyrazowy wektor stałych parametrów  $R_{km}^{(n)}$  (przy  $k = 1-24$ ), za pomocą których spełniamy warunki brzegowe na krawędziach elementu płytowego. Indeks  $n$  w powyższych wzorach oznacza numer elementu płytowego.

## 5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Opisana metoda stanu naprężeń zostanie zaprezentowana na układzie płytowym, złożonym z dwóch elementów płytowych, pokazanym na rysunku 1.

Krawędzie A, B, D, E są wolnopodparte, krawędzie C i F – swobodne, natomiast H jest krawędzią wspólną obu elementów. Na element nr 2 działa obciążenie równomiernie rozłożone na całej powierzchni.



Rys. 1. Schemat układu płytowego

W analizowanym przykładzie na poszczególnych krawędziach mamy do spełnienia następujące warunki brzegowe:

$$\rightarrow \text{na krawędzi A: } w(x_1, x_2 = -a_2) = 0, \quad M_{22}(x_1, x_2 = -a_2) = 0,$$

$$M_{12}(x_1, x_2 = -a_2) = 0.$$

$$\rightarrow \text{na krawędzi B: } w(x_1 = -a_1, x_2) = 0, \quad M_{11}(x_1 = -a_1, x_2) = 0,$$

$$M_{12}(x_1 = -a_1, x_2) = 0.$$

$$\rightarrow \text{na krawędzi C: } M_{11}(x_1 = a_1, x_2) = 0, \quad Q_1(x_1 = a_1, x_2) = 0,$$

$$M_{12}(x_1 = a_1, x_2) = 0,$$

$$\rightarrow \text{na krawędzi D: } w(x_1 = a_1, x_2) = 0, \quad M_{11}(x_1 = a_1, x_2) = 0, \quad M_{12}(x_1 = a_1, x_2) = 0,$$

$$\rightarrow \text{na krawędzi E: } w(x_1, x_2 = a_2) = 0, \quad M_{22}(x_1, x_2 = a_2) = 0,$$

$$M_{21}(x_1, x_2 = a_2) = 0,$$

$$\rightarrow \text{na krawędzi F: } M_{11}(x_1 = -a_1, x_2) = 0, \quad Q_1(x_1 = -a_1, x_2) = 0,$$

$$M_{12}(x_1 = -a_1, x_2) = 0,$$

$$\rightarrow \text{na krawędzi H: } w^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)} = a_2^{(1)}) = w^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)} = -a_2^{(2)}),$$

$$M_{11}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)} = a_2^{(1)}) = M_{11}^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)} = -a_2^{(2)}),$$

$$u_1^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)} = a_2^{(1)}) = u_1^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)} = -a_2^{(2)})$$

$$M_{21}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)} = a_2^{(1)}) = M_{21}^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)} = -a_2^{(2)}).$$

$$u_2^{(1)} \left( x_1^{(1)}, x_2^{(1)} = a_2^{(1)} \right) = u_2^{(2)} \left( x_1^{(2)}, x_2^{(2)} = -a_2^{(2)} \right),$$

$$Q_2^{(1)} \left( x_1^{(1)}, x_2^{(1)} = a_2^{(1)} \right) = Q_2^{(2)} \left( x_1^{(2)}, x_2^{(2)} = -a_2^{(2)} \right).$$

Podstawiając do tych warunków wyrażenia (17÷21) otrzymujemy liniowy układ równań algebraicznych, po rozwiązaniu którego uzyskujemy nieznanne parametry  $R_{v(m)}^{[j]}$ . Ponowne podstawienie tych parametrów do wyrażeń (17÷21) pozwala określić przemieszczenia, momenty i siły tnące w złożonym układzie płytowym.

## LITERATURA

- [1] Прусов И.А., 1975. Метод сопряжения в теории плит. Изд-во Белорус. ун-та Минск, 256.
- [2] Грінченко Л., Ран Р., Делявський М., 2003. Розрахунок напружено-деформованого стану плоских конструкцій, складених з ізотропних плит. V Українсько-польський науковий симпозиум: Змішані задачі механіки неоднорідних структур, Тез. доп. Львів, 18-23 вересня 2003, 34.
- [3] Делявський М., Нагурко В., Онишко Л., Кравчук М., 2000. Метод розрахунку тонких прямокутних поперечно навантажених анізотропних плит // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямком „Інженерна механіка”) вип.7, 83-85.
- [4] Olejniczak M., Delyavskyy M., Kravczuk M., 2000. Analiza zginania ortotropowego posma płytowego. [W:] Budownictwo ogólne. Zagadnienia konstrukcyjne, materiałowe i ciepłno-wilgotnościowe w budownictwie. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz, 81-89.
- [5] Delyavsky M., Krawczuk M., Nagórko W., Podhorecki A., 2002. Pure bending of orthotropic elastic rectangle beam. Engineering Transactions 50(1-2), 55-67.
- [6] Golaś J., Podhorecka A., Delyavskyy M., Kravchuk M., 2002. On the approach to the solution of bending problem for laminated plates. Mechanics of Composite Materials 38(3), 253-262.
- [7] Podhorecki A., Delyavskyy M., Ran R., Beregova N., 2002. Określenie stanu naprężeń w płytach prostokątnych średniej grubości. [W:] XLI Sympozjon PTMTS, Zesz. Nauk. Katedry Mechaniki Stosowanej 18. Gliwice, 355-360.
- [8] Podhorecki A., Delyavskyy M., Ran R., 2003. O pewnej metodzie rozwiązywania układów płaskich złożonych z elementów płytowych. [W:] Budownictwo ogólne. Zagadnienia konstrukcyjne, materiałowe i ciepłno-wilgotnościowe w budownictwie. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz, 123-129.

## ANALYSIS OF STATE STRESS IN THE JOINT PLATE CONSTRUCTION WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS

### Summary

The method to analysis the state of stress in the plane construction built from plate elements is suggested. Presented calculate approach give possibility perfectly satisfy equilibrium equations written in the displacement variant. The method is consisted with two parts. In the first part the displacement equilibrium equations are solved perfectly for a plate element. In the two part the all static and kinematics quantity are determined in such manner that boundary conditions at the external edges while the continuous conditions at the common edges are satisfied. The plate elements constructed within the frame of moderate thickness plate theory are used in this report.

Keywords: plate element, function of form, moderate thickness plate

## WYZNACZANIE DYNAMICZNEGO MATERIAŁOWEGO MODUŁU ROZDZIERANIA DLA WYBRANYCH STOPÓW METALOWYCH

Jan Sadowski

Katedra Mechaniki Stosowanej  
Wydział Mechaniczny ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W artykule, w oparciu o badania własne przeprowadzone na oprzyrządowanym młocie udarowym, wyznaczono dynamiczne moduły rozdzierania  $T_{md}$  dla wybranej grupy stopów metalowych. Dla wyznaczania  $T_{md}$  zastosowano metodę zatrzymania rozwoju pęknięcia, tzw. metodę wielopróbkową. Moduł ten w stosunku do znanych parametrów dynamicznej odporności na pękanie  $K_{Id}$ ,  $J_{Id}$  może stanowić dodatkową ilościową ocenę możliwości eksploatacyjnych materiału w warunkach dynamicznych obciążeń.

Słowa kluczowe: odporność na pękanie materiałów, dynamiczny moduł rozdzierania

### 1. WSTĘP

W badaniach materiałowych opartych o kryteria mechaniki pęknięcia jednym z najważniejszych elementów prawidłowej oceny parametrów odporności na pękanie jest precyzyjne wyznaczenie obciążenia w chwili inicjacji pęknięcia materiału zarówno przy obciążeniu statycznym, jak i dynamicznym. Jest to obciążenie, dla którego wyznacza się krytyczne wartości wielkości charakteryzujących odporność materiału na pękanie, czyli wielkości, które są traktowane jako stałe materiałowe w obliczeniach inżynierskich, tj.: statyczną ( $K_{Ic}$ ,  $J_{Ic}$ ) lub dynamiczną ( $K_{Id}$ ,  $J_{Id}$ ) odporność materiału na pękanie. Parametry te przy porównaniu z krytycznym współczynnikiem intensywności naprężeń (statycznym lub dynamicznym) umożliwiają ocenę dopuszczalnych naprężeń, jakimi możemy obciążyć materiał przy założonej wielkości wady lub ocenę krytyczną wielkości tej wady (bezpiecznego pęknięcia), przy założonym obciążeniu statycznym lub dynamicznym. Inne znane parametry mechaniki pęknięcia to również: krytyczne rozszerzenie –  $\delta_c$  (COD), wiązkość materiału  $G_c$ .

O ile określenie siły (energii) inicjującej początek pęknięcia materiału w warunkach obciążeń statycznych jest na ogół łatwe i jednoznaczne [1], to w przypadku obciążeń dynamicznych problem ten napotyka na duże trudności, zwłaszcza dla materiałów plastycznych, i trzeba szukać nowych metod badawczych [2,3].

Mechanika pęknięcia, oprócz oferowanych parametrów, poszukuje coraz nowszych wskaźników opisujących stan i zachowanie się materiału w warunkach konkretnych obciążeń eksploatacyjnych (statycznych, dynamicznych, zmęczeniowych itp.) i wyznaczenie jego możliwości energetycznych w stanach awaryjnych (ekstremalnych).

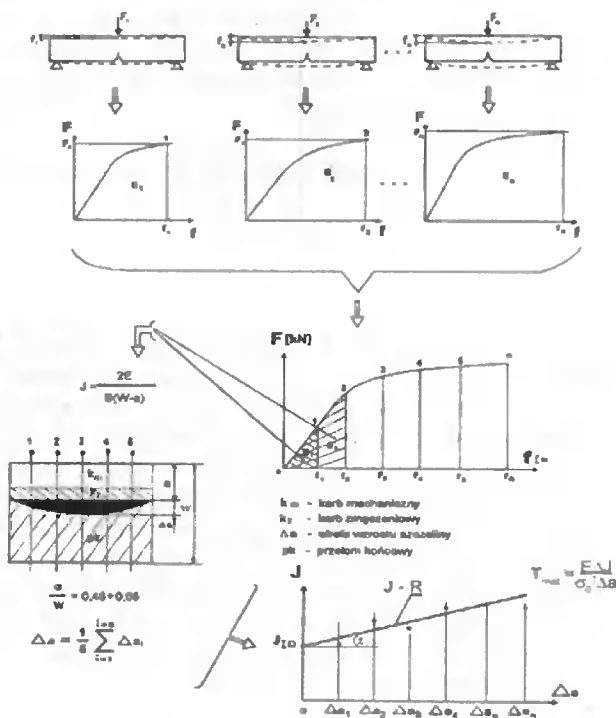


Jednym z takich parametrów może być moduł rozdzierania materiału  $T_{mat}$  (tearing modulus material), który może być dobrą miarą ilościową (liczbową) odporności materiału przeciw rozwijającemu się pęknięciu [4]. Moduł taki wyznaczyć można metodami empirycznymi wg tzw. krzywej kluczowej (key curve method) [4,5] lub metodą doświadczalną-wielopróbkową (stop block method), tzw. zatrzymania pęknięcia [3,5].

W niniejszej pracy dokonano oceny dynamicznego modułu rozdzierania  $T_{mat}$  w oparciu o badania własne, metodą wielopróbkową (zatrzymania rozwoju pęknięcia) dla wybranych stopów metalowych.

## 2. MATERIAŁ I METODYKA BADAŃ

Metodykę postępowania w ocenie dynamicznego modułu rozdzierania  $T_{mat}$ , a zarazem w ocenie najdokładniejszej wartości dynamicznej odporności na pęknięcia  $J_{Id}$  metodą wielopróbkową (zatrzymania pęknięcia) dla badanych materiałów przedstawiono na rysunku 1.

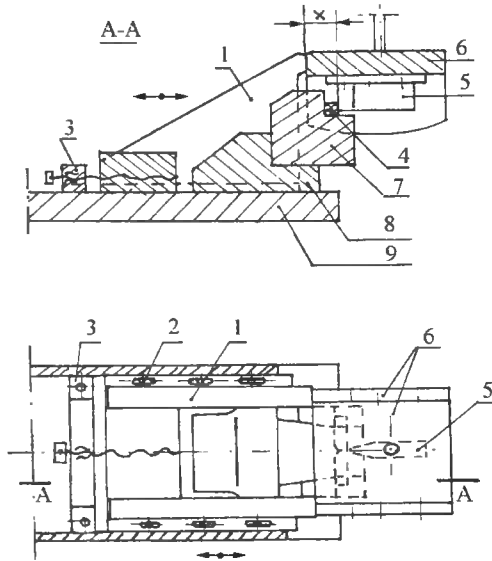


Rys. 1. Metodyka wyznaczania dynamicznego modułu rozdzierania  $T_{mat}$  oraz dynamicznej odporności na pęknięcie  $J_{Id}$  metodą wielopróbkową (zatrzymania pęknięcia)

Badania wykonano na oprzyrządowanym młocie udarowym PSD-300, korzystając z opracowanego programu komputerowego FRACDYNA [5], szczególnie jego modułów I, II, III. Badania oceny dynamicznego modułu rozdzierania  $T_{mat}$  przeprowadzono dla następujących stopów metalowych: stali 18G2A, 14HNMBCu, N9E, St3S, staliwa

L20G, żeliwa sferoidalnego oraz stopu aluminium AK12. Dla każdego z badanych materiałów przyjęto do badań 10-15 próbek uderzeniowych, każda z wprowadzoną szczeliną zmęczeniową o równym stosunku  $a/W = 0,45 \pm 0,55$  [5,6,7].

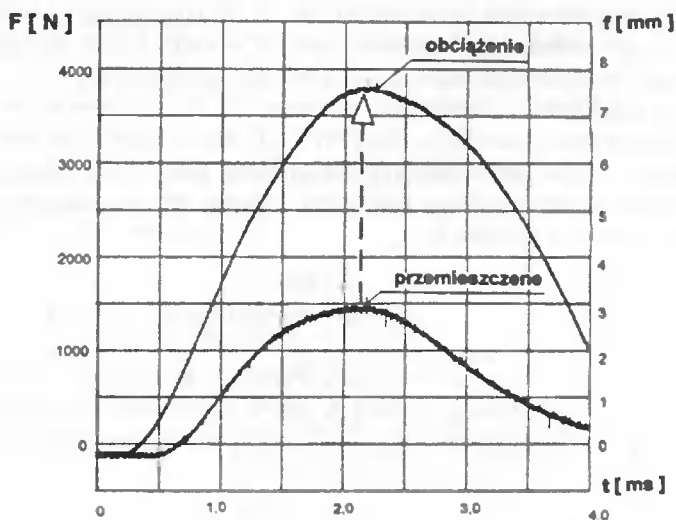
Zgodnie z rysunkiem 1, wzrastająca uderowa siła  $F$  wywoływała w badanych próbkach stabilny przyrost szczeliny o  $\Delta a$ . Celem uzyskania różnych wartości przyrostów długości pęknięcia  $\Delta a$  przy różnej sile obciążającej, u podstawy młota uderowego zainstalowano przyrząd ograniczający ruch noża wahadła młota uderowego. Schemat tego przyrządu przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Przyrząd ograniczający siłę uderzenia noża wahadła młota uderowego: 1 – ruchoma platforma oporowa, 2 – blokada platformy, 3 – wspornik z śrubą mikrometryczną, 4 – badana próbka, 5 – nóż wahadła młota uderowego, 6 – oprawa noża wahadła, 7 – wkładka podporowa, 8 – oprawa wkładki podporowej, 9 – podstawa młota uderowego

Urządzenie to dzięki możliwości regulacji odległości  $X$  płaszczyzn oporowych platformy ruchomej przyrządu od płaszczyzny uderzającej noża wahadła umożliwiło otrzymanie różnych wartości przyrostów długości pęknięcia  $\Delta a$  badanych próbek i uniemożliwiło całkowite zniszczenie próbki (zatrzymanie pęknięcia).

Podczas każdej próby rejestrowano na młocie uderowym przebiegi obciążenia  $F(t)$  próbki oraz przemieszczenia  $f(t)$  w funkcji czasu. Przykład takiego wykresu dla stali 18G2A przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Przykład wykresu obciążenia  $F$  i przemieszczenia  $f$  w funkcji czasu  $t$  dla stali 18G2A (próbka nr 4)

Otrzymane wykresy w dalszej kolejności przetransformowano na przebiegi  $F(f)$ , celem obliczenia energii pochłoniętej przez poszczególne próbki obciążone różnymi siłami. Obliczone wartości energii odniesione do pól przekrojów próbek badanych posłużyły do wyznaczania wartości całki  $J$  w poszczególnych próbkach, którą liczono wzorem [5,7]:

$$J = \frac{2E_p}{B(w-a)} \quad (1)$$

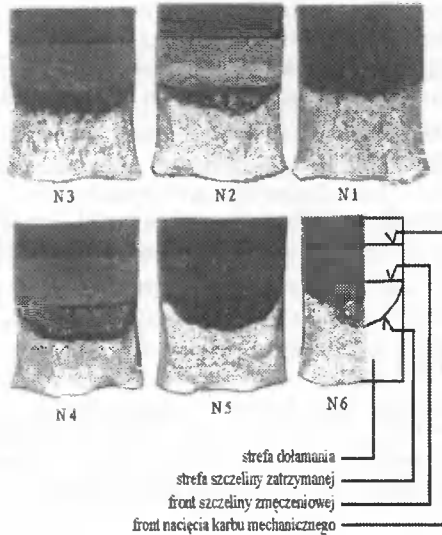
gdzie:

- $E_p$  – energia absorbowana przez łamaną próbkę, odpowiadająca polu powierzchni pod krzywą obciążenie-przemieszczenie,
- $B$  – szerokość próbki,
- $w$  – wysokość próbki,
- $a$  – długość wprowadzonej szczeliny.

Obliczone całki  $J$  odpowiadały różnym wartościom przyrostów pęknięcia  $\Delta a$  w badanych próbkach.

Celem identyfikacji otrzymanego przy każdej sile wzrostu przyrostu pęknięcia  $\Delta a$  próbki poddawane były utlenieniu w temperaturze 350°C przez 15 minut w piecu laboratoryjnym, po czym próbki te po ochłodzeniu dołamywano na młocie udarowym. Na powierzchniach przelomu mierzono strefę wzrostu szczeliny  $\Delta a$  zabarwioną na niebiesko, łatwo rozróżnialną w porównaniu z wprowadzonym pęknięciem zmęczeniowym. Pomiarów dokonano w pięciu punktach (rys. 1 z lewej strony), rozmieszczonych wzdłuż czoła pęknięcia zmęczeniowego, a wartość  $\Delta a$  z jednej próbki wyznaczono jako średnią arytmetyczną poszczególnych pomiarów na powierzchni strefy przyrostu pęknięcia. Przykładowo fotografie powierzchni przelomów próbek po dynamicznym obcią-

zeniu z różnymi przyrostami pęknięć dla stali 18G2A, których wyniki rejestracji przebiegów w badaniach metodą wielopróbkową przyjęto za ważne (punkt maksymalnej siły obciążenia był zbliżony z maksymalnym punktem przemieszczenia wg rysunku 3) pokazano na rysunku 4.



Rys. 4. Fotografie powierzchni przelomów próbek stali 18G2A po dynamicznym obciążeniu z różnymi przyrostami pęknięć

Na fotografiach uwidocznione są strefy: przyrostu szczeliny zatrzymanej  $\Delta a$ , wprowadzonej szczeliny zmęczeniowej, karbu mechanicznego i dołamania badanych próbek.

W dalszej kolejności sporządzano zależność obliczonych całek  $J$  od odpowiadających im przyrostów długości pęknięcia  $\Delta a$ . Następnie aproksymowano otrzymane punkty prostą regresji, metodą najmniejszych kwadratów tworząc równanie krzywej oporu  $J = f(\Delta a)$  (krzywej  $J$ - $R$ ) przeciw rozwijającemu się pęknięciu badanego materiału (rys. 1). Punkt przecięcia tej funkcji ekstrapolowany z osią  $J$  ( $\Delta a = 0$ ) wyznaczał krytyczną wartość całki  $J$ - $J_{Ic}$ , odpowiadającą początkowi przyrostu pęknięcia i stanowił najdokładniejszą wartość parametru dynamicznej odporności na pęknięcie  $J_{Ic}$  badanego materiału.

Dynamiczny moduł rozdzierania  $T_{mat}$  wyznaczono z otrzymanej krzywej  $J$ - $R$  wg wzoru [4]:

$$T_{mat} = \frac{E}{\sigma_0^2} \cdot \frac{\Delta J}{\Delta a} \quad (2)$$

gdzie:

- $E$  – moduł Younga [MPa],
- $\sigma$  – dynamiczna granica plastyczności [MPa],
- $\Delta J/\Delta a$  – pochylenie krzywej  $J$ - $R$  [J/m].

Dynamiczną granicę plastyczności materiału określano ze wzoru [4,5]:

$$\sigma_0 = \frac{2,85(F_y + F_m) \cdot W}{B b_0^2} \quad (3)$$

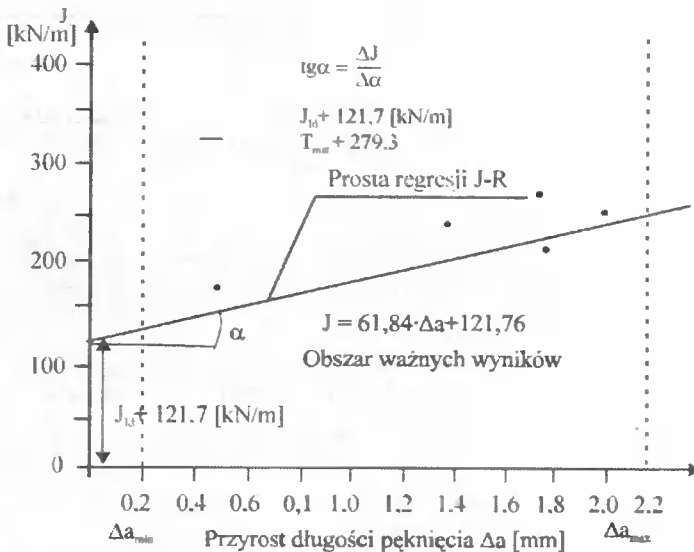
gdzie:

- $F_m$  – obciążenie maksymalne próbki [N],
- $F_y$  – obciążenie na dolnej granicy plastyczności [N],
- $b_0$  – szerokość części próbki bez pęknięcia =  $W - a_0$  [mm],
- $W$  – całkowita szerokość próbki [mm],
- $B$  – grubość próbki [mm].

Wartości obciążenia  $F_m$  oraz  $F_y$  oceniono na podstawie rejestrowanego przebiegu  $F(t)$  łamanych próbek z karbem  $V$  na oprzyrządowanym młocie udarowym dla badanego gatunku materiału.

### 3. WYNIKI BADAŃ I ICH ANALIZA

Na rysunku 5 przedstawiono wykres  $J$ - $R$  otrzymany w warunkach obciążeń dynamicznych metodą wielopróbkową na oprzyrządowanym młocie udarowym dla stali 18G2A, oraz ocenę w oparciu o ten wykres dynamicznego modułu rozzierania  $T_{mat}$  dla tej stali.



Rys. 5. Wartości zmian całki  $J$  w funkcji przyrostu długości pęknięcia  $\Delta a$  oraz ocena dynamicznego modułu rozzierania  $T_{mat}$  dla stali 18G2A

W tabeli 1 przedstawiono natomiast w oparciu o opisaną uprzednio metodykę badań rezultaty obliczonych wartości dynamicznych modułów rozzierania  $T_{mat}$  dla badanych stopów metalowych. W tabeli podano także wartości dynamicznej odporności na

pękanie  $J_{II}$  oraz równania linii rozwoju pęknięcia w badanych materiałach jako funkcję  $J = f(\Delta a)$ .

Ze wzoru (2) wynika, że dynamiczny moduł rozdzierania  $T_{mat}$ , będący miarą odporności materiału na rozprzestrzenianie się pęknięcia w warunkach obciążeń dynamicznych, wiąże z sobą trzy bardzo ważne dla materiału własności, tj.: moduł sprężystości Younga, dynamiczną granicę plastyczności oraz odporność materiału na pękanie. Jest zarazem nie tylko miarą wytrzymałości materiału, ale także miarą oporu, jaki stawia materiał przeciwko rozwijającemu się pęknięciu przy obciążeniach dynamicznych. Jak wynika ze wzoru (2) – jest wielkością bezwymiarową.

Dążeniem jest, aby tak projektować materiały, żeby wartość tego modułu była jak najwyższa. Wiadomo, że własności wytrzymałościowe (sprężystość, wytrzymałość) nie idą w parze z odpornością na pękanie. Przy optymalizowaniu cech materiałowych żądamy, aby parametry wytrzymałościowe oraz parametry charakteryzujące odporność materiału na pękanie były jak najwyższe.

Z analizy wyników zamieszczonych w tabeli 1 wynika, że stale: 14HNMBCu, 18G2A, St3S, staliwo L20G posiadają nie tylko wysoką dynamiczną odporność na pękanie  $J_{II}$ , ale również wysokie wartości dynamicznego modułu rozdzierania  $T_{mat}$ . Świadczy to nie tylko o dobrej wytrzymałości i plastyczności tych materiałów, ale również o dużej odporności na zatrzymanie rozwijających się pęknięć w porównaniu z innymi badanymi materiałami.

Tabela 1. Rezultaty oceny dynamicznego modułu rozdzierania  $T_{mat}$  oraz odporności na pękanie  $J_{II}$  dla badanych stopów metalowych

Lp.	Badany materiał	Moduł rozdzierania $T_{mat}$	Odporność na pękanie $J_{II}$ [kN/m]	Równanie linii rozwoju pęknięcia $J = f(\Delta a)$
1.	18G2A	279,3	121,7	$J = 61,84\Delta a + 121,7$
2.	14HNMBCu	367,2	229,2	$J = 110,9\Delta a + 229,2$
3.	N9E	21,3	24,8	$J = 14,3\Delta a + 24,8$
4.	St3S	152,6	57,6	$J = 26,6\Delta a + 57,6$
5.	Staliwo L20G	115,8	109,8	$J = 48,3\Delta a + 109,8$
6.	Zeliwo sferoidalne	12,6	30,4	$J = 18,2\Delta a + 30,4$
7.	Stop aluminium AK12	0,56	41,4	$J = 22,4\Delta a + 41,4$

Bardzo niskie wartości dynamicznego modułu rozdzierania posiadają, jak wynika z omawianej tabeli: stal N9E, zeliwo sferoidalne oraz badany stop aluminium AK12 (11% Si). Kwalifikuje to te materiały w stronę materiałów kruchych i nieodpornych na rozwój istniejących pęknięć w tych materiałach.

Przedstawione także w tabeli równania linii rozwoju pęknięcia  $J(\Delta a)$  (krzywe  $J$ - $R$ ) w badanych materiałach odpowiadają różnym kątom nachylenia tych linii do poziomu.

Im wartość tego kąta  $\left(\tan \alpha = \frac{\Delta J}{\Delta a}\right)$  w materiale badanym jest wyższa, tym wyższa jest odporność materiału na rozwój rozprzestrzeniającego się pęknięcia. Ma on decydujący wpływ na wartość obliczonego dynamicznego modułu rozdzierania  $T_{mat}$ .

Przy projektowaniu nowych materiałów należałoby więc dążyć do jak najwyższej wartości tego wskaźnika, który może być miarą energetycznych możliwości (żywotności resztkowej) materiału w warunkach awaryjnych (ekstremalnych) obciążeń.

#### 4. PODSUMOWANIE

Podsumowując wyniki uzyskane na obecnym etapie badań można stwierdzić, że:

1. Przedstawiona w pracy metoda określania dynamicznego modułu rozdzierania  $T_{mat}$  materiałów metodą wielopróbkową (zatrzymania pęknięcia) jako parametru pęknięcia może być zarazem metodą najdokładniejszej oceny parametru dynamicznej odporności na pęknięcie  $J_{Ict}$ .
2. Dynamiczny moduł rozdzierania  $T_{mat}$ , przedstawiający odporność materiału przeciw rozwijającemu się pęknięciu, jako wskaźnik liczbowy może określać możliwości energetyczne i wytrzymałościowe materiału w stanach awaryjnych (ekstremalnych).
3. Przy projektowaniu materiałów i ich technologii obróbczych należy dążyć do osiągnięcia najwyższych wartości modułu rozdzierania  $T_{mat}$ . Im wartość tego modułu jest wyższa, tym wyższa odporność materiału na rozwój istniejących w materiale pęknięć, a tym samym większy zapas żywotności resztkowej materiału.
4. Przedstawione w pracy równania oporu przeciw rozwijającemu się pęknięciu w materiale  $J(\Delta a)$  mogą stanowić ocenę wpływu długości wady na zmieniającą się odporność materiału na pęknięcie.
5. Możliwym jest, iż w niedalekiej przyszłości dynamiczny moduł rozdzierania  $T_{mat}$  będzie parametrem, który trzeba będzie uwzględniać w obliczeniach projektowanych materiałów i konstrukcji, które muszą wykazywać możliwości osiągnięcia wysokich własności wytrzymałościowych na równi z wysoką odpornością na pęknięcie.

