

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

ZESZYTY NAUKOWE NR 192

MECHANIKA 37

62
1005

**25-LECIE ODDZIAŁU POLSKIEGO TOWARZYSTWA
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W BYDGOSZCZY
- MATERIAŁY SESJI NAUKOWEJ**

BYDGOSZCZ - 1995

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

ZESZYTY NAUKOWE NR 192

MECHANIKA 37

G
1995

BYDGOSZCZ - 1995

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
prof. dr hab. Ojcumiła Stefaniak

Publikacja zawiera materiały Sesji Naukowej pt. "Mechanika materiałów niejednorodnych i konstrukcji złożonych" zorganizowanej z okazji 25-lecia Oddziału Bydgoskiego PTMTiS

KOMITET ORGANIZACYJNY:

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------|
| 1. prof. dr hab. inż. B. Siołkowski | - przewodniczący |
| 2. prof. dr hab. inż. J. Sempruch | - v-ce przewodniczący |
| 3. doc. dr inż. J. Rawłuszko | |
| 4. dr inż. M. Olejniczak | |
| 5. dr inż. J. Sawicki | - sekretarz |
| 6. dr inż. T. Topoliński | - redaktor |

KOMITET NAUKOWY:

1. prof. dr hab. inż. T. Burczyński
2. prof. dr hab. inż. R. Dzieścielak
3. prof. dr inż. R. Jankowiak
4. prof. dr hab. inż. J. Kubik
5. prof. dr hab. inż. J. Maryniak
6. prof. dr hab. inż. W. Nowacki
7. prof. dr hab. inż. B. Skalmierski
8. prof. dr hab. inż. Cz. Woźniak

Wydano za zgodą Rektora
Akademii Techniczno-Rolniczej
w Bydgoszczy

ISSN 0208-6395

WYDAWNICTWO UCZELNIANE AKADEMII TECHNICZNO-ROLNICZEJ
W BYDGOSZCZY

Wyd. I. Nakład 150 egz. Ark.wyd.10,2. Ark. druk. 12,5. Papier kl. III.
Oddano do druku we wrześniu 1995 r. Druk ukończono we wrześniu 1995 r.
Zakład Poligraficzny Kubik & Krause, 85-184 Bydgoszcz, ul. Cmentarna 84, tel. 719-546

SPIS TREŚCI

1. Bronisław Siołkowski: 25 lat Oddziału Bydgoskiego PTMTiS	5
2. Jerzy Cabański: Drgania belki ciągle-dyskretnej	13
3. Jerzy Gołaś: Analiza parametryczna wyboczenia włókna kompozytowego pasma lepkosprężystego w ujęciu teorii deformacji ścinania poprzecznego płyt wyższego rzędu	19
4. Irena Gołębiowska: Stacjonarny problem Lamba dla półprzestrzeni z warstwą elementów rezonansowych	33
5. Adam Górecki, Józef Flizikowski: Badania funkcjonalności zespołu rozdrabniającego z nieliniowym zarysem rzutu krawędzi rozdrabniających	43
6. Henryk Holka: Układy dyskretno-ciągłe jako wielowymiarowe obiekty sterowania	55
7. Jan Lorkowski: Macierz sztywności uwarstwionego podłoża w uproszczonej analizie rusztu na sprężystym podłożu	69
8. Aleksandra Niespodziana: Wpływ tłumienia dyskretnego na stateczność kolumny hybrydowej z trzema przegubami	83
9. Maria Olejniczak: Analiza współdziałania dwóch faz we włókno-kompozytowym ośrodku lepkosprężystym wstępnie sprężonym.....	91
10. Anna Podhorecka: Drgania swobodne w metodzie elementów czasoprzestrzennych	105
11. Adam Podhorecki: Metoda elementów czasoprzestrzennych w dynamice ośrodka ciąglego	115
12. Eugeniusz Ranatowski, Jacek Jackiewicz, Jan Sadowski: Niektóre aspekty zastosowania mechaniki pękania w praktyce inżynierskiej.....	125
13. Józef Rawłuszko: O problemach mechanicznych przy dystrybucji paczek	139

14. Jerzy Sawicki: Wpływ efektów bezwładności na FHD przepływ lepki w szczelinie między nieruchomymi powierzchniami obrotowymi	145
15. Józef Szala: Badania zmęczeniowe w pracach Katedry Podstaw Konstrukcji Maszyn	157
16. Romuald Świtka: Wprowadzenie do płaskiego problemu w mechanice włóknokompozytów	171
17. Krzysztof Wernerowski: Zagadnienia wyciszenia maszyn w przemyśle regionu bydgoskiego	179
18. Arnold Wilczyński, Marek R. Gogolin: Badanie właściwości lepko-sprężystych spoin klejowych łączących elementy drewniane.....	189

25 lat Oddziału Bydgoskiego PTMTiS

1. Informacje ogólne

12 lutego br. minęło 25 lat od powstania Oddziału Bydgoskiego PTMTiS. Dnia 12 lutego 1970 r. odbyło się zebranie organizacyjne, któremu przewodniczył członek Zarządu Głównego i przewodniczący Oddziału Poznańskiego prof. dr Edmund Karaśkiewicz. Na zebraniu tym z 12-tu członków wybrany został Zarząd Oddziału pierwszej kadencji w składzie:

dr inż. Krzysztof Wernerowski	- przewodniczący
dr inż. Tadeusz Kabat	- z-ca przewodniczącego
mgr inż. Bronisław Siołkowski	- sekretarz
mgr inż. Jerzy Cabański	- skarbnik

oraz Komisja Rewizyjna w składzie:

mgr inż. Jerzy Orobiej	- przewodniczący
dr inż. Mieczysław Feld	- członek
mgr inż. Tomasz Sauter	- członek

Oprócz wyszczególnionych członków Zarządu i Komisji Rewizyjnej członkami Oddziału w chwili jego powstania byli: dr inż. Tadeusz Bogumił, dr inż. Ludwik Janicki, mgr inż. Bogusław Kościelecki, dr inż. Antoni Matysiak i mgr inż. Kazimierz Wierzbicki.

W roku jubileuszowym pracami Oddziału kieruje Zarząd 14-tej kadencji w składzie:

prof. dr hab.inż. Bronisław Siołkowski	- przewodniczący
prof. dr hab.inż. Janusz Sempruch	- z-ca przewodniczącego
dr inż. Maria Olejniczak	- sekretarz
dr inż. Jerzy Sawicki	- skarbnik
doc. dr inż. Józef Rawłuszko	- członek
dr inż. Tomasz Topoliński	- członek

a Komisja Rewizyjna w składzie:

doc. dr inż. Krzysztof Wernerowski	- przewodniczący
dr inż. Henryk Holka	- członek
dr inż. Aleksandra Nicspodziana	- członek

nadzorując pracę Zarządu.

Skład osobowy Oddziału Bydgoskiego jest następujący:

1. Cabański Jerzy, dr inż., mechanika techniczna
2. Cabańska Katarzyna, dr inż., mechanika budowl
3. Chabowski Edmund, mgr inż., mechanika techniczna
4. Ciołczyk Ludwik, dr inż., miernictwo dynamiczne
5. Flizikowski Józef, dr hab. inż. prof. ATR, budowa rozdrabniaczy nasion
6. Golik Andrzej, dr inż., automatyka przemysłowa
7. Golaś Jerzy, doc. dr inż., konstrukcje inżynierskie i budowlane
8. Gołębiowska Irena, dr hab. inż., mechanika budowl
9. Górski Jan, mgr inż., konstrukcje metalowe
10. Holka Henryk, dr inż., dynamika maszyn
11. Jazdon Andrzej, dr inż., eksploatacja maszyn roboczych i pojazdów
12. Jedliński Ryszard, dr hab. inż. prof. ATR, eksploatacja maszyn roboczych i pojazdów
13. Kabat Tadeusz, dr inż., mechanika budowl
14. Kamiński Lech M. doc. dr inż., automatyka przemysłowa
15. Korona Andrzej, mgr inż., budownictwo ogólne
16. Lorkowski Jan, dr inż., mechanika budowl
17. Łukasiewicz Jan, dr inż., technika cieplna
18. Malec Mirosław, dr inż., mechanika techniczna, dynamika maszyn
19. Mroziński Stanisław, dr inż., podstawy konstrukcji maszyn
20. Niespodziana Aleksandra, dr inż., teoria konstrukcji inżynierskich
21. Olejniczak Maria, dr inż., mechanika budowl
22. Podhorecka Anna, dr inż., mechaniką konstrukcji
23. Podhorecki Adam, dr hab., inż. prof. ATR, mechanika budowl
24. Ranatowski Eugeniusz dr hab. inż. prof. ATR, budowa i eksploatacja maszyn spawalniczych
25. Rawłuszko Józef, doc. dr inż., mechanika precyzyjna, metrologia
26. Sadowski Jan, mgr inż., technologia i budowa maszyn
27. Sawicki Jerzy, dr inż., mechanika płynów
28. Sempruch Janusz, dr hab. inż. prof. ATR, podstawy konstrukcji maszyn
29. Siołkowski Bronisław, dr hab. inż. prof. ATR, mechanika techniczna - dynamika maszyn
30. Skibicki Dariusz, mgr inż., podstawy konstrukcji maszyn
31. Sobkowiak Adam, dr inż., sterowanie turbin
32. Szala Józef, prof. dr hab. inż., podstawy konstrukcji maszyn
33. Szymański Marian, dr inż., technika cieplna
34. Świtka Romuald, prof. dr hab. inż., mechanika budowl, mechanika ośrodka ciągłego

35. Topoliński Andrzej,	dr inż., mechanika płynów
36. Topoliński Tomasz,	dr inż., podstawy konstrukcji maszyn
37. Weiner Wojciech,	dr inż., eksploatacja maszyn spożywczych
38. Wernerowski Krzysztof,	doc. dr inż., mechanika stosowana i techniczna
39. Wiatr Roman,	dr inż., inżynieria poczty
40. Wilczyński Arnold,	prof. dr hab. inż., mechanika konstrukcji drewnianych i drewnopodobnych
41. Woropay Maciej,	dr hab. inż. prof. ATR, eksploatacja maszyn
42. Zachwieja Grażyna,	dr, matematyka stosowana
43. Zachwieja Janusz,	dr inż., mechanika płynów
44. Zastempowski Bogdan,	dr inż., napęd i sterowanie hydrauliczne
45. Zawiślak Kazimierz,	mgr inż. em., podstawy konstrukcji maszyn
46. Żołnierczyk Jan,	mgr inż., mechanika techniczna

Liczba członków Oddziału w poszczególnych latach wynosiła (dane na koniec roku):

1970	-	15	1982	-	37
1971	-	18	1983	-	39
1972	-	17	1984	-	40
1973	-	18	1985	-	40
1974	-	21	1986	-	43
1975	-	24	1987	-	43
1976	-	27	1988	-	42
1977	-	27	1989	-	42
1978	-	29	1990	-	43
1979	-	32	1991	-	43
1980	-	36	1992	-	43
1981	-	37	1993	-	46
			1994	-	46

W 25-leciu Oddziału Zarządom poszczególnych kadencji przewodniczyli:

	w kadencjach:
- doc. dr inż. Krzysztof Wernerowski	1, 2, 5, 6
- doc. dr inż. Lech M. Kamiński	3, 4
- doc. dr hab. inż. Edward Walicki	7, 8, 9
- prof. dr hab. inż. Bronisław Siołkowski	10, 11, 12, 13, 14

Wszyscy przewodniczący Zarządów są lub byli nauczycielami akademickimi Wydziału Mechanicznego Akademii Techniczno-Rolniczej. Z Wydziału tego aktualnie jest 24 członków. Drugie miejsce co do liczebności członków zajmuje Wydział Budownictwa - 11 członków. Pozostali członkowie rekrutują się

z Wydziałów Telekomunikacji i Elektrotechniki - 3 członków, Technologii i Inżynierii Chemicznej - 2 członków, Instytutu Techniki WSP - 2 członków i spoza wyższych uczelni Bydgoszczy 4 - członków.

Podsumowując pracę w zarządach i komisjach rewizyjnych poszczególnych kadencji najbardziej aktywnymi członkami są:

- prof. dr hab. inż. B. Siołkowski	- 12	"
- doc. dr inż. K. Wernerowski	- 12	"
- dr inż. J. Cabański	- 8	"
- dr inż. T. Kabat	- 8	"
- dr inż. A. Golik	- 7	"
- dr inż. A. Topoliński	- 7	"
- dr inż. J. Lorkowski	- 6	"
- dr inż. M. Malec	- 6	"
- prof. dr hab. inż. J. Sempruch	- 5	"

2. Działalność merytoryczna Oddziału

Działalność merytoryczna Bydgoskiego Oddziału PTMTiS w latach 1970-1995 prowadzona była w ramach:

- zebrań naukowych,
- seminariów, sesji i sympozjów naukowych,
- kursów techniczno-naukowych.

2.1. Zebrania naukowe

Na zebraniach naukowych referaty przedstawiali członkowie Oddziału oraz zaproszeni goście z zagranicznych i krajowych ośrodków naukowych. Liczbowe zestawienie zebrań naukowych w poszczególnych latach jest następujące:

1970	-	3 zebrań	1983	-	3 zebrań
1972	-	7 zebrań	1984	-	3 "
1973	-	5 "	1985	-	-
1974	-	5 "	1986	-	5 zebrań
1975	-	5 "	1987	-	9 "
1976	-	4 zebrań	1988	-	6 "
1977	-	4 "	1989	-	5 "
1978	-	4 "	1990	-	4 zebrań
1979	-	9 zebrań	1991	-	4 "
1980	-	4 zebrań	1992	-	4 "
1981	-	3 "	1993	-	6 zebrań
1982	-	1 zebranie	1994	-	4 zebrań

Szczegółowe wykazy referatów za lata 1970-90 znajdują się w sprawozdaniach poszczególnych kadencji i w sprawozdaniach opracowanych z okazji 15-lecia i 20-lecia Oddziału. Natomiast za lata 1991-95 wykaz ten jest następujący.

Data	Prelegent	Temat	Liczba uczest. / dyskut.
91.02.26	dr inż. Maria Olejniczak	Analiza tarcz jedno i dwufazowych materiałów lepkosprężystych z uwzględnieniem sprzężenia	8/4
91.05.28	mgr inż. Aleksandra Niespodziana	Wpływ lokalnej utraty sztywności na stateczność układów dysypatywnych obciążonych siłą cyrkulacyjną	9/5
91.06.25	dr inż. Jerzy Cabański	Badania drgań złożonych układów mechanicznych przy pomocy układów zastępczych	14/7
91.12.18	dr hab.inż. Józef Flizikowski	Quasi-ściananie nasion zbóż w warunkach rozdrabniania wielotarczowego	13/6
92.03.19	dr inż. Adam Podhorecki	Wprowadzenie do czasoprzestrzeni	12/6
92.04.28	dr inż. Jerzy Cabański	Metoda wyznaczania częstości własnych belek z lokalnymi zmianami sztywności	16/4
	dr inż. Andrzej Golik	Algorytm do określania symbolicznej postaci podwyznacznika Hurwitza	16/6
92.06.05	doc. dr inż. Krzysztof Wernerowski	Asymptotyczna metoda obliczeń drgań z nieliniowym tarciem wewnętrznym	15/6
92.11.23	prof. dr inż. George Przybył Einstein	Robots for Industry, Medicine and Space- przegląd badań własnych w ostatnim dziesięcioleciu	35/8
93.04.06	dr inż. Henryk Holka	Pasywne i aktywne metody kontroli drgań	14/5
93.05.14	dr hab. inż. Janusz Sempruch	Wybrane zagadnienia oceny wytrzymałości zmęczeniowej w warunkach złożonego stanu obciążenia	16/6
93.06.15	doc. dr inż. Józef Rawłuszko	Zagadnienia logistyki jako problem integrujący naukowe dyscypliny techniczne	11/6
93.06.21	prof. dr hab.inż. Romuald Świtka	Ogólne równania powłok włókno-kompozytowych	9/4
93.10.08	mgr inż. Jacek Jackiewicz	Prognozowanie kierunku propagacji pęknięcia na podstawie kryterium gęstości energii odkształcenia	10/5
93.12.10	dr hab. inż. Irena Gołębiewska	Zagadnienia Λ dla sprężystej półprzestrzeni pokrytej słojem tłumików	16/6

94.03.11	dr inż. Mieczysław Kuczma	Sformułowanie problemów plastycznego płynięcia w postaci nierówności wariacyjnej	15/5
94.04.19	dr inż. Katarzyna Cabańska	Zagadnienia statyczne belki Bernoulliego posadowionej na podłożu sprężystym	17/6
94.06.10	prof. dr hab. inż. Romuald Świtka	Podstawy termosprężystości włókno-kompozytów	20/6
94.12.05	prof. dr hab. inż. Arnold Wilczyński	Badania wytrzymałości połączeń klejowych występujących w konstrukcjach drewnianych	17/8

2.2. Seminaria, sesje i sympozjony

W ramach tej formy działalności zorganizowano:

1. Seminarium nt. "Rachunek macierzowy w mechanice", w 1972 r., 4 spotkania, prelegent doc. dr Tadeusz Jędryka, uczestniczyło około 30 osób.
2. Seminarium nt. "Mechanika płynów" 1979 r., 2 spotkania, prelegent doc. dr hab. inż. Edward Walicki, uczestniczyło ok. 30 osób.
3. Sympozjum ogólnopolskie nt. "Łożyska ślizgowe" 21-22. 10. 1983. Wygłoszono 11 referatów, uczestniczyło 65 członków i sympatyków PTMTiS. Honorowym gościem sympozjum był prof. dr hab. inż. Stefan Ziemba.
4. Sesja naukowa z okazji 15-lecia Oddziału, 18.04.1986 r. Wygłoszony został jeden referat ogólny prof. dr. hab. inż. Józefa Wojnarowskiego i 11 referatów w dwóch sekcjach. Uczestniczyło 32 członków i sympatyków PTMTiS.
5. Seminarium nt. "Stateczność konstrukcji i układów mechanicznych", 1987 r., 9 spotkań, 7 prelegentów w tym prof. A. Tylikowski, doc. B. Siołkowski i inni, uczestniczyło od 10 do 32 osób.
6. Seminarium nt. "Trwałość zmęczeniowa elementów maszyn", 1988 r., 4 spotkania, wygłoszono 8 wykładów i referatów przez zespół pod kierunkiem prof. dr. hab. inż. J. Szali. Uczestniczyło 60 słuchaczy.
7. Seminarium nt. "Zastosowanie komputerów w nauczaniu mechaniki technicznej", 1989-90, 4 spotkania, 3 prelegentów m.in. prof. J. Kruszewski, 25 uczestników.
8. Sesja naukowa z okazji 20-lecia Oddziału połączona z zebraniem Zarządu Głównego PTMTiS 19-20.09.1991 r. W sesji wygłoszonych było 6 referatów,

uczestniczyło 36 osób. Poszczególnym częściom obrad sesji przewodniczyli: prof. dr hab. inż. Bogdan Skalmierski, prof. dr hab. inż. Zbigniew Cywiński i prof. dr hab. inż. Czesław Woźniak.

9. Seminarium nt. "Metoda elementów skończonych" 1995 r., 8 spotkań w tym 2 wykłady: prof. dr hab. inż. Romualda Świtki i prof. dr hab. inż. Bronisława Siołkowskiego i 6 prezentacji programów używanych w jednostkach organizacyjnych uczelni. Uczestniczyło 20-30 członków i sympatyków PTMTiS.

2.3. Kursy techniczno-naukowe

1. Ogólnopolski kurs n.t. "Możliwości realnego zwalczania hałasu i szkodliwych drgań w zakładach przemysłowych". 1990.04.06., 8 godzin wykładów i seminariów. Uczestniczyło 12 osób kadry inżynierskiej z różnych zakładów przemysłowych. Kursem kierował i prowadził część zajęć doc. dr inż. Krzysztof Wernerowski.
2. Ogólnopolski kurs n.t. "Eksploatacja i diagnostyka maszyn wirnikowych" 1994.05.09-10, 16 godzin wykładów i seminariów. Uczestniczyło 26 osób kadry inżynierskiej z różnych zakładów przemysłowych. Kursami kierował i wygłosił jeden wykład prof. dr hab. inż. Bronisław Siołkowski.

W podsumowaniu działalności merytorycznej warto przytoczyć kilka liczb:

Zorganizowanych zostało 121 imprez naukowych, na których zostało wygłoszonych 175 wykładów i referatów, a uczestniczyło w nich 2360 osób.

Wykładowcami i referentami imprez naukowych byli: 7 goście zagranicznych, 49 osób z innych ośrodków naukowych krajowych i 119 członków naszego Oddziału.

Najaktywniejsi członkowie naszego Oddziału w pracy merytorycznej to:

1. prof. dr hab. inż. Bronisław Siołkowski	- 18	wygłoszonych wykładów i referatów
2. doc. dr inż. Krzysztof Wernerowski	- 14	"
3. dr inż. Tadeusz Kabat	- 10	"
4. prof. dr hab. inż. Józef Szala	- 8	"
5. doc. dr hab. inż. Edward Walicki	- 7	"
6. dr inż. Andrzej Topoliński	- 7	"
7. prof. dr hab. inż. Romuald Świtka	- 6	"

DRGANIA BELKI CIĄGŁO-DYSKRETNEJ

Jerzy Cabański

Wydział Mechaniczny ATR, Katedra Mechaniki Stosowanej
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono jednolitą metodę rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych belki ciągło-dyskretnej. Układ ten złożony jest z belki ciągłej oraz sztywnych brył połączonych z belką ciągłą rotacyjnymi więzami sprężystymi. Istotą tej metody są nieruchome węzły, które tworzą się na rotacyjnych więzach sprężystych w trakcie drgań własnych układu. Węzły te umożliwiają opisać zjawisko drgań belki ciągło-dyskretnej rozprzężonym układem równań różniczkowych.

1. WSTĘP

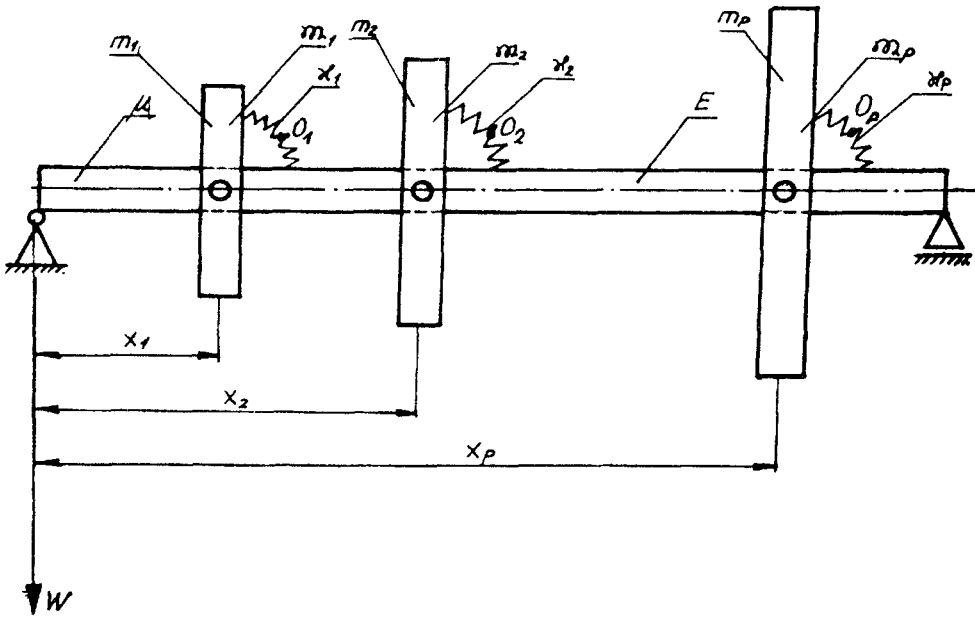
Pod pojęciem belki ciągło-dyskretnej przyjęto ciągłą belkę Bernoulliego-Eulera, do której przyłączone są sztywne ciała w sposób sztywny lub podatny. Bezwładność przyłączonych do belki sztywnych ciał oraz sztywność więzi może być translacyjna [1, 2], lub również rotacyjna. Także istotnym elementem belki ciągło-dyskretnej jest jej dyskretna sztywność [3].

Klasyczne metody rozwiązywania zagadnienia drgań swobodnych belki ciągło-dyskretnej polegają na rozwiązywaniu układu równań różniczkowych opisujących zjawisko tych drgań, co prowadzi do bardzo skomplikowanych obliczeń.

W celu uniknięcia tych trudności podjęto w pracach [1, 2, 3] jak i niniejszej, próby opracowania bardziej efektywnych metod rozwiązywania zagadnienia drgań belk ciągło-dyskretnych.

2. CEL PRACY I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Celem pracy jest opracowanie nowej, analitycznej metody rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych belki ciągło-dyskretnej. Belka ciągło-dyskretna składa się z belki ciągłej, podpartej na jej końcach przegubowo, oraz sztywnych brył połączonych z belką ciągłą rotacyjnymi więziami sprężystymi (rys. 1).



Rys. 1. Schemat belki ciągu-dyskretnej

Zjawisko drgań swobodnych belki ciągu-dyskretnej (rys.1) opisane jest następującym układem równań różniczkowych:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^p m_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta(x - x_i) - \sum_{i=1}^p \chi_i \left[\varphi_i - \frac{\partial w(x_i)}{\partial x} \right] \delta(x - x_i) = 0 \quad (1)$$

$$M_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + \chi_i \left[\varphi_i - \frac{dw(x_i)}{dx} \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

gdzie:

- $w = w(x, t)$ - ugięcie belki,
- $\varphi_i = \varphi_i(t)$ - kąt rotacji i -tej bryły,
- μ - masa belki przypadająca na jednostkę długości,
- m_i - masa i -tej bryły,
- M_i - masowy moment bezwładności i -tej bryły względem osi rotacji,

E	- moduł Younga materiału belki ciągłej,
I	- moment bezwładności przekroju poprzecznego belki względem osi obojętnej tego przekroju,
χ_i	- sztywność rotacyjna i-tej więzi sprężystej,
$\delta(x - x_i)$	- dystrybucja (delta) Diraca,
x	- współrzędna przekroju belki,
t	- czas.

3. ROZPRZEŻENIE UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH I SEPARACJA ZMIENNYCH

Wykorzystując fakt pojawienia się węzłów O_i na sprężystych więziach [1], przedstawiono układ równań różniczkowych (1) w następującej postaci rozprzężonej:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^p m_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta(x - x_i) - \sum_{i=1}^p \chi_{iI} \frac{\partial w(x_i)}{\partial x} \delta'(x - x_i) = 0 \quad (2)$$

$$M_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + \chi_{iII} \cdot \varphi_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Stosując w (2), odpowiednio, podstawienia:

$$w(x, t) = W(x) \cdot T(t), \quad (3)$$

$$\varphi_i(t) = \phi_i \cdot T(t)$$

otrzymano równanie amplitud drgań belki ciągłej:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} - \omega^2 \mu W - \omega^2 \sum_{i=1}^p m_i W(x_i) \delta(x - x_i) - \sum_{i=1}^p \chi_{iI} \frac{dW(x_i)}{dx} \delta'(x - x_i) = 0 \quad (4)$$

oraz równanie ruchu całego układu:

$$T + \omega^2 T = 0 \quad (5)$$

gdzie:
$$\omega^2 = \frac{\chi_{iII}}{M_i} \quad (6)$$

Z reguły szeregowego połączenia sztywności $\chi_{iI} i \chi_{iII}$ oraz uwzględnieniu (6) wyznaczono:

$$\chi_{ii} = \frac{\omega^2 M_i \chi_i}{\omega^2 M_i - \chi_i} \quad (7)$$

Następnie po podstawieniu (7) do (4) otrzymano:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W}{dx^4} - \lambda^4 W = & \sum_{i=1}^p \omega^2 \frac{m_i}{EJ} W_{(x_i)} \delta(x - x_i) + \\ & + \sum_{i=1}^p \omega^2 \frac{M_i \chi_i}{EJ(\omega^2 M_i - \chi_i)} \frac{dW_{(x_i)}}{dx} \delta(x - x_i) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:
$$\lambda'' = \frac{\mu \omega^2}{EJ} \quad (9)$$

4. ROZWIĄZANIE ZADANIA BRZEGOWEGO

Rozwiązanie równania różniczkowego (8), stosując metodę Cauchy'ego, przyjmując postać:

$$\begin{aligned} W = & A \operatorname{Sh} \lambda x + B \operatorname{Ch} \lambda x + C \sin \lambda x + D \cos \lambda x + \\ & + \frac{\omega^2}{2 \lambda^3 E J} \sum_{i=1}^p m_i W_{(x_i)} [\operatorname{Sh} \lambda(x - x_i) - \sin \lambda(x - x_i)] H(x - x_i) + \\ & + \frac{\omega^2}{2 \lambda^2 E J} \sum_{i=1}^p \frac{M_i \chi_i}{\omega^2 M_i - \chi_i} \frac{dW_{(x_i)}}{dx} [\operatorname{Ch} \lambda(x - x_i) - \cos \lambda(x - x_i)] H(x - x_i) \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

A, B, C, D - stałe całkowania,

H(x-x_i) - funkcja Heaviside'a.

W celu wyznaczenia częstości i postaci drgań własnych belki sformułowano następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} W_{x=0} &= 0, & \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 0 \\ W_{x=l} &= 0, & \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=l} &= 0 \\ W_{x-x_i} - W_{(x_i)} &= 0, & \frac{dW}{dx} \Big|_{x-x_i} - \frac{dW_{(x_i)}}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

i = 1, 2, ..., p

tworzące jednorodny układ liniowych równań algebraicznych, który w zapisie macierzowym przyjmuje postać:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = 0 \quad (12)$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = [A, B, C, D, W_{(x_1)}, W_{(x_2)}, \dots, W_{(x_p)}, \dots, W_{(x_p)}, \frac{dW_{(x_1)}}{dx}, \frac{dW_{(x_2)}}{dx}, \dots, \frac{dW_{(x_p)}}{dx}] \quad (13)$$

Warunkiem rozwiązania układu równań (12) jest zerowanie się wyznacznika macierzy charakterystycznej, a mianowicie:

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad (14)$$

Po wyznaczeniu z równania charakterystycznego ciągu wartości (częstości) własnych $\omega_n, n = 1, 2, \dots, \infty$ i podstawieniu ich do (12) otrzymuje się ciąg rozwiązań \mathbf{X}_n , które po podstawieniu do (10) wyznaczają ciąg funkcji własnych $W_n, n = 1, 2, \dots, \infty$.

Ciąg postaci własnych i -tej bryły wyznacza się z równości sił sprężystych więzi o sztywności χ_{iin} i więzi o sztywności χ_{illn} , a mianowicie:

$$\phi_{in} = -\frac{\chi_{illn}}{\chi_{iin}} \cdot \frac{dW_n(x_i)}{dx} \quad (15)$$

5. ROZWIĄZANIE ZADANIA POCZĄTKOWEGO

Rozwiązanie równania różniczkowego ruchu (5), dla $\omega = \omega_n$, ma postać:

$$T_n = K_n \sin \omega_n t + L_n \cos \omega_n t + L_n \cos \omega_n t \quad (16)$$

Stałe całkowania K_n i L_n wyznacza się z następujących warunków początkowych:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= w_0, & \varphi_{(0)} &= \varphi_0 \\ w(x, 0) &= w_0, & \varphi_{(0)} &= \varphi_0 \end{aligned} \quad (17)$$

z uwzględnieniem ortogonalności postaci własnych określonej następująco:

$$\mu \int W_m W_n dx + \sum_{i=1}^p m_i W_m(x_i) W_n(x_i) + \sum_{i=1}^p M_i \phi_{im} \phi_{in} = N_n \delta_{mn} \quad (18)$$

$$N_n = \mu \int W_n^2 dx + \sum_{i=1}^p m_i W_n^2(x_i) + \sum_{i=1}^p M_i \phi_{in}^2, \quad (19)$$

gdzie:

δ_{mn} – delta Kroneckera.

Drgania swobodne są najczęściej drganiami poliharmonicznymi, które poszukuje się w postaci szeregu Fouriera według funkcji własnych, a mianowicie:

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n T_n \quad (20)$$

oraz

$$\varphi_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{in} T_n \quad (21)$$

LITERATURA

- [1] Cabański J.: Method of Calculation of Basic Parameters of Vibration Eliminators by Complex Functions. Z.AMM. Z. angew. Math.Mech. 73, 4 - 5, 1993, pp. 148 - 150
- [2] Cabański J.: Metoda badania drgań własnych układu dyskretno-ciągłego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. S. Mechanika, z. 115, Gliwice 1994, ss. 63 - 68
- [3] Cabański J.: Drgania własne belki o sztywności ciągło-dyskretnej: Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. S. Mechanika, z. 121, Gliwice 1995, ss. 55 - 59

VIBRATION OF CONTINUOUS-DISCRETE BEAM

Summary

In this paper is presented a uniform method of a Solution of problem of a free vibration of a continuous-discrete beam. This system is folded from a continuous beam and a stiff solid, which is connected rotational, elastic constraints with a continuous beam. An essence of this method are immovable nodes, which creating on rotational, elastic constraints in time of free vibration of a system. With helping these nodes is described a phenomenon of vibration of continuous-discrete beam, which is dissolut enessed of the system of differential equations.

ANALIZA PARAMETRYCZNA WYBOCZENIA WŁÓKNOKOM- POZYTOWEGO PASMA LEPKOSPĘŻYSTEGO W UJĘCIU TEORII DEFORMACJI ŚCINANIA POPRZECZNEGO PŁYT WYŻSZEGO RZĘDU

Jerzy Gołaś

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR, Katedra Mechaniki Budowli
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz.

Celem pracy jest przeprowadzenie analiz parametrycznych wybooczenia włóknokompozytowego pasma lepkospężytego zbrojonego symetrycznie i poddanego działaniu równomiernych sił osiowych.

Do opisu stanu deformacji i stanu naprężenia przyjęto w pracy teorię deformacji i ścinania poprzecznego płyt wyższego rzędu z uwzględnieniem własności reologicznych matrycy. Na tle przeprowadzonych analiz numerycznych określono w pracy zakres stosowalności klasycznej hipotezy kinematycznej Kirchhoffa-Love'a dla zginanych płyt włóknokompozytowych

1. WSTĘP

Tworzywa włóknokompozytowe jako materiały konstrukcyjne znajdują coraz to większe zastosowanie we współczesnych konstrukcjach powierzchniowych, tak w budownictwie, jak i w przemyśle chemicznym, lotniczym, okrętowym i wielu innych. Cechuje je m.in. duża wytrzymałość właściwa, lekkość i odporność na działanie czynników chemicznych. Stosowanie tworzyw włóknokompozytowych w technice wymaga jednak w wielu przypadkach uwzględnienia ich własności reologicznych oraz odstępiania od klasycznego założenia kinematycznego o nie-deformowalności odcinka normalnego. Przypadki takie występują szczególnie w chwili obecnej, gdzie w związku z szybkim rozwojem nowoczesnej techniki, opartej w głównej mierze na pracy elementów konstrukcyjnych w warunkach dużych obciążeń, uwydatniają się wpływy pełzania i deformacji ścinania poprzecznego [1, 2]. Jak wiadomo z badań teoretycznych i eksperymentalnych [3, 4, 5, 6, 7, 8] wynika, że stosowanie hipotezy Kirchhoffa-Love'a (K-L) znacznie zaniża wartości przemieszczeń oraz zawyża wielkości obciążeń krytycznych i częstości drgań własnych. Przykładowo wg [5], teoria K-L w sto-

sunku do teorii deformacji ścinania poprzecznego płyt wyższego rzędu (HSDPT) zawiąza wielkość obciążenia krytycznego dla sprężystej płyty izotropowej, swobodnie podpartej, jednokierunkowo ściskanej, aż o 73,32%.

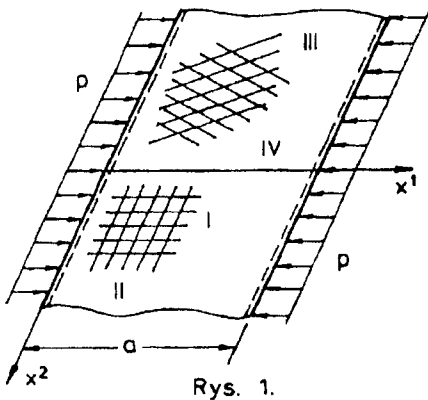
W pracy niniejszej do opisu tworzywa wykorzystuje się koncepcję dwufazowego modelu kontynualnego płyty włóknokompozytowej zaczerpniętą z prac R. Świtki [9, 10]. Według tego modelu faza I, zwana matrycą, wzmocniona jest gęstymi siatkami (faza II) wykonanymi z rodzin włókien o określonych kierunkach i znanych własnościach fizycznych. Siatki włókniste leżą w płaszczyznach równoległych do powierzchni środkowej płyty i wykonane są z cienkich długich włókien o wyraźnie wyższych własnościach mechanicznych, aniżeli materiał matrycy. Zakłada się tu pełną zgodność przemieszczeń i odkształceń pomiędzy obu fazami. Według szacunków udział fazy II w przekroju poprzecznym płyty wynosi do około 8%.

Kierunki rozwoju odpowiednich uściśleń teorii płyt zostały wyczerpująco przedstawione w pracach [1, 3, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 24], gdzie ponadto zawarto bogatą literaturę szczegółową. Wymienić jednak należy m.in. takie nazwiska, jak: Timoshenko S.P., Reissner E., Hencky H., Własow B.F., Mindlin R.D., które na trwałe zapisały się w literaturze dotyczącej rozwoju teorii płyt średniej grubości.

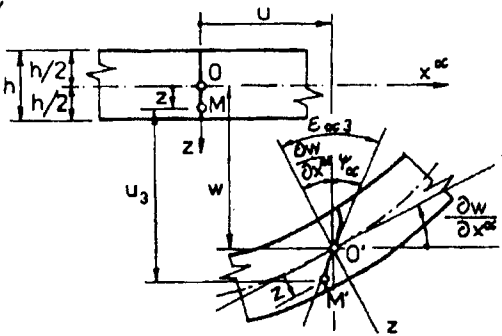
Celem niniejszej pracy jest dokonanie analiz parametrycznych dla wyobczonego włóknokompozytowego pasma lcpkosprężystego, symetrycznie zbrojonego, poddanego działaniu równomiernych sił osiowych p (rys. 1.). Do opisania stanu deformacji i naprężeń przyjęto teorię deformacji ścinania poprzecznego płyt wyższego rzędu (HSDPT) podaną przez Reddy'ego w [14, 15], która okazuje się zbliżoną z uściślonym II wariantem teorii płyt Timoshenki [3, 18]. W teorii tej prostoliniowe odcinki normalne do płaszczyzny środkowej płyty przed deformacją, nie pozostają w trakcie deformacji prostopadłe i ulegają zakrzywieniu (rys. 2.), a poprzeczne naprężenia tnące posiadają paraboliczny rozkład wzdłuż grubości h .

Teoria ta, w stosunku do teorii deformacji ścinania poprzecznego pierwszego rzędu (FSDPT) Reissnera-Mindlina lub I wariantu teorii Timoshenki, nie wymaga wprowadzania współczynnika korekcyjnego ścinania poprzeczne.

Parametryczna analiza została przeprowadzona na podstawie zamkniętych rozwiązań analitycznych (uzyskanych przez autora w [19]) na natychmiastowe i długotrwałe obciążenia krytyczne oraz porównana z odpowiednimi rozwiązaniami sprężystymi zbrojonych i niezbrojonych pasm płytowych wg teorii pierwszego (FSDPT) i zerowego rzędu (K-L).



Rys. 1.



Rys. 2.

2. ROZWIĄZANIA ANALITYCZNE

Kinematykę dowolnego punktu $M(x^1, x^2, z \in \langle -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \rangle)$ z obszaru płyty opisuje się w teorii deformacji ścinania poprzecznego wyższego rzędu (HSDPT), [14, 15], polem przemieszczeń, którego składowe w płaszczyźnie u_1, u_2 są funkcjami trzeciego stopnia, a składowa u_3 zerowego stopnia zmiennej z . W wyniku spełnienia ograniczeń nałożonych na stan naprężeń poprzecznych, składowe tego pola przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 u_1(x^1, x^2, z) &= u + z \left[\psi_1 - C \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} (\psi_1 + w, 1) \right] \\
 u_2(x^1, x^2, z) &= v + z \left[\psi_2 - C \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} (\psi_2 + w, 2) \right] \\
 u_3(x^1, x^2, z) &= w(x^1, x^2)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

gdzie: $u(x^1, x^2), v(x^1, x^2), w(x^1, x^2)$ - składowe wektora przemieszczenia punktów płaszczyzny środkowej odpowiednio w kierunkach osi x^1, x^2, z ; $\psi_1(x^1, x^2), \psi_2(x^1, x^2)$ - kąty obrotu odcinka normalnego wokół osi x^2 i x^1 .

W zależnościach (1) wprowadzono dodatkowy współczynnik liczbowy C , w celu dalszego uogólnienia uzyskanych rozwiązań na wszystkie rozważane tu teorie, tzn.: w HSDPT $C = 1$, w FSDPT $C = 0$, a w K-L $C = 0$ i jednocześnie $\psi_1 = -w, 1$; $\psi_2 = -w, 2$.

Sformułowane pole przemieszczeń (1) pozwala z łatwością określić wszystkie składowe tensora odkształceń Cauchy'ego e_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Przykładowo:

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + z \left(\overset{o}{\kappa}_{11} + Cz^2 \overset{2}{\kappa}_{11} \right) \quad (2)$$

$$e_{13} = \varepsilon_{13} + Cz^2 \overset{2}{\kappa}_{13}$$

gdzie: $\varepsilon_{11} = u_{,1}$; $\overset{o}{\kappa}_{11} = \psi_{1,1}$; $\overset{2}{\kappa}_{11} = -\frac{4}{3h^2}(\psi_{1,1} + w_{,11})$; $\varepsilon_{13} = \psi_{1,1} + w_{,1}$;
 $\overset{2}{\psi}_{13} = -\frac{4}{h^2}(\psi_{1,1} + w_{,1})$.

Natomiast odpowiednie równania nierozdzielności odkształceń dla powierzchni środkowej płyty są, wobec przyjętych założeń kinematycznych, spełnione tożsamościowo.

Zakłada się, że matryca wykonana jest z izotropowego tworzywa o cechach reologicznych. Materiał matrycy jest liniowo lepkosprężysty, jednak wobec wzmocnienia go gęstymi siatkami włókien w płaszczyznach równoległych do powierzchni środkowej i o układzie zapewniającym ortotropię płyty w kierunkach pokrywających się z liniami parametrycznymi $x^\alpha = const.$, własność lepkosprężystą utrzymuje się jedynie w składowych postaciach i stycznych odpowiednich tensorów odkształcenia i naprężenia [3]. Przykładowo, równania fizyczne dla materiału matrycy mają postać:

$$\sigma^{11} = A^{1111} e_{11} + A^{1122} e_{22}, \quad \sigma^{13} = A^{1313} e_{13} - \int_0^t R^{1313} (t - \tau) e_{13}(\tau) d\tau \quad (3)$$

gdzie: $A^{1111} = \frac{E}{1-\nu^2}$, $A^{1122} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$, $A^{1313} = G^{13} = G'$, $R^{1313} = \frac{G'-H'}{n_{13}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{n_{13}}\right)$ - jądro relaksacji dla modelu ciała liniowo lepkosprężystego (trójparametrowego) o związku konstytutywnym: $\sigma^{13} + n_{13} \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial t} = H' e_{13} + n_{13} G' \frac{\partial e_{13}}{\partial t}$; G', H' - natychmiastowy i długotrwały moduł ścinania poprzecznego, n_{13} - czas relaksacji.

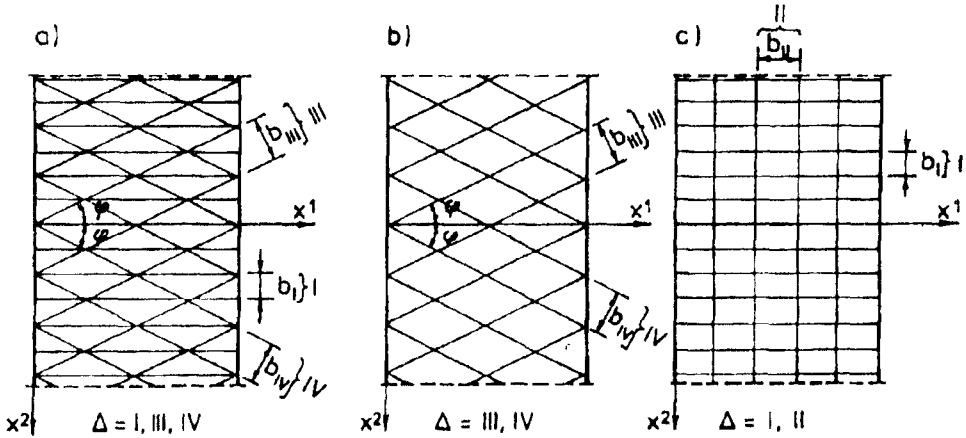
Fazę włóknistą stanowią rodziny włókien prostoliniowych (Δ) o stałym kierunku, które tworzą gęste siatki w płaszczyznach $z = z^r$, ($r=1, 2, 3, \dots$). Do opisu jej stosuje się model kontynuacyjny [9]. Przykładowe rozmieszczenie włókien $\Delta = I, II, III, IV$ w r -tej siatce przedstawiono schematycznie na rysunku 3.

W pracy wykorzystuje się obok sposobu oznaczeń z [9, 10] również pewne koncepcje zawarte w [20, 21]. Składowe uciągniętej siły $\overset{r}{S}_{(\Delta)}$ we włóknach rodziny (Δ) o modelu ciała liniowo sprężystego, wynoszą:

$$\overset{r}{S}_{(\Delta)}^{\alpha\beta} = \frac{\overset{r}{E}_{(\Delta)} \overset{r}{A}_{(\Delta)}}{\overset{r}{b}_{(\Delta)}} \left(\overset{r}{t}_{(\Delta)}^\delta \overset{r}{t}_{(\Delta)}^\lambda \overset{r}{e}_{(\Delta)\delta\lambda} - \overset{r}{e}_{(\Delta)}^r \right) \overset{r}{t}_{(\Delta)}^\alpha \overset{r}{t}_{(\Delta)}^\beta, \quad (\alpha, \beta, \delta, \lambda = 1, 2) \quad (4)$$

gdzie przez $\overset{r}{e}_{(\Delta)}^r$ oznaczono wstępną dystorsję włókien. Dla wszystkich rodzin włókien (Δ) wchodzących w skład siatki o numerze r , otrzymamy:

$$\overset{r}{S}^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} \overset{r}{S}_{(\Delta)}^{\alpha\beta}$$



Rys. 3.

W rozważaniach zakłada się pełną przyczepność między matrycą a włóknami, zatem przekrojowe siły wewnętrzne włóknokompozytu są sumą sił poszczególnych jego składników.

W celu wyznaczenia obciążenia krytycznego (bifurkacyjnego) płyty rozważania ogranicza się do liniowej teorii stateczności, w ramach której stan dokrytyczny jest bezmomentowy, a wyboczenie oznacza istnienie położenia równowagi dowolnie bliskiego położeniu równowagi dokrytycznej [22, 23]. Równania różniczkowe wyboczenia płyty mają tu postać:

$$N_{,\alpha}^{\alpha\beta} = 0, \quad M_{,\alpha}^{\alpha\beta} - Q^{\beta} = 0, \quad Q_{,\alpha}^{\alpha} + \overset{\circ}{N}^{\alpha\beta} (w + \overset{*}{w}),_{\alpha\beta} = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (5)$$

gdzie: $\overset{\circ}{N}^{\alpha\beta}$ - siły dokrytyczne, w - ugięcie powyboczeniowe, $\overset{*}{w}$ - małe ugięcie początkowe,

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{\alpha\beta} dz + \sum_r S^{r\alpha\beta}, \quad M^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{\alpha\beta} z dz + \sum_r S^{r\alpha\beta} z^r, \quad Q^{\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{\beta 3} dz.$$

W wzorach (4), (5) obowiązuje konwencja sumacyjna po wskaźnikach greckich znajdujących się na różnych poziomach.

Dla pasma włóknokompozytowego, swobodnie podpartego i poddanego jednokierunkowemu ściskaniu siłami równomiernymi p (rys. 1) oraz przy $\overset{\circ}{e}_{(\Lambda)}^r = 0$ siły dokrytyczne wynoszą: $\overset{\circ}{N}^{11} = -p$, $\overset{\circ}{N}^{22} = \overset{\circ}{N}^{12} = 0$, a wszystkie poszukiwane wielkości są funkcjami jednej zmiennej x^1 . Ponadto, dla pasma wykonanego z włóknokompozytu, w którego przekroju poprzecznym występują jedynie dwie jednakowe i symetrycznie rozmieszczone siatki włókniste w odległościach $z^r = \pm e$ siły wewnętrzne przyjmują przykładowo postać [19]:

$$M^{11} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{5}C \right) \overset{\circ}{D} + 2 \overset{r}{B}^{1111} e^2 \left(1 - C \frac{4}{3} \frac{e^2}{h^2} \right) \right\} \Psi_{1,1} - C \left(\frac{1}{5} \overset{\circ}{D} + \frac{8}{3} \overset{r}{B}^{1111} \frac{e^4}{h^2} \right) w_{,11} \quad (6)$$

$$Q^1 = G'h \left(k - \frac{1}{3}C \right) (\Psi_1 + w_{,1}) - h \left(k - \frac{1}{3}C \right) \frac{G'-H'}{n_{13}} \int_0^t [\Psi_1(\tau) - w_{,1}(\tau)] \exp \left(-\frac{t-\tau}{n_{13}} \right) d\tau$$

$$\text{gdzie: } \overset{r}{B}^{1111} = \sum_{\Delta} \frac{\overset{r}{E}_{(\Delta)} \overset{r}{A}_{(\Delta)}}{\overset{r}{b}_{(\Delta)}} \left(\overset{r}{t}_{(\Delta)} \right)^4, \quad \overset{\circ}{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \overset{r}{t}_{(\Delta)} - \text{cosinus kierunkowy,}$$

a wprowadzony tu w celu uogólnienia rozwiązań współczynnik k przyjmuje odpowiednio wartości: $k = 1$ dla HSDPT (gdzie jednocześnie $C = 1$), $k = \frac{2}{6}$ dla FSDPT (gdzie ponadto $C = 0$). Natomiast po podstawieniu (6) do (5) otrzymamy przemieszczeniowy układ równań różniczkowo-całkowych, którego rozwiązanie przy warunkach brzegowych zadania:

$$\text{dla } x^1 = 0: \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \Psi_2 = 0, \quad N^{12} = 0, \quad M^{11} = 0 \quad (7)$$

$$\text{dla } x^1 = a: \quad N^{11} = -p, \quad w = 0, \quad \Psi_2 = 0, \quad N^{12} = 0, \quad M^{11} = 0$$

i aproksymacji wstępnego ugięcia $\overset{\star}{w}(x^1) = f_0 \sin \frac{\pi x^1}{a}$, można poszukiwać w postaci:

$$w(x^1, t) = f(t) \sin \frac{\pi x^1}{a}, \quad \Psi_1(x^1, t) = g(t) \cos \frac{\pi x^1}{a} \quad (8)$$

Ostateczne rozwiązanie danego układu równań wynosi [19]:
przykładowo ugięcie:

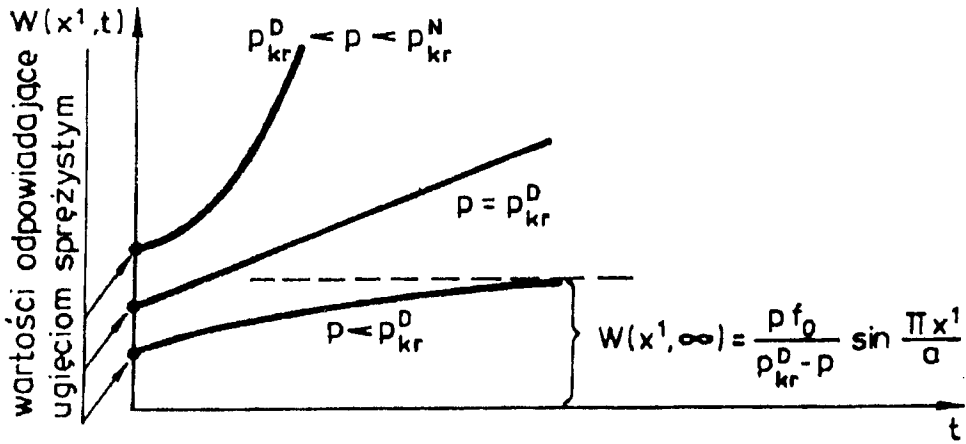
$$w(x^1, t) = \left\{ \frac{pf_0}{p_{kr}^D - p} - \left(\frac{pf_0}{p_{kr}^D - p} - \frac{pf_0}{p_{kr}^N - p} \right) \exp \left(-\frac{p_{kr}^D - p}{p_{kr}^N - p} \frac{t}{n_{13}} \right) \right\} \sin \frac{\pi x^1}{a} \quad (9)$$

gdzie p_{kr}^N, p_{kr}^D są natychmiastowym i długotrwałym obciążeniem krytycznym rozważanego pasma włóknokompozytowego i wynoszą:

$$p_{kr}^N = \frac{\bar{D}^{1111} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2}{B_1^{1111} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \frac{1}{G'h \left(k - \frac{1}{3}C \right)}}, \quad p_{kr}^D = \frac{\bar{D}^{1111} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2}{B_1^{1111} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \frac{1}{H'h \left(k - \frac{1}{3}C \right)}} \quad (10)$$

$$\text{przy czym: } \bar{D}^{1111} = \overset{\circ}{D} + 2 \overset{r}{B}^{1111} e^2, \quad \bar{D}_1^{1111} = \left(1 - \frac{1}{5}C \right) \overset{\circ}{D} + 2 \overset{r}{B}^{1111} e^2 \left(1 - \frac{4}{3}C \frac{e^2}{h^2} \right)$$

Wzrost ugięć pasma w czasie t dla różnych wartości sił ściskających p ilustruje rysunek 4, z którego wynika, że jedynie dla obciążeń $p < p_{kr}^D$ narastanie ugięć w czasie maleje i jest ograniczone od góry wielkością asymptotyczną $w(x^1, \infty)$. Zatem $p = p_{kr}^D$ jest granicą długotrwałej stateczności.



Rys. 4.

By uzyskać obciążenia krytyczne dla włóknokompozytowego pasma lepkosprężystego w odpowiedniej teorii deformacji ścinania poprzecznego, wystarczy podstawić do wzoru (10) na p_{kr}^D , odpowiednio: $C = 1, k = 1$ - dla HSDPT; $C = 0$ i $k = \frac{5}{6}$ - dla FSDPT, a dla teorii K-L (nie uwzględniającej ścinanie poprzeczne) $H' = \infty$. W teorii K-L mamy:

$$p_{kr(K-L)} = \bar{D}^{1111} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \left(\overset{o}{D} + 2 \overset{r}{B}^{1111} e^2 \right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad (11)$$

Natomiast w przypadku włóknokompozytowego pasma sprężystego w miejsce H' należy podstawić moduł natychmiastowy G' .

Przejsie graniczne do odpowiedniego problemu wybożenia pasma jednorodnego prowadzi poprzez wyeliminowanie fazy II (włóknistej), tzn. $\overset{r}{A}_{(\Delta)} = 0, \overset{r}{B}^{1111} = 0$. W konsekwencji otrzymamy rozwiązanie podane przez Teters [3] (strona 283), gdzie rozważano płytę o grubości $2h$. Zaś rozwiązanie dla modelu K-L ma postać: $p_{kr} = \overset{o}{D} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = p_{Eul}$ [22].

3. ANALIZA PARAMETRYCZNA

Do rozważań przyjęto trzy rodzaje siatek a, b i c przedstawione na rysunku 3. Założono ponadto, że sztywności na rozciąganie (ściskanie) $\frac{A'_{(\Delta)}}{b_{(\Delta)}}$ dla wszystkich rodzin włókien w danej siatce są jednakowe.

W celu przeprowadzenia analizy wygodniej jest wyrażenia (10) przedstawić w postaci:

$$p_{kr}^N = \overset{0}{D} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{\gamma}{1+\gamma_N}, \quad p_{kr}^D = \overset{0}{D} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{\gamma}{1+\gamma_D} \quad (12)$$

gdzie:

$$\gamma = 1 + 24(1 - \nu^2)n\mu_{(\Delta)} \left(\frac{e}{h}\right)^2 \overset{r}{d} \quad (13)$$

$$\gamma_D = \frac{E}{H'} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\pi^2 \left| \left(1 - \frac{1}{3}C\right) + 24(1 - \nu^2)n\mu_{(\Delta)} \left(\frac{e}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{3}C\frac{e^2}{h^2}\right) \overset{r}{d} \right|}{12(1 - \nu^2) \left(k - \frac{1}{3}C\right)}$$

γ_N - podobnie jak γ_D , lecz w miejsce $H' \rightarrow G'$,

$$n = \frac{E'_{(\Delta)}}{E}, \quad \mu_{(\Delta)} = \frac{A'_{(\Delta)}}{\overset{r}{r} \frac{b_{(\Delta)}}{h}}, \quad \overset{r}{d} = \sum_{\Delta} \left(t_{(\Delta)}^1\right)^4$$

Występujący tu współczynnik $\overset{r}{d}$ jest wielkością zależną od wyboru rodzaju siatki i wynosi odpowiednio: $d_a = 1 + 2 \cos^4 \varphi$, $d_b = 2 \cos^4 \varphi$, $d_c = 1$.

Pierwszy czynnik w wyrażeniach (12) jest siłą eulerowską stałą dla danego pasma. Zatem wpływy parametrów: smukłości płyty h/a , ścinania poprzecznego E/G' , E/H' , stosunku n , gęstości włókien $\mu_{(\Delta)}$, rodzaju siatki, jej położenia e , kąta φ , jak i wpływy wyboru odpowiedniej teorii, mieszczą się całkowicie w czynnikach γ , γ_N , γ_D . Dla zobrazowania wpływu ważniejszych z wymienionych parametrów, dokonajmy bezwymiarowej analizy przyjmując następujące dane liczbowe:

- fizyczne: $\nu = 0, 2$; $n = 10$; $\mu_{(\Delta)} = 0,01$ (1%); $E/H' = 5, 10, 25, 50, 60, 80$,
- geometryczne: $e/h = 0, 45$; $ah = 5, 8, 10, 15, 20, 30$; $\varphi = 45^\circ$

Błąd nieuwzględnienia wpływu deformacji ścinania poprzecznego na wielkość obciążenia krytycznego, wynosi:

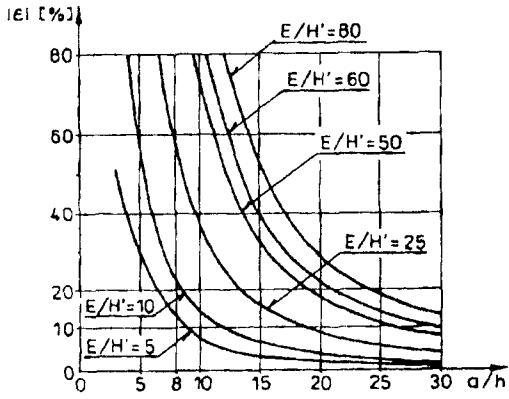
$$|\varepsilon| = \frac{p_{kr}^D - p_{kr}(K, I)}{p_{kr}^D} \cdot 100\% = \gamma_D \cdot 100\% \quad (14)$$

Wartości liczbowe tego błędu w % dla odpowiednich teorii płyt i rodzajów siatek zbrojenia podano przykładowo w tabeli 1.

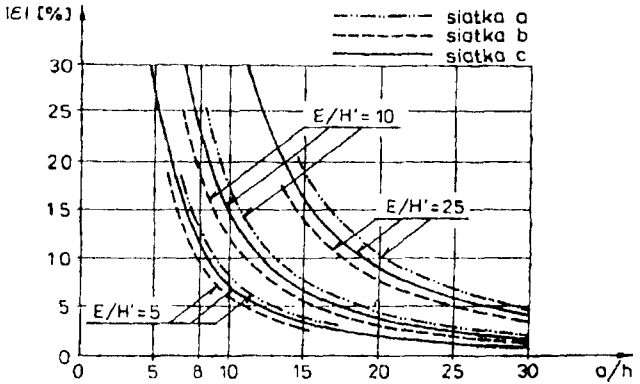
Tabela I

ε%		Rodzaj siatki	E/H'							
			5		10		25		50	
			HSDPT	FSDPT	HSDPT	FSDPT	HSDPT	FSDPT	HSDPT	FSDPT
a/h	5	a	33.69	34.95	67.38	69.90	168.50	174.80	336.90	349.50
		b	24.94	25.36	49.88	50.72	124.70	126.80	249.40	253.60
		c	29.32	30.16	58.63	60.31	146.60	150.80	293.20	301.60
	15	a	3.74	3.88	7.49	7.77	18.70	19.40	37.40	38.80
		b	2.77	2.82	5.54	5.64	13.90	14.10	27.70	28.20
		c	3.26	3.35	6.52	6.70	16.30	16.80	32.60	33.50
	20	a	2.11	2.18	4.21	4.37	10.50	10.90	21.10	21.80
		b	1.56	1.59	3.21	3.17	7.80	7.90	15.60	15.90
		c	1.83	1.88	3.66	3.77	9.20	9.40	18.30	18.80
	30	a	0.94	0.97	1.87	1.94	4.70	4.90	9.40	9.70
		b	0.69	0.70	1.39	1.41	3.50	3.60	6.90	7.00
		c	0.82	0.84	1.63	1.68	4.10	4.20	8.10	8.40

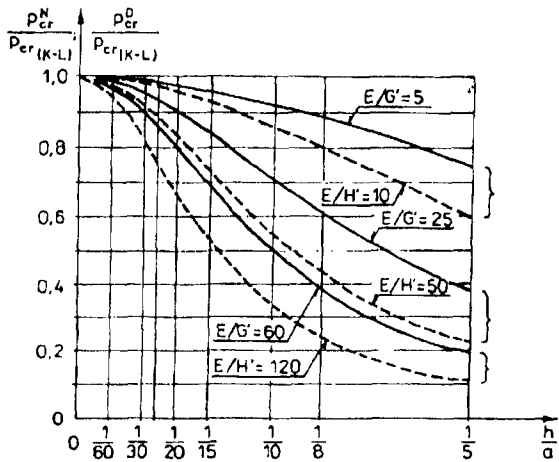
Rysunek 5 ilustruje błąd $|\epsilon|%$ dla pasma zbrojonego siatką prostokątną *c* (teoria HSDPT, $e/h = 0.45$), natomiast na rysunku 6 uwzględniono dodatkowo wpływ uzależniony od rodzaju siatek. Zmienność obciążeń krytycznych p_{kr}^N - natychmiastowych (linia ciągła) i p_{kr}^D - długotrwałych (linia przerywana) w stosunku do siły $p_{kr(k-1)}$, (11), przy założeniu $G'/H' = 2$, przedstawiono na rysunku 7, a zmianę stosunku $p_{kr}^D/p_{kr(k-1)}$ na płaszczyźnie zmiennych (h/a , E/H') na rysunku 8. Krzywe na rysunkach 7 i 8 odpowiadają teorii HSDPT i odnoszą się do pasma zbrojonego siatką *a*. Rysunek 9 ilustruje wpływ rodzaju zbrojenia siatek ukośnokątnych *a* i *b* na długotrwałą nośność pasma zbrojonego siatką prostokątną *c*, w zależności od ich położenia w przekroju poprzecznym e/h , parametru smukłości pasma h/a oraz odpowiedniej teorii deformacji ścinania poprzecznego: linia ciągła odpowiada HSDPT, a linia przerywana teorii I rzędu FSDPT.



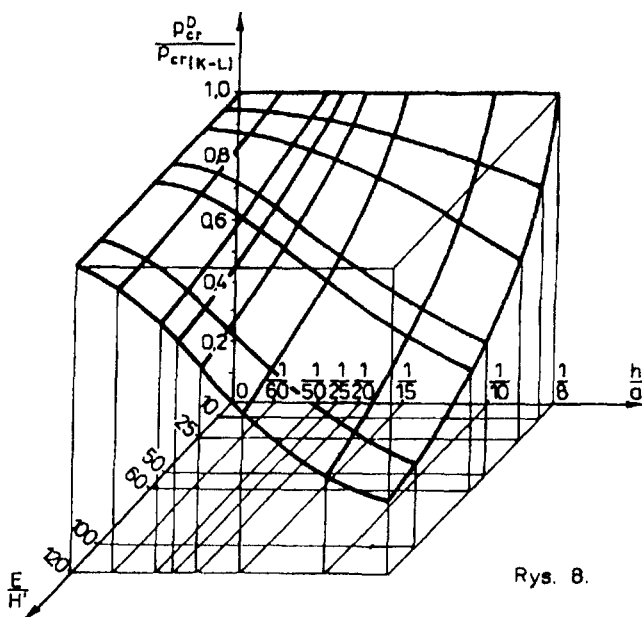
Rys. 5.



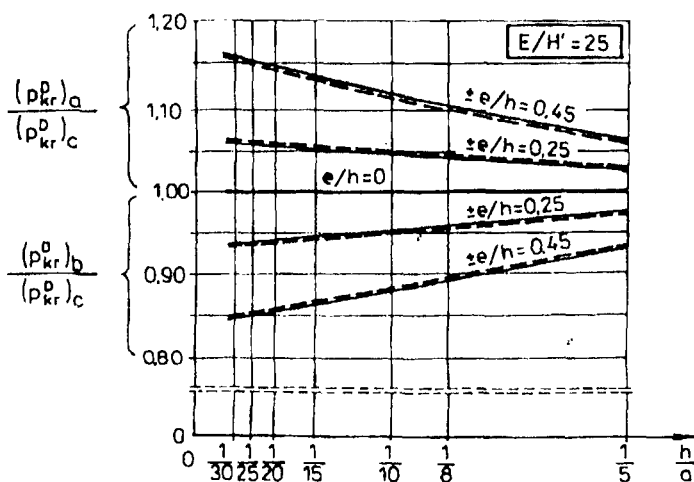
Rys. 6.



Rys. 7.

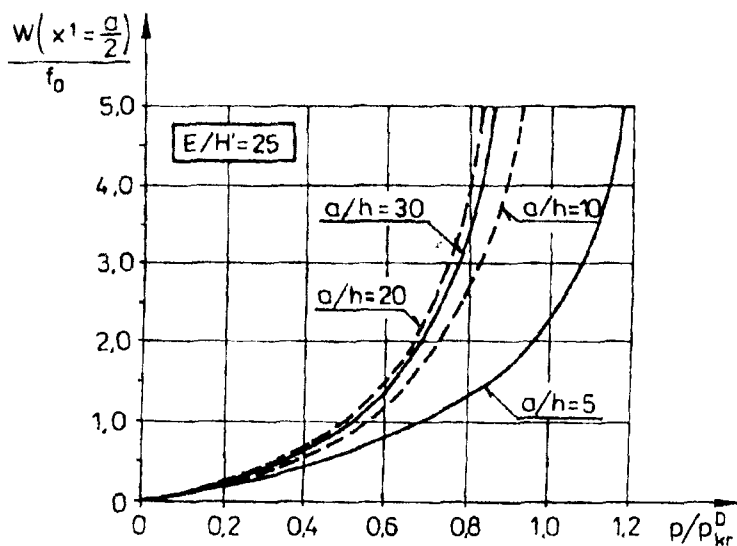


Rys. 8.



Rys. 9.

Ugięcie pasma (w/f_0) w środku rozpiętości w chwili $t = 0,8n_{13}$ w zależności od wartości obciążenia p/p_{kr}^D i smukłości a/h przy $E/H' = 25$ przedstawiają krzywe na rysunku 10.



Rys. 10.

4. UWAGI KOŃCOWE

Z przedstawionej analizy parametrycznej wynika, że uwzględnienie wpływu deformacji ścinania poprzecznego w płytach włóknokompozytowych wyraźnie obniża wartości obciążeń krytycznych i jest uzależnione przede wszystkim od parametrów: a/h , E/G' , E/H' , $E_{(\Delta)}/E$, $\mu_{(\Delta)}$. Natomiast wybór teorii wyższego HSDPT, czy I rzędu FSDPT jest mniej istotny (patrz tabela 1 i rys.9) i waha się w granicach około 1.5 do 4.0%.

Należy przyjąć, że jedynie dla smukłych włóknokompozytowych płyt lepkosprężystych można pominąć wpływ deformacji ścinania poprzecznego i stosować klasyczną teorię płyt cienkich Kirchhoffa-Love'a. Decydujący wpływ mają tu parametry $\left(\frac{h}{a}\right)^2$ i E/H' . Jeżeli założyć błąd dopuszczalny np. $\epsilon = 3\%$, to z tabeli 1 wynika, że dla $E/H' > 10$ hipotezę K-L można stosować dla bardzo smukłych płyt o $a/h > 30$, a dla $E/H' = 5$ o $a/h > 15$.

Uwzględnienie deformacji ścinania poprzecznego odgrywa w mechanice płyt włóknokompozytowych znacznie większą rolę niż w płytach jednorodnych. Ze wzoru (13) wynika bowiem, że poza parametrami E/H' , $\left(\frac{h}{a}\right)^2$ - dotyczącymi własności sprężystych i geometrycznych matrycy, występują również parametry n , $\mu_{(\Delta)}$, d , c/h - uwzględniające gęstość i położenie w przekroju poprzecznym fazy II (włóknistej) wzmacniającej płytę.

LITERATURA

- [1] Kapania R. K., Raciti S.: Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I. Shear effects and buckling. *AIAA J.*, 27, 7, 923-934, 1989
- [2] Mechanics of composites. Edited by I.F. Obraztsov and V. V. Vasiliev, Mir Publishers, Moscow 1982
- [3] Teters G. A.: Słożone nagrażenie i ustojczywość obłoczek iz polimernych ma- teriałow. Zinatne, Riga 1969
- [4] Skudra A. M., Bulaws F. J., Rocens K. A.: Polzuczet i staticzeskaja ustałost armirowanych plastikow Zinatne, Riga 1971
- [5] Reddy J. N., Phan N. D.: Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher - order shear deformation theory. *J. Sound and Vibration*, 98, 2, 157-170, 1985
- [6] Muc A.: Analiza stateczności i deformacji kompozytowych dennic zbiorników ciśnieniowych Politechnika Krakowska, monografia 135, Kraków 1992
- [7] Golaś J.: Axi-symmetric analysis of fiber-reinforced cylindrical shells due to the initial strain field [in Polish]. *Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej*, Building (in print)
- [8] Golaś J.: Buckling of composite cylindrical shells under axial compression taking into account creep and shear deformation. *Archives of Civil Engineering*, 43, 2, 1995 (in print)
- [9] Świtka R.: Equations of the fibre composite plates. *Engineering Transactions*, 40, 2, 187-201, 1992
- [10] Świtka R.: Zarys liniowej teorii powłok włóknokompozytowych. *Mater. XXXIX Konf. nauk. KILiW PAN*, t.2, 163-170, Krynica 1993
- [11] Sokołowski M.: The bending of transversally nonhomogeneous plates of moderate thickness. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 10, 3, 315-328, 1958
- [12] Kączkowski Z.: *Płyty. Obliczenia statyczne*. Arkady, Warszawa 1968
- [13] Jemielita G.: Techniczna teoria płyt średniej grubości. *Rozprawy Inżynierskie*, 23, 3, 483-499, 1975
- [14] Reddy J. N.: A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Trans. ASME: J. of Applied Mechanics*, 51, 745-752, 1984
- [15] Reddy J. N.: A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Solids Structures*, 20, 9/10, 881-896, 1984
- [16] Jemielita G.: Meandry teorii płyt, *Prace Nauk. Politechniki Warszawskiej. Budownictwo* 117, Warszawa 1991
- [17] Ambarcumian S. A.: Teoria anizotropnych plastin. Nauka, Moskwa 1967
- [18] Szeremetew M. P., Pelech B. L.: K postroeniju utocznojj teorii plastin. *Inżenernyj Żurnal*, 4, 3, 504-509, 1964
- [19] Golaś J.: On Kirchhoff-Love hypothesis extent of use in fibre-composite viscoelastic plates theory. *Engineering Transactions*, (in print), oraz *Mater. XI Konf. Nauk. KILiW PAN*, t.2, 61-68, Krynica 1994
- [20] Woźniak Cz.: *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*. PWN, Warszawa 1970
- [21] Żmijewski K. H.: Powłoki zbrojone siatkami. *Prace Nauk. Politechniki Warszawskiej, Budownictwo* 96, Warszawa 1987
- [22] Timoshenko S. P., Gere J. M.: *Teoria stateczności sprężystej*. Arkady, Warszawa 1963
- [23] Brush D. O., Almroth B. O.: *Buckling of bars, plates and shells*. McGraw-Hill B. Co., New York 1975
- [24] Własow B.F. : Ob urawnenijach izguba plastinok. *Izw. AN SSSR OMN* 12, 57-60, 1957

PARAMETRIC ANALYSIS OF FIBRE-COMPOSITE VISCOELASTIC BAND BUCKLING
FORMULATED IN LINE WITH HIGHER-ORDER SHEAR DEFORMATION PLATE
THEORY

Summary

The primary aim of this study is to perform parametric analysis of fibre composite viscoelastic band buckling, said band being reinforced symmetrically, and subject to uniform axial forces load. The higher-order shear deformation plate theory has been used to describe deformation and stress conditions with respect to rheologic properties of said fibre-composite. Basing on numerical analysis, the extent of applicability of Kirchhoff-Love's classic kinematic hypothesis has been defined.

STACJONARNY PROBLEM LAMBA DLA PÓLPRZESTRZENI Z WARSTWĄ ELEMENTÓW REZONANSOWYCH

Irena Gołębiowska

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR, Katedra Konstrukcji Budowlanych
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

Rozpatrzono płaski i osiowo-symetryczny problem Lamba dla półprzestrzeni z warstwą elementów rezonansowych. Zagadnienie rozwiązano przy użyciu transformacji całkowej, odpowiednio: Fouriera i Hankela. Znalezione wyrażenie dla przemieszczeń w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą.

1. WPROWADZENIE

Bardzo często w praktyce inżynierskiej można spotkać się z problemami interakcji dynamicznej. Matematycznie, problemy te sprowadzają się do sformułowania odpowiednich zagadnień granicznych.

Problem polegający na określeniu odpowiedzi dynamicznej półprzestrzeni na przyłożone do jej powierzchni obciążenie dynamiczne jest zagadnieniem znanym w literaturze klasycznej teorii sprężystości pod nazwą problemu Lamba.

Rozwiązanie tego problemu w przypadku obciążeń harmonicznym i impulsowym dla zagadnienia dwu i trójwymiarowego zaproponował w 1904 r. H. Lamb [1].

W pracy rozpatrzono drgania sprężystej izotropowej jednorodnej półprzestrzeni pokrytej warstwą dynamicznych eliminatorów drgań wywołane obciążeniem harmonicznym. Przy pomocy przekształceń całkowych Fouriera i Hankela rozwiązano zagadnienie płaskie i osiowo-symetryczne postawionego problemu. Jednocześnie posługując się metodą Lighthilla [2] otrzymano dla dużych odległości od miejsca przyłożenia obciążenia rozwiązanie asymptotyczne określające przemieszczenie pionowe powierzchni półprzestrzeni.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Izotropowa, sprężysta, jednorodna półprzestrzeń ($z \geq 0$) poddana jest działaniu obciążenia harmonicznego, pionowego na pewnym ograniczonym obszarze. Obciążenie to jest przyłożone do powierzchni półprzestrzeni.

Półprzestrzeń sprężysta pokryta jest dostatecznie dużą liczbą małych amortyzowanych mas, w taki sposób, że ich oddziaływanie na półprzestrzeń można uważać za równomiernie rozłożone. Założono również, że elementy sprężyste tych mas reagują tylko na przemieszczenia pionowe powierzchni półprzestrzeni.

Dla sprężystego, izotropowego ośrodka układ równań ruchu Lamé'go przy pominięciu sił masowych można zapisać w postaci [3]:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.1)$$

gdzie ∇^2 oznacza operator Laplace'a, $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ jest wektorem przemieszczenia ośrodka, λ i μ oznaczają stałe Lamé'go, a ρ jest gęstością ośrodka.

Związki naprężeniowo - odkształceniowe wyrażają się następująco:

$$\sigma_{jk} = \lambda \delta_{jk} \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{jk} \quad (j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

a współrzędne tensora stanu odkształcenia według Cauchy'ego dla małych odkształceń mają postać:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,j} + u_{j,k}) \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

gdzie σ_{jk} oznacza składowe tensora stanu naprężenia ośrodka, a δ_{jk} jest symbolem Kroneckera

Równania ruchu (2.1) muszą być uzupełnione przez odpowiednie warunki brzegowe

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU LAMBA

3.1. Zagadnienie płaskie

Rozważono problem płaski ruchu półprzestrzeni ($z \geq 0$, $-\infty < x < +\infty$) pokrytej warstwą eliminatorów drgań. Ruch ośrodka wywołany jest obciążeniem $p(x, t) = p(x) e^{i\omega t}$. Warunki brzegowe przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, 0) &= -p(x) - \mu k b w(x), & (|x| < x_0) \\ \sigma_{zz}(x, 0) &= -\mu k b w(x), & (|x| > x_0) \\ \sigma_{xz}(x, 0) &= 0 & (|x| < \infty) \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie: $b = k_e \omega^2 / [\mu k (\omega_e^2 - \omega^2)]$, k_e , ω_e są parametrami dynamicznego eliminatora drgań, a $w(x)$ jest przemieszczeniem pionowym powierzchni półprzestrzeni. W powyższych warunkach i poniżej pominięto, dla zwięzłości zapisu, $\exp(i\omega t)$.

Aby rozwiązać problem określony przez (2.1) i (3.1) dokonano rozkładu wektora przemieszczenia u wykorzystując znane rozłożenie Greena-Lame'go:

$$u = \text{grad } \phi + \text{rot } \psi \quad (3.2)$$

gdzie ϕ jest potencjałem skalarnym, a $\psi [0, \psi, 0]$ potencjałem wektorowym. Po podstawieniu (3.2) do równań ruchu (2.1) i uwzględnieniu harmonicznej zmienności w czasie, przemieszczeń i naprężeń otrzymano następujące równanie falowe:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi + h^2 \phi &= 0, \\ \nabla^2 \psi + k^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie $h = \omega / c_1$, $k = \omega / c_2$.

Prędkości fal podłużnych i poprzecznych wyrażają się odpowiednio w następujący sposób:

$$c_1 = [(\lambda + 2\mu) / \rho]^{1/2}, \quad c_2 = (\mu / \rho)^{1/2}. \quad (3.4)$$

Składowe wektorów przemieszczenia i tensora naprężenia wyrażają się przez potencjały następująco:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.5)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \nabla^2 \phi \quad (3.6)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

Po pewnych przekształceniach i wykonaniu całkowej transformacji Fouriera rozwiązano równanie falowe i otrzymano końcowe równania opisujące przemieszczenia pionowe i poziome granicy półprzestrzyny:

$$w(x, 0, t) = \frac{-e^{i\omega t}}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\bar{p}(s)}{F'(s)} \sqrt{s^2 - n^2} \cos(as) ds \quad (3.7)$$

$$u(x, 0, t) = \frac{-e^{i\omega t}}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{s\bar{p}(s)}{F'(s)} (2s^2 - 1 - 2\sqrt{s^2 - n^2} \sqrt{s^2 - 1}) \sin(as) ds \quad (3.8)$$

gdzie $a = kx$, $n = h/k$, $\bar{p}(s) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} p(x) \cos(as) dx$.

$$F'(s) = (2s^2 - 1)^2 - 4s^2 \sqrt{s^2 - n^2} \sqrt{s^2 - 1} + b \sqrt{s^2 - n^2} \quad (3.9)$$

Funkcję $F(s)$ nazwano funkcją Rayleigha dla półprzestrzeni z warstwą dynamicznych eliminatorów drgań. Przyrównując powyższą funkcję do zera otrzymano równanie dyspersyjne, które określa parametry fali powierzchniowej propagującej wzdłuż powierzchni półprzestrzeni [3].

W przypadku szczególnym, pionowej siły skupionej $p(x) = P_0 \delta(x)$ działającej w początku układu współrzędnych (x, z) , spełniając warunek wypromieniowania, przemieszczenie pionowe granicy półprzestrzyny ma postać:

$$w(x, 0, t) = \frac{-P_0 e^{i\omega t}}{\mu\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{s^2 - n^2}}{F'(s)} \cos(as) ds - i\pi \frac{\sqrt{s_R^2 - n^2}}{F'(s_R)} \cos(as_R) \right] \quad (3.10)$$

gdzie $F'(s_R) = \left[\frac{dF(s)}{ds} \right]_{s=s_R}$, s_R jest pierwiastkiem rzeczywistym $F(s) = 0$.

Powyższe równanie można zapisać następująco:

$$w(x, 0, t) = -\frac{P_0 e^{i\omega t}}{\mu\pi} C(x) \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C(x) = & \int_0^n \frac{b(n^2 - s^2)}{F_1'(s)} \cos(as) ds + \\ & + \int_n^1 \frac{\sqrt{s^2 - n^2}}{F_2'(s)} \left[(2s^2 - 1)^2 + b\sqrt{s^2 - n^2} \right] \cos(as) ds + \int_1^\infty \frac{\sqrt{s^2 - n^2}}{F(s)} \cos(as) ds \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} C(x) = & \int_0^n \frac{\sqrt{n^2 - s^2}}{F_1'(s)} \left[(2s^2 - 1)^2 + 4s^2 \sqrt{n^2 - s^2} \sqrt{1 - s^2} \right] \cos(as) ds + \\ & + 4 \int_n^1 \frac{s^2 \sqrt{1 - s^2}}{F_2'(s)} (s^2 - n^2) \cos(as) ds - \Pi \frac{\sqrt{s_R^2 - n^2}}{F'(s_R)} \cos(as_R) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$F_1(s) = \left[(2s^2 - 1)^2 + 4s^2 \sqrt{n^2 - s^2} \sqrt{1 - s^2} \right]^2 + b^2(n^2 - s^2) \quad (3.14)$$

$$F_2(s) = \left[(2s^2 - 1)^2 + b\sqrt{s^2 - n^2} \right]^2 + 16s^4(s^2 - n^2)(1 - s^2) \quad (3.15)$$

Aby wyjaśnić charakter fal na powierzchni półprzestrzeni, rozchodzących się ze źródła drgań harmonicznycch typu $P_0 e^{i\omega t}$, analizowano punkty granicy półpłaszczyzny w dużej odległości od zadanego obciążenia. W tym celu przeszczenie pionowe (3.11) rozłożono w szereg asymptotyczny przy $x \rightarrow \infty$ według metody Lighthilla.

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymano:

$$w(x, 0, t) = t \frac{P_0 e^{i\omega t}}{\mu} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n^2 \exp\left[-i\left(kxn + \frac{\Pi}{4}\right)\right]}{(2n^2 - 1)^2 (nkx)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ \left. + 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - n^2) \exp\left[-i\left(kx + \frac{\Pi}{4}\right)\right]}{(1 + b\sqrt{1 - n^2})^2 (kx)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{s_R^2 - n^2}}{F'(s_R)} \exp(-ikxs_R) \right] + f(x), \quad (3.16)$$

(|x| → ∞)

gdzie:

$f(x) = 0$ ($|x|^2$) dla $|x| \rightarrow \infty$, tj. istnieje takie $M > 0$, że dla wszystkich $|x| > M$ iloraz $f(x)/|x|^2$ jest ograniczony [4].

Od źródła drgań wzdłuż powierzchni półprzestrzeni rozprzestrzeniają się, odpowiednio, fale podłużne, poprzeczne i powierzchniowe, przy czym te ostatnie nie zanikają. Fale podłużne i poprzeczne zanikają według prawa $x^{-\frac{3}{2}}$. Fale powierzchniowe propagują z prędkością $c_R = c_z / s_R$. Warstwa eliminatorów drgań wpływa na wielkość amplitud fal poprzecznych i powierzchniowych.

3.2. Zagadnienie osiowo symetryczne

Rozpatrzono działanie obciążenia pionowego powierzchniowego $p(r, t) = p(r)e^{i\omega t}$ na sprężystą półprzestrzeń ($z \geq 0, 0 \leq r < \infty$) pokrytą warstwą dynamicznych eliminatorów drgań. Obciążenie to wywołuje w półprzestrzeni sprężystej osiowo-symetryczny stan naprężenia i odkształcenia. Warunki brzegowe mają w tym przypadku postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r, 0) &= -p(r) - \mu kbw(r), & (0 \leq r \leq r_0) \\ \sigma_{zz}(r, 0) &= -\mu kbw(r), & (r > r_0) \\ \sigma_{rz}(r, 0) &= 0, & (0 \leq r < +\infty) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Składowe wektorów przemieszczenia i tensorów naprężenia wyrażają się następująco:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 2\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial z} \right] + \lambda \nabla^2 \varphi \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wykorzystując całkowe przekształcenie Hankela rozwiązano równania falowe i otrzymano:

$$w(r, z) = \int_0^\infty \left[B(s) \frac{\sqrt{s^2 - n^2}}{n^2} e^{-\alpha z} + C(s) s^2 e^{-\beta z} \right] J_0(as) ds \quad (3.20)$$

$$u(r, z) = \int_0^\infty \left[B(s) n^{-2} e^{-\alpha z} + C(s) \sqrt{s^2 - 1} e^{-\beta z} \right] s J_1(as) ds \quad (3.21)$$

gdzie:

$$\alpha^2 = k^2(s^2 - n^2), \quad \beta^2 = k^2(s^2 - 1), \quad a = k r.$$

Współczynniki $B(s)$ i $C(s)$ znaleziono z warunków brzegowych i wynoszą one:

$$B(s) = \frac{-p(s)n^2 s k (1 - 2s^2)}{\mu F(s)}, \quad C(s) = \frac{-2\bar{p}(s) s k \sqrt{s^2 - n^2}}{\mu F(s)} \quad (3.22)$$

W rezultacie, otrzymano następujące wzory dla przemieszczeń:

$$w(r, z) = -\frac{k}{\mu} \int_0^\infty \frac{\bar{p}(s)s \sqrt{s^2 - n^2}}{F(s)} \left[(1 - 2s^2) e^{-\alpha z} + 2s^2 e^{-\beta z} \right] J_0(as) ds \quad (3.23)$$

$$u(r, z) = -\frac{k}{\mu} \int_0^\infty \frac{\bar{p}(s) s^2}{F(s)} \left[(1 - 2s^2) e^{-\alpha z} + 2\sqrt{s^2 - 1} \sqrt{s^2 - n^2} e^{-\beta z} \right] J_1(as) ds \quad (3.24)$$

gdzie: $\bar{p}(s) = \int_0^\infty r p(r) J_0(as) dr.$

Dla przypadku działania siły skupionej $p(r) = P\delta(r)/(2\pi r)$ otrzymano przemieszczenie powierzchni półprzestrzeni, spełniając warunek wypromieniowania, w postaci:

$$w(r, 0, t) = -\frac{Pke^{i\alpha x}}{2\pi\mu} \left[\int_0^{\infty} \frac{s\sqrt{s^2 - n^2}}{F'(s)} J_0(as) ds - i\pi \frac{s_R \sqrt{s_R^2 - n^2}}{F'(s_R)} J_0(as_R) \right] \quad (3.25)$$

Pionowe przemieszczenie powierzchni półprzestrzeni można przedstawić w następujący sposób:

$$w(r, 0, t) = -\frac{Pke^{i\alpha x}}{2\pi\mu} C(r) \quad (3.26)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C(r) = & \int_0^n \frac{b(n^2 - s^2)}{I_1'(s)} J_0(as) ds + \\ & + \int_n^1 \frac{s\sqrt{s^2 - n^2} \left[(2s^2 - 1)^2 + b\sqrt{s^2 - n^2} \right]}{F_2(s)} J_0(as) ds + \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & + \int_1^{\infty} \frac{s\sqrt{s^2 - n^2}}{F'(s)} J_0(as) ds \\ \operatorname{Im} C(r) = & \int_0^n \frac{s\sqrt{n^2 - s^2} \left[(2s^2 - 1)^2 + 4s^2 \sqrt{n^2 - s^2} \sqrt{1 - s^2} \right]}{I_1'(s)} J_0(as) ds + \\ & + 4 \int_n^1 \frac{s^3 (s^2 - n^2) \sqrt{1 - s^2}}{I_2'(s)} J_0(as) ds - \Pi \frac{s_R \sqrt{s_R^2 - n^2}}{F'(s_R)} J_0(as_R) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Problem Lamba był rozwiązywany dla $\lambda = \mu$, co odpowiada liczbie Poissona $\nu = 1/4$.

LITERATURA

- [1] Lamb H.: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Phil. Trans. Roy. Soc. London, A.203, 1904, (1 - 42)
- [2] Lighthill M.J.: Introduction to Fourier analysis and generalised functions. Cambridge at the Univ. Press, 1958
- [3] Nowacki W.: Dynamika budowli. Arkady, Warszawa 1961

- [4] Gołębiowska I.: Propagacja fal powierzchniowych w półprzestrzeni z przypowierzchniową warstwą eliminatorów drgań. XVI Sympozjum Drgania w układach fizycznych, Białejewko 1994 (141 - 142)
- [5] Korn G.A., Korn T.M.: Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów. PWN, Warszawa 1983

STEADY-STATE LAMB'S PROBLEM FOR A HALF-SPACE WITH A LAYER OF
RESONATING ELEMENTS

Summary

In the paper the time harmonic plane and axial symmetry Lamb's problems for a half-space with a layer of resonating elements are investigated. The problems are solved by means of the Fourier and Hankel transformation techniques. The solutions for vertical and horizontal displacements of the surface of the half-space are found.

BADANIA FUNKCJONALNOŚCI ZESPOŁU ROZDRABNIAJĄCEGO Z NIELINIOWYM ZARYSEM RZUTU KRAWĘDZI ROZDRABNIAJĄCYCH*

Adam Górecki, Józef Flizikowski

Wydział Mechaniczny ATR, Katedra Maszyn Rolniczych i Spożywczych
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

Przeprowadzono badania wydajności, zapotrzebowania mocy, jednostkowego zużycia energii i stopnia rozdrobnienia w zależności od sposobu rozmieszczenia pił tarczowych na sworzniach wirnika. Zróżnicowana i ustawiona według określonego kształtu odległość krawędzi bijaków - pił od sita wpływa istotnie na obniżenie niedokładności realizacji funkcji rozdrabniania.

1. WPROWADZENIE

Podstawowymi kryteriami efektywności rozdrabniania, zgodnie z obowiązującymi normami jakości ISO 9.000 i EN 29.000 są: skuteczność, ekonomiczność, trwałość, niezawodność działania potencjału ludzkiego, technicznego, energomaterialnego i sterowniczego. Przedmiotem szczególnego zainteresowania inżynierii maszyn jest potencjał techniczny i skuteczność działania. Istniejący potencjał techniczny w inżynierii rozdrabniaczy rolniczych zdominowany jest przez rozdrabniacze bijakowe. Rozdrabniacze, w których prędkość liniowa bijaka dochodzi do 150 m/s, temperatura bijaka i rozdrabnianych nasion, w miejscu kontaktu, do 920 K, a obciążenie środowiska roślinnego, zwierzęcego i ludzkiego jest na granicy dopuszczalności.

Potrzeba rozdrabniania surowców wynika z kilku względów [1, 2, 3, 4]:

- skutek rozdrobnienia następuje zwiększenie powierzchni cząstek surowców, co zwiększa ich strawność,
- rozdrobnienie surowców jest warunkiem uzyskania jednorodnych mieszanek wieloskładnikowych,

* Temat zrealizowany w ramach grantu KBN 0287/S3/93/04/XXXIII: Podwyższenie energetycznej efektywności wielotarczowego rozdrabniania zbóż na paszę.

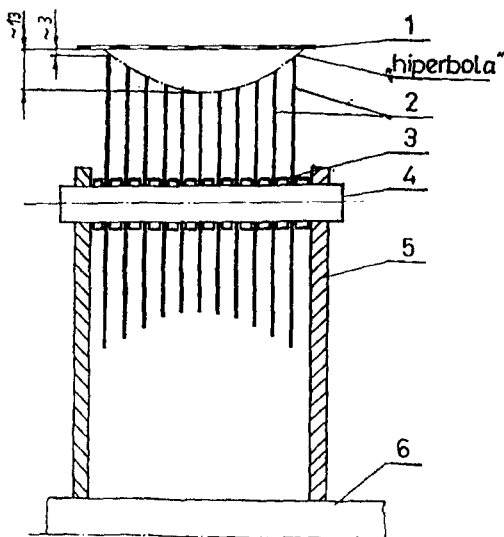
- rozdrobnienie umożliwia granulowanie,
- niektóre surowce (objętościowe) po rozdrobnieniu mają znacznie mniejszą objętość, co ułatwia manipulowanie nimi w dalszych operacjach.

Operacje rozdrabniania surowców następują wiele trudności, trzeba bowiem uwzględnić fakt, że obecnie lista ważniejszych surowców paszowych liczy około 400 pozycji [4], a ich właściwości fizyczne są bardzo zróżnicowane. Nie istnieje przy tym maszyna uniwersalna, zdolna rozdrabniać wszystkie surowce i to w sposób optymalny dla danego surowca.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Problem: Jakie są cechy konstrukcyjne zespołu rozdrabniającego złożonego z pił tarczowych, celowo osadzonego w rozdrabniaczu rolniczym WIR-H113, przeznaczonym do rozdrabniania nasion zbóż i innych komponentów paszowych, że wydajność procesu wzrasta, a zapotrzebowanie mocy maleje w porównaniu z oryginalnym zespołem.

Cechy konstrukcyjne zespołu wielopiłowego opisane są postacią, wymiarem i tolerancją oryginalnych pił stosowanych do cięcia drewna oraz rozmieszczeniem wzdłużnym na sworzniu w ten sposób, że ich zewnętrzne krawędzie tworzą w największej odległości od osi zarys hiperboli (rys. 1). Poza wymiarami pił, ich ustawieniem na sworzniu - istotną rolę odgrywa również liczba pił osadzonych na sworzniu i liczba sworzni rozmieszczonych na wirniku.



Rys. 1. Schemat nowego zespołu rozdrabniającego: 1 - sito, 2 - piły tarczowe do drewna, 3 - tuleja dystansowa, 4 - sworznie, 5 - tarcze wsporcze, 6 - wał wirnika

Wydajność masowa jest to miara ilości masy produktu rozdrabniania uzyskiwanej w jednostce czasu. Zapotrzebowanie mocy określane jest na wejściu energii elektrycznej i kształtowane jest przez chwilowe wartości napięcia, natężenia prądu oraz wzajemne relacje czynnego i biernego charakteru obciążenia.

3. CEL I ZAKRES PRACY

Celem pracy jest poznanie istoty poprzecznego różnicowania odległości krawędzi bijaków od sita, stwierdzenie prawidłowości charakteryzujących wpływ tej zmienności na wskaźniki funkcjonalności zespołu roboczego oraz odkrycie opisów matematycznych badanych zjawisk.

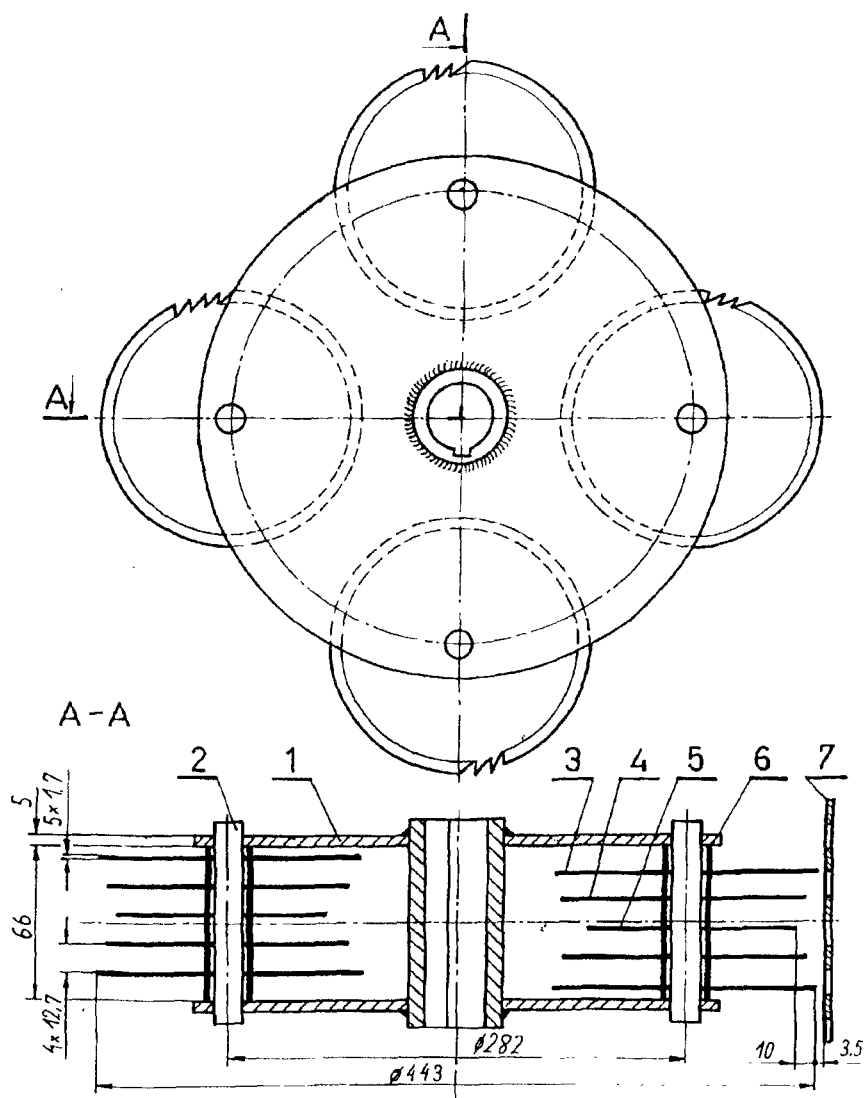
Celem pracy jest również zwiększenie liczby krawędzi roboczych, zmniejszenie pracochłonności obsługiwanego i podatności zużywania się elementów rozdrabniających, wymuszenie w przestrzeni roboczej dodatkowej cyrkulacji poprzecznej powietrza oraz takie rozmieszczenie tarcz z zębami, aby martwych przestrzeni było jak najmniej.

Badania dotyczyły materiału rozdrabnianego o stabilizowanych właściwościach, oryginalnego zespołu bijakowego i wielopółowego zespołu rozdrabniającego.

Materiał: do badań użyto pszenicę ozimą o następującej charakterystyce:

- ziarno doczyszczzone	97,3 %
- zanieczyszczenia grube	0,5 %
- zanieczyszczenia drobne	1,6 %
- zanieczyszczenia lekkie	0,6 %
- wilgotność	17,0 %

Wielopółowy zespół rozdrabniający: po analizie możliwości zastąpienia bijaków płytkowych piłami tarczowymi stwierdzono, że należy wykonać nowe tarcze wsporcze wirnika o średnicach zewnętrznych i rozmieszczenia sworzni większych od oryginalnych (rys. 2). Zmodernizowany wirnik składa się z podstawy 1, czterech sworzni 2, pił tarczowych 3 (160/1, 7/20), pił tarczowych 4 (150/1, 7/20), pił tarczowych 5 (130/1, 6/30) i tulei dystansowych 6 oraz sita 7.



Rys.2. Zespół zmodernizowany: 1 - podstawa wirnika, 2 - sworzeń, 3 - piła tarczowa 160/1, 7/20, 4 - piła tarczowa 150/1, 7/20, 5 - piła tarczowa 130/1, 6/30, 6 - tuleja dystansowa

Badania realizowano dla stałej i znamionowej prędkości obrotowej rozdrabniacza H-113 "Wir".

4. METODYKA BADAŃ

Metodyka obejmuje całkowicie lub częściowo następujące zagadnienia:

- modelowanie i dobór cech konstrukcyjnych zespołu wielopółowego,
- planowanie i realizację doświadczeń,
- analizę statystyczną i merytoryczną wyników.

Model zespołu rozdrabniającego: w podstawach konstrukcji rozdrabniaczy i identyfikacji wielu zjawisk zachodzących podczas rozdrabniania korzysta się najczęściej z bilansu energetycznego uzupełnionego o specyficzne opisy analityczne [1,2,3]. Można zatem napisać jakościowy model w postaci ogólnej:

$$F_{E(h-t), W_{h-t}, E_R, T_{h-t}, W_{z-j}, P_{pm}, U) = 0 \quad (1)$$

gdzie:

- F_E - efektywnościowa funkcja obiektu badań,
- π_{h-t} - postać geometryczna pakietu tarcz (hiperboliczna) i pojedynczej tarczy,
- W_{h-t} - wymiar geometryczny hiperboli i tarcz, wymiary stereomechaniczne tarcz,
- $E_{R\lambda}$ - wskaźnik efektywności, niedokładności realizacji funkcji rozdrabniania w ogóle i porównawczego,
- T_{h-t} - tolerancja wymiaru nominalnego hiperboli i pojedynczych tarcz, również rozwarcie zębów pił tarczowych,
- W_{zj} - j-te cechy konstrukcyjne rozdrabnianego materiału,
- P_{pm} - m-te parametry realizacji rozdrabniania,
- U - wzajemne relacje w złożonym układzie technicznym.

Jakościowy model poddano dekompozycji polegającej na utworzeniu 'w' obiektów [2, 3]:

$$F_{E1}(x_1, \dots, x_i, E_{R1}) = 0, \dots, F_{Ew}(x_1, \dots, x_i, E_{Rw}) = 0 \quad (2)$$

W wyniku dekompozycji otrzymano funkcję obiektu badań (funkcję odpowiedzi):

$$E_R = F(x_1, \dots, x_i) \quad (3)$$

Funkcja obiektu badań opisuje określoną powierzchnię (hiperpowierzchnię), którą nazywa się powierzchnią odpowiedzi (powierzchnią wynikową).

Jako podstawową wielkość estymacji parametrów funkcji obiektu badań (modelu) przyjęto funkcję Q - jakości modelu. Jest to miara różnicy sygnałów między modelem a obiektem rzeczywistym. Funkcja jakości modelu jest normą określoną na sygnałach wyjściowych modelu i obiektu [1, 2]:

$$Q = \| E_R^* - E_R \| \quad (4)$$

gdzie:

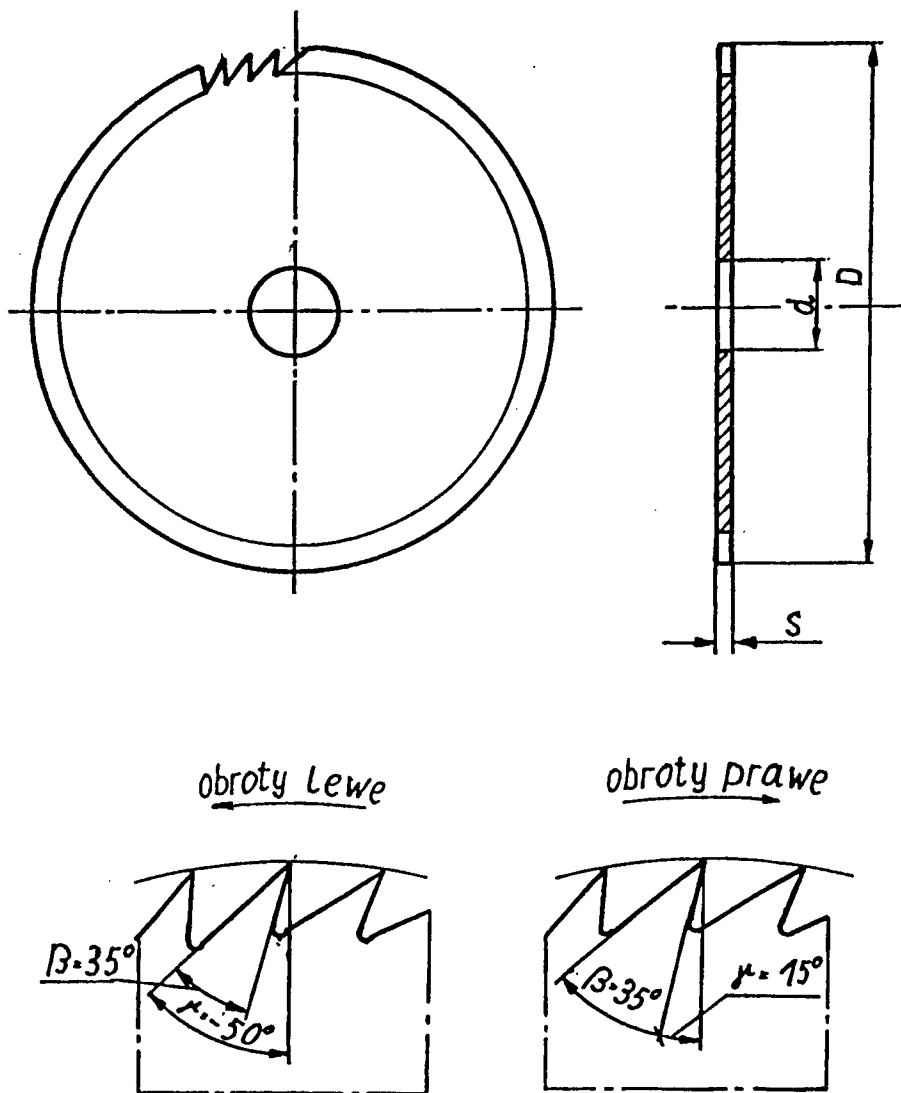
E_R^* - odpowiedź układu rzeczywistego,
 E_R - odpowiedź modelu.

System pozwala na sekwencyjną analizę i weryfikację modelu, aż do uzyskania kombinacji: materiał - maszyna - proces, o najniższej wartości jednostkowego zużycia energii.

Realizacja doświadczeń: w celu zobiektywizowania wyników badań zamontowano nowe sito i wirnik z bijakami. Na otwory wylotowe założono kanały, przez które produkt rozdrabniania opadał do podstawianych worków. Dla uzyskania lepszej powtarzalności przekroju zasilania wykonano specjalny element oporowy ustawienia dźwigni ($F = 0, 27, 45, 65$ lub 73 cm). Po wykonaniu próby uzupełniano kosz zasypowy do stałego poziomu ziarna (równy z brzegiem kosza zasypowego). Przyjęto również jednakową kolejność czynności w prowadzeniu prób.

5. OPIS I ANALIZA WYNIKÓW

Pomiary wykonano dla wirnika oryginalnego (obroty lewe) i wirnika zmodernizowanego, przy czym dla wirnika zmodernizowanego prowadzono badania dla dwóch kierunków obrotów wirnika. Przy obrotach lewych kąt natarcia zębów pił tarczowych wynosił - 50° (rys. 3), natomiast przy obrotach prawych wynosił 15° .



Rys.3. Piła tarczowa jednolita, stalowa, zwykła do maszynowej obróbki drewna.

Prezentację wyników ograniczono do przedstawienia zależności pomiędzy zapotrzebowaniem mocy, wydajnością, jednostkowym zużyciem energii, rozkładem ziarnowym produktu dla rozwiązania: oryginalnego (1), zmodernizowanego z ujemnym kątem natarcia (2), zmodernizowanego z dodatnim kątem natarcia (3), a przekrojem zasilania ziarnem F. Uznając, że konstrukcyjne rozwiązanie zmodernizowane ma cechy suboptymalne - ze względu na przyjęte kryteria - relacja z badań dotyczy wpływu kierunku prędkości obrotowej na wskaźniki efektywności

Przy rozdrabnianiu pszenicy, wirnikiem zmodernizowanym, pobór mocy w funkcji przekroju zasilającego jest o około 50 % niższy dla pił z kątem natarcia $\gamma = -50^\circ$ i o 45 % niższy dla pił z kątem natarcia zębów $\gamma = 15^\circ$ w porównaniu z zespołem bijaków prostokątnych. Przy rozdrabnianiu wirnikiem zmodernizowanym silnik, dla maksymalnego otwarcia zasilania, był obciążony zaledwie w 60 % zakresu znamionowego. Wirnik oryginalny powodował, dla takiego przekroju zasilania, przeciążenie 112 % (tab 1).

Tabela 1. Wskaźniki rozdrabniania dla wirnika oryginalnego, zmodernizowanego z kątem $\gamma = -50^\circ$ i z kątem $\gamma = 15^\circ$

Parametr pracy rozdrabniacza	Typ wirnika	zmodernizowany z piłami tarczowymi	
		oryginalny z bijkami płytkowymi	$\gamma = -50^\circ$
Pobór mocy N [kW]	10	6,6	7,5*
Przekrój otworu zasilającego S_0 [cm ²]	50*	73 (IV-max)	73 (IV-max)
Wydajność W [kg/s]	0,38*	0,352	0,33*
Porównanie wydajności	100%	93%	87%
Jednostkowe zużycie energii L [kJ/kg]	25,8*	18,7	21,6*
Porównanie jednostkowego zużycia energii	100%	73%	84%
Porównanie struktury śruty	wzorzec	nieznaczne zniejsze nie stopnia rozdrobnie- nia	poprawa struktury śruty

* - wartości odczytane z wykresów

Należy zauważyć, że moc ruchu jałowego, dla wirnika wielopiętowego, jest o 86% niższa od bijakowego. Charakter przyrostu zapotrzebowania mocy, rozdrabniacza z wirnikiem oryginalnym, świadczy o istotnym udziale niekorzystnych zjawisk dynamicznych - ze wzrostem obciążenia komory. Wirnik wielopiętowy lepiej przystosowany jest do znacznych przeciążeń komory materiałem. Wynika to z łagodnego charakteru wzrostu zapotrzebowania mocy w funkcji otwarcia zasilania. Można przypuszczać, że równoważny udział w kształtowaniu obciążeń komory mają siły wywołujące odkształcenia trwałe nasion. W przypadku zespołu wielopiętowego, ze względu na kształt i liczbę krawędzi, mamy do czynienia z większym udziałem cięcia niż zderzeń. Dodatkowa cyrkulacja poprzeczna pierścienia materiału w komorze jest czynnikiem również poprawiającym relacje energetyczne.