#### LITERATURA

- [1] Gołaski L., 1992. Elementy doświadczalnej mechaniki pęknięcia. Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej Kielce.
- [2] Sadowski J., 2000. Wyznaczanie parametrów dynamicznej odporności na pęknięcie w próbie udarowego zginania. Mat. konf. "Inżynieria Materiałowa 2000", Politechnika Gdańska.
- [3] Biel-Gołaska M., 1993. A method of testing the dynamic fracture toughness of materials characterised by high plasticity. Metallurgy and Foundry Engineering.
- [4] Kabayashi T., Yamamoto J., 1996. Introduction of a New Dynamic Fracture Toughness Evaluation System. Journal of Testing and Evaluation 21(3).
- [5] Sadowski J., 1997. Ocena odporności na pęknięcie złączy spajanych w aspekcie próby udarowego zginania. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska.
- [6] ASTM E 24.03.03. Proposed standard method of test for instrumented impact of precracked Charpy specimens of metallic materials. Draft 2c. Philadelphia 1980.
- [7] BS 6729, 1987. British Standard Method for determination of the dynamic fracture toughness of metallic materials. BSJ London.

## DETERMINATION OF THE DYNAMICAL MATERIAL TEARING MODULUS FOR CHOICE METALLIC MATERIALS

### Summary

In this paper, the determination of the dynamical tearing modulus  $T_{mat}$  for certain group of metallic materials was presented. In this own testings, the instrumentation of the bending impact test was used. These testing has been based on the method of stop-page fracture propagation. This modulus with reference to well-known parameters of crack resistance  $K_{I,d}$  and  $J_{I,d}$  that result from the criteria of fracture mechanics can stands additionally quantitative assessment of the possibility of exploited materials I terms it dynamical loads.

Keywords: fracture toughness of materials, dynamical tearing modulus





## OBRÓBKA ELEKTROCHEMICZNA KRZYWOLINIOWYCH POWIERZCHNI OBROTOWYCH

Jerzy Sawicki, Tomasz Paczkowski

<sup>1</sup>Katedra Mechaniki Stosowanej

<sup>2</sup>Katedra Inżynierii Produkcji

Wydział Mechaniczny ATR

ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy sformułowano równanie opisujące ewolucję kształtu krzywoliniowej obrotowej powierzchni obrabianej metodą drażenia elektrochemicznego oraz równania przepływu mieszaniny elektrolitu i gazu w szczelinie między krzywoliniowymi powierzchniami obrotowymi (elektrodą roboczą i anodą). Przedstawiono koncepcję stanowiska badawczego dla weryfikacji modelu matematycznego obróbki ECM.

Słowa kluczowe: obróbka elektrochemiczna, przepływ elektrolitu, model matematyczny

### 1. WPROWADZENIE

Drażenie elektrochemiczne jest odmianą obróbki elektrochemicznej bezstykowej i należy do podstawowych i najbardziej rozpowszechnionych operacji technologii elektrochemicznej części maszyn i narzędzi [1].

Obróbka elektrochemiczna ECM wymaga, aby do ujemnego bieguna stałego źródła prądu podłączyć elektrodę roboczą, a do bieguna dodatniego przedmiot obrabiany. Szczelina międzyelektrodowa wypełniona jest elektrolitem. Podczas procesu obróbki wymuszony różnicą ciśnień przepływ elektrolitu szczeliną powoduje wypłukiwanie z powierzchni elektrod produktów roztwarzania (cząsteczki wodoru oraz jony roztworzonego metalu).

Można zatem przyjąć, że w szczelinie międzyelektrodowej powstaje mieszanina elektrolitu, cząsteczek wodoru oraz produktów roztwarzania elektrochemicznego.

O zjawiskach fizycznych jakie występują w szczelinie międzyelektrodowej w trakcie obróbki ECM decydują procesy wymiany masy, pędu i energii, które wpływają na dokładność operacji drażenia elektrochemicznego.

Projektując proces technologiczny drażenia należy wyróżnić następujące zadania [2,3]:

- dobór warunków procesu ECM (skład elektrolitu, parametry obróbki, wymogi technologiczne),
- wyznaczenie geometrii narzędzia – elektrody roboczej,
- analiza dokładności obróbki.

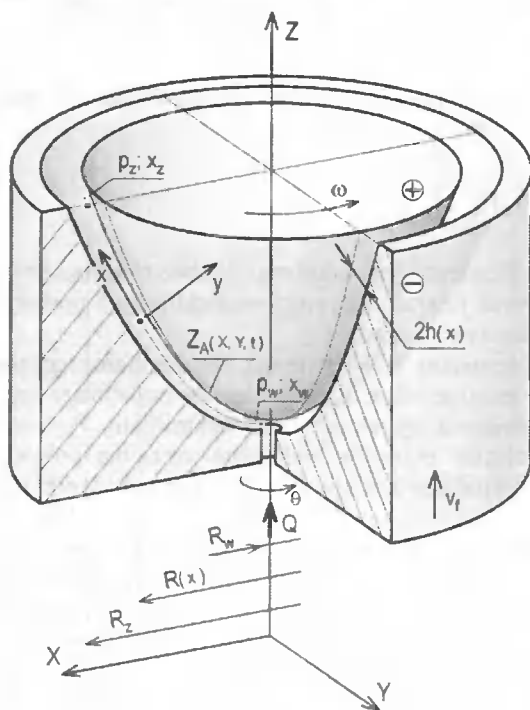
Należy zaznaczyć, że wymienione zadania są wzajemnie ściśle sprzężone, a rozwiązanie ich związane jest z wyznaczeniem ewolucji kształtu powierzchni obrabianej, tj. anody.

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie: równań opisujących ewolucję kształtu powierzchni obrabianej, przepływ mieszaniny elektrolitu i gazu w szczelinie między krzywoliniowymi powierzchniami obrotowymi (elektrodą roboczą i anodą) oraz koncepcja stanowiska badawczego dla weryfikacji przedstawionego modelu matematycznego obróbki ECM.

## 2. MODELOWANIE MATEMATYCZNE PROCESU OBRÓBKII ECM KRZYWOLINIOWYCH POWIERZCHNI OBROTOWYCH

### 2.1. Konfiguracja pola przepływu elektrolitu

Obszar przepływu elektrolitu w szczelinie międzyelektrodowej między krzywoliniowymi powierzchniami obrotowymi przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat obróbki elektrochemicznej

Nieruchoma powierzchnia środkowa szczeliny niech będzie opisana funkcją  $R(x)$  oznaczającą promień tej powierzchni. Grubość szczeliny ME zdefiniowano jako odcinek poprowadzony wzdłuż normalnej do powierzchni środkowej, przecinający krzywą powierzchni ograniczającą szczelinę w przekroju osiowym oznaczono  $2h$ .

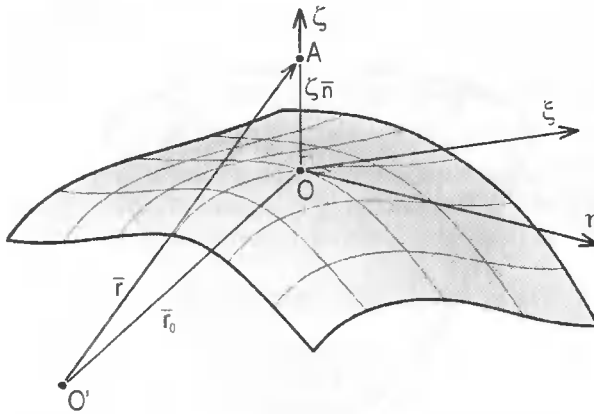
Niech grubość szczeliny  $2h(x)$  będzie mała w porównaniu z promieniem powierzchni środkowej  $R(x)$ , co można wyrazić formułą:

$$2h(x) \ll R(x) \quad (1)$$

Modelowanie matematyczne obróbki ECM, a w szczególności przepływu elektrolitu w szczelinie międzyelektrodowej przeprowadzimy w krzywoliniowym, lokalnie ortogonalnym układzie współrzędnych związanych z wprowadzoną do rozważań powierzchnią środkową [6].

Chcąc wyrazić równania przepływu elektrolitu traktowanego jako mieszanina cieczy i gazu należy wyznaczyć współczynniki Lamé'go.

Rozważmy zatem przedstawiony na rysunku 2 element rozpatrywanej powierzchni środkowej, na którym zaznaczono liniami  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$  ortogonalną siatkę.



Rys. 2. Powierzchnia krzywoliniowa

Równanie wektorowe takiej powierzchni można wyrazić zależnością:

$$\vec{r}_o = \vec{r}_o(\xi, \eta) \quad (2)$$

Określenie dowolnego punktu przestrzeni, leżącego w odległości  $\zeta$  mierzonej wzdłuż normalnej, jednoznacznie wyznacza wektor przedstawiony w postaci:

$$\vec{r} = \vec{r}_o(\xi, \eta) + \zeta \vec{n}(\xi, \eta) \quad (3)$$

Kwadrat elementu długości w ortogonalnym układzie współrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$  jest równy:

$$ds^2 = (d\vec{r})^2 = \left( \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial \vec{n}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi^2 + \left( \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial \vec{n}}{\partial \eta} \right)^2 d\eta^2 + d\zeta^2 \quad (4)$$

Zakładając, że współrzędne  $\xi$  i  $\eta$  pokrywają się z liniami powierzchni środkowej, wykorzystując wzory Rodrigues'a, można kwadrat elementu długości przedstawić następująco:

$$ds^2 = \left( \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \xi} \right)^2 \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} \right)^2 d\xi^2 + \left( \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \eta} \right)^2 \left( 1 + \frac{\zeta}{R_2} \right)^2 d\eta^2 + d\zeta^2 \quad (5)$$

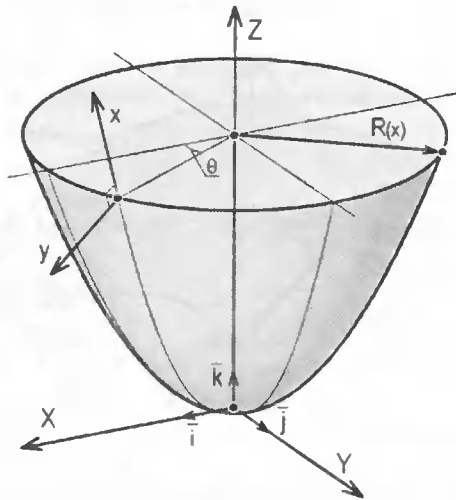
gdzie:

$R_1, R_2$  – oznaczają odpowiednio promienie krzywizny powierzchni.

Dla powierzchni obrotowej, która jest przedmiotem analizy, równanie wektorowe przyjmuje postać:

$$\vec{r}_o = \vec{i}R(x)\cos\theta + \vec{j}R(x)\sin\theta + \vec{k}Z(x) \quad (6)$$

Interpretację graficzną poszczególnych wielkości przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Powierzchnia obrotowa

Wstawiając (6) do równania (5) i zakładając:

$$\xi = x, \quad \eta = \theta, \quad \zeta = y \quad (7)$$

otrzymamy:

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{y}{R_1} \right)^2 dx^2 + R^2(x) \left( 1 + \frac{y}{R_2} \right)^2 d\theta^2 + dy^2 \quad (8)$$

gdzie:

$$R_1, R_2 \geq R(x).$$

Uwzględniając założenie (1) można przedstawić zależność (8) w następującej postaci:

$$ds^2 = dx^2 + R^2(x)d\theta^2 + dy^2 \quad (9)$$

Stąd współczynniki Lamé'go są równe [8]:

$$L_x = l; \quad L_0 = R(x); \quad L_y = l. \quad (10)$$

## 2.2. Równanie opisujące rzeczywistą zmianę kształtu powierzchni obrabianej

Ogólne równanie różniczkowe opisujące zmianę kształtu powierzchni obrabianej wskutek roztwarzania anodowego zgodnie z teorią roztwarzania ECM ma postać [5,9]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + k_v \vec{j}_A \text{grad} F = 0 \quad (11)$$

z warunkiem początkowym  $F(X, Y, 0) = F_0$

gdzie:

- $\vec{j}_A = \vec{j}(X, Y, t)$  – rozkład gęstości prądu na powierzchni obrabianej,
- $k_v$  – objętość materiału usuniętego przez roztwarzanie anodowe przy przepływie jednostkowego ładunku elektrycznego.
- $F_0(X, Y, 0) = 0$  – równanie opisujące wyjściową powierzchnię obrabianą,
- $F(A, t) = 0$  – równanie opisujące powierzchnię anody w chwili  $t$ .

Gęstość prądu wynika z prawa Ohma [11,12]:

$$\vec{j} = -\kappa \text{grad} u \Big|_A \quad (12)$$

gdzie:

- $u$  – potencjał pola elektrycznego między elektrodami,
- $\kappa$  – przewodność właściwa – konduktywność.

W układzie współrzędnych prostokątnych  $X, Y, Z$  związanych z nieruchomą anodą równanie powierzchni anody jest postaci:

$$Z = Z_a(x, y, t) \quad (13)$$

Wprowadzając równanie (13) do zależności (11) otrzymujemy:

$$\frac{\partial Z_a}{\partial t} = k_v j_a \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z_a}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_a}{\partial Y}\right)^2} - V_f \quad (14)$$

dla  $t = 0$   $Z_1 = Z_0(X, Y)$ .

Zakładając, że rozkład potencjału wzdłuż odcinka normalnego do elektrody roboczej jest liniowy (często przyjmowany w obliczeniach technologicznych) funkcję gęstości prądu można wyrazić zależnością:

$$j_A = \kappa_0 \Phi_{IG}^{-1} \frac{U - E}{S} \quad (15)$$

tutaj:  $S = 2h$ .

Funkcja  $\Phi_{IG}$  opisuje wpływ zmian konduktywności w szczelinie. Wyznacza się ją następująco:

$$\Phi_{IG} = \frac{1}{S} \left[ \int_0^S \frac{dy}{(1 + \alpha(T - T_0))(1 - \beta)^{3/2}} \right] \quad (16)$$

Dla zamknięcia układu równań (14÷16) konieczne jest wyznaczenie przyrostów temperatury  $\Delta T = T - T_0$  oraz rozkład koncentracji fazy gazowej  $\beta$ . Wymaga to określenia rozkładów ciśnienia i prędkości w krzywoliniowej szczelinie międzyelektrodowej.

### 3. RÓWNANIA RUCHU MIESZANINY

Równania ruchu mieszaniny (elektrolit + gaz) wynikają z zasad zachowania mechaniki, tj. zasady zachowania masy, pędu i energii [7].

Przyjmując do rozważań model homogeniczny ośrodka dwufazowego równania ruchu w krzywoliniowym lokalnie ortogonalnym układzie współrzędnych mają następującą postać:

– równania ciągłości przepływu:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\rho_e R v_x)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho_e v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho_e v_y)}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\rho_H R v_x)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho_H v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho_H v_y)}{\partial y} = j \eta_H k_H h^{-1} \quad (18)$$

– równania pędu:

$$\begin{aligned} \rho_e \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_\theta^2 \frac{R'}{R} \right) = - \frac{\partial p_e}{\partial x} + \mu_e \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_x}{\partial x} - 2 \frac{R'}{R^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{(R' R)'}{R^2} v_y \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \rho_e \left( v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} - v_x v_\theta \frac{R'}{R} \right) = - \frac{1}{R} \frac{\partial p_e}{\partial \theta} + \mu_e \left[ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + 2 \frac{R'}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} - \frac{(R' R)'}{R^2} v_\theta \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\rho_e \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_e}{\partial y} + \mu_e \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \quad (21)$$

$$\rho_H \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_\theta \frac{R'}{R} \right) = - \frac{\partial p_H}{\partial x} + \mu_H \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_x}{\partial x} - 2 \frac{R'}{R^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{(R'R)'}{R^2} v_x \right] \quad (22)$$

$$\rho_H \left( v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} - v_x v_\theta \frac{R'}{R} \right) = - \frac{1}{R} \frac{\partial p_H}{\partial \theta} + \mu_H \left[ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + 2 \frac{R'}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} - \frac{(R'R)'}{R^2} v_\theta \right] \quad (23)$$

$$\rho_H \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_y}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_H}{\partial y} + \mu_H \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (24)$$

– równanie energii:

$$\rho_e c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = - p \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] + \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda R \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ + \mu_e \left\{ \begin{array}{l} 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\theta}{R \partial \theta} + v_x \frac{R'}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \\ \left( \frac{\partial v_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right]^2 \\ - v_\theta \frac{R'}{R} \end{array} \right\} + \frac{j^2}{\kappa} \quad (25)$$



gdzie:

- $v_x, v_\theta, v_y$  – składowe wektora prędkości,
- $p_e$  – ciśnienie elektrolitu,
- $p_H$  – ciśnienie gazu,
- $\rho_e = \rho_{eo}(1-\beta)$  – gęstość elektrolitu,
- $\rho_H = \rho_{Ho}\beta$  – gęstość wodoru,
- $\mu_e$  – dynamiczny współczynnik lepkości elektrolitu,
- $\mu_H$  – dynamiczny współczynnik lepkości wodoru,
- $\beta$  – objętościowa koncentracja fazy gazowej,
- $j, \eta_H, k_H$  – odpowiednio: gęstość prądu, wydajność prądowa wydzielania wodoru, równoważnik elektrochemiczny wodoru,
- $T$  – temperatura elektrolitu,
- $c_p$  – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu,
- $R$  – promień powierzchni środkowej,

$$R' = \frac{\partial R}{\partial x}$$

Rozwiązania równań ruchu danych w postaci związków (17÷25) nie są możliwe do uzyskania na obecnym etapie wiedzy przy użyciu metod analitycznych.

Dokonując w równaniach (17÷24) odpowiednich przejść asymptotycznych charakterystycznych dla przepływów w cienkich warstwach cieczy (wąskich szczelinach) ( $h \ll R(x)$ ) [4,5], zakładając przepływ osiowosymetryczny ( $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ), można sprowadzić je do układu:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\rho_e R v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_e v_y)}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(\rho_H R v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_H v_y)}{\partial y} = j \eta_H k_H h^{-1} \quad (27)$$

$$\rho_e \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_\theta^2 \frac{R'}{R} \right) = - \frac{\partial p_e}{\partial x} + \mu_e \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (28)$$

$$\rho_e \left( v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} - v_x v_\theta \frac{R'}{R} \right) = \mu_e \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} \quad (29)$$

$$0 = - \frac{\partial p_e}{\partial y} \quad (30)$$

$$\rho_H \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_\theta^2 \frac{R'}{R} \right) = - \frac{\partial p_H}{\partial x} + \mu_H \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (31)$$

$$\rho_H \left( v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} - v_x v_\theta \frac{R'}{R} \right) = \mu_H \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} \quad (32)$$

$$0 = - \frac{\partial p_H}{\partial y} \quad (33)$$

$$\rho_e c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -\rho \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda R \frac{\partial T}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu_e \left\{ \begin{aligned} & 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( v_x \frac{R'}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \\ & \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - v_0 \frac{R'}{R} \right)^2 - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right]^2 \end{aligned} \right\} + \frac{j^2}{\kappa} \quad (34)$$

Dodając równania ruchu obu faz stronami oraz zanedbując człony zawierające  $\rho_H/\rho_e$  jako pomijalnie małe, zakładając, że ciśnienia  $p_e = p_H = p$ , układ równań ruchu homogenicznej mieszaniny (25÷34) jest teraz następujący:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial (\rho_e Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_e v_y)}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial (\rho_H Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_H v_y)}{\partial y} = j\eta_H k_H h^{-1} \quad (36)$$

$$\rho_e \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_0^2 \frac{R'}{R} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_e \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (37)$$

$$\rho_e \left( v_x \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} - v_x v_0 \frac{R'}{R} \right) = \mu_e \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \quad (38)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (39)$$

Równanie energii w rozważanym przepływie, uwzględniając ciepło Joule'a wydzielane przy przepływie prądu, wymuszoną konwekcję ciepła spowodowaną przepływem elektrolitu, wymianę ciepła przez elektrody, pomijając energię rozproszoną, ma teraz następującą postać:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( a R \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{j^2}{\kappa} \quad (40)$$

gdzie:

$a = \frac{\lambda}{c_p \rho_e}$  – dyfuzyjność cieplna elektrolitu,

$\kappa$  – elektryczna konduktywność właściwa elektrolitu.

Sformułowany układ równań (33÷40) stanowi podstawowy układ równań dla analizy osiowosymetrycznego przepływu mieszaniny elektrolitu i wodoru w szczelinie międzyelektrodowej.

Rozwiązanie układu równań (33÷40) pozwoli na określenie rozkładów prędkości, ciśnień i temperatury w szczelinie międzyelektrodowej. Uzyskane formuły opisujące rozkład temperatury w szczelinie wykorzystane będą dla wyznaczenia ewolucji kształtu przedmiotu obrabianego (anody) na podstawie równania (14) [13,14].

### 3.1. Warunki brzegowe

Rozwiązania równań (33÷40) powinny spełniać warunki brzegowe odnośnie:

– składowych prędkości:

$$\begin{aligned} v_x = v_y = 0 & \quad \text{dla } y = \pm h, \\ v_\theta = 0 & \quad \text{dla } y = -h, \\ v_\theta = \omega_2 R(x) & \quad \text{dla } y = +h. \end{aligned} \quad (41)$$

– ciśnienia:

$$\begin{aligned} p = p_w & \quad \text{dla } x = x_w, \\ p = p_z & \quad \text{dla } x = x_z. \end{aligned} \quad (42)$$

– dla temperatury:

– na ściankach:

$$T = T_s \quad \text{dla } x \geq x_w \quad \text{i } y = \pm h$$

– na wlocie

$$T = T_w \quad (43)$$

gdzie:

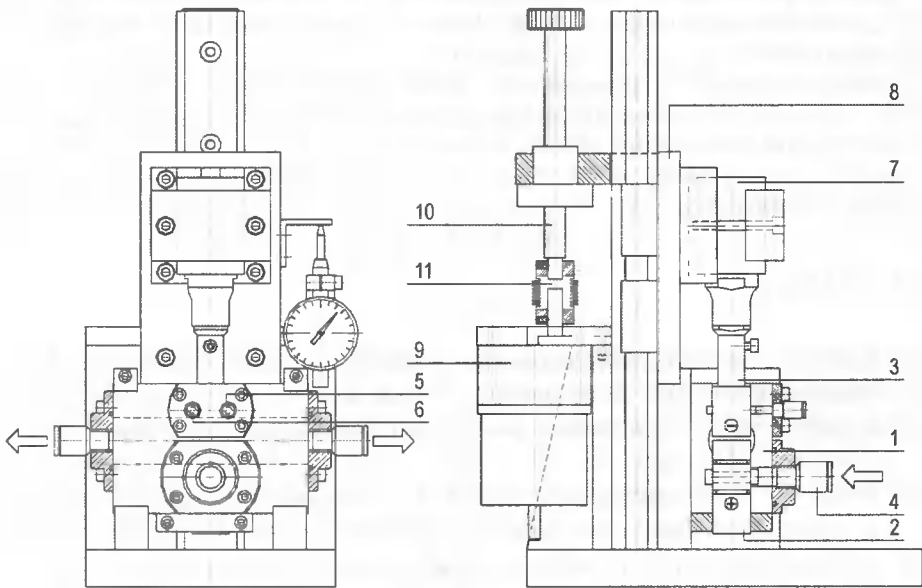
- $p_w, p_z$  – ciśnienia na wlocie i wylocie szczeliny międzyelektrodowej,
- $x_w, x_z$  – współrzędne położenia wlotu i wylotu ze szczeliny międzyelektrodowej,
- $x_w$  – współrzędna początku szczeliny międzyelektrodowej,
- $T_s$  – temperatura elektrod,
- $T_w$  – temperatura na wlocie.

## 4. STANOWISKO BADAWCZE

Otrzymane krzywe opisujące zarys ewolucji kształtu przedmiotu obrabianego (anody) zamierza się zweryfikować na stanowisku badawczym przedstawionym schematycznie na rysunku 4.

Zasadniczym elementem stanowiska jest komórka obróbkowa 1, w której znajduje się przedmiot obrabiany 2 oraz elektroda robocza 3. Komórka wykonana jest z przezroczystego tworzywa umożliwiającego obserwację elektrod i przepływającego elektrolitu. Otworem 4 podawany jest do komórki obróbkowej elektrolit. Sposób zasilania szczeliny międzyelektrodowej w elektrolit zapewnia przepływ osiowo symetryczny. Otworem 5 do przestrzeni między ściankami ER i korpusem komórki podawano przeciw-

ciśnienie powietrza. Stanowi ono dodatkowe uszczelnienie komórki z ER i jednocześnie ułatwia odprowadzenie przecieków otworem 6.



Rys. 4. Stanowisko badawcze

Drgania ER wywołuje piezoelektryczny wzbudnik drgań 7. Wzbudnik związany z suportem 8 osadzonym na przewodnicy. Suport wraz ze wzbudnikiem drgań oraz ER napędzany jest silnikiem krokowym z przekładnią redukcyjną 9. Realizowany jest w ten sposób ruch postępowy z prędkością  $V_f$ . Do zmiany ruchu obrotowego na posuwowy zastosowano bezluzową toczną przekładnię śrubową 10. Między wałem silnika a śrubą toczną umieszczono sprzęgło mieszkowe 11, w celu uwolnienia napędu od naprężeń wynikających z błędów współosiowości i drgań. Nakrętkę zamocowano w głowicy związanej z suportem 8 komórki obróbkowej. Prędkość obrotową silnika, przesunięcie suportu regulowano programowo. Umożliwia to:

- realizowanie ruchów roboczych z zadaną stałą prędkością,
- realizowanie ruchów pozycjonujących:
  - ruch do przodu – do styku elektrod,
  - ruch do tyłu o zadaną wartość – ustawianie wysokości początkowej szczeliny międzyelektrodowej,
- szybkie wycofanie elektrody roboczej w przypadku wystąpienia stanów krytycznych.

## 5. WNIOSKI

W pracy sformułowano – wykorzystując podstawowe zasady zachowania masy, pędu i energii – równania:

- ewolucji kształtu przedmiotu obrabianego będącego w ogólności krzywoliniową powierzchnią obrotową,

- ruchu masy, pędu i energii mieszaniny elektrolitu i gazu w krzywoliniowym ortogonalnym układzie współrzędnych.

Ponadto przedstawiono stanowisko badawcze dla weryfikacji zaproponowanego modelu matematycznego opisu obróbki elektrochemicznej powierzchni krzywoliniowych obrotowych:

Należy podkreślić, że przedstawiony model matematyczny obróbki elektrochemicznej stanowi układ równań różniczkowych cząstkowych nieliniowych, którego rozwiązanie wymaga zastosowania bądź przybliżonych metod analitycznych, bądź znanych w literaturze metod numerycznych różnic skończonych, elementów skończonych lub objętości skończonych.

## LITERATURA

- [1] Kozak J., 1967. Zagadnienie geometrii elektrod w procesie kształtowania elektrochemicznego. Arch. Bud. Maszyn, t. XIV, z. 2.
- [2] Kozak J., 1976. Kształtowanie powierzchni obróbką elektrochemiczną bezstykową (ECM). Pr. Nauk. PW, Mechanika 41, Wyd. Politechniki Warszawskiej.
- [3] Kozak J., 1976. Mathematical Models for Computer Simulation of Electrochemical Machining Process. Journal of Materials Processing Technology 76.
- [4] Davydov A.D., Kozak J., 1990. Wysokoskorostnyje elektrochimizjeskoje formoobrazowanie. Nauka Moskwa.
- [5] Dąbrowski L., 1992. Podstawy komputerowej symulacji kształtowania elektrochemicznego. Zesz. Nauk. Politechniki Warszawskiej, Mechanika 154.
- [6] Sawicki J., 1994. Influences of the inertial forces on the magnetic fluid flow in a gap between curvilinear surfaces of revolution. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 4(32), 754-771.
- [7] Sawicki J., 1996. Magneto-hydrodynamic flow of viscous fluid in a slot between curvilinear surfaces of revolution. Rozprawy Inżynierskie PAN-IPPT 44(1), 113-140.
- [8] Sawicki J., 1996. Uogólnione równania ruchu cieczy niemagnetycznej i magnetycznej w szczelinach między wirującymi powierzchniami obrotowymi. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz, Mechanika 41, 55-64.
- [9] Łubkowski K., 1996. Stany krytyczne w obróbce elektrochemicznej. Zesz. Nauk. Politechniki Warszawskiej, Mechanika 163.
- [10] Gryboś R., 1998. Podstawy mechaniki płynów. PWN Warszawa.
- [11] Ruszaj A., 1999. Niekonwencjonalne metody wytwarzania elementów maszyn i narzędzi. IOS Kraków, 171-180.
- [12] Paczkowski T., Sawicki J., 2002. Symulacja komputerowa procesu ECM w oparciu o dwuwymiarowy model przepływu elektrolitu między płaskimi elektrodami. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz, Mechanika 53.
- [13] Paczkowski T., Sawicki J., 2002. Modelowanie przepływu elektrolitu w szczelinie międzyelektrodowej w obróbce elektrochemicznej. National Conference with International Participation, Svratka, Czech Republic, Academy of Sciences of the Czech Republic, 62-69.