Zapotrzebowanie mocy w zależności od przekroju zasilania i rodzaju zespołu rozdrabniającego, jako zależność statystyczna, jest opisywana równaniami:

$$N_{(1)} = 1,74 + 13,69810^{-2} F_z, \text{ dla } R = + 0,877 \quad (5)$$

$$N_{(2)} = 0,91 + 7,45310^{-2} F_z, \text{ dla } R = + 0,943 \quad (6)$$

$$N_{(3)} = 0,93 + 8,90410^{-2} F_z, \text{ dla } R = + 0,995 \quad (7)$$

gdzie:

F_z - przekrój zasilania rozdrabniacza, cm.

Liczba tarcz i ich ustawienie poprzeczne w kształt hiperboli wpływa istotnie na wydajność. Dla powierzchni poprzecznej rzutu pił tarczowych stanowiącej 50 % powierzchni bijaków następuje obniżenie wydajności średnio o 40 % dla tych samych warunków zasilania. Obserwuje się również mniejszą dynamikę przyrostu wydajności dla zespołu wielopiętowego w zależności od przekroju zasilania. Kąt natarcia zębów pił wpływa nieistotnie na wydajność. Zjawisko to należy do bardziej interesujących odkryć z badań. Wielu konstruktorów rozdrabniaczy uważa, że zaprojektowanie ujemnego kąta natarcia bijaka wpływa na "wypychanie" materiału rozdrabnianego z przestrzeni roboczej. Choć można mówić, w przypadku kąta ujemnego, o zjawiskach wpływających na podwyższenie wydajności, to jednak mają one inny charakter. Chodzi tu bardziej o czas oscylacji materiału na krótszej drodze i opory skrawania niż możliwość bezpośredniego "wypchnięcia" cząstek.

Wydajność w zależności od przekroju zasilania i rodzaju zespołu rozdrabniającego, jako zależność statystyczna, (funkcja obiektu badań), jest opisywana równaniami:

$$W_{(1)} = -0,03 + 6,98610^{-3}F_z, \text{ dla } R = +0,912 \quad (8)$$

$$W_{(2)} = -0,035 + 4,79510^{-3}F_z, \text{ dla } R = +0,955 \quad (9)$$

$$W_{(3)} = -0,052 + 4,38310^{-3}F_z, \text{ dla } R = +0,943 \quad (10)$$

Bezwzględne wartości jednostkowego zużycia energii osiągają minimum dla tarcz ustawionych z kątem natarcia $\gamma = -50^\circ$ i pełnego otwarcia przekroju zasilania $2F \approx 73$ cm - wyniki (2). Jeżeli przyjmiemy się za 100% średnie jednostkowe zużycie energii przy rozdrabniaczu bijakowym (1), to średnie jednostkowe zużycie energii, dla kąta natarcia $\gamma = -50^\circ$ (2) będzie stanowiło zaledwie 73 % tej wartości, a dla $\gamma = 15^\circ$ (3) - 84 %.

Jednostkowe zużycie energii w zależności od przekroju zasilania i rodzaju zespołu rozdrabniającego, jako zależność statystyczna, jest opisywana równaniami:

$$E_{R(1)} = 33,2 - 9,310^{-2}F_z, \text{ dla } R = -0,973 \quad (11)$$

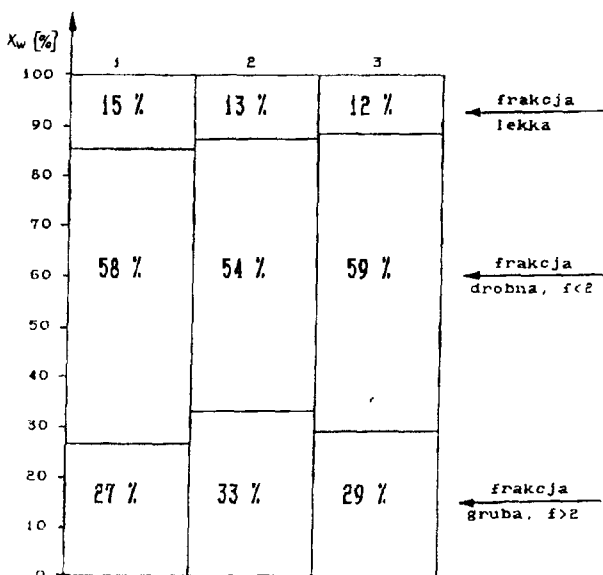
$$E_{R(2)} = 33,6 - 11,410^{-2}F_z, \text{ dla } R = -0,887 \quad (12)$$

$$E_{R(3)} = 36,4 - 23,210^{-2}F_z, \text{ dla } R = -0,835 \quad (13)$$

Udziały procentowe poszczególnych frakcji, dla różnych typów wirników, przedstawiono na rys. 4.

W rozdrabnianej - zmodernizowanym wirnikiem - śrucie następuje:

- spadek zawartości frakcji lekkiej z 15 % dla wirnika oryginalnego do 13 % dla wirnika z zębami o kącie $\gamma = -50^\circ$, do 12 % dla $\gamma = 15^\circ$,
- przyrost zawartości frakcji grubej, szczególnie dla wirnika z zębami o kącie $\gamma = 50^\circ$ (o 7 % w porównaniu z oryginałem),
- spadek zawartości frakcji drobnej dla wirnika (2) - o 4 % w stosunku do oryginału.



Rys.4. Rozkład granulometryczny śruty w zależności od zespołu rozdrabniającego:
 1 - wirnik oryginalny, 2 - wirnik zmodernizowany $\gamma = -50^\circ$, 3 - wirnik zmodernizowany $\gamma = 15^\circ$; f - średnica otworów w sicie

Ponadto zarejestrowano obniżenie poziomu hałasu w stosunku do rozwiązania oryginalnego:

- dla ruchu jałowego, w przypadku (2) i (3) o 25 %,
- dla ruchu roboczego, średnio o 18 %.

6. STWIERDZENIA I WNIOSKI

Po przeprowadzeniu badań porównawczych rozdrabniacza bijakowego H-13 z oryginalnym i modernizowanym celowo wirnikiem można sformułować następujące stwierdzenia i wnioski:

1. Założenia ujęte w hipotezie badawczej, dotyczącej zmniejszenia energochłonności procesu oraz poprawienia jakości produktu rozdrabniania - przez dobór właściwych cech konstrukcyjnych zespołu rozdrabniającego - potwierdziły się w zakresie zapotrzebowania mocy, obniżenia zawartości frakcji pylistej (lekkiej) w produkcie i polepszenia struktury granulometrycznej.
2. Dla uogólnienia wyników badań w zakresie potwierdzenia wniosku o polepszeniu charakterystyk użytkowych rozdrabniaczy bijakowych z wielopółkowym

zespołem roboczym o różnych średnicach zewnętrznych pił, ułożonym "hiperbolicznie" - należy przeprowadzić dalsze badania z innym rozmieszczeniem pił, z innymi materiałami rozdrabnianymi i zmiennymi parametrami przetwórstwa.

3. Obniżenie energochłonności procesu rozdrabniania z zespołami modernizowanymi (zależność (11) do (13)) o 27 % i 16 % (tab.1) wraz z poprawą jakości otrzymanej śruty (zależnie od kierunku obrotów wirnika) jest uzasadnieniem dla dalszych prac badawczych w tym zakresie.
4. Większy koszt wykonania zmodernizowanego wirnika jest rekompensowany:
 - poprawą granulometrycznej i biologicznej jakości produktu finalnego,
 - mniejszym zużyciem energii,
 - wzrostem trwałości elementów rozdrabniacza.
5. W przypadku rozdrabniania innych surowców paszowych, z zastosowaniem sit o mniejszych otworach, należy spodziewać się większej poprawy efektywności energetycznej.
6. W obecnym rozwiązaniu ideowym, można już obecnie uzyskać obniżenie zapotrzebowania mocy i zwiększenie wydajności poprzez:
 - zwiększenie liczby pił tarczowych na sworzniu i liczby sworzni,
 - wykonanie rozwarcia zębów pił tarczowych,
 - zwiększenie przekroju otworu zasilającego.

LITERATURA

- [1] Flizikowski J.: Badania i podstawy konstrukcyjne wielotarczowych rozdrabniaczy nasion. Rozprawy ATR nr 42, Bydgoszcz 1990
- [2] Flizikowski J.: Dobór funkcji i wskaźników rozdrabniania w metodzie: Model - konstrukcja - proces - materiał. Roczniki Nauk Rol. PAN, T.79-C-2, s.77-88, 1993
- [3] Flizikowski J.: Metoda badań rozdrabniaczy nasion. Roczniki Nauk Rol. PAN, T.79-C-2, s.137-144, 1993
- [4] Grochowicz J.: Technologie produkcji mieszanek paszowych. PWRiL, Warszawa 1985

A RESEARCH OF MILL UNIT FUNCTIONALITY WITH NONLINEAR HAMMER GEOMETRY

Summary

The paper discusses disadvantages of the traditional percussive mill and presents a description of its unit modernized with nonlinear hammer geometry. There are presented methods and comparative measurement results of a modernized mill as compared with the process conducted in a traditional way, as well as product quality which prove advantages of a modernization direction of the machines.

UKŁADY DYSKRETNO-CIĄGŁE JAKO WIELOWYMIAROWE OBIEKTY STEROWANIA

Henryk Holka

Wydział Mechaniczny ATR, Katedra Mechaniki Stosowanej
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-779 Bydgoszcz

W artykule przedstawiono syntezę receptancji układów dyskretno-ciągłych metodą strukturalną. Metoda ta posiada szereg zalet. Każdy podukład jest opisany jego receptancją i pojawia się w strukturze samodzielnie. Istnieje również możliwość pomiaru doświadczalnego niektórych podukładów, trudnych do opisu analitycznego. Metoda może być stosowana w analizie układów aktywnych, gdyż z istniejącego schematu strukturalnego można łatwo wyznaczyć równania stanu.

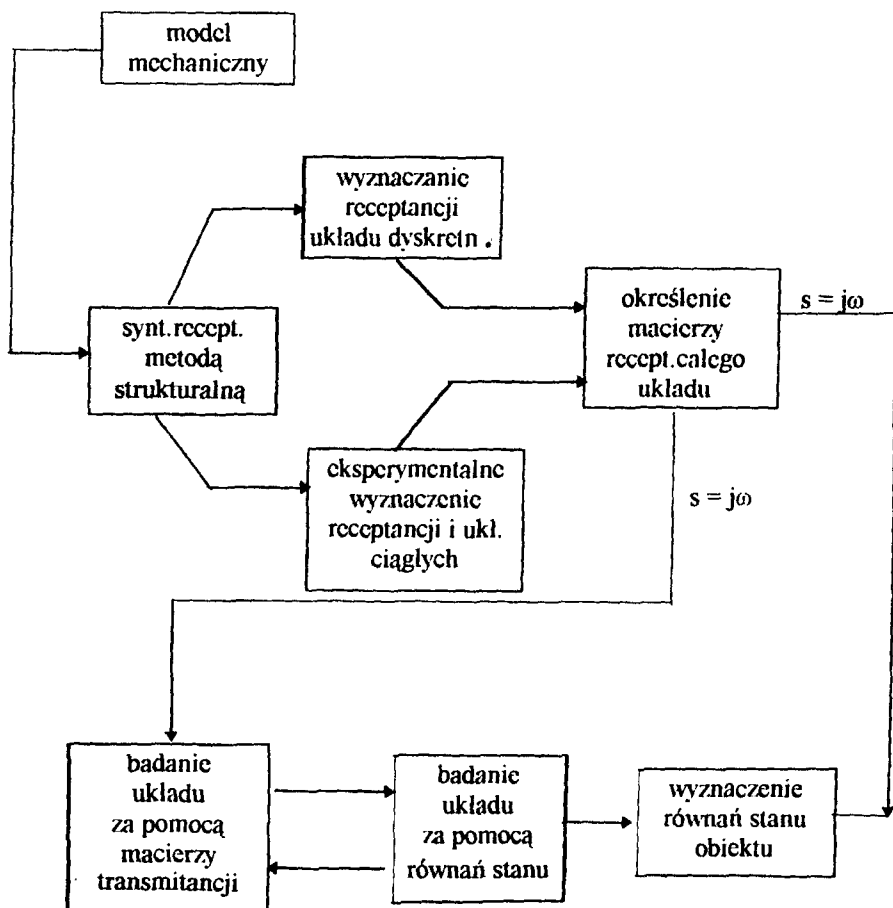
1. WSTĘP

Wraz z rosnącą wibroaktywnością maszyn i urządzeń coraz częściej stosowane są aktywne metody kontroli drgań. Podstawy teoretyczne, badania i analiza układów aktywnych oparte są na teorii sterowania, w której istnieją dwie podstawowe postacie opisu układów wielowymiarowych: macierze transmitancji i równania stanu [2]. Obie wymienione formy opisu układu otrzymać można z równań ruchu, jeżeli jednak rozważać będziemy układy dyskretno ciągłe, w których podukłady ciągłe są bardzo złożone, wówczas bardzo dogodną metodą analizy takich układów będzie metoda oparta na strukturalnej syntezie receptancji poszczególnych podukładów.

Zastosowana metoda syntezy receptancji znacznie upraszcza opis układu, gdyż nieznaną i trudną do wyznaczenia analitycznego układ ciągły zastępujemy jego receptancjami w punktach połączenia podukładów. Tak zbudowany schemat połączeń traktować możemy jako obiekt sterowania. Jest w pełni przystosowany do analizy jaką stosuje się w automatyce za pomocą macierzy transmitancji [1].

Często jednak dogodniejszą formą projektowania układu dynamicznego lub uzupełnieniem poprzedniej jest opis obiektu za pomocą metody przestrzeni stanu, które otrzymuje się również za pomocą proponowanej metody.

Na schemacie poniżej (rys.1) przedstawiono procedurę badania układów dyskretno-ciągłych, metodą strukturalną opartą na syntezie receptancji.

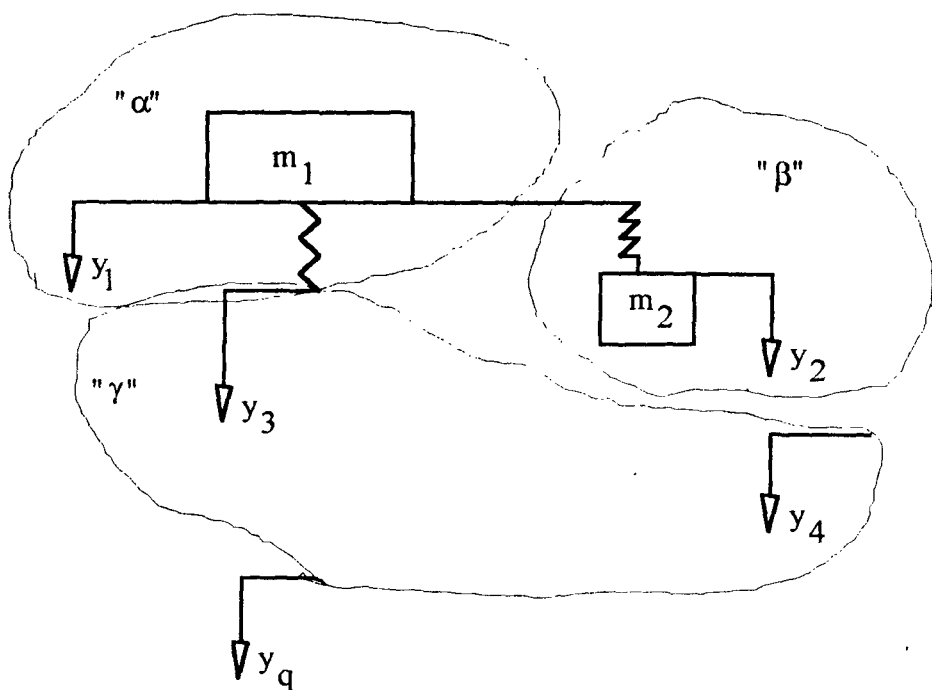


Rys. 1. Procedura badania układów dyskretno-ciągłych

2. SYNTEZA RECEPTANCJI

Zgodnie z procedurą przedstawioną na rysunku 1. po opracowaniu modelu mechanicznego, przeprowadza się syntezę receptancji poszczególnych podukładów.

Rozważmy model przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Model mechaniczny układu dyskretno-ciągłego

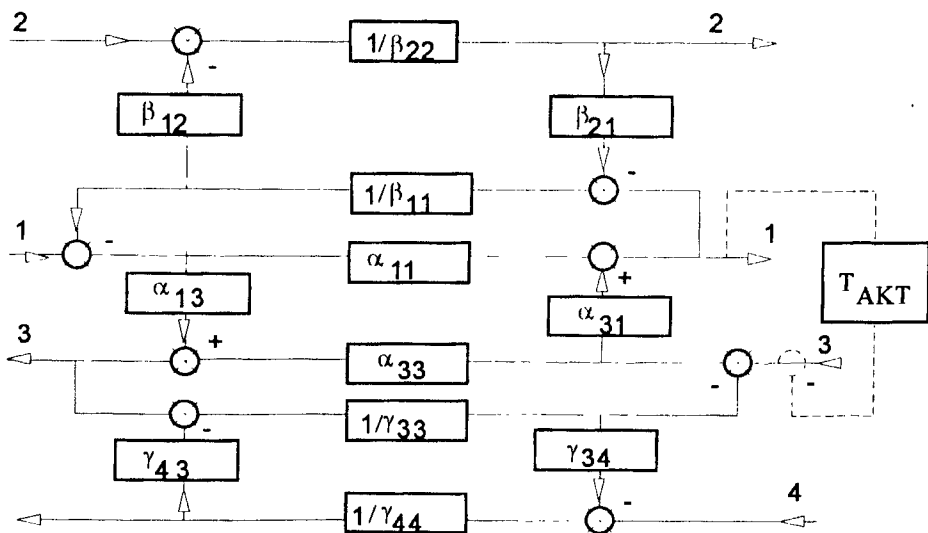
Wyróżniamy trzy podukłady opisane receptancjami α , β i γ .

Zakładamy, tak jak założono powyżej, że układ ciągły " γ " jest tak złożony, że opis analityczny z punktu widzenia dokładności obliczeń jest nie do przyjęcia. Pozostaje doświadczalnie wyznaczyć receptancji, a następnie jej synteza z podukładami.

Receptancja układu ciągłego γ opisana jest macierzą:

$$\gamma_{3q}^{(j\omega)} = \begin{bmatrix} \gamma_{33} & \gamma_{34} & \cdot & \cdot & \gamma_{3q} \\ \gamma_{43} & \gamma_{44} & \cdot & \cdot & \gamma_{4q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{q3} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{qq} \end{bmatrix} \quad (1)$$

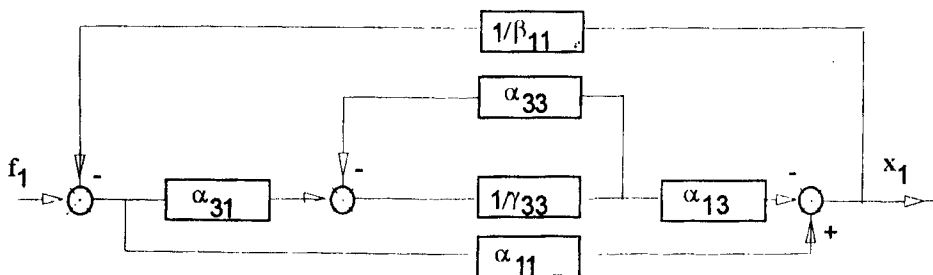
a schemat połączeń poszczególnych receptancji przedstawiono na rysunku 3 (linią przerywaną oznaczono wariant, w którym pomiędzy współrzędnymi 1 i 3 wprzęgnięto człon aktywny).

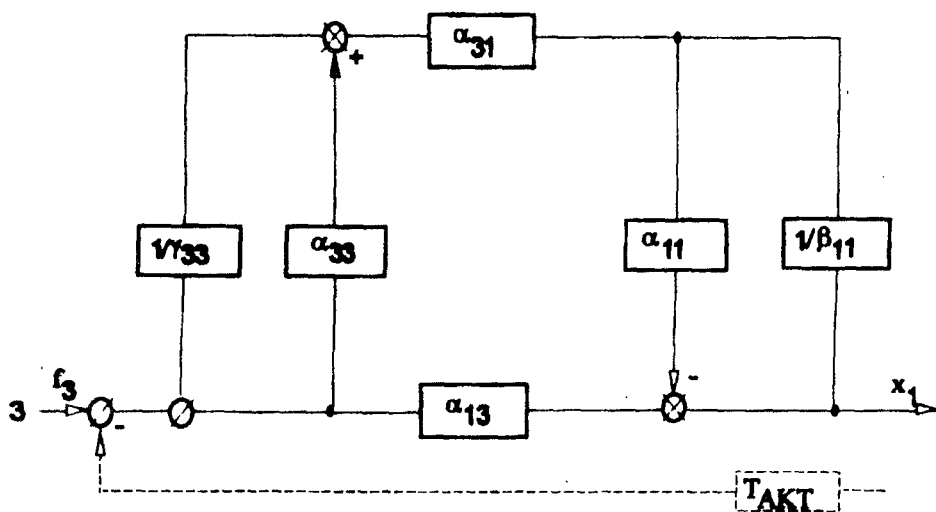


Rys.3. Synteza receptancji układu dyskretno-ciągłego z rys.2

Schemat z rysunku 3 pozwala określić wszystkie interesujące na receptancje Θ_{ij} tworzące macierz receptancji $\Theta_{(is)}$

Obliczmy dla przykładu receptancje $\Theta_{11}(i\omega)$ - rysunek 4 i $\Theta_{13}(i\omega)$ - rysunek 5.

Rys.4. Schemat blokowy receptancji Θ_{11} otrzymany z rys.3


 Rys.5. Schemat blokowy receptancji Θ_{13} otrzymany z rys.3

Redukując wymienione schematy zgodnie z zasadami przekształcenia schematów blokowych otrzymujemy:

$$\Theta_{11}(i\omega) = \frac{[\alpha_{11}(\gamma_{33} + \alpha_{33}) - \alpha_{13}^2] \beta_{11}}{(\alpha_{33} + \gamma_{33})(\alpha_{11} + \beta_{11}) - \alpha_{13}^2} = \frac{L_{11}(i\omega)}{M(i\omega)} \quad (2)$$

$$\Theta_{13}(i\omega) = \frac{\alpha_{31} \cdot \beta_{11} \cdot \gamma_{33}}{M(i\omega)} = \frac{L_{13}(i\omega)}{M(i\omega)} \quad (3)$$

W podobny sposób otrzymać można wszystkie pozostałe receptancje.

Mianownik "M" jest dla wszystkich receptancji ten sam i wyznacza wszystkie ruchy własne układu.

Ze wzoru (2) wynika, że jeżeli $\beta_{11} = 0$ to $x_1 = 0$. Masa m_1 pracuje wówczas jako dynamiczny eliminator drgań i pozostaje w antyrezonansie z układem głównym.

Wzór (3) możemy napisać w innej postaci:

$$\Theta_{13}(i\omega) = \chi_{13}(i\omega) \cdot \gamma_{33}(i\omega) \quad (4)$$

gdzie:
$$\chi_{13}(i\omega) = \frac{\alpha_{31} \cdot \beta_{11}}{M(i\omega)} \quad (5)$$

Przez analogię otrzymujemy:

$$\Theta_{14}(i\omega) = \chi_{13} \cdot \gamma_{34} \quad (6)$$

i transmitancja w dowolnym punkcie układu ciągłego:

$$\Theta_{1q}(i\omega) = \chi_{13} \cdot \chi_{3q} \quad (7)$$

Wzory powyższe pozwalają w łatwy sposób analizować drgania np. stropu od posadowionych maszyn, gdzie: $\chi(i\omega)$ jest wielkością stałą reprezentującą receptancję maszyny w miejscu jej posadowienia.

Na rysunku 5 zaznaczono działanie członu aktywnego, realizującego tzw. sterowanie przez ruch.

Włączając człon aktywny do układu otrzymujemy:

$$\Theta_{13}^A(i\omega) = \frac{L_{13}}{M} \left(1 + \frac{L_{13}}{M} \cdot T_A\right)^{-1} \quad (8)$$

Definiujemy również efektywność pracy członu aktywnego:

$$E_A \left| \frac{\Theta_{13}^A}{\Theta_{13}} \right| = \left| 1 + \Theta_{13} \cdot T_A \right| > 1 \quad (9)$$

Człon aktywny powoduje istotnie zmniejszenie poziomu drgań w danym punkcie, a decydujący wpływ ma wartość wzmocnienia członu aktywnego.

Człon aktywny T_{akt} zawiera przetwornik wielkości dynamicznej (czujnik), wzmacniacz i wibrator.

3. MACIERZ TRANSMITANCJI I RÓWNIANIA STANU

3.1. Macierz transmitancji

Na podstawie schematu z rysunku 3 wyznaczyć można poszczególne receptancje układu, tak jak wyznaczono Θ_{11} - wzór (2) i Θ_{13} - wzór (3).

Macierz receptancji ma więc postać:

$$(i\omega) = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\ \Theta_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Theta_{41} & \cdot & \cdot & \Theta_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{41} & \cdot & \cdot & L_{44} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ponadto oznaczamy:

$$\alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{A}, \quad \beta_{ij} = \frac{b_{ij}}{B}, \quad \gamma_{ij} = \frac{g_{ij}}{G}, \quad (11)$$

i podstawiamy do wzorów (2), (3) i pozostałych receptancji tworzących macierz receptancji (10).

Po wymnożeniu otrzymujemy:

$$M = (a_{33}G + g_{33}A)(a_{11}B + b_{11}A) - a_{13}^2 G \cdot B \quad (12)$$

$$L_{11} = [a_{11}(g_{33}A + a_{33}G) - a_{13}^2 G]b_{11} \quad (13)$$

$$L_{13} = a_{13} \cdot b_{13} \cdot g_{33} \cdot A \quad (14)$$

itd.

Oznaczamy:

$$\Theta(i\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (15)$$

i $G(s)$ będziemy nazywali transmitancją operatorową zaznaczając, że przechodzimy do rozważanego układu jako obiektu sterowania.

Zachodzi zależność:

$$y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad (16)$$

Transmitancja opisana równaniem (16) wiąże dowolny sygnał wejścia z wyjściem w dziedzinie zmiennej zespolonej s przy zerowych warunkach początkowych. Receptancja jako stosunek przemieszczenia do siły jest więc szczególnym przypadkiem transmitancji.

Dla modelu z rysunku 2 poszczególne receptancje mają postać:

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{11} = \frac{a_{43}}{A} = \frac{k_1^*}{k_1^* \cdot m_1 s^2} \quad (17)$$

$$\alpha_{33} = \frac{k_1^* + m_1 s^2}{k_1^* \cdot m_1 s^2} = \frac{a_{33}}{A} \quad (18)$$

$$\beta_{11} = \frac{k_2^* + m_2 s^2}{k_2^* m_2 s^2} = \frac{b_{11}}{B} \quad (19)$$

gdzie:

$$k_i^* = k_i + c_i s$$

Nieznaną receptancję γ_{33} zastępujemy modelem drugiego rzędu, opisanym wzorem (20) dobrze oddającym układy rzeczywiste:

$$\gamma_{33} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (20)$$

Nieznane elementy powyższej funkcji znajdujemy poprzez badania doświadczalne stosując jedną z licznych metod identyfikacji.

Podstawiając (17), (18) i (19) do wzorów (12), (13), (14) i pozostałych elementów macierzy (10), otrzymujemy w wyniku macierz transmitancji (15).

Dla przykładu element L_{13} wynosi:

$$L_{13}(s) = k_1^{*2} \cdot m_1 \cdot m_2 s^4 + k_1^{*2} \cdot k_2^{*2} \cdot s^2 \quad (21)$$

Rozpatrując pozostałe elementy macierzy (10) można wykazać, że mają one postać:

$$L_{ij}(s) = b_n^i s^{n-1} + \dots + b_1^i s + b_0^i \quad (22)$$

$$M(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (23)$$

Ponadto stopień wielomianu licznika jest niższy od stopnia wielomianu mianownika.

Mając określoną macierz transmitancji oraz schemat przepływu sygnału, można na podstawie teorii układów wielowymiarowych rozwiązywać różne zagadnienia sterowania układu. Jednak w wielu przypadkach metoda transmitancji macierzowych jest poważnie ograniczona. Cechuje ją jednak prostota interpretacji i łatwość określania na drodze pomiarowej.

Równania stanu są trudniejsze do interpretacji fizycznej i trudne do bezpośredniego określenia na drodze pomiarowej, jednak forma opisu matematycznego jest bardzo dogodna dla celów modelowania i projektowania układów wielowymiarowych.

Wzajemne uzupełnianie się obu metod sprawia, że z żadnej z nich nie można całkowicie zrezygnować

3.2. Równania stanu

Równanie stanu i równanie wyjścia dla tego układu mają postać:

$$x(+) = A x(t) + Bu(t) \quad (24)$$

$$y(+) = C x(t) + Du(t) \quad (25)$$

gdzie:

- x - n wymiarowy wektor stanu,
- A - macierz obiektu o wymiarach $n \times n$,
- B - macierz wejścia o wymiarach $n \times p$,
- u - p wymiarowy wektor wymuszenia,
- y - q wymiarowy wektor odpowiedzi,
- C - macierz wyjścia o wymiarach $q \times n$,
- D - macierz transmitacyjna o wymiarach $q \times p$.

Zadanie będzie polegało na wyznaczeniu macierzy A , B , C i D na podstawie danej macierzy transmitancji $G(s)$, wzór (15).

Problem taki powstaje wówczas, gdy cała macierz lub poszczególne jej elementy uzyskane są na drodze pomiarów obiektu rzeczywistego.

W rozpatrywanym w artykule przykładzie pomierzono doświadczalnie receptancje układu ciągłego γ .

Równanie (24) i (25) w postaci operatorowej dla zerowych warunków początkowych przyjmuje postać.

$$S X(s) = A X(s) + B U(s) \quad (26)$$

$$Y(s) = C X(s) + D U(s) \quad (27)$$

Przekształcając odpowiednio (26) i (27) otrzymujemy:

$$Y(s) = \{ C [sI - A]^{-1} B + D \} U(s) \quad (28)$$

Porównując (28) z (16) otrzymamy:

$$G(s) = C [sI - A]^{-1} B + D \quad (29)$$

Wzór ten pozwala wyznaczyć macierz $G(s)$ na podstawie danych macierzy A , B , C , D lub odwrotnie, na podstawie znajomości $G(s)$ wyznaczyć macierze A , B , C , D .

Czwórkę poszukiwanych macierzy A , B , C , D na podstawie znajomości $G(s)$, spełniających (29), nazywamy realizacją macierzy $G(s)$.

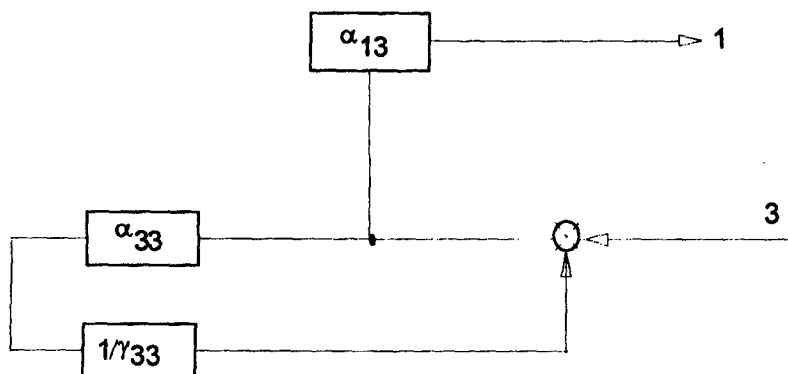
Zależność (29) nie jest jednoznaczna, tzn. można znaleźć wiele macierzy spełniających ten warunek, dlatego wprowadza się pojęcie tzw. realizacji minimalnej dla której liczba współrzędnych "n" jest minimalna. Wyznaczenie realizacji minimalnej, dla układów wielowymiarowych nastęrcza znaczne trudności.

W punkcie 4 pracy zostanie przedstawiony przykład realizacji minimalnej. Autor wykorzystał tam pewne własności, znamienne dla układów mechanicznych, podane poniżej.

- a. $D = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ co zachodzi, gdy stopień licznika jest mniejszy od stopnia wielomianu mianownika transmitancji $G(s)$. Zależność prawdziwa dla wszystkich układów mechanicznych.
- b. Macierz $G(s)$ jest wymiaru $q \times p$. Dla układów mechanicznych zachodzi $G_{ij} = G_{ji}$, stąd $q = p$ i macierze B i C mają wymiary $B(n \times q)$, $C(q \times n)$.
- c. Mianownik transmitancji $G(s)$ jest ten sam dla wszystkich elementów macierzy i z (28) otrzymuje się warunek $M(s) = [sI - A]$.

4. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Rozpatrzmy model z rysunku 2, w którym dla uproszczenia pominięto podukład β . Obliczamy drgania podłoża od wymuszeń działających wzdłuż współrzędnej y , tzn. wyznaczamy receptancję Θ_{13} , która jest miarą drgań tej współrzędnej. Schemat strukturalny tak przyjętego układu otrzymamy z rysunku 3 po odrzuceniu zbędnych członów.



Rys.6. Schemat blokowy receptancji

Po rozwinięciu schematu otrzymamy interesującą nas receptancję:

$$\Theta_{13}(i\omega) = \frac{\alpha_{13} \cdot \gamma_{33}}{\alpha_{33} + \gamma_{33}} \quad (30)$$

W podobny sposób znajdujemy pozostałe receptancje, tworzące razem macierz receptancji:

$$\Theta(i\omega) = \begin{bmatrix} \Theta_{33} & \Theta_{31} \\ \Theta_{13} & \Theta_{11} \end{bmatrix} \quad (31)$$

gdzie:

$$\Theta_{33}(i\omega) = \frac{\alpha_{33} \cdot \gamma_{33}}{\alpha_{33} + \gamma_{33}} \quad (32)$$

$$\Theta_{11}(i\omega) = \frac{\alpha_{11}(\alpha_{33} + \gamma_{33}) - \alpha_{13}^2}{\alpha_{33} + \gamma_{33}} \quad (33)$$

Jako układ ciągły przyjęto belkę swobodnie podpartą o częstotliwości $\omega_y = 40$ rad/sek.

Układ α reprezentuje masa $m_1 = 0,1$ kg podparta na sprężynie o sztywności $k_1 = 40$ N/m. Dla układu ciągłego wyznaczono doświadczalnie charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową i na jej podstawie określono wzór opisujący receptancję γ_{33} (3):

$$\gamma_{33} = \frac{1}{0,21(s^2 + 40^2)} = \frac{q_{33}}{G} \quad (34)$$

Receptancje podukładu α zgodnie ze wzorami (17) i (18) mają postać:

$$\alpha_{13} = \frac{k_1}{k_1 m_1 s^2} = \frac{a_{13}}{A}; \quad \alpha_{33} = \frac{k_1 + m_1 s^2}{k_1 m_1 s^2} = \frac{a_{33}}{A} \quad (35)$$

Macierz transmitancji $G(s)$ otrzymamy podstawiając (30), (32), (33), i (34) do (31) w funkcji operatora s .

$$G(s) = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & \frac{a_{11}}{A} (a_{11}G + A) - \frac{a_{31}^2 G}{A} \end{bmatrix} \quad (36)$$

gdzie:

$$M(s) = a_{33}G + g_{33}A$$

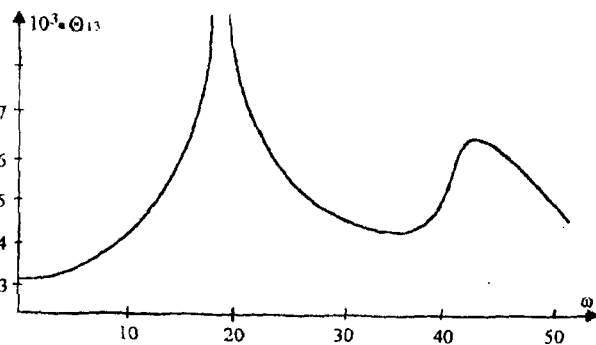
Wartości współczynników s , A i G wyznaczmy ze wzorów (34) i (35). Ostatecznie otrzymujemy:

$$G(s) = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 5s^2 + 2000 & 2000 \\ 2000 & s^2 + 1800 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$M(s) = s^4 + 2200s^2 + 640000$$

Macierz (37) i schemat strukturalny z rysunku 3 pozwalają przeprowadzić pełną analizę i projektowanie rozważanego modelu zgodnie z teorią układów wielowymiarowych. Jeżeli jednak pragniemy przeprowadzić obliczenia metodą przestrzeni stanu, to macierz ta, tak jak to opisano w punkcie 3 pracy, pozwala wyznaczyć równania stanu

Wykres receptancji Θ_{13} przedstawiono na rysunku 7.



Rys.7 Wykres receptancji Θ_{13}

LITERATURA

- [1] Holka H.: Receptance Synthesis by Means of Block Diagrams. VII th Word Congress on IFToMMn Sevilla 87, ss. 1485-1489
- [2] Niederliński A.: Układy wielowymiarowe automatyki. WNT, Warszawa 1974
- [3] Kamiński E.: Podstawowe metody identyfikacji i diagnostyki drganiowej maszyn. Dynamika Maszyn, PAN, 1974

DISCRETE AND FLEXIBLE MECHANICAL SYSTEMS AS A MULTIVARIABLE CONTROL SYSTEMS

Summary

The paper presents the synthesis of the receptance by using the block diagrams. This method has some advantages. Each sub-system is described by its receptance and occur in the formulas separately. The receptances can be obtained by experiments, if the sub-system is so complicated. It can be applied also to the active method of vibration control because there is the short way for formulation of the state space equations from the structure of the block diagram.

MACIERZ SZTYWNOŚCI UWARSTWIWIONEGO PODŁOŻA W UPROSZCZONEJ ANALIZIE RUSZTU NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

Jan Lorkowski

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR, Katedra Konstrukcji Budowlanych
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono algorytm budowy macierzy sztywności dla nierównomiernie uwarstwionej półprzestrzeni sprężystej. Przyjęto model podłoża jak najbardziej zbliżony do modelu normowego. Do macierzy sztywności dochodzi się poprzez wyznaczenie macierzy podatności podłoża.

1. WSTĘP

W pracy [1] przedstawiono ogólny algorytm analizy rusztu na uwarstwionym podłożu sprężystym, natomiast w [2] opisano cechy przyjętego modelu uwarstwionej półprzestrzeni.

W przyjętym modelu starano się powiązać ze sobą osiągnięcia nauki, wnioski praktyki projektowej jak i wymogi stawiane przez normy dotyczące posadowień. Głównym celem było uzyskanie takich wyników obliczeń statycznych konstrukcji posadowionych bezpośrednio, by były one w pełni przydatne w praktyce projektowej, tzn. by model obliczeniowy był jak najbardziej adekwatny modelowi normowemu.

Zasadniczym elementem całego algorytmu analizy rusztu jest część dotycząca tworzenia macierzy sztywności podłoża. Ruszt rozwiązuje się metodą przemieszczeń. Podstawowymi niewiadomymi są przemieszczenia liniowe (pionowe) v i kątowe φ_x i φ_y węzłów rusztu.

Rozróżnia się dwa rodzaje węzłów układu:

- 1) węzły główne - są to węzły sztywne utworzone w miejscach krzyżowania się prętów rusztu oraz poprzeczne przekroje końcowe prętów,
- 2) węzły przekrojowe - którymi są poprzeczne przekroje prętów rusztu dzielące długości poszczególnych prętów na mniejsze odcinki.

Przekroje końcowe prętów, w których łączą się one z prostokątnymi węzłami głównymi, nie są węzłami rusztu.

Przemieszczenia wszystkich m węzłów rusztu tworzą wektor przemieszczeń \underline{u} o $n = 3 \cdot m$ składowych, gdzie m jest liczbą węzłów rusztu.

Wartości przemieszczeń u_i wylicza się z rozwiązania n liniowych równań równowagi węzłów:

$$\underline{K} \cdot \underline{u} + \underline{Q}_0 = 0 \quad (1)$$

gdzie:

\underline{K} - macierz sztywności układu,

\underline{Q}_0 - wektor uogólnionych sił węzłowych od obciążeń zewnętrznych.

Macierz sztywności K jest sumą trzech macierzy:

$$\underline{K} = \underline{K}_p + \underline{K}_r + \underline{K}_w \quad (2)$$

gdzie:

\underline{K}_p - macierz sztywności podłoża,

\underline{K}_r - macierz sztywności rusztu,

\underline{K}_w - macierz sztywności węzłów dodatkowych.

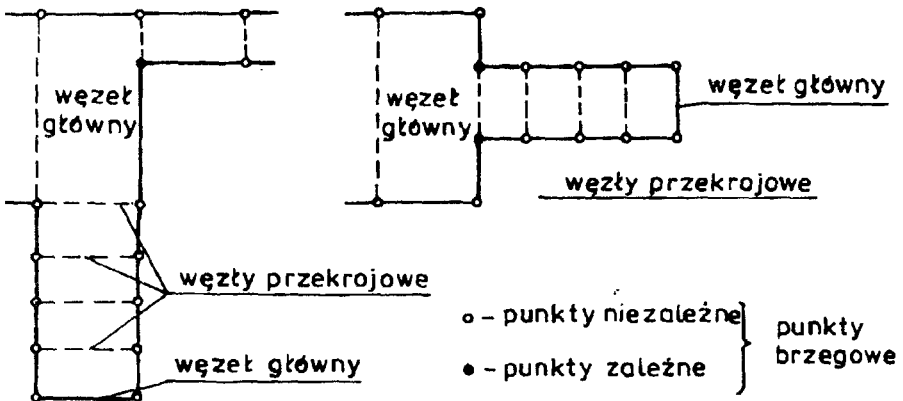
2. MACIERZ SZTYWNOŚCI PODŁOŻA

2.1. Tworzenie macierzy sztywności podłoża

Topologię analizowanego układu określają punkty brzegowe, leżące na brzegu obszaru, w którym ruszt styka się z podłożem. Do punktów tych należą wszystkie punkty narożne oraz skrajne punkty wszystkich przekrojów prętów, będących węzłami przekrojowymi, dzielącymi pręty na elementy prętowe. Liczba wszystkich punktów brzegowych jest równa r .

Przyjmuje się, że oddziaływanie między rusztem a podłożem (odpór gruntu) określone jest jednoznacznie, z wystarczającą dokładnością, poprzez wartości reakcji podłoża w punktach brzegowych. Na brzegach prostokątnych obszarów styku elementów prętowych z podłożem przyjmuje się liniową zmianę reakcji podłoża. Również liniową zmianę reakcji podłoża przyjmuje się na brzegach węzłów głównych rusztu. Jeżeli więc na takim brzegu (węzła głównego) liczba punktów brzegowych jest większa od dwóch (jak np. na rys.1), to tylko w dwóch z tych punktów wartości reakcji podłoża σ_i przyjmuje się jako niezależne. Odpór podłoża w pozostałych punktach przy takim węźle głównym (na rysunku zaznaczonym \bullet , zwanych punktami zależnymi) wylicza się z prostej proporcji. Wektor reakcji podłoża $\underline{\sigma}$ ma więc s składowych, przy czym s może być liczbą mniejszą od liczby punktów brzegowych r .

$$\underline{\sigma} = \{\sigma_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (3)$$



Rys.1

Wewnątrz elementarnych prostokątnych obszarów styku reakcję podłoża aproksymuje się czteroparametrowo funkcją:

$$\sigma_{(x,y)} = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x \cdot y \quad (4)$$

Przyjmuje się, że odpór podłoża zależy liniowo od wektora pionowych przemieszczeń w tych samych punktach brzegowych, w których przyjęto wielkości σ_i . Wektor \underline{w} ma więc także s składowych. Zależność tę zapisuje się w postaci:

$$\underline{\sigma} = \underline{s} \cdot \underline{w} \quad (5)$$

gdzie \underline{s} jest macierzą kwadratową o wymiarach $s \times s$, która może być umownie nazwana "bezpośrednią macierzą sztywności podłoża" (jest to oczywiście macierz inna niż macierz \underline{K}_p).

Z powyższej zależności wynika wprost istotna różnica między przyjętym tutaj obliczeniowym modelem podłoża a popularnym modelem Winklera-Zimmermanna, w którym przyjmuje się:

$$\underline{\sigma} = c \cdot \underline{w} \quad (6)$$

gdzie c nie jest macierzą lecz liczbą zwaną współczynnikiem sztywności podłoża.

1. Element s_{ik} macierzy \underline{s} określa wartość reakcji podłoża σ_i w punkcie i , wywołanej jednostkowym przemieszczeniem pionowym w_k w punkcie k . Kolumna k -ta macierzy \underline{s} jest więc wektorem oporu gruntu wywołanego jednostkowym przemieszczeniem pionowym w punkcie k ($w_k = 1$) przy przemieszczeniach w pozostałych punktach równych zero.

Wyznaczenie bezpośrednio macierzy sztywności podłoża \underline{s} przy przyjętym modelu uwarstwionego nieregularnie podłoża stwarza istotne trudności. Znacznie łatwiej można wyznaczyć macierz odwrotną $\underline{s}^{-1} = \underline{D}$, czyli macierz podatności podłoża, którą określa zależność:

$$\underline{w} = \underline{D} \cdot \underline{\sigma} \quad (7)$$

W macierzy \underline{D} kolumna k -ta jest wektorem przemieszczeń \underline{w} w punktach brzegowych, wywołanych jednostkowym obciążeniem na grunt w punkcie k ($\sigma_k = 1$) przy zerowych wartościach tego obciążenia w pozostałych punktach brzegowych, ale tylko tych, które mieszczą się w uprzednio określonej liczbie s . Jeżeli występują takie punkty brzegowe, które poprzednio nazwano "punktami zależnymi", to stan jednostkowego obciążenia $\sigma_k = 1$ może implikować w tych punktach również różną od zera wartość obciążenia, wyliczaną z prostej proporcji (gdy taki punkt zależny i punkt k leżą na tym samym brzegu węzła głównego).

Przy niuwarstwionym podłożu, traktowanym jako półprzestrzeń sprężysta, przemieszczenia \underline{w} , wywołane jednostkowym stanem obciążenia σ_k , można wyliczyć dokładnie wg zamkniętych, chociaż stosunkowo złożonych wzorów (przez całkowanie iloczynu funkcji $\sigma_{(x,y)}$ i funkcji wpływu). Natomiast przy uwarstwionej, w dodatku nieregularnie, półprzestrzeni sprężystej podłoża, wyliczenie dokładnych wartości tych przemieszczeń \underline{w} (czyli elementów macierzy \underline{D}) jest na tyle skomplikowane, że dla celów praktycznych trzeba wprowadzić w tych obliczeniach pewne uproszczenia, przy których otrzymuje się przybliżone wartości elementów macierzy podatności podłoża \underline{D} . Sposób tych obliczeń przedstawiony jest szczegółowo w punkcie 2.4.

Zakładając, że macierz \underline{D} została już wyznaczona, można związek (5) przedstawić w postaci:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}^{-1} \cdot \underline{w} \quad (8)$$

Rozłożone w obszarze styku rusztu z podłożem oddziaływania $\underline{\sigma}$, określone wartościami σ_i , można łatwo sprowadzić (zredukować) do ekwiwalentnego układu sił skupionych w punktach brzegowych (w liczbie s , wyłączając punkty zależne). Wektor \underline{P} tych sił:

$$\underline{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$$

wylicza się jako wynik iloczynu macierzy:

$$\underline{P} = \underline{G} \cdot \underline{\sigma} \quad (9)$$

gdzie: \underline{G} jest macierzą posiadającą s wierszy i s kolumn. Elementy tej macierzy zależne są tylko od wymiarów elementów rusztu i jego topologii. W punkcie 2.2 przedstawiony został szczegółowy sposób obliczania elementów tej macierzy.

Po uwzględnieniu (8), związek (9) przyjmie postać:

$$\underline{P} = \underline{G} \cdot \underline{D}^{-1} \cdot \underline{w} \quad (10)$$

Znajomość sił \underline{P} w punktach brzegowych pozwala wyliczyć wartości uogólnionych sił węzłowych w węzłach głównych i węzłach przekrojowych układu, pochodzących od reakcji podłoża. Siły te tworzą wektor \underline{Q}_p o $n = 3 \cdot m$ składowych:

$$\underline{Q}_p = \underline{H} \cdot \underline{P} = \underline{H} \cdot \underline{G} \cdot \underline{D}^{-1} \cdot \underline{w} \quad (11)$$

gdzie: \underline{H} jest macierzą zależną również tylko od topologii układu, posiadającą n wierszy i s kolumn, omówioną w punkcie 2.3.

Iloczyn obu, zależnych tylko od topologii układu, macierzy \underline{H} i \underline{G} można zastąpić jedną macierzą:

$$\underline{F} = \underline{H} \cdot \underline{G} \quad (12)$$

transformując wektor odporu gruntu $\underline{\sigma}$ na wektor sił węzłowych \underline{Q}_p , wg związku:

$$\underline{Q}_p = \underline{F} \cdot \underline{\sigma} \quad (13)$$

Macierz \underline{F} ma n wierszy i s kolumn.

Wektor przemieszczeń \underline{w} punktów brzegowych można również łatwo wyrazić poprzez wektor przemieszczeń \underline{u} węzłów układu, zawierającego podstawowe niewiadome w przyjętej metodzie rozwiązania zadania. Okazuje się, że macierzą transformującą jest w tym przypadku macierz transponowana w stosunku do wyżej omówionej macierzy \underline{H} :

$$\underline{w} = \underline{H}^T \cdot \underline{u} \quad (14)$$

Po uwzględnieniu powyższego, związek (11) przyjmuje postać:

$$\underline{Q}_p = \underline{H} \cdot \underline{G} \cdot \underline{D}^{-1} \cdot \underline{H}^T \cdot \underline{u} \quad (15)$$

Zależność (15) określa jednoznacznie macierz, przez którą trzeba pomnożyć wektor \underline{u} przemieszczeń węzłów, aby otrzymać wektor sił węzłowych \underline{Q}_p spowodowanych oddziaływaniem podłoża:

$$\underline{K}_p^* = \underline{H} \cdot \underline{G} \cdot \underline{D}^{-1} \cdot \underline{H}^T \quad (16)$$

Macierz sztywności podłoża \underline{K}_p powinna być macierzą symetryczną względem głównej przekątnej tak, jak symetrycznymi są pozostałe macierze sztywności \underline{K}_r i \underline{K}_w , występujące w (2), ponieważ rozważane zagadnienie jest liniowe, zarówno pod względem fizycznym jak i geometrycznym. Tymczasem wyznaczona macierz \underline{K}_p^* nie jest macierzą symetryczną, gdyż wartości jej elementów wylicza się przy przyjęciu kilku upraszczających założeń, dotyczących głównie rozkładu naprężeń w uwarstwionej półprzestrzeni oraz związku między polem przemieszczeń a polem naprężeń. Konsekwencją tych uproszczeń jest konieczność dokonania symetryzacji tej macierzy w sposób formalny:

$$\underline{K}_p = \frac{1}{2} (\underline{K}_p^* + \underline{K}_p^{*T}) \quad (17)$$

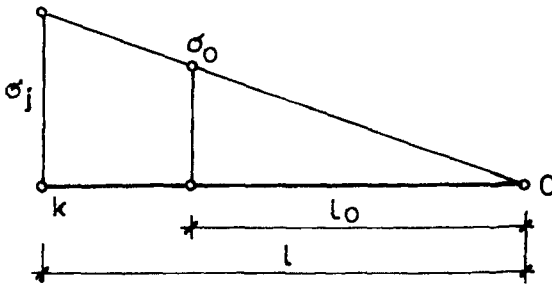
2.2. Macierz transformacji \underline{G}

Macierz \underline{G} jest macierzą kwadratową o wymiarach $s \times s$. Macierz ta nie jest symetryczna względem głównej przekątnej. Element G_{ik} tej macierzy jest wartością siły skupionej w punkcie brzegowym i , zastępującej (wraz z siłami w innych punktach) k -ty jednostkowy stan reakcji podłoża, czyli stan, w którym $\sigma_k = 1$ przy pozostałych składowych wektora $\underline{\sigma}$ równych zero.

Najprościej wyznaczyć kolejne kolumny macierzy \underline{G} , gdyż jej k -ta kolumna jest wektorem sił w s punktach brzegowych, równoważnych jednostkowemu stanowi reakcji podłoża $\sigma_k = 1$. W tym celu dla każdego k ($k = 1, 2, \dots, s$), należy:

1. Na podstawie konfiguracji układu - zidentyfikować te wszystkie, prostokątne w rzucie, jego elementy (węzły główne będące bryłami i elementy prętowe) w obszarze których powstaje różny od zera odpór gruntu gdy w punkcie brzegowym k odpór ten jest równy 1.
2. Dla każdego z tych elementów wyznaczyć wartości w jego czterech narożach:
 - jeżeli tym narożem jest punkt k , to w tym narożu $= 1$,
 - jeżeli tym narożem jest inny punkt brzegowy, w którym wartości σ_i przyjęte poprzednio jako niezależne (czyli punkt zaliczony do liczby s) to w takim punkcie $= 0$,
 - jeżeli tym narożem jest tzw. punkt zależny, to wartość w tym punkcie trzeba przyjąć:
 - - równą zeru, gdy punkt ten nie leży na boku elementu przechodzącego przez punkt k ;
 - - równą σ_0 (rys.3), gdy punkt ten leży na boku elementu przechodzącego przez punkt k , gdzie:

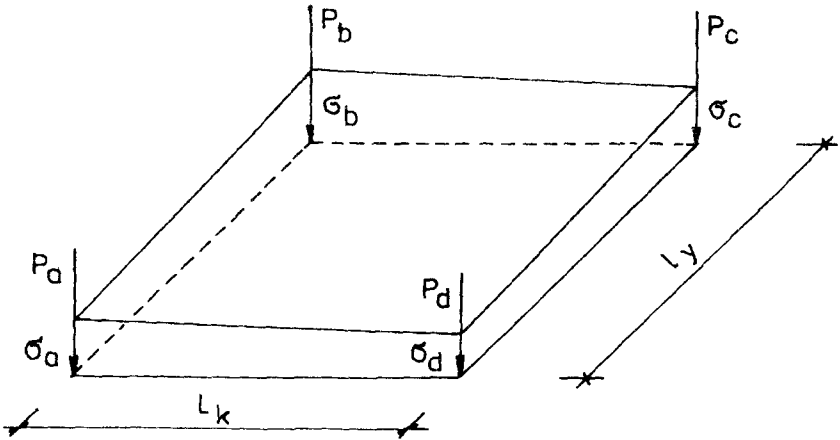
$$\sigma_0 = \frac{l_0}{l} \quad (18)$$



Rys.2

3. Wylczyć układ sił skupionych w narożach (rys.3) P_a, P_b, P_c i P_d , równoważnych obciążeniu rozłożonemu, wg wzorów:

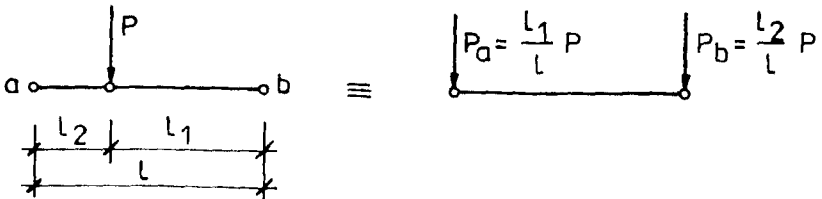
$$\begin{bmatrix} P_a \\ P_b \\ P_c \\ P_d \end{bmatrix} = \frac{l_x \cdot l_y}{36} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \\ \sigma_c \\ \sigma_d \end{bmatrix} \quad (19)$$



Rys.3

4. Dodać do siebie siły P występujące w tych samych punktach brzegowych, pochodzące od poszczególnych elementów.

Siły występujące w narożach będącymi punktami zależnymi rozdzielić odpowiednio na punkty ograniczające brzeg, na którym leży właśnie taki punkt (rys.4).



Rys. 4.

2.3. Macierz transformacji \underline{H}

Macierz \underline{H} służy do przetransformowania sił \underline{P} występujących w punktach brzegowych (w liczbie s) na uogólnione siły \underline{Q}_p , występujące w węzłach układu. Kolumna k -ta macierzy \underline{H} jest więc wektorem sił węzłowych, pochodzących od jednostkowej siły w punkcie brzegowym k , o współrzędnych globalnych x_k, y_k .

W celu wyliczenia wartości występujących w k -tej kolumnie należy:

1. Zidentyfikować węzeł j , na którego brzegu leży punkt k i określić współrzędne globalne x_j, y_j środka tego węzła (głównego lub przekrojowego);
2. Zidentyfikować numery $i = i_1, i_2, i_3$ nadane przemieszczeniom tego węzła:

$$u_{i1} = v_j, \quad u_{i2} = \varphi_{xj}, \quad u_{i3} = \varphi_{yj},$$

$$\text{czyli:} \quad i_1 = 3 \cdot j - 2, \quad i_2 = 3 \cdot j - 1, \quad i_3 = 3 \cdot j.$$

3. Policzyc różne od zera elementy macierzy \underline{H} :

$$H_{i1,k} = 1, \quad H_{i2,k} = -(y_k - y_j), \quad H_{i3,k} = x_k - x_j \quad (20)$$

Pozostałe elementy w kolumnie k macierzy \underline{H} są równe zeru.

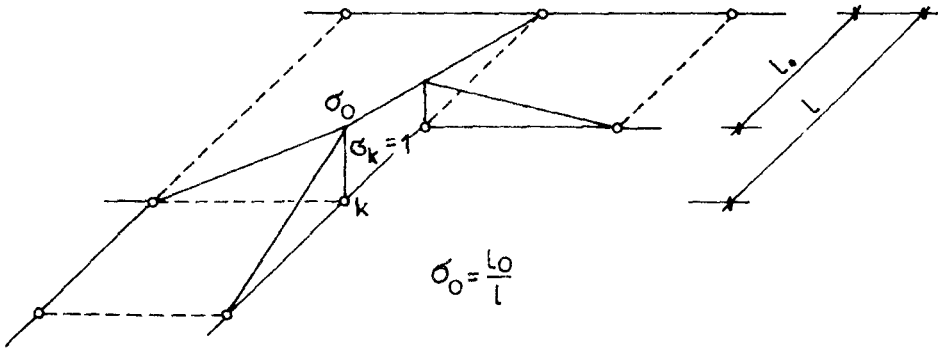
2.4. Macierz podatności podłoża \underline{D}

Kolumna k -ta macierzy \underline{D} jest wektorem przemieszczeń $\{w_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, s$) punktów brzegowych, wywołanych jednostkowym obciążeniem na grunt w punkcie k , to znaczy obciążeniem tak rozłożonym w płaszczyźnie posadowienia, że:

- w punkcie k jest $\sigma_k = 1$;
- w pozostałych, spośród liczby s , punktach brzegowych jest $\sigma_j = 0$;
- w tych punktach brzegowych $j > s$, w których wartości reakcji podłoża przyjęto jako zależne od składowych wektora $\underline{\sigma}$, (w tzw. punktach zależnych) jest:
 - $\sigma_j = 0$ jeżeli ten punkt nie leży w przekroju przechodzącym przez punkt k
 - $\sigma_j = \sigma$ jeżeli punkt ten leży w przekroju przechodzącym przez punkt k .

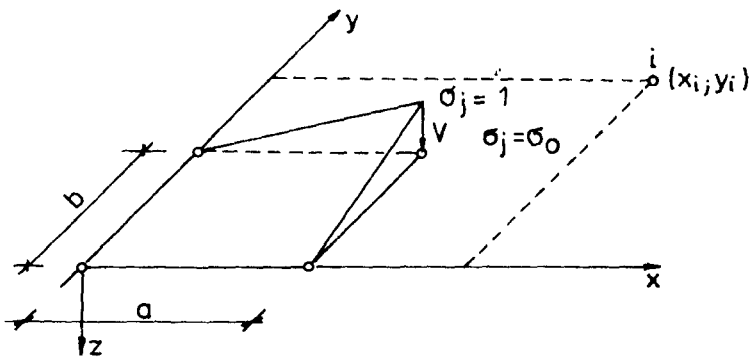
Wartość σ wylicza się z proporcji wynikającej z liniowego rozkładu obciążeń σ wzdłuż przekroju przechodzącego przez k , tak jak przy wyliczaniu elementów macierzy \underline{G} (rys.5).

- w obszarze poszczególnych prostokątów obciążenie rozłożone jest wg funkcji (4).



Rys. 5

W celu wyliczenia elementów w k -tej kolumnie macierzy \underline{D} , należy wpięrc zidentyfikować te prostokątne obszary, w których występuje obciążenie $\sigma \neq 0$, gdy w punkcie brzegowym k jest $\sigma_k = 1$. Przeszyczenie D_{ik} wylicza się przez superpozycję przeszczeń w punkcie i wywołanych obciążeniami w w/w prostokątnych obszarach.



Rys. 6

W każdym takim obszarze rozkład obciążenia można zapisać jednakowo, jako funkcję lokalnych (dla tego obszaru) współrzędnych x, y (przyjętych jak na rys.6).

$$\sigma_{(x,y)} = \frac{\sigma_j}{a \cdot b} \cdot x \cdot y \quad (21)$$

Pionowe przemieszczenie punktu i , leżącego w płaszczyźnie posadowienia, wylicza się przy takich samych założeniach upraszczających, jakie przyjęto w obowiązującej normie PN-81/B-03020 przy obciążeniu osiadań fundamentów, a w szczególności:

- rozkład naprężeń w nieregularnie uwarstwionym podłożu przyjmuje się taki sam jak w jednorodnej, liniowo-odkształcalnej półprzestrzeni sprężystej;
- całkowite osiadanie w punkcie i wyznacza się jako sumę osiadań poszczególnych warstw zalegających pod punktem i , uwzględniając różne parametry geotechniczne tych warstw;
- osiadanie warstwy gruntu, zalegającej od głębokości z_1 do głębokości z_2 wylicza się przez sumowanie odkształceń ε_z , uważanych jako zależne jedynie od naprężeń normalnych σ_z : $\varepsilon_z = \sigma_z / \varepsilon_g$ (przyjmowana tu wartość modułu ε_g wyjaśniona jest w pracy [2]).

Wartość naprężenia σ_z w punkcie o współrzędnych (x_i, y_i, z) , wywołanego elementarnym obciążeniem $dP = \sigma_{(x,y)} \cdot dx \cdot dy$, jest równa:

$$d\sigma_z = \frac{3}{2\pi} \frac{z^3}{\sqrt{(r^2 + z^2)^5}} \sigma_{(x,y)} dx dy \quad (22)$$

gdzie:

$$r^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2.$$

Wartość tego naprężenia, wywołanego obciążeniem rozłożonym w obszarze prostokąta wg funkcji (21) jest wynikiem całki:

$$\sigma_{z_{ij}} = \iint_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \frac{3z^3}{2\pi ab} \frac{\sigma_j x y dx dy}{\sqrt{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2]^5}} \quad (23)$$

gdzie, w przyjętym lokalnym układzie współrzędnych:

$$x_1 = 0 ; x_2 = a ; y_1 = 0 ; y_2 = b$$

Po wykonaniu całkowania (23) i uporządkowaniu otrzymuje się (24):

$$\sigma_{zij} = \frac{\sigma_i}{2\pi ab} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (-1)^{\alpha+\beta} \left\{ \left[\frac{x_i t_\beta (z^2 + y_i l_\alpha)}{z^2 + l_\alpha^2} + \frac{y_i l_\alpha (z^2 + x_i t_\beta)}{z^2 + t_\beta^2} + z^2 \right] \frac{z}{R_{\alpha\beta}} - x_i y_i \operatorname{arctg} \frac{z R_{\alpha\beta}}{l_\alpha t_\beta} \right\} \quad (24)$$

W powyższym wyrażeniu, dla skrócenia zapisu, oznaczono:

$$R_{\alpha\beta} = \sqrt{z^2 + l_\alpha^2 + t_\beta^2}$$

$$l_\alpha = y_i - y_\alpha ; y_{\alpha=1} = 0 ; y_{\alpha=2} = b$$

$$t_\beta = x_i - x_\beta ; x_{\beta=1} = 0 ; x_{\beta=2} = a$$

Przemieszczenie pionowe punktu i , wywołane obciążeniem σ_j , jest sumą osiadań wszystkich warstw gruntu (numerowanych przez p) leżących pod punktem i :

$$D_{ij} = \sum_p \Delta W_{ijp} \quad (25)$$

Zgodnie z przyjętym założeniem, osiadanie p -tej warstwy, znajdującej się między rzędnymi z_1 i z_2 , oblicza się:

$$\Delta W_{ijp} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sigma_{zij}}{E_{gp}} dz \quad (26)$$

Po wstawieniu wyrażenia (24), wykonaniu całkowania i uporządkowaniu, otrzymuje się:

$$\Delta W_{ijp} = \frac{\sigma_j}{2\pi ab E_p} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (-1)^{\alpha+\beta} \left\{ \frac{R_{\alpha\beta}}{3} \left[z^2 + l_\alpha (y_i + 2y_\alpha) + t_\beta (x_i + 2x_\beta) \right] + \right. \\ \left. - x_i y_i z \operatorname{arctg} \frac{z R_{\alpha\beta}}{l_\alpha t_\beta} - \frac{1}{2} x_i l_\alpha (y_i - y_\alpha) \ln \left| \frac{R_{\alpha\beta} + t_\beta}{R_{\alpha\beta} - t_\beta} \right| + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} y_i t_\beta (x_i + x_\beta) \ln \left| \frac{R_{\alpha\beta} + l_\alpha}{R_{\alpha\beta} - l_\alpha} \right| \right\} \Bigg|_{z_1}^{z_2} \quad (27)$$

Dla wyliczenia elementu D_{ik} macierzy podatności podłoża \underline{D} należy zsumować wartości (25) po wskaźniku j , czyli od wszystkich prostokątnych obszarów, na których występuje obciążenie rozłożone przy jednostkowym stanie obciążenia $\sigma_k = 1$.

3. ZAKOŃCZENIE

Omawiany wyżej algorytm wykorzystano do opracowania programu obliczeń rusztów na uwarstwionym podłożu. Okazał się narzędziem skutecznym i dającym zadowalające wyniki obliczeń. Rozwinięto go wprowadzając punkty pośrednie na elementach prętowych oraz macierz kształtu przemieszczeń punktów brzegowych. Znalazł on również zastosowanie w algorytmie obliczeń płyt na tym samym modelu podłoża.

LITERATURA

- [1] Kabat T., Lorkowski J., Górski J.: Uproszczona analiza statyczna rusztu na nieregularnie uwarstwionym podłożu sprężystym. IX Konferencja "Metody Komputerowe w Mechani-ce", Kraków - Rytro, 16-20 maja 1989
- [2] Kabat T., Lorkowski J., Zawalski A.: Model obliczeniowy podłoża budowlanego do automatycznego projektowania posadowień bezpośrednich. Inżynieria i Budownictwo 1/91

RIGIDITY MATRIX OF A LAYERED FOUNDATION IN THE SIMPLIFIED ANALYSIS OF THE MATS ON THE ELASTIC BASIC

Summary

In the paper the scheme of the structure of the rigidity matrix for an elastic, layered half-space is described. It is assumed model of the foundation like the standard model. The rigidity matrix is calculated on the ground of the compliance matrix.

WPLYW TLUMIENIA DYSKRETNEGO NA STATECZNOŚĆ KOLUMNY HYBRYDOWEJ Z TRZEMA PRZEGUBAMI

Aleksandra Niespodziana

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR, Katedra Mechaniki Budowli
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

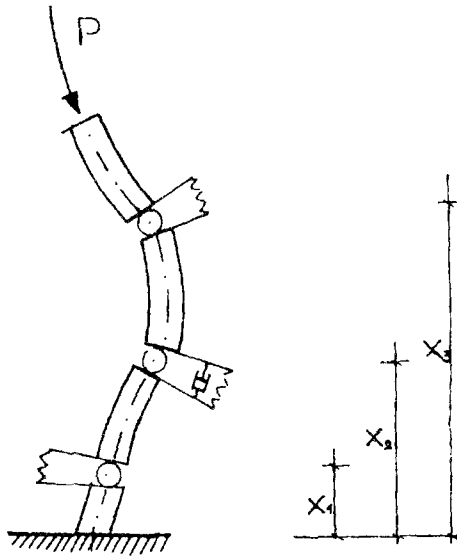
W pracy rozważa się wpływ tłumienia dyskretnego na stateczność dynamiczną kolumny hybrydowej obciążonej niekonserwatywnie. Omawiane zagadnienie jest kontynuacją wcześniejszych badań dotyczących kolumny z jednym i dwoma przegubami lepkosprężystymi. Otrzymane rezultaty świadczą o destabilizacyjnym wpływie tłumienia na stateczność kolumny wielosegmentowej obciążonej siłą styczną do jej swobodnego końca. Poniższy artykuł może posłużyć jako wstępne rozpoznanie zagadnienia optymalizacji układów obciążonych cyrkulacyjnie.

1. WSTĘP

Niniejszy artykuł stanowi kontynuację badań nad zagadnieniami dynamicznej stateczności układów niekonserwatywnych. Praca [1] zawierała analizę zjawiska utraty stateczności w przypadku kolumny hybrydowej z dwoma przegubami sprężystymi. Wykazano tam, że dla pewnych wartości stałych sprężystych można uzyskać wartość siły krytycznej kilkakrotnie wyższą niż w przypadku ciągłego układu sprężystego bez przegubów. Dalsze badania [2,3] opisywały zjawisko utraty stateczności w przypadku jednego i dwóch przegubów lepkosprężystych. Istotnym wydaje się fakt, że w przypadku utraty stateczności typu flutter wprowadzenie tłumienia do układu powodowało spadek wartości siły krytycznej.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważono odkształcalną kolumnę hybrydową (rys.1) z trzema przegubami o jednakowej wartości stałych sprężystych (K_1, K_2, K_3).



Rys. 1. Kolumna hybrydowa

Układ poddano działaniu siły, która zachowuje kierunek styczny do swobodnego końca kolumny. Wprowadzono kolejno tłumienie dyskretne typu Voigta-Kelvina do przegubu dolnego, środkowego i górnego.

Równanie małych drgań poprzecznych wokół położenia równowagi dla danego układu można zapisać :

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

z warunkami brzegowymi :

$$w(0, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$EJ \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} [EJ \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2}] = 0$$

Dokładne rozwiązanie problemu w formie zamkniętej uzyskano dla stałych wartości ρA i EJ . W pozostałych przypadkach możliwe są tylko rozwiązania przybliżone.

Do analizy tego problemu wykorzystano technikę macierzy przeniesienia. Pozwala to uzyskać rozwiązania w postaci analitycznej dla kolumny wielosegmentowej z dowolnymi warunkami podparcia. W metodzie tej dowolny przekrój charakteryzuje się wektorem stanu. W omawianym przypadku składowe tego wektora to przesuńcie, kąt obrotu, siła tnąca i moment zginający co można zapisać :

$$G = [w, \varphi, M, Q]^T = [w, w', EJw'', -EJw''']^T \quad (2.3)$$

Dla i -tego elementu kolumny otrzymuje się związek pomiędzy składowymi wektorów G_{i+1} oraz G_i w postaci :

$$G_{i+1} = T_i G_i \quad (2.4)$$

gdzie: T_i - macierz przeniesienia elementu " i ".

Wykorzystanie związku (2.4) dla kolejnych segmentów prowadzi do układu równań charakteryzującego całą kolumnę

$$G_{n+1} = T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1 G_1 = T G_1 \quad (2.5)$$

gdzie:

G_{n+1} - wektor stanu na końcu swobodnym kolumny,

G_1 - wektor stanu przy podstawie kolumny,

T - globalna macierz przeniesienia.

W omawianym przypadku wektory G_{n+1} i G_1 spełniają warunki :

$$G_1 = [0, 0, M_1, Q_1]^T \quad (2.6)$$

$$G_{n+1} = [w_{n+1}, \varphi_{n+1}, 0, 0]^T$$

po wykorzystaniu, których równanie charakterystyczne umożliwiające badanie stateczności układu ma postać :

$$\begin{vmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

W przypadku kolumny z węzłem lepkosprężystym równanie (2.7) jest postaci zespolonej:

$$\begin{vmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{vmatrix} = \operatorname{Re}[f(P, \aleph, \omega)] + \operatorname{Im}[f(P, \aleph, \omega)] = 0 \quad (2.8)$$

Wyznaczenie krytycznych parametrów obciążenia, przy których następuje utrata stateczności układu polega na badaniu konfiguracji krzywych

$$\operatorname{Re}[f(P, \aleph, \omega)] = 0 \quad (2.9)$$

$$\operatorname{Im}[f(P, \aleph, \omega)] = 0$$

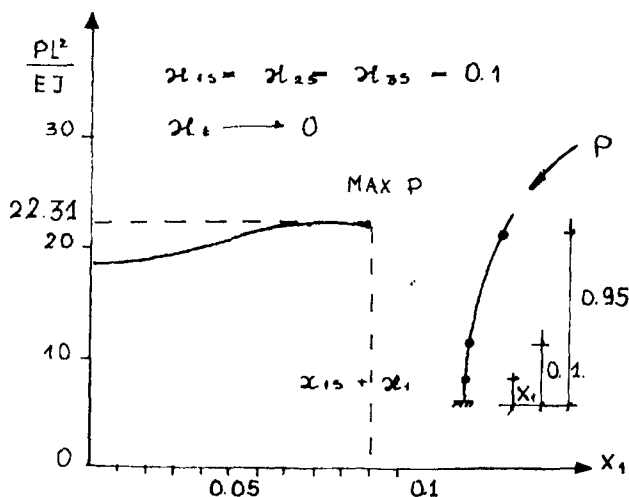
na płaszczyźnie zespolonej zadanej parametrycznie $-\infty < \omega < +\infty$. Punkt wspólny krzywych (2.9) (geometrycznie punkt przecięcia linii reprezentujących rzeczywistą i urojoną część równania charakterystycznego) wyznacza wartość

siły krytycznej. Opisany sposób ustalania krytycznych parametrów obciążenia znany jest w literaturze pod nazwą uogólnionego kryterium Michajłowa [4].

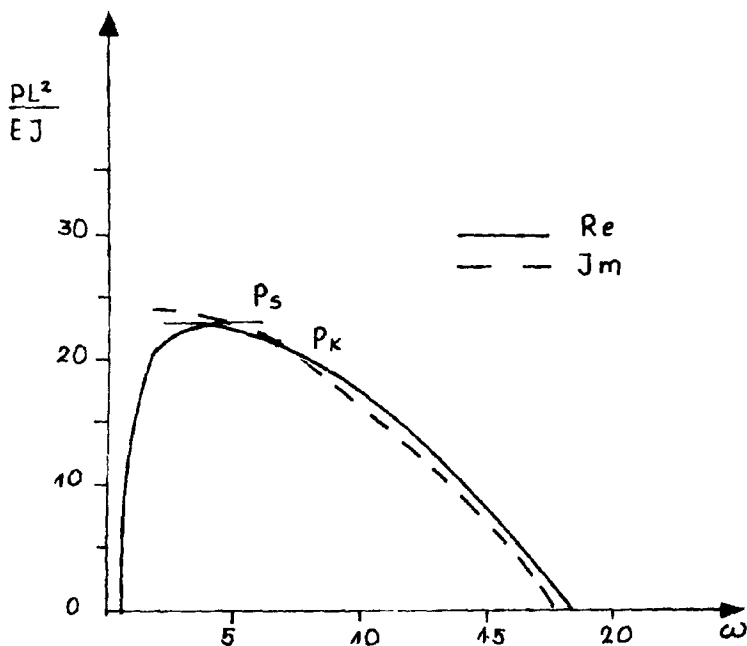
3. WYNIKI ANALIZY NUMERYCZNEJ

Badając rozkład krzywych charakterystycznych na płaszczyźnie P, ω (rysunki 2b,3b,4b) zauważono, że w przypadku obciążenia działającego stycznie do swobodnego końca kolumny układ traci stateczność tylko w sposób oscylacyjny. Potwierdza to wnioski otrzymane w pracach [2,3] dla układu z jednym i dwoma przegubami obciążonego tak działającą siłą cyrkulacyjną.

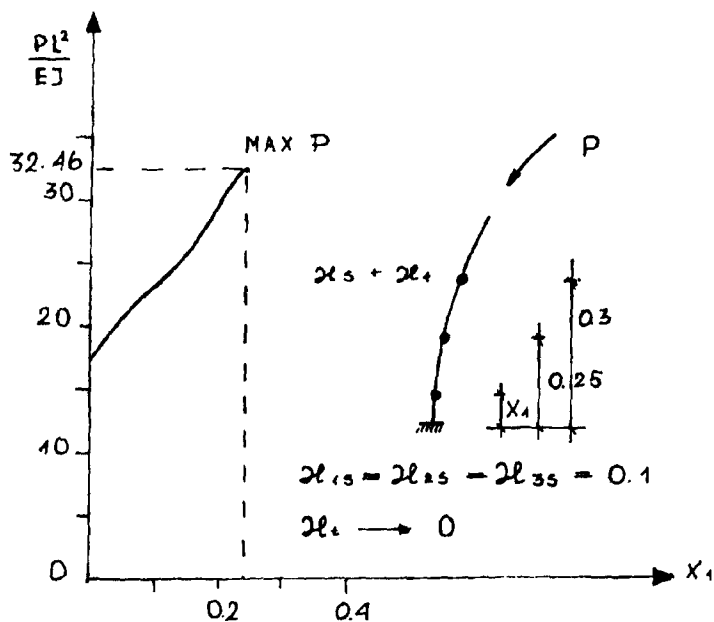
W pracy podjęto próbę optymalnego usytuowania (z uwagi na wartość siły krytycznej) przegubów w kolumnie segmentowej. Założono, że tłumienie dyskretne zostaje wprowadzane kolejno do dolnego, środkowego i górnego przegubu układu. Rysunki 2,3,4 ilustrują sposób ustalania maksymalnej wartości siły krytycznej. Rysunek 2 dotyczy np. wyboru najkorzystniejszego położenia przegubów w przypadku, gdy tłumienie dyskretne znajduje się w przegubie dolnym. Porównując przedstawione poniżej wykresy (rys.2,3,4) należy stwierdzić, że maksymalną wartość siły krytycznej $P_k = 35.47 \text{ EJ/L}^2$ osiągnięto dla układu, w którym tłumienie występowało w środkowym przegubie. Najniższą wartość obciążenia krytycznego uzyskano przy tłumieniu przegubu dolnego. Ekstremalne wartości siły krytycznej otrzymano wówczas, gdy przegub dolny i środkowy znajdowały się w niewielkiej odległości od siebie, przegub górny natomiast był bardzo blisko dolnego i środkowego (rys.4) lub na końcu swobodnym kolumny (rys.2,3).



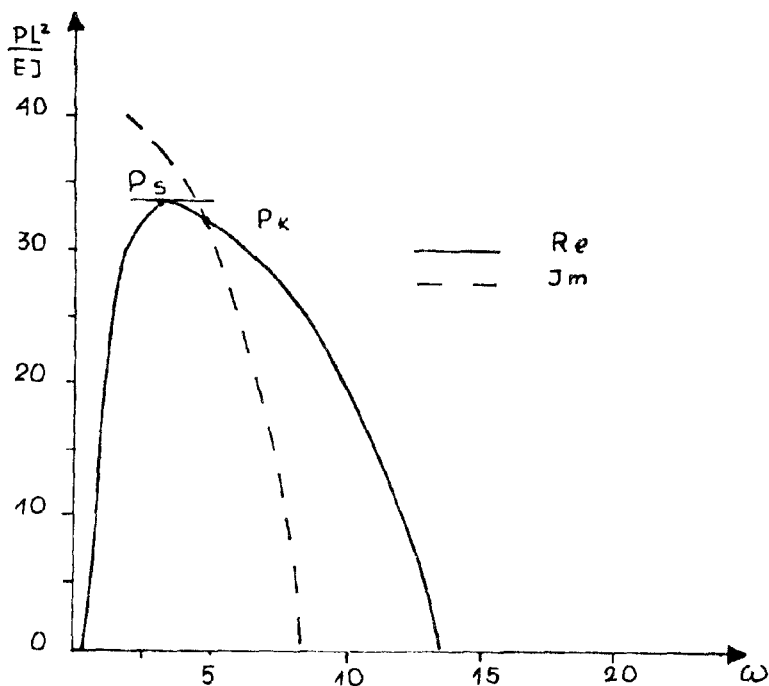
Rys.2a. Tłumienie dolnego przegubu



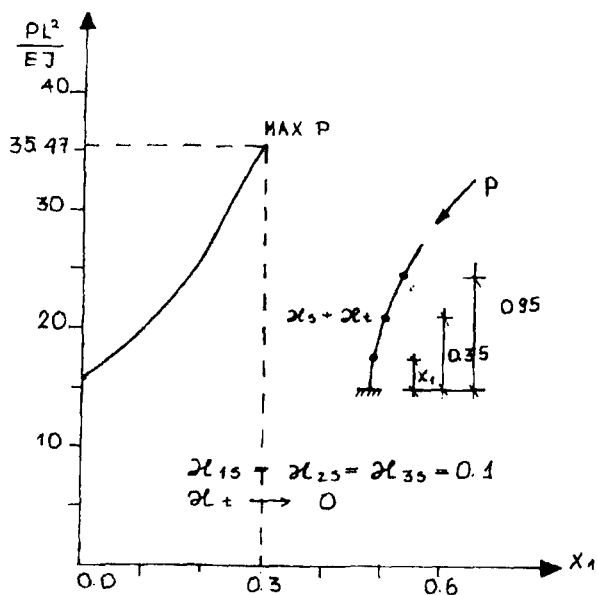
Rys.2b. Układ krzywych charakterystycznych na płaszczyźnie P, ω przy tłumieniu dolnego przegubu



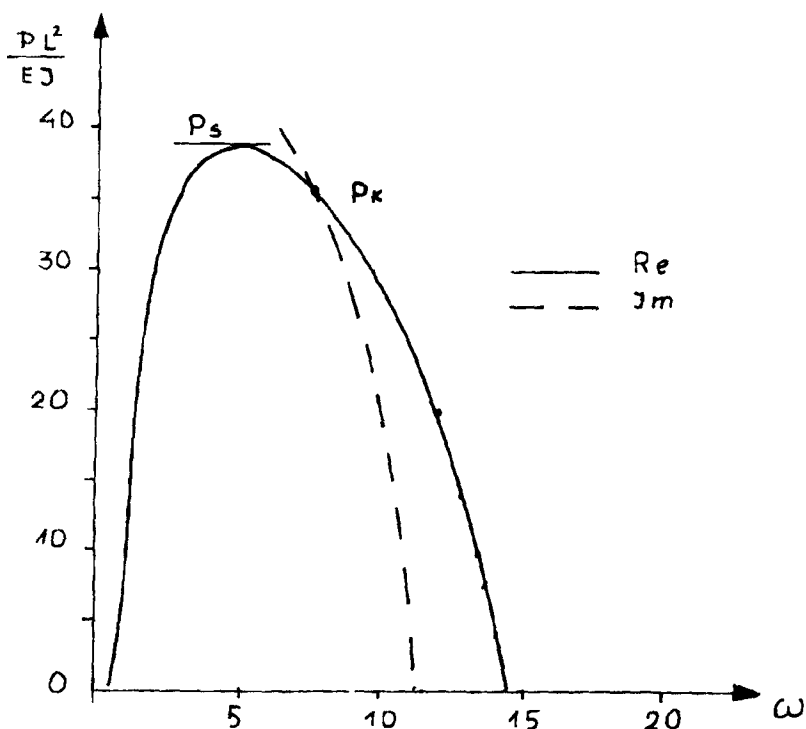
Rys.3a. Tłumienie środkowego przegubu



Rys.3b. Układ krzywych charakterystycznych na płaszczyźnie P, ω przy tłumieniu środkowego przegubu



Rys.4a. Tłumienie górnego przegubu



Rys.4b. Układ krzywych charakterystycznych na płaszczyźnie P, ω przy tłumieniu górnego przegubu

4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Podsumowując otrzymane rezultaty stwierdzono, że działanie siły stycznej do swobodnego końca kolumny powoduje oscylacyjną utratę stateczności.

W każdym z przeanalizowanych przypadków zauważono nieznaczny, destabilizujący wpływ tłumienia na wartość siły krytycznej. Można wnioskować, że oprócz sztywności przegubów, ich położenie wpływa na wartość obciążenia krytycznego w kolumnie hybrydowej. Obraz krzywych charakterystycznych na płaszczyźnie siła, częstość utwierdza w przekonaniu, że siła krytyczna dla przypadku sprężystego (brak tłumienia w przegubach) jest wyższa od wartości siły krytycznej dla ciągłej kolumny Becke'a.

Przedstawioną pracę należy traktować jako wstępne rozpoznanie zagadnienia, dotyczącego wpływu liczby przegubów oraz ich usytuowania, na wartość obciążenia krytycznego w kolumnie wielosegmentowej z tłumieniem dyskretnym.

LITERATURA

- [1] Bogacz R., Niespodziana A. : O stateczności ciągłych kolumn Becke'a ze zlokalizowaną utratą sztywności. Prace IPPT, 27, 1987
- [2] Bogacz R., Imielowski Sz.: Stateczność kolumn z węzłem obrotowym lub przesuwным poddanych obciążeniom cyrkulacyjnym. Sympozjum - Modelowanie w mechanice, PTMSiT, Beskid Śląski 1989
- [3] Niespodziana A. : Wpływ tłumienia dyskretnego na stateczność kolumny obciążonej siłą śledzącą. VIII Sympozjum Dynamiki Konstrukcji, Rzeszów Jawor 1993
- [4] Porter B.: Stability criteria for linear dynamical systems. Mechanical Engineering Monographs 1967

THE INFLUENCE OF DISCRETE DAMPING ON A STABILITY FOR HIBRID
COLUMN WITH THREE JOINTS

Summary

This paper is continuation the early study. Influence of localized internal damping on a stability of column subjected to circulatory load is considered. The column consisting of segments connected by viscoelastic joints. The numerical results show that discrete damping may destabilize the structure.

ANALIZA WSPÓLDZIAŁANIA DWÓCH FAZ WE WŁÓKNO- KOMPOZYTOWYM OŚRODKU LEPKOSPREŻYSTYM WSTĘPNIE SPRĘŻONYM

Maria Olejniczak

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR, Katedra Mechaniki Budowli
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

W pracy omówiono współdziałanie dwóch faz we włóknokompozycie lepkospreżystym, który poddany jest wstępnemu sprężaniu. Zastosowano kontynuacyjny opis kompozytu. Problem przedstawiono na przykładzie zadania jednowymiarowego stosując dyskretyzację względem czasu oraz rozwiązania analityczne.

1. WSTĘP

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest współdziałanie dwóch materiałów składowych we włóknokompozycie lepkospreżystym znajdującym się w jednoosiowym stanie naprężenia. Przez włóknokompozyt rozumie się tutaj konglomerat utworzony z tworzywa podstawowego (matrycy), który wzmocniony jest włóknami rozłożonymi w sposób uporządkowany w fazie podstawowej. Ograniczenie w tej pracy rozważań do zadania jednowymiarowego wydaje się celowe, gdyż na przykładzie jednoosiowego stanu naprężenia można sobie wyrobić pogląd na problem pełzania dwufazowych kompozytów z wymuszonymi pierwotnymi stanami odkształcenia (wstępne sprężenie). Jednoosiowy stan naprężenia pozwala ponadto wykonać większą liczbę analiz za pomocą krótkiego programu komputerowego oraz, co ważne, pozwala analizy te potwierdzić za pomocą rozwiązań analitycznych.

Ośrodki wzmocniane włóknami są od szeregu lat przedmiotem rozważań teoretycznych i badań doświadczalnych. Najczęściej włóknokompozyt traktowany jest jako materiał jednorodny i anizotropowy [3,4]. Wyznaczeniu stałych anizotropii służą teorie homogenizacji [1,2,7,12]. Inne spojrzenie na mechanikę włóknokompozytu mamy w pracach [5,6], gdzie włóknokompozyt jest szczególnym przypadkiem ośrodka dwufazowego. Rozwinięcie tej koncepcji znajdujemy w pracach [8,9,11].

Niniejsza praca stanowi kontynuację rozważań dotyczących ośrodków kompozytowych zgodnie z koncepcją [5]. Wprowadza się warunek nierozdzielności obu faz, co jest równoważne ze wspólną ich deformacją. Z powyższego wynika,

że: $\sigma = \sigma^I + \sigma^{II}$, $\varepsilon = \varepsilon^I = \varepsilon^{II}$ (indeks górny oznacza numer fazy). Sformułowano związki konstytutywne dla dwufazowego ośrodka lepkosprężystego wstępnie sprężonego stosując dyskretyzację względem czasu [10].

Metoda przedstawiona w pracy [10] polega na podziale osi czasu na skończone przedziały o długości $\Delta t_\tau = t_\tau - t_{\tau-1}$, aproksymacji wielomianowej naprężeń oraz ścisłym rozwiązaniu równania różniczkowego otrzymanego ze związku konstytutywnego:

$$a_0 \sigma_\tau + a_1 \dot{\sigma}_\tau + a_2 \ddot{\sigma}_\tau = b_0 \varepsilon_\tau + b_1 \dot{\varepsilon}_\tau + b_2 \ddot{\varepsilon}_\tau \quad (1.1)$$

w którym: a_i , b_i są parametrami lepkosprężystymi materiału ($i = 1, 2, 3$), τ jest numerem chwili ($\tau = 0, 1, 2, \dots$). W rezultacie otrzymuje się w każdej chwili t_τ związek rekurencyjny, w którym naprężenie σ_τ jest wyrażone przez odkształcenie ε_τ oraz przez stan układu z chwili poprzedniej $t_{\tau-1}$. W przypadku występowania nieciągłości funkcji naprężenia ($\Delta \sigma_\tau$) lub prędkości naprężenia ($\Delta \dot{\sigma}_\tau$) ustala się związki pomiędzy $\Delta \varepsilon_\tau$ i $\Delta \sigma_\tau$ oraz $\Delta \dot{\varepsilon}_\tau$ i $\Delta \dot{\sigma}_\tau$.

Praca zawiera przykłady obliczeniowe oraz porównania otrzymanych wyników z rozwiązaniami ścisłymi.

2. ZWIĄZKI KONSTITUTYWNE

Opisany model dwufazowego ośrodka sprężystego [5] daje się w prosty sposób przenieść na ośrodek lepkosprężysty. W przypadku jednoosiowego stanu naprężenia matrycę stanowi pręt o przekroju A^I (faza I), który wzmocniony jest jednym bądź kilkoma włóknami o łącznym polu przekroju A^{II} rozłożonymi symetrycznie wzdłuż osi pręta (faza II). Pomija się ubytki materiału fazy I na trasie włókien. Zakłada się możliwość wprowadzenia w chwili $t = 0$ ustalonego pierwotnego odkształcenia w fazie włókien $\Delta \varepsilon^{oII}$. Można to osiągnąć przez wstępne napięcie włókien siłą S^{oII} przed zespoleniem obu faz (wstępne sprężenie). Zakłada się dowolny program obciążenia opisany funkcją niekoniecznie ciągłą względem czasu. Przyjmuje się, że pręt może być obciążony siłą P_τ ($\tau = 1, 2, \dots$), która może doznawać nagłych przyrostów ΔP_τ oraz przyrostów prędkości $\Delta \dot{P}_\tau$ ($\tau = 0, 1, 2, \dots$).

Właściwości lepkosprężyste matrycy i włókien opisuje się związkami wyrowadzonymi dla jednoosiowego stanu naprężenia, w których uwzględnia się wpływ stanów sprężeniowych:

$$\sigma'_\tau = \frac{1}{\gamma'_\tau} \left(\varepsilon_\tau - A'_\tau \tilde{\varepsilon}'_{\tau-1} \right) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{\tau}^{II} = \frac{1}{\gamma_{\tau}^{II}} \left[\left(\varepsilon_{\tau} - \Delta \varepsilon^{II} \right) - \underline{A}_{\tau}^{II} \tilde{\varepsilon}_{\tau-1}^{II} \right] \quad \tau = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

We wzorach (2.1) i (2.2) \underline{A}_{τ}^I i $\underline{A}_{\tau}^{II}$ są wierszowymi macierzami przeniesienia w kroku $(\tau-1, \tau)$ określonymi dla matrycy i włókien, γ_{τ}^I i γ_{τ}^{II} są modułami lepkości poszczególnych faz, natomiast wektory $\underline{\varepsilon}_{\tau-1}^I$ oraz $\underline{\varepsilon}_{\tau-1}^{II}$ określają stan układu z chwili poprzedniej $t_{\tau-1}$:

$$\underline{\varepsilon}_{\tau-1}^I = \text{col}(\varepsilon_{\tau-1}, \dot{\varepsilon}_{\tau-1}, \sigma_{\tau-1}^I, \dot{\sigma}_{\tau-1}^I, \Delta \sigma_{\tau-1}^I, \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}^I),$$

$$\underline{\varepsilon}_{\tau-1}^{II} = \text{col}(\varepsilon_{\tau-1} - \Delta \varepsilon^{II}, \dot{\varepsilon}_{\tau-1}, \sigma_{\tau-1}^{II}, \dot{\sigma}_{\tau-1}^{II}, \Delta \sigma_{\tau-1}^{II}, \Delta \dot{\sigma}_{\tau-1}^{II}).$$

Znakiem "prim" oznaczono granice prawostronne naprężeń i prędkości naprężeń w punktach nieciągłości na osi czasu.

Dysponując równaniem równowagi:

$$\sigma_{\tau}^I A^I + \sigma_{\tau}^{II} A^{II} = P_{\tau} \quad (2.3)$$

oraz związkami (2.1) i (2.2) wyprowadzono wzór pozwalający obliczać odkształcenie włókno kompozytowego pręta w dowolnej chwili t_{τ} :

$$\varepsilon_{\tau} = \frac{\gamma_{\tau}^I}{A^I(1 + \beta_{\tau})} \left(\frac{A^I}{\gamma_{\tau}^I} \underline{A}_{\tau}^I \tilde{\varepsilon}_{\tau-1}^I + \frac{A^{II}}{\gamma_{\tau}^{II}} \underline{A}_{\tau}^{II} \tilde{\varepsilon}_{\tau-1}^{II} - \frac{\gamma_{\tau}^{II}}{\gamma_{\tau}^I} S_{\tau}^0 + P_{\tau} \right) \quad (2.4)$$

w którym: $\beta_{\tau} = \frac{\gamma_{\tau}^I A^{II}}{\gamma_{\tau}^{II} A^I}$

Prędkości odkształceń określamy wykorzystując związki łączące naprężenia z prędkościami odkształceń oraz stanem układu w chwili poprzedniej [10]

$$\sigma_{\tau}^I = \frac{1}{\dot{\gamma}_{\tau}^I} \dot{\varepsilon}_{\tau} - \underline{A}_{\tau}^I \tilde{\varepsilon}_{\tau-1}^I, \quad \sigma_{\tau}^{II} = \frac{1}{\dot{\gamma}_{\tau}^{II}} \left(\dot{\varepsilon}_{\tau} - \underline{A}_{\tau}^{II} \tilde{\varepsilon}_{\tau-1}^{II} \right) \quad (2.5)$$

oraz równanie (2.3) i stąd otrzymujemy:

$$\dot{\varepsilon}_{\tau} = \frac{\dot{\gamma}_{\tau}^I}{A^I(1 + \beta_{\tau})} \left(\frac{A^I}{\dot{\gamma}_{\tau}^I} \underline{A}_{\tau}^I \tilde{\varepsilon}_{\tau-1}^I + \frac{A^{II}}{\dot{\gamma}_{\tau}^{II}} \underline{A}_{\tau}^{II} \tilde{\varepsilon}_{\tau-1}^{II} + P_{\tau} \right), \quad \beta_{\tau} = \frac{\dot{\gamma}_{\tau}^I A^{II}}{\dot{\gamma}_{\tau}^{II} A^I} \quad (2.6)$$

Prędkości naprężeń liczymy wprost ze wzoru aproksymującego funkcję naprężeń w przedziale czasu \mathfrak{I}_{τ} . Dla matrycy i włókien mamy:

$$\dot{\sigma}_{\tau}^{I,II} = \frac{2}{\mathfrak{I}_{\tau}} (\sigma_{\tau}^{I,II} - \sigma_{\tau-1}^{I,II}) - \dot{\sigma}_{\tau-1}^{I,II} \quad (2.7)$$

Powyższe wzory pozwalają obliczyć granice lewostronne funkcji naprężenia i prędkości naprężenia. W przypadku nieciągłości tych funkcji w chwili t_{τ} obliczamy granice prawostronne naprężeń i prędkości naprężeń $\sigma_{\tau}^{I,II} = \sigma_{\tau}^{I,II} + \Delta \sigma_{\tau}^{I,II}$, $\dot{\sigma}_{\tau}^{I,II} = \dot{\sigma}_{\tau}^{I,II} + \Delta \dot{\sigma}_{\tau}^{I,II}$

Przyrosty skokowe naprężeń i przyrosty skokowe odkształceń oraz przyrosty ich prędkości związane są równaniami:

$$\Delta\sigma_{\tau}^{I,II} = \frac{1}{\gamma_o^{I,II}} \Delta\varepsilon_{\tau} \quad , \quad \Delta\dot{\sigma}_{\tau}^{I,II} = \frac{1}{\gamma_o^{I,II}} \Delta\dot{\varepsilon}_{\tau} - \frac{\dot{\gamma}_o^{I,II}}{(\gamma_o^{I,II})^2} \Delta\varepsilon_{\tau} \quad , \quad \tau = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

W chwili początkowej t_o konieczne jest uwzględnienie dodatkowo skoku naprężenia i skoku prędkości naprężenia wywołanych przez deformacje wstępne. Zmodyfikowane związki konstytutywne dla fazy włókien przyjmują postać:

$$\Delta\sigma_o^{II} = \frac{1}{\gamma_o^{II}} (\Delta\varepsilon_o - \Delta\varepsilon_o^{oII}) \quad , \quad \Delta\dot{\sigma}_o^{II} = \frac{1}{\gamma_o^{II}} \Delta\dot{\varepsilon}_o - \frac{\dot{\gamma}_o^{II}}{(\gamma_o^{II})^2} (\Delta\varepsilon_o - \Delta\varepsilon_o^{oII}) \quad (2.9)$$

Wykorzystując równania równowagi wyrażone w przyrostach:

$$\begin{aligned} A^I \Delta\sigma_{\tau}^I + A^{II} \Delta\sigma_{\tau}^{II} &= \Delta P_{\tau} \\ A^I \Delta\dot{\sigma}_{\tau}^I + A^{II} \Delta\dot{\sigma}_{\tau}^{II} &= \Delta\dot{P}_{\tau} \quad , \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

oraz związki (2.8) i (2.9) otrzymujemy dla t_{τ} ($\tau = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{\tau} &= \frac{\gamma_o^I}{A^I(1 + \beta_o)} (\Delta P_{\tau} - S^{II}) \\ \Delta\dot{\varepsilon}_{\tau} - \frac{\dot{\gamma}_o^I}{A^I(1 + \beta_o)} \left[\Delta\dot{P}_{\tau} + \frac{1}{1 + \beta_o} \left(\frac{\dot{\gamma}_o^I}{\gamma_o^I} + \beta_o \frac{\dot{\gamma}_o^{II}}{\gamma_o^{II}} \right) \Delta P_{\tau} - \frac{1}{1 + \beta_o} \left(\frac{\dot{\gamma}_o^I}{\gamma_o^I} - \frac{\dot{\gamma}_o^{II}}{\gamma_o^{II}} \right) S^{II} \right] & \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdzie wpływ siły sprężającej S^{II} należy uwzględnić tylko w chwili początkowej ($t = 0$).

Dysponując kompletem równań przeprowadzono obserwację procesu pelzania sprężonego pręta. Analizowano współdziałanie różnych modeli opisujących właściwości lepkosprężyste składników kompozytu. W badaniach nie uwzględniono wpływu obciążenia zewnętrznego ($P_{\tau} = \Delta P_{\tau} = \Delta\dot{P}_{\tau} = 0$) na przebieg procesu rozprężania się pręta.

3. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

3.1. Przykład 1

Pręt o długości $l = 1\text{m}$ i polu powierzchni przekroju $A^I = 0,01\text{m}^2$ został wzmocniony w środku włókmem o przekroju $A^{II} = 1 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$. Przyjęto, że włókno wstępnie naciągnięto siłą $S^{II} = 10\text{kN}$, co po zespoleniu z matrycą wywołało stan deformacji pierwotnych. Właściwości lepkosprężyste pręta (mat-

rycy) opisano związkim różniczkowym odpowiadającym modelowi Zenera (rys.3.1):

$$\frac{E_1^I + E_2^I}{\eta_2^I} \sigma^I(t) + \dot{\sigma}^I(t) = \frac{E_1^I E_2^I}{\eta_2^I} \varepsilon(t) + E_1^I \dot{\varepsilon}(t) \quad (3.1)$$

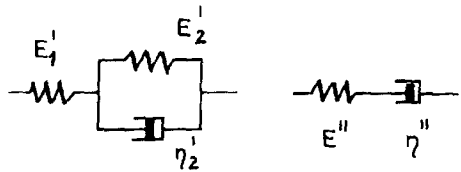
natomiast włókno opisano równaniem sformułowanym dla modelu Maxwella

$$\frac{E^{II}}{\eta^{II}} \sigma^{II}(t) + \dot{\sigma}^{II}(t) = E^{II} \dot{\varepsilon}(t) \quad (3.2)$$

W obliczeniach przyjęto następujące parametry dla matrycy i włókien:

$$E_1^I = 3 \cdot 10^4 \text{ MPa}, \quad E_2^I = 9 \cdot 10^3 \text{ MPa}, \quad E^{II} = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}, \quad \eta_2^I = 5 \cdot 10^6 \text{ MPah}$$

$$\eta^{II} = \begin{cases} (1) & 8 \cdot 10^6 \text{ MPah} \\ (2) & 2 \cdot 10^7 \text{ MPah} \\ (3) & 5 \cdot 10^7 \text{ MPah} \\ (4) & 5 \cdot 10^9 \text{ MPah} \end{cases}$$



Rys.3.1

W przykładzie tym obserwowano proces pełzania pręta w zależności od przyjętej wartości współczynnika η^{II} . Obliczenia przeprowadzone zostały w przedziale czasu (0, 1000 h) z krokiem 50 h. Otrzymane wyniki ilustrują rysunki: 3.2, 3.3, 3.4, 3.5. Dla przypadku tego poszukiwano również rozwiązania analitycznego. Wykorzystując równania równowagi sformułowane dla przypadku samego sprzężenia:

$$A^I \sigma(t)^I + A^{II} \sigma(t)^{II} = 0 \quad (3.3)$$

$$A^I \dot{\sigma}(t)^I + A^{II} \dot{\sigma}(t)^{II} = 0$$

warunki początkowe: $\sigma^I(0) = E_1^I \varepsilon(0)$, $\sigma^{II}(0) = E^{II} [\varepsilon(0) - \Delta \varepsilon^{oII}]$ oraz związki różniczkowe: (3.1) i (3.2) wyprowadzono następujący wzór :

$$\varepsilon(t) = \frac{A^{II} E^{II} \Delta \varepsilon^{oII}}{\Psi (\lambda_1 - \lambda_2)} \left[\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \frac{A^I E_1^I}{\Psi} \left(\frac{E_1^I}{\eta_1^I} - \frac{E^{II}}{\eta^{II}} \right) (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \right] \quad (3.4)$$

w którym:

$$\Psi = A^I E_1^I + A^{II} E^{II}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4B_0 B_2}}{2B_2}, \quad \Delta \varepsilon^{oII} = -\frac{\dot{\sigma}^{II}}{E^{II} A^{II}}$$

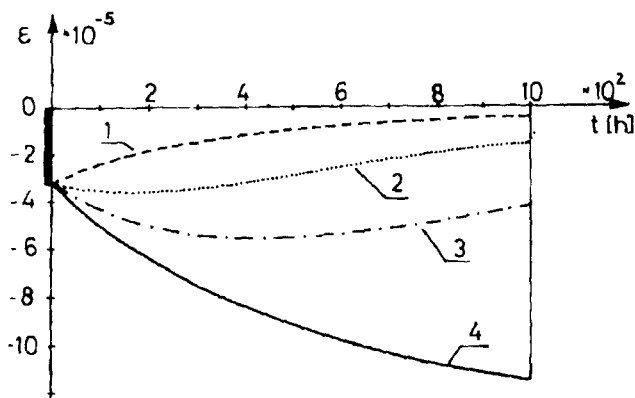
$$B_0 = A^I \frac{E_1^I E_2^I}{\eta^{II} \eta_2^I}, \quad B_1 = A^I E_1^I \left(\frac{E_2^I}{E^{II} \eta_2^I} + \frac{1}{\eta^{II}} \right) + \frac{A^{II}}{\eta_2^I} (E_1^I + E_2^I)$$

$$B_2 = A^{II} + A^I \frac{E_1^I}{E^{II}}, \quad B_1^2 - 4B_0B_2 \geq 0$$

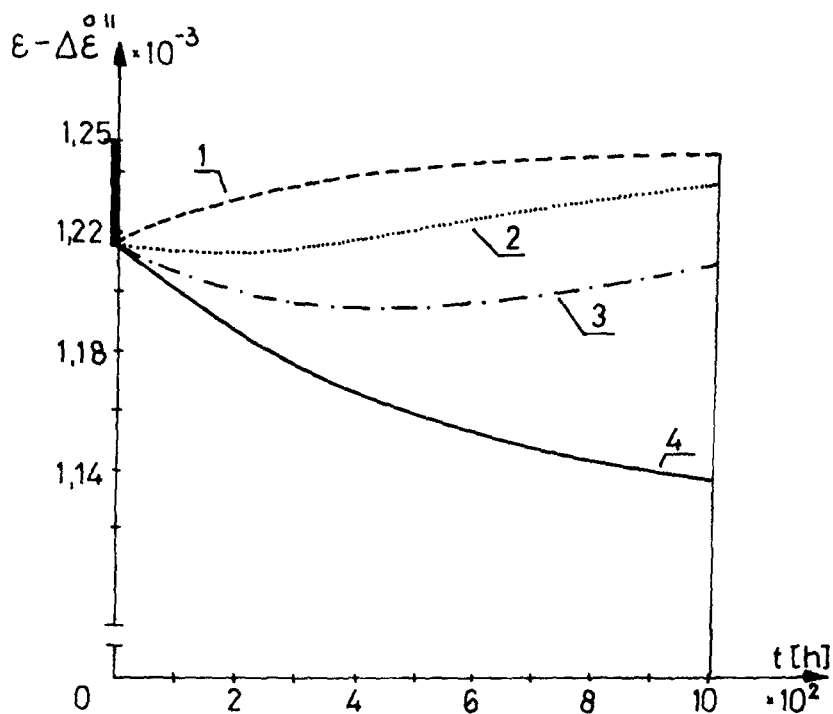
W tabeli 1 przedstawiono wyniki rozwiązania ścisłego oraz porównano je z wynikami otrzymanymi przy stosowaniu ujęcia dyskretnego z różnymi długościami kroku ϑ_τ : 1000 h, 500 h, 200 h, 100 h, 50 h. Obliczenia dotyczą przypadku, gdy współczynnik lepkości matrycy wynosi $h^{II} = 5 \cdot 10^7 \text{MPah}$.