- [14] Paczkowski T., Sawicki J., 2003. Wpływ koncentracji wodoru w elektrolicie na ewolucję kształtu przedmiotu obrabianego, wybrane zagadnienia obróbek skoncentrowaną wiązką energii. Praca zbiorowa pod red. M. Styp-Rekowskiego, BTN Bydgoszcz, 511-520.
- [15] Paczkowski T., Sawicki J., 2003. Modelowanie ewolucji kształtu powierzchni łopaty w obróbce elektrochemicznej elektrodą drgającą roboczą. [W:] Przepływowe maszyny wirnikowe, E. Oczos (red.), Rzeszów.

## ELECTROCHEMICAL MACHINING CURVILINEAR SURFACES OF REVOLUTION

### Summary

In this work an equation describing the shape evolution of the electromachined curvilinear rotary surface has been formulated as well as the equations of electrolyte and gas mixture flow in the gap between curvilinear surfaces of revolution (tool electrode and anode).

A concept of a working station for verification of the presented ECM machining mathematical model has been discussed.

Keywords: electrochemical machining, electrolyte flow, model mathematical



## PELZANIE PŁYT NA PODŁOŻU LEPKOSPĘŻYSTYM

Justyna Sobczak-Piąstka

Katedra Mechaniki Konstrukcji  
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

Przedmiotem pracy są płyty cienkie oparte na podłożu lepkospężystym, ulegającym pelzaniu. Równania różniczkowe opisujące płyty cienkie i równania różniczkowe modelujące podłoże lepkospężyste sprowadzono do równań pracy wirtualnej i następnie rozwiązano dwiema metodami numerycznymi – metodą elementów skończonych (MES) i metodą Zienkiewicza-Wooda (SSpj). W celu ilustracji poprawności zaproponowanej metodyki rozwiązania wykonano obliczenia i przeprowadzono analizę otrzymanych wyników.

Słowa kluczowe: płyta, podłoże lepkospężyste, pelzanie

### 1. WSTĘP

Zachowanie się układu konstrukcja – podłoże, będącego przykładem tzw. układów sprzężonych jest, wobec wpływu szeregu czynników zarówno mechanicznych jak i niemechanicznych, bardzo złożone i skomplikowane przy matematycznym opisie tego zjawiska. Złożoność tego zagadnienia wynika z braku jednoznacznego jego przedstawienia w postaci równań i związków matematycznych. Powoduje to, że stosuje się różnego rodzaju modele fenomenologiczne do opisu zwłaszcza oddziaływania podłoża. Podstawą tworzenia modeli coraz bardziej złożonych jest możliwość jednoczesnego uchwycenia takich zjawisk reologicznych, jak pelzanie i relaksacja. Wpływ tych zjawisk ma istotne znaczenie dla pracy konstrukcji. Na przykład, stan naprężenia w układach stalowych i żelbetowych może w procesie pelzania zwiększyć się 2÷2.5-krotnie, a przemieszczenia mogą wzrosnąć nawet 3÷4 razy [1,2,3].

W analizie drgań najczęściej stosuje się model Voigta-Kelvina. Wynika to z dużej łatwości stosowania tego modelu do obliczeń dynamicznych i reologicznych. Szybkie przebiegi drgań (krótki okres) powodują, że na wyniki analiz dynamicznych nie ma zbyt dużego wpływu dobór modelu reologicznego do opisu tłumienia drgań. Zjawiska pelzania i relaksacji zachodzą zaś bardzo wolno w czasie. Dość powszechnie stosuje się więc do opisu pelzania i relaksacji, zwłaszcza metali i tworzyw sztucznych, model Zenera nazywany modelem standardowym lub też Rżanicyna. Rżanicyn zastosował model Zenera do zagadnień reologicznych betonu [4]. Model Bürgersa zaś zawiera cechy wszystkich wymienionych wcześniej modeli lepkospężystych i został zaproponowany do przedstawiania zjawisk reologicznych w smolach i asfaltach [5]. Model ten należy traktować jako udoskonalenie modelu Zenera.

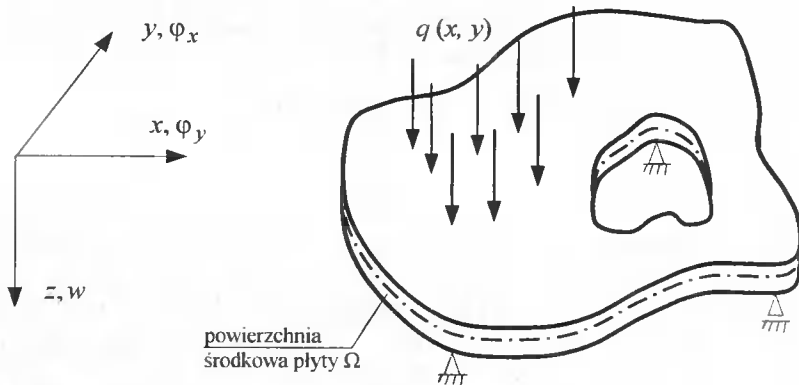
W pracy rozważa się płytę cienką opartą na podłożu lepkospężystym. Równania różniczkowe opisujące płytę cienką i równania różniczkowe modelujące podłoże lepko-



sprężyste sprowadzono do równań pracy wirtualnej i następnie rozwiązano dwiema metodami numerycznymi – metodą elementów skończonych (MES) i metodą Zienkiewicza-Wooda (SSpj). Ważnym elementem rozwiązania jest analiza występujących zjawisk reologicznych w podłożu, zwłaszcza pełzania.

## 2. SFORMUŁOWANIE LOKALNE

Rozpatruje się płytę cieką spoczywającą na wieloparametrowym podłożu lepkosprężystym (rys. 1). Podłoże może być niejednorodne, nieciągłe i może charakteryzować się więzami jednostronnymi. Kształt płyty i warunki brzegowe mogą być dowolne. Na płytę działa obciążenie poprzeczne dowolnie przemieszczające się w płaszczyźnie płyty oraz wolno zmienne w czasie, co umożliwia zaniedbywanie sił bezwładności. Założenie to jest uzasadnione w przypadku badania zjawisk odbywających się bardzo powoli, w długim przedziale czasu. Takim zjawiskiem jest pełzanie i relaksacja. Płyta wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego.



Rys. 1. Rozważana płyta cienka oparta na podłożu lepkosprężystym

Płytę rozpatruje się w ramach klasycznej teorii płyt cienkich [6]. W takim przypadku znane jest równanie różniczkowe zapisane przy wykorzystaniu momentów:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q - r = 0 \quad (1)$$

$$x, y \in \Omega, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle$$

gdzie:

$$M_x = M_x(x, y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = M_y(x, y) = -D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$M_{xy} = M_{xy}(x, y) = -D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

We wzorach poszczególne wielkości są funkcjami położenia  $x$ ,  $y$  oraz czasu  $t$  i kolejno oznaczają:  $M_x$ ,  $M_y$  - momenty zginające,  $M_{xy}$  - moment skręcający,  $w$  - funkcja ugięcia płyty,  $q$  - znana funkcja obciążenia poprzecznego,  $r$  - nieznaną funkcję odporu (reakcja) podłoża,  $E$ ,  $\nu$  - stałe sprężystości materiału płyty,  $h$  - grubość płyty,  $\Omega$  - powierzchnia środkowa płyty.

Wymienione równania uzupełniają warunki brzegowe oraz równanie opisujące podłoże lepkosprężyste.

Istnieje wiele modeli ośrodków lepkosprężystych, np. modele różniczkowe, modele całkowe [7.8.9]. W pracy [10] zaproponowano matematyczny opis modeli lepkosprężystych w postaci równania różniczkowego cząstkowego, które zawiera związek między reakcją podłoża  $r(x, y, t)$  i ugięciem płyty  $w(x, y, t)$ .

Do dalszych rozważań przyjmuje się model lepkosprężysty opisany równaniem różniczkowym zwyczajnym:

$$\alpha_0 r + \alpha_1 \dot{r} + \alpha_2 \ddot{r} = \beta_0 w + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \ddot{w} \quad (3)$$

Do jednoznacznego rozwiązania takiego równania potrzebne są warunki brzegowe i warunki początkowe. Warunki brzegowe formułuje się tak, jak dla rozwiązania równania różniczkowego płyty (1). Warunki początkowe są bardziej złożone:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) &= w''(x, y), & \dot{w}(x, y, 0) &= \dot{w}''(x, y) \\ r(x, y, 0) &= r''(x, y), & \dot{r}(x, y, 0) &= \dot{r}''(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

Dodatkowo warunki (4) muszą mieć taką postać, aby równanie (3) było spełnione w chwili  $t = 0$ :

$$\alpha_0 r(x, y, 0) + \alpha_1 \dot{r}(x, y, 0) + \alpha_2 \ddot{r}(x, y, 0) = \beta_0 w(x, y, 0) + \beta_1 \dot{w}(x, y, 0) + \beta_2 \ddot{w}(x, y, 0) \quad (5)$$

Po wykorzystaniu oznaczeń użytych w warunkach (4) otrzymujemy:

$$\alpha_0 r'' + \alpha_1 \dot{r}'' + \alpha_2 \ddot{r}'' = \beta_0 w'' + \beta_1 \dot{w}'' + \beta_2 \ddot{w}'' \quad (6)$$

### 3. SFORMUŁOWANIE GLOBALNE

Zastosowanie metody elementów skończonych (MES) do rozwiązania równań różniczkowych wymaga przejścia ze sformułowania lokalnego do globalnego (całkowego). W tym celu zastosowano metodę wariacyjną wykorzystującą zasadę pracy wirtualnej. Wszystkie wielkości występujące w równaniach (1-6) są funkcjami ciągłymi i dostatecznie gładkimi (istnieją pochodne cząstkowe wymaganego rzędu). Wariację funkcji  $w$  oznaczamy symbolem  $\delta w$ . Rozważamy klasę dowolnych przemieszczeń  $w + \delta w$  zgodnych z więzami płyty (geometrycznymi warunkami brzegowymi), co prowadzi do zanikania wariacji przemieszczeń  $\delta w$  na części powierzchni brzegowej z ograniczeniami przemieszczeń. Na bazie równania (1) tworzymy wyrażenie globalne słuszne dla dowolnego czasu  $t$ :

$$\iint_{\Omega} \delta w \left[ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q - r \right] d\Omega = 0 \quad (7)$$

które po przekształceniach sprowadza się do równania pracy wirtualnej płyty w postaci:

$$\iint_{\Omega} \left[ \delta \left( \frac{\hat{c}\varphi_x}{\hat{c}x} \right) M_x + \delta \left( \frac{\hat{c}\varphi_x}{\hat{c}y} \right) M_{xy} + \delta \left( \frac{\hat{c}\varphi_y}{\hat{c}x} \right) M_{xy} + \delta \left( \frac{\hat{c}\varphi_y}{\hat{c}y} \right) M_y + \delta w (q - r) \right] d\Omega = 0, \quad (8)$$

gdzie:

$$\varphi_x = \frac{\hat{c}w}{\hat{c}x}, \quad \varphi_y = \frac{\hat{c}w}{\hat{c}y} \quad (9)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń (11), równania (2) opisujące momenty przyjmują postać:

$$M_x = -D \left( \frac{\hat{c}\varphi_x}{\hat{c}x} + \nu \frac{\hat{c}\varphi_y}{\hat{c}y} \right), \quad M_y = -D \left( \nu \frac{\hat{c}\varphi_x}{\hat{c}x} + \frac{\hat{c}\varphi_y}{\hat{c}y} \right) \quad (10)$$

$$M_{xy} = -\frac{D}{2} (1 - \nu) \left( \frac{\hat{c}\varphi_x}{\hat{c}y} + \frac{\hat{c}\varphi_y}{\hat{c}x} \right)$$

Analogicznie do (7) równanie pracy wirtualnej podłoża lepkosprężystego ma postać:

$$\iint_{\Omega} \delta w (\alpha_o r + \alpha_j \dot{r} + \alpha_{\ddot{r}} \ddot{r} - \beta_o w - \beta_j \dot{w} - \beta_{\ddot{w}} \ddot{w}) d\Omega = 0 \quad (11)$$

#### 4. RÓWNANIA W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

W MES rozpatrywany obszar płyty (rys. 2a) zostaje myślowo podzielony na skończoną liczbę podobszarów, tzw. elementów skończonych (ES) (rys. 2b). Dla każdego ES (rys. 3) dokonuje się opisu pól przemieszczeń w zależności od parametrów (przemieszczeń) węzłowych:

$$\begin{aligned} w^e(x, y, t) &= \underline{\Phi}_i^{ew}(x, y) \underline{x}_i^e(t), & \varphi_x^e(x, y, t) &= \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}(x, y) \underline{x}_i^e(t), \\ \varphi_y^e(x, y, t) &= \underline{\Phi}_i^{e\varphi_y}(x, y) \underline{x}_i^e(t), \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie:

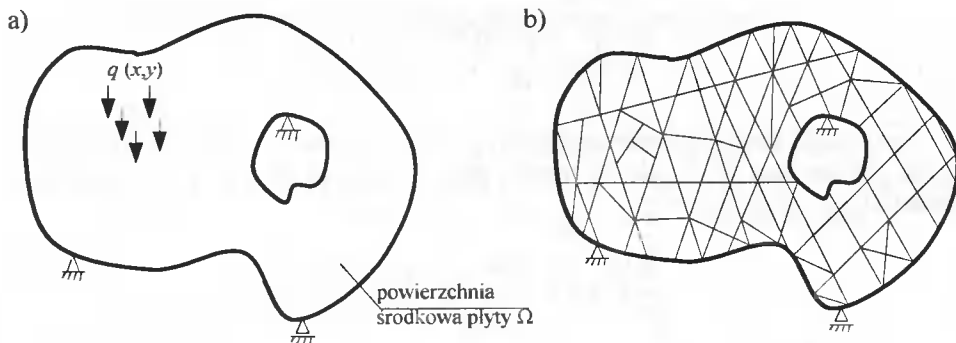
$\underline{x}_i^e = [w_i^e, \varphi_{xi}^e, \varphi_{yi}^e]^T$  – wektor przemieszczeń ES w węzle  $i$ :

$\underline{\Phi}_i^{ew}, \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}, \underline{\Phi}_i^{e\varphi_y}$  – macierze kształtu zawierające funkcje przestrzenne.

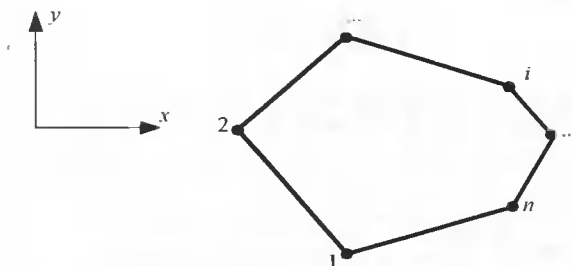
$i = 1, 2, \dots, w_e \cdot n$ :

$n$  – liczba węzłów ES.

$w_e$  – liczba stopni swobody w węzle ES.



Rys. 2. Rozważana płyta: a – schemat statyczny płyty, b – dyskretyzacja powierzchni środkowej płyty



Rys. 3. Element skończony płyty

W taki sam sposób opisujemy inne wielkości, np.:

a) pochodną przemieszczeń względem czasu:

$$\ddot{w}^e = \frac{\partial^2 w^e}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\underline{\Phi}_i^{ew} \underline{x}_i^e) = \underline{\Phi}_i^{ew} \frac{\partial^2 \underline{x}_i^e}{\partial t^2} = \underline{\Phi}_i^{ew} \ddot{\underline{x}}_i^e(t) \quad (13)$$

b) reakcję (odpór) podłoża:

$$r^e(x, y, t) = \tilde{\underline{\Phi}}_i^e(x, y) \underline{y}_i^e(t) \quad (14)$$

gdzie:

$\underline{y}_i$  – wektor zawierający siły węzłowe ES w węźle  $i$ ,

$\tilde{\underline{\Phi}}_i^e$  – funkcja kształtu zawierająca funkcje przestrzenne,  $i = 1, 2, \dots$ ,

$n$  – liczba węzłów ES.

c) momenty zginające i skręcające:

$$M_x^e = -D^e \left[ \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}}{\partial x} \right) + \nu^e \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_y}}{\partial y} \right) \right] \underline{x}_i^e, \quad M_y^e = -D^e \left[ \nu^e \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_x}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \underline{\Phi}_i^{e\varphi_y}}{\partial y} \right) \right] \underline{x}_i^e,$$

$$M_{xy}^e = -\frac{D^e}{2}(1-\nu^e) \left[ \left( \frac{\hat{\partial}\Phi_i^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}y} \right) + \left( \frac{\hat{\partial}\Phi_i^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}x} \right) \right] \underline{x}_i^e \quad (15)$$

Po opisanju funkcji przemieszczeń i sił przemieszczeniami węzłowymi dla każdego ES, podstawiamy te związki do równań prac wirtualnych (8) i (11) i otrzymujemy równania ruchu w postaci:

$$\sum_{e=1}^E \left[ \underline{K}_{ik}^e \underline{x}_k^e + \underline{W}_{ik}^e \underline{y}_k^e - \underline{F}_i^e \right] = \underline{0} \quad (16)$$

$$\sum_{e=1}^E \left[ \underline{W}_{ik}^e \left( \alpha_o^e \underline{y}_k^e + \alpha_l^e \underline{\dot{y}}_k^e + \alpha_2^e \underline{\ddot{y}}_k^e \right) - \underline{V}_{ik}^e \left( \beta_o^e \underline{x}_k^e + \beta_l^e \underline{\dot{x}}_k^e + \beta_2^e \underline{\ddot{x}}_k^e \right) \right] = \underline{0}$$

lub po agregacji macierzy

$$\underline{K} \underline{x} + \underline{W} \underline{y} - \underline{F} = \underline{0} \quad (17)$$

$$\underline{W} \left( \alpha_o \underline{y} + \alpha_l \underline{\dot{y}} + \alpha_2 \underline{\ddot{y}} \right) - \underline{V} \left( \beta_o \underline{x} + \beta_l \underline{\dot{x}} + \beta_2 \underline{\ddot{x}} \right) = \underline{0}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \underline{K}_{ik}^e &= D^e \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\hat{\partial}\Phi_i^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}x} \right)^T \left( \frac{\hat{\partial}\Phi_k^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}x} + \nu^e \frac{\hat{\partial}\Phi_k^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}y} \right) d\Omega + \\ &+ D^e (1-\nu^e) \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\hat{\partial}\Phi_i^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}x} \right)^T \left( \frac{\hat{\partial}\Phi_k^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}y} + \frac{\hat{\partial}\Phi_k^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}x} \right) d\Omega + \\ &+ D^e (1-\nu^e) \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\hat{\partial}\Phi_i^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}y} \right)^T \left( \frac{\hat{\partial}\Phi_k^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}y} + \frac{\hat{\partial}\Phi_k^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}x} \right) d\Omega + \\ &+ D^e \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\hat{\partial}\Phi_i^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}y} \right)^T \left( \nu^e \frac{\hat{\partial}\Phi_k^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}x} + \frac{\hat{\partial}\Phi_k^{e\varphi_1}}{\hat{\partial}y} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\underline{F}_i^e = \iint_{\Omega^e} \left( \Phi_i^{eW} \right)^T q d\Omega, \quad \underline{x}_i^e = \left[ w_i^e, \varphi_{xi}^e, \varphi_{yi}^e \right]^T, \quad \underline{y}_i^e = \left[ y_i^e, m_i^{ex}, m_i^{ey} \right]^T \quad (19)$$

$$\underline{W}_{ik}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \Phi_i^{eW} \right)^T \tilde{\Phi}_k^e d\Omega, \quad \underline{V}_{ik}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \Phi_i^{eW} \right)^T \Phi_k^{eW} d\Omega^e \quad (20)$$

W powyższych wzorach poszczególne symbole oznaczają:  $\underline{K}_{ik}^e$  – macierz sztywności ES,  $\underline{F}_i^e$  – wektor obciążeń węzłowych ES,  $\underline{W}_{ik}^e, \underline{V}_{ik}^e$  – macierze charakteryzujące geometrię ES,  $\underline{x}_i^e, \underline{y}_i^e$  – wektory odpowiednio przemieszczeń i sił ES w węzle  $i$ .

Równania sprzężone (17) można zapisać w formie zintegrowanej:

$$\underline{M} \underline{\ddot{X}} + \underline{C} \underline{\dot{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{P} \quad (21)$$

gdzie:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ -\beta_2 \underline{V} & \alpha_2 \underline{W} \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ -\beta_1 \underline{V} & \alpha_1 \underline{W} \end{bmatrix}, \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{W} \\ -\beta_0 \underline{V} & \alpha_0 \underline{W} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{X}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{y}} \end{bmatrix}, \quad \underline{\ddot{X}} = \begin{bmatrix} \underline{\ddot{x}} \\ \underline{\ddot{y}} \end{bmatrix}$$

Jest to układ równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu. Do jednoznacznego rozwiązania tego układu potrzebne są warunki początkowe (4), (6).

## 5. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RUCHU

Do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych, niejednorodnych (21) stosuje się numeryczną metodę całkowania bezpośredniego Zienkiewicza-Wooda (SSpj). Przy zastosowaniu metod numerycznych układ równań różniczkowych przekształca się w warstwowe układy równań algebraicznych, co przy znanych warunkach początkowych zawsze prowadzi do procedury rekurencyjnej. W metodzie SSpj parametr  $j$  oznacza rząd równania różniczkowego, a  $p \geq j$  - liczbę wyrazów rozwinięcia funkcji (w rozważanym przypadku  $\underline{X} = \underline{X}(t)$ ) w szereg potęgowy. Jeżeli np. zastosujemy wariant metody SS22, to wzory rekurencyjne mają następującą postać [11, 12]:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}^i &= [\underline{M} + \Delta t \Theta_1 \underline{C} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \Theta_2 \underline{K}]^{-1} [\Theta_1 \underline{R}^{i+1} + (1 - \Theta_1) \underline{R}^i - \underline{C} \underline{X}^i - \underline{K} (\underline{X}^i + \Delta t \Theta_1 \underline{X}^i)], \\ \underline{X}^{i+1} &= \underline{X}^i + \Delta t \underline{X}^i + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \underline{\alpha}^i, \\ \underline{\dot{X}}^{i+1} &= \underline{\dot{X}}^i + \Delta t \underline{\alpha}^i, \end{aligned} \quad (23)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, T$ .  $\Delta t$  - przedział czasu (krok całkowania).

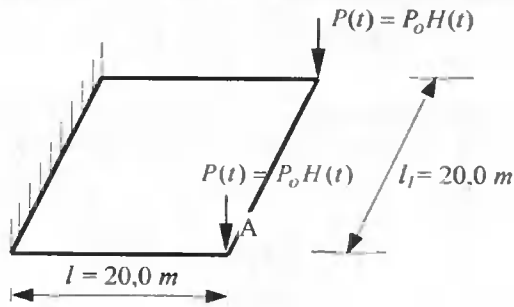
Aby obliczenia rekurencyjne były bezwarunkowo stabilne, to parametry metody  $\Theta_i$  muszą spełniać następujące ograniczenia [11,12]:

$$\Theta_1 \geq 0.5, \quad \Theta_2 \geq \Theta_1 \quad (24)$$

## 6. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

Rozpatrujemy płytę o wymiarach  $l = l_1 = 20 \text{ m}$  i  $h = 1 \text{ m}$ , utwierdzoną na jednym z boków (rys. 4) i obciążoną w dwóch punktach siłami Heaviside'a  $P(t) = P_0 H(t)$ ,

gdzie:  $P_0 = 1000 \text{ N} = 1 \text{ kN}$ ,  $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$ .



Rys. 4. Powierzchnia środkowa płyty rozważanej w przykładzie

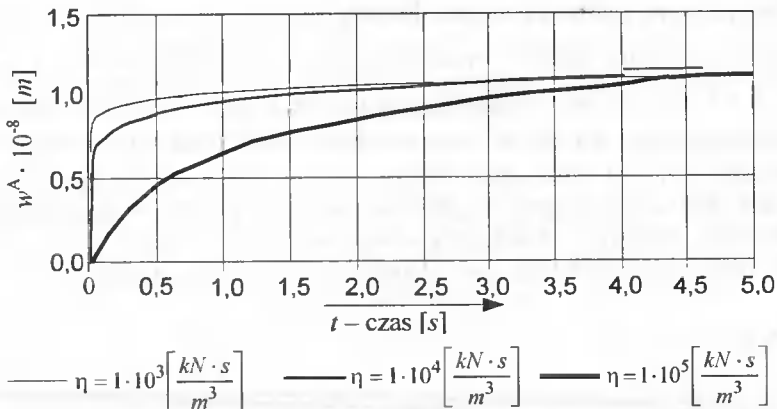
Płytę wykonano z materiału o parametrach  $E = 1 \cdot 10^6 \text{ kPa}$ ,  $\nu = 1/3$ . Płyta będzie rozpatrywana jako konstrukcja oparta kolejno na podłożu o modelu lepkosprężystym Kelvina-Voigta, Maxwella i Zenera. Obliczenia wykonano dla przedziału czasu  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$  oraz dla parametrów metody SS22:  $\Theta_1 = 0,5$  i  $\Theta_2 = 1,0$ . Funkcję kształtu ES przyjęto według [6]. Z otrzymanych wyników wybieramy do analizy przemieszczenia punktu A (rys. 4).

#### Płyta oparta na podłożu o modelu Kelvina-Voigta

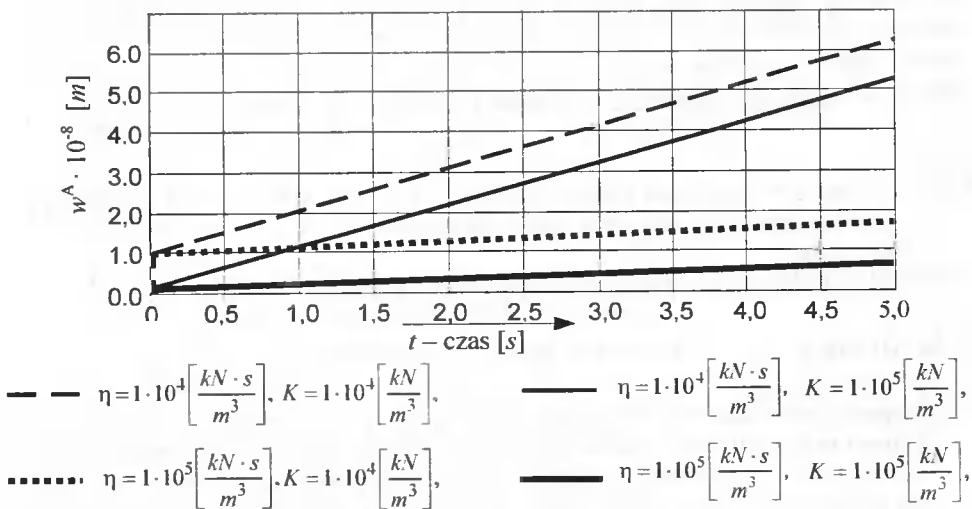
Przyjmujemy stałą wartość współczynnika sprężystości podłoża wynoszącą  $K = 1 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ . Zmieniamy natomiast wartości współczynnika lepkości podłoża  $\eta$  przyjmując kolejno:  $1 \cdot 10^3 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $1 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$  oraz  $1 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ . Dla poszczególnych przypadków badano zmienność przemieszczeń pionowych punktu A w czasie w zależności od wartości współczynnika lepkości. Otrzymane wyniki przedstawione na rysunku 5 wskazują na wpływ pełzania podłoża opisanego modelem Kelvina-Voigta na stan przemieszczeń wybranego punktu płyty.

#### Płyta oparta na podłożu o modelu Maxwella

Przyjmujemy stałą wartość współczynnika sprężystości podłoża wynoszącą  $K = 1 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ . Zmieniamy natomiast wartości współczynnika lepkości podłoża  $\eta$  przyjmując kolejno:  $1 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$  oraz  $1 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ . Następnie przyjmujemy stałą wartość współczynnika lepkości podłoża  $\eta = 1 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ , a zmieniamy wartości współczynnika sprężystości podłoża K przyjmując kolejno:  $1 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$  oraz  $1 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ . Dla poszczególnych przypadków badano zmienność przemieszczeń pionowych punktu A w czasie w zależności od wartości współczynnika sprężystości podłoża K i lepkości  $\eta$ . Otrzymane wyniki, przedstawione na rysunku 6, wskazują na wpływ pełzania podłoża opisanego modelem Maxwella na stan przemieszczeń wybranego punktu płyty.