Tabela 1

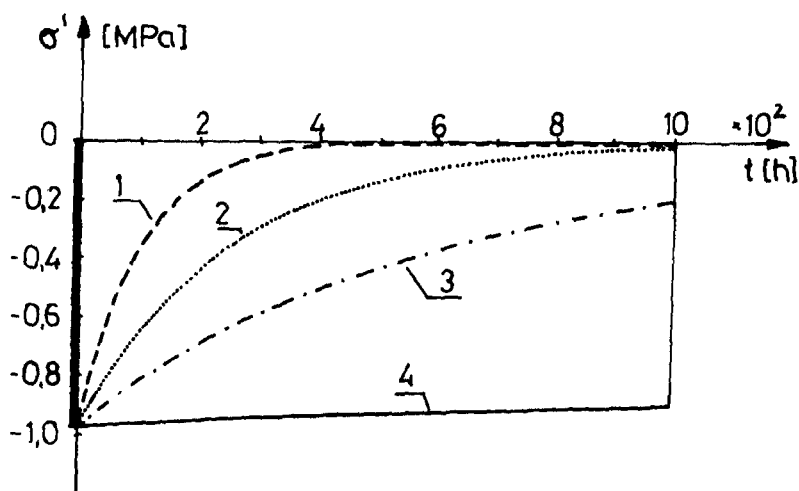
$t \cdot 10^3$ [h]	ODKSZTALCENIE PRĘTA $\epsilon \cdot 10^4$					
	WARTOŚĆ wg (3.4)	APROKSYMACJA KWADRATOWA				
		$\vartheta_\tau=1000$ [h]	$\vartheta_\tau=500$ [h]	$\vartheta_\tau=200$ [h]	$\vartheta_\tau=100$ [h]	$\vartheta_\tau=50$ [h]
0	-0,32468	-0,32468	-0,32468	-0,32468	-0,32468	-0,32468
0,1	-0,43740				-0,43739	-0,43740
0,2	-0,50640			-0,50628	-0,50641	-0,50640
0,3	-0,54300				-0,54300	-0,54300
0,4	-0,55595			-0,55607	-0,55596	-0,55595
0,5	-0,55194		-0,54965		-0,55193	-0,55194
0,6	-0,53609			-0,53598	-0,53610	-0,53609
0,7	-0,51229				-0,51228	-0,51229
0,8	-0,48345			-0,48361	-0,48346	-0,48345
0,9	-0,45175				-0,45174	-0,45175
1,0	-0,41878	-0,41335	-0,42307	-0,41863	-0,41880	-0,41878



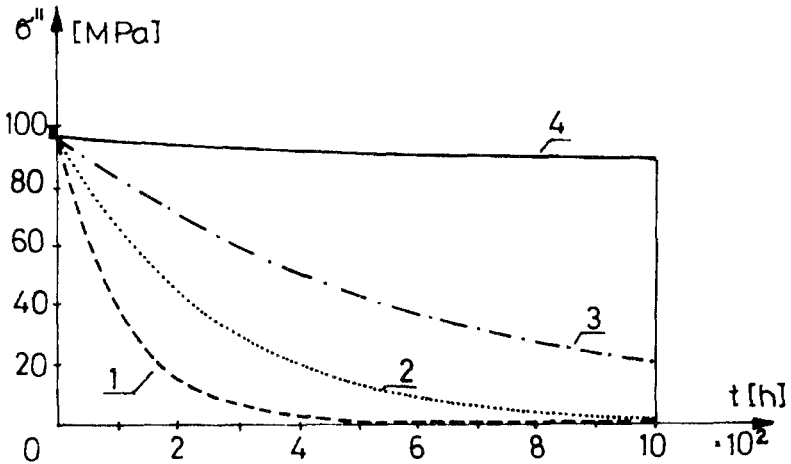
Rys.3.2



Rys.3.3



Rys.3.4



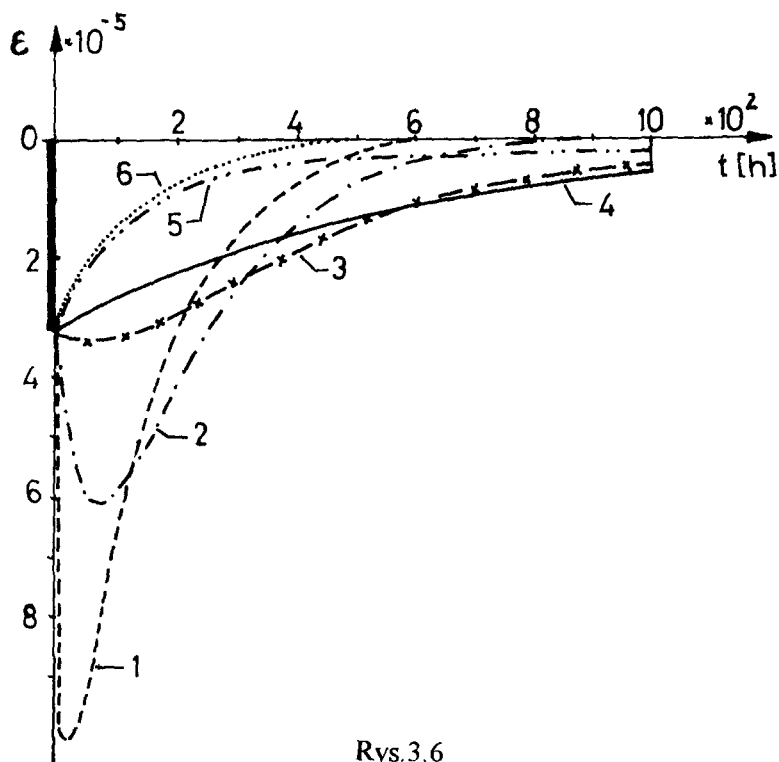
Rys.3.5

3.2. Przykład 2

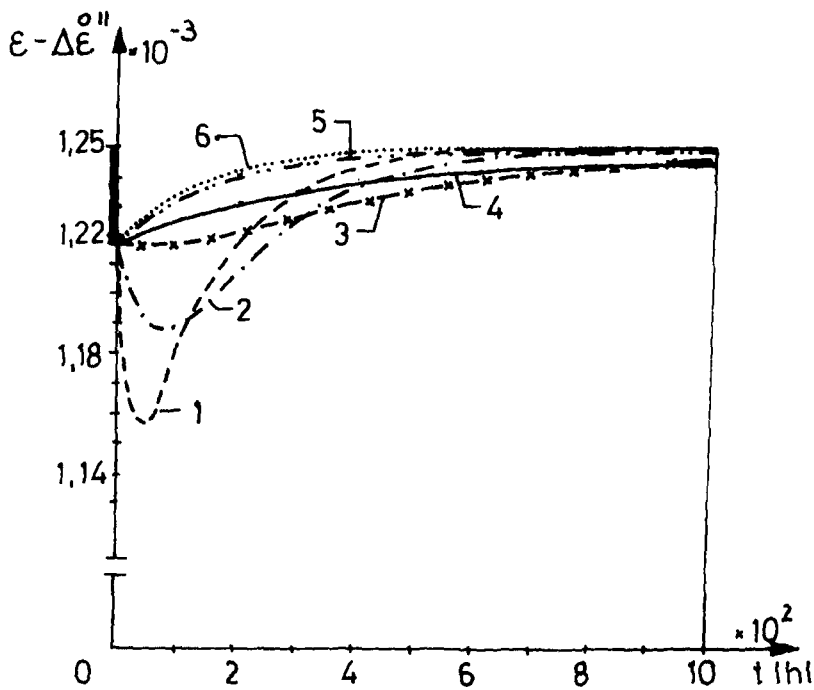
Przeprowadzono analizę dotyczącą współdziałania dwóch faz, których właściwości lepkosprężyste matrycy i włókien opisane są jak w przykładzie 1. W obliczeniach przyjęto: E_1^I , E_2^I , A^I , A^{II} , S^{II} , I jak w przykładzie 1, $\eta^{II} = 1 \cdot 10^7 MPah$,

$$\eta_2^I = \begin{cases} (1) & 8 \cdot 10^4 MPah \\ (2) & 8 \cdot 10^5 MPah \\ (3) & 3 \cdot 10^6 MPah \\ (4) & 5 \cdot 10^6 MPah \\ (5) & 5 \cdot 10^7 MPah \\ (6) & 4 \cdot 10^8 MPah \end{cases}$$

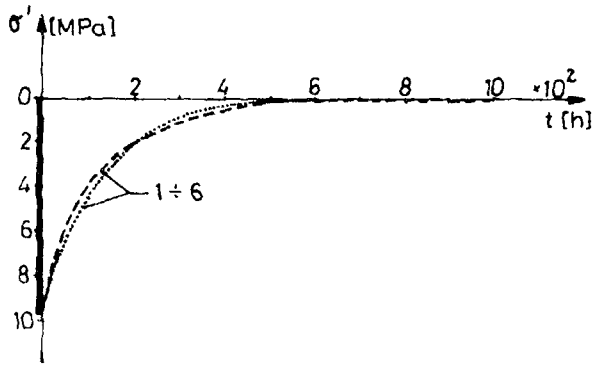
Przedstawione na rys.: 3.6, 3.7, 3.8 i 3.9 wykresy wskazują na duży wpływ wartości współczynnika lepkości η_2^I na charakter zmian w czasie odkształceń w matrycy oraz we włóknie. Nie obserwuje się natomiast istotnego wpływu η_2^I na zmiany w czasie naprężeń w poszczególnych fazach.



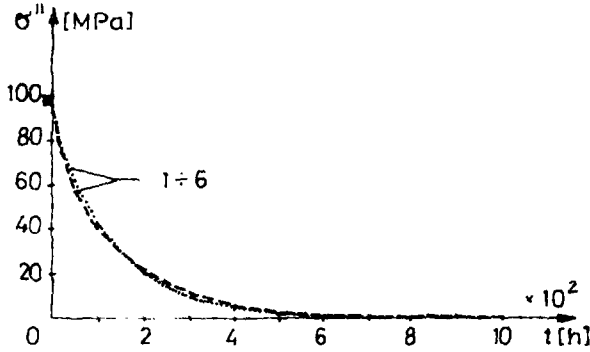
Rys.3.6



Rys.3.7



Rys.3.8



Rys.3.9

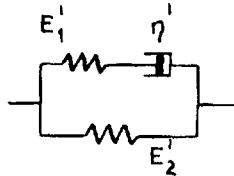
3.3. Przykład 3

Włóknokompozytowy pręt o wymiarach jak w przykładzie 1 sprężony został włóknem sprężystym ($E'' = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$). Siła sprężająca $S'' = 10 \text{ kN}$ wywołała stan deformacji pierwotnych $\Delta \varepsilon'' = -5 \cdot 10^{-4}$. Właściwości fizyczne matrycy opisano modelem Zenera (rys.3.10), dla którego równanie stanu ma postać :

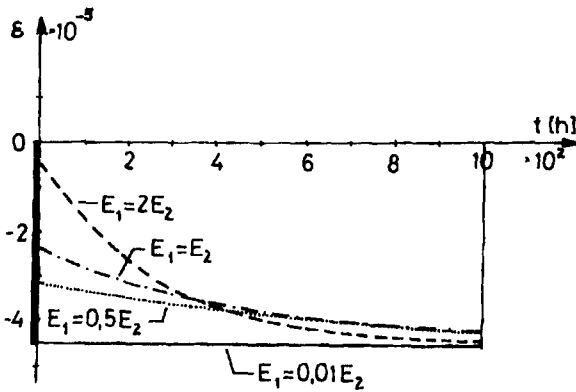
$$\frac{E_1'}{\eta'} \sigma'(t) + \dot{\sigma}'(t) = \frac{E_1' E_2'}{\eta'} \varepsilon(t) + (E_1' + E_2') \dot{\varepsilon}(t) \quad (3.5)$$

z następującymi parametrami: $\eta' = 5 \cdot 10^6 \text{ MPah}$, $E_2' = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Obliczenia przeprowadzono w przedziale czasu $\langle 0, 1000 \text{ h} \rangle$ z krokiem $\vartheta_\tau = 50 \text{ h}$ dla zmiennych wartości parametru $E_1' = (0, 01E_2', 0, 5E_2', E_2', 2E_2')$. Otrzymane wyniki przedstawiono na rysunkach: 3.11, 3.12, 3.13 i 3.14. Zaobserwowano, że

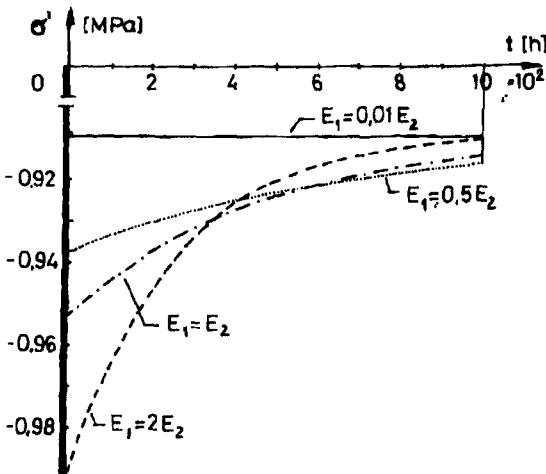
przy bardzo dużym stosunku E_2^I do E_1^I ($\frac{E_2^I}{E_1^I} \rightarrow \infty$) rozwiązanie zmierza do wyników, jakie otrzymuje się przy połączeniu dwóch materiałów sprężystych o modułach: $E^I = 2 \cdot 10^4 \text{MPa}$ i $E^{II} = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$.



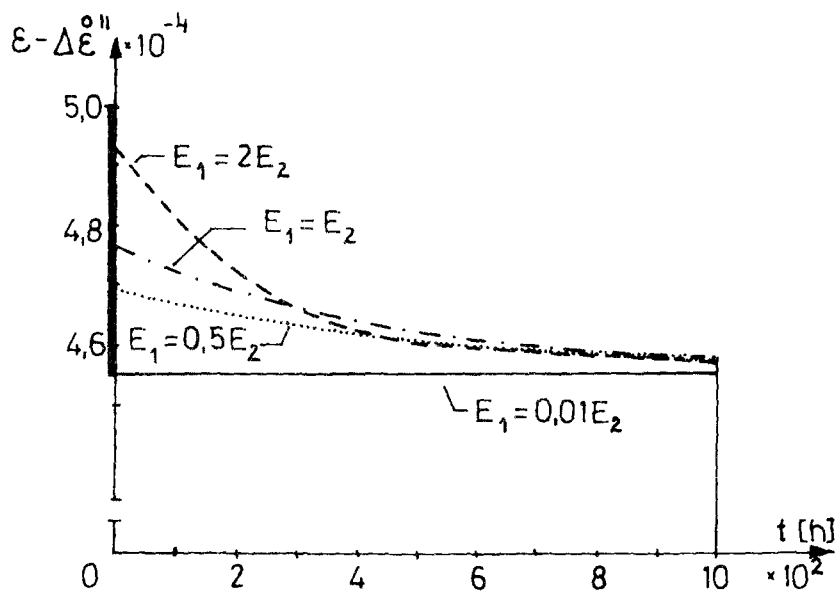
Rys.3.10



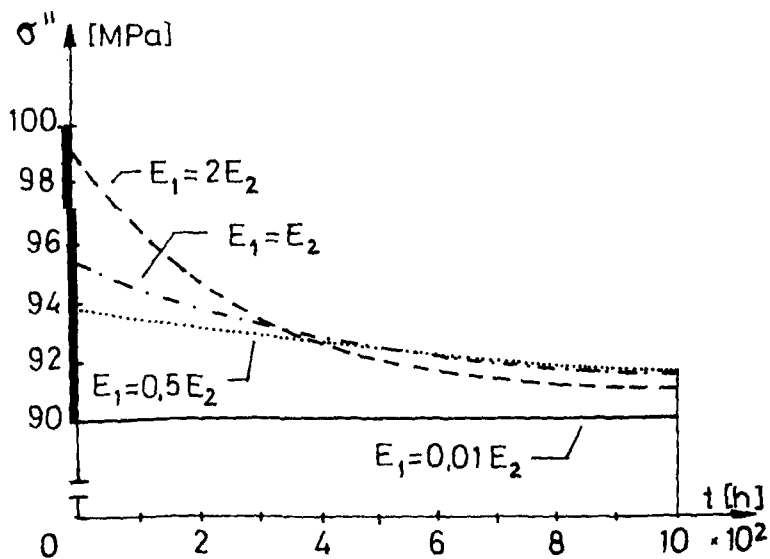
Rys.3.11



Rys.3.12



Rys.3.13



Rys.3.14

3.4. Przykład 4

Obserwacji poddano współdziałanie modelu Maxwella (E^I, h^I), którym opisano materiał pręta, ze sprężystym włóknem (E^{II}). Parametry opisujące kompozyt są następujące: $E^I = 3 \cdot 10^4$ MPa, $E^{II} = 2,1 \cdot 10^5$ MPa. Przeprowadzono analizę wpływu współczynnika h^I na proces pełzania kompozytu przyjmując następujące dane: $5 \cdot 10^6$ MPah, $2 \cdot 10^7$ MPah, $5 \cdot 10^8$ MPah. Siłę naprzężającą włókno oraz przekroje poprzeczne pręta i włókna przyjęto jak w przykładzie 1.

Rozwiązanie analityczne tego zadania ma postać:

$$\epsilon(t) = \Delta \epsilon^{0II} \left(1 - \frac{A^I E^I}{A^I E^I + A^{II} E^{II}} e^{-\alpha t} \right) \tag{3.6}$$

gdzie: $\alpha = \frac{E^I E^{II} A^{II}}{\eta^I (E^I A^I + E^{II} A^{II})}$.

Obliczenia przeprowadzono w przedziale czasu $\langle 0, 4000 \text{ h} \rangle$ wykorzystując rozwiązanie (3.6). W tabeli 2 przedstawiono zmiany w czasie odkształceń oraz zmiany wartości naprężeń w matrycy dla zadanych wartości h^I . Dla $h^I \rightarrow \infty$ otrzymujemy takie wyniki, jak przy połączeniu dwóch materiałów sprężystych o modułach: E^I i E^{II} .

Tabela 2

t 10 ³ [h]	$\eta^I = 5 \cdot 10^6$ [MPah]		$\eta^I = 2 \cdot 10^7$ [MPah]		$\eta^I = 5 \cdot 10^8$ [MPah]	
	$\epsilon \cdot 10^{-5}$	$\sigma^I \cdot 10^3$ [MPa]	$\epsilon \cdot 10^{-5}$	$\sigma^I \cdot 10^2$ [MPa]	$\epsilon \cdot 10^{-5}$	$\sigma^I \cdot 10^3$ [MPa]
0	-3,115	-0,9346	-3,115	-0,9346	-3,115	-0,9346
0,4	-9,581	-0,7988	-4,828	-0,8986	-3,185	-0,9331
0,8	-15,109	-0,6827	-6,475	-0,8640	-3,255	-0,9317
1,2	-19,833	-0,5835	-8,059	-0,8308	-3,324	-0,9302
1,6	-23,870	-0,4987	-9,582	-0,7988	-3,394	-0,9287
2,0	-27,321	-0,4263	-11,046	-0,7680	-3,463	-0,9273
2,4	-30,270	-0,3642	-12,454	-0,7385	-3,533	-0,9258
2,8	-32,791	-0,3114	-13,807	-0,7101	-3,602	-0,9244
3,2	-34,946	-0,2661	-15,109	-0,6827	-3,671	-0,9229
3,6	-36,787	-0,2275	-16,360	-0,6564	-3,740	-0,9215
4,0	-38,361	-0,1944	-17,563	-0,6312	-3,809	-0,9200

4. WNIOSKI

Analizy przedstawione w pracy pozwalają na głębsze zrozumienie mechanizmu współdziałania dwóch lepkosprężystych faz w materiałach ze wstępnym sprężeniem. Wnioski jakościowe z analiz wykonanych dla jedno-

osiowego stanu naprężenia mogą być, oczywiście z pewną dozą krytycyzmu, przenoszone na bardziej złożone stany naprężenia (np. płyty, tarcze).

Porównanie wyników otrzymanych przy stosowaniu dyskretyzacji względem czasu z rozwiązaniami ścisłymi potwierdza, że przyjęta metoda dyskretnego całkowania równań konstytutywnych może być z powodzeniem stosowana w zagadnieniach współpracy materiałów włóknokompozytowych z dystorsjami. Na ogół krok może być długi, co jest istotne przy badaniu długotrwałych z natury procesów reologicznych.

LITERATURA

- [1] Barański W.: Microstresses in homogenization. Arch. Mech., 38, 4, 369-382, 1986
- [2] Christensen R. M.: Mechanics of composite materials. Wiley-Interscience, New York 1979
- [3] Hashin Z., Rosen B. W.: The elastic moduli of fibre reinforced materials. Trans. ASME. J. Appl. Mech., 31, 2, 225-232 1964
- [4] Hill R.: Elastic properties of the reinforced solids. Some theoretical principles. J. Mech. Phys. Solids., 12, 199-212 1964
- [5] Holnicki - Szulc J.: Zagadnienie sprężania w ośrodkach dwufazowych. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1, 16, 41-55, 1978
- [6] Holnicki-Szulc J.: Dystorsje w układach konstrukcyjnych. Analiza, sterowanie, modelowanie. PWN, Warszawa-Poznań 1990
- [7] Jones R.: Mechanics of composite materials. Mc Graw Hill., New York 1975
- [8] Olejniczak M.: The influence of fibrous phase on stress redistribution in the viscoelastic disk. X Polish Conf. "Comp. Methods in Mechanics", Świnoujście-Szczecin, 2, 575-582, 1991
- [9] Olejniczak M.: Analizy parametryczne zginanych włóknokompozytowych płyt lepkosprężystych. XI. Konf. Naukowa KILiW PAN i Komitetu Nauki PZITB, Rzeszów-Krynica-Warszawa, 2, 151-158, 1994
- [10] Świtka R., Husiar B.: Dyskretna analiza modeli reologicznych, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 22 1/2, 209-233, 1984
- [11] Świtka R.: Equations of the fibre composite plates. Engineering Trans., 40, 2, 178-201, 1992
- [12] Woźniak Cz.: Nonstandard analysis in mechanics. Advances in Mechanics 1, 1986

THE ANALYSIS OF INTERRELATION BETWEEN TWO PHASE IN THE PRELIMINARY PRESTRESSED FIBROUS COMPOSITE VISCOELASTIC MEDIUM

Summary

This paper includes discussion of interrelation between two phases in fibrous composite viscoelastic medium. The continuous description of composite was used. The problem has been presented basing on example of one-axis task using digitization with the reference to time and analytical solutions.

DRGANIA SWOBODNE W METODZIE ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH

Anna Podhorecka

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR, Katedra Mechaniki Budowli
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

W pracy rozpatruje się drgania swobodne ośrodka ciągłego z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego (materiałowego) i zewnętrznego. Po sformułowaniu równania czteropracy wirtualnej, dla ciała liniowego fizycznie i geometrycznie, wyprowadzono równania ruchu według zasad metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Są to zawsze równania algebraiczne, niezależnie od wielkości tłumienia. Ostatecznie pokazano oryginalny sposób wyznaczania drgań swobodnych, bazujący na MECZ. Praca kończy się analizą drgań swobodnych belki Timoshenki.

1. WSTĘP

W pracach Kączkowskiego [1,2,3] przedstawione zostały podstawy metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Czas w tej metodzie traktuje się jako czwarty wymiar na równi z pozostałymi trzema, co umożliwia wprowadzenie pojęcia tzw. elementu czasoprzestrzennego (SKECZ). Taka formuła pozwala tworzyć między innymi macierze sztywności struktury według znanych procedur metody elementów skończonych (MES).

W niniejszej pracy zajęto się drganiami swobodnymi przy uwzględnieniu wpływu tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego. Przyjęto założenie, że tłumienie zewnętrzne jest typu lepkiego, natomiast tłumienie wewnętrzne opisane jest reologicznym modelem Kelvina -Voigta.

2. RÓWNANIE CZTEROPRACY WIRTUALNEJ

Ośrodek ciągły o objętości V znajduje się pod wpływem oddziaływań zewnętrznych zmieniających się w czasie i przestrzeni $p(\underline{X},t)$. Rozpatruje się liniowość typu geometrycznego (przemieszczenia i odkształcenia infinitezymalne). Analizę przeprowadza się dla ciała lepkosprężystego typu Kelvina-Voigta.

W sformułowaniu globalnym, ruch takiego ośrodka opisuje równanie czteropracy wirtualnej [2,3,4]:

$$\delta\chi = \iint_{\Omega} [\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} - \delta\dot{\mathbf{u}}_i\rho\dot{\mathbf{u}}_i - \delta\dot{\mathbf{u}}_i\rho\mathbf{f}_i] d\Omega - \iint_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u}_i\tilde{\mathbf{p}}_i d(\partial\Omega) + \int_V [\delta\mathbf{u}_i\rho\dot{\mathbf{u}}_i dV]_{t_{(p)}}^{t_{(k)}} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Omega : \{V \times (t_{(p)} \leq t \leq t_{(k)}), \quad t_{(p)} = 0, \quad t_{(k)} < \infty\}$$

$$\partial\Omega : \{\partial V \times (t_{(p)} \leq t \leq t_{(k)}), \quad \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

gdzie:

$$\varepsilon_{ij}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad \underline{\mathbf{X}}, t \in \bar{V} \times \langle 0, \infty \rangle$$

$$\sigma_{ij}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \mathbf{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl}^{(w)}\dot{\varepsilon}_{kl}, \quad \underline{\mathbf{X}}, t \in V \times \langle 0, \infty \rangle \quad (2.2)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_i(\underline{\mathbf{X}}, t) = \mathbf{p}_i - \eta_{ik}^{(z)}\dot{\mathbf{u}}_k, \quad \underline{\mathbf{X}}, t \in \partial V_t \times \langle 0, \infty \rangle$$

oznaczają kolejno składowe stanu odkształcenia, naprężenia i obciążenia zewnętrznego pomniejszonego o opór zewnętrzny, $\mathbf{u}_i(\underline{\mathbf{X}}, t)$ - składowe przemieszczenia, \mathbf{C}_{ijkl} , $\eta_{ijkl}^{(w)}$ i $\eta_{ik}^{(z)}$ zawierają kolejno stałe spężywości, stałe lepkości wewnętrznej (tłumienia wewnętrznego) i stałe lepkości zewnętrznej (tłumienia zewnętrznego), wreszcie ρ oraz $\rho\mathbf{f}_i$ to gęstości materiału i składowe sił masowych. Wielkość $\delta\mathbf{u}_i$ oznacza wariację przemieszczenia \mathbf{u}_i , a Ω obszar czasoprzestrzeni. Równanie (2.1) należy uzupełnić warunkami kinematycznymi:

$$\mathbf{u}_i(\underline{\mathbf{X}}, t) = \hat{\mathbf{u}}_i(\underline{\mathbf{X}}, t), \quad \underline{\mathbf{X}}, t \in \partial V_u \times \langle 0, \infty \rangle, \quad \partial V = \partial V_t \cup \partial V_u \quad (2.3)$$

oraz warunkami początkowymi:

$$\mathbf{u}_i(\underline{\mathbf{X}}, 0) = \mathbf{u}_i^0(\underline{\mathbf{X}}), \quad \underline{\mathbf{X}}, t \in \bar{V} \times \{0\} \quad (2.4)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i(\underline{\mathbf{X}}, 0) = \mathbf{v}_i^0(\underline{\mathbf{X}}), \quad \bar{V} = V \cup \partial V$$

Jeżeli wprowadzimy ograniczenie, że w chwilach $t_{(p)}$ i $t_{(k)}$ wariacje $\delta\mathbf{u}_i$ znikają:

$$\delta\mathbf{u}_i(t_{(p)}) = \delta\mathbf{u}_i(t_{(k)}) = 0 \quad (2.5)$$

to równanie (2.1) pokrywa się z zasadą Hamiltona [5]:

$$\delta \chi = \delta \int_{t^{(a)}}^{t^{(b)}} (L + E_k - E_p) dt = 0 \quad (2.6)$$

gdzie:

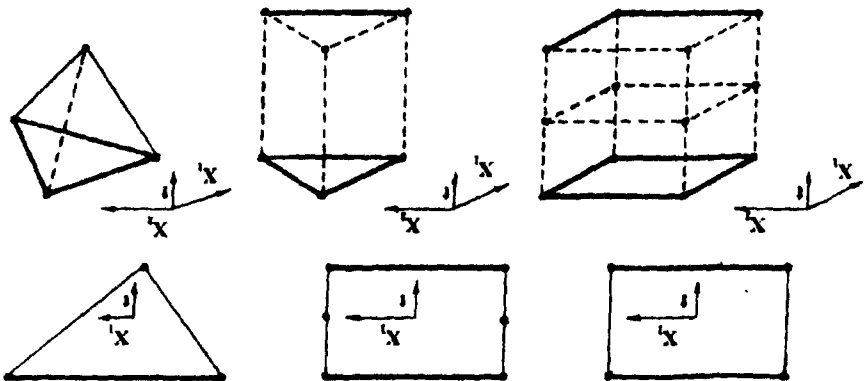
$$\delta L = \int_{\partial V} \delta u_i \tilde{p}_i d(\partial V) + \int_V \delta u_i \rho f_i dV \quad (2.7)$$

$$\delta E_k = \int_V \delta \dot{u}_i \rho \dot{u}_i dV, \quad \delta E_p = \int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV$$

oznaczają kolejno wariacje: energii potencjalnej obciążeń, energii kinetycznej i energii potencjalnej odkształceń.

3. RÓWNANIA RUCHU DLA ZDYSKRETYZOWANEJ CZASOPRZESTRZENI

Czasoprzestrzeń $\Omega : \{V \times (0 \leq t < \infty)\}$ dyskretyzujemy na skończoną liczbę elementów czasoprzestrzennych (SKECZ) o dowolnym kształcie (rys. 1).



Rys. 1. Przykładowe kształty elementów czasoprzestrzennych (SKECZ)

Następnie dokonujemy, na poziomie SKECZ, opisu wielkości występujących w równaniach (2.1) i (2.2) przemieszczeniami węzłowymi analizowanego elementu czasoprzestrzennego:

$$\begin{aligned} u_i^e(\underline{X}, t) &= \Phi_{i\alpha}^e(\underline{X}, t) r_{\alpha}^e, & \delta u_i^e &= \Phi_{i\alpha}^e \delta r_{\alpha}^e \\ \dot{u}_i^e(\underline{X}, t) &= \dot{\Phi}_{i\alpha}^e(\underline{X}, t) r_{\alpha}^e, & \delta \dot{u}_i^e &= \dot{\Phi}_{i\alpha}^e \delta r_{\alpha}^e \end{aligned}$$

(3.1)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^e(\underline{X}, t) &= \mathbf{B}_{j\alpha}^e(\underline{X}, t) \mathbf{r}_{\alpha}^e, & \delta \varepsilon_{ij}^e &= \mathbf{B}_{j\alpha}^e \delta \mathbf{r}_{\alpha}^e \\ \sigma_{ij}^e(\underline{X}, t) &= \left[\mathbf{C}_{ijkl}^e \mathbf{B}_{kl\alpha}^e(\underline{X}, t) + \eta_{ijkl}^e \dot{\mathbf{B}}_{kl\alpha}^e(\underline{X}, t) \right] \mathbf{r}_{\alpha}^e\end{aligned}$$

$i, j, k, l - 1, 2, 3, \quad e = 1, 2, \dots, E$ (E - liczba SKECZ),
 $\alpha = 1, 2, \dots, A_e$ ($A_e = w_e \cdot s_e$, w_e - liczba węzłów SKECZ,
 s_e - liczba stopni swobody w węźle SKECZ),
 $\underline{X} \times t \in \Omega_e$, (Ω_e - obszar SKECZ),

gdzie $\Phi_{i\alpha}(\underline{X}, t)$ jest funkcją kształtu zależną od \underline{X} i t , a \mathbf{r}_{α} przedstawia przemieszczenia węzłów, natomiast $\mathbf{B}_{j\alpha}$ zależy od równań geometrycznych:

$$\mathbf{B}_{j\alpha}^e(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{j\alpha}^e}{\partial X_j} + \frac{\partial \Phi_{j\alpha}^e}{\partial X_i} \right) \quad (3.2)$$

Wprowadzając związki (3.1) do równania czteropracy wirtualnej (2.1) otrzymamy układ równań algebraicznych, które mają charakter równań równowagi i są ważne dla całej zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni:

$$\sum_{e=1}^E [(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^e + \mathbf{Z}_{\alpha\beta}^e + \mathbf{W}_{\alpha\beta}^e - \mathbf{M}_{\alpha\beta}^e) \mathbf{r}_{\beta}^e - \mathbf{R}_{\alpha}^e] = 0 \quad (3.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\alpha\beta}^e &= \iint_{\Omega_e} \mathbf{C}_{ijkl}^e \mathbf{B}_{j\alpha}^e \mathbf{B}_{kl\beta}^e d\Omega \\ \mathbf{Z}_{\alpha\beta}^e &= \iint_{\Omega_e} {}^{(z)}\eta_{ik}^e \Phi_{i\alpha}^e \dot{\Phi}_{k\beta}^e d\Omega \\ \mathbf{W}_{\alpha\beta}^e &= \iint_{\Omega_e} \mathbf{B}_{j\alpha}^e {}^{(w)}\eta_{ijkl}^e \mathbf{B}_{kl\beta}^e d\Omega \\ \mathbf{M}_{\alpha\beta}^e &= \iint_{\Omega_e} \rho^e \Phi_{i\alpha}^e \dot{\Phi}_{i\beta}^e d\Omega \\ \mathbf{R}_{\alpha}^e &= \iint_{\partial\Omega_e} \mathbf{p}_i^e \Phi_{i\alpha}^e d(\partial\Omega) + \iint_{\Omega_e} \rho^e \mathbf{f}_i \Phi_{i\alpha}^e d\Omega - \int_{V_e} [\rho^e \Phi_{i\alpha}^e \dot{\mathbf{u}}_i^e dV]_{t_0}^{t_k}\end{aligned} \quad (3.4)$$

Równanie ruchu (3.3) można zapisać także w postaci macierzowej

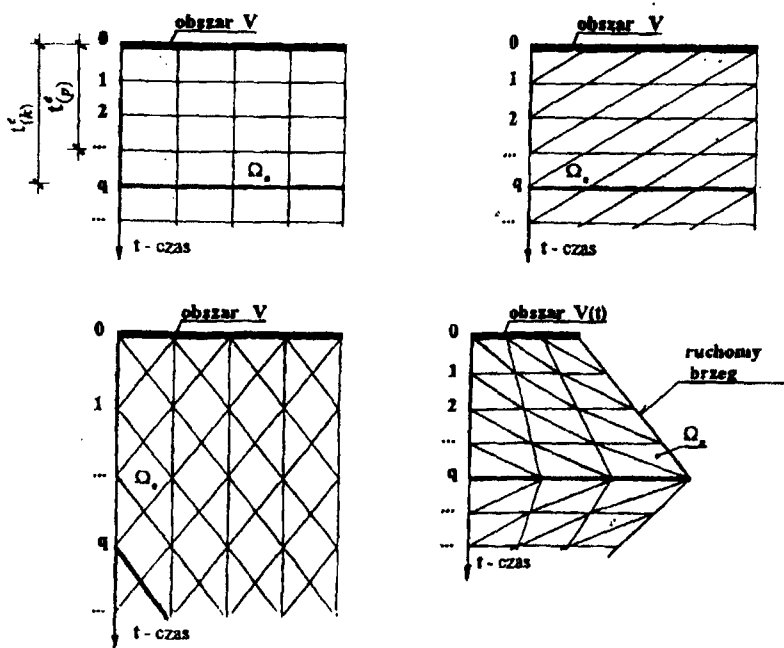
$$\underline{\Psi} = \underline{K} \underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{R}} \quad (3.5)$$

gdzie:

$$\underline{K} = \underline{K} + \underline{Z} + \underline{W} - \underline{M} \quad (3.6)$$

jest globalną macierzą sztywności zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni. Niezależnie od sposobu dyskretyzacji, układ równań (3.5) ma następującą strukturę (por. rys.2):

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^0 & \underline{B}^0 & & & & & \\ \underline{C}^1 & \underline{A}^1 + \underline{D}^1 & \underline{B}^1 & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & \underline{C}^q & \underline{A}^q + \underline{D}^q & \underline{B}^q & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}^0 \\ \underline{r}^1 \\ \dots \\ \underline{r}^q \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R}^0 \\ \underline{R}^1 \\ \dots \\ \underline{R}^q \\ \dots \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

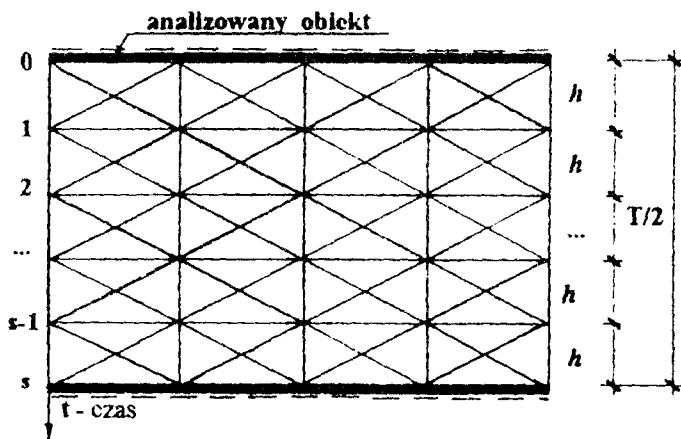


Rys.2. Przykłady dyskretyzacji czasoprzestrzeni

gdzie: \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , i \underline{D} są kwadratowymi macierzami sztywności czasoprzestrzennej po agregacji.

4. DRGANIA SWOBODNE

Przy drganiach swobodnych wszystkie przemieszczenia analizowanego obiektu czasoprzestrzennego są równe zero w odstępach czasu równych połowie okresu drgań. Pozwala to sformułować warunki początkowe dla wydzielonego obszaru ograniczonego liniami węzłowymi odległymi od siebie o $T/2$. Obszar ten może być już podzielony na dowolną liczbę SKECZ (rys.3).



Rys.3. Przykładowa dyskretyzacja części czasoprzestrzeni

W takim przypadku układ równań (3.7) redukuje się do postaci:

$$\tilde{\mathbf{K}}(h) \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\tilde{\mathbf{K}}(h) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}^1 + \underline{\mathbf{D}}^1 & \underline{\mathbf{B}}^1 & & & \\ \underline{\mathbf{C}}^2 & \underline{\mathbf{A}}^2 + \underline{\mathbf{D}}^2 & \underline{\mathbf{B}}^2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & \underline{\mathbf{C}}^{s-2} & \underline{\mathbf{A}}^{s-2} + \underline{\mathbf{D}}^{s-2} & \underline{\mathbf{B}}^{s-2} \\ & & & \underline{\mathbf{C}}^{s-1} & \underline{\mathbf{A}}^{s-1} + \underline{\mathbf{D}}^{s-1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Układ równań jednorodnych (4.1) ma niezerowe rozwiązanie przy następującym warunku:

$$\det \tilde{\mathbf{K}}(h) = 0. \quad (4.3)$$

Warunek (4.3) pozwala wyznaczyć nieznanne wartości h_i , $i=1, 2, \dots, s-1$. Liczba rozwiązań zależy od wymiaru macierzy $\tilde{\mathbf{K}}$. Okres drgań swobodnych T_i oraz częstości wynoszą odpowiednio:

$$T_i = 2h_i s, \quad \omega_i = \frac{\pi}{2h_i s}, \quad i = 1, 2, \dots, s-1 \quad (4.4)$$

5. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Rozpatruje się drgania belki Timoshenki. Macierz kształtu, dla elementu czasoprzestrzennego w kształcie prostokąta (rys.4a), przyjmuje się w postaci [4,6]:

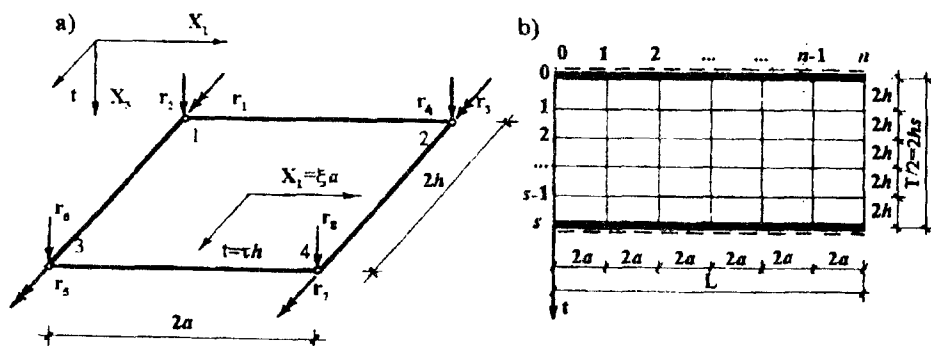
$$\underline{\Phi}(\xi, \tau) = \left[\begin{array}{c|c} \Phi_{2\alpha}^{(\varphi)} & \Phi_{2\alpha}^{(u_3)} \\ \hline \Phi_{3\alpha}^{(\varphi)} & \Phi_{3\alpha}^{(u_3)} \end{array} \right]$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Phi_{2\alpha}^{(\varphi)} &= [-\omega_1'(\xi, \xi_\alpha) + \mu \rho_1'(\xi, \xi_\alpha)] \rho_0(\tau, \tau_\alpha) \\ \Phi_{2\alpha}^{(u_3)} &= \frac{\mu-1}{a} \xi_\alpha \rho_1'(\xi, \xi_\alpha) \rho_0(\tau, \tau_\alpha) \\ \Phi_{3\alpha}^{(\varphi)} &= a \xi_\alpha [\omega_1(\xi, \xi_\alpha) - \mu \chi(\xi, \xi_\alpha)] \rho_0(\tau, \tau_\alpha) \\ \Phi_{3\alpha}^{(u_3)} &= [\rho_1(\xi, \xi_\alpha) - \mu \chi(\xi, \xi_\alpha)] \rho_0(\tau, \tau_\alpha) \\ \rho_0(\tau, \tau_\alpha) &= \frac{1}{2}(1 + \tau_\alpha \tau) \\ \rho_1(\xi, \xi_\alpha) &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi \xi_\alpha - \xi^3 \xi_\alpha) \\ \rho_1'(\xi, \xi_\alpha) &= \frac{3}{4}(1 - \xi^2 \xi_\alpha^2) \\ \omega_1(\xi, \xi_\alpha) &= \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_\alpha - \xi^2 - \xi^3 \xi_\alpha) \\ \omega_1'(\xi, \xi_\alpha) &= \frac{1}{4}(1 - 2\xi \xi_\alpha - 3\xi^2) \\ \chi(\xi, \xi_\alpha) &= \frac{1}{4} \xi_\alpha (\xi - \xi^3) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\mu = \frac{3\gamma}{1+3\gamma}, \quad \gamma = \frac{EJ_K}{GAa^2}$$

$$\xi_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 3, 4, 7, 8 \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 2, 3, 5, 6 \end{cases} \quad \tau_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 5, 6, 7, 8 \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$



Rys.4. Dyskretyzacja pasma czasoprzestrzennego belki

Macierze opisujące tłumienie zewnętrzne i wewnętrzne (3.4)_{2,3} uzależniono od:

$${}^{(z)}\eta_{ik} = \varepsilon_z m_{ik} \quad , \quad {}^{(z)}\underline{\eta} = \varepsilon_z \begin{bmatrix} \rho J & 0 \\ 0 & \rho A \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$${}^{(w)}\eta_{ijkl} = \varepsilon_w C_{ijkl} \quad , \quad {}^{(w)}\underline{\eta} = \varepsilon_w \begin{bmatrix} EJ & 0 \\ 0 & \frac{GA}{K} \end{bmatrix}$$

gdzie m_{ik} zawiera wyrazy macierzy mas, C_{ijkl} - reprezentuje macierz sprężystości, natomiast współczynniki ε_z i ε_w nazywają się współczynnikami tłumienia zewnętrznego (wymiar odwrotności czasu, $\frac{1}{s}$) i tłumienia wewnętrznego (wymiar czasu, s).

Ostatecznie dokonano analizy drgań swobodnych belki wol-nopodpartej o danych (por. rys. 4): $n = 2$, $s = 3$, $L = 16$ [m], $A = 0,12$ [m²], $J = 0,0016$ [m⁴], $\kappa = 1,2$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ [N/m²], $G = 8 \cdot 10^{11}$ [N/m²], $\rho = 7500$ [kg/m³]. Częstotści drgań własnych nietłumionych można wyznaczyć ze wzoru ścisłego ([7], str. 178):

$$\omega_i \equiv i^2 \frac{\beta \pi^2}{L^2} \left[1 - \frac{\pi^2 r_o^2 i^2}{2L^2} \left(1 + \kappa \frac{E}{G} \right) \right], \quad r_o^2 = \frac{J}{A}, \quad \beta = \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \quad (5.3)$$

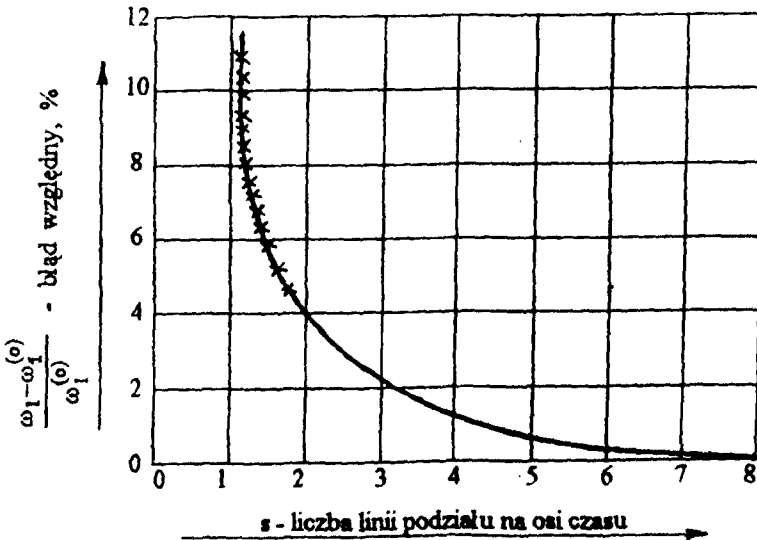
Z rozwiązania równania (4.3) uzyskuje się osiem pierwiastków ω_i , przy czym cztery z nich przedstawiają złożone formy drgań na osi czasu, co odpowiada pasmu czasoprzestrzennemu o szerokości T . Z wyników obliczeń zamie-

szczonych w tabeli 1 wynika, że częstotści drgań własnych obliczone ze wzoru ścisłego (5.3) są porównywalne z częstotściami obliczonymi metodą elementów czasoprzestrzennych. Przy braku tłumienia ω_{min} obliczone MECZ charakteryzuje się wysoką dokładnością (błąd 4%) w odróżnieniu od ω_{max} , które ustalono ze znacznym błędem (21,6%). Tłumienie wewnętrzne nie ma praktycznego wpływu na niskie częstotści, natomiast powoduje wy tłumienie wysokich częstotści. Wpływ tłumienia zewnętrznego jest natomiast przeciwny.

Tabela 1

Lp "i"	wg (5.3) $\epsilon_w = 0$ $\epsilon_x = 0$	w , wynikające z równania (4.3)								
		$\epsilon_w = 0$ $\epsilon_x = 0$	$\epsilon_w = 9 \cdot 10^{-4}$ $\epsilon_x = 0$	$\epsilon_w = 3 \cdot 10^{-3}$ $\epsilon_x = 0$	$\epsilon_w = 5 \cdot 10^{-3}$ $\epsilon_x = 0$	$\epsilon_w = 0$ $\epsilon_x = 10$	$\epsilon_w = 0$ $\epsilon_x = 20$	$\epsilon_w = 0$ $\epsilon_x = 30$	$\epsilon_w = 0$ $\epsilon_x = 40$	$\epsilon_w = 0$ $\epsilon_x = 50$
1	22,988652	22,06	22,06	22,06	22,04	21,80	20,97	19,38	15,57	-----
2	91,944927	97,57	97,51	96,99	95,95	97,51	97,33	97,04	96,62	96,08
3	206,84886	199,95	202,22	234,24	216,40	199,96	199,97	200,00	200,04	200,96
4	367,66354	447,11	442,10	381,65	-----	447,09	447,00	446,70	446,90	446,79

W celu potwierdzenia zbieżności MECZ, zbadano jak zagęszczenie podziału na osi czasu wpływa na dokładność obliczeń częstotści drgań własnych (rys.5).



$\omega_1^{(o)}$ - częstotść podstawowa obliczona wg wzoru (5.3)
 xxxxx - krzywa ekstrapolacyjna

Rys.5. Wpływ liczby SKECZ na dokładność obliczeń

LITERATURA

- [1] Kączkowski Z.: The method of finite space-time elements in dynamics of structures. *J. Tech. Phys.* 16, 1, 69-84, 1975
- [2] Kączkowski Z.: Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Arch. Inż. Łąd.* 22, 3, s. 365-378, 1976
- [3] Kączkowski Z.: General formulation of the stiffness matrix for the space-time elements. *Arch. Inż. Łąd.* 25, 3, 351-357, 1979
- [4] Podhorecka A.: Metoda elementów czasoprzestrzennych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych. *Mech. Teoret. Stos.* 26, 4, 683-699, 1988
- [5] Fung Y. C.: Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN Warszawa, 1969
- [6] Podhorecka A.: Obliczenia dynamiczne belek metodą elementów czasoprzestrzennych. IX Konferencja - "Metody Komputerowe w Mechanice" Kraków - Rytro, 1989, 897-903
- [7] Nowacki W.: Dynamika budowli. Arkady Warszawa, 1972

FREE VIBRATION IN THE SPACE-TIME ELEMENT METHOD**Summary**

The research describes the evaluation of free vibration frequency including influence of external and internal material damping in the space-time element method. The external and internal damping is of viscous type.

METODA ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH W DYNAMICE OŚRODKA CIĄGŁEGO

Adam Podhorecki

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR, Katedra Mechaniki Budowli
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

W pracy rozpatruje się ośrodek ciągły geometrycznie nieliniowy, będący pod wpływem obciążeń dowolnie zmiennych w czasie i przestrzeni. Różniczkowe równania ruchu, uwzględniające skończone deformacje, opisano w nieprzyrostowym, stacjonarnym opisie Lagrange'a. Do rozwiązania tak sformułowanego problemu wykorzystano metodę elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Praca kończy się przykładem, w którym analizuje się drgania wysięgnika.

1. WSTĘP

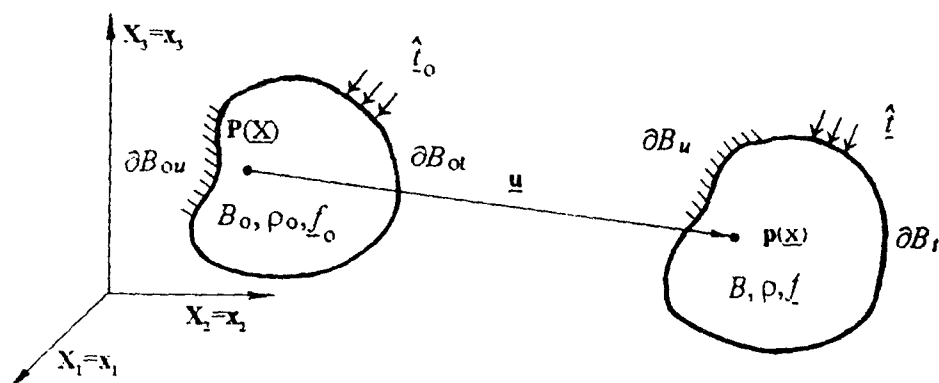
Problemy formułowane i analizowane w mechanice kontinuum sprowadzają się do rozwiązywania złożonych układów cząstkowych równań różniczkowych względem zmiennych przestrzennych i czasu. Do rozwiązywania takich zagadnień stosuje się wiele różnych metod analitycznych i numerycznych. Przy analizie dynamicznej lub reologicznej konstrukcji, cząstkowe równania różniczkowe po dyskretyzacji przestrzennej (np. wg zasad metody elementów skończonych) zostają zastąpione układem zwyczajnych równań różniczkowych względem czasu, tzw. równaniami ruchu. Do rozwiązywania tych równań ruchu stosuje się głównie grupę metod bezpośredniego całkowania (metoda różnic skończonych, metody Wilsona i Newmarka) oraz metody superpozycji modalnej. Możliwości tworzenia elementów skończonych w czasie i przestrzeni zauważyli dość wcześnie Fried, Oden, Argyris, Scharpf i Chan [1,2,3,4]. W monografii Zienkiewicza [5] też mówi się o możliwości stosowania elementów czasoprzestrzennych. Przesłanki te stały się podstawą opracowanej przez Kączkowskiego oryginalnej metody elementów czasoprzestrzennych **MECZ** [6,7]. Idea metody polega na dyskretyzacji kontinuum czasoprzestrzennego, w wyniku czego przejście od równań różniczkowych do równań algebraicznych odbywa się w jednym etapie. Na przykład przemieszczenia w obszarze elementu czasoprzestrzennego (**SKECZ**) opisujemy parametrami węzłowymi \underline{r}_e :

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{\Phi}(\underline{X}, t) \underline{r}_e, \quad \underline{X}, t \in B \times \langle 0, \infty \rangle \quad (1.1)$$

gdzie: $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$ jest macierzą kształtu zawierającą funkcje czasoprzestrzenne. Nie skrupowana dyskretyzacja stwarza możliwości dostosowania podziału obszaru czasoprzestrzennego do przebiegu obciążenia, do zmieniającego się w czasie brzegu (brzeg ruchomy), do rozwiązywania takich zadań nieliniowych, w których drgania ustroju spełniają różne równania różniczkowe w przesuującym się czasie. Istnieje też taka możliwość rozseparowania układu równań, która jest uzależniona tylko od sposobu dyskretyzacji. Tematyka prac badawczych, w których wykorzystano MECZ, jest bogata. Przegląd tych prac zawiera rozprawa [8].

2. RÓŻNICZKOWE I CAŁKOWE RÓWNIANIA RUCHU OŚRODKA CIĄGŁEGO

Analizujemy ciało kontinualne zajmujące w naturalnej (początkowej) konfiguracji obszar \bar{B}_0 . Przez B_0 oznaczamy wnętrze tego obszaru, a przez ∂B_0 jego brzeg, który jest sumą zbiorów ∂B_{0i} i ∂B_{0u} (rys.1).



Rys.1. Analizowane ciało ciągłe

Ruch ciała badamy w przedziale czasu $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Do określenia deformacji ruchu ośrodka ciągłego w teorii skończonych deformacji używamy stacjonarnego opisu Lagrange'a \underline{X} . Zmienne dynamiczne występujące w tym opisie, tj. pole wektorowe przemieszczeń \underline{u} i siły masowe $\rho_0 \underline{f}_0$, symetryczne pole tensorowe naprężeń Pioli-Kirchhoffa \underline{T} oraz pole odkształceń Cauchy-Greena \underline{E} określone są na iloczynie kartezjańskim zbiorów $B_0 \times \langle 0, \infty \rangle$. Pole wektorowe sił powierzchniowych $\hat{\underline{t}}_0$ opisane jest natomiast na iloczynie $\partial B_0 \times \langle 0, \infty \rangle$. Konfigurację aktualną charakteryzują odpowiednio: układ osi kartezjańskich \underline{x} , obszary B , ∂B_i , ∂B_u , siły masowe $\rho \underline{f}$ i siły powierzchniowe $\hat{\underline{t}}$. Zestaw równań opisujących takie ciało w sformułowaniu lokalnym ma postać [8,9]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial X_j} \left[\mathbf{T}_{jk} (\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k}) \right] + \rho_o (\mathbf{f}_{oi} - \ddot{u}_i) &= 0, \quad (\underline{\mathbf{X}}, t) \in B_o \times \langle 0, \infty \rangle, \\
\mathbf{E}_{ij}(\underline{\mathbf{X}}, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right), \quad (\underline{\mathbf{X}}, t) \in \bar{B}_o \times \langle 0, \infty \rangle, \\
\mathbf{T}_{ij}(\underline{\mathbf{X}}, t) &= \Psi_{ijkl}(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{X}}, t) \mathbf{E}_{kl}(\underline{\mathbf{X}}, 0) + \int_0^t \Psi_{ijkl}(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{X}}, t-z) \frac{\partial \mathbf{E}_{kl}}{\partial z}(\underline{\mathbf{X}}, z) dz, \\
\underline{\mathbf{X}}, t &\in B_o \times \langle 0, \infty \rangle \tag{2.1} \\
\mathbf{T}_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \mathbf{v}_{oj} &= \hat{\mathbf{t}}_{oi}, \quad \underline{\mathbf{X}}, t \in \partial B_{oi} \times \langle 0, \infty \rangle, \\
\mathbf{u}_i(\underline{\mathbf{X}}, t) &= \hat{\mathbf{u}}_i(\underline{\mathbf{X}}, t), \quad \underline{\mathbf{X}}, t \in \partial B_{ou} \times \langle 0, \infty \rangle, \\
\mathbf{u}_i(\underline{\mathbf{X}}, 0) &= \mathbf{u}_i^o(\underline{\mathbf{X}}), \quad \dot{\mathbf{u}}_i(\underline{\mathbf{X}}, 0) = \mathbf{v}_i^o(\underline{\mathbf{X}}), \quad \underline{\mathbf{X}}, t \in \bar{B}_o \times \{0\},
\end{aligned}$$

gdzie: Ψ_{ijkl} są tensorowymi funkcjami relaksacji materiału.

Możliwe jest też sformułowanie globalne w postaci równania czteropracy wirtualnej [6 ÷ 9], które pokrywa się z uogólnioną zasadą Hamiltona [8]:

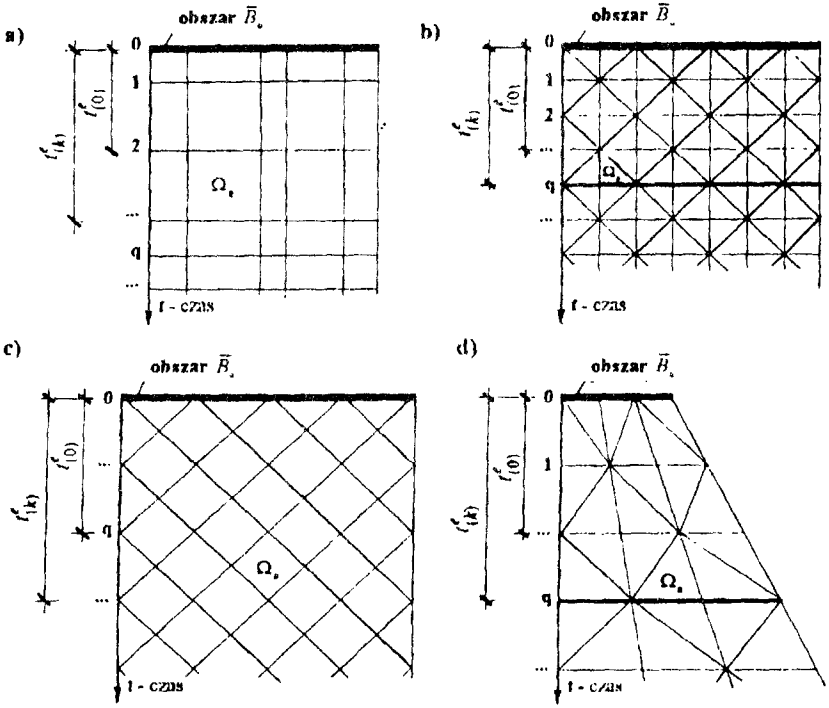
$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_o} [\rho_o (\mathbf{f}_{oi} \delta \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \delta \dot{\mathbf{u}}_i) - \mathbf{T}_{ij} \delta \mathbf{E}_{ij}] d\Omega_o + \int_{\partial \Omega_{oi}} \hat{\mathbf{t}}_{oi} \delta \mathbf{u}_i d(\partial \Omega_o) - \\
- \int_{B_o} [\rho_o \dot{\mathbf{u}}_i \delta \mathbf{u}_i d B_o]_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{2.2}
\end{aligned}$$

$$\Omega_o : \{B_o \times (t_{(0)} \leq t \leq t_{(1)})\}, \quad \partial \Omega_o : \{\partial B_o \times (t_{(0)} \leq t < t_{(1)})\}$$

gdzie: $\delta \mathbf{u}_i$ i $\delta \mathbf{E}_{ij}$ są wariacjami odpowiednio przemieszczeń i odkształceń, a $\bar{\Omega}_o$ obszarem czasoprzestrzennym.

3. DYSKRETYZACJA OBSZARU CZASOPRZESTRZENI

Obszar czasoprzestrzeni $\bar{\Omega} : \{\bar{B}_o \times (0 \leq t < \infty)\}$ dzielimy na skończoną liczbę elementów czasoprzestrzennych (SKECZ), czyli skończoną liczbę rozłącznych podobszarów Ω_e , $e=1, 2, \dots, E$ (rys.2).



Rys.2. Dyskretyzacja czasoprzestrzeni

Kształt elementu czasoprzestrzennego i liczba węzłów mogą być różne w zależności od typu zadania itp. Zakłada się, że elementy te są połączone ze sobą w skończonej liczbie punktów, znajdujących się na ich obwodach. Przemieszczenia punktów węzłowych stanowić będą podstawowy układ niewiadomych. Można przyjąć, że MECZ jest wariantem metody elementów skończonych (MES), muszą więc w ogólności obowiązywać takie same kryteria zbieżności - dotyczące głównie funkcji kształtu.

Wielkości występujące w równaniu czteropracy wirtualnej (2.2) opisujemy na poziomie SKECZ przemieszczeniami węzłowymi tego elementu r_e :

$$\begin{aligned}
 u_i^e(\underline{X}, t) &= \Phi_{i\alpha}^e(\underline{X}, t) r_{\alpha}, & \delta u_i^e(\underline{X}, t) &= \mathbf{W}_{i\alpha}^e(\underline{X}, t) \delta r_{\alpha}, \\
 \dot{u}_i(\underline{X}, t) &= \dot{\Phi}_{i\alpha}^e(\underline{X}, t) r_{\alpha}, & \delta \dot{u}_i^e(\underline{X}, t) &= \dot{\mathbf{W}}_{i\alpha}^e(\underline{X}, t) \delta r_{\alpha},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{E}_{ij}^e(\underline{X}, t) = [{}^1\mathbf{B}_{ij\alpha}^e + {}^2\mathbf{B}_{ij\alpha}^e(\underline{r})] r_{\alpha} \quad \delta \mathbf{E}_{ij}^e(\underline{X}, t) = [{}^1\tilde{\mathbf{B}}_{ij\alpha}^e + {}^2\tilde{\mathbf{B}}_{ij\alpha}^e(\underline{r})] \delta r_{\alpha},$$

$$\mathbf{T}_{ij}^e(\underline{X}, t) = T_{ij}^e(\underline{X}, t) + [{}^1\mathbf{D}_{ij\alpha}^e + {}^2\mathbf{D}_{ij\alpha}^e(\underline{r})] r_{\alpha},$$

gdzie:

$${}^2\mathbf{B}_{ij\alpha}^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{i\alpha}^e}{\partial X_j} + \frac{\partial \Phi_{j\alpha}^e}{\partial X_i} \right), \quad {}^2\tilde{\mathbf{B}}_{ij\alpha}^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_{i\alpha}^e}{\partial X_j} + \frac{\partial W_{j\alpha}^e}{\partial X_i} \right),$$

$$\begin{aligned}
 {}''\mathbf{B}_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{i\beta}^e}{\partial X_i} \frac{\partial \Phi_{j\alpha}^e}{\partial X_j} \mathbf{r}_{\beta}, & {}''\tilde{\mathbf{B}}_{ij\alpha}^e &= \frac{\partial \Phi_{i\beta}^e}{\partial X_i} \frac{\partial W_{j\alpha}^e}{\partial X_j} \mathbf{r}_{\beta}, \\
 {}'\mathbf{D}_{ij\alpha}^e &= \int_{t_{(0)}^e}^t \Psi_{ijkl}^e(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{X}}, t-z) {}'\mathbf{B}_{kl\alpha}^e(\underline{\mathbf{X}}, z) dz, \\
 {}''\mathbf{D}_{ij\alpha}^e &= \int_{t_{(0)}^e}^t \Psi_{ijkl}^e(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{X}}, t-z) {}''\mathbf{B}_{ij\alpha}^e(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{X}}, z) dz,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$T_{ij}^e(\underline{\mathbf{X}}, t) = \Psi_{ijkl}^e(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{X}}, t-t_{(0)}^e) \mathbf{E}_{kl}^e(\underline{\mathbf{X}}, t_{(0)}^e),$$

$$i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, A, \quad e = 1, 2, \dots, E,$$

$$(\underline{\mathbf{X}}, t) \in \Omega_e : \{ B_0^e \times (t_{(0)}^e \leq t \leq t_{(k)}^e), t_{(0)}^e \geq 0, t_{(k)}^e < \infty \}.$$

Wielkość $\Phi^e(\underline{\mathbf{X}}, t)$ oznacza macierz kształtu zawierającą funkcje czasoprzestrzenne o ograniczonej rozległości do obszaru Ω_e , natomiast $\mathbf{W}^e(\underline{\mathbf{X}}, t)$ zawiera funkcje wagowe rozkładu czasoprzestrzennego wariacji; w szczególności $\mathbf{W}^e = \Phi^e$.

Po podstawieniu wielkości (3.1) do równania czteropracy wirtualnej (2.2) otrzymamy układ nieliniowych równań algebraicznych:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}) &= \sum_{e=1}^E \left[\left({}^e\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(kon)} + {}^e\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(u)} + {}^e\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(\sigma)} - {}^e\mathbf{M}_{\alpha\beta} \right) \mathbf{r}_{\beta} - {}^e\mathbf{R}_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}) \right] = \\
 &= \mathbf{K}_{\alpha\beta}(\underline{\mathbf{r}}) \mathbf{r}_{\beta} - \mathbf{R}_{\alpha}(\underline{\mathbf{r}}) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 {}^e\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(kon)} &= \iint_{\Omega_e} {}'\tilde{\mathbf{B}}_{ij\alpha}^e {}'\mathbf{D}_{ij\beta}^e d\Omega, \\
 {}^e\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(u)} &= \iint_{\Omega_e} {}''\tilde{\mathbf{B}}_{ij\alpha}^e {}''\mathbf{D}_{ij\beta}^e(\underline{\mathbf{r}}) d\Omega, \\
 {}^e\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(\sigma)} &= \iint_{\Omega_e} {}''\tilde{\mathbf{B}}_{ij\alpha}^e(\underline{\mathbf{r}}) [{}'\mathbf{D}_{ij\beta}^e + {}''\mathbf{D}_{ij\beta}^e(\underline{\mathbf{r}})] d\Omega, \\
 {}^e\mathbf{M}_{\alpha\beta} &= \iint_{\Omega_e} \dot{W}_{i\alpha}^e \rho_0^e \dot{\Phi}_{i\beta}^e d\Omega, \\
 {}^e\mathbf{R}_{\alpha} &= \iint_{\Omega_e} \mathbf{W}_{i\alpha}^e \rho_0^e \mathbf{r}_{oi}^e d\Omega + \iint_{\partial\Omega_e} \mathbf{W}_{i\alpha}^e \hat{\mathbf{t}}_{oi}^e d(\partial\Omega) - \\
 &- \int_{B_0^e} [\mathbf{W}_{i\alpha}^e \rho_0^e \dot{u}_i^e dB_0]_{t_{(0)}^e}^{t_{(k)}^e} - \iint_{\Omega_e} T_{ij}^e [{}'\mathbf{B}_{ij\alpha}^e + {}''\mathbf{B}_{ij\alpha}^e(\underline{\mathbf{r}})] d\Omega,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, B, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Równania (3.3) należy uzupełnić warunkami brzegowymi i początkowymi. Niezależnie od sposobu dyskretyzacji, zagadnienie brzegowo-początkowe (3.3) sprowadza się do schematu trójwarstwowego (por. rys. 2):

$$\underline{\mathbf{A}}^0 \underline{\mathbf{r}}^0 + \underline{\mathbf{B}}^0 \underline{\mathbf{r}}^1 = \underline{\mathbf{R}}^0,$$

$$\underline{\mathbf{C}}^1 \underline{\mathbf{r}}^0 + (\underline{\mathbf{A}}^1 + \underline{\mathbf{D}}^1) \underline{\mathbf{r}}^1 + \underline{\mathbf{B}}^1 \underline{\mathbf{r}}^2 = \underline{\mathbf{R}}^1,$$

$$\underline{\mathbf{C}}^q \underline{\mathbf{r}}^{q-1} + (\underline{\mathbf{A}}^q + \underline{\mathbf{D}}^q) \underline{\mathbf{r}}^q + \underline{\mathbf{B}}^q \underline{\mathbf{r}}^{q+2} = \underline{\mathbf{R}}^q,$$

$$q = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie: $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{C}}$ i $\underline{\mathbf{D}}$ są kwadratowymi macierzami sztywności czasoprzestrzennej po agregacji. Macierze te - dla problemów nieliniowych - są funkcjami parametrów węzłowych siatki czasoprzestrzennej $\underline{\mathbf{r}}$. Przy znanych warunkach początkowych, równania (3.5) przekształcają się w formułę rekurencyjną:

$$\underline{\mathbf{r}}^{q+1} = [\underline{\mathbf{B}}^q]^{-1} [\underline{\mathbf{R}}^q - \underline{\mathbf{C}}^q \underline{\mathbf{r}}^{q-1} - (\underline{\mathbf{A}}^q + \underline{\mathbf{D}}^q) \underline{\mathbf{r}}^q],$$

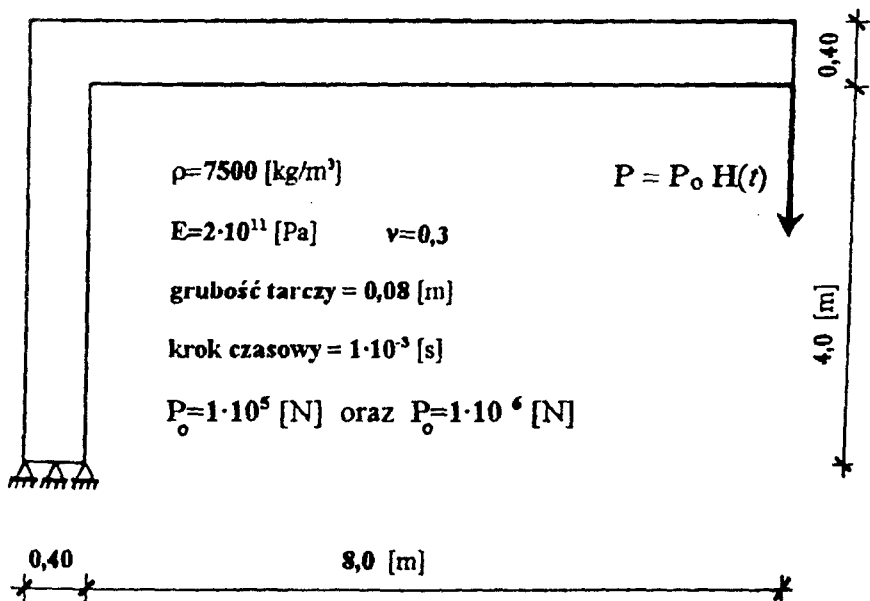
$$q = 0, 1, 2, \dots$$

Przy stosowaniu elementów czsooprzestrzennych o kształtach symplektycznych [9] uzyskujemy naturalne rozseparowanie poszczególnych równań (3.5) lub (3.6) na mniejsze układy lub pojedyncze równania z jedną niewiadomą. Metoda elementów czasoprzestrzennych należy, przy sformułowaniu $\underline{\mathbf{W}} = \underline{\Phi}$ (por. wzory 3.2), do metod warunkowo stabilnych i wtedy na wymiary elementu czasoprzestrzennego nałożone są pewne ograniczenia [10].

4. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Analizuje się drgania wysięgnika stalowego obciążonego siłą Heaviside'a (rys. 3)

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \mathbf{H}(t), \quad \mathbf{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } t > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

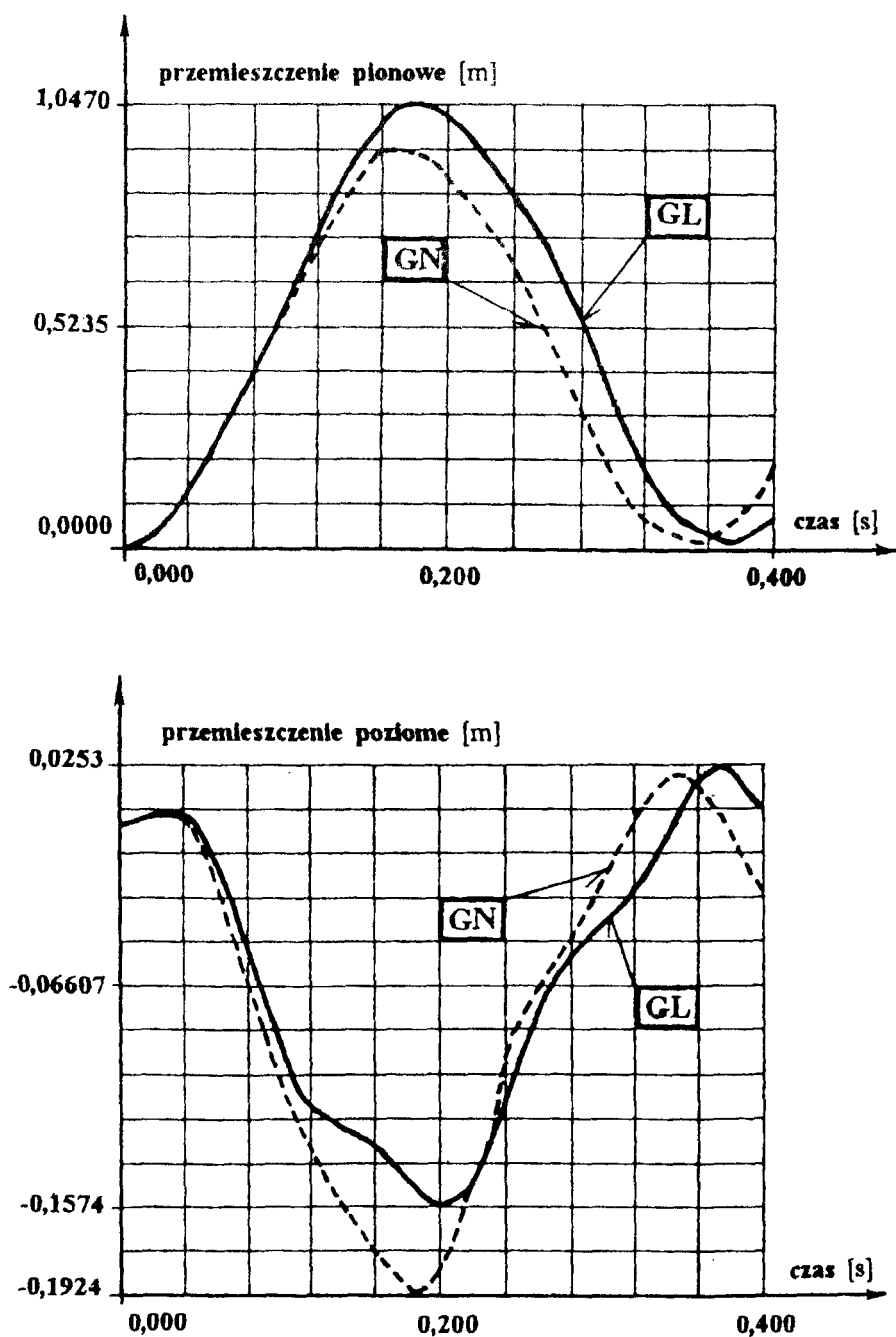


Rys.3. Wysięgnik stalowy obciążony siłą Heaviside'a

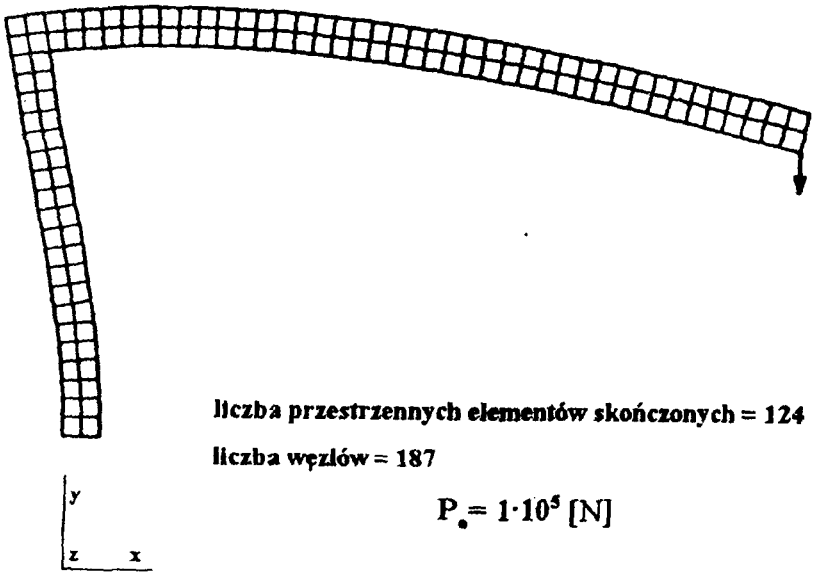
Rozpatrywany obszar czasoprzestrzenny podzielono na skończone elementy czasoprzestrzenne w kształcie graniastoslupa. Na rysunku 4 pokazano wykresy przemieszczeń pionowych i poziomych końca wysięgnika w funkcji czasu, przy analizie geometrycznie liniowej (GL) i geometrycznie nieliniowej (GN) [11]. Zestawienie amplitud przemieszczeń nietłumionych przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Nazwa parametru	Jednostka	Model geometryczny	Amplituda siły wymuszającej P_0 w [MN]	
			0,1	1,0
Amplituda przemieszczeń pionowych	m	GL	1,0470	10,470
		GN	0,9262	6,3215
Amplituda przemieszczeń poziomych	m	GL	0,0253	0,2530
		GN	0,0224	0,1471
Okres drgań wymuszonych	s	GL	0,370	0,370
		GN	0,352	0,328



Rys. 4. Wykresy przemieszczeń końca wspornika w funkcji czasu



Rys.5. Zdeformowana postać wysięgnika w chwili $t = 0,35 \text{ [s]}$

LITERATURA

- [1] Fried I.: Finite element analysis of time dependent phenomena. AIAA J. 1170 - 1172, 1969
- [2] Oden J.T.: A general theory of finite elements. Int. J. Num. Meth. Engng. 1, 205 - 259, 1969
- [3] Argyris J.H., Scharpf D.D.: Finite elements in time and space. Aero J. RAS 73, 1041-1044, 1969
- [4] Argyris J.H., Chan A.S.L.: Application of finite elements in space and time. Ing. Archiv 41, 235-257, 1972
- [5] Zienkiewicz O. C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972
- [6] Kączkowski Z.: The method of finite space-time elements in dynamics of structures. J. Techn. Phys. 16, 1, 69-84, 1975
- [7] Kączkowski Z.: Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. Arch. Inż. Łąd. 22, 3, 365-378, 1976
- [8] Podhorecki A.: Metoda elementów czasoprzestrzennych w geometrycznie nieliniowej teorii lepkości. Zeszyty Naukowe Akademii Techniczno - Rolniczej w Bydgoszczy, Rozprawy 45, 1991
- [9] Bajer Cz., Podhorecki A.: Space-time element method in structural dynamics. Arch. Mech. Stos. Teoret. 41, 6, 867-893, 1989
- [10] Podhorecki A.: Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych. Rozp. Inż. 37, 1, 41-51, 1989
- [11] Podhorecki A., Podhorecka A.: Drgania tarcz z uwzględnieniem efektów geometrycznie nieliniowych. XL Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB "Teoria Konstrukcji", t.2, 167-174, Krynica 1994

THE SPACE-TIME ELEMENT METHOD IN THE DYNAMICS
OF CONTINUOUS MEDIUM

Summary

In this study we analyse continuous medium, being subject to variable loads, with any amount of displacements and deformation according to the space-time element method. General formulation of equation of state was accepted as the integral law. The equations incorporating geometrical non-linearity, have been shown in a non-incremental expression with the use of Lagrange description. The matrices of the space-time elements stiffness have been defined in such a way, that the optional choice of the definite space-time element shape has been available.

NIEKTÓRE ASPEKTY ZASTOSOWANIA MECHANIKI PĘKANIA W PRAKTYCE INŻYNIERSKIEJ

Eugeniusz Ranatowski, Jacek Jackiewicz^{*}, Jan Sadowski^{*}

Wydział Mechaniczny ATR, Katedra Materiałoznawstwa i Technologii Metali

^{*} Katedra Mechaniki Stosowanej

ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

Ocena parametrów pękania oraz zastosowanie kryteriów mechaniki pękania w praktyce inżynierskiej powinno opierać się na matematycznych zasadach modelowania tego procesu. W artykule przedstawiono przykłady obliczeniowe: symulacji procesu propagacji pękania przy złożonym stanie obciążenia, oceny odporności na pękanie niejednorodnych połączeń spajanych a także oceny dynamicznych parametrów pękania K_{I_d} , J_{I_d} w procesie udarowego zginania.

1. WSTĘP

Zastosowanie mechaniki pękania w praktyce inżynierskiej związane jest z założeniem adekwatności analizowanych modeli fizycznych i obiektów rzeczywistych. Model fizyczny stanowi więc uproszczenie obiektu rzeczywistego i odpowiada mu tylko pod względem jego niektórych cech, które w dalszej kolejności podlegają modelowaniu matematycznemu.

Model matematyczny formalizuje opis modelu fizycznego najczęściej w postaci równań różniczkowych cząstkowych, które stanowią formalną podstawę opisu wszelkich twierdzeń fizycznych. Rozwiązanie tych równań prowadzi do prawidłowej analizy wymiarowej procesu dla określonej przestrzeni fizycznej, co w ramach mechaniki pękania prowadzi do wyznaczenia podstawowych parametrów takich jak: K_n , δ_c , J_c i itp.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym występowania podobieństwa pomiędzy modelem a obiektem rzeczywistym jest formalizacja opisu zachodzących w nich procesów:

- za pomocą tych samych związków fizykalnych opisujących wewnętrzne prawidłowości procesu np. deformacji,
- zgodności kryteriów podobieństwa.

Ocena parametrów i kryteriów mechaniki pękania wymaga więc uwzględnienia przebiegu szczególnych okoliczności procesu wyrażonego poprzez:

- warunki brzegowe i początkowe,
- geometrię obiektu,
- konfigurację szczeliny i jej umiejscowienia w obiekcie,
- rodzaj i stopień złożoności pola siłowego, a w stosunku do czynnika materialnego w ramach makroskopowej liniowej mechaniki pęknięcia zakłada się model ciągły ciała o własnościach izotropowych, niezmiennych w czasie t.

Uzyskanie wiarygodnych rozwiązań bazujących na analizie matematycznej w ramach mechaniki pęknięcia natrafia również na istotne trudności natury matematycznej. Stąd też aktualnie dla bardziej złożonych przypadków wykorzystuje się metody numeryczne.

W ramach niniejszego opracowania zwrócono uwagę na trzy różne sytuacje, ważne z punktu widzenia praktyki inżynierskiej:

- sposobu prognozowania rozwoju szczeliny przy złożonym stanie obciążeń zewnętrznych przy wykorzystaniu metod numerycznych,
- wpływu stopnia lokalnej heterogeniczności występującej np. w połączeniach spajanych na odporność na pęknięcie,
- niektórych aspektów badania procesu pęknięcia w próbie udarowego zginania ze wspomaganiami komputerowymi.

2. MODELOWANIE QUASI-STATYCZNEGO ROZWOJU SZCZELINY PRZY WYKORZYSTANIU MEB

Makroskopowe teorie liniowej mechaniki pęknięcia wywodzą się z praw mechaniki ośrodków ciągłych i klasycznej termodynamiki. Prawa te dostarczają ilościowych narzędzi pracy, które umożliwiają przewidywanie propagacji makropęknięć w elementach maszyn, a także projektowanie elementów konstrukcji o określonej odporności na pęknięcie.

Metody elementów brzegowych i skończonych są podstawowymi metodami numerycznymi wykorzystywanymi do opisu lokalnych procesów deformacji elementów maszyn. Istotnym problemem podczas numerycznego modelowania procesów pęknięcia jest konieczność uwzględniania osobliwych, sprężystych pól naprężeń i odkształceń w okolicy wierzchołka pęknięcia. Ponieważ rozmiary tych pól nie są znane a priori dla dowolnych elementów z pęknięciami należy uwzględniać różne odmiany siatek odwzorowujących dyskretny opis topologii osobliwych pól wokół wierzchołka pęknięcia. W wyniku zastosowania odpowiednich procedur adaptacyjnych specjalne elementy wraz z brzegowymi lub skończonymi elementami standardowymi umożliwiają oszacowanie rozległości rozważanych obszarów osobliwych.

Podczas przyrostu długości makropęknięcia zarys tego pęknięcia ulega zawsze zmianie. Oznacza to, że opis topologiczny należy stopniowo uzupełniać celem zamodelowania kolejnych, jednostkowych przyrostów jego długości. Ogólnie biorąc, dyskretny opis sprężystych ośrodków izotropowych jest doko-

nywany poprzez zdefiniowanie ich zewnętrznej powierzchni brzegowej. W przeciwieństwie do metody elementów brzegowych metoda elementów skończonych wymaga dodatkowo uzupełnienia opisu rozpatrywanego ośrodka o opis jego obszaru wewnętrznego. Z uwagi na to, że metoda elementów brzegowych wymaga tylko określenia zewnętrznej powierzchni brzegowej danego ciała stałego, jest ona szczególnie korzystna do modelowania ścieżek propagacji pęknięć. Właściwość ta stanowi podstawową zaletę metody elementów brzegowych, chociaż metoda ta wymaga użycia bardziej skomplikowanego aparatu matematycznego. Ponadto metoda elementów brzegowych umożliwia sformułowanie efektywnej procedury uzupełniania danych wejściowych, która jest konieczna ze względu na stosowaną w takich przypadkach przyrostową modyfikację zarysu pęknięcia propagującego się w ciele stałym.

Modelowanie quasi-statycznego procesu propagacji pęknięcia w ciele stałym obejmuje: określenie elementarnego przyrostu długości pęknięcia w kierunku minimum gęstości energii odkształcenia oraz analizę wpływu tego przyrostu na przebieg procesu propagacji rozważanego pęknięcia.

W wielu praktycznych sytuacjach elementy maszyn są poddawane złożonym stanom obciążeń zewnętrznych, które prowadzą do złożonych przypadków rozwoju pęknięć. Jeśli są znane przemieszczenia zewnętrznej powierzchni brzegowej ciała stałego z pęknięciem a jego siły objętościowe są równe zeru, to energia odkształcenia tego ciała przyjmuje wartość stateczną spośród klasy geometrycznie dopuszczalnych przemieszczeń dla przemieszczeń rzeczywistych, odpowiadających stanowi równowagi. W szczególnym przypadku, gdy rozważanym ciałem stałym jest izotropowe ciało liniowo-sprężyste (spełnione prawo Hooke'a), stateczna wartość energii odkształcenia jest również jej wartością minimalną. Kryterium gęstości energii odkształcenia stanowi, że quasi-statyczny elementarny przyrost długości pęknięcia następuje w kierunku minimum gęstości energii odkształcenia. Według tego kryterium wzrost długości pęknięcia odbywa się przy zachowaniu chwilowej i lokalnej równowagi statecznej pomiędzy siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi ciała stałego z pęknięciem.

Bezpośrednie zastosowanie metody elementów brzegowych do zagadnień mechaniki pęknięcia nie daje w pełni pozytywnych rezultatów, ponieważ geometryczne pokrywanie się górnej i dolnej linii pęknięcia często prowadzi do układu równań, którego nie można rozwiązać. Istnieją następujące metody postępowania celem uniknięcia degeneracji brzegowych równań całkowych sformułowanych dla zagadnień mechaniki pęknięcia:

- metoda podobszarów,
- metoda specjalnej funkcji Greena,
- metoda nieciągłych przemieszczeń.

Spośród wyszczególnionych metod najbardziej efektywną pod względem obliczeń numerycznych jest metoda nieciągłych przemieszczeń za pomocą

której pęknięcie jest rozpatrywane jako pojedyncza powierzchnia. Wzdłuż tej powierzchni przemieszczenia są nieciągłe. Modyfikację metody nieciągłych przemieszczeń uzyskuje się w wyniku połączenia bezpośredniej metody brzegowych równań całkowych z metodą równań całkowych dla pęknięć krzywoliniowych. Sformułowana w taki sposób metoda brzegowych równań całkowych dla wypadkowych sił powierzchniowych F_i^- i gęstości dyslokacji

$\frac{\partial}{\partial s^-}[\Delta u_j^c]$, określanych wzdłuż dolnej linii pęknięcia Γ_c^- , nie zawiera całek hipersingularnych. Całkowym sformułowaniem tej metody dla dwuwymiarowego obszaru domkniętego Ω ograniczonego zewnętrzną linią brzegową $\Gamma_b = \Gamma_{b1} + \Gamma_{b2}$ i wewnętrzną linią pęknięcia jest następujący układ równań:

$$P \in \Gamma_b \rightarrow C_{ij} u_j = \oint_{\Gamma_{b1}} U_{ij} \tau_j d\Gamma_b - \oint_{\Gamma_{b2}} T_{ij} u_j d\Gamma_b + \int_{\Gamma_c^-} W_{ij} \frac{\partial}{\partial s^-} [\Delta u_j^c] ds^- \quad (1)$$

$$P \in \Gamma_c^- \rightarrow F_i^- = \oint_{\Gamma_{b1}} F_{ij}^v \tau_j d\Gamma_b + \oint_{\Gamma_{b2}} F_{ij}^u u_j d\Gamma_b + \int_{\Gamma_c^-} F_{ij}^d \frac{\partial}{\partial s^-} [\Delta u_j^c] ds^- + C_i$$

gdzie:

$C_{ij}(P)$ - współczynniki zależące od lokalnego kształtu brzegu $d\Gamma_b$

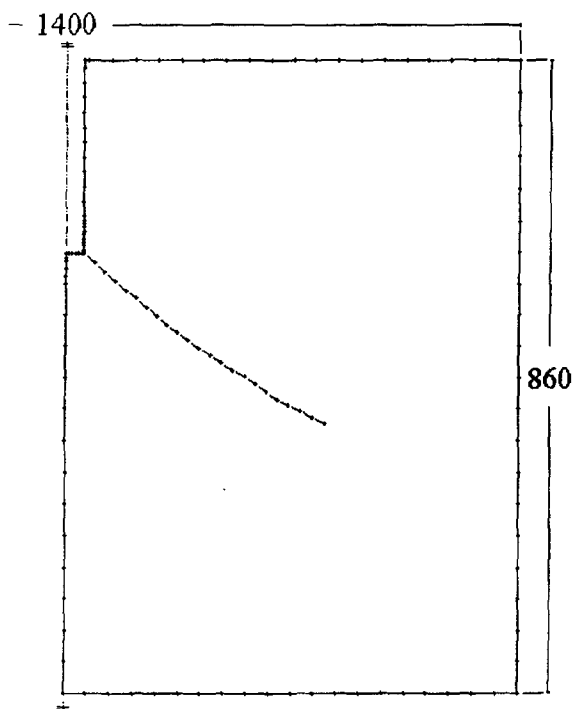
w punkcie P ,

$U_{ij}, T_{ij}, W_{ij}, F_{ij}^v, F_{ij}^u, F_{ij}^d$ - podcałkowe funkcje wpływu (jądra całkowe),

C_i - stałe całkowania.

Obszar Ω jest obciążony zadanymi siłami powierzchniowymi τ_j wzdłuż brzegu $\Gamma_{b1} + \Gamma_c^-$ oraz zadanymi przemieszczeniami u_j wzdłuż brzegu Γ_{b2} .

Rysunek 1 przedstawia zamodelowany zewnętrzny brzeg tarczy zawierającej prostokątną szczelinę. Na rysunku tym zaznaczono również przewidywaną ścieżkę propagacji pęknięcia. Szczelina jest umiejscowiona wzdłuż osi symetrii tarczy. Do powierzchni szczeliny przyłożono ciągłe obciążenie zewnętrzne. Przedłożony przykład ilustruje możliwości wykorzystania metody elementów brzegowych do prognozowania ścieżek propagacji pęknięć.



Rys.1. Tarcza zawierająca prostokątną szczelinę oraz ścieżkę propagacji pęknięcia

3. WPŁYW LOKALNEJ NIEJEDNORODNOŚCI POŁĄCZEŃ SPAJANYCH NA ICH ODPORNOŚĆ NA PĘKANIE

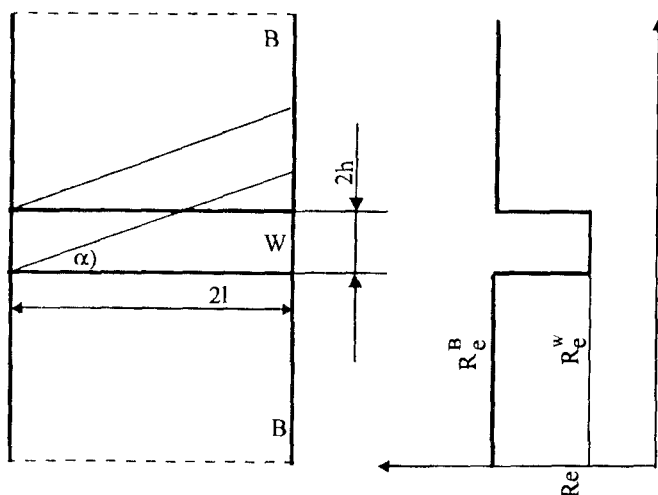
Dla pewnej grupy połączeń spajanych istnieje możliwość znacznego, lokalnego zróżnicowania struktury materiału w spoinie lub strefie wpływu ciepła a w konsekwencji i własności mechanicznych. Może to wystąpić w czasie spawania:

- stali ulepszonych cieplnie,
- stali umocnionych poprzez zgniot lub starzeniowo itp.

Bezpośrednio związana jest z tym zmiana parametrów charakteryzujących własności mechaniczne tego obszaru np. R_e , R_m (R_e - granica plastyczności, R_m - wytrzymałość na rozciąganie). Stałe charakteryzujące własności sprężyste wykazują nieznaczne zmiany; możemy je uznać za stałe dla wszystkich stref połączenia, E , μ , $\nu = \text{const}$ (E - moduł Young'a, μ - współczynnik Poisson'a).

W powszechnej praktyce inżynierskiej raczej nie zauważa się tego faktu, stosując do oceny własności mechanicznych takich połączeń zasady i filozofię odpowiadającą izotropowemu ośrodkowi materialnemu.

Rozważmy więc w pierwszej kolejności konsekwencje tak zróżnicowanej budowy połączenia spajanego na jego własności mechaniczne przyjmując jako podstawę do rozważań model przedstawiony na rysunku 2.



Rys.2. Schemat niejednorodnego modelu z uwzględnieniem skokowej zmiany własności mechanicznych wyrażonych poprzez granicę plastyczności stref W i B - R_e^W i R_e^B

Istota zjawisk fizycznych rzutujących na własności mechaniczne tego modelu występuje na powierzchniach kontaktowych strefy B i W, stanowiących więzy mechaniczne układu.

Określenie zmiany stanu naprężania w tym obszarze posiada fundamentalne znaczenie do właściwej interpretacji i oceny własności mechanicznych modelu np. w czasie statycznego rozciągania czy jego odporności na pęknięcie. Główna trudność w ustaleniu stanu naprężeń polega na tym, iż materiał w takim modelu złącza spajanego podlega niejednorodnym odkształceniom, których rezultatem jest niejednorodny układ naprężeń [1]. W modelu tym istnieje możliwość powstania nieciągłości naprężeń, ale nie może ona zakłócać warunku równowagi naprężeń. Nieciągłość naprężeń pojawia się, gdy po przekroczeniu pewnej powierzchni wewnątrz ciała, nazwanej powierzchnią nieciągłości naprężeń lub powierzchnią kontaktową, niektóre składowe naprężenia doznają przeskoku, to znaczy mają inną wielkość lub zwrot po obu stronach takiej powierzchni.

Wobec tego, rozpatrując w/w problem w kategoriach matematycznych i uwzględniając uwagi przedstawione w pkt. 1, przyjęcie modelu obiektu badań oznacza określenie związków między czynnikami mającymi wpływ na budowę strukturalną i funkcjonowanie obiektu badań. Proces ten zgodnie z zasadami fizyki ciała stałego określony jest w formie równania lub układu równań

różniczkowych, opisujących wewnętrzne prawidłności procesu wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Z przedstawionych rozważań wynika więc, iż w przypadku modelowania warunków pracy i określenia wyężenia heterogenicznego skokowo złącza spawanego, będzie nim układ równań różniczkowych, określających warunki równowagi oraz powiązane z nimi zależności, określające własności ośrodka materialnego i warunki graniczne [1]. Należy podkreślić, iż pomiędzy modelem a rzeczywistym połączeniem spawanym o budowie skokowoheterogenicznej zachowano geometryczne podobieństwo, co w zdecydowany sposób ułatwia przenoszenie analizy, gdyż oznacza jednakowy stopień odkształcenia modelu i obiektu rzeczywistego [1].

Zmiana stanu napężenia w analizowanym układzie wpłynie więc również na zmianę mechanicznego oddziaływania i własności mechaniczne niejednorodnego układu, w tym również na zmianę odporności na pęknięcie poszczególnych stref modelu. Rozpatrując zmianę odporności na pęknięcie W w stosunku do materiału B dla przyjętego modelu w oparciu o parametr δ i wyznaczając stosunek δ_w / δ_B otrzymamy [2]:

$$\delta_R = \frac{\delta}{\delta_B^w} = \left(\frac{1}{Ks} \right)^{1-(1/n_w)} \cdot \left(\frac{Kw}{Ks} \right)^{1 - \frac{1}{n_B}} \quad (2)$$

gdzie:

$$K_w = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4(1-q)} \left[\frac{\pi}{2} + 2(1-2q)\sqrt{q(1-q)} - \arcsin(2q-1) \right] + (1-q) \frac{1}{4\chi} \right) \quad (3)$$

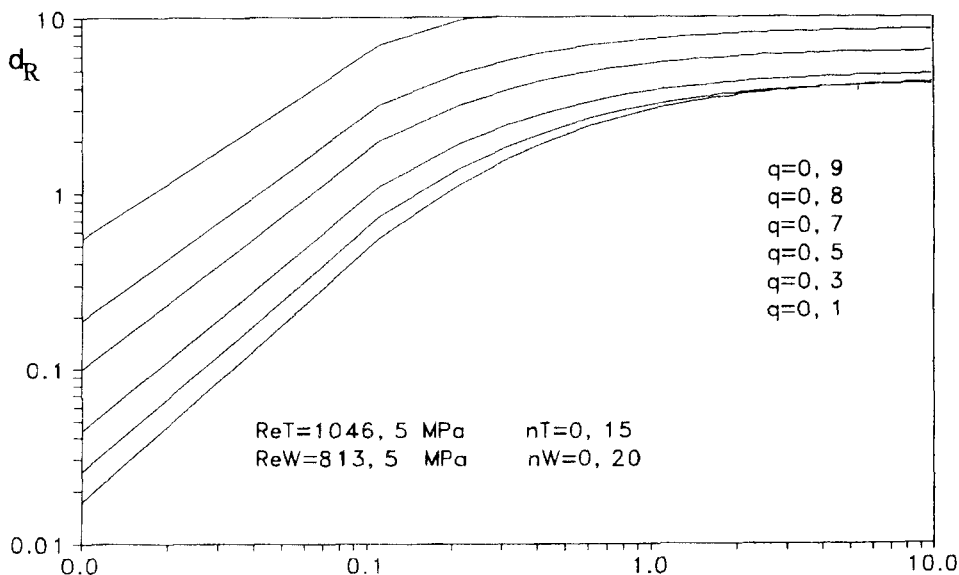
$$Ks = \frac{R_e^B}{R_e^W} > 1 \quad (4)$$

$$0 \leq q < 1 \quad (5)$$

$$\chi = h/l \quad (6)$$

n_w, n_B - współczynnik umocnienia materiału stref W i B.

Współczynnik umocnienia kontaktowego K_w uwzględnia wpływ zmiany stanu napężenia z jednoczesnym uwzględnieniem kąta przechylenia warstwy poprzez parametr q i względną grubość strefy (W) - χ . Na rysunku 3 przedstawiono przykład obliczeniowy obrazujący zmianę wartości parametru δ_R . Określa on zmianę odporności na pęknięcie analizowanego układu, pozwalającego wyciągnąć konkretne wnioski co do jego odporności na pęknięcie.



Rys.3. Wykres ∂_R jako funkcji χ dla $q = 0,1 + 0,9$ i $K_s = 1,3$ i parametrów materiałowych $R_e^B = 1046,5 \text{ MPa}$, $R_e^W = 813,5 \text{ MPa}$ oraz $n_B = 0,15$, $n_W = 0,20$

4. WSPOMAGANIE KOMPUTEROWE CAI W BADANIACH PROCESU PĘKANIA W PRÓBIE UDAROWEGO ZGINANIA

Próbie udarowego zginania według PN-79/H-04370 usiłuje się nadawać bardziej precyzyjny charakter poprzez zastosowanie parametrów i kryteriów wynikających z dynamicznej mechaniki pęknięcia, np. K_{Id} , J_{Id} .

Zasadnicze trudności związane z prawidłową oceną próby udarowego zginania, przy wykorzystaniu parametrów mechaniki pęknięcia, wynikają z dynamicznego charakteru próby i niedoskonałości metodyki badawczej. Dynamiczny charakter przebiegu próby wyzwała szereg zjawisk, prowadzących do znacznej dyssypacji energii:

- absorbowanej przez młot udarowy,
- absorbowanej przez próbkę,
- bezpośrednio zużytej na proces dekohezji próbki,

powodujących zakłócenia przebiegu zdejmowanych charakterystyk: $F(t)$, $f(t)$, $F(f)$ (F - siła, f - ugięcie, t - czas), które stanowią podstawę analizy i oceny procesu udarowego zginania. W powyższym aspekcie ocena tego procesu nie jest możliwa bez uwzględnienia podstaw fizyki tego procesu. Powinno to doprowadzić do ustalenia właściwych kroków badawczych do rejestrowania charakterystyk $F(t)$, $f(t)$, $F(f)$, a w dalszej kolejności do określenia punktów charakterystycznych procesu zginania próbki i doboru właściwych parametrów

opisujących to zjawisko, np. K_{1d} , J_{1d} , w zależności od kruchego bądź ciągliwego przebiegu procesu pękania materiału.

Charakteryzując, z fizycznego punktu widzenia, przebieg próby udarowego zginania należy stwierdzić, że oddziaływanie pomiędzy nożem wahadła młota, podporami a próbką ma charakter falowy. Energia dostarczona poprzez fale naprężeniowe wywołuje:

a) oscylację stanu naprężenia wokół szczeliny i fluktuację odbitych fal naprężeń wywołującą oscylację układu młot - próbka w wyniku impulsu

$$\int_0^t F dt ,$$

b) przyspieszenie masy próbki, z którym związany jest również efekt inercyjny a odgrywający zasadniczą rolę w początkowym okresie zginania,

c) mechaniczne zginanie próbki.

Zjawiska wyszczególnione w punktach a i b są bezpośrednim skutkiem dynamicznego charakteru próby. Równoczesne nakładanie się w/w zjawisk powoduje zasadnicze trudności w ocenie parametrów charakteryzujących proces pękania i właściwą interpretację wyników próby udarowego zginania.

W próbkach typu Charpy V z uwagi na ograniczone rozmiary próbki, odbite fale od powierzchni ograniczających oraz ich dyfrakcja na końcu szczeliny dodatkowo nadają procesowi temu charakter stochastyczny, wpływający na przebieg siły $F(t)$, $f(t)$ oraz $F(f)$, a co za tym idzie i na stan naprężenia wokół wierzchołka szczeliny. W rezultacie tego, po osiągnięciu przez falę naprężenia szczeliny o wartości początkowej amplitudy σ_0 i okresie T_0 , stan naprężenia wokół wierzchołka szczeliny ma charakter oscylacyjny, co w powiązaniu z fluktuacją odbitych fal naprężeniowych oraz nagromadzonej energii sprężystej w badanym układzie prowadzi do drgań własnych próbki, podpór i wahadła. Z uwagi na małe wymiary próbki zjawisko to wykorzystuje się do pomiaru siły łamiącej próbkę poprzez usytuowanie czujników pomiarowych na nożu wahadła lub podporach. Tak więc zasadniczo problem oceny zjawisk zachodzących bezpośrednio w próbce dokonuje się na podstawie analizy zjawisk zachodzących poza próbką i stopień wiarygodności zależy od podobieństwa zjawisk w próbce oraz nożu wahadła i podpór.

Ocena podstawowych parametrów mechaniki pękania: K_{1d} , J_{1d} wymaga więc uwzględnienia i wyselekcjonowania wpływu czynników dynamicznych w czasie przebiegu pomiaru sił w układzie $F(t)$ lub $F(f)$ i określenia punktów charakterystycznych związanych z poszczególnymi etapami łamania próbki. W praktyce oznacza to znaczącą eliminację zakłóceń i deformacji sygnału pomiarowego w czasie badań eksperymentalnych oraz możliwość jego analitycznej weryfikacji z uwzględnieniem zasad modelowania i aplikacji metod matematycznych opartych o metody komputerowe. Realizacja tak postawionego celu jest możliwa dzięki systemowi wspomagania komputerowego CAI (Computer Aided Instrumented Charpy Impact Testing).

Ogólne spostrzeżenia dotyczące przebiegu zmiany sił pomierzonych $F(t)$ stanowiących podstawę oceny K_{Id} , J_{Id} na nożu wahadła, próbce i podporach możemy ocenić następująco [3] :

- przebiegi sił $F(t)$ rejestrowane na nożu wahadła, próbce i podporach są względem siebie przemieszczone w czasie t ,
- określenie siły wypadkowej F_{Σ} pozwala częściowo skompensować przesunięcia fazowe i oscylacje mierzonych sił na bijaku i podporach w stosunku do siły lamującej próbkę zdjętej bezpośrednio z próbki.

Przyjęty w pracy ramowy program postępowania polega na:

- rejestracji przebiegów sił F poprzez układ pomiarowy młota,
- filtracji zakłóceń w rejestrowanych przebiegach (smoothing),
- wyznaczeniu siły wypadkowej F_{Σ} ,
- uwzględnieniu wpływu drgań u podstaw podpór na F_{Σ} ,
- końcowej filtracji i korekcji siły wypadkowej F_{Σ} ,
- normowaniu i obliczeniu parametrów charakteryzujących proces pękania próbki Charpy V.

Na rysunku 4 przedstawiono schematycznie program obróbki danych pomiarowych zgodnie z powyższymi wytycznymi i procedurą matematyczną określoną w opracowaniu [3].

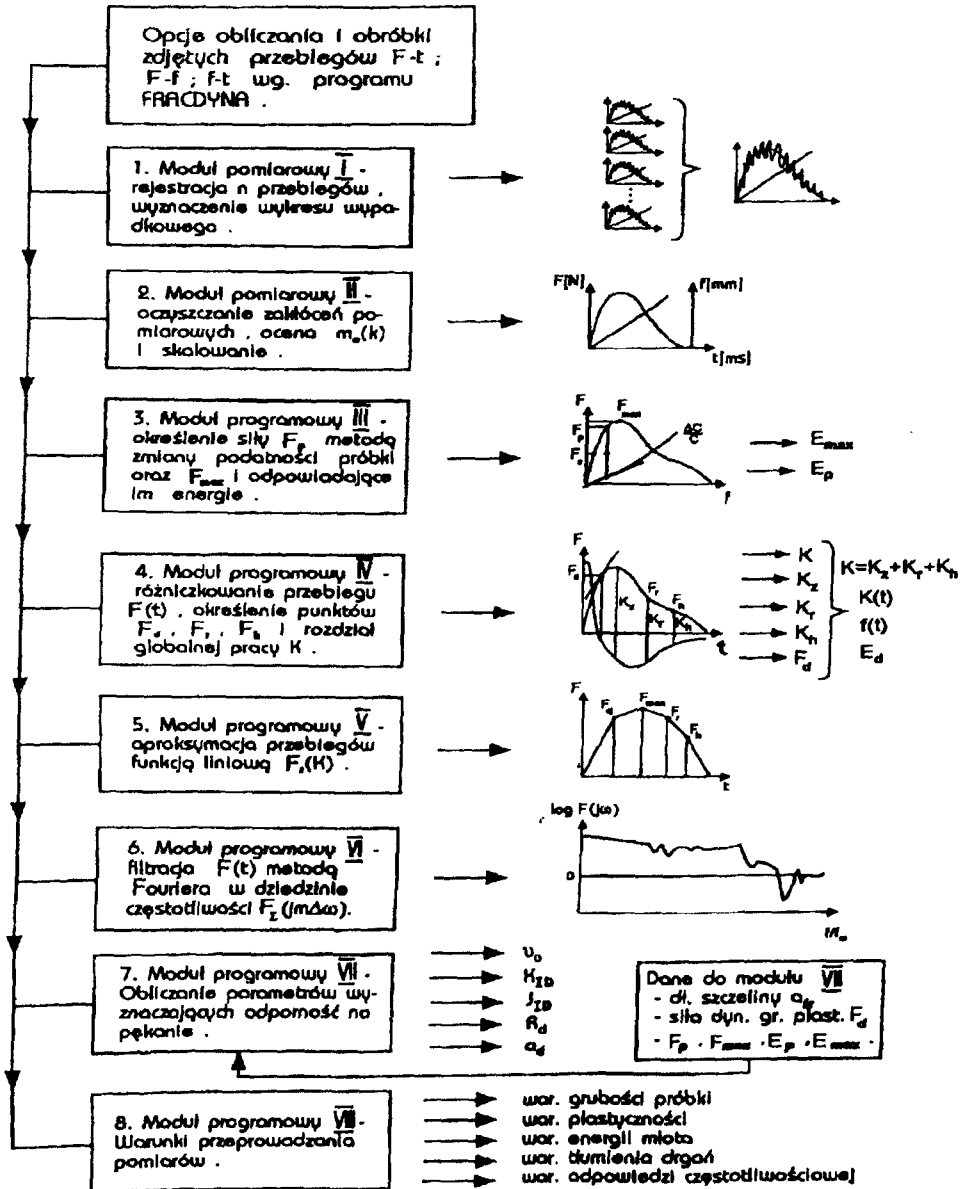
Na rysunkach 5a i 5b przedstawiono rezultaty wybranych etapów filtracji, korekcji oraz obróbki przebiegów pomiarowych w dziedzinie czasu dla próbki Charpy V ze stali 18G2A. Dzięki temu możliwe jest dokładniejsze określenie punktów charakterystycznych na wykresie $F(t)$ oraz rozdział całkowitej pracy K na składowe, określające etapy procesu pękania. Umożliwia to również bardziej precyzyjną ocenę takich parametrów jak K_{Id} i J_{Id} . Na rysunkach 5a i 5b, dokonano również wyznaczenia punktu inicjacji rozwoju szczeliny, bazując na :

- a) metodzie zmiany podatności próbki C ,
- b) metodzie różniczkowania przebiegu $F - t$,
- c) wartości siły maksymalnej F_m

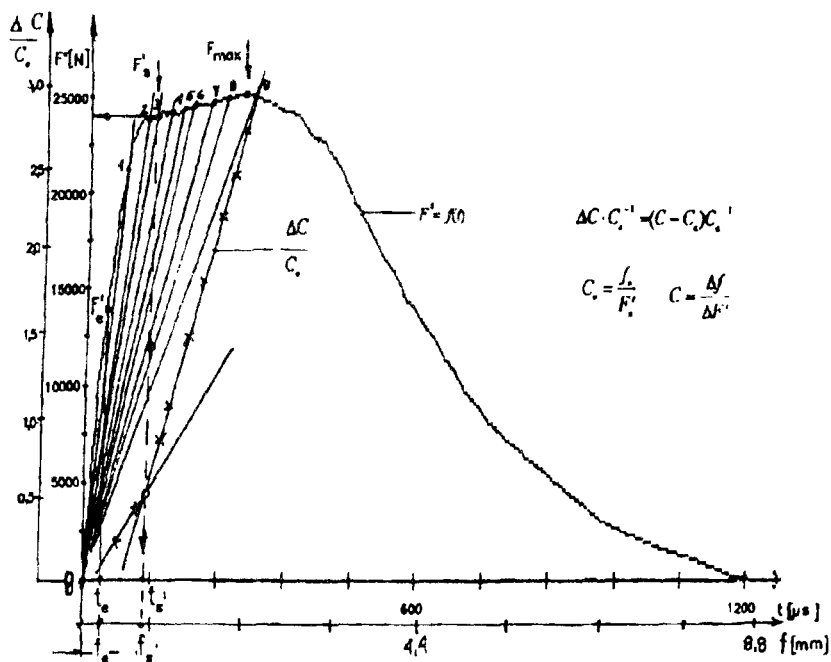
Tabela 1. Rezultaty oceny K_{Id} i J_{Id} dla stali 18G2A

Lp.	Metoda wyznaczania punktu inicjacji pękania	Obliczone wartości odporności na pękanie	
		K_{Id} MN/m ^{3/2}	J_{Id} KJ/m ²
1.	Zmiana podatności próbki (rys.5a)	50,6	119
2.	Różniczkowanie przebiegu $F - t$ (rys.5b)	68,5	174
3.	Wyznaczanie siły F_{max} wg ASTM (rys.5a)	75,4	196
4.	Metoda funkcji sklejaney	61,2	131

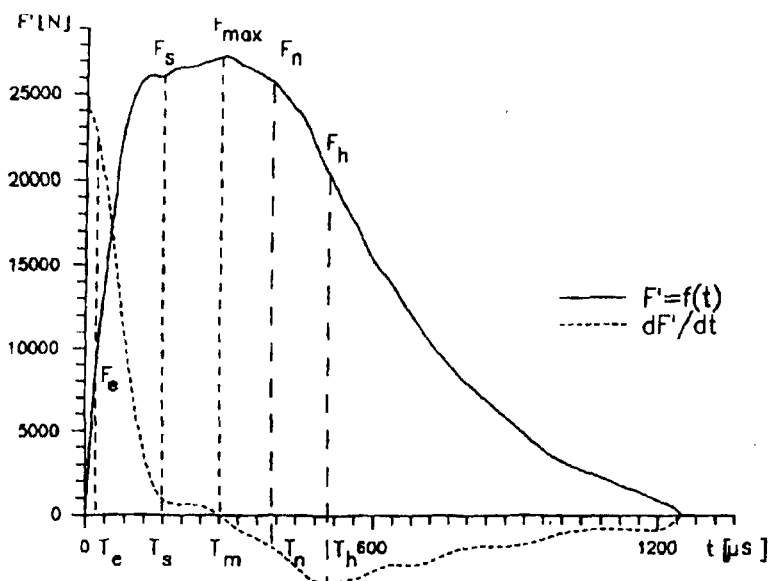
W tabeli 1 przedstawiono wyznaczone wartości K_{ID} oraz J_{ID} opierając się na w/w metodach. Istnieje duża zgodność parametrów ocenionych wg metody zmiany podatności i różniczkowania, odbiegających od parametru bazującego na wartości siły maksymalnej F_{max} , dla której $dF/dt = 0$.