Rys. 5. Zmienność przemieszczeń pionowych punktu *A* w czasie w zależności od wartości współczynnika lepkości  $\eta$  dla płyty opartej na podłożu o modelu Kelvina-Voigta ( $K = 1 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )



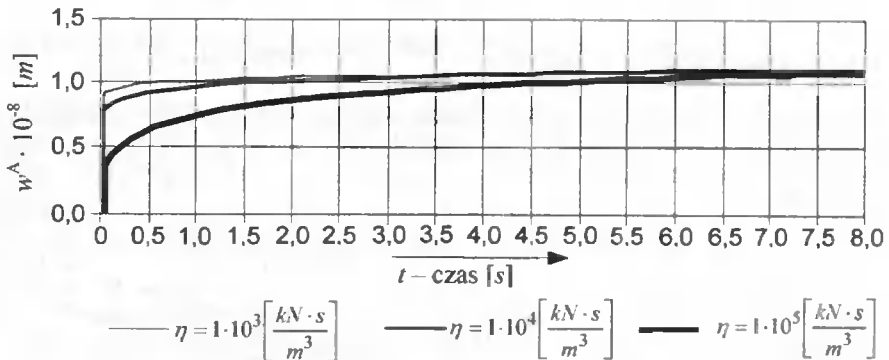
Rys. 6. Zmienność przemieszczeń pionowych punktu *A* w czasie w zależności od wartości współczynnika sprężystości  $K$  i lepkości  $\eta$  dla płyty opartej na podłożu o modelu Maxwella



### Płyta oparta na podłożu o modelu Zenera I

Przyjmujemy stałą wartość współczynnika sprężystości podłoża wynoszącą  $K_1 = K_2 = K = 1 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ . Zmieniamy natomiast wartości współczynnika lepkości  $\eta$  przyjmując kolejno:  $1 \cdot 10^3 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $1 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$  oraz  $1 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Dla poszczególnych przypadków badano zmienność przemieszczeń pionowych punktu  $A$  w czasie w zależności od wartości współczynnika lepkości. Otrzymane wyniki, przedstawione na rysunku 7 wskazują na wpływ pełzania podłoża opisanego modelem Zenera pierwszego rodzaju na stan przemieszczeń wybranego punktu płyty.



Rys. 7. Zmienność przemieszczeń pionowych punktu  $A$  w czasie w zależności od wartości współczynnika lepkości  $\eta$  dla płyty opartej na podłożu o modelu Zenera I ( $K = 1 \cdot 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )

## 7. WNIOSKI

1. W pracy przedstawiono efektywne rozwiązania problemu współdziałania płyty z dowolnym podłożem lepko-sprężystym, w przypadku obciążenia zmieniającego się w czasie i przestrzeni. Związek między reakcją podłoża a przemieszczeniami dla modeli lepko-sprężystych zapisany za pomocą jednego równania różniczkowego rozwiązano przy wykorzystaniu kombinacji dwóch metod: metody elementów skończonych (MES) i metody Zienkiewicza-Wooda (SSpj).
2. Wykonane obliczenia numeryczne, mające charakter ilustracyjny potwierdziły tezę pracy i skuteczność zastosowanego podejścia. Przedstawione wyniki dla poszczególnych modeli podłoża lepko-sprężystego wskazują na wpływ pełzania podłoża na stan przemieszczeń płyty, a co za tym idzie i na stan naprężeń.
3. W przypadku podłoża Kelvina-Voigta przemieszczenia stabilizują się w czasie osiągając określoną wartość przemieszczenia zależną od przyjętej wielkości współczynnika sprężystości podłoża  $K$ . Dla stałej wartości współczynnika sprężystości podłoża  $K$  prędkość stabilizacji przemieszczeń zależy od wartości współczynnika lepkości podłoża (rys. 5). Dla większej wartości  $\eta$  proces ten jest bardziej powolny niż dla wartości mniejszych.

4. W przypadku podłoża o modelu Maxwella przemieszczenia rosną w czasie i nie następuje ich stabilizacja. Dla stałej wartości współczynnika lepkości podłoża  $\eta$  proces ten przebiega wzdłuż prostych równoległych, których kierunek zależy od przyjętej wartości współczynnika sprężystości podłoża  $K$  (rys. 6).
5. W przypadku podłoża Zenera przemieszczenia stabilizują się w czasie, osiągając określoną wartość przemieszczenia zależną od przyjętej wielkości współczynnika sprężystości podłoża  $K_1 = K_2 = K$ . Dla stałej wartości współczynnika sprężystości podłoża  $K_1 = K_2 = K$  przemieszczenia stabilizują się w czasie w zależności od wartości współczynnika lepkości podłoża (rys. 7). Dla większej wartości  $\eta$  proces ten jest bardziej powolny niż dla wartości mniejszych.
6. Uzyskane rozwiązania numeryczne pod względem jakościowym nie są sprzeczne z przewidywanymi wynikami.
7. W pracy zaproponowano algorytm pozwalający na rozwiązanie dowolnie ukształtowanej płyty opartej na podłożu lepkosprężystym. Rozwiązanie takiego zadania wymaga danych w postaci wymiarów płyty, cech fizycznych materiału płyty (stałe sprężystości), funkcji rozkładu obciążeń w czasie i przestrzeni, parametrów funkcyjnych podłoża oraz warunków brzegowych i początkowych. Kontynuacja powyższej tematyki może stanowić kierunek dalszych badań. Wymaga ona jednak skojarzenia badań teoretycznych z badaniami doświadczalnymi dotyczącymi parametrów podłoża, np. gruntowego, czy też innego tworzywa konstrukcyjnego (metal, polimer). Identyfikacja powyższych parametrów pozwoli zaproponować model odwzorowujący dane podłoże.

## LITERATURA

- [1] Zawadzki J., 1984. Własności reologiczne materiałów. Cz. II. Mechaniki Technicznej, t. X, red. W. Szczepański, PWN Warszawa.
- [2] Nowacki W., 1963. Teoria pelzania. Arkady Warszawa.
- [3] Podhorecki A., 1992. Różne postacie równań fizycznych i ośrodków lepkosprężystych. Konferencja „Budownictwo a ochrona środowiska. Nauka, technika, dydaktyka”. Bydgoszcz, 15-31.
- [4] Mitzel A., 1972. Reologia betonu. Arkady Warszawa.
- [5] Kisiel I., 1987. Reologia w budownictwie. Arkady Warszawa.
- [6] Kączkowski Z., 1980. Płyty – Obliczenia statyczne. Arkady Warszawa.
- [7] Derski W., Ziemia S., 1968. Analiza modeli reologicznych. PAN IPPT Warszawa.
- [8] Gryczmański M., 1995. Wprowadzenie do opisu sprężysto-plastycznych modeli gruntów. KILiW PAN, IPPT Warszawa.
- [9] Olszewska B., Kaczyński R., Matysiak S., 2000. Zastosowanie modelowania matematycznego do opisu mechanicznego zachowania się gruntów o różnych mikrostrukturach. Gospodarka Surowcami Mineralnymi 1b/3, 37-68.
- [10] Sobczak-Piastka J., Podhorecki A., 2003. Drgania płyt na podłożu lepkosprężystym. Acta Scientiarum Polonorum ser. Architectura 2(1), 15-30.

- [11] Podhorecki A., 1997. SSPj Method of Numerical Integration Applied for Solving of Differential Equations of Viscoelastic Medium. XIII Polish Conference of Computer Methods in Mechanics, Poznań, Poland. 1083-1090.
- [12] Zienkiewicz O.C., Wood W.L., Hine N.W., 1984. A unified set of single step algorithms. *Int. J. Meth. Eng.* 20, 1529-1552.

## CREEP OF PLATES ON VISCOELASTIC BASIS

### Summary

The subjects of the research are thin plates on creeping viscoelastic basis. Differential equations describing vibrations of a thin plate as well as those which describe viscoelastic basis have been solved by two methods: the finite elements method and the method of Zienkiewicz-Wood. In order to illustrate the correctness of proposed methodology of solution made specific calculations for thin plates on viscoelastic basis and the analysis of the results was performed.

Keywords: plate, viscoelastic basis, creep

## ANALIZA WIBROIZOLATORA GUMOWEGO Z REGULACJĄ SZTYWNOŚCI

Krzysztof Wernerowski

Katedra Mechaniki Stosowanej  
Wydział Mechaniczny ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

Zmienna sztywność wibroizolatora gumowego umożliwia dokładne ustawienie układu do istniejących parametrów drgań. Opracowano nowe rozwiązanie konstrukcyjne wibroizolatora. Działanie polega na wykorzystaniu możliwości ograniczenia kształtowego spęczania objętości bocznej nośnej podkładki gumowej. Analizowano nieliniowe działanie gumy. Opracowano doświadczalno-analityczne wzory określające wielkości charakterystyczne wibroizolatora.

Słowa kluczowe: wibroizolator, guma, sztywność, regulacja, spęczanie

### 1. WSTĘP

Zagadnienie rzeczywistej skuteczności wibroizolacji maszyn i urządzeń mechanicznych jest złożone [2,5,7,8,9,10,12]. Działanie jest uzależnione od kilku parametrów ściśle związanych z analizą drgań [1,3,4,6,11,13,14,15]. Jednym z najważniejszych jest sztywność wibroizolatora:

$$k = \frac{Q}{\delta} \quad \frac{N}{mm} \quad (1.1)$$

gdzie:

$Q$  – obciążenie,

$\delta$  – odkształcenie.

Powszechnie stosowane są rozwiązania o stałej sztywności.

Opracowano nowy wibroizolator gumowy z regulacją sztywności. Istotną zaletą konstrukcji jest możliwość regulacji podczas montażu. Skuteczność wibroizolacji jest funkcją sztywności. Wprowadzono możliwość realnej optymalizacji pracy układu.

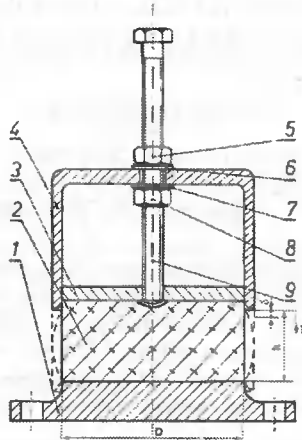
### 2. ANALIZA DZIAŁANIA

Istota nowego rozwiązania konstrukcyjnego wibroizolatora polega na możliwości wykorzystania ograniczenia kształtowego spęczania objętości bocznej nośnej podkładki gumowej.

Wibroizolator gumowy z regulacją sztywności pokazano na rysunku 1. Konstrukcja składa się z: 1 – podstawy, 2 – nośnej podkładki gumowej, 3 – płytki, 4 – tulei re-

gulacyjnej z małym promieniem  $r$ , 5 – nakrętki górnej, 6 – podkładki górnej, 7 – podkładki dolnej, 8 – nakrętki dolnej i 9 – śruby.

Mały promień  $r$  umożliwia płynne przemieszczanie tulei 4 bez uszkodzenia ścianki obwodowej nośnej podkładki gumowej 2 przedstawionego wibroizolatora.



Rys. 1. Wibroizolator gumowy z regulacją sztywności

Guma jest praktycznie materiałem objętościowym nieściśliwym i wobec tego w miarę przesuwania się tulei regulacyjnej odkształcenie objętościowe maleje i sztywność wibroizolatora gumowego rośnie. W skrajnym położeniu dolnym sztywność jest maksymalna.

### 3. OBLICZENIA

Guma zalicza się do wyraźnie nieliniowych materiałów konstrukcyjnych. Charakterystyka (rys. 2) modułu statycznego Younga  $E_{st}$  w zależności od twardości  $H$  gumy wibroizolatora może być określona funkcją empiryczną:

$$E_{st} = aH + bH^2 + cH^3 \quad \text{MPa} \quad (3.1)$$

gdzie:

$a, b, c$  – stałe,

$H$  – twardość w stopniach Shore'a.

Obliczenia szczegółowe zrealizowano programem Mathcad, czyli po działaniu wstępnym:

$$10a + 100b + 1000c = 0,52 \quad (3.2a)$$

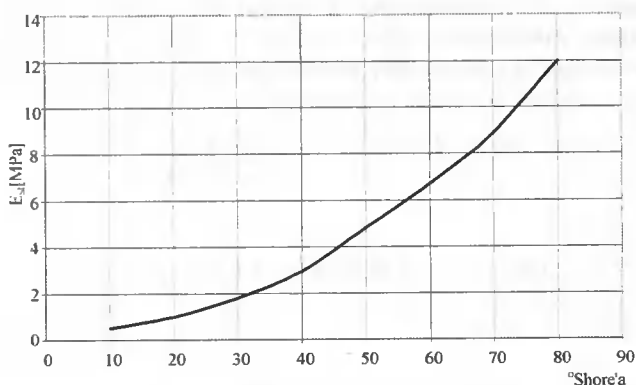
$$50a + 2500b + 12500c = 4,48 \quad (3.2b)$$

$$80a + 6400b + 51200c = 12 \quad (3.2c)$$

$$find(a, b, c) = \left\{ \begin{array}{l} 0,042 \\ 9,2 \times 10^{-4} \\ 5,333 \times 10^{-6} \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

czyli

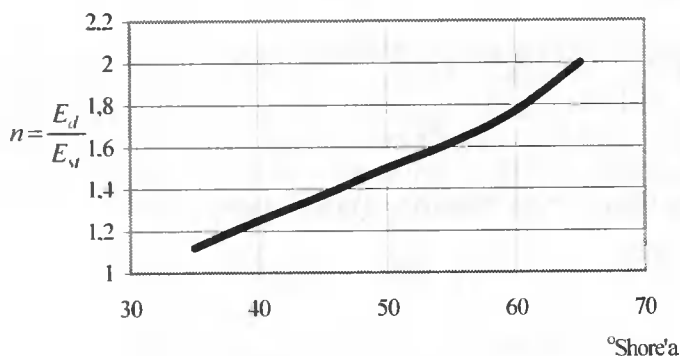
$$E_{st} = 0,042H + 9,2 \times 10^{-4} H^2 + 5,33 \times 10^{-6} H^3 \quad \text{MPa} \quad (3.4)$$



Rys. 2. Wykres modułu statycznego Younga w zależności od twardości gumy wibroizolatora

Analogiczne obliczenia interpolacyjne wykonano dla zależności ilorazu  $n$  modułu dynamicznego Younga  $E_d$  do statycznego (rys. 3):

$$n = 0,048H - 6,872 \times 10^{-4} H^2 + 6,359 \times 10^{-6} H^3 \quad (3.5)$$



Rys. 3. Iloraz  $n$  modułu dynamicznego do statycznego w zależności od twardości gumy

Zrealizowano też analizę empiryczną charakterystyki nieliniowej:

– współczynnika tłumienia w zależności od twardości gumy

$$\gamma = 2,582 \times 10^{-3} H - 2,361 \times 10^{-5} H^2 - 1,526 \times 10^{-6} H^3, \quad (3.6)$$

- obciążenia od ugięcia statycznego  $\delta_{st}$ , w mm

$$Q = 25 \cdot 446 \delta_{st} - 3,964 \delta_{st}^2 + 0,496 \delta_{st}^3 \quad \text{N} \quad (3.7)$$

- statycznego modułu Kirchhoffa od twardości gumy

$$G_{st} = 8,025 \times 10^{-3} H - 5,429 \times 10^{-6} H^2 + 2,29 \times 10^{-6} H^3 \quad \text{MPa} \quad (3.8)$$

Uzyskane wzory doświadczalne z wystarczającą dokładnością określają istotne parametry analizowanej gumy.

Wykonano analizę empirycznej strzałki ugięcia na podstawie (3.7):

$$\delta_{st1} = \frac{1}{3} \left[ -1360 + 27Q + 3(292032 - 8160 \cdot Q + 81Q^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} (+) \\ - 92 \left\{ 3 \left[ -1360 + 27Q + 3(292032 - 8160Q + 81Q^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \right\}^{-i} + 2\frac{2}{3} \quad (3.9a)$$

$$\delta_{st2} = -\frac{1}{6} \left[ -1360 + 27Q + 3(292032 - 8160Q + 81Q^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \\ + \frac{46}{3 \left[ -1360 + 27Q + 3(292032 - 8160Q + 81Q^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}} + 2\frac{2}{3} + \\ + \frac{1}{2} i \sqrt{3} \left\{ \frac{1}{3} \left[ -1360 + 27Q + 3(292032 - 8160Q + 81Q^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \right\} + \quad (3.9b)$$

$$+ \frac{92}{3 \left[ -1360 + 27Q + 3(292032 - 8160Q + 81Q^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\delta_{st3} = \dots - \frac{1}{2} i \sqrt{3} \left\{ \dots \right\}^{\frac{1}{3}} + 92 \left[ \dots \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.9c)$$

Podczas obliczeń istotna jest dynamiczna strzałka ugięcia  $\delta_d$ .  
Na podstawie (3.4.5):

$$E_{d1} = n \cdot E_{st} \quad (3.10)$$

czyli:

$$\begin{aligned}
 E_{d1} &= (0,048H - 6,872 \times 10^{-4} H^2 + 6,359 \times 10^{-6} H^3) \cdot \\
 &\cdot (0,042H + 92 \times 10^{-4} H^2 + 5,33 \times 10^{-6} H^3) = \\
 &= 2,016 \cdot 10^{-3} H^2 + 1,52976 \cdot 10^{-5} H^3 - 1,09306 \cdot 10^{-7} H^4 + \\
 &+ 2,187504 \cdot 10^{-9} H^5 + 3,389347 \cdot 10^{-11} H^6
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Mimo zastosowania komputera obliczenia na podstawie wzorów empirycznych są stosunkowo uwikłane liczbowo. Wobec tego podczas obliczeń gumy stosuje się metodykę obliczeniową wspomaganą wynikami określonymi metodyką analityczną.

Do ważnych wielkości wibracyjnych zaliczają się strzałki podkładki gumowej:

$$\delta = \frac{Q}{F} \int_0^h \frac{dy}{E}
 \tag{3.12}$$

gdzie:

$F$  – pole.

Ugięcie statyczne jest następujące:

$$\delta_{st} = \frac{4Qh}{\pi D^2 (0,042H + 9,2 \cdot 10^{-4} H^2 + 5,33 \cdot 10^{-6} H^3)} \text{ mm}
 \tag{3.13}$$

Analogicznie określono ugięcie dynamiczne:

$$\begin{aligned}
 \delta_{d1} &= 4Qh \left[ \pi D^2 (2,016 \cdot 10^{-3} H^2 + 1,52976 \cdot 10^{-5} H^3 - 1,09306 \cdot 10^{-7} H^4 + \right. \\
 &\left. + 2,187504 \cdot 10^{-9} H^5 + 3,389347 \cdot 10^{-11} H^6) \right]^{-1} \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Wysokość  $h$  podkładki gumowej określona jest na podstawie kilku warunków konstrukcyjnych. Staramy się wyeliminować zjawisko wyraźnie reologiczne. Występujące naprężenia dynamiczne nie mogą być przyczyną odkształceń trwałych i pełzania. Graniczna wartość dopuszczalnego naprężenia wynosi około 0.7 MPa. Eliminujemy też niebezpieczeństwo naderwań lub rozszczepień gumy. Grubość podkładki musi zapewniać możliwość ugięcia statycznego. Oczywiście uwzględnia się kształt podkładki gumowej.

Wysokość głównego elementu wibroizolatora określona jest (3.9a) dla strzałki ugięcia  $\delta_{st1}$ .

$$\left\{ \frac{1}{3} \left[ -1360 + 27Q + 3(292032 - 8160Q + 81Q^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \right\} (+)
 \tag{3.15}$$



$$-92 \left\{ 3 \left[ -1360 + 27Q + 3 \left( 292032 - 8160Q + 81Q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \right\}^{-1} + 2 \frac{2}{3}$$

Wartości zespolone (3.9b,c) strzałki ugięcia  $\delta_{st,3}$  nie posiadają znaczenia praktycznego.

Podczas pierwszej części projektowania istotne jest wstępne określenie wibroizolatora gumowego. Zabezpieczając się przed negatywnymi zjawiskami reologicznymi przyjmuje się:

$$\delta_{st} \approx 0,19h \quad (3.16)$$

Grubość podkładki nośnej wynosi:

$$h \approx 5,3 \left( 0,048H - 6,872 \cdot 10^{-4} H^2 + 6,359 \cdot 10^{-6} H^3 \right) \delta_d \quad (3.17)$$

W zależności od procesu wulkanizacji, polegającego na tworzeniu się wiązań siarkowych pomiędzy makrocząsteczkami kauczuku, lub procesów syntetycznych uzyskuje się miękkie gumy o twardości do 55° twardości Shore'a i twarde powyżej wymienionej granicy. Nacisk jednostkowy dla mieszanek miękkich powinien wynosić  $\leq 0,35$  MPa, natomiast dla twardych  $\leq 0,55$  MPa. Oczywiście guma nie może być zbyt miękka lub twarda. W praktyce stosuje się materiał z przedziału 30÷70° twardości Shore'a. Zakres dopuszczalnych temperatur jest znaczny i wynosi w przybliżeniu  $-20 \div 70^\circ\text{C}$ . Gumę można łatwo połączyć z metalem metodą wulkanizacji. Zaletą jest możliwość dużej eliminacji energii mechanicznej. Wibroizolator gumowy z możliwością regulacji sztywności zapewnia skuteczną eksploatację nawet podczas zmian parametrów drgań w procesach technologicznych.

#### 4. PODSUMOWANIE

Istnieje kilka zalet rozwiązania konstrukcyjnego wibroizolatora gumowego z regulacją sztywności. Posiada sprawną regulację i zabezpieczenie przed samoczynnym luzowaniem się połączeń śrubowych. Wibroizolator umożliwia dokładniejszą realizację wibroizolacji maszyn oraz urządzeń mechanicznych. Istotne jest dodatkowe strojenie izolacji podczas eksploatacji. Obliczenia potwierdziły skuteczność działania.

Można nastawiać częstość drgań swobodnych wibroizolatora. Regulacja sztywności zapewnia wyższą skuteczność wibroizolacji.

Rozwiązanie wibroizolatora gumowego zostało zgłoszone w Urzędzie Patentowym.

#### LITERATURA

- [1] Beranek L.L., 1971. Noise and Vibration Control. Mc Graw-Hill. New York.
- [2] Cempel Cz., 1978. Wibroakustyka stosowana. PWN Warszawa-Poznań.

- [3] Crede C.E., 1957. *Vibration and Shock Isolation*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [4] Den Hartog J.P., 1973. *Drgania mechaniczne*. WNT Warszawa.
- [5] Goliński J., 1979. *Wibroizolacja maszyn i urządzeń*. WNT Warszawa.
- [6] Harris C.M., Crede C.E., 1961. *Shock and Vibration Handbook*. Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New York.
- [7] Jacobsen L.S., Ayre R.S., 1958. *Engineering Vibration*. Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New York.
- [8] Jureczak E., 1974. *Wpływ wibracji na ustrój*. PZWL Warszawa.
- [9] Kisiel I., 1957. *Dynamika fundamentów pod maszyny*. PWN Warszawa.
- [10] Lippert S., 1963. *Human Vibration Research*. Pergamon Press Oxford.
- [11] Macduff J.N., Curreri J.R., 1960. *Drgania w technice*. PWT Warszawa.
- [12] Mykientad N.O., 1956. *Fundamentals of Vibration Analysis*. Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New York.
- [13] Praca zbiorowa pod red. Z. Osinińskiego, 1997. *Tłumienie drgań*. PWN Warszawa.
- [14] Thomson W.T., 1954. *Mechanical Vibrations*. Prentice-Hall, Inc., New York.
- [15] Wernerowski K., 1999. *Kinematyka i dynamika*. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz.

## ANALYSIS OF RUBBER VIBROINSULATOR WITH REGULATED STIFFNESS

### Summary

Rubber insulator variable stiffness makes the accurate system setting to vibration existing vibration parameters possible. New vibroinsulator constructional solution was done. Functioning is results of rubber pad bound up-setting from side possibility. Non-linear rubber action was analysed. Experimental-analytical formulas of vibroinsulator characteristic quantities were elaborated.

Keywords: vibroinsulator, rubber, stiffness, regulation, upsetting



## BADANIE MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI PRZY ZGINANIU PŁYT DREWNOPOCHODNYCH O STRUKTURZE WARSTWOWEJ

Arnold Wilczyński, Marek Kociszewski

Instytut Techniki  
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego  
ul. Chodkiewicza 30. 85-064 Bydgoszcz

Przedstawiono badanie modułu sprężystości przy zginaniu warstw płyty wiórowej i płyty MDF. Moduł warstwy zewnętrznej jest znacznie większy niż moduł warstwy wewnętrznej: 3,7 razy dla płyty wiórowej i 2,3 razy dla płyty MDF. Wartości modułu sprężystości litych płyt obliczone na podstawie modułów sprężystości ich warstw są w przybliżeniu równe wartościom wyznaczonym eksperymentalnie.

Słowa kluczowe: płyta wiórowa, MDF, warstwy płyty, moduł sprężystości

### 1. WSTĘP

Płyty drewnopochodne są materiałami niejednorodnymi. Technologia ich produkcji sprawia, że warstwy przypowierzchniowe charakteryzują się większym stopniem sprasowania, a tym samym większą gęstością niż warstwy wewnętrzne. Takie zróżnicowanie warstw zwiększa efektywność wytrzymałościową płyty przy jej zginaniu, kiedy to sztywniejsze i bardziej wytrzymałe warstwy zewnętrzne odgrywają decydującą rolę. Warstwowa budowa takich płyt drewnopochodnych, jak płyta wiórowa i pilśniowa determinuje anizotropię ich właściwości. Właściwości mechaniczne przy zginaniu płyty zależą od kierunku jej obciążania, od tego czy płyta jest zginana siłami prostopadłymi, czy też równoległymi do płaszczyzn płyty. W tym drugim przypadku właściwości te osiągają niższe wartości [9].

Elementy konstrukcyjne wykonane z płyty wiórowej lub pilśniowej są jednak poddawane przede wszystkim zginaniu siłami prostopadłymi do płyty. Ważne jest więc poznanie takich właściwości mechanicznych płyty, jak moduł sprężystości przy zginaniu i wytrzymałość na zginanie. Właściwości te zależą od wielu czynników, w tym od czynników materiałowych, technologicznych, wilgotności i temperatury. W tym zakresie przeprowadzono wiele badań i można stwierdzić, że problem właściwości mechanicznych przy zginaniu płyt drewnopochodnych jest dobrze rozpoznany. Niedostateczna natomiast jest wiedza o właściwościach mechanicznych warstw tych płyt. Poznanie tych właściwości pozwoli na dokładniejsze obliczenia wytrzymałościowe elementów wykonanych z płyt drewnopochodnych, w tym na analizę naprężeń w tych elementach, szczególnie w miejscach ich połączeń. Ponadto umożliwi optymalizację struktury i dobór odpowiednich parametrów procesu technologicznego płyty [5].

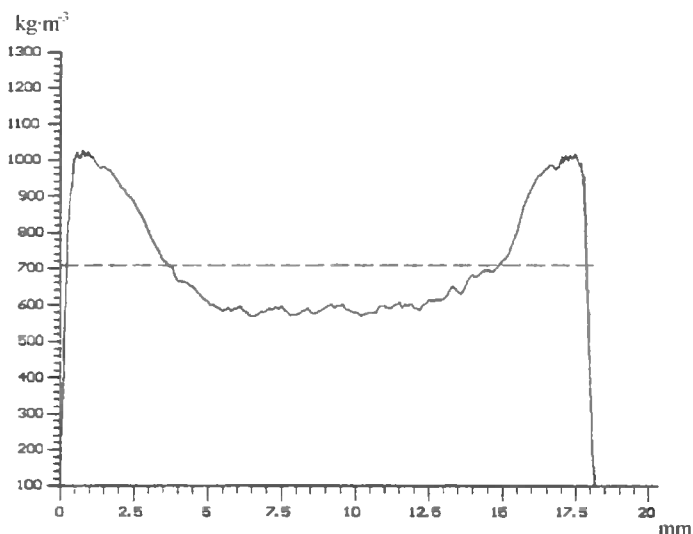
Znajomość właściwości sprężystych warstw płyt drewnopochodnych pomoże w stosowaniu teorii zginania układów warstwowych dla tych płyt. Teorią tą w odnie-

sieniu do płyty wiórowej po raz pierwszy posłużył się Keylwerth [3], a na celowość jej stosowania wskazują m.in. Bodig i Jayne [1] oraz Hänsel i in. [2]. Warto dodać, że teoria ta została poszerzona przez Platha [6], a następnie przez Xu [12]. Badacze ci uwzględnili fakt ciągłej, a nie skokowej, zmiany gęstości płyty na jej grubości, posługując się tzw. profilem gęstości płyty. Badania eksperymentalne nad wpływem tego profilu na właściwości płyt wiórowych przeprowadzili Wong i in. [11].

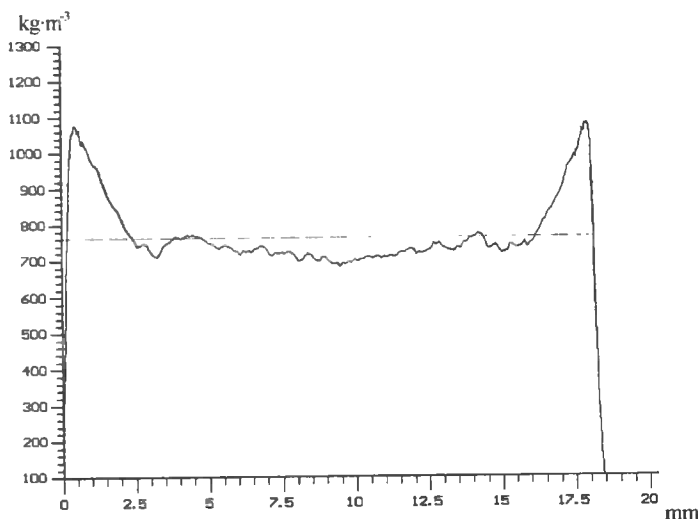
Jedynie znane badania właściwości mechanicznych warstw wyodrębnionych z płyty drewnopochodnej to badania Keylwertha [3] sprzed ponad 40. lat. W związku z dużymi zmianami w technologii wytwarzania tych płyt nasuwa się pytanie: jakie są właściwości mechaniczne płyt drewnopochodnych produkowanych obecnie. W związku z tym w Instytucie Techniki Akademii Bydgoskiej podjęto badania mające na celu wyznaczenie właściwości mechanicznych przy zginaniu warstw typowych, drewnopochodnych materiałów płytowych. Część wyników tych badań, dotyczących płyty wiórowej, przedstawiono w pracy [4]. Celem badań prezentowanych w niniejszej pracy było wyznaczenie modułu sprężystości przy zginaniu warstw dwóch płyt drewnopochodnych: wiórowej oraz pilśniowej o średniej gęstości MDF (Medium Density Fibreboard).

## 2. METODYKA BADAŃ

Badaniom poddano trzywarstwową płytę wiórową meblową, odpowiadającą wymogom PN-EN 312-3, o średniej gęstości  $705 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  i wilgotności 7,0% oraz płytę MDF o średniej gęstości  $760 \text{ kg}/\text{m}^3$  i wilgotności 6,9%. Oba badane materiały były płytami surowymi, niekleinowanymi, o grubości 18 mm. Sporządzono dla nich profile gęstości, przedstawiające rozkład gęstości na przekroju poprzecznym płyty, wzdłuż jej grubości (rys. 1 i 2). Posłużono się w tym celu izotopowym miernikiem gęstości V2.09 firmy ATR.

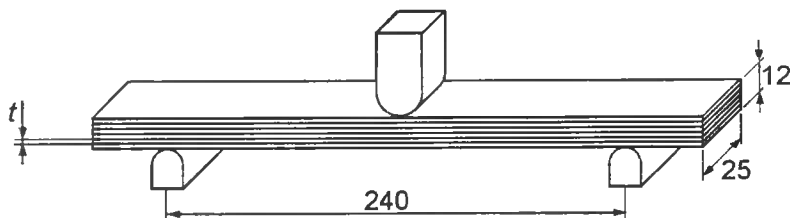


Rys. 1. Profil gęstości płyty wiórowej



Rys. 2. Profil gęstości typowej płyty MDF

Próbki do badań wykonano z jednego arkusza danej płyty. Z części arkusza wyodrębniono, poprzez odpowiednią obróbkę mechaniczną, pasma warstw płyty. Z pozostałej części arkusza wycięto próbki do badania płyty traktowanej jako układ monolityczny. Dla pasm warstwy zewnętrznej płyty wiórowej przyjęto grubość równą 2 mm, zapewniającą udział w jej budowie jedynie mikrowiórów. Taką samą grubość, zdeterniowaną profilem gęstości (rys. 2) miały pasma warstwy zewnętrznej płyty MDF. Pasma warstwy zewnętrznej płyt sklejało na grubość, używając kleju polioctanowinyłowego, w pakiety, z których następnie wycinano próbki przedstawione na rysunku 3. Dla pasma warstwy wewnętrznej tak płyty wiórowej, jak i MDF przyjęto grubość 12 mm. Próbki do określania modułu sprężystości warstwy wewnętrznej były monolityczne, miały takie same wymiary (rys. 3), jak próbki warstwy zewnętrznej. Próbki litej płyty, zgodnie z PN-EN 310 [7], miały wymiary: 18 x 50 x 410 mm. Osie wszystkich próbek były równoległe do kierunku formowania kobierca płyty. Przygotowano po 30 próbek warstwy zewnętrznej i wewnętrznej oraz litej płyty.

Rys. 3. Próbkę do określania modułu sprężystości przy zginaniu warstw zewnętrznych płyty ( $t$  – grubość warstwy zewnętrznej)

Moduł sprężystości przy zginaniu płyt i ich warstw oznaczano zgodnie z PN-EN 310 [7] według schematu przedstawionego na rysunku 3, przy rozstawie podpór równym 20-krotnej grubości próbki.

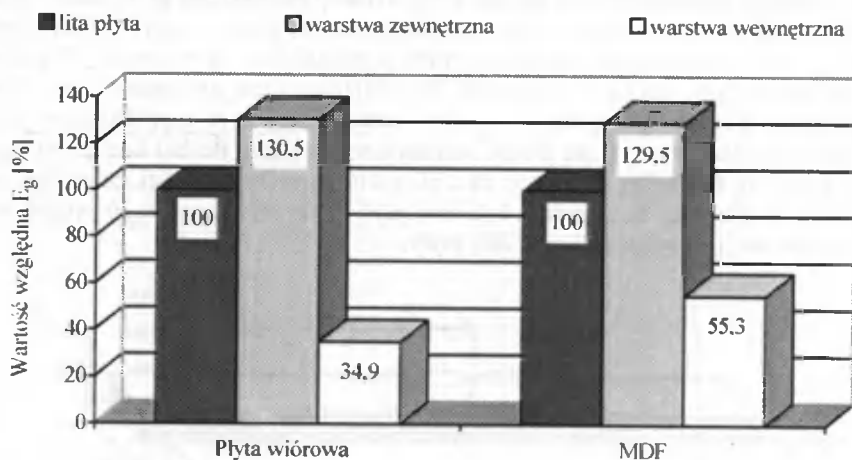
### 3. WYNIKI BADAŃ

Wyniki badań – wartości średnie i współczynniki zmienności modułu sprężystości przy zginaniu dla warstwy zewnętrznej i wewnętrznej płyty oraz dla płyty litej zestawiono w tabeli 1. Wartości modułu sprężystości przy zginaniu warstw zewnętrznych płyty wiórowej i MDF znacznie przewyższają jego wartości dla warstwy wewnętrznej, odpowiednio 3,7 i 2,3 razy. Płyty wiórowe cechuje więc wyraźnie większe zróżnicowanie sprężystości jej warstw.

Tabela 1. Wyniki badań modułu sprężystości przy zginaniu płyty wiórowej i MDF oraz ich warstw

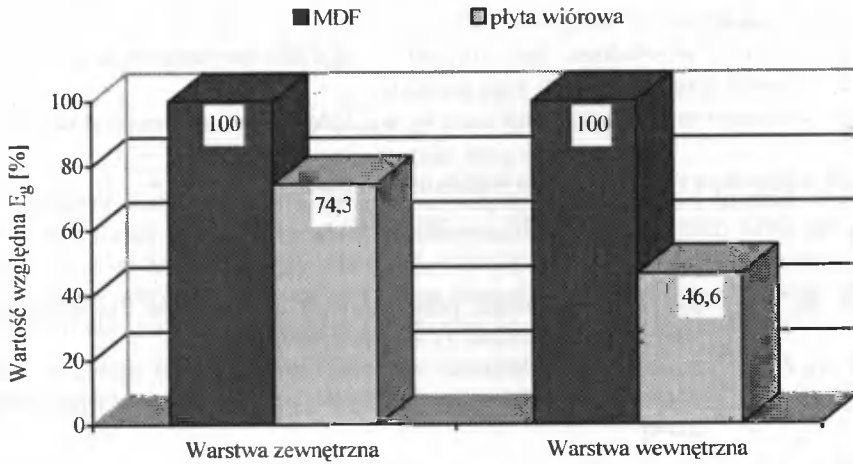
Materiał	Płyta wiórowa		MDF	
	wartość średnia [MPa]	współczynnik zmienności [%]	wartość średnia [MPa]	współczynnik zmienności [%]
Warstwa zewnętrzna	3850	14.4	5180	2.7
Warstwa wewnętrzna	1030	6.7	2210	8.0
Lita płyta	2950	4.2	4000	1.6

Interesujące jest porównanie modułu sprężystości płyty i jej warstw przedstawione na rysunku 4. Dla płyty wiórowej moduł warstwy zewnętrznej jest o 30,5% większy, zaś moduł warstwy wewnętrznej aż o 65,1% mniejszy od modułu sprężystości płyty. W przypadku płyty MDF różnice te są mniejsze i wynoszą odpowiednio: 29,5 i 44,7%.



Rys. 4. Porównanie modułu sprężystości płyty i jej warstw

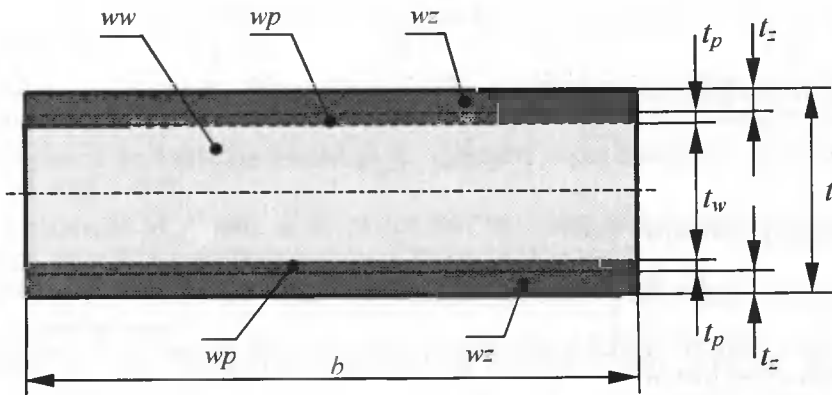
Na rysunku 5 porównano moduł sprężystości obu badanych płyt w ramach poszczególnych warstw. Moduł sprężystości warstwy zewnętrznej płyty wiórowej jest o 25,7% mniejszy od modułu warstwy zewnętrznej płyty MDF. Dla warstwy wewnętrznej różnica ta jest ponad dwukrotnie większa i wynosi 53,4%.



Rys. 5. Porównanie modułu sprężystości płyt przy zginaniu

#### 4. WERYFIKACJA WYNIKÓW BADAŃ

Potraktujmy płytę drewnopochodną jako układ warstwowy, zakładając jednorodność warstw [1,3]. Przyjmijmy model układu warstwowego przedstawiony na rysunku 6. Jest to model pięciowarstwowy, w którym oprócz warstw zewnętrznych o grubości  $t_z$  i warstwy wewnętrznej o grubości  $t_w$ , występują warstwy pośrednie o grubości  $t_p$ .



Rys. 6. Przekrój poprzeczny pasma płyty drewnopochodnej:  $wz$  – warstwy zewnętrzne,  $ww$  – warstwa wewnętrzna,  $wp$  – warstwa pośrednia.  $b$  – szerokość rozpatrywanego pasma płyty

Zgodnie z teorią zginania układów warstwowych sztywność zginania pasma płyty o szerokości  $b$  jest równa sumie sztywności jej warstw:

$$EI = \sum E_i I_i \quad (1)$$



gdzie:

$E$  – moduł sprężystości płyty,

$I$  – moment bezwładności przekroju płyty względem osi obojętnej przekroju,

$E_i$  – moduł sprężystości  $i$ -tej warstwy płyty,

$I_i$  – moment bezwładności  $i$ -tej warstwy względem osi obojętnej przekroju.

Ze względu na symetrię układu warstwowego mamy:

$$EI = 2E_z I_z + 2E_p I_p + E_w I_w \quad (2)$$

gdzie:

$E_z, E_p, E_w$  – moduły sprężystości przy zginaniu odpowiednio dla warstw zewnętrznych, pośrednich i warstwy wewnętrznej,

$I_z, I_p, I_w$  – momenty bezwładności względem osi obojętnej przekroju odpowiednio dla warstw zewnętrznych, pośrednich i warstwy wewnętrznej.

Uwzględniając wzory na momenty bezwładności:

$$I = \frac{bt^3}{12} \quad (3)$$

$$I_z = \frac{1}{2} \frac{b}{12} [t^3 - (t - 2t_z)^3] \quad (4)$$

$$I_p = \frac{1}{2} \frac{b}{12} [(t - 2t_z)^3 - t_w^3] \quad (5)$$

$$I_w = \frac{b}{12} t_w^3 \quad (6)$$

oraz wprowadzając oznaczenia:

$$\lambda_z = \frac{2t_z}{t}, \quad \lambda_w = \frac{t_w}{t} \quad (7)$$

otrzymujemy następujący wzór:

$$E = E_z [1 - (1 - \lambda_z)^3] + E_p [(1 - \lambda_z)^3 - \lambda_w^3] + E_w \lambda_w^3 \quad (8)$$

pozwalający obliczyć moduł sprężystości  $E$  płyty przy danych modułach sprężystości i grubościach jej warstw.

Grubości warstw do obliczeń analitycznych ustalono na podstawie profili gęstości badanych płyt (rys. 1 i 2). Przyjęto jednakowe dla obu płyt grubości warstw:  $t_z = 2,0$  mm,  $t_w = 12,0$  mm. Wynika stąd, że grubość warstw pośrednich wynosiła  $t_p = 1,0$  mm.

Pozostaje jeszcze dobrać wartość modułu sprężystości  $E_p$  warstw pośrednich. Z dużym przybliżeniem przyjęto:

$$E_p = \frac{1}{2} (E_z + E_w) \quad (9)$$

Po uwzględnieniu wyznaczonych eksperymentalnie wartości  $E_z$  i  $E_w$  (tabela 1), otrzymano ze wzoru (8) moduły  $E_{wiór}$  i  $E_{MDF}$  będące zastępczymi modułami sprężystości odpowiednio płyty wiórowej i MDF:

$$E_{wiór} = 2770 \text{ MPa.}$$

$$E_{MDF} = 4040 \text{ MPa.}$$

Powyższe wartości modułu sprężystości różnią się od wartości średnich określonych na podstawie bezpośredniego eksperymentu, wynoszących 2950 MPa dla płyty wiórowej i 4000 MPa dla płyty MDF. Niewielkie, bo wynoszące odpowiednio: 6.1 i 1.0% różnice względne tych wartości mogą stanowić potwierdzenie słuszności stosowania teorii układów warstwowych w odniesieniu do płyt drewnopochodnych.

## 5. WNIOSKI

1. Trzywarstwowa meblowa płyta wiórowa oraz płyta MDF charakteryzują się znacznym zróżnicowaniem właściwości mechanicznych swych warstw.
2. Warstwy zewnętrzne mają moduł sprężystości przy zginaniu blisko cztery razy (w przypadku płyty wiórowej) i ponad dwa razy, w przypadku MDF, większy niż warstwy wewnętrzne płyt.
3. Przy badaniu właściwości warstw płyty wiórowej może być przydatna teoria zginania układów warstwowych.

## LITERATURA

- [1] Bodig J., Jayne B., 1982. Mechanics of wood and wood composites. Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- [2] Hänsel A., Niemz P., Wagenführ R., 1988. Beziehungen zwischen Struktur und Eigenschaften von Vollholz und Holzwerkstoffen. Teil 3. Holztechnologie 29.
- [3] Keylwerth R., 1958. Zur Mechanik der mehrschichtigen Spanplatte. Holz als Roh und Werkstoff 16.
- [4] Kociszewski M., Warmbier K., Wilczyński M., 2002. Właściwości mechaniczne przy zginaniu warstw płyty wiórowej. Przemysł Drzewny 2.
- [5] Kühne G., Niemz P., 1980. Untersuchungen zur Struktur von Spanplatten. Holztechnologie 21.
- [6] Plath E., 1971. Beitrag zur Mechanik der Holzspanplatten. Holz als Roh und Werkstoff 29.
- [7] PN-EN 310, 1994. Płyty drewnopochodne. Oznaczanie modułu sprężystości przy zginaniu i wytrzymałości na zginanie.
- [8] PN-EN 312-3, 2000. Płyty wiórowe. Wymagania techniczne. Wymagania dla płyt do wyposażenia wnętrz (łącznie z meblami) użytkowanych w warunkach suchych.
- [9] Tydryszewski K., Wilczyński M., 2001. Właściwości mechaniczne przy zginaniu płyt drewnopochodnych siłami równoległymi do płaszczyzn płyty. Przemysł Drzewny 3.

- [10] Wilczyński M., Warmbier K., Kociszewski M., 2002. Mechanical properties in bending of medium density fibreboard as heterogeneous material. *Annals of Warsaw Agricultural University, Forestry and Wood Technology*, Special number 1, 3.
- [11] Wong E.D., Zhang M., Wang Q., Kawai S., 1997. Formation of the density profile and its effects on the properties of particleboard. *Wood Science and Technology* 33.
- [12] Xu W., 1999. Influence of vertical density distribution on bending modulus of elasticity of wood composite panels: a theoretical consideration. *Wood and Fiber Science* 31.

## INVESTIGATION OF MODULUS OF ELASTICITY IN BENDING OF WOOD BASED BOARDS WITH MULTI-LAYER STRUCTURE

### Summary

Investigation of the elastic modulus in bending of the layers of particleboard and medium density fibreboard (MDF) is presented. The modulus of the face layer is much bigger than that of the core layer: 3.7 times for particleboard and 2.3 times for MDF. The elastic modulus of solid boards was calculated on the basis of the moduli of their layers. The values of this modulus are approximately equal to the values determined experimentally.

Keywords: particleboard, MDF, board layers, modulus of elasticity

## MODELOWANIE KINETYKI RÓWNOCZESNEGO ROZPADU AUSTENITU NA DWA PRODUKTY

Tadeusz Z. Woźniak

Institut Techniki  
Zakład Inżynierii Materiałowej  
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego  
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

W artykule opisano model przemiany bainitycznej uwzględniający zakres bainitu dolnego w stalach wysokowęglowych, które wykazują efekt swing back w pobliżu temperatury  $M_s$ . Przedstawiono analizy dotyczące zarodkowania subplytek. W założeniach do modelu przyjęto, że wzrost subplytek ma charakter logarytmiczno-potęgowy. W celu obliczenia ułamka objętościowego składników  $f_{B1}$  i  $f_{B2}$  zastosowano wzory łączące wzrost rzeczywistej objętości składników z ich bieżącym przyrostem uwzględniającym wzajemne zderzenia cząstek. Model ten uwzględnia równoczesny rozpad austenitu na dwa produkty. W procedurach optymalizacyjnych zastosowanych do wyznaczenia współczynników równań wykorzystano wyniki badań dylatometrycznych i analiz ilościowych składników mikrostrukturalnych.

Słowa kluczowe: bainit, swing back, subplytka, kinetyka, modelowanie

### 1. WSTĘP

Wzrost objętości podczas przemiany w stanie stałym opisywany był przy zastosowaniu klasycznej teorii Johnsona-Mehla-Avramiego, która została przedstawiona przez Christiana [1]. Istotny rozwój teorii Johnsona-Mehla-Avramiego nastąpił w wyniku prac S.J. Jonesa i H.K.D.H. Bhadeshia [2]. Doprowadziło to w efekcie do możliwości opisu przemian wielokrotnych prowadzących do mikrostruktury zawierającej ferryt allotriomorficzny, ferryt Widmanstättena, perlit [3]. Przemiany wielokrotne występują także w stalach wysokowęglowych w zakresie przyspieszonego początku przemiany, co wynika z oddziaływania midribu. Obejmuje on obszar temperatur powyżej i poniżej  $M_s$ . Przyspieszenie początku przemiany w pobliżu temperatury  $M_s$  zostało potwierdzone badaniami dylatometrycznymi na stalach 0.85÷1.8%C oraz badaniami mikrostrukturalnymi przez Okamoto i Oka [4,5]. Efekty przyspieszenia interpretowano wpływem midribu na przemianę bainityczną, który jest martenzytem cienkoplytkowym. Przyspieszenie początku przemiany w obszarze temperatur zbliżonych do  $M_s$  najwyraźniej zaznacza się do około 25% przemiany. Krzywe CTP odpowiadające więcej niż 50% przemiany wykazują tylko nieznaczne objawy anormalnej kinetyki, co związane jest w dalszym etapie z tworzeniem bainitu.

Mikrostruktura bainitu składa się z drobnych płytek ferrytu i węglików, tworzących skupiska znane jako wiązki. Wewnątrz każdej wiązki płytki są równoległe

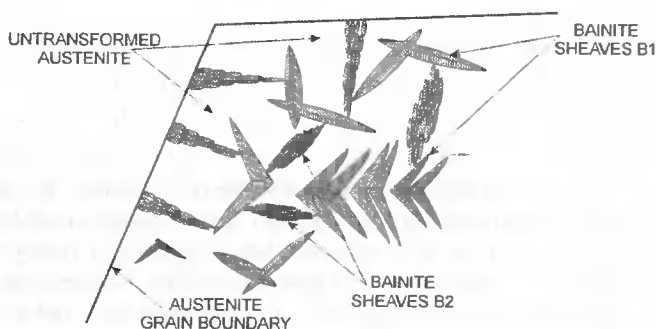
i o identycznej orientacji krystalograficznej, z których każda ma ściśle określoną płaszczyznę habitus. Drobne płytki wewnątrz wiązki są nazwane subpłytkami. Ich grubość wynosi zwykle ułamek mikrometra. Zagadnienia dotyczące wpływu różnych czynników na szerokość subpłytek i grubość płytek są w niewielkim stopniu rozpoznane.

W niniejszej pracy podjęto próbę stworzenia modelu przemiany bainitycznej w zakresie przyspieszonego początku przemiany. Przyjęto parametry związane z geometrią subpłytki. Określono względne zmiany geometryczne subpłytek w funkcji czasu przemiany przy różnych temperaturach. Wzajemne nakładanie się różnych reakcji rozpadu stworzyło możliwość zastosowania modelu wielokrotnych przemian.

## 2. MODEL CAŁKOWITEJ KINETYKI PRZEMIANY ZE WZROSTEM LOGARYTMICZNO-POTĘGOWYM

### 2.1. Analiza zarodków w wiązce bainitu oraz założenia do modelu

Przemiana bainityczna zwykle rozpoczyna się na granicach ziaren austenitu poprzez zarodkowanie i wzrost pojedynczych płytek bainitu. Przemieszczenie, które zachodzi podczas wzrostu przedstawia zmianę kształtu, które jest odkształceniem z dużą składową odkształcenia równoległą do płaszczyzny habitus. Wzrost płytek jest zahamowany przez skupisko dyslokacji utworzone wówczas, gdy następuje plastyczna akomodacja wywołana zmianą kształtu. Płytki w ten sposób rosną do ograniczonego rozmiaru. Dalsza przemiana zachodzi poprzez tworzenie nowych równoległych płytek w skupiskach zwanych wiązkami [6-8], które przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Model tworzenia dwóch różnych morfologii bainitu B1 (butterfly) i B2 (wiązki) z subjednostkami w kształcie elipsoidy

W dotychczasowych modelach przyjmuje się, że kinetyka wzrostu i mechanizm zarodkowania subpłytek we wszystkich wiązkach są takie same. Badania wykonane przez G. Spanosa, H.S. Fanga, H.I. Aaronsona [9] wskazują na inny mechanizm zarodkowania subpłytek. Pojedyncza i w znacznym stopniu wolna od węglików płytka tworzy na początku „kręgosłup” (spine) całej wiązki bainitu. Następnie powstają subpłytki, przeważnie na jednej stronie, które leżą około 55 do 60 stopni w stosunku do wzdłużnej osi. Subpłytki te tworzą się w wyniku efektu autokatalizy, polegającego na samozarodkowaniu dyslokacji podczas generacji odkształceń sprężystych spowodowanych zmianą kształtu.

Wzajemne nakładanie się różnych reakcji rozpadu w zakresie swing back stwarza podstawy do zastosowania w modelu zróżnicowanego mechanizmu zarodkowania, wynikającego z różnej gęstości defektów i prowadzącego do wzrostu dwóch różnych wiązek. W modelu oznaczono je jako B1 oraz B2. Przyjmujemy, że dwa składniki strukturalne B1 i B2 wydzielają się w tym samym czasie z sąsiadującej fazy, którą stanowi austenit. Szybkość zarodkowania wiązek oznaczono odpowiednio jako  $I_1$  oraz  $I_2$ . Na wiązkę składają się takie fazy, jak: subpłytki ferrytu bainitycznego rozdzielone warstwami austenitu szczątkowego lub cementytu oraz wydzielenia cementytu wewnątrz subpłytek. W poniższym modelu warstwy austenitu szczątkowego stanowią obszar fazy macierzystej. Węgliki tworzące się podczas przemiany bainitycznej są metastabilne, w wyniku czego zachodzą kolejne reakcje wydzielania z różnymi szybkościami, które są trudne do zamodelowania. Uwzględniając powyższe okoliczności oraz wynikające z tego ograniczenia analitycznego scałkowania wyrażeń, kinetykę zarodkowania i wzrostu węglików połączono z kinetyką subpłytek. Zarodkowanie subpłytek określone jest przez  $I_{B1}$  oraz  $I_{B2}$ . Pociąga ono za sobą zjawiska autokatalizy prowadzące w konsekwencji do ukształtowania wiązeki. Założono, że zjawiska te opisane są przez współczynniki  $A_1$  oraz  $A_2$ . W wyniku tego zmiana szybkości zarodkowania subpłytek w wiązkach opisana jest odpowiednio przez wyrażenia:  $I_{B1} \cdot (1 + A_1 \cdot f)$ , oraz  $I_{B2} \cdot (1 + A_2 \cdot f)$ , gdzie  $f$  oznacza ułamek przemiany. Całkowity proces zarodkowania wiązek opisano odpowiednio jako:

$$I_1 = I_{B1} (1 + A_1 \cdot f) \quad (1)$$

oraz dla wiązki B2 jako:

$$I_2 = I_{B2} (1 + A_2 \cdot f) \quad (2)$$

Wiadomo, że subpłytki rosną bez dyfuzji, a pewna ilość węgla przechodzi do austenitu szczątkowego [10,11]. Stąd szybkość wzrostu indywidualnych subjednostek jest dużo wyższa niż szybkość wydłużania dla całych wiązek [11-16]. Całkowita kinetyka przemiany obejmuje równoczesny wzrost i zderzenia wielu subjednostek, a w dalszej kolejności również wiązek. Ponieważ czas wymagany dla wzrostu subjednostek jest względnie mały w stosunku do czasu wymaganego dla zarodkowania kolejnych subjednostek [11,12], dlatego w modelu założono, że czas tworzenia subpłytek jest nieskończenie mały. Założenie to prowadzi w konsekwencji do modelu, w którym zmiana parametrów geometrycznych w funkcji czasu dotyczy nie indywidualnej subpłytki, lecz geometrii kolejno tworzących się subpłytek, których wzrost zachodzi w czasie  $t = 0$ .

Przyjęto, że w obu przedstawionych mechanizmach przemiany subjednostki w kształcie elipsoidy są elementarnym składnikiem budowy. W przypadku składnika strukturalnego oznaczonego jako B1 subpłytki tworzą wiązkę według modelu zaproponowanego przez G. Spanosa i wsp. [9]. Przecinające się dwie takie wiązki tworzą w efekcie końcowym obserwowaną morfologię butterfly. W przypadku składnika strukturalnego oznaczonego jako B2 subpłytki tworzą wiązkę według modelu klasycznego, zaproponowanego przez H.K.D.H. Bhadeshia i wsp. [7,8,11].