Rys.4. Opcje obliczania i obróbki zdjętych przebiegów $F(t)$, $F(f)$ i $f(t)$ według programu FRACDYNA



Rys.5a. Wyznaczanie punktów charakterystycznych procesu pęknięcia próbki metodą zmiany podatności próbki



Rys.5b. Wyznaczanie punktów charakterystycznych procesu pęknięcia próbki metodą różniczkowania przebiegu $F(t)$

5. PODSUMOWANIE

Zastosowanie parametrów i kryteriów mechaniki pękania do rozwiązywania zadań inżynierskich powinno polegać na rygorystycznym przestrzeganiu zasad modelowania i adekwatności obiektu rzeczywistego i jego modelu na wszystkich etapach rozważań. Przedstawione w niniejszym opracowaniu przykłady obliczeniowe wskazują na możliwość:

- efektywnego symulowania procesu propagacji pęknięć przy złożonym stanie obciążenia,
- oceny odporności na pęknięcie niejednorodnych połączeń spajanych,
- uzyskania dodatkowych informacji o procesie pęknięcia w próbie udarowego zginania.

Zasadniczo rozwiązywanie bardziej złożonych zagadnień jest możliwe dzięki zastosowaniu metod numerycznych.

LITERATURA

- [1] Ranatowski E.: Analysis of the Mechanical Properties of Undermatched Weld Joints. United Kingdom, ESIS 17. Mechanical Engineering Publications Limited. London 1994
- [2] Ranatowski E.: Analytical assessment of the constraint effect of undermatched Weld Joints. ECF10. Structural Integrity: Experiments, Models, and Applications. Publ.EMAS, 1994
- [3] Ranatowski E., Sadowski J., Strzelecki R.: Physical interpretation of impact bend test by means mathematical methods. Applied Mathematics and Computer Science. Vol. 3, No 2, 1993

SOME PROBLEMS OF THE APPLICATION OF FRACTURE MECHANICS IN THE ENGINEERING PRACTICE

Summary

At the beginning of the first section we are presenting some basis for modelling the physical phenomenon's and objects. In the second section an assessment of the crack growth direction based on the strain energy density theory was made. In the third section an assessment of the fracture resistance of undermatched weld joints was made. Finally, the paper presents possibilities of the use of mathematical methods for processing fast dynamic phenomena in an impact bend test and an assessment of the dynamic fracture parameters such as K_{I_d} , J_{I_d} .

O PROBLEMACH MECHANICZNYCH PRZY DYSTRYBUCJI PACZEK

Józef Rawluszko

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR, Katedra Mechaniki Budowli
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

W referacie przedstawiono przegląd problemów mechanicznych związanych z procesami dystrybucji paczek. Opisano prace badawczo-rozwojowe zrealizowane w Zakładzie Inżynierii Poczty ATR. Określono tematykę dalszych prac badawczych z tej dziedziny.

1. WSTĘP

W ostatnich latach obserwuje się szybki wzrost ilości towarów przesyłanych od wytwórcy do odbiorcy bezpośrednio w opakowaniach jednostkowych, tj. w formie paczek. Jednocześnie rosną wymagania co do czasu przesyłania, a to powoduje, iż dąży się do przyspieszenia realizacji wszystkich operacji związanych z przemieszczaniem i rozdziałem (dystrybucją) paczek. Obserwuje się przy tym wyraźną tendencję do zmechanizowania i automatyzowania tych procesów, zwłaszcza w dużych węzłach rozdzielczych. Niewątpliwie, zagadnienia dystrybucji obiektów, jakimi są paczki, można zaliczyć do dziedziny wiedzy zwanej logistyką. Techniczna realizacja jakichkolwiek rozwiązań z tej dziedziny wiąże się tym niemniej z koniecznością rozwiązywania szeregu specyficznych problemów z dziedziny mechaniki i budowy maszyn. Ponieważ zagadnienia te dotyczą sfery usług, stąd też dotychczas nie były one zazwyczaj dostrzegane, a ich waga nie była doceniana w środowisku mechaników.

W Zakładzie Inżynierii Poczty (dawniej Zakładzie Mechanizacji Poczty) Instytutu Telekomunikacji ATR od szeregu lat prowadzone są prace badawcze z zakresu optymalizacji procesów przemieszczania i rozdziału paczek w węzłach rozdzielczych.

Niniejszy referat ma na celu z jednej strony możliwie najszerze naświetlenie zagadnień i problemów mechanicznych związanych z tą dziedziną techniki, z drugiej zaś ukazanie dotychczasowych dokonań i osiągnięć Zakładu Inżynierii Poczty.

2. PROBLEMY MECHANICZNE W PROCESACH DYSTRYBUCJI PACZEK

Analiza ciągu operacji, jakim jest poddawana paczka na drodze od nadawcy do adresata oraz sposobów realizacji tych operacji, pozwala wyodrębnić szereg problemów mechanicznych, które wymagają rozwiązania. Proces dystrybucji paczek można w ogólnej postaci przedstawić jako sekwencję następujących po sobie operacji: nadanie paczki w placówce nadawczej - przesłanie do węzła rozdzielczego - rozdział paczek w węzle rozdzielczym - przesłanie do placówki oddawczej - dostarczenie paczki odbiorcy. Przy próbach mechanizowania, lub też automatyzowania tego procesu, podział na operacje musi być dużo bardziej szczegółowy. Okazuje się, że pojawiają się wtedy liczne zagadnienia wręcz nie dostrzegane przy realizacji ręcznej tych operacji.

Poniżej przedstawiono najistotniejsze, a jednocześnie interesujące mechaników zagadnienia związane z tą dziedziną techniki. Są to:

- a) optymalizacja konstrukcji opakowań paczkowych,
- b) metody określania właściwości mechanicznych opakowań paczek, ze względu na konieczność zabezpieczenia ładunków przed narażeniami mechanicznymi,
- c) wypracowanie optymalnych technik manipulowania paczką w sposób zmechanizowany lub zautomatyzowany, tj. obracania, pozycjonowania w określonym miejscu, centrowania na przenośniku, zgarniania z przenośnika, sortowania i układania na paletach i w kontenerach oraz magazynach przejściowych, buforowych,
- d) optymalizacja konstrukcji urządzeń realizujących operacje wymienione w punkcie 3, tj. głównie konstrukcji paczkowych maszyn rozdzielczych (PMR) i urządzeń zgarniających.
- e) wypracowanie optymalnych metod badania, zwłaszcza w warunkach eksploatacyjnych, urządzeń realizujących te operacje.

3. PRACE ZWIĄZANE Z DYSTRYBUCJĄ PACZEK, ZREALIZOWANE W ZAKŁADZIE INŻYNIERII POCZTY (ZIP)

Jak wspomniano we wstępie, zagadnienia optymalizacji procesów dystrybucji paczek oraz optymalizacji konstrukcji urządzeń do realizacji tych procesów, znajduje się od szeregu lat w polu zainteresowań badawczych pracowników ZIP. Prace z tego zakresu były realizowane zarówno w ramach badań własnych, jak i częściowo w ramach prac badawczych realizowanych na zlecenia.

Badania te zaowocowały opublikowaniem szeregu artykułów i referatów, pracą dokorską, kilkoma pracami dyplomowymi i opracowaniami przekazywanymi zleceniodawcom w formie sprawozdań z badań [1 - 9, 15].

Pierwsza grupa szczegółowo rozpracowywanych zagadnień wiązała się z analizą i optymalizacją budowy paczkowych maszyn rozdzielczych (PMR), a w szczególności urządzeń zgarniających paczki z przenośnika taśmowego.

Potrzeba zwiększenia wydajności PMR wywołuje konieczność wzrostu prędkości przemieszczania paczek na przenośnikach oraz wzrostu prędkości zgarniania paczek ze środków transportowych. W efekcie - rosną przeciążenia, jakim poddawana jest paczka i ładunek w niej zawarty. Z drugiej strony - z warunku zachowania bezpieczeństwa ładunku wynika potrzeba minimalizacji tych przeciążeń. Mamy więc do czynienia z klasycznym przypadkiem antynomii technicznej. Dla rozwiązania tego problemu okazało się koniecznym znalezienie najpierw odpowiedzi na następujące pytania, dotyczące identyfikacji mechanicznej już istniejących urządzeń:

- a) ile wynoszą rzeczywiste przeciążenia paczki i ładunku w niej zawartego w procesie przemieszczania i zgarniania, i jak te przeciążenia wyznaczać w warunkach eksploatacyjnych?
- b) jakie są rzeczywiste tory ruchu zgarnianej (przemieszczanej) paczki i jak je określać?
- c) jakie są rzeczywiste charakterystyki kinematyczne urządzeń zgarniających?

Zagadnienia wyznaczania powyższych charakterystyk rozwiązywano zarówno w oparciu o analizę teoretyczną, budując odpowiednie modele matematyczne i przeprowadzając komputerową symulację działania takich modeli, jak i podejmując próby doświadczalnej weryfikacji danych uzyskanych z modelowania cyfrowego.

Należy zauważyć, iż procesy zgarniania paczek z przenośników były przedmiotem badań prowadzonych przez szereg osób, szczególnie w byłym ZSRR [10 - 13]. Dla ułatwienia analizy przyjmowano najczęściej daleko idące założenia upraszczające; po pierwsze - traktując paczkę jako punkt materialny lub, co najwyżej, jako sztywne ciało płaskie; a po drugie - traktując urządzenie zgarniające jako mechanizm o ściśle zadanej kinematyce, zbudowany ze sztywnych członów. Takie modelowanie procesów zgarniania paczek nie pozwalało jednak określić dokładnie przeciążeń, jakim poddawana jest paczka i dlatego też w badaniach realizowanych w ZIP tworzone modele uwzględniały rzeczywiste parametry i własności mechaniczne stosowanych urządzeń [2,4].

Otrzymywane wyniki badań były weryfikowane w trakcie badań doświadczalnych przeprowadzanych na specjalnie zbudowanym stanowisku przedstawiającym sobą fragment PMR wraz z dwoma urządzeniami zgarniającymi: zgarniakiem typu zastawa aktywna i zgarniakiem trójramiennym z napędem łańcuchowym.

Specyficzność konstrukcji PMR wymusiła rozpracowanie nietypowych (oryginalnych) metod badania tych urządzeń. Dla oszacowania przeciążeń, jakim poddawana jest paczka w czasie jej przemieszczania, zastosowano czujniki sejsmiczne umieszczone wraz z układem rejestrującym wewnątrz paczki. Tak "spreparowaną" paczkę poddawano próbom przeciążenia przy swobodnych

spadkach (zgodnie z PN) oraz próbom manipulacji na PMR. Wykorzystano w ten sposób metodę oceny właściwości systemów złożonych (ocena oddziaływania zgarniaka na paczkę wraz z zawartym ładunkiem) w oparciu o umownie przyjęty układ odniesienia (reakcja paczki wraz z ładunkiem na próby swobodnego spadku, przeprowadzane zgodnie z PN). Ogólne założenia tej metody badań przedstawiono w [16].

Wyznaczanie rzeczywistych charakterystyk kinematycznych zgarniaków w czasie cyklu roboczego oparto na oryginalnej metodzie polegającej na rejestracji torów ruchów poszczególnych punktów ramion zgarniaka i paczki bezpośrednio na przenośniku oraz traktowania taśmy przenośnika jako taśmy rejestratora i przeprowadzaniu rejestracji w dwóch reżimach - przy taśmie nieruchomej (rejestracja toru ruchu bezwzględnego) i przy taśmie ruchomej (rejestracja toru ruchu względnego) [8.9]. Tak otrzymane trajektorie umożliwiają wyznaczenie parametrów kinematycznych ruchu zgarniaka (i paczki) przy zsuwaniu paczki z taśmociągu. Metoda ta okazała się niewspółmiernie prostrza, a przy tym zadowalająco dokładna w porównaniu do innych metod znanych z literatury problemu (w szczególności metody E.A. Bułanova polegającej na filmowaniu szybką kamerą procesu zgarniania i analizie sekwencji poszczególnych ujęć tego procesu). Interesujące wyniki uzyskano również z analizy niezawodności procesu zgarniania paczki przy różnych prędkościach przenośnika i ramienia zgarniaka oraz losowo zmiennych wielkościach opracowywanych paczek [4].

Z analizy tej wyprowadzono między innymi postulat konieczności centrowania paczki przy wejściu na przenośnik. Dalszą konsekwencją tych badań było zaproponowanie wariantowych rozwiązań urządzeń centrujących paczki na taśmociągu [15].

4. PODSUMOWANIE

Porównanie wykazu problemów mechanicznych przejawiających się w procesach opracowywania paczek z już wykonanymi badaniami i opracowaniami Zakładu Inżynierii Poczty pozwala nakreślić kierunki dalszych prac. Należy tutaj wymienić przede wszystkim następujące tematy:

- a) optymalizację konstrukcji kontenera paczkowego,
- b) metody automatycznego załadunku i wyładunku kontenera paczkowego oraz konstrukcji urządzeń do realizacji tych metod,
- c) optymalizację konstrukcji dotychczas istniejących PMR,
- d) nowe koncepcje i konstrukcje PMR.

Warto przy tym zauważyć, że niejednokrotnie efektywne rozwiązanie tych tematów wiąże się z wykorzystaniem umiejętności nie tylko z mechaniki i budowy maszyn, lecz również i z innych dziedzin wiedzy, np. automatyki, robotyki, akustyki, informatyki.

Należy również podkreślić, że próby rozpracowywania tych problemów były już podejmowane zarówno za granicą, jak i w Zakładzie Inżynierii Poczty. Uzyskano jednak jak dotąd nie w pełni zadowalające wyniki i dlatego też tematy te pozostają nadal wyzwaniem dla inżynierów i naukowców działających w tej dziedzinie techniki.

LITERATURA

- [1] Wiatr R., Rawłuszko J.: Analiza zmienności obciążeń przenośników taśmowych maszyn do rozdziału paczek. Materiały XII Sympozjum PKM. Lublin - Kazimierz Dolny 1985
- [2] Piątkowski J., Rawłuszko J.: O modelowaniu procesu zgarniania paczek z przenośnika taśmowego." Materiały XIII Sympozjum PKM, Świnoujście 1987
- [3] Wiatr R.: Optymalizacia techniko-technologicckich parametrov vratnych vyhybiek poľautomatickch triedicov balíkov. Praca doktorska, Žylyna 1988
- [4] Wiatr R., Rawłuszko J.: Analiza pracy pocztowej maszyny rozdzielczej pod kątem zwiększenia wydajności i/lub niezawodności sortowania paczek. Zeszyty Naukowe ATR Nr 169, Bydgoszcz 1990
- [5] Piątkowski J., Rawłuszko J.: O dynamice urządzeń zgarniających paczkowych maszyn rozdzielczych. Zeszyty Naukowe ATR Nr 169, Bydgoszcz 1990
- [6] Pokora W., Rawłuszko J.: Symulacja pracy paczkowej maszyny rozdzielczej. Założenia i uproszczony algorytm. Zeszyty Naukowe ATR, Nr 169, Bydgoszcz 1990
- [7] Wiatr R.: Niektóre aspekty sortowania ładunków zgarniakiem aktywnym. Materiały KST Bydgoszcz 1992
- [8] Rawłuszko J.: Evaluation of the kinematic characters of diverters used in parcel sorting machines (PSM) - Materiały IX Międzynarodowej Konferencji Naukowej, Żylyna (Słowacja) 1993
- [9] Rawłuszko J.: O wyznaczaniu charakterystyk kinematycznych pracy zgarniaków paczkowych maszyn rozdzielczych. Technika i Eksploatacja Poczty, Nr 1, 1994
- [10] Buľanov E. A. : Isledowanije processa peregruzki. Izvestija VUZ-ov. Masinostrojenije 1984 nr 12, s.75-79
- [11] Buľanov E. A.: Analiz raboty transportno - raspredielitel'no sojedinenija. Izvestija VUZ-ov, Masinostrojenije 1987, Nr 1
- [12] Sokoľov V.P. : Počteobrabatyvajuščije mašiny i mekhanizmy. Sviaz, Moskva 1980
- [13] Krivoplas A.P. i inni.: Pakietoformirujuscije mašiny. Masinostrojenije, Moskva 1982
- [14] White J.A., Pence I. W. (edytorzy): Progress in Material Handling and Logistics. Material Handling '90, vol. 1,2, Springer-Verlag, Berlin 1991

ABOUT MECHANICAL PROBLEMS IN PARCELS DISTRIBUTION PROCESSES

Summary

The paper presents a general review of mechanical problems concerned with the processes of parcels' distribution. R + D works fulfilled in Postal Engineering Department (Zakład Inżynierii Poczty) are described. The themes of future research works are proposed.

WPLYW EFEKTÓW BEZWŁADNOŚCI NA FHD PRZEPIY W LEPKI W SZCZELINIE MIĘDZY NIERUCHOMYMI POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI

Jerzy Sawicki

Wydział Mechaniczny ATR, Katedra Mechaniki Stosowanej, Zakład Mechaniki Płynów
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

W pracy rozpatrzono stacjonarny, laminarny, osiowosymetryczny przepływ cieczy magnetycznej w szczelinie między krzywoliniowymi powierzchniami obrotowymi. Rozwiązanie problemu przedstawiono w oparciu o równania warstwy przyściennej zapisane w krzywoliniowym układzie współrzędnych $x, 0, y$. Równania warstwy przyściennej rozwiązano metodą małego parametru. Otrzymano formuły określające pole przepływu, tj. składowe prędkości \bar{V}_x, \bar{V}_y oraz ciśnienie \bar{p} .

1. WSTĘP

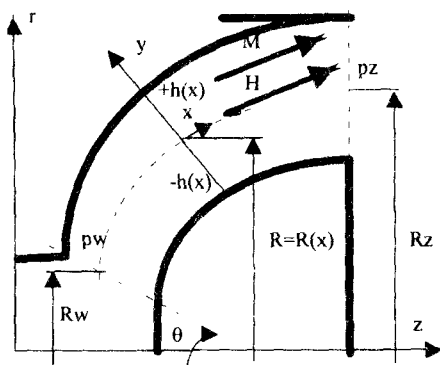
Nowe możliwości jakie stwarzają ciecze ferromagnetyczne (układy koloidalne) w rozwiązywaniu licznych zagadnień konstrukcyjnych i eksploatacyjnych w zakresie tarcia, zużycia i smarowania, a zwłaszcza w teorii łożysk ślizgowych, sprzęgieł i uszczelnień, zdecydowały o konieczności badania zjawisk zachodzących w przepływach ferrohydrodynamicznych (FHD) [1].

Spotykane w literaturze prace [2] przedstawiają rozwiązania zawierające uproszczenia prowadzące do całkowitego, bądź częściowego pomijania wpływu sił bezwładności na przepływ.

W niniejszej pracy przedstawiono rozwiązanie analityczne przepływu cieczy ferromagnetycznej z uwzględnieniem wpływu efektów bezwładności.

2. RÓWNANIA RUCHU

Równania ruchu cieczy ferromagnetycznej w krzywoliniowym ortogonalnym układzie współrzędnych (rys. 1) mają postać:



Rys. 1

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV_x)}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \mu_0 M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

tutaj: M_x, H_x - składowe odpowiednio wektora namagnesowania i natężenia pola magnetycznego,

μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni.

Z równania (3) wynika, że:

$$p(x, y) = p(x) \quad (4)$$

Warunki brzegowe dla prędkości V_x, V_y są następujące:

$$V_x(x, \pm h) = 0, \quad V_y(x, \pm h) = 0 \quad (5)$$

natomiast dla ciśnienia w postaci:

$$p = p_w \quad \text{dla } x = x_w$$

$$p = p_z \quad \text{dla } x = x_z \quad (6)$$

tutaj: x_w - współrzędna wlotu, x_z - współrzędna wylotu.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RUCHU

Wprowadzając do równań (1) i (2) zmienne bezwymiarowe w postaci:

$$\xi = \frac{x}{R_o}, \quad \eta = \frac{y}{h_o}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_o}, \quad \bar{V}_x = \frac{V_x}{V_o}, \quad \bar{V}_y = \frac{V_y R_o}{V_o h_o}, \quad \bar{p} = \frac{p h_o^2}{\mu V_o R_o}$$

oraz definiując:

$$Re = \frac{2\rho V_o h_o}{\mu}, \quad RF = \frac{\mu_o M_o H_o h_o^2}{\mu V_o R_o}, \quad \bar{M}_x = \frac{M_x}{M_o}, \quad \bar{H} = \frac{H_x}{H_o} \quad (7)$$

gdzie:

$R_o, 2h_o, V_o$ – wielkości średnie w rozpatrywanym obszarze przepływu,

Re, RF – odpowiednio liczba Reynoldsa i liczba ciśnienia magnetycznego,

otrzymamy:

$$\frac{1}{\bar{R}} \frac{\partial(\bar{R}\bar{V}_x)}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar{V}_y}{\partial\eta} = 0 \quad (8)$$

$$\lambda(\bar{V}_x \frac{\partial\bar{V}_x}{\partial\xi} + \bar{V}_y \frac{\partial\bar{V}_x}{\partial\eta}) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\bar{V}_x}{\partial\eta^2} + RF\bar{M}_x \frac{\partial\bar{H}_x}{\partial\xi} \quad (9)$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{h_o}{2R_o} Re < 1$$

Z równania (9) wynika, że λ jest małym parametrem układu równań (8) i (9), można zatem rozwiązać poszukiwać w postaci szeregów:

$$\bar{V}_x = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \bar{V}_x^i, \quad \bar{V}_y = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \bar{V}_y^i, \quad \bar{p} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \bar{p}^i$$

Podstawiając powyższe szeregi do równań (8) i (9), porządkując i grupując wyrazy względem tych samych potęg λ otrzymamy ograniczając się do przybliżenia liniowego oraz wracając do postaci wymiarowej następujący ciąg równań:

$$\frac{\partial^2 V_x^o}{\partial y^2} = \frac{dp^o}{dx} - \mu_o M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial V_y^o}{\partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} [R V_x^o] \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 V_x^1}{\partial y^2} = \frac{dp^1}{dx} - [V_x^0 \frac{\partial V_x^0}{\partial x} + V_y^0 \frac{\partial V_x^0}{\partial y}] \quad (12)$$

$$\frac{\partial V_y^1}{\partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} [R V_x^1] \quad (13)$$

Wprowadzając do równania (10) zależności:

$$M_x = M_o, \quad H_x = \frac{R_z}{R} H_o$$

a następnie całkując równania (10) - (13) przy warunkach brzegowych w postaci:

$$V_x^0 = V_x^1 = V_y^0 = V_y^1 = 0 \quad \text{dla } y = \pm h$$

$$p^0 = p_w, \quad p^1 = 0 \quad \text{dla } x = x_w$$

$$p^0 = p_z, \quad p^1 = 0 \quad \text{dla } x = x_z$$

otrzymamy:

$$V_x^0 = \frac{1}{2\mu R h^3} \frac{p_w - p_z - (Bw - Bz)}{Aw - Az} (y^2 - h^2) \quad (14)$$

$$V_y^0 = -\frac{h'}{2\mu R h^4} \frac{p_w - p_z - (Bw - Bz)}{Aw - Az} (h^2 y - y^3) \quad (15)$$

$$p^0 = B(x) + \frac{[A(x) - Az](p_w - Bw) - [A(x) - Aw](p_z - Bz)}{Aw - Az} \quad (16)$$

$$V_x^1 = \frac{1}{840} \frac{\rho C^2 (Rh)'}{\mu^3 R^3 h^7} (35h^2 y^4 - 7y^6 + 5h^6 - 33h^4 y^2) \quad (17)$$

$$V_y^1 = \frac{1}{840} \frac{\rho C^2}{\mu^3 R} \left[\left(\frac{Rh}{R^2 h^7} \right)' (y^7 - 7h^2 y^5 - 5h^6 y + 11h^4 y^3) + \frac{(Rh)' h'}{R^2 h^7} (44h^3 y^3 - 14h y^5 - 30h^5 y) \right] \quad (18)$$

$$p^1 = D(x) - \frac{[A(x) - Az]Dw - [A(x) - Aw]Dz}{Aw - Az} \quad (19)$$

gdzie:

$$R = R(x), \quad h = h(x), \quad R' = \frac{dR}{dx}, \quad h' = \frac{dh}{dx},$$

$$A(x) = \int \frac{dx}{Rh^3}, \quad Aw = A(x_w), \quad Az = A(x_z),$$

$$B(x) = \mu_o M_o H_o R_z / R, \quad Bw = B(x_w), \quad Bz = B(x_z),$$

$$D(x) = \int \frac{6 \rho C_o^2 (Rh)'}{35 \mu^2 R^3 h^3} dx, \quad Dw = D(x_w), \quad Dz = D(x_z)$$

Przedstawione powyżej rozwiązania ogólne (14)-(19) określają pole prędkości i pole ciśnień w szczelinie o zmiennej grubości ($h(x)$) między nieruchomymi krzywoliniowymi powierzchniami obrotowymi.

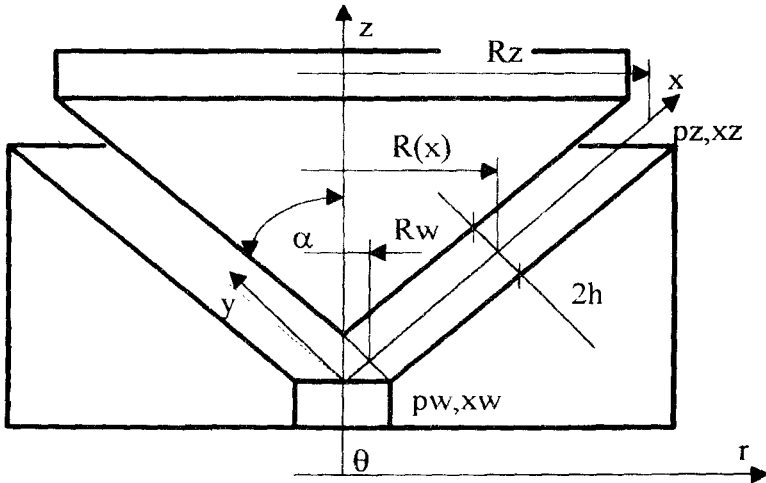
Chcąc zilustrować powyższe formuły na wykresach rozważmy ruch cieczy w szczelinie między powierzchniami stożkowymi (rys.2). Niech zatem:

$$R = x \sin(\alpha), \quad R_w = x_w \sin(\alpha), \quad R_z = x_z \sin(\alpha), \quad R' = \sin(\alpha), \quad h = \text{const.}$$

oraz

$$\bar{x} = \frac{x}{R_z}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{R} = \frac{R}{R_z}, \quad \bar{R}' = 1, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_z},$$

$$\bar{V}_x = \frac{V_x}{V_{x \max}}, \quad \bar{V}_y = \frac{V_y}{V_{y \max}} \frac{x_z \sin(\alpha)}{h}, \quad V_{x \max}^o = -\frac{1}{2} \frac{p_z h^2}{\mu x_z \sin(\alpha)} \frac{p_w/p_z - 1}{\ln(x_w/x_z)} \frac{1}{x}$$



Rys.2

Wprowadzając powyższe zależności do wzorów (14)-(19) otrzymamy formuły określające pole prędkości i ciśnienia w szczelinie stożkowej:

$$\bar{V}_x^o = \left(1 - \frac{Bw - Bz}{\bar{p}_w - 1}\right)(1 - \bar{y}^2) \quad (20)$$

$$\bar{V}_y^o = 0 \quad (21)$$

$$\bar{p}^o = B(\bar{x}) + \frac{[a(\bar{x}) - az](\bar{p}_w - Bw) - [a(\bar{x}) - aw](1 - Bz)}{aw - az} \quad (22)$$

$$\bar{V}_x = \bar{V}_x^o - \frac{1}{420} PWSB_a \frac{1}{\bar{x}^2} (5 - 7\bar{y}^6 + 35\bar{y}^4 - 33\bar{y}^2) \quad (23)$$

$$\bar{V}_y = \frac{1}{240} PWSB_a \frac{1}{\bar{x}^3} (\bar{y}^7 - 7\bar{y}^5 + 11\bar{y}^3 - 5\bar{y}), \quad (24)$$

$$\bar{p} = B(\bar{x}) + D(\bar{x}) + \frac{[a(\bar{x}) - az](\bar{p}_w - Bw - Dw) - [a(\bar{x}) - aw](1 - Bz - Dz)}{aw - az} \quad (25)$$

gdzie:

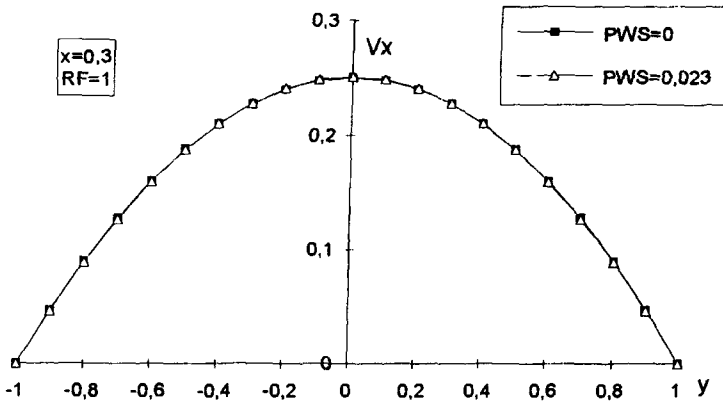
$$a(\bar{x}) = \ln(\bar{x}), \quad aw = a(\bar{x}_w), \quad az = a(\bar{x}_z)$$

$$B_a = \frac{aw - az}{\bar{p}_w - 1} [\bar{p}_w - 1 - (B_w - B_z)]^2$$

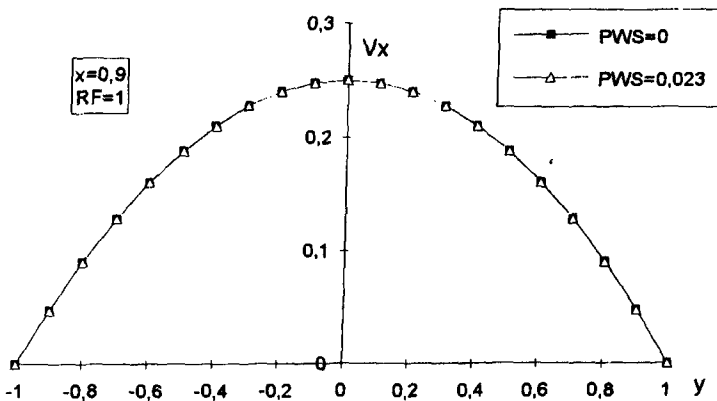
$$B(\bar{x}) = RF \frac{1}{\bar{x}}, \quad B_w = B(x_w), \quad B_z = B(x_z), \quad RF = \frac{\mu_o M_o H_o}{p_o}$$

$$D(\bar{x}) = -\frac{3}{35} \frac{\bar{p}_w - 1}{aw - az} B_a PWS \frac{1}{\bar{x}^2}, \quad D_w = D(\bar{x}_w), \quad D_z = D(\bar{x}_z), \quad PWS = \frac{\rho p_o h^4}{\mu^2 x_o^2 \sin^2(\alpha)(aw - az)^2}$$

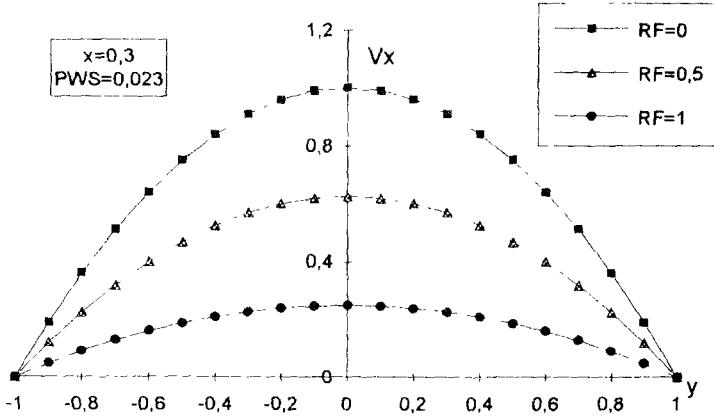
Otrzymane wzory określające parametry fizyczne pola przepływu cieczy ferromagnetycznej w szczelinie stożkowej poniżej przedstawiono graficznie:



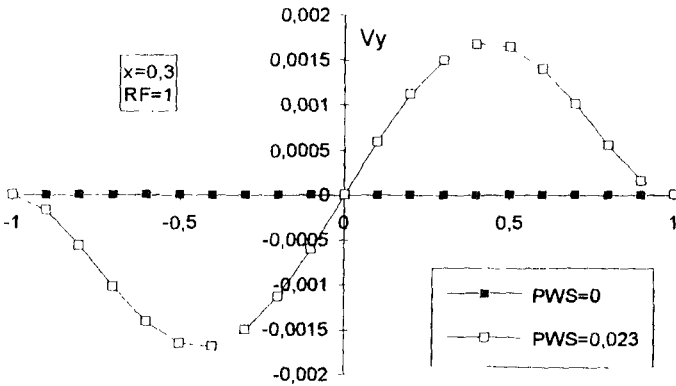
Rys.3. Wpływ efektów bezwładności na profil składowej prędkości V_x w przekroju szczeliny $x=0,3$ ($\bar{p}_w = 5$, $\bar{x}_w = 0,1$)



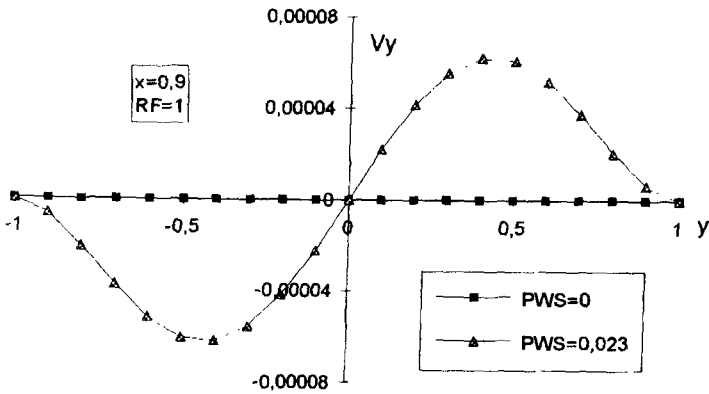
Rys.4. Wpływ efektów bezwładności na profil składowej prędkości V_x w przekroju szczeliny $x=0,9$ ($\bar{p}_w = 5$, $\bar{x}_w = 0,1$)



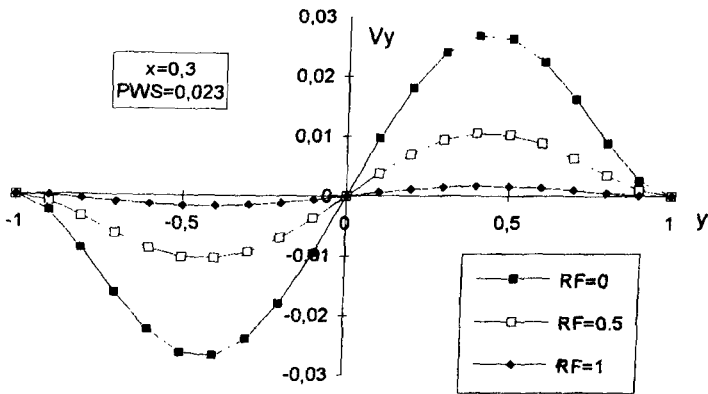
Rys.5. Wpływ pola magnetycznego na profil składowej prędkości V_x
($\bar{p}_w = 5$, $\bar{x}_w = 0,1$)



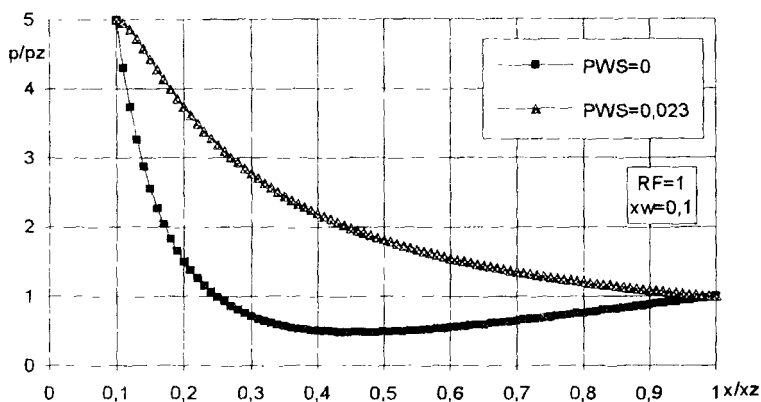
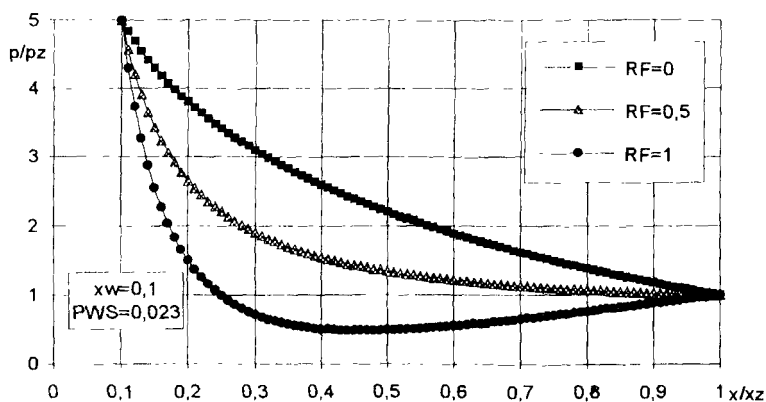
Rys.6. Wpływ efektów bezwładności na profil składowej poprzecznej V_y
w przekroju szczeliny $x=0,3$ ($\bar{p}_w = 5$, $\bar{x}_w = 0,1$)



Rys. 7. Wpływ efektów bezwładności na profil składowej prędkości V_y w przekroju szczeliny $x=0,9$ ($\bar{p}_w = 5$, $\bar{x}_w = 0,1$)



Rys. 8. Wpływ pola magnetycznego na profil składowej prędkości V_y ($\bar{p}_w = 5$, $\bar{x}_w = 0,1$)

Rys.9. Wpływ efektów bezwładności na profil ciśnienia p Rys.10. Wpływ pola magnetycznego na profil ciśnienia p

4. DYSKUSJA WYNIKÓW

Z otrzymanych formuł określających pole prędkości i ciśnienia można sformułować następujące wnioski:

- wpływ efektów bezwładności ($PWS \neq 0$) na składową prędkości wzdłużnej V_x jest nieznaczny zarówno w okolicy wlotu cieczy do szczeliny jak i wylotu cieczy ze szczeliny, natomiast w znaczący sposób zmienia profil składowej

prędkości poprzecznej V_y . Powstające w przepływie efekty bezwładności powodują wzrost wartości ciśnienia wzdłuż szczeliny.

- wpływ pola magnetycznego manifestujący się wzrostem bezwymiarowej liczby ciśnienia magnetycznego ($RF \neq 0$) powoduje hamowanie składowych prędkości V_x i V_y oraz spadek wartości ciśnienia wzdłuż szczeliny.

LITERATURA

- [1] Neuringer J.L., Rosenszweig R.F.: Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids. 7, 12 1964
- [2] Wiercholski K., Janiszewski R.: Ferromagnetische Gleitlager. Schmierungstechnik 11, 12 1980
- [3] Sawicki J.: Influence of inertial forces on the magnetic fluid flow in a clearance between curvilinear surfaces of revolution. Mechanika Teoretyczna i Stosowana 4, 32 1994

INERTIA EFFECT IN FHD THROUGHFLOW OF VISCOUS FLUID IN A SLOT BETWEEN FIXED SURFACES OF REVOLUTION

Summary

In this paper the steady laminar FHD flow of viscous incompressible is considered between two surfaces of revolution having a common axis of symmetry. The boundary layer FHD equations for axial symmetry are expressed in terms of the intrinsic curvilinear orthogonal coordinate system. The method of perturbation is used to solve the boundary layer equation. As a result we obtained the formulae defining such parameters of the flow as the velocity components and pressure.

BADANIA ZMĘCZENIOWE W PRACACH KATEDRY PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Józef Szala

Wydział Mechaniczny ATR, Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

W artykule dokonano przeglądu tych prac naukowych zrealizowanych przez pracowników Katedry Podstaw Konstrukcji Maszyn ATR, wykonanych w ostatnim 25-leciu, które dotyczyły problematyki zmęczenia materiałów i konstrukcji. Szeroki zakres problematyki tych prac uniemożliwia analizę szczegółowych wyników badań. Przyjęto zatem formę omówienia ważniejszych prac ze wskazaniem publikacji, referatów naukowych, raportów i patentów opracowanych na podstawie badań własnych. W poszczególnych pozycjach literaturowych czytelnik znajdzie szczegółowe dane i wykazy literatury światowej dotyczące poszczególnych zagadnień. Celem zasadniczym tego opracowania jest przedstawienie przewodnika po pracach Katedry oraz wskazanie stosowanych metod badań zmęczeniowych, szczególnie z zakresu oceny trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych na drodze badań eksperymentalnych i obliczeń.

1. WSTĘP

Z jubileuszem 25-lecia PTMTS zbiega się 25-lecie badań nad zmęczeniem materiałów i konstrukcji w Katedrze Podstaw Konstrukcji Maszyn ATR. W szerokim zakresie badań zmęczeniowych, wspomniane badania dotyczyły problematyki związanej z projektowaniem elementów maszyn i konstrukcji ze względu na zmęczenie (fatigue design). Wyniki tych badań opisano w 6 rozprawach doktorskich, 2 habilitacyjnych zrealizowanych w Katedrze, 4 monografiach książkowych, w ponad 100 artykułach i referatach naukowych wygłoszonych na sympozjach krajowych i zagranicznych oraz w ponad 25 raportach z obszerniejszych programów badawczych. Tematykę prac można podzielić na trzy obszary: pierwszy, w którym badano próbki i elementy konstrukcyjne celem oceny konstrukcji i technologii, drugi, w którym badano elementy konstrukcyjne celem oceny ich trwałości zmęczeniowej oraz trzeci, w którym badano próbki i elementy konstrukcyjne celem opracowania skutecznego metod obliczeń i programowanych badań trwałości zmęczeniowej.

W pierwszym obszarze badania dostarczały wyników umożliwiających analizę porównawczą wykresów zmęzeniowych lub granic zmęczenia w ujęciu probabilistycznym. Ujęcie takie dawało możliwość ilościowej oceny odporności na zmęczenie analizowanych rozwiązań konstrukcyjnych i technologicznych oraz co istotne oceny ich jakości.

Drugi obszar badań jest zasadniczym obszarem, w którym podstawowym celem było wyznaczanie rozkładów trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych o probabilistycznym rozkładzie cech (geometrycznych, materiałowych i dynamicznych) z jednej strony i probabilistycznym charakterze wymuszeń zewnętrznych, głównie stochastycznych obciążeń eksploatacyjnych z drugiej strony.

Podstawą opracowania skutecznych metod obliczeń i programowanych badań trwałości zmęczeniowej były badania podstawowe i weryfikacyjne związane przede wszystkim z wyznaczaniem widm i programów obciążeń oraz weryfikacją hipotez sumowania uszkodzeń zmęczeniowych (trzeci obszar badań).

Określony wyżej zakres badań jest tak rozległy, że znacznie przekracza możliwości omówienia w objętości przewidzianej w tym opracowaniu, nawet przy założeniu daleko idących skrótów. Dokonano zatem wyboru istotniejszych zagadnień, które omówione zostaną w zakresie umożliwiającym wskazanie publikacji w których znaleźć można ich szczegółowy opis.

2. OBCIĄŻENIA ZMĘCZENIOWE

Współpraca z Zakładami Rowerowymi "Predom-Romet" w zakresie niezawodności pojazdów jednośladowych stanowiła dobrą podstawę do metodycznego ujęcia badań zmęczeniowych elementów tych pojazdów od rozpoznania warunków eksploatacji przez określenie warunków pomiarów eksploatacyjnych obciążeń, analizę statystyczną, metody schematyzacji losowych obciążeń do opracowania widm i programów obciążeń stosowanych w stanowiskowych badaniach i obliczeniach zmęczeniowych, których celem była ocena eksploatacyjnej trwałości analizowanych elementów.

W wymienionych badaniach określono: warunki drogowe, cechy użytkowników, miejsca, postać i częstotliwość pęknięć zmęczeniowych. Wyniki tych badań opisano m.in. w pracach [A1, A5], [S1, S2, S3]. Analizę statystyczną eksploatacyjnych obciążeń przeprowadzono metodami matematycznej teorii procesów stochastycznych [A26, A31, A68], [R1], [M1, M2].

Z analizy statystycznej eksploatacyjnych obciążeń pojazdów¹ jednośladowych wynikały następujące zasadnicze wnioski mające wpływ na opracowanie widm i programów obciążeń:

- przebiegi obciążeń mają złożony charakter wynikający z oddziaływania różnorodnych czynników, z których dominujące to oddziaływanie nawierzchni drogi, oddziaływanie użytkownika (napęd) oraz wykonywane manewry (głównie hamowanie),
- w ogólności przebiegi te nie spełniały warunku stacjonarności, dla celów praktycznych można dzielić je na odcinki o określonych warunkach, w których założenie stacjonarności było w dostatecznym stopniu spełnione.

Podstawowy wysiłek skierowany był na metody opracowania widm i programów obciążeń. Ze znanych licznych metod schematyzacji losowych przebiegów obciążenia polegających na podziale przebiegu losowego na cykle lub półcykle sinusoidalne należało wybrać te, które odpowiadały charakterowi obciążeń eksploatacyjnych [A2, A3, A6].

Metody opracowania widm i programów obciążeń oraz badania nad wpływem czynników związanych z obciążeniem na postać programów obciążeń opisano w licznych pracach [A7, A12, A13, A14, A15, A19, A20, A21, A29], [M1, M2, M3, M4].

Opracowane dla pojazdów jednośladowych widma i programy obciążeń były podstawą programowanych badań zmęczeniowych na stanowiskach badawczych. Celem zasadniczym tych badań była ocena eksploatacyjnej trwałości elementów tych pojazdów i próby optymalizacji konstrukcji ze względu na trwałość [A8, A9, A11, A16, A18, A32, A36, A38, A41, A42, A43], [S4, S5, S6, S8, S10, S11].

Wyniki badań trwałości zmęczeniowej przedstawiono w postaci wykresów zmęczeniowych: całkowitej liczby cykli do pęknięcia zmęczeniowego w funkcji maksymalnej amplitudy zmian naprężeń w programie obciążeń. Wykresy opracowano w ujęciu probabilistycznym, co umożliwiło wyznaczenie rozkładów trwałości dla odpowiednich poziomów obciążenia, a w konsekwencji dobór optymalnych cech geometrycznych i materiałowych analizowanych elementów i układów.

Dla realizacji programowanych badań zmęczeniowych zaprojektowano w Katedrze PKM i wykonano w pełni zautomatyzowane stanowiska badawcze (w układzie sprzężania zwrotnego) [A47], [A58]. Oryginalne rozwiązania konstrukcyjne zostały opatentowane [P1-P8].

3. HIPOTEZY SUMOWANIA USZKODZEŃ ZMĘCZENIOWYCH

W metodach obliczeniowych wyznaczania trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych poza znajomością widm obciążeń i własności zmęczeniowych materiału niezbędna jest znajomość opisu fenomenologicznego

procesu sumowania uszkodzeń zmęczeniowych [A4, A10, A26, A33], [S7, S9, S12].

Pierwsze prace [A10, A23] dotyczyły weryfikacji znanych hipotez sumowania uszkodzeń zmęczeniowych i wyznaczania zakresów ich zastosowań. Na podstawie badań weryfikacyjnych sformułowano oryginalną hipotezę sumowania uszkodzeń zmęczeniowych opartą na koncepcji linii stałych uszkodzeń zmęczeniowych [A22, A24, A27, A28, A34, A37, A49]. Weryfikacja doświadczalna tej hipotezy wykazała jej zadowalającą zgodność z wynikami eksperymentu, w szeregu przypadkach wyższą niż znanych wcześniej hipotez.

Dla poszerzenia problematyki obliczeń trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych podjęto badania w zakresie propagacji pęknięć zmęczeniowych [A30, A35, A39, A40, A52, A65, A66], [R3]. Sformułowano zalecenia do metod obliczeń uwzględniających etap inicjacji i etap rozwoju pęknięcia zmęczeniowego.

Poza elementami i próbkami stalowymi badania przeprowadzono na próbkach i elementach ze stopu aluminium PA7 [A38, A39, A40] oraz z tworzyw sztucznych. Badania te obejmowały weryfikację hipotez znanych z literatury a sformułowanych dla tworzyw sztucznych [A69] oraz sformułowanie własnej hipotezy [A61].

Współczesne metody obliczeń oparte na danych z zakresu niskocyklowego zmęczenia wymagały ponadto weryfikacji liniowej hipotezy sumowania uszkodzeń dla warunków znacznych odkształceń plastycznych [A73].

Z opisanych w tym punkcie badań wynika, że zarówno dla stopów metali, jak i tworzyw sztucznych nie ma uniwersalnej hipotezy stanowiącej podstawę fenomenologicznego opisu procesu sumowania uszkodzeń zmęczeniowych. Praktycznym osiągnięciem tych badań jest przede wszystkim wyznaczenie obszarów zastosowania wybranych hipotez do obliczeń elementów konstrukcyjnych.

4. METODY OBLICZENIOWE TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ

Metody obliczeń trwałości zmęczeniowej można podzielić na trzy grupy: naprężeniowe - skuteczne dla zakresu wysokocyklowego zmęczenia, w warunkach odkształceń sprężystych, odkształceniowe i energetyczne dla zakresu niskocyklowego i wysokocyklowego zmęczenia w warunkach występowania przeciążeń powodujących znaczne odkształcenia plastyczne w obszarach karbów.

W pierwszej grupie metod na uwagę zasługują prace [A60] i [R6], w których opisano zastosowanie hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych opartej na koncepcji linii stałych uszkodzeń do obliczeń rozkładu trwałości metodą symulacji komputerowej.

Współczesne metody obliczeń, oparte na założeniu występowania odkształceń plastycznych na dnie karbu, wymagały weryfikacji doświadczalnej i szeregu szczegółowych badań dla określenia wpływu czynników związanych z obciążeniem zmęczeniowym i rozkładem odkształceń plastycznych na trwałość zmęczeniową. Dane materiałowe z zakresu niskocyklowego zmęczenia umożliwiają opracowanie metod obliczeń odkształceniowych, jak i energetycznych. W tym zakresie badania opisano w pracach [A63, A67, A70, A71, A72, A74, A75, A76, A77, A78, A79, A80].

Z analizy wyników badań opisanych w wymienionych wyżej pracach wynika, że na trwałość zmęczeniową wyznaczoną na drodze obliczeń ma wpływ:

- *rozkład odkształceń w karbie (gradient odkształceń - badania w warunkach zmiennego płaskiego zginania),*
- *przeciążenia - zakłócające stan stabilizacji materiału,*
- *ocena wpływu działania karbu (współczynniki spiętrzania naprężeń i odkształceń).*

Z porównania metod odkształceniowych i energetycznych wynika większa zgodność wyników obliczeń z eksperymentem dla metod energetycznych [R8], [S12].

5. PROBLEMATYKA ZŁOŻONYCH STANÓW NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

W rzeczywistych warunkach użytkowania maszyn zmęczeniowe pękanie elementów konstrukcyjnych zachodzi w ogólności w złożonych stanach naprężenia i odkształcenia. Stany te wynikać mogą ze złożonych obciążeń lub złożonych kształtów tych elementów. Dla rozpoznania zjawisk zachodzących w złożonych stanach naprężeń i odkształceń podjęto badania zmęczeniowe w warunkach zmiennego skręcania [R3], [A57], w warunkach obciążenia osiowego, skręcania i zmiennego obciążenia ciśnieniem odzerowo-tętniącym [R7], [A63] oraz w warunkach jednoczesnego zginania ze skręcaniem [A88]. Badania te prowadzono w warunkach synchronicznych i asynchronicznych przebiegów zmiennych składowych. Na uwagę szczególną zasługują badania w warunkach asynchronicznego obciążenia oraz próba analizy wpływu anizotropii naprężeniowej na trwałość zmęczeniową próbek stalowych [A89].

Do istotnych rezultatów badań w złożonych stanach naprężeń i odkształceń zaliczyć można:

- *sformułowanie opisu rozwoju pęknięć zmęczeniowych w warunkach zmiennego skręcania,*
- *identyfikacja obrazów mikro- i makrofraktograficznych pęknięć zmęczeniowych w warunkach złożonego stanu obciążenia z występującymi przesunięciami fazowymi,*

- *sformułowanie warunku wytrzymałości zmęczeniowej w złożonym stanie przesuniętych fazowo obciążeń zmęczeniowych,*
- *opracowanie oryginalnej metodyki i stanowiska badawczego umożliwiającego realizację badań z złożonym stanie obciążeń przesuniętych fazowo.*

6. BADANIA ZMĘCZENIOWE TWORZYW SZTUCZNYCH

Szerokie zastosowanie tworzyw sztucznych w budowie maszyn także na elementy poddane cyklicznym obciążeniom zmęczeniowym powoduje podjęcie szerokich programów badań zmęczeniowych w różnych ośrodkach w świecie. W Katedrze PKM podjęto badania mieszczące się w ogólnym programie badań trwałości zmęczeniowej i opracowania na ich tle skutecznych metod obliczeń trwałości zmęczeniowej w warunkach obciążeń losowych i programowanych [R4], [A45, A46, A50, A54, A82, A84].