Oznaczmy stałe szybkości wzrostu dla wiązki B1 w kierunku „a” i „c” przez  $G_{B11}$  i  $G_{B12}$ , a szybkość zarodkowania przez  $I_{B1}$ . Podobnie dla wiązki B2 przyjmujemy oznaczenia  $G_{B21}$  i  $G_{B22}$  oraz  $I_{B2}$ . W modelu zakładamy, że grubości kolejnych subpłytek w wiązkach B1 są funkcją wykładniczą logarytmu czasu  $u = (G_{B11})^{ln t}$ , natomiast ich długości są funkcją potęgową  $v = (G_{B12}) t^{n1}$ , podobnie dla wiązki B2,  $u = (G_{B21})^{ln t}$  oraz

$c = (G'_{B22})t'^{n_2}$ . Założenie takie przyjęto w wyniku wcześniej przeprowadzonych obliczeń dla różnych wariantów funkcji, określających grubość i długość subpłytek. Na podstawie procedur optymalizacyjnych zastosowanych do wyznaczenia współczynników równań stwierdzono, że przyjęte funkcje pozwalają uzyskać rozwiązania przy najmniejszych błędach. Objętość subpłytek „w” bairitu B1 i B2 w czasie  $t = \tau$ , po uwzględnieniu powyższych założeń określona jest wzorami (3) i (4):

$$w_{B1\tau} = \left(\frac{4}{3}\pi\right) [G_{B11} \ln(t-\tau)]^2 \cdot [G_{B12}' \cdot (t-\tau)]^{n_1} \quad (3)$$

analogicznie

$$w_{B2\tau} = \left(\frac{4}{3}\pi\right) [G_{B21} \ln(t-\tau)]^2 \cdot [G_{B22}' \cdot (t-\tau)]^{n_2} \quad (4)$$

## 2.2. Kinetyka przemiany dla dwóch równoczesnych reakcji rozpadu

Wzrost objętości wynikający z zarodkowania subpłytek B1 w przedziale czasu  $t = \tau$  do  $t = \tau + d\tau$  dany jest równaniem (5):

$$dV_{B1}^c = w_{B1\tau} \cdot I_{B1} \cdot V' \cdot d\tau \quad (5)$$

Po podstawieniu (3) do (5) otrzymujemy:

$$V_{B1}^c = \frac{4\pi V'}{3} \int_{\tau=0}^{\tau=t} I_{B1} \cdot G_{B11}^2 \ln^2(t-\tau) \cdot G_{B12}' (t-\tau)^{n_1} d\tau \quad (6)$$

w równaniu (6) przyjęto, że  $G_{B12}' = (G_{B12}')^{n_1}$ .

Stosując metodę podstawiania i zmieniając granice całkowania otrzymujemy ostatecznie wzór (7):

$$V_{B1}^c = -\frac{4\pi V'}{3} \int_{u=t}^{u=0} I_{B1} \cdot G_{B11}^2 \ln^2(u) \cdot G_{B12}' \cdot (u)^{n_1} du \quad (7)$$

W celu scałkowania równania (7) stosujemy następne podstawienie zakładając, że  $\ln(u) = x$ :

$$V_{B1}^c = -\frac{4\pi V'}{3} \int_{x=\ln t}^{x=-\infty} I_{B1} \cdot [G_{B11}^2 \cdot \text{Exp}(n_1 + 1)]^x \cdot dx \quad (8)$$

Przyjmujemy, że  $G_{B11}^2 \cdot \text{Exp}(n_1 + 1) = C_1$ . Po podstawieniu, scałkowaniu i uwzględnieniu granic otrzymujemy równanie (9):

$$V_{B1}^c = \frac{4\pi V'}{3} G_{B12}' I_{B1} \frac{1}{\ln C_1} \cdot \text{Exp}[\ln(C_1) \cdot \ln(t)] \quad (9)$$

Postępując analogicznie jak wyżej otrzymamy dla bairitu B2 następujący wzór:

$$V_{B2}^c = \frac{4\pi V}{3} G_{B22} I_{B2} \frac{1}{\ln C_2} \cdot \text{Exp}[\ln(C_2) \cdot \ln(t)] \quad (10)$$

gdzie:

$$C_2 = G_{B21}^2 \cdot \text{Exp}(n_2 + 1)$$

Z równań (9) oraz (10) wynika, że bardzo istotne parametry  $I_{B1}$  oraz  $I_{B2}$  mogą być wyznaczone tylko łącznie ze stałymi szybkości wzrostu w kierunku długości  $G_{B12}$  oraz  $G_{B22}$  jako ich iloczyn. W związku z tym w procedurach optymalizacyjnych przyjęto oznaczenia  $G_{B12} I_{B1} = b_1$  oraz  $G_{B22} I_{B2} = b_3$ .

W celu obliczenia ułamka objętościowego składników  $f_{B1}$  i  $f_{B2}$  stosujemy wzory łączące wzrost rzeczywistej objętości składników z ich bieżącym przyrostem (hipotetycznym ułamkiem przedłużonym). Wzory te wynikają z pojęć „przedłużonego” ułamka przemiany –  $y_i$  i „przedłużonej” powierzchni międzyfazowej –  $S_i$ . Są to odpowiednio objętość i powierzchnia międzyfazowa, jaką posiadałyby cząstki nowej fazy, gdyby wzrastały bez zderzeń i mogły zarodkować w całej objętości próbki łącznie z obszarami które doznały już przemiany. Pojęcia te wynikają z następujących założeń Johnsona i Mehla wprowadzonych do opisu zależności  $y$  od  $t$  dla izotermicznego rozpadu austenitu: zarodkowanie i wzrost cząstek nowej fazy bieżą równolegle w trakcie całego czasu przemiany, rozmieszczenie zarodków w objętości fazy wyjściowej jest całkowicie przypadkowe, prędkość zarodkowania jest stała, cząsteczki nowej fazy zarodkują i rosną w kształcie kul, a liniowa prędkość wzrostu nie zmienia się z czasem. Z całkowitej powierzchni przedłużonej wszystkich sferycznych cząstek jedynie pewien jej ułamek nie znajduje się wewnątrz innych cząstek. Jest to ta część powierzchni przedłużonej, która rzeczywiście może się przemieszczać dając wkład w przyrost ułamka przemiany –  $f$ . W wyniku zastosowania powyższych związków dla przypadków równoczesnego rozpadu austenitu na dwa produkty otrzymujemy:

$$\frac{4}{3} \pi b_1 \frac{1}{\ln C_1} \text{Exp}[\ln(C_1) \cdot \ln(t)] = - \frac{1}{1+k} \ln[1 - f_{B1}(1+k)] \quad (11)$$

Po uporządkowaniu obu stron otrzymujemy:

$$f_{B1} = \frac{1}{1+k} \left\{ 1 - \text{Exp} \left[ - \frac{4}{3} \pi (1+k) \cdot b_1 \cdot \frac{1}{\ln C_1} \cdot \text{Exp}(\ln(C_1) \cdot \ln(t)) \right] \right\} \quad (12)$$

Uwzględniając wprowadzone oznaczenia  $b_1$  i  $C_1$  oraz  $b_3$  i  $C_2$  otrzymujemy:

$$f_{B1} = \frac{1}{1+k} \left( 1 - \text{Exp} \left[ \frac{-4\pi(1+k) \cdot G_{B12} I_{B1}}{3 \ln(G_{B11}^2 \cdot \text{Exp}(n_1 + 1))} \cdot \text{Exp}(\ln(G_{B11}^2 \cdot \text{Exp}(n_1 + 1)) \cdot \ln(t)) \right] \right) \quad (13)$$

$$f_{B2} = \left( \frac{k}{1+k} \right) \left( 1 - \text{Exp} \left[ \frac{-4\pi(1+k) \cdot G_{B22} I_{B2}}{3 \ln(G_{B21}^2 \cdot \text{Exp}(n_2 + 1))} \cdot \text{Exp}(\ln(G_{B21}^2 \cdot \text{Exp}(n_2 + 1)) \cdot \ln(t)) \right] \right) \quad (14)$$

W wyniku przeprowadzonych obliczeń dla stałych szybkości wzrostu w kierunku grubości subplytek dla wiązek B1 i B2 otrzymano odpowiednio wyniki  $G_{B11} = 1$  oraz



$G_{B21} = 1$ . Wyniki te świadczą o tym, że grubości kolejno tworzących się subplytek są stałe. Uwzględniając te wyniki otrzymamy uproszczone formy równań (13) oraz (14):

$$f_{B1} = \frac{1}{1+k} (1 - \text{Exp} [ -\frac{4}{3} \pi G_{B12} I_{B1} (\frac{1+k}{n_1+1}) \cdot t^{n_1+1} ] ) \quad (15)$$

$$f_{B2} = \frac{k}{1+k} (1 - \text{Exp} [ -\frac{4}{3} \pi \cdot G_{B22} I_{B2} \frac{1+k}{k(n_2+1)} \cdot t^{n_2+1} ] ) \quad (16)$$

Równania (15) oraz (16) podobne są do równań Avramiego z wartością wykładniczą  $n+1$ . Współczynnik  $k$  łączy tutaj równoczesne wydzielanie dwóch składników strukturalnych, oznaczonych na rysunku 1 jako B1 i B2.

Uwzględniając we wzorach (15) i (16) procesy zarodkowania wynikające z autokatalizy, prowadzące w konsekwencji do ukształtowania wiązki, opisane przez współczynniki  $A_1$  oraz  $A_2$ , otrzymamy ostatecznie:

$$f_{B1} = \frac{1}{1+k} (1 - \text{Exp} [ -\frac{4}{3} \pi G_{B12} I_{B1} (1 + A_1 \cdot f) (\frac{1+k}{n_1+1}) \cdot t^{n_1+1} ] ) \cdot \quad (17)$$

$$f_{B2} = \frac{k}{1+k} (1 - \text{Exp} [ -\frac{4}{3} \pi G_{B22} I_{B2} (1 + A_2 \cdot f) (\frac{1+k}{k(n_2+1)}) \cdot t^{n_2+1} ] ) \quad (18)$$

### 3. PROCEDURA EKSPERYMENTALNA

Do badań jako materiał modelowy zastosowano stal PN-EN11E. Stal została dostarczona w postaci prętów walcowanych o wymiarach 30 x 50 mm w stanie zmiekkczonym z jednego wytopu przemysłowego. Analizę składu chemicznego przeprowadzono na urządzeniu Spectrolab. W celu wykonania krzywych kinetycznych podczas hartowania z przemianą izotermiczną w zakresie temperatur zbliżonych do  $M_s$  oraz sporządzenia wykresu CTPi obrazującego zakres przyspieszonego początku przemiany przeprowadzono badania dylatometryczne oraz uzupełniające z zakresu analizy ilościowej udziału bainitu dolnego oraz austenitu szczytkowego określonego za pomocą wagi magnetycznej. Badania dylatometryczne wykonano na dylatometrze Adamel 1 homargy 04, przy powiększeniach wynoszących 1000x i 2000x. W zależności od stopnia przemiany bainitycznej stosowano bazy czasowe od 2 s/cm do 20 min/cm. Do badań stosowano próbki płaskie o grubości 0,5 mm, długości 12 mm i szerokości 3 mm. Austenitację próbek dylatometrycznych przeprowadzono w piecu dylatometru przy temperaturze 950°C przez 30 minut z dokładnością rejestracji 5°C. Warunki takie spowodowały całkowite rozpuszczenie cementytu w austenicie. Próbki nagrzewano z szybkością 10 K/s. Hartowanie z przemianą izotermiczną przeprowadzono przy temperaturach od 130 do 250°C. Wybór takiego zakresu wynikał z występowania wyłącznie bainitu dolnego w górnym obszarze temperatur oraz przyspieszonego początku przemiany w dolnym obszarze temperatur. Chłodzenie próbek z temperatury austenitacji do temperatur hartowania z przemianą izotermiczną realizowano poprzez nadmuch helu, którego przepływ regulowany był zaworem elektromagnetycznym sterowanym programatorem. Pomiar temperatury odbywał się za pomocą termopary NiCr-Ni zgrzanej z próbką.

Do określenia udziału objętościowego bainitu użyto mikrokomputerowy analizator mikrostruktury VFG-512, w którym zastosowano program wykorzystujący metodę siecznych przypadkowych. Podczas analizy mikrostruktur wydzielono na obrazach tyle pól pomiarowych, aby uzyskać w sumie ok. 1000 cięciw. Wartości udziałów ilościowych fazy bainitycznej oraz udziałów austenitu szczątkowego w próbkach dylatometrycznych umożliwiły właściwą ocenę ułamka objętości produktu w funkcji czasu podczas hartowania z przemianą. Do tej oceny ilościowej wykorzystano dodatkowo wykresy dylatometryczne.

W celu oddzielenia krzywych kinetycznych dla obu równoczesnych reakcji rozpadu  $f_{B1} = f_1(k, n_1, A_1, b_1, t)$  oraz  $f_{B2} = f_2(k, n_2, A_2, b_2, t)$ , zachodzących podczas przemiany bainitycznej wykorzystano, wyznaczone eksperymentalnie (metodą dylatometryczną), kompleksowe krzywe kinetyczne podczas hartowania z przemianą izotermiczną. Dane eksperymentalne zapisano w tablicy jednowymiarowej zawierającej czasy  $t_m[i]$  oraz odpowiadające im udziały ilościowe  $f_m[i]$ . Zastosowanie tablic jednowymiarowych umożliwiło wykorzystanie zmiennych oznaczonych jako  $t$  oraz  $f$ , odnoszących się do czasu i odpowiadającemu ułamkowi przemiany z takim samym wskaźnikiem tablicy. Ponieważ obie funkcje  $f_{B1}$  oraz  $f_{B2}$  wyrażone są złożonymi wzorami algebraicznymi, dlatego ich obliczenie było czasochłonne.

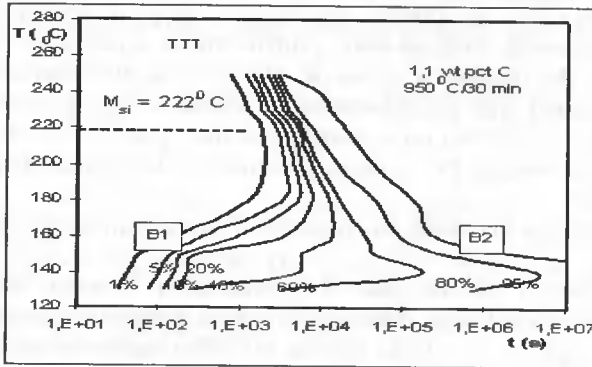
W zadaniu aproksymującym jako kryterium zgodności sumy obu funkcji (17) i (18) z wynikami eksperymentalnymi przyjęto metodę najmniejszych kwadratów. Do realizacji obliczeń napisano program komputerowy w języku C++, który następnie przetworzono do postaci obiektowej w programie Delphi. Dane wejściowe  $f_m[i]$  oraz  $t_m[i]$  są wprowadzane do programu w postaci plików tekstowych. Możliwa jest jednocześnie realizacja obliczeń na kilku plikach, jednak ogranicza to poważnie szybkości obliczeń i stanowi duże obciążenie dla procesora.

Jako wielkość zakresu niepewności dla każdego z parametrów przyjęto szerokości kroków w zadaniu optymalizacyjnym, przy których otrzymano minimalny błąd kwadratowy  $S$ . Dodawanie kolejnych kroków do początkowej wartości przedziału umożliwiało poszukiwanie rozwiązań w tym przedziale. Szerokości kroków zawężano kolejno w miarę otrzymywania coraz mniejszych błędów kwadratowych. Błędy doświadczalne związane z pomiarami  $t_m[i]$  oraz  $f_m[i]$  oraz błędy wynikające z przyjętych kroków obliczeniowych podczas poszukiwania współczynników obu funkcji  $f_{B1}$  oraz  $f_{B2}$  uwzględniono w analizach rachunku błędów wykonanego metodą różniczki zupełnej. Rozwiązanie zadania polegało na znalezieniu współczynników obu funkcji umożliwiających obliczenie ułamków  $f_{B1}$  oraz  $f_{B2}$ .

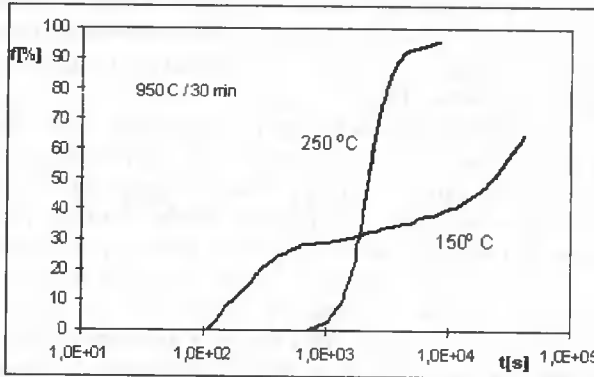
#### 4. WYNIKI BADAŃ

Na podstawie krzywych kinetycznych, dla badanej stali, zbudowano fragment wykresu CTP, dla różnych stopni przemiany. Wykres ten przedstawiono na rysunku 2a) [17,18]. Na wykresie tym zakres przyspieszonego początku przemiany, zaznacza się w sposób bardzo wyraźny w pobliżu  $M_s$ , podobnie jak w pracach Okamoto i Oka [19,20]. Czas inkubacji przemiany bainitycznej wzrasta z obniżaniem temperatury od 250°C do 220°C, natomiast w miarę dalszego obniżania temperatury od 200°C do 130°C (powyżej  $M_s = 117^\circ\text{C}$ ) czas inkubacji maleje.

a)



b)



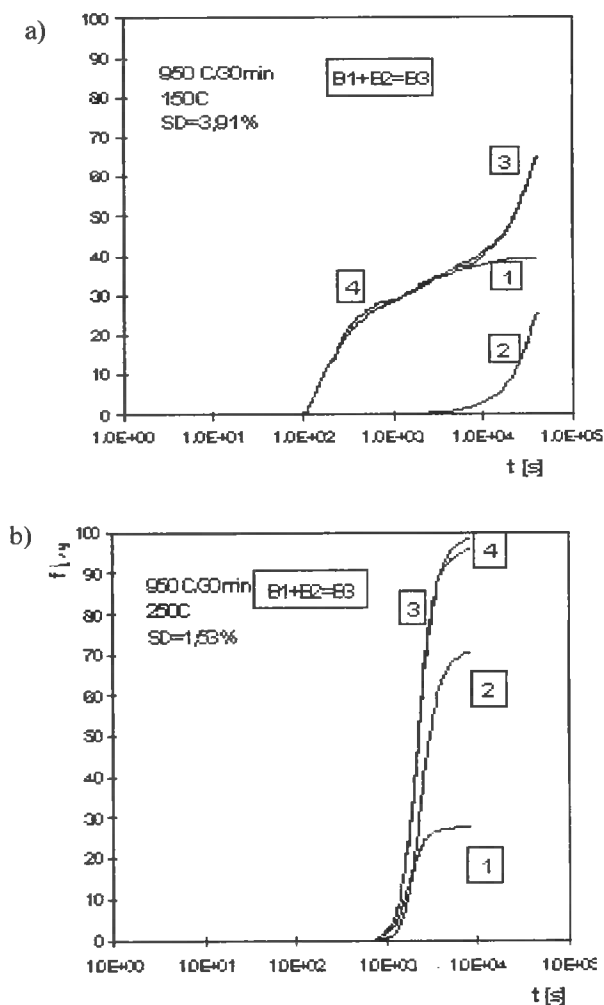
Rys. 2. a) fragment wykresu CTP z zakresem przyspieszonego początku przemiany w temperaturach zbliżonych do  $M_s$ . b) przykładowe krzywe kinetyczne przy temperaturach przemiany izotermicznej 150°C i 250°C [22]

W badaniach wcześniejszych [19-21] potwierdzono, że w zakresie swing back przemiana ma charakter dwustopniowy. W etapie pierwszym powstaje bainit dolny z midribem BDM, a w drugim bainit dolny „klasyczny” DB. Identyfikacji tej dokonano na podstawie badań mikrostrukturalnych i obliczeń całkowitej energii aktywacji przemiany.

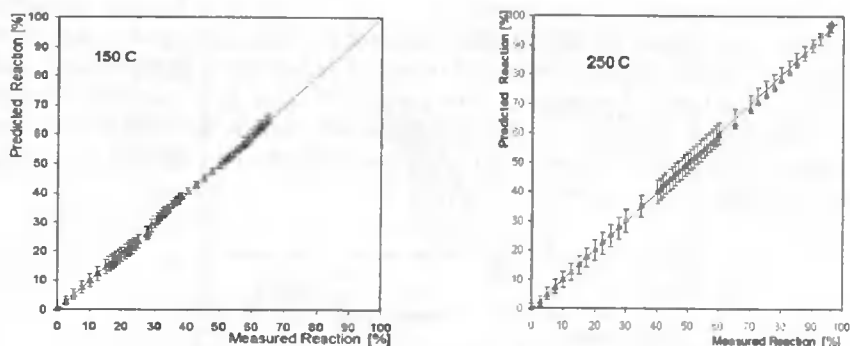
Badania dylatometryczne oraz wyniki badań uzupełniających umożliwiły wykonanie krzywych kinetycznych przemiany austenitu podczas hartowania z przemianą izotermiczną w zakresie temperatur 130-250°C.

Na rysunku 2b) pokazano dwie charakterystyczne krzywe kinetyczne przemiany austenitu podczas hartowania z przemianą izotermiczną w temperaturze 150 i 250°C. Po hartowaniu przy temperaturze 150°C po 41031 s stopień przemiany wynosił 0,65, natomiast po hartowaniu w temperaturze 250°C po 8394 s stopień przemiany wynosił 0,96. Krzywa kinetyczna przy 250°C ma typowy charakterystyczny kształt sigmoidalny. Na krzywej kinetycznej przy 150°C zaznacza się zjawisko przyspieszonego początku przemiany oraz złożony charakter przemiany, wynikający z równoczesnego występowania reakcji rozpadu z tworzeniem składników strukturalnych B1 i B2.

Na podstawie obliczeń otrzymano równania, za pomocą których wykreślono krzywe kinetyczne osobno dla dwóch reakcji rozpadu  $f_{B1}$  oraz  $f_{B2}$ . Krzywe te wyznaczono dla różnych temperatur rozpadu austenitu i oznaczono na rysunku 3 odpowiednio numerami 1 oraz 2. Numerem 4 oznaczono dane eksperymentalne  $f_m$ , a numerem 3 wartości przewidywane  $f_p$ . Na rysunku 4a) i 4b) przedstawiono wyniki rachunku błędów naniesione na dane przewidywane z obliczeń na podstawie funkcji  $f_p$ , będącej sumą funkcji  $f_{B1}$  oraz  $f_{B2}$  dla obu reakcji rozpadu.



Rys. 3. Rozkład doświadczanych krzywych kinetycznych 4 przy temperaturach przemiany 130°C – 250°C na dwie krzywe dla B1 i B2, oznaczone 1 i 2 według modelu równoczesnych reakcji. Krzywa modelowa 3 stanowi sumę krzywych 1 i 2



Rys. 4. Błędy maksymalne obliczone metodą różniczki zupełnej, oznaczone na wykresach wartości przewidywanych i mierzonych przy temperaturze przemiany 150°C i 250°C

## 5. DYSKUSJA WYNIKÓW

Na rysunku 2b) pokazano przykładowe krzywe kinetyczne przy różnych temperaturach przemiany. Kształt krzywej przy niższej temperaturze przemiany wskazuje wyraźnie na złożony proces rozpadu austenitu wynikający ze zmian szybkości zarodkowania. Prowadzi to w konsekwencji do tworzenia bainitu o morfologii wiązek i butterfly. Taki kształt krzywych kinetycznych potwierdzony był wcześniej w innych badaniach [19-21]. Na rysunku 2a) przedstawiono wykres CTP<sub>i</sub>, na którym wyraźnie zaznacza się zakres, w którym występuje zjawisko przyspieszonego początku przemiany. Występowanie zmian w kinetyce przemiany bainitycznej w obszarze niskotemperaturowym powyżej i poniżej  $M_s$  powoduje, że krzywe na wykresie CTP<sub>i</sub> przybierają kształt litery S. Pomimo, że taki kształt wykresów był wielokrotnie potwierdzany w literaturze, to przyczyny wywołujące to zjawisko oraz mechanizmy przemian nie zostały w pełni wyjaśnione. Znaczne osiągnięcia w badaniach dotyczących występowania zjawiska przyspieszonego początku przemiany (swing back) osiągnęli H. Okamoto i M. Oka oraz T.Z. Woźniak, J. Jelenkowski [20,22,23]. Stwierdzili oni, że w zakresie przyspieszonego początku przemiany na początku tworzy się midrib, który jest martenzytem cienkopłytkowym i poprzedza tworzenie bainitu dolnego. Zjawisko to jest powszechne i zaznacza się wyraźnie w stalach wysokowęglowych przy temperaturach przemiany zbliżonych do  $M_s$ .

Krzywą kinetyczną opisującą przebieg przemiany, w której dominuje morfologia związana z występowaniem midribu, oznaczono na rysunku 3a) znacznikiem 1; opisuje ją równanie  $f_{B1} = f_1(k, n_1, A_1, b_1, t)$ . Krzywa ta odpowiada za wyraźne przyspieszenie związane z wpływem midribu w dolnym zakresie zbliżonym do  $M_s$ . Krzywa kinetyczna przy wyższych temperaturach przemiany – 250°C (rys. 3b) ma typowy kształt sigmoidalny, co mogłoby sugerować jednorodny typ przemiany w całym zakresie. Jednak przedstawione wyniki obliczeń pokazują, że ta krzywa, pomimo modelowego kształtu, w rzeczywistości jest również złożona z dwóch oddzielnych krzywych. Wyniki te potwierdzają, że również w zakresie bainitu dolnego występuje pewna niejednorodność strukturalna. Można to wyjaśnić występowaniem lokalnych obszarów austenitu metastabilnego o zróżnicowanej koncentracji węgla, co wynika z mechanizmu przemiany bainitycznej. W analizie tych niejednorodności należy uwzględnić współczynniki  $n_1$  i  $n_2$ , które stanowią informację o zmianach długości kolejnych subplytek, dla każdego

produktu przemiany  $f_{B1}$  oraz  $f_{B2}$ . W wyniku obliczeń otrzymano ujemne wartości współczynników  $n_1$  malejące w miarę wzrostu temperatury, co świadczy o spadku długości subplytek w produktach przemiany opisanych krzywymi 1 na rysunku 3. Wyniki te potwierdzają koncepcję morfologiczną Spanosa i wsp. [7], dotyczącą mechanizmu przemiany bainitycznej przy wyższych (250°C) temperaturach przemiany. Według tej koncepcji zarodkowanie płytek wtórnych ferrytu zachodzi poprzecznie do inicjującej płytki ferrytu, nazwanej „kręgosłupem” (spine), a kolejne subplytki są coraz krótsze. Można więc przypuszczać, że krzywa 1 na rysunku 3b dotyczy bainitu dolnego tworzącego się według powyższego mechanizmu. Współczynniki  $n_2$  rosną w miarę wzrostu temperatury, co wskazuje, że kolejne subplytki są coraz dłuższe. Można przypuszczać, że jest to związane z tworzeniem klasycznych wiązek bainitu, co opisane jest krzywymi 2 na rysunku 3a oraz na rysunku 3b.

W równaniach opisujących kinetykę rozpadu austenitu występują współczynniki  $G_{B11}$  oraz  $G_{B21}$ . Współczynniki te oznaczają stałe szybkości wzrostu w kierunku grubości subplytek odpowiednio dla wiązek B1 i B2. Ostatnio opublikowano dane [24] na temat pogrubiania subplytek bainitu w zależności od wytrzymałości austenitu, temperatury i chemicznej siły napędowej niezbędnej dla zarodkowania jako niezależnych czynników. Stwierdzono, że grubość płytki jest niezależna od temperatury przemiany przy ustalonym poziomie wytrzymałości austenitu i siły napędowej  $\Delta G_{max}$ . Wyniki niniejszych badań wskazują, że współczynniki  $G_{B11}$  oraz  $G_{B21}$  przyjmują wartości stałe równe jedności. Analizując równania (3) oraz (4) można przypuszczać, że występuje stała grubość subplytek przy badanych temperaturach przemiany w obu składnikach strukturalnych oznaczonych jako B1 i B2.

Szybkości przemian 1 i 2 przy temperaturze przemiany 250°C są zbliżone, natomiast bardzo różne przy temperaturze 150°C. Takie zróżnicowanie w szybkościach przemian przy niższych temperaturach wynika prawdopodobnie z wpływu midribu na szybkość zarodkowania subplytek bainitu. W konsekwencji prowadzi to do utworzenia bainitu o morfologii butterfly, oznaczonego na modelowym rysunku 1 jako B1. Produkt przemiany  $f_{B1}$  przy niższych temperaturach dotyczy w zdecydowanym stopniu morfologii butterfly. Kinetyka przemiany tego produktu jest opisana krzywą oznaczoną 1 na rysunku 3a).

We wzorach opisujących kinetykę tworzenia bainitu o różnej morfologii  $f_{B1}$  oraz  $f_{B2}$ , wprowadzono współczynniki autokatalizy  $A_1$  oraz  $A_2$ , które uwzględniają zmianę szybkości zarodkowania w miarę wzrostu stopnia przemiany. Jak wiadomo, tworzenie płytek prowadzi do sprężystych i plastycznych odkształceń fazy osnowy. Jednak nie wywołuje ono zarodkowania kolejnych płytek o innej orientacji, co ma miejsce w przypadku martenzytu. Generalnie przypuszcza się, że w przypadku bainitu siła napędowa jest jedynie wystarczająca dla tworzenia zarodków ubogich w węgiel, a w obszarach wzbogaconych w węgiel, zlokalizowanych wokół istniejących płytek tworzenie ich jest niemożliwe. W przypadku bainitu wokół płytek także występuje charakterystyczny relief podobny do martenzytycznego. Jednak prawdopodobnie autokataliza wywołana przez odkształcenie nie odgrywa decydującej roli w tworzeniu bainitu. Zmiany szybkości zarodkowania wynikające z autokatalizy ujęte są w wyrażeniach  $I_{B1} \cdot (A_1 \cdot f)$ , oraz  $I_{B2} \cdot (A_2 \cdot f)$ . Analizując to zjawisko przy różnych temperaturach należy brać pod uwagę iloczyn parametrów  $I \cdot A$ . Jednak brak możliwości jednoznacznej interpretacji spowodowany jest wieloma założeniami upraszczającymi w modelu matematycznym. Mianowicie parametry  $b_1$  oraz  $b_2$  zawierają w sobie nie tylko szybkość zarodko-

wania, lecz również stałe szybkości wzrostu w kierunku długości  $G_{B12}$  i  $G_{B22}$ . Jeżeli założymy, że stałe szybkości wzrostu nie zmieniają się w funkcji czasu wówczas parametry  $b_1$  oraz  $b_2$  będą zdeterminowane szybkością zarodkowania. Z obliczeń wynika, że w zakresie B1 parametr  $b_1$  jest rzędu E-4 do E-5, natomiast w zakresie B2 wynosi E-10 do E-8. Tak więc szybkość zarodkowania w zakresie (swing back) dla  $f_{B1}$  w porównaniu z zakresem  $f_{B2}$ , jest wyższa o sześć rzędów wielkości przy niższych temperaturach (130°C) i cztery rzędy wielkości przy wyższych temperaturach (250°C). Względna różnica w szybkości zarodkowania pomiędzy górnym a dolnym zakresem temperatur wynosi więc około dwóch rzędów wielkości, co bezpośrednio determinuje występowanie efektu swing back.

W przedstawionym modelu autokatalizę  $A_1$  i  $A_2$  powiązano z ogólnym stopniem przemiany  $f_p$ , a nie z odpowiadającymi im ułamkami przemiany, osobno dla każdego produktu przemiany  $f_{B1}$  oraz  $f_{B2}$ . W zakresie przyspieszonego początku przemiany istotną rolę może odgrywać autokataliza związana z zarodkowaniem wspomaganym przez naprężenie. Wiadomo, że szybkość przemiany pod ciągłym oddziaływaniem naprężenia wzrasta nadzwyczaj szybko i nieporównywalnie bardziej niż tylko po plastycznym odkształceniu. Plastyczne odkształcenie austenitu przy niższych temperaturach przemiany wpływa na szybkość jego rozpadu w sposób złożony. W początkowym etapie przemiany jej szybkość wzrasta, tym silniej, im wyższy jest stopień odkształcenia. Jednak odkształcenie zwiększa tendencję do samohamowania przemiany bainitycznej, tak że w momencie półrozpadu szybkość przemiany w próbkach odkształconych plastycznie jest już niższa niż w nie odkształconych.

## 6. WNIOSKI

1. Przedstawiony model rozpadu uwzględnia parametry geometryczne kolejno tworzących się subplytek bainitu. Realizacja zadania optymalizacyjnego umożliwiła rozwiązanie równań i wykreślenie osobnych krzywych kinetycznych stanowiących składowe jednej krzywej. Na podstawie wyprowadzonych równań dokonano opisu kinetyki równoczesnego rozpadu austenitu na dwa produkty oznaczone jako B1 i B2.
2. Przy niższych temperaturach przemiany zbliżonych do  $M_s$  stwierdzono występowanie efektu przyspieszonego początku przemiany. Na początku tworzy się składnik strukturalny o morfologii butterfly oznaczony jako B1, a w dalszych etapach składnik strukturalny o morfologii klasycznych wiązek oznaczony jako B2. Przy wyższych temperaturach przemiany oba składniki strukturalne, oznaczone jako B1 i B2, tworzą wiązki a różnice między nimi wynikają tylko z różnic w morfologii subplytek.
3. W początkowych etapach przemiany współczynniki  $n_1$  są ujemne, co oznacza, że długości kolejnych subplytek maleją ze wzrostem czasu i temperatury przemiany. W dalszych etapach przemiany współczynniki  $n_2$  są dodatnie. Może to prowadzić do utworzenia płytek w kształcie klina o morfologii butterfly. Długości kolejnych subplytek tworzących wiązki bainitu dolnego wzrastają ze wzrostem czasu i temperatury przemiany, tworząc klasyczne płytki bainitu dolnego.
4. Szybkości przemian dla produktów oznaczonych jako B1 i B2 przy temperaturze przemiany 250°C są zbliżone i bardzo różne przy temperaturze 150°C. Takie zróżnicowanie w szybkościach przemian przy niższych temperaturach wynika prawdopodobnie z wpływu midribu na szybkość zarodkowania subplytek bainitu.

5. Współczynniki  $b_1$  oraz  $b_2$  w początkowych i końcowych etapach przemian B1 i B2 różnią się od trzech do sześciu rzędów wielkości. Jest to prawdopodobnie spowodowane wyższą szybkością zarodkowania, szczególnie w dolnym zakresie temperatur, co determinuje występowanie efektu swing back.

## LITERATURA

- [1] Christian J.W., 1975. Theory of Transformations in Metals and Alloys. Part I. Pergamon Press, Oxford.
- [2] Jones S.J., Bhadeshia H.K.D.H., 1997. Acta Mater. 45.
- [3] Bodnar L.R., Hansen S.S., 1994. Met. and Mat. Trans. 25 A.
- [4] Oka M., Okamoto H., 1988. Met. Trans. 19.
- [5] Okamoto H., Oka M., 1986. Met. Trans. 17.
- [6] Hehemann R.F., 1970. Phase Transformations. Metals Park, OH, ASM.
- [7] Rees G.I., Bhadeshia H.K.D.H., 1992. Mat. Sci. Technol. 8.
- [8] Rees G.I., Bhadeshia H.K.D.H., 1992. Mat. Sci. Technol. 9.
- [9] Spanos G., Fang H.S., Aaronson H.I., 1990. Met. Trans. 21.
- [10] Christian J.W., Edmonds D.V., 1984. [In:] Phase transformations in ferrous alloys. A.R. Marder, J.I. Goldstein [eds.], Warrendale, PA, MS-AIME.
- [11] Bhadeshia H.K.D.H., Christian J.W., 1990. Met. Trans. 21 A.
- [12] Ali A., Bhadeshia H.K.D.H., 1989. Mat. Sci. Technol. 5.
- [13] Bhadeshia H.K.D.H., 1984. [In:] Phase transformations in ferrous alloys, A.R. Marder, J.I. Goldstein [eds.], Warrendale, PA, MS-AIME.
- [14] Goodenow R.H., Matas S.J., Hehemann R.F., 1963. Trans. AIME 227.
- [15] Speich G.R., Cohen M., 1960. Trans. AIME 218.
- [16] Rao M.M., Winchell P.G., 1967. Trans. AIME 239.
- [17] Woźniak T.Z., Jeleńkowski J., 1995. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz, Mechanika 38.
- [18] Woźniak T.Z., 1999. II Ogólnopolska Konferencja Naukowa. Politechnika Krakowska, Kraków, 16-18 września 1999.
- [19] Oka M., Okamoto H., 1988. Met. Trans. 19.
- [20] Okamoto H., Oka M., 1986. Met. Trans. 17.
- [21] Schaber O., 1955. Trans. AIME 203.
- [22] Woźniak T.Z., 2002. Archiwum Nauki o Materiałach, Katowice, t. 23, 4.
- [23] Woźniak T.Z., Jeleńkowski J., 1997. Konferencja "Dobór i Eksploatacja Materiałów Inżynierskich", Politechnika Gdańska, Jurata, 22-25 września 1997.
- [24] Singh S.B., Bhadeshia H.K.D.H., 1998. Materials Science and Engineering. 245 A.



## MODELLING OF KINETICS OF AUSTENITE DOUBLE DECOMPOSITION

### Summary

This paper describes a model of bainitic transformation. The model takes into consideration a range of lower bainite in high carbon steels indicating the swing back effect near the temperature  $M_s$ . Analyses concerning subplates nucleation have been presented. The model assumes that subplate growth is of a logarithmic and exponential character. In order to calculate a volume fraction of the components  $f_{B1}$  and  $f_{B2}$ , the formulas linking an actual volume increase of the components with their current growth have been applied. The model takes into account a simultaneous decomposition of austenite into two transformation products. In optimizing procedures, the results of dilatometric studies and quantitative analyses of micro structural components were used.

Keywords: bainite, swing back, subplates, kinetics, modeling

## ANALIZA NUMERYCZNA OBCIĄŻENIA STATYCZNEGO ORAZ DRGAŃ PŁASZCZA WALCZAKA OBROTOWEGO

Janusz Zachwieja

Katedra Mechaniki Stosowanej  
Wydział Mechaniczny ATR  
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W niniejszej pracy został poddany gruntownej analizie problem deformacji powłoki walczaka obrotowego z dwoma pierścieniami tocznymi zamocowanymi w sposób sztywny na płaszczu. Omówiono dwie znaczące teorie opisujące naprężenia i odkształcenia powłok: Goldenveizera i Novozhilova oraz Donnella. Stosując metodę numeryczną, rozwiązano zagadnienie drgań swobodnych walczaka.

Słowa kluczowe: tensor naprężenia, tensor deformacji, częstotliwości drgań własnych, macierz bezwładności, macierz sztywności

### 1. WPROWADZENIE

Cienkie powłoki o kształcie cylindrycznym znajdują zastosowanie w wielu konstrukcjach przemysłowych, takich jak rurociągi, zbiorniki, cysterny itp. Stanowią one również główne ogniwo w procesach technologicznych suszenia, produkcji sody lekkiej (kalcynatory) oraz ciężkiej (krystalizatory), a także lasowania wapna (lasowniki) czy wypalania klinkieru (piece obrotowe). Dlatego tak istotną rolę odgrywa analiza stanu naprężenia i odkształcenia powłoki [1], jak również problemy związane z jej drganiami [2]. Nic zatem dziwnego, że wynikiem dociekań wielu badaczy jest szereg teorii opisujących zarówno zagadnienia wytrzymałości [3], jak i dynamiki powłok cienkościennych [4].

Specyficznymi walczakami cienkościennymi są suszarnie oraz piece obrotowe z uwagi na stosunek grubości ścianki do promienia cylindra, wynoszący w krańcowym przypadku 40/4000, a także ich długość sięgającą nawet 160 m. Obiekty te o ciężarze kilku tysięcy ton obracają się z prędkością od kilku do kilkunastu obrotów na minutę. Napęd przenoszony jest zazwyczaj poprzez wieniec zębaty osadzony na płaszczu, podobnie jak tzw. pierścienie toczne obtaczające się po rolkach nośnych. Liczba pierścieni stanowiących podparcie walczaka, w zależności od jego długości, waha się od dwóch do siedmiu. Sposób zawieszenia pierścieni na płaszczu może być sztywny, w przypadku niskich temperatur pracy walczaka, bądź też z luzem, gdy wysokiej temperaturze pracy towarzyszą odkształcenia termiczne powłoki. Swobodne osadzenie pierścienia związane jest z występowaniem zjawiska migracji, czyli obrotu pierścienia względem powłoki. Wielkość luzu pomiędzy pierścieniem i płaszczem musi być odpowiednio dobrana, aby nie nastąpiło zakleszczenie pierścienia w przypadku zbyt małego luzu lub też nie występował efekt intensywnego ścierania powierzchni wewnętrznej pierścienia w razie istnienia luzu nadmiernego. Wyliczenia te muszą uwzględniać zarówno odkształcenia termiczne, jak i mechaniczne [5].

Przyczyną drgań walczków może być zarówno zmienna w czasie siła międzyzębna na styku powierzchni współpracy zębów wieńca i koła atakującego stanowiących tzw. przekładnię otwartą, jak również zmienna siła nacisku walczaka na rolki nośne spowodowana najczęściej wygięciem powłoki walczaka. Jak udowodniono [6], drgania własne walczaka wykazują, podobnie jak w przypadku belki, postacie giętne i skrętne, a także formy charakterystyczne dla powłoki. Widocznym efektem drgań powłoki jest występowanie na powierzchni pierścienia tocznego smarowanego olejem charakterystycznych prążków. W przypadku pierścienia osadzonego swobodnie na płaszczu drgania powłoki skutkują okresowym zmniejszaniem się luzu podpierścieniowego.

Celem niniejszej pracy jest numeryczna analiza drgań i odkształceń płaszczu walczaka na przykładzie suszarni mączki wapiennej – obiektu o dwóch pierścieniach zamocowanych sztywno na płaszczu.

## 2. RÓWNANIA STANU NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA PŁASZCZA WALCZAKA

Istnieje szereg teorii bazujących na ogólnych założeniach Kirchhoffa pomijających składowe naprężenia i odkształcenia w kierunku prostopadłym do powłoki. Jedną nich jest teoria Goldenveizera-Novozhilowa, w myśl której tensor odkształcenia definiowany jest następująco:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} + w \right) \\ \varepsilon_{x\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial x}\end{aligned}\quad (1)$$

Jak można zauważyć, równania różniczkowe przemieszczeń wyprowadzone na jej podstawie, przy pewnych założeniach upraszczających, sprowadzają się do równań uzyskanych przez Donnella [11]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{2R} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \theta} - \frac{g}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= \rho \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{(1+\nu)}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{(1+k)}{R^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + 2(1-\nu)k \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - 2(1-\nu)k \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \\ - \frac{k}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} &= \rho \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \\ \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} g + k \left( R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - 2(1-\nu)k \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial \theta} + \\ - \frac{k}{R^2} \frac{\partial^3 g}{\partial \theta^3} &= -\rho \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (2)$$

Tutaj  $u(x, \theta, t)$ ,  $\vartheta(x, \theta, t)$ ,  $w(x, \theta, t)$  są przemieszczeniami w kierunkach  $x, \theta$  i kierunku promieniowym, natomiast  $k = \frac{h^2}{12R^2}$  wyraża miarę stosunku grubości ścianki do jej promienia.

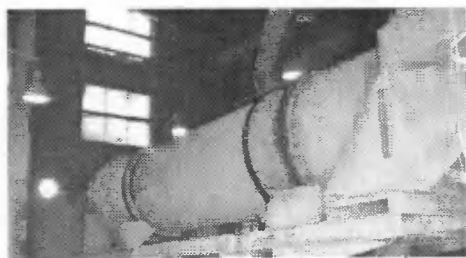
Rozwiązania równania (2) poszukujemy w postaci rozwinięcia w szereg Fouriera:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= C_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos m\theta \cos \omega t \\ \vartheta(x, \theta, t) &= C_2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos m\theta \cos \omega t \\ w(x, \theta, t) &= C_3 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos m\theta \cos \omega t \end{aligned} \tag{3}$$

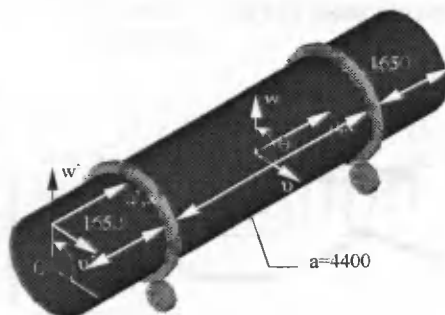
gdzie:  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ) jest kolejnym numerem postaci drgań w kierunku obwodowym,  $\omega$  jest częstością drgań. Stałe  $C_1, C_2, C_3$  wymagają określenia w oparciu o warunki brzegowe.

Metody numeryczne, wykorzystujące przestrzenne elementy skończone nawiązują do ogólniejszej teorii powłok, w których normą staje się uwzględnianie trójwymiarowego stanu naprężenia i odkształcenia [11]. Przykład prostego sposobu podejścia do zagadnienia można znaleźć w pracy [1]. Chociaż przyjęte w niej założenia odbiegają od postulatów klasycznej teorii powłok cienkościennych, to uzyskane rezultaty są zbliżone z wynikami analitycznymi otrzymanymi przez Banakiewicza [7] przy wykorzystaniu metod energetycznych.

Aby czynić zadość opinii, że metody numeryczne lepiej niż rozważania analityczne odnoszą się do konkretnego problemu, statyczne odkształcenia powłoki oraz jej drgania swobodne rozpatrzmy w oparciu o model będący odzwierciedleniem obiektu rzeczywistego (rys. 1).



Rys. 1. Widok suszarni obrotowej mączki wapiennej



Rys. 2. Gabaryty walczaka suszarni

Walczak suszarni (rys. 2) stanowi izotropową, sprężystą powłokę o grubości ścianki  $h = 30$  mm, długości  $L = 8000$  mm, promieniu  $R = 900$  mm, module Younga  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Pa, module Poissona  $\nu = 0,3$  oraz gęstości  $\rho = 7860$  kg·m<sup>-3</sup>. Powłoka jest podparta w sposób symetryczny na  $q = 2$  pierścieniach oddalonych od siebie o 4400 mm.

Sposób podparcia odpowiada warunkom utwierdzenia, bowiem:

- pierścienie zamocowane są sztywno na płaszczu,
- nie występuje bicie osiowe pierścieni.

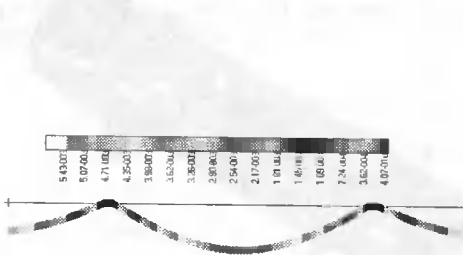
Warunek ten skutkuje następującymi ograniczeniami w miejscach podparcia, które określają warunki brzegowe dla układu równań (2):

$$u = \vartheta = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

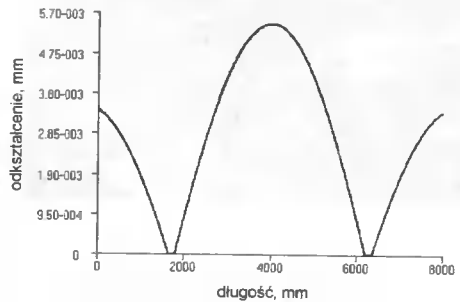
### 3. DEFORMACJA PŁASZCZA WALCZAKA OBROTOWEGO

W przeszłości obliczenia konstrukcyjne walczków obrotowych były prowadzone w oparciu o model belki wielopodporowej. Ponieważ uzyskiwane rezultaty nie gwarantowały prawidłowego doboru grubości ścianek, stosowano współczynniki bezpieczeństwa, których wartość określało doświadczenie konstruktora i wiedza uzyskiwana w trakcie późniejszej eksploatacji obiektu. Jest więc rzeczą interesującą porównanie wyników obliczeń w oparciu o model belkowy elementu skończonego z rezultatami uzyskiwanymi przy traktowaniu walczaka jako powłoki z trójwymiarowym stanem naprężenia. Jedynym uwzględnianym obciążeniem był ciężar walczaka, z uwagi na znikomy stopień wypełnienia suszarni surowcem wsadowym.

Rysunki 3 i 4 obrazują sposób i wielkość odkształcenia osi walczaka na jego długości. Sposób rozmieszczenia podpór powoduje, że maksymalnego odkształcenia doznaje przekrój zawarty w płaszczyźnie symetrii obiektu, prostopadłej do jego osi. Maksymalne naprężenie zredukowane (wzdłużne) występuje w przekrojach zlokalizowanych blisko podpór (rys. 5-6). Tutaj, jak można się spodziewać, występują największe momenty gnące [1,7].



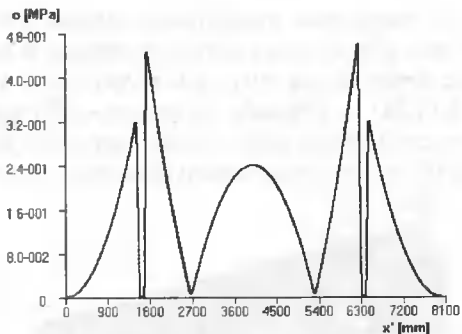
Rys. 3. Obraz deformacji osi walczaka traktowanego jako belka o przekroju pierścieniowym



Rys. 4. Wartości odkształcenia osi walczaka

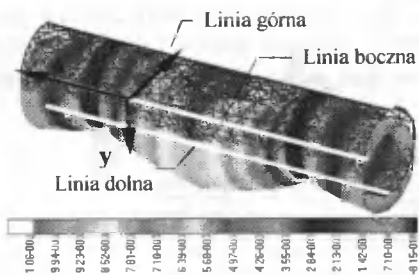


Rys. 5. Rozkład naprężenia w przekrojach walczaka

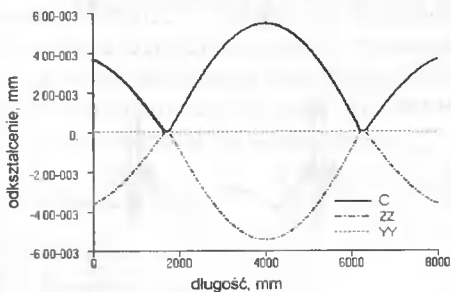


Rys. 6. Wielkość naprężenia w przekrojach walczaka

Dla modelu powłokowego uzyskiwana wielkość odkształcenia jest większa niż dla modelu belkowego, chociaż przebieg odkształcenia obranych linii charakterystycznych na powierzchni powłoki jest podobny do linii ugięcia osi belki (rys. 7-10).

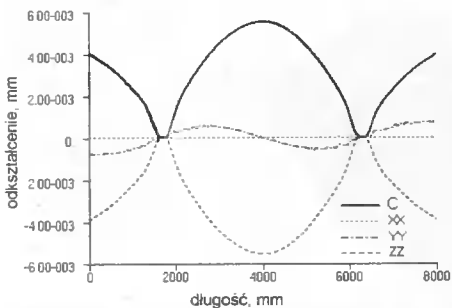


Rys. 7. Deformacja powłoki walczaka

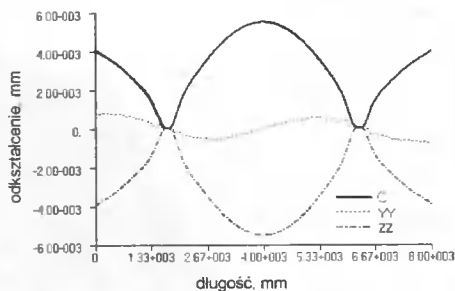


C – odkształcenie całkowite

Rys. 8. Odkształcenia powłoki walczaka – linia boczna



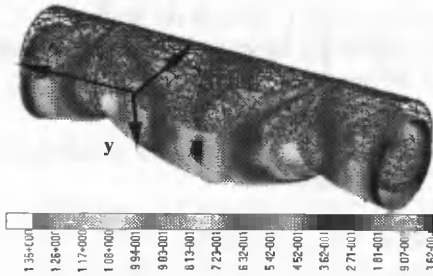
Rys. 9. Deformacja powłoki walczaka – linia górna



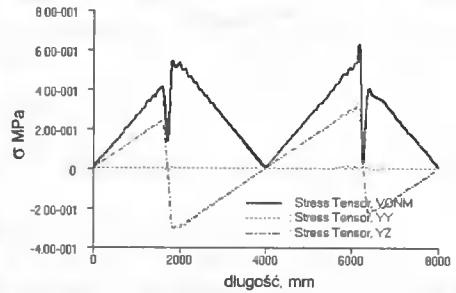
C – odkształcenie całkowite

Rys. 10. Odkształcenia powłoki walczaka – linia dolna

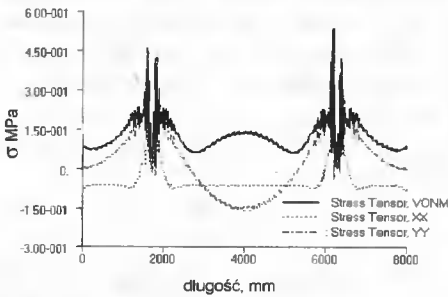
Naprężenia zredukowane zgodnie z hipotezą Hubera-Misesa, występujące w powłoce, przewyższają wartości naprężeń w belce o przekroju pierścieniowym. Ich istnienie obserwuje się również w przekrojach swobodnych na końcu długości walczaka (rys. 13,14,18), co prowadzi do deformacji tych przekrojów (rys. 15,17). Z kolei wzdłuż linii bocznej powłoki pojawiają się naprężenia styczne osiągające istotną wielkość w stosunku do wartości maksymalnych naprężeń normalnych (rys. 12).



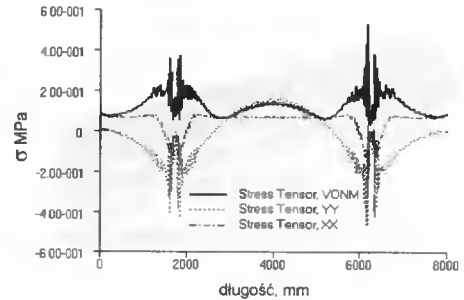
Rys. 11. Naprężenia w powłoce walczaka



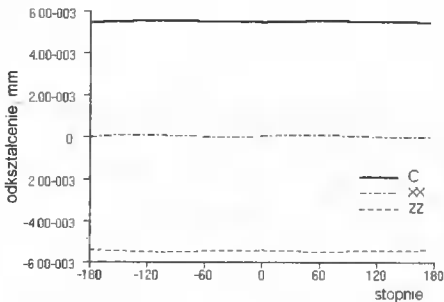
Rys. 12. Naprężenia w powłoce walczaka – linia boczna



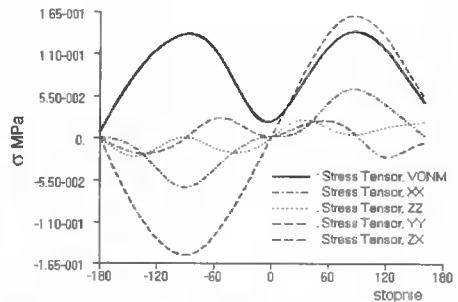
Rys. 13. Naprężenia w powłoce walczaka – linia górna



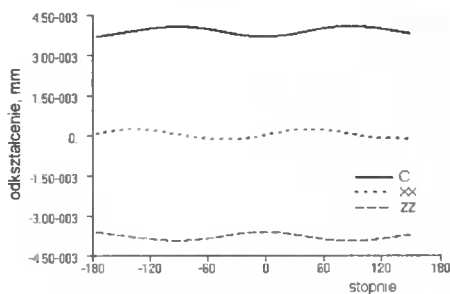
Rys. 14. Naprężenia w powłoce walczaka – linia dolna



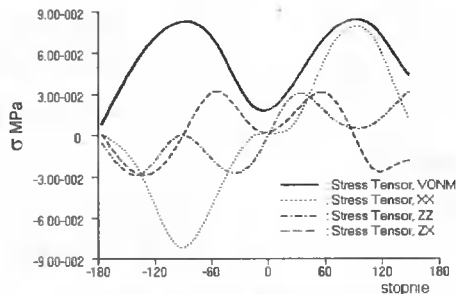
Rys. 15. Deformacja w punktach na obwodzie powłoki – przekrój w połowie długości walczaka



Rys. 16. Naprężenia w punktach na obwodzie powłoki – przekrój w połowie długości walczaka



Rys. 17. Deformacja w punktach na obwodzie powłoki – przekrój na końcu walczaka



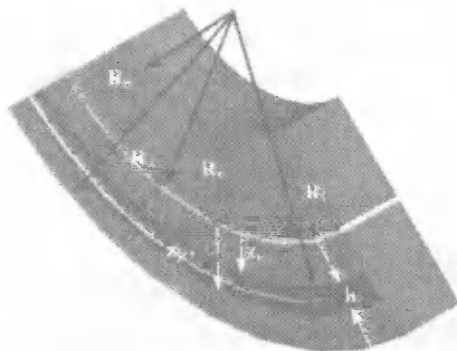
Rys. 18. Naprężenia w punktach na obwodzie powłoki – przekrój na końcu walczaka

#### 4. DRGANIA POWŁOKI

Dyskretyzacja powłoki w kierunkach  $x$ ,  $\theta$  oraz  $z$  umożliwia przyjęcie do analizy trójwymiarowego pola naprężenia i odkształcenia. Stanowi to zasadnicze uogólnienie w stosunku do przedstawionego w punkcie 1 zarysu teorii Goldenveizera i Novozhilowa. Rozwiązania zagadnienia poszukujemy w postaci rozwinięcia funkcji przemieszczeń w szereg Fouriera względem kolejnych postaci drgań obwodowych. Trójwymiarowy charakter pola zaznaczają funkcje  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\psi$  uzależniające je od współrzędnej  $z$ :

$$\begin{aligned} u &= \xi(z, t) \phi_x(x) \cos m\theta t \\ \vartheta &= \zeta(z, t) \phi_\theta(x) \cos m\theta \\ w &= \psi(z, t) \phi_z(x) \cos m\theta \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ) jest kolejnym numerem postaci drgań w kierunku obwodowym.  $\phi_x(x), \phi_\theta(x), \phi_z(x)$  są funkcjami spełniającymi warunki brzegowe. Funkcje  $\xi, \zeta, \psi$  związane są z przemieszczeniami poszczególnych elementów skończonych (rys. 19).



Rys. 19. Układ odniesienia dla elementów skończonych



$$\begin{aligned}
 \xi(z, t) &= \alpha u_j + \beta u_{j+1} \\
 \zeta(z, t) &= \alpha \vartheta_j + \beta \vartheta_{j+1} \\
 \psi(z, t) &= \alpha w_j + \beta w_{j+1}
 \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (1 - \beta) \\
 \beta &= (z - z_j) / h
 \end{aligned} \tag{7}$$

Tutaj  $z_j$  jest odległością dolnej warstwy od warstwy środkowej. Krzywizna oraz skęcenie tej powierzchni określone jest zależnościami:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{8}$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\tau = -\frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) \tag{9}$$

Równania konstytutywne  $\sigma = D\varepsilon$  wyrażające zależność pomiędzy stanem naprężenia i odkształcenia mają postać:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix} \tag{10}$$

przy czym:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$G$  jest modulem sprężystości poprzecznej.

Tensor deformacji wiąże wektory odkształcenia i przemieszczenia poprzez macierz operatorów różniczkowych  $L$ :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_j} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{R_j} & \frac{1}{R_j} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{R_j} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \vartheta \\ w \end{bmatrix} \quad (11)$$

Z kolei przemieszczenia wewnątrz dowolnej warstwy, zgodnie z ideą dyskretyzacji, są uzależniane od przemieszczeń w warstwach granicznych:

$$u = N\delta \quad (12)$$

Tutaj:

$$\delta^T = [u_j \quad \vartheta_j \quad w_j \quad u_{j+1} \quad \vartheta_{j+1} \quad w_{j+1}] \quad (13)$$

jest wektorem przemieszczeń na granicach warstwy, natomiast:

$$N = \begin{bmatrix} \alpha\phi_x \cos(m\theta) & 0 & 0 & \beta\phi_x \cos(m\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\phi_\theta \cos(m\theta) & 0 & 0 & \beta\phi_\theta \cos(m\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\phi_z \cos(m\theta) & 0 & 0 & \beta\phi_z \cos(m\theta) \end{bmatrix} \quad (14)$$

jest macierzą funkcji kształtu.

Wyznaczenie częstości własnych  $\omega$  drgań powłoki sprowadza się do rozwiązania zagadnienia na wartości własne macierzy:

$$\left[ K^{-1}M - \frac{1}{\omega^2} I \right] = 0 \quad (15)$$

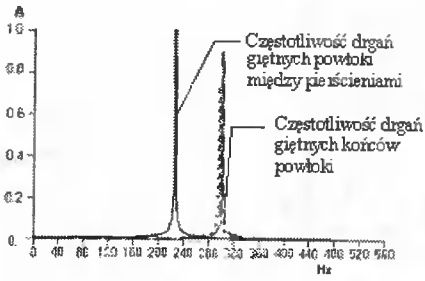
gdzie  $M$ ,  $K$  są globalnymi macierzami bezwładności i sztywności powłoki utworzonymi z macierzy lokalnych określanych dla każdej warstwy:

$$M_j = \int_{V_j} \rho N^T N dV_j \quad (16)$$

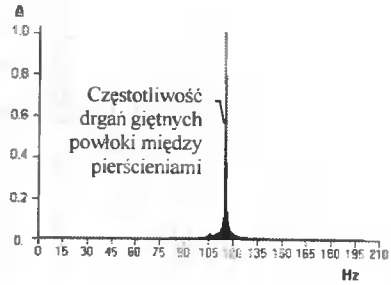
$$K_j = \int_{V_j} (LN)^T D(LN) dV_j$$

Poniżej przedstawiono wyniki analizy drgań swobodnych walczaka obrotowego suszarni uzyskane na drodze obliczeń numerycznych.

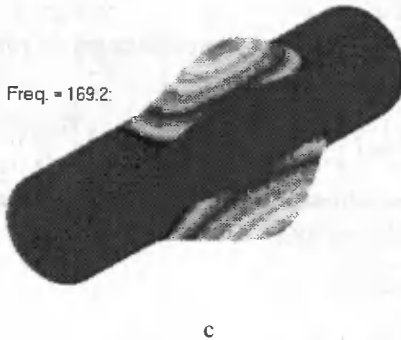
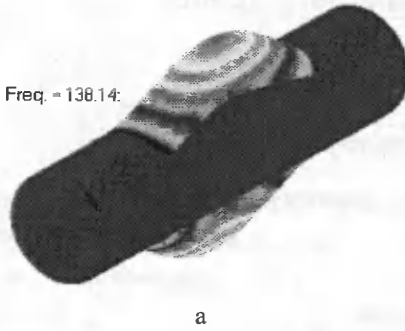
Dolną granicą zakresu częstotliwości jest ~138 Hz. Odpowiada ona częstotliwości rezonansowej drgań powłoki o postaci przedstawionej na rysunku 22a oraz rysunku 22b. Mające dominujący charakter (rys. 20) drgania gięte fragmentu płaszcza między pierścieniami pojawiają się przy częstotliwości ~235 Hz (rys. 22e). Obliczone częstotliwości rezonansowe drgań końców swobodnych walczaka mają wartość ~291 Hz (rys. 22g-j).

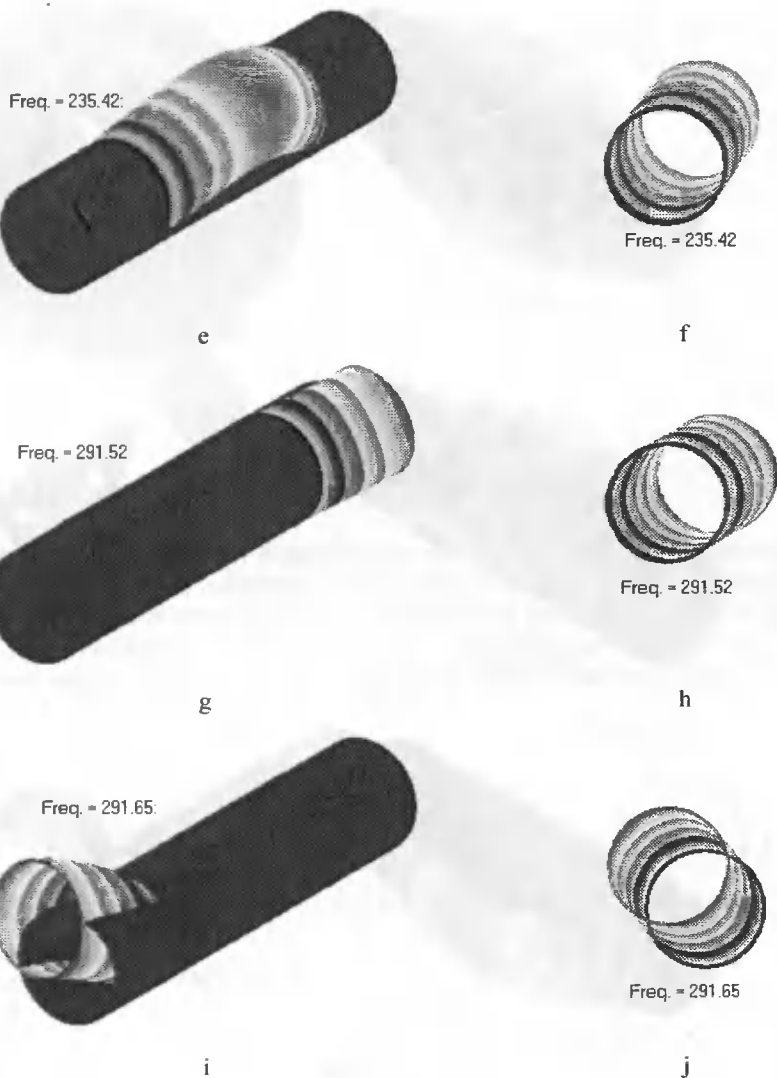


Rys. 20. Odpowiedź częstotliwościowa drgającego walczaka podpartego symetrycznie



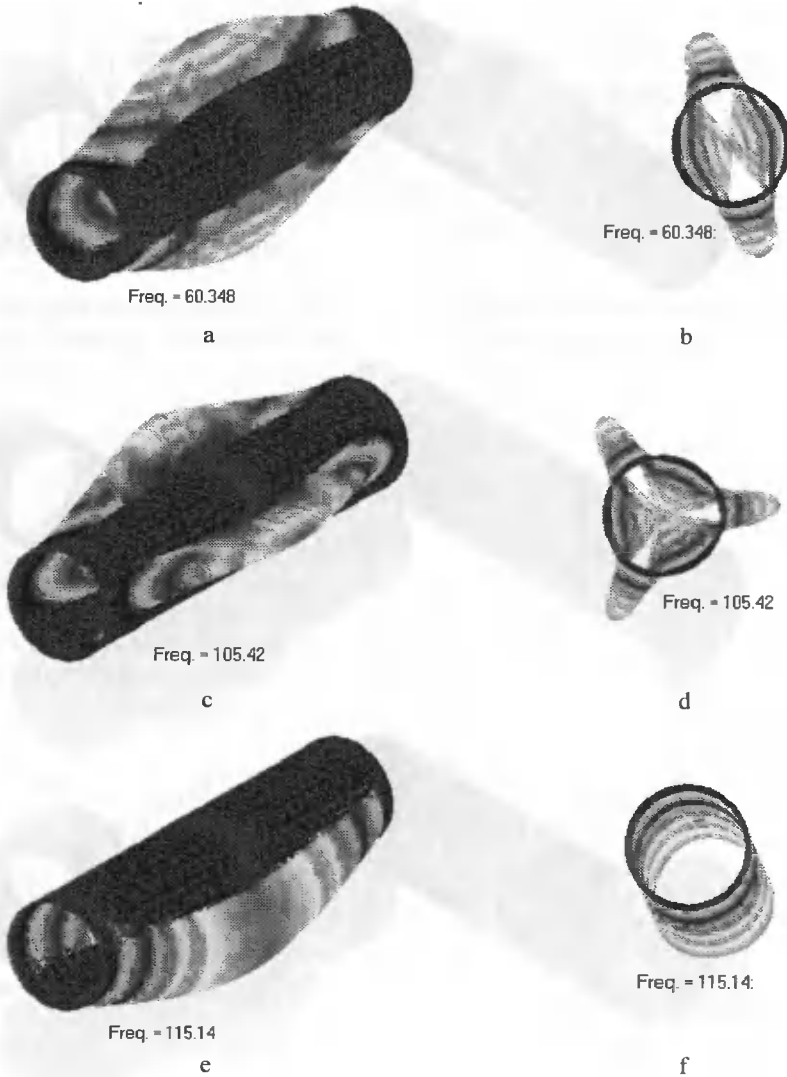
Rys. 21. Odpowiedź częstotliwościowa drgającego walczaka podpartego na końcach





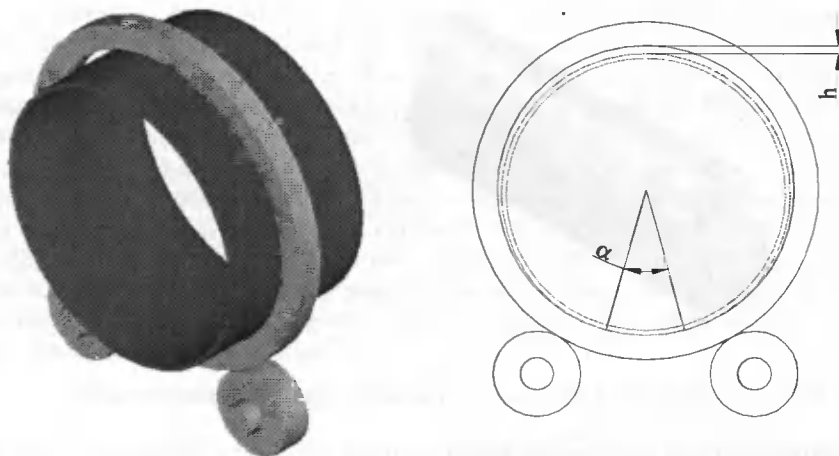
Rys. 22. Postaci i częstotliwości drgań własnych powłoki suszarni

Częstotliwości drgań poszczególnych fragmentów walczaka zależą od sposobu umiejscowienia pierścieni tocznych na płaszczu. Przesunięcie pierścieni w kierunku końców walczaka powoduje, że formy drgań fragmentu płaszczu między pierścieniami nie zmieniają się, obniżeniu ulegają natomiast częstotliwości odpowiadające tym postaciom (rys. 23).



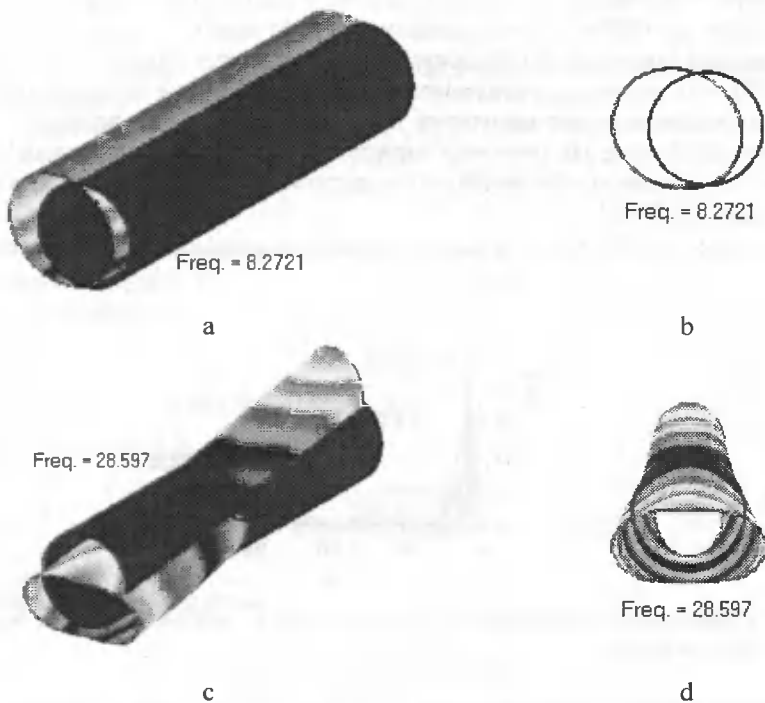
Rys. 23. Postaci drgań walczaka utwierdzonego na końcach

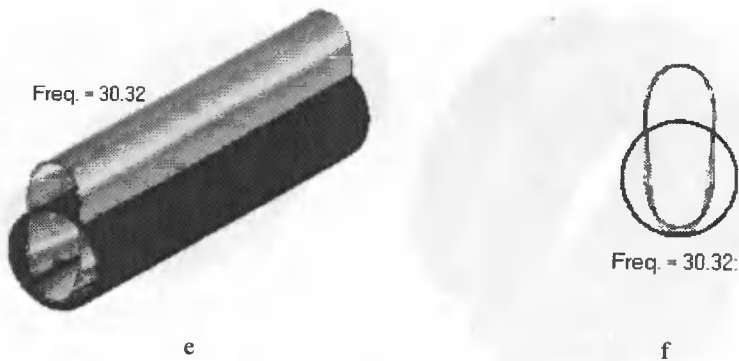
Zasadniczą kwestią rzutuącą na poprawność rozwiązania jest prawidłowe określenie warunków brzegowych. Dla pierścieni mocowanych w sposób sztywny na płaszczu warunki (4) nie budzą zastrzeżeń. W przypadku pierścieni mocowanych z luzem właściwe definiowanie ograniczeń nakładanych przez więzy nie jest sprawą prostą. Tym niemniej modelowanie numeryczne zapewnia więcej swobody w operowaniu warunkami brzegowymi aniżeli założenia formułowane dla rozwiązań analitycznych. Luz występujący między pierścieniem i płaszczem powoduje, że jedynie na niewielkiej części obwodu powłoki ma miejsce styk z wewnętrzną powierzchnią pierścienia (rys. 24). Pierścień również ulega odkształceniu, chociaż z reguły jego sztywność jest znacznie większa od sztywności powłoki.



Rys. 24. Sposób osadzenia pierścienia tocznego z „luzem”.

W takim przypadku postaci drgań ulegają zmianie w stosunku do wyznaczonych dla warunków podparcia na pierścieniu zamocowanym w sposób sztywny. Nawet przy niskich częstotliwościach wymuszenia mogą występować drgania rezonansowe powłoki, co nie jest zjawiskiem korzystnym. Pierwsze trzy obliczone częstotliwości drgań własnych oraz odpowiadające im postaci odkształceń zobrazowano na rysunku 25.



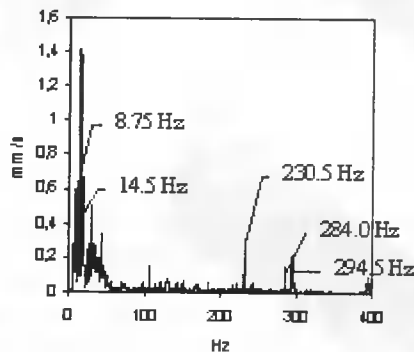


Rys. 25. Postaci i częstotliwości drgań powłoki podpartej migrującymi pierścieniami

Prędkość obrotowa walczków takich jak piec cementowe, kalcynatory jest niska. Wynosi od jednego do kilku obrotów na minutę. Obciążenia dynamiczne oraz wpływ efektów bezwładnościowych nie są w tych przypadkach duże. Przy większych prędkościach obrotowych, z jakimi pracują np. wirówki, analiza drgań powłoki musi uwzględniać oddziaływania będące efektem występowania sił odśrodkowych oraz sił Coriolisa.

## 5. WNIOSKI

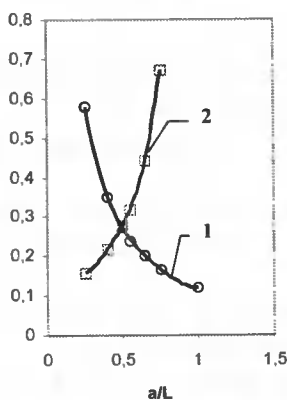
Przeprowadzone analizy dotyczyły obiektu o nieskomplikowanej budowie z uwagi na niewielkie jego gabaryty oraz jednakową grubość ścianki na całej długości. Porównanie naprężeń i odkształceń obliczonych numerycznie przy traktowaniu walczaka jako belki (1D) oraz powłoki o trójwymiarowym stanie naprężenia wykazuje dla prostego sposobu obciążenia pewne odstępstwa między otrzymywanymi wynikami. Zarówno wielkości odkształceń, jak i wartości naprężeń uzyskane w oparciu o model jednowymiarowy są mniejsze niż dla modelu trójwymiarowego. Różnice te sięgają w miejscach podparcia nawet 25%.



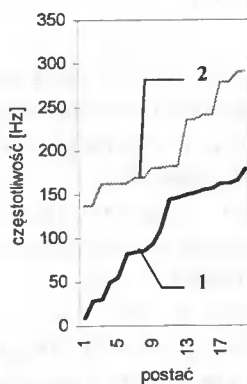
Rys. 26. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa wyznaczona w oparciu o pomiar drgań walczaka

Widmo prędkości drgań walczaka (rys. 26), obok dominujących amplitud w częstotliwości 8,75 Hz, która jest częstotliwością zazębienia przekładni otwartej napędu

oraz częstotliwości drgań silnika 14,5 Hz zawiera wyraźne amplitudy w częstotliwościach 230,5 Hz, 284 Hz oraz 294,5 Hz. Biorąc pod uwagę uzyskane wyniki dla drgań giętych powłoki walczaka, równe odpowiednio: 235 Hz oraz 292 Hz, można wnioskować, że są to rzeczywiste wartości częstotliwości rezonansowych fragmentu walczaka między pierścieniami tocznymi oraz drgań końcówek. Pozostałe częstotliwości własne i odpowiadające im kolejne numery postaci drgań zobrazowano na rysunku 27 zarówno dla badanego obiektu, jak też dla przypadku zakładającego luźne osadzenie pierścieni na płaszczu. W tym przypadku częstotliwości drgań zmniejszają się radykalnie (rys. 25). Nasuwa się wniosek, że zmiany trendu częstotliwości drgań mogą identyfikować wzrost wartości luzu między płaszczem a pierścieniem. Jest to szczególnie istotne wówczas, gdy reżim technologiczny wymusza ciągły ruch obiektu, uniemożliwiając bezpośredni pomiar wielkości tego luzu.



Rys. 27. Zmiana wartości współczynnika częstotliwości  $\Psi$  dla drgań giętych: 1 – segmentu między pierścieniami, 2 – końców walczaka



Rys. 28. Wartości częstotliwości dla kolejnych postaci drgań: 1 – pierścień osadzony z luzem na płaszczu, 2 – pierścień osadzony sztywno

W literaturze [10] występują trzy definicje tzw. współczynników częstotliwości wiążących częstość drgań  $\omega$  z:

– grubością powłoki cylindrycznej

$$\Omega = \frac{\omega h}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{G}} \tag{17}$$

– promieniem powłoki cylindrycznej

$$\Psi = \omega R \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} \tag{18}$$

– długością powłoki cylindrycznej

$$\varpi = \omega L \sqrt{\frac{\rho(1+\nu)}{E}} \tag{19}$$



Dla rozpatrywanego walczaka współczynnik częstotliwości  $\Psi$  określony zależnością (18) posłużył do wyznaczenia zmian częstotliwości drgań walczaka w funkcji stosunku  $a/L$ , czyli odległości między podporami do jego długości (rys. 27). Jeżeli względy wytrzymałościowe nie odgrywają znaczącej roli, istotnym jest przy projektowaniu walczaków dobór takich odległości między podporami, aby częstotliwości rezonansowe drgań powłoki nie znajdowały się blisko częstotliwości wymuszeń (częstotliwość ząbienia przekładni napędu, drgania silników itp.).

*Autor dziękuje firmie MSC Software za udostępnienie oprogramowania wykorzystanego do obliczeń.*

## LITERATURA

- [1] Zachwieja J., 2002. Wykorzystanie metody OES do obliczania odkształcenia promieniowego płaszcza pieca obrotowego. Cement Wapno Beton 2.
- [2] Zachwieja J., Gawda M., 2003. Numeryczna analiza drgań rurociągów. Hydraulika i Pneumatyka 6.
- [3] Lam K.Y., Nyg T.Y., 1997. Dynamic stability of cylindrical shells subjected to conservative periodic axial loads using different shell theories. Journal of Sound and Vibration 207(4).
- [4] Finnveden S., 1997. Spectral finite element analysis of the vibration of straight fluid-filled pipes with flanges. Journal of Sound and Vibration 199(1).
- [5] Zachwieja J., 2003. Odkształcenia promieniowe pierścieni tocznych walczaków obrotowych. Cement Wapno Beton 1.
- [6] Xiang Y., Ma Y.F., Kitipornchai S., Lim C.W., Lau C.W.H., 2002. Exact solution for vibration of cylindrical shells with intermediate ring supports. International Journal of Mechanical Sciences 44.
- [7] Banakiewicz Z., 1972. Promieniowe odkształcenia płaszczy pieców obrotowych. Cement Wapno Gips.
- [8] Zachwieja J., Gawda M., 2004. Charakter drgań rurociągu z pulsacyjnym przepływem powietrza. XIV Krajowa Konferencja PNEUMA 2004. Bydgoszcz.
- [9] Świtalski M., Zachwieja J., 1998. Metoda termiczna prostowania płaszczy walczaków obrotowych. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz. Mechanika 42. 85-91.
- [10] Loy C.T., Lam K.Y., 1999. Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity. Journal of Sound and Vibration 226(4).
- [11] Price N.M., Liu M., Taylor R.E., Kaene A.J., 1998. Vibrations of cylindrical pipes and open shells. Journal of Sound and Vibration 218(3).

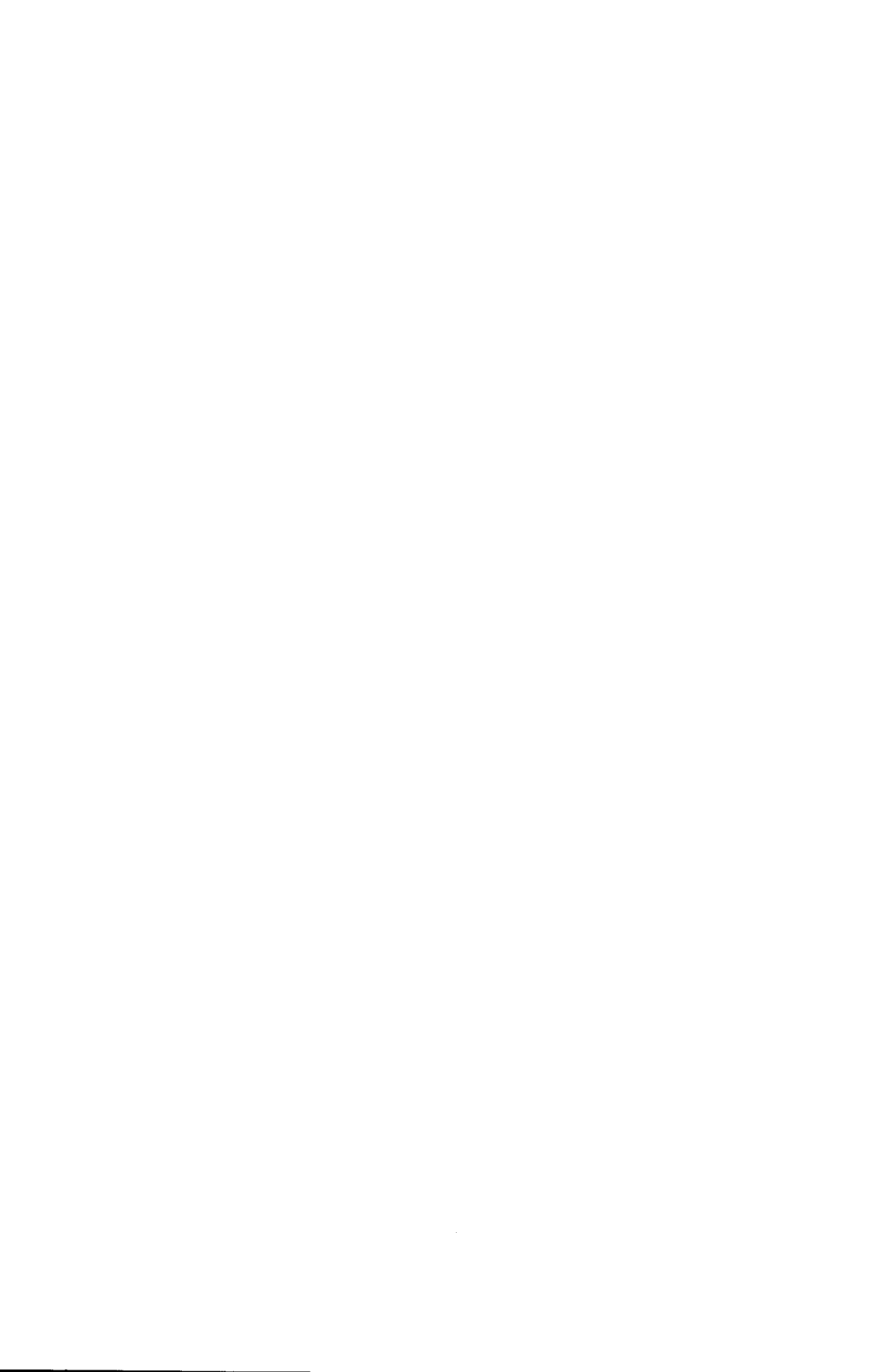
## NUMERICAL ANALYSIS OF A STATIC LOAD AND VIBRATIONS OF A ROTATIONAL DRUM

### Summary

Shell deformation problem of revolving boiler drum with two rolling rings fixed in a rigid way on the coat has been analyzed thoroughly in this work. Two significant theories describing stresses and deformations of the shell: Goldenveizer i Novozhilov and Donnell have been discussed. Using a numerical method, a boiler drum free vibrations matter has been solved.

Keywords: stress tensor, strain tensor, natural frequency, stiffness matrix, inertial matrix





ISSN 0208-6395