Opracowanie metod obliczeń zmęczeniowych elementów wykonanych z tworzyw sztucznych wymagało podjęcia badań szczególnie w zakresie analizy energii dyssypacji [A81, A83, A85, A86, A87, A90].

Na podstawie wyników badań zmęczeniowych tworzyw sztucznych dokonano:

- *doświadczalnej weryfikacji hipotez kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych Palmgrena-Minera, Brautmana-Salin'a, Owena-Howe'a czy Tanimota-Amijimy stwierdzając ich ograniczony zakres zastosowania,*
- *sformułowania i weryfikacji hipotezy statystycznej, określającej trwałość zmęczeniową na podstawie wyników badań przy obciążeniu stałoamplitudowym i parametrów widma obciążenia o pewnej uniwersalności,*
- *sformułowania i weryfikacji hipotezy opartej na liniach stałych uszkodzeń zmęczeniowych dla tworzyw konstrukcyjnych, termoplastycznych wykazujących obszary zmęczenia cieplnego i mechanicznego, wykazując dobrą zgodność wyników obliczeń i badań,*
- *oceny zmienności podstawowych wskaźników energetycznych (energii dyssypacji, energii odkształcenia sprężystego, modułu dynamicznego) w badaniach zmęczeniowych laminatów poliestrowych i poliamidu wzmocnionego krótkim włóknem szklanym tworząc podstawę do określenia energetycznej metody oceny trwałości zmęczeniowej tworzyw sztucznych,*
- *określenia przyspieszonej metody oceny trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych wykonanych z tworzyw na podstawie ich zachowań energetycznych w warunkach obciążeń stałoamplitudowych i ze stopniowo narastającą amplitudą.*

7. PODSUMOWANIE

Skrócony opis badań zamieszczony w poprzednich punktach nie wyczerpuje w całości tematyki badań. Z pozostałych należy wymienić prace nad przyspieszonymi metodami wyznaczania granicy zmęczenia [A17, A53, A54, A55] i jej probabilistyczny opis [A56, A64]. Badania rurowych złączy spawanych podjęto ze względów praktycznych oceny trwałości i jakości ram pojazdów jednośladowych [R5], [A48, A51].

Całościowy i szerszy opis zagadnień trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych także w ujęciu probabilistycznym charakterystycznym dla tych zagadnień zamieszczono w monografiach [M1-M4], ostatnia monografia [M4] ma także ujęcie dydaktyczne przez bogatą ilustrację zagadnień teoretycznych praktycznymi przykładami.

Z dotychczasowych doświadczeń wynika, że ujęcie energetyczne w ocenie trwałości zmęczeniowej ma bardziej uniwersalny charakter, zarówno w odniesieniu do rodzajów obciążeń, jak i rodzajów tworzyw konstrukcyjnych. Badania nad zjawiskami energetycznymi towarzyszącymi procesowi zmęczenia stanowią bliższą i dalszą perspektywę programów badawczych Katedry Podstaw Konstrukcji Maszyn. Aktualnie i w bliskiej przyszłości prowadzone są badania nad zjawiskami zachodzącymi w karbie, a ściślej w małych obszarach dna karbu. Stosowana w tych badaniach metoda laserowej interferometrii siatkowej o wysokiej dokładności pomiaru odkształceń jest podstawowym narzędziem w zakresie eksperymentu, natomiast metoda elementów skończonych podstawowym narzędziem analiz numerycznych.

WYKAZ LITERATURY

Monografie:

- M1. Szala J.: Podstawy programowanych badań i obliczeń zmęczeniowych w konstrukcji maszyn. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1978
- M2. Szala J.: Badania i obliczenia zmęczeniowe elementów maszyn w warunkach obciążeń losowych i programowanych. Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki, PAN, nr 6, Warszawa 1979
- M3. Kocańda S., Szala J.: Podstawy obliczeń zmęczeniowych. PWN Warszawa, Wyd. I - 1985, Wyd. II - 1995
- M4. Szala J.: Obciążenia i trwałość zmęczeniowa elementów maszyn, ATR, Bydgoszcz 1989

Rozprawy:

- R1. Szala J.: Zastosowanie wybranych metod aproksymacji losowych zmian naprężeń do wyznaczania trwałości zmęczeniowej. Politechnika Poznańska, Wydział Maszyn Roboczych i Pojazdów, 1975

- R2. Szala J.: Ocena trwałości zmęczeniowej elementów maszyn w warunkach obciążeń losowych i programowanych, ATR Bydgoszcz, Zeszyty Naukowe nr 79, Mechanika 22, 1980
- R3. Sempruch J.: Rozwój pęknięć zmęczeniowych w cylindrycznych próbkach stalowych w warunkach zmiennego skręcania. Politechnika Częstochowska, Wydział Budowy Maszyn, 1983
- R4. Topoliński T.: Ocena trwałości zmęczeniowej itamidu 35 w warunkach obciążeń stochastycznych i programowanych. Politechnika Gdańska, Instytut Okrętowy, 1986
- R5. Przybyliński B.: Trwałość zmęczeniowa elementów konstrukcyjnych spawanych, Politechnika Gdańska, Wydział Budowy Maszyn, 1988
- R6. Zawiślak S.: Wyznaczanie rozkładów trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych z zastosowaniem hipotezy linii stałych uszkodzeń zmęczeniowych metodą symulacji komputerowej. Politechnika Gdańska, Wydział Budowy Maszyn, 1990
- R7. Sempruch J.: Kryterium wytrzymałości zmęczeniowej stali konstrukcyjnej 25 CrMo4 w warunkach złożonego stanu naprężenia. Akademia Techniczno-Rolnicza. Bydgoszcz 1992
- R8. Mroziński S.: Analiza porównawcza niskocyklowego zmęczenia stali 45 w warunkach obciążenia osiowego i płaskiego zginania. Akademia Techniczno-Rolnicza, Wydział Mechaniczny, Bydgoszcz 1995

Artykuły i referaty naukowe:

- A1. Jazdon A., Szala J.: Badanie niezawodności i trwałości motorowerów i rowerów, WSI, Zeszyty Naukowe Nr 2, Bydgoszcz 1971
- A2. Szala J.: Rzeczywiste widma obciążeń i ich aproksymacja. Materiały I Sympozjum Zespołu Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN, WSI, Lublin 1973
- A3. Szala J.: Trwałość zmęczeniowa konstrukcji - wybrane zagadnienia, WSI, Zeszyty Naukowe Nr 6, Bydgoszcz 1973
- A4. Szala J.: Obliczenia trwałości zmęczeniowej układów w oparciu o wybrane hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych i ich doświadczalna weryfikacja, WSI, Zeszyty Naukowe Nr 9, Mechanizacja-Eksploatacja (5), 1974, s. 117-137
- A5. Szala J.: Aktualny stan i perspektywy rozwoju eksploatacyjnych badań niezawodności pojazdów jednośladowych. Materiały Ogólnopolskiego sympozjum naukowo-technicznego nt. "Rozwój konstrukcji roweru w Polsce", Zakłady Rowerowe "Predom-Romet" w Bydgoszczy, Ośrodek Badawczo-Rozwojowy Pojazdów Jednośladowych w Bydgoszczy, Naczelna Organizacja Techniczna Oddział Wojewódzki w Bydgoszczy, 1974, s.97-112
- A6. Szala J.: Zagadnienie aproksymacji zmian obciążeń o charakterze losowym w programowanych badaniach trwałości zmęczeniowej ATR, Zeszyty Naukowe Nr 26, Mechanika 11, Bydgoszcz 1975, s. 141-167
- A7. Szala J.: Wybrane zagadnienia z programowania obciążeń zmiennych na stanowiskach do badań zmęczeniowych, ATR, Zeszyty Naukowe Nr 18, Mechanika 9, Bydgoszcz 1975, s.37-48
- A8. Szala J.: Ocena konstrukcji ramy rowerowej typu -1264 w oparciu o kryterium obciążenia i ciężaru, ATR, Zeszyty Naukowe Nr 18, Mechanika 9, Bydgoszcz 1975, s. 49-56
- A9. Szala J.: Ocena eksploatacyjnej trwałości zmęczeniowej na podstawie wyników badań stanowiskowych, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej Nr 241, Zeszyt Specjalny nr 11, 1975
- A10. Szala J.: Materiały Międzynarodowego Kolokwium nt.: Zmęczenie Metali, wydane przez PAN Zespół Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn, Jabłonna, 1975, s. 54-55
- A11. Szala J.: Niektóre zagadnienia przyspieszania badań trwałości zmęczeniowej układów ATR, Zeszyty Naukowe nr 37, Mechanika 13, Bydgoszcz 1976

- A12. Jazdon A., Szala J., Wojciechowicz B.: Programowanie badania niezawodności i trwałości obiektów technicznych, ATR, Zeszyty Naukowe Nr 7, Mechanika 17, Bydgoszcz 1977
- A13. Szala J.: Zagadnienia oceny eksploatacyjnej trwałości zmęczeniowej. ATR, Materiały II Sympozjum Zespołu Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji, PAN, Lublin 1977, s.5-9
- A14. Szala J., Zawisłak S.: Wybrane zagadnienia programowanych badań zmęczeniowych. Materiały III Sympozjum Zespołu Materiałów i Konstrukcji, Komitet Budowy Maszyn PAN, Lublin 1977
- A15. Kasprówic Z., Szala J., Wocianiec R.: Widma obciążeń elementów pojazdów jednośladowych. ATR, Materiały II Sympozjum Zespołu Materiałów i Konstrukcji, Komitet Budowy Maszyn PAN, Lublin 1977
- A16. Kasprówic Z., Szala J., Zawisłak K.: Konstrukcyjne badania zmęczeniowe maszyn. ATR, Zeszyty Naukowe Nr 45, Mechanika 15 VII Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn, Bydgoszcz - Golub-Dobrzyń 6-9.IX.1977, s.171-174
- A17. Kasprówic Z., Szala J.: Możliwości stosowania metody Locati w badaniach zmęczeniowych elementów pojazdów jednośladowych. Materiały Sympozjum nt.: "Naukowe problemy konstrukcji, technologii i eksploatacji maszyn", ATR, Bydgoszcz 1977
- A18. Szala J., Zawisłak K.: Wpływ konstrukcyjnych cech materiałowych na trwałość łożysk specjalnych stosowanych w pojazdach jednośladowych. Materiały Sympozjum nt. "Naukowe problemy konstrukcji, technologii i eksploatacji maszyn", ATR, Bydgoszcz 1977
- A19. Szala J.: The Effect of Load Sequence on Fatigue Life The Fourth Colloquium on Fatigue, Czechoslovak Academy of Sciences, Institute of Physical Metalurgy, Brno 1977, s. 62-64
- A20. Szala J.: Wpływ naprężeń o wartościach mniejszych od nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej na trwałość zmęczeniową. Bydgoskie Towarzystwo Naukowe, Prace Wydziału Nauk Technicznych, Seria B, Nr 10, PWN Warszawa-Poznań 1978
- A21. Szala J.: Wpływ sekwencji obciążeń na trwałość zmęczeniową, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 2, 16, 1978
- A22. Szala J.: Kumulation von Ermüdungschden unter den Bedingungen programmierter Belastungen. V Internationales Colloguium "Mechanische Ermüdung von Metallen", Dresden 1979
- A23. Szala J.: Weryfikacja doświadczalna liniowej i uogólnionej hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych. IX Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa 1980
- A24. Sempruch J., Szala J.: Kumulacja uszkodzeń zmęczeniowych w warunkach obciążeń programowanych, Bydgoskie Towarzystwo Naukowe, Prace Wydziału Nauk Technicznych, Seria B, Nr 12, PWN Warszawa-Poznań 1980
- A25. Kugler J., Szala J.: Ocena statystyczna obciążeń eksploatacyjnych pojazdów mechanicznych, Bydgoskie Towarzystwo Naukowe, Prace Wydziału Nauk Technicznych, Seria B, Nr 13, PWN Warszawa-Poznań 1981
- A26. Szala J.: Ocena trwałości zmęczeniowej w warunkach obciążeń losowych o szerokim widmie. Rozprawy Inżynierskie, Engineering Transactions, 28, 4, 555-567, PAN, Instytut Podstawowych Problemów Techniki (wydano w 1982)
- A27. Szala J.: Sumowanie uszkodzeń zmęczeniowych w warunkach naprężeń stochastycznych i programowanych. PWN Warszawa, Archiwum Budowy Maszyn, Tom XXVIII, Zeszyt 4 1981
- A28. Szala J.: Hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych oparte na liniach stałych uszkodzeń zmęczeniowych. ATR, Zeszyty Naukowe Nr 89, Mechanika 23, Bydgoszcz 1981
- A29. Szala J., Zawisłak K.: Programowane badania zmęczeniowe pojazdów jednośladowych. ATR, Zeszyty Naukowe Nr 90, Mechanika 24, Bydgoszcz 1981

- A30. Sempruch J., Szala J.: Badania trwałości zmęczeniowej próbek cylindrycznych wykonanych ze stali 10 przy skręcaniu. ATR, Zeszyty Naukowe Nr 89, Mechanika 23, Bydgoszcz 1981
- A31. Kugler J., Szala J.: Ocena statystyczna obciążeń eksploatacyjnych pojazdów mechanicznych. Bydgoskie Towarzystwo Naukowe, Prace Wydziału Nauk Technicznych, Seria B, 1981, Nr 13
- A32. Sempruch J., Szala J.: Analiza statystyczna wyników badań zmęczeniowych, Bydgoskie Towarzystwo Naukowe, Prace Wydziału Nauk Technicznych, Seria B, 1982, Nr 14
- A33. Szala J.: O pewnej metodzie obliczeń elementów konstrukcyjnych na zmęczenie w warunkach obciążeń stochastycznych, Archiwum Budowy Maszyn, Tom XXIX, 1982, Zeszyt 3-4
- A34. Szala J.: Summiowanie ustalośnych..., Naukowa Dumka, Kiev 1983
- A35. Szala J., Topoliński T.: Obliczenia elementów konstrukcyjnych przy obciążeniach stochastycznych oparte na koncepcji dwuetapowego przebiegu procesu zmęczenia ATR Bydgoszcz, Materiały XI Sympozjum Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Warszawska 1983
- A36. Szala J.: Wybrane zagadnienia oceny trwałości zmęczeniowej w konstrukcji maszyn. Sesja Naukowa z okazji 40-lecia Wydziału Budowy Maszyn Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1985
- A37. Szala J.: Hipotezy sumowania uszkodzeń zmęczeniowych wybrane zagadnienia. Mechanika, Bydgoskie Towarzystwo Naukowe, Prace Wydziału Nauk Technicznych, Seria B Nr 15, PWN Warszawa-Poznań 1986
- A38. Szala J., Topoliński T.: Badania zmęczeniowe próbek ze stopu PA7 przy obciążeniu sinusoidalnym i stochastycznym, Mechanika, Bydgoskie Towarzystwo Naukowe, Prace Wydziału Nauk Technicznych, Seria B, Nr 16, PWN Warszawa-Poznań 1986
- A39. Szala J., Topoliński T.: Obliczenia elementów konstrukcyjnych przy obciążeniach stochastycznych dla etapu do mijającej pęknięcia zmęczeniowego. ATR, Zeszyty Naukowe Nr 137, Mechanika 30, Bydgoszcz 1986
- A40. Szala J., Topoliński T.: Obliczenia elementów konstrukcyjnych w warunkach obciążeń stochastycznych dla etapu rozwoju pęknięcia zmęczeniowego. ATR, Zeszyty Naukowe Nr 137, Mechanika 30, Bydgoszcz 1986
- A41. Szala J.: Trwałość zmęczeniowa elementów maszyn w ujęciu probabilistycznym. ATR, Bydgoszcz, Materiały XII Sympozjum Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Lubelska, 1985
- A42. Sempruch J., Szala J., Topoliński T.: Badania zmęczeniowe elementów pojazdów jednośladowych, ATR, Bydgoszcz, Materiały XII Sympozjum Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Lubelska, 1985
- A43. Szala J.: The Fatigue Life Evaluation of Machine Parts. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Nr 403, Budownictwo Okrętowe XLIII, 1986, Mechanical Fatigue of Metals, Proceedings of the VIII-th International Colloquium, Gdańsk 3-6.09.1985
- A44. Sempruch J., Szala J.: Fatigue Crack Growth in Cylindrical Steel Specimens Subject to Variable Torsion. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Nr 403, Budownictwo Okrętowe XLIII, 1986, Mechanical Fatigue of Metals, Proceedings of the VIII-th International Colloquium, Gdańsk 3-6.09.1985
- A45. Szala J., Topoliński T.: Wpływ obciążenia programowanego dwustopniowego na przebieg zmian temperatury samowzbudnej w badaniach próbek z itamidu 353. XII Sympozjum Doswiadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa-Jadwisin 8.10.1986
- A46. Szala J., Topoliński T.: Effect of Chosen Factors Connected with Programmed Loading on Fatigue Life of Short Glass Fiber Reinforced Polyamide. The Archive of Mechanical Engineering, 1987, Zeszyt 3
- A47. Bieliński K., Szala J., Topoliński T.: Stanowisko do badań zmęczeniowych elementów konstrukcyjnych pojazdów jednośladowych - wyniki badań. XIII Sympozjum Podstaw Konstrukcji Maszyn, Świnoujście 17-20.09.1987

- A48. Przybyliński B., Szala J.: Trwałość zmęczeniowa rurowych połączeń spawanych. XIII Sympozjum Podstaw Konstrukcji Maszyn, Świnoujście 1987.09.17-20
- A49. Szala J., Zawisłak S.: Probabilistic Approach to Fatigue Life Computation by Means of Constant Damage Lines Hypothesis. The Ninth International Colloquium on Mechanical Fatigue of Metals, Smolenice SSR 1987
- A50. Szala J., Topoliński T.: Obliczenia trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych z tworzyw sztucznych. Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Rozprawy Inżynierskie, Engineering Transactions, 36, 1, 117-131, 1988
- A51. Przybyliński B., Szala J.: Współczynnik działania karbu rurowych połączeń spawanych. ATR, Zeszyty Naukowe Nr 144, Mechanika 31, Bydgoszcz 1988
- A52. Sempruch J., Szala J.: Ocena trwałości na etapie rozwoju pęknięcia zmęczeniowego warunkach zmiennego skręcania. XIII Sympozjum Mechaniki Doświadczalnej Ciała Stałego, Warszawa 11-13.10. 1988
- A53. Szala J., Topoliński T.: Modyfikacja określenia granicy zmęczenia metodą Locati. XIII Sympozjum Mechaniki Doświadczalnej Ciała Stałego, Warszawa 11-13.10.1988
- A54. Szala J.: Zastosowanie programowanych badań zmęczeniowych do wyznaczania granicy zmęczenia, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 3, 26 (1988)
- A55. Szala J.: Zagadnienie równowaznej amplitudy naprężeń w ocenie trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych. Mechanika Teoretyczna i Stosowana 2, 26 (1988)
- A56. Przybyliński B., Szala J., Zawisłak S.: Prawdopodobieństwo zniszczenia zmęczeniowego elementów konstrukcyjnych w zakresie nieograniczonej trwałości. ATR, Zeszyty Naukowe Nr 144, Mechanika 31, Bydgoszcz 1988
- A57. Sempruch J., Szala J.: Trwałość zmęczeniowa elementów konstrukcyjnych w warunkach złożonego stanu naprężeń. XIV Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn, Poznań - Kiekrz 1989.10.24-27, Zakład Podstaw Konstrukcji Maszyn, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej
- A58. Bieliński K., Sempruch J., Szala J., Topoliński T.: Stanowisko do badań zmęczeniowych ram pojazdów jednośladowych - możliwości prowadzenia ocen ilościowych oraz jakościowych. XIV Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn, Poznań - Kiekrz 1989.10.24-27, Zakład Podstaw Konstrukcji Maszyn, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej
- A59. Szala J., Topoliński T.: Ocena trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych wykonanych z tworzyw sztucznych oparta na wybranych hipotezach kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych. XIV Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn, Poznań - Kiekrz 1989.10.24-27, Zakład Podstaw Konstrukcji Maszyn, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej
- A60. Szala J., Zawisłak S.: Application of Computer Simulation Method for Determining a Distribution Type of Construction Parts Patigue Life. The Archive of Mechanical Engineering, 1990, Zeszyt 3
- A61. Szala J., Topoliński T.: Obliczenia trwałości zmęczeniowej itamidu 35 oparte na hipotezie linii stałych uszkodzeń zmęczeniowych. Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Rozprawy Inżynierskie, Engineering Transactions, 38, 3-4, 415-428, 1990
- A62. Sempruch J., Szala J.: Multiaxial fatigue stress state - the theoretical analysis of the influence of phase angles various. Polish Academy of Sciences, Institute of Fundamental Technological Research, 28th Polish Solid Mechanics Conference, Kozubnik, 4-8 September 1990
- A63. Mroziński S., Szala J.: Metodyka i stanowisko do badań w zakresie niskocyklowego zmęczenia w próbie obrotowego zginania. XIV Sympozjum Mechaniki Doświadczalnej Ciała Stałego, Warszawa 10-12.10. 1990
- A64. Przybyliński B., Szala J.: Probabilistyczny opis granicy zmęczenia elementów konstrukcyjnych spawanych. ATR, Zeszyty Naukowe Nr 162, Mechanika 34, Bydgoszcz 1990

- A65. Sempruch J., Szala J.: Wpływ poziomu naprężeń zmiennych na prędkość i kąt rozwoju pęknięć zmęczeniowych w warunkach zmiennego skręcania ATR, *Zeszyty Naukowe Nr 162, Mechanika 34, Bydgoszcz 1990*
- A66. Sempruch J., Szala J.: Wpływ przesunięć fazowych składowych złożonego stanu obciążenia zmiennego na cechy złomu zmęczeniowego. IV Konferencja Mechaniki Procesów Technologicznych, Kielce-Borków 1991
- A67. Mroziński S., Szala J.: Zmęczenie niskocyklowe stali 45 w warunkach obrotowego zginania. XV Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka 8-10.10.1992
- A68. Przybyliński B., Szala J., Zawisłak S.: Wybrane zagadnienia z analizy obciążeń zmęczeniowych elementów maszyn. ATR, *Zeszyty Naukowe Nr 173, Mechanika 35, Bydgoszcz 1992*
- A69. Szala J., Topoliński T.: Ocena trwałości zmęczeniowej tworzyw sztucznych na podstawie wybranych hipotez kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych, *Mechanika XVII, Bydgoskie Towarzystwo Naukowe, Prace Wydziału Nauk Technicznych, Bydgoszcz 1993*
- A70. Mroziński S., Szala J.: Niskocyklowe badania zmęczeniowe w warunkach obrotowego zginania - stanowisko badawcze oraz wybrane wyniki badań. ATR, *Zeszyty Naukowe Nr 184, Mechanika 36, Bydgoszcz 1994*
- A71. Mroziński S., Szala J.: An analysis of the influence of Overloads on the Fatigue Life of 45-Steel Within the Range of Low-Cycle Fatigue. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 3, 31, 1993*
- A72. Szala J.: Doświadczalna weryfikacja modeli stosowanych w obliczeniach trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych. XVI Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka 12-14.10. 1994
- A73. Boroński D., Szala J.: Kumulacja odkształceń plastycznych w warunkach niskocyklowego zmęczenia. XVI Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka 12-14.10.1994
- A74. Mroziński S., Szala J.: Plane Bending Low-Cycle Fatigue Investigations of 45-Steel. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1, 33, 1995*
- A75. Mroziński S.: Zmęczenie niskocyklowe stali 45 w warunkach przeciążeń przy osiowym obciążeniu i zginaniu. XV Seminarium Międzysekcyjnego Zespołu Zmęczenia i Mechaniki Pękania Materiałów i Konstrukcji, Bydgoszcz 1994
- A76. Mroziński S.: Wybrane zagadnienia niskocyklowego zmęczenia stali konstrukcyjnych. *Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej z serii Mechanika, T.13, Z.3, Kraków 1994*
- A77. Mroziński S.: Analiza porównawcza niskocyklowego zmęczenia stali 45 w warunkach obciążenia osiowego i płaskiego zginania. VI Konferencja Naukowa Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa 1994
- A78. Mroziński S.: Niskocyklowe zmęczenie w warunkach obciążenia osiowego i zginania. *Przegląd Mechaniczny (artykuł przyjęty do druku w 1995)*
- A79. Mroziński S.: Analiza niskocyklowego zmęczenia stali 45 w warunkach obciążenia osiowego i płaskiego zginania. Praca doktorska, Wydział Mechaniczny ATR, Bydgoszcz 1995
- A80. Boroński D.: Efekt kumulacji odkształceń w warunkach obciążeń okresowych i nieregularnych w zakresie niskocyklowego zmęczenia. XV Seminarium Międzysekcyjnego Zespołu Zmęczenia i Mechaniki Pękania Materiałów i Konstrukcji, Bydgoszcz 1994
- A81. Topoliński T.: Metoda przyspieszonych badań zmęczeniowych laminatów poliestrowych, XV Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka Warszawa 1992, s. 248-252
- A82. Topoliński T., Weiner W.: Badania zmęczeniowe ogniwa przenośnika do zboża. V Konferencja nt. "Nowe kierunki modyfikacji i zastosowań tworzyw sztucznych", Rzydzyna-Poznań 1992

- A83. Topoliński T.: Analiza zmienności wskaźników energetycznych w procesie zmęczenia tworzyw poliestrowych wzmocnionych. VII Seminarium "Tworzywa sztuczne w budowie maszyn", Kraków 1994, s. 383-388
- A84. Topoliński T.: O pewnej metodzie przyspieszonej oceny bezpiecznej trwałości zmęczeniowej tworzyw konstrukcyjnych. VII Seminarium "Tworzywa sztuczne w budowie maszyn", Kraków 1994, s. 389-394
- A85. Topoliński T.: Zmienność wielkości energetycznych w procesie zmęczenia laminatów poliestrowych. IV Konferencja Naukowo Techniczna "Konstrukcja, Technologia i Eksploatacja Maszyn", Bydgoszcz 1992
- A86. Topoliński T.: Zmęczeniowe charakterystyki energetyczne próbek z poliestru zbrojonego włóknem szklanym. XIV Seminarium Zespołu Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji, Bydgoszcz 1992
- A87. Topoliński T.: Zmienność energii dyssypacji i energii odkształcenia sprężystego w procesie zmęczenia poliestrowych tworzyw konstrukcyjnych. XVI Sympozjon PKM, Szczyrk - Warszawa 1993
- A88. Cichański A., Sempruch J., Topoliński T.: Trwałość zmęczeniowa w warunkach złożonego stanu odkształcenia - sformułowanie problemu i pierwsze wyniki. XV Seminarium Międzysekcyjnego Zespołu Zmęczenia i Mechaniki Pękania i Konstrukcji KBM PAN, Bydgoszcz 1992
- A89. Cichański A., Sempruch J., Topoliński T.: Możliwości uzyskiwania próbek płaskich odkształconych plastycznie w zmiennym kierunku - praktyczna realizacja i obliczenia MES. XV Seminarium Międzysekcyjnego Zespołu Zmęczenia i Mechaniki Pękania i Konstrukcji KBM PAN, Bydgoszcz 1994
- A90. Topoliński T.: Zmęczeniowe charakterystyki energetyczne dla próbek z laminatu poliestrowego w warunkach obciążeń o stopniowo narastającej amplitudzie. XV Seminarium Międzysekcyjnego Zespołu Zmęczenia i Mechaniki Pękania i Konstrukcji KBM PAN, Bydgoszcz 1994

Raporty:

- S1. Sprawozdanie z I i II etapu badań eksploatacyjnych rowerów typ 1264 "DELTA" przeprowadzonych w latach 1970-1971, GP-65/70, 1971
- S2. Sprawozdanie z eksploatacyjnych badań niezawodności i trwałości motorowerów "KOMAR-2" przeprowadzonych w latach 1970-1971, GP-65/70, 1971
- S3. Sprawozdanie z eksploatacyjnych badań niezawodności i trwałości rowerów typ 1264 "DELTA" przeprowadzonych w latach 1970-1972, GP-65/70, 1972
- S4. Optymalizacja konstrukcji ram jednobelkowych (otwartych) dla rowerów, motorowerów i motocykli do 100 cm³, GP-1/74, 1976
- S5. Badania zmęczeniowe wybranych ram rowerowych, BZ-1/74 T.5⁴, 1976
- S6. Badania trwałości łożysk piast kół rowerowych, BZ-1/74 T.4, 1976
- S7. Obliczenia elementów i układów na zmęczenie przy obciążeniach losowych i programowanych, BZ-38/76/PW-20/76, 1978
- S8. Opracowanie metod przyspieszonych badań zmęczeniowych elementów pojazdów jednośladowych, BZ-23/77, 1981
- S9. Obliczenia i badania zmęczeniowe elementów konstrukcyjnych w warunkach obciążeń losowych i programowanych, BZ-22/81, 1986
- S10. Badania zmęczeniowe elementów, węzłów konstrukcyjnych i materiałów stosowanych w pojazdach jednośladowych, BZ-33/84, 1987
- S11. Badania zmęczeniowe zespołów rama i widelec rowerów wybranych typów, BZ-34/84, 1988
- S12. Trwałość zmęczeniowa elementów maszyn w warunkach obciążeń okresowych i nieregularnych. PB 7 1282 91 01, 1994

Patenty:

- P1. Rama rowerowa, patent nr 72 135, świadectwo autorskie nr 59 281, Warszawa, 24 stycznia 1975
- P2. Zamek ramy roweru składanego, patent nr 97 139, świadectwo autorskie nr 116 107, Warszawa, 25.09.1978
- P3. Stanowisko do przeprowadzenia badań trwałości zęczeniowej ram pojazdów, zwłaszcza jednośladowych, patent nr 99 479, świadectwo autorskie nr 122 216, Warszawa, 5.02.1979
- P4. Stanowisko do badań zęczeniowych próbek rurowych i elementów konstrukcyjnych, zwłaszcza widelców rowerowych, patent nr 160 309, świadectwo autorskie nr 290 622, Warszawa, 25.01.1994
- P5. Mechanizm regulacji przemieszczeń zwłaszcza do sterowania amplitudą drgań w wibratorze mechanicznym do badań zęczeniowych ram pojazdów jednośladowych, patent nr 160 307, świadectwo autorskie nr 290 616, Warszawa, 25.01.1994
- P6. Stanowisko do badań zęczeniowych ram pojazdów jednośladowych, zwłaszcza motorowerów i motocykli, patent nr 160 308, świadectwo autorskie nr 290 618, Warszawa, 25.01.1994
- P7. Stanowisko do badań zęczeniowych ram pojazdów jednośladowych, zwłaszcza rowerów, patent nr 160 565, świadectwo autorskie nr 291 440, Warszawa, 21.12.1993
- P8. Wibrator mechaniczny, zwłaszcza do badań ram pojazdów jednośladowych, patent nr 159 704, świadectwo autorskie nr 288 716, Warszawa, 8.12.1993

Fatigue Researches in Works of Department of Machine Design

Summary

A review of these scientific works, performed by the workers of Department of Machine Design of University of Technology and Agriculture in Bydgoszcz, in the last 25 years, which concern the problem of a fatigue of materials and constructions has been made in the paper.

A wide range of these works makes in possible an analysis of detailed results. Therefore, the from of discussion of some more important works - the scientific publications, papers, reports and patents was accepted. A reader can find more details in the individual literature items or in a list of the world literature concerning the individual problems. A fundamental purpose of this elaboration is to present a guide over the works of Department and to point the used, fatigue research methods, especially in a range of fatigue life estimation of the structural parts as a result from the experimental researches and computations

WPROWADZENIE DO PŁASKIEGO PROBLEMU W MECHANICE WŁÓKNOKOMPOZYTÓW

Romuald Świtka

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR, Katedra Mechaniki Budowli
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

Wykorzystując wyniki uzyskane w pracy [4] wyprowadzono związki fizyczne dla dwuwymiarowego zadania teorii sprężystości włóknokompozytów. Dla przypadku szczególnego kompozytu wzmocnionego dwoma rodzinami włókien tworzącymi siatkę ortogonalną podano równania przemieszczeniowe oraz równania naprężeniowe.

1. WSTĘP

Teoria kompozytów, w szczególności włóknokompozytów, powstała na gruncie poszukiwań nowych materiałów na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych bieżącego stulecia. Rozwój mechaniki kompozytów został zwieńczony wieloma monografiami, między innymi [1, 2, 3, 5], w których materiał kompozytowy, w tym również włóknokompozytowy, jest traktowany jako anizotropowy ośrodek jednorodny. Podstawowym problemem jest wyznaczenie stałych sprężystości ciała anizotropowego, będącego modelem kompozytu. Tak zwane efektywne moduły (lub efektywne związki konstytutywne) na ogół wyznacza się rozwiązując zagadnienie brzegowe (lub początkowo-brzegowe) dla podstawowego powtarzalnego elementu struktury kompozytu.

M.H. Dato w przedmowie do monografii [2] rozróżnia dwa typy tworzyw wzmocnionych włóknami. W pierwszym typie matryca wzmocniona jest krótkimi włóknami, które na ogół rozłożone są w sposób bezładny. Drugi typ włóknokompozytu składa się z matrycy oraz długich i ciągłych włókien. Niniejsza praca dotyczy tego drugiego typu. Przyjmujemy, że włókna rozłożone są równomiernie i gęsto wzdłuż dowolnej liczby rodzin prostych równoległych.

Jest rzeczą oczywistą, że obecność włókien wzmocniających w matrycy generuje niejednorodność i anizotropię materiału. Dotychczasowe teorie włóknokompozytów koncentrowały się na metodach wyznaczania modułów zastępczych.

W pracy [4] przedstawiono teorię włóknokompozytów, charakteryzującą się tym, że:

- konsekwentnie rozróżnia dwie fazy w materiale kompozytowym: matrycę i fazę włóknistą;
- fazę włóknistą, która z natury swej jest dyskretna, uciągała;
- obu fazom przypisuje wspólne pole przemieszczeń;
- opiera się na zasadach termodynamiki.

W rezultacie otrzymano spójną teorię zawierającą równania konstytutywne, równania przemieszczeniowe i równanie przewodnictwa ciepła. Wyniki tej teorii będą wykorzystane w niniejszej pracy.

2. ZWIĄZKI FIZYCZNE W ZADANIU DWUWYMIAROWYM

Tensor naprężenia włóknokompozytu w przestrzeni trójwymiarowej wyraża się następująco [4]:

$$\tau_{ij} = (1 - \mu) \sigma_{ij} + \sum_r \mu_r \sigma_r s_i s_j \quad (2.1)$$

gdzie:

τ_{ij} - składowe tensora naprężenia we włóknokompozycie,

σ_{ij} - składowe tensora naprężenia w matrycy,

σ_r - naprężenie we włóknie rodziny r-tej,

μ - gęstość zbrojenia r-tej rodziny włókien; $\mu = \sum_r \mu_r$,

\vec{s}_r - wektor jednostkowy wyznaczający kierunek włókien r-tej rodziny.

Przyjmijmy, że naprężenia i odkształcenia są niezależne od zmiennej x_3 oraz, że wszystkie rodziny włókien leżą w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny $(x_1, 0, x_2)$. Dalszą uwagę skupimy na płaskim stanie naprężenia:

$$[\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Można więc napisać:

$$\tau_{\alpha\beta} = (1 - \mu)\sigma_{\alpha\beta} + \sum_r \mu_r \sigma_r s_\alpha s_\beta \quad (2.3)$$

gdzie indeksy pisane greckimi literami przebiegają ciąg liczb (1, 2). Ponieważ $s_3 = 0$, więc warunek płaskiego stanu naprężenia $\tau_{33} = 0$ jest spełniony, jeśli $\sigma_{33} = 0$:

$$\sigma_{33} = 2\mu_L \epsilon_{33} + \lambda_L e = (\lambda_L + 2\mu_L)\epsilon_{33} + \lambda_L(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = 0$$

Stąd:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.4)$$

W powyższych wzorach: λ_L, μ_L - stałe sprężystości Lam'e dla matrycy,
e - dylatacja.

Dylatację obliczamy wykorzystując (2.4):

$$e = \frac{2\mu_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \varepsilon_{\gamma\gamma} \quad (2.5)$$

Jeśli w związku fizycznym dla matrycy:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu_L \varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda_L e \delta_{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

uwzględni się (2.5), to:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu_L \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{2\mu_L \lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

przy czym:

$$\frac{2\mu_L \lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2} \quad (2.8)$$

Jeśli ponadto weźmie się pod uwagę, że:

$$\sigma_r = E_r \varepsilon_r = E_r s_\alpha s_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

to związki fizyczne włóknokompozytu przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{E(1-\mu)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) + \sum_r \mu_r E_r s_{r1} s_{r1} s_{r\alpha} s_{r\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \tau_{12} &= \frac{E(1-\mu)}{1-\nu^2}(1-\nu)\varepsilon_{12} + \sum_r \mu_r E_r s_{r1} s_{r2} s_{r\alpha} s_{r\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \tau_{22} &= \frac{E(1-\mu)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) + \sum_r \mu_r E_r s_{r2} s_{r2} s_{r\alpha} s_{r\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. RÓWNANIA PRZEMIESZCZENIOWE

W równaniach równowagi:

$$\begin{aligned}\tau_{11,1} + \tau_{21,2} &= 0 \\ \tau_{12,1} + \tau_{22,2} &= q\end{aligned}\quad (3.1)$$

występują składowe tensora całkowitego naprężenia we włóknokompozycie $\tau_{\alpha\beta}$ i siła masowa q , równoległa do x_2 i ze zwrotem przeciwnym do osi x_2 . Jeśli do równań równowagi (3.1) wprowadzi się związki fizyczne (2.10) i uwzględni się równania geometryczne:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} \quad (3.2)$$

to otrzymamy równania przemieszczeniowe włóknokompozytu w płaskim stanie naprężenia:

$$\begin{aligned}& \frac{E(1-\mu)}{1-\nu^2} \left[\nabla^2 u_1 - \frac{1+\nu}{2} (u_{1,22} - u_{2,12}) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_r \mu_r \frac{E_r}{r} s_{1r} s_{r\alpha} s_{r\beta} s_{r\gamma} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \gamma = 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}& \frac{E(1-\mu)}{1-\nu^2} \left[\nabla^2 u_2 - \frac{1+\nu}{2} (u_{2,11} - u_{1,12}) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_r \mu_r \frac{E_r}{r} s_{2r} s_{r\alpha} s_{r\beta} s_{r\gamma} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \gamma = q\end{aligned}$$

Niech włóknokompozyt składa się z matrycy i dwóch rodzin włókien. Pierwszą rodzinę tworzą włókna równoległe do osi x_1 , drugą - równoległe do osi x_2 , to znaczy:

$$\begin{aligned}s_1 &= 1, s_2 = 0 \\ s_1 &= 0, s_2 = 1\end{aligned}\quad (3.4)$$

W tym przypadku równania przemieszczeniowe przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u_1 - \frac{1+\nu}{2} (u_{1,22} - u_{2,12}) + \varepsilon_1 u_{1,11} &= 0 \\ \nabla^2 u_2 - \frac{1+\nu}{2} (u_{2,11} - u_{1,12}) + \varepsilon_2 u_{2,22} &= \frac{q(1-\nu^2)}{E(1-\mu)}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\mu_1 E_1 (1 - \nu^2)}{E(1 - \mu)} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\mu_2 E_2 (1 - \nu^2)}{E(1 - \mu)}\end{aligned}\quad (3.6)$$

4. RÓWNANIA NAPRĘŻENIOWE

Sformułowanie równań teorii sprężystości włóknokompozytu w naprężeniach wymaga uzupełnienia równań równowagi (3.1) równaniem nierozdzielności odkształceń:

$$2\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} \quad (4.1)$$

Zapisanie tego równania w naprężeniach wymaga określenia odwrotnych związków fizycznych, co staje się proste dopiero wtedy, gdy określimy jednoznacznie sposób zbrojenia włóknokompozytu. Do dalszych rozważań przyjmiemy włóknokompozyt określony przez równania (3.4).

Równania fizyczne dla tego przypadku można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= \frac{E(1 - \mu)}{1 - \nu^2} [(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}] \\ \tau_{12} &= \frac{E(1 - \mu)}{1 - \nu^2} (1 - \nu)\varepsilon_{12} \\ \tau_{22} &= \frac{E(1 - \mu)}{1 - \nu^2} [\nu\varepsilon_{11} + (1 + \varepsilon_2)\varepsilon_{22}]\end{aligned}\quad (4.2)$$

We wzorach (4.2) ε_1 i ε_2 wyznacza się wzorami (3.4). Odwrotne związki fizyczne mają postać:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1 - \nu^2}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) - \nu^2} \cdot \frac{1}{E(1 - \mu)} [\tau_{11}(1 + \varepsilon_2) - \nu\tau_{22}] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1 - \nu^2}{E(1 - \mu)(1 - \nu)} \tau_{12}\end{aligned}\quad (4.3)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1 - \nu^2}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) - \nu^2} \cdot \frac{1}{E(1 - \mu)} [\tau_{22}(1 + \varepsilon_1) - \nu\tau_{11}]$$

Po uwzględnieniu (4.3) i (3.1) w (4.1) otrzymuje się równanie nierozdzielności wyrażone w naprężeniach:

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon_2)(1 - \nu)\nabla^2\tau_{11} + (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2)\tau_{11,11} + \\ & + (1 + \varepsilon_1)(1 - \nu)\nabla^2\tau_{22} + (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)\tau_{22,22} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

w którym: $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ jest operatorem Laplace'a oraz uwzględniono, że $q = \text{const}$.

Równania (3.1) i (4.4) tworzą układ trzech równań różniczkowych cząstkowych z niewiadomymi składowymi tensora naprężenia $(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$.

Problem można też sprowadzić do jednego równania różniczkowego za pomocą funkcji Airy 'ego:

$$\tau_{11} = F_{,22}, \quad \tau_{22} = F_{,11}, \quad \tau_{12} = -F_{,12} + qx_1 \quad (4.5)$$

Można łatwo sprawdzić, że równania równowagi (3.1) są spełnione natychmiast, natomiast podstawienie (4.5) do (4.4) prowadzi do równania:

$$(1 + \varepsilon_1)F_{,1111} + 2\left[1 + \frac{1}{1 - \nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2)\right]F_{,1122} + (1 + \varepsilon_2)F_{,2222} = 0 \quad (4.6)$$

Jeśli przyjąć $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, to z (4.6) otrzymuje się równanie biharmoniczne:

$$\nabla^4 F = 0 \quad (4.7)$$

znane z zadania płaskiego dla ośrodka jednorodnego, izotropowego.

5. DEKOMPOZYCJA NAPRĘŻEŃ

Po obliczeniu naprężeń można wykonać dekompozycję naprężeń τ_{11} i τ_{22} na tę część, która jest przenoszona przez matrycę oraz na tę, którą przenoszą włókna, zgodnie ze wzorami:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), & \sigma_1 &= E \varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), & \sigma_2 &= E \varepsilon_{22} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Jeżeli zadanie jest rozwiązywane w przemieszczeniach, to składowe tensora odkształcenia oblicza się z równań Cauchy'ego (3.2), natomiast jeśli rozwiązanie otrzymano w naprężeniach $\tau_{\alpha\beta}$, to w celu wyznaczenia odkształceń $\epsilon_{\alpha\beta}$ należy wykorzystać odwrotne związki fizyczne (4.3).

LITERATURA

- [1] Christensen R.M.: Mechanics of composite materials. John Wiley and Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto 1979
- [2] Dato M. H.: Mechanics of fibrous composites. Elsevier Applied Science, London - New York 1971
- [3] Jones R.M.: Mechanics of composite materials. Mc Graw - Hill Book Comp., New York 1975
- [4] Świtka R.: Thermoelasticity of fiber composites. *J. of Theoret. and Applied Mech.*, 33, 2 (338-400) 1995
- [5] Vinson J.R., Sierakowski R.L.: The behavior of structures composed of composite materials. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht - Boston - Lancaster 1986

INTRODUCTION TO TWO-DIMENSIONAL PROBLEM IN MECHANICS OF FIBROUS COMPOSITES

Summary

Equations of state have been derived for two-dimensional problem of elasticity of fibrous composites theory thanks to results obtained in a paper [4]. The displacement equations and stress equations have been presented in case of particular composite, which is reinforced with two families of fibres that create an orthogonal net.

ZAGADNIENIA WYCISZENIA MASZYN W PRZEMYSŁE REGIONU BYDGOSKIEGO

Krzysztof Wernerowski

Wydział Mechaniczny ATR, Katedra Mechaniki Stosowanej
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-791 Bydgoszcz

Problemem wyciszenia maszyn w regionie bydgoskim zajmuje się Zakład Dynamiki i Wibroakustyki Katedry Mechaniki Stosowanej ATR. Połączenie analizy teoretycznej, badań laboratoryjnych i eksploatacyjnych umożliwiło konkretne rozwiązanie zagadnień wyciszenia maszyn w kilku przedsiębiorstwach przemysłu regionu bydgoskiego. Osiągnięciem analizy teoretycznej są wyniki obliczeń asymptotycznych dla propagacji nieliniowych fal akustycznych o dużej energii. Dla poziomu hałasu powyżej 95 B(A) lub 100 dB tylko metoda nieliniowa zapewnia skuteczność. Zajmowano się również problemem wyciszenia niskich tonów. Nowe rozwiązanie konstrukcyjne pochłaniacza przestrzennego było właściwe. Ekran i ustroje wielokrotne działają skuteczniej od jednolitych. Izolacyjność akustyczna jest wyższa od teoretycznej wynikającej z prawa masy. Opracowano również tłumik wyciszający dla instalacji pneumatycznej.

1. WSTĘP

Problem ograniczenia poziomu szkodliwego hałasu maszyn [1,2] do wartości dopuszczalnej 85 dB(A) występuje również w regionie bydgoskim.

Zakład Mechaniki Stosowanej i obecnie Zakład Dynamiki i Wibroakustyki Katedry Mechaniki Stosowanej Wydziału Mechanicznego Akademii Techniczno-Rolniczej im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy [3,8] prowadził zawsze intensywne analizy teoretyczne, badania i wdrożenia zapewniające skuteczne wyciszenie maszyn w przemyśle regionu bydgoskiego. Istotną cechą działalności było połączenie prac naukowo-badawczych i bezpośredniego wykonania rzeczowego. Optymalizacja eksploatacyjna prototypów umożliwiła realistyczny wzrost skuteczności wyciszenia. Równocześnie zwracam uwagę na minimalizację [7] zużycia materiałów i całego kosztu.

2. ANALIZA TEORETYCZNA

Wyniki pomiarów rzeczywistego hałasu określają w zależności od poziomu dwa zakresy zjawisk akustycznych:

- liniowy dla $L < 95 \text{ dB(A)}$ lub 100 dB ,
- nieliniowy dla $L > 95 \text{ dB(A)}$ lub 100 dB .

Obliczenia propagacji liniowej fali akustycznej zrealizowano na podstawie równania różniczkowego:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_o^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \quad (1)$$

$$x = a + \xi \quad (1a)$$

gdzie:

- ξ - przesunięcie cząstki powietrza,
- c_o - prędkość dźwięku w małej amplitudzie,
- x - współrzędna Eulera,
- a - współrzędna Lagrange'a dla tego samego kierunku.

Wielkością istotną dla oceny hałasu jest ciśnienie akustyczne:

$$p = \rho_o c \frac{d\xi}{dt} \quad (2)$$

gdzie:

- ρ_o - gęstość ośrodka w równowadze,
- c - prędkość dźwięku.

Na podstawie uzyskanego parametru oblicza się poziom hałasu:

$$L = 20 \lg \frac{p}{p_o} \text{ dB} \quad (3)$$

gdzie:

$$p_o = 210^{-5} \frac{N}{m^2} \quad \text{- próg słyszalności.}$$

Praktyczne i urzędowe znaczenie posiada wartość poziomu hałasu uwzględniająca rzeczywistą czułość słuchu ludzkiego. Metrologicznym odzwierciedleniem głośności jest charakterystyka czyli filtr korekcyjny A, czyli:

$$L_A = 10 \lg \sum_{i=1}^n 10^{0,1(L_i + K_{Ai})} \text{ dB(A)} \quad (4)$$

gdzie:

L_i - poziom ciśnienia dla pasma częstotliwości i ,

K_{Ai} - poprawka dla częstotliwości f_i .

Charakterystyka A uwzględnia głównie zmniejszenie czułości słuchu ludzkiego dla częstotliwości poniżej 1 kHz.

Stosunkowo często występuje bardzo intensywny hałas o poziomie $L > 95$ dB(A) lub 100 dB. Analiza zjawiska nieliniowego jest bardziej złożona. Równanie różniczkowe propagacji dla jednego kierunku przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c_o^2}{(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a})^{\chi+1}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \quad (5)$$

gdzie:

χ - wykładnik adiabaty.

Nieliniowe równanie hiperboliczne nie posiada ścisłego rozwiązania. Obecnie najdokładniejszy wynik uzyskano metodą asymptotyczną:

$$\xi(a, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(a) x_n(t) \cos[\omega_n t + Q(t)] \quad (6)$$

gdzie:

ε - mały parametr,

$Q_n(t)$ - funkcja nieliniowości fazy.

Analiza wykazała, że dokładne obliczenia ciśnienia fali akustycznej dla propagacji nieliniowej można wykonać wzorem:

$$p = \rho c_o^2 \left[-\frac{\partial \xi}{\partial x_n} + \varepsilon \frac{\chi+1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_n} \right)^2 \right] + 0(\varepsilon^2) \quad (7)$$

gdzie:

$0(\varepsilon^2)$ - składowe rzędu ε^2 .

Podczas obliczeń ekranów i ustrojów dźwiękochłonno-izolacyjnych istotne jest prawo masy. Parametrem liczbowym prawa jest izolacyjność akustyczna dla fali padającej prostopadle:

$$R_r = 2,0 \lg \frac{\omega m}{2 \rho_o c_o} - C_R \text{ dB} \quad (8)$$

gdzie:

ω - czułość,

m - masa kg na 1 m ,

C_R - stała; najczęściej $C_R = 5$,

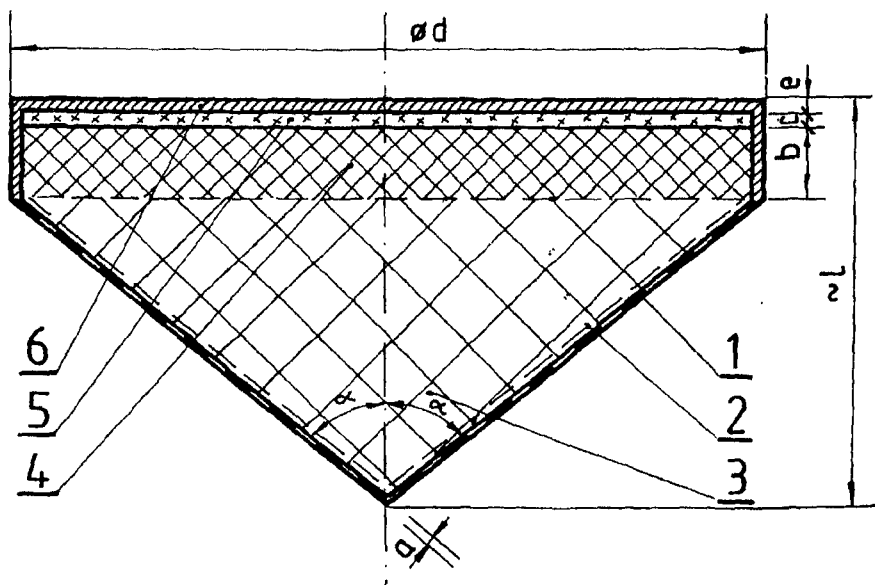
Najważniejszym celem analizy teoretycznej izolacyjności ekranów i ustrojów jest uzyskanie w nowych konstrukcjach rzeczywistej izolacyjności akustycznej R większej od wynikającej bezpośrednio z (8)

$$R > R_r \quad (9)$$

Projektowanie uwzględnia również wyciszające działanie rezonansowe.

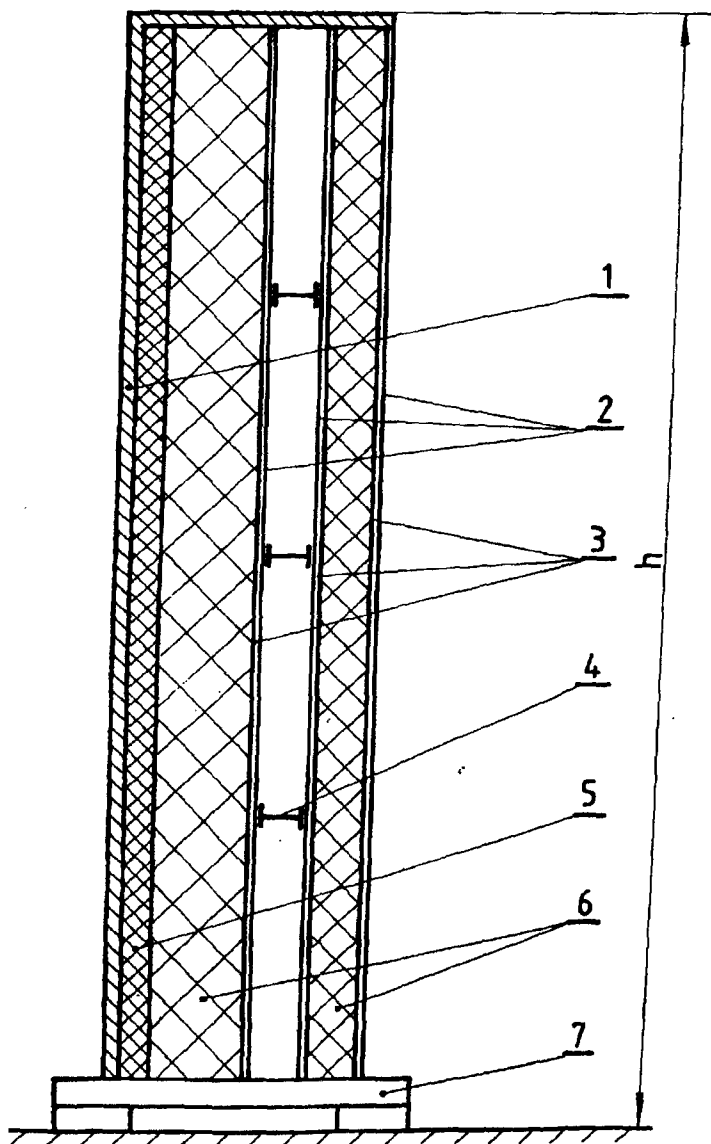
3. NOWE KONSTRUKCJE DŹWIĘKOCHŁONNO-IZOLACYJNE

Na podstawie widma rzeczywistego hałasu maszynowego i analizy teoretycznej opracowano bardzo skuteczne konstrukcje dźwiękochłonna-izolacyjne.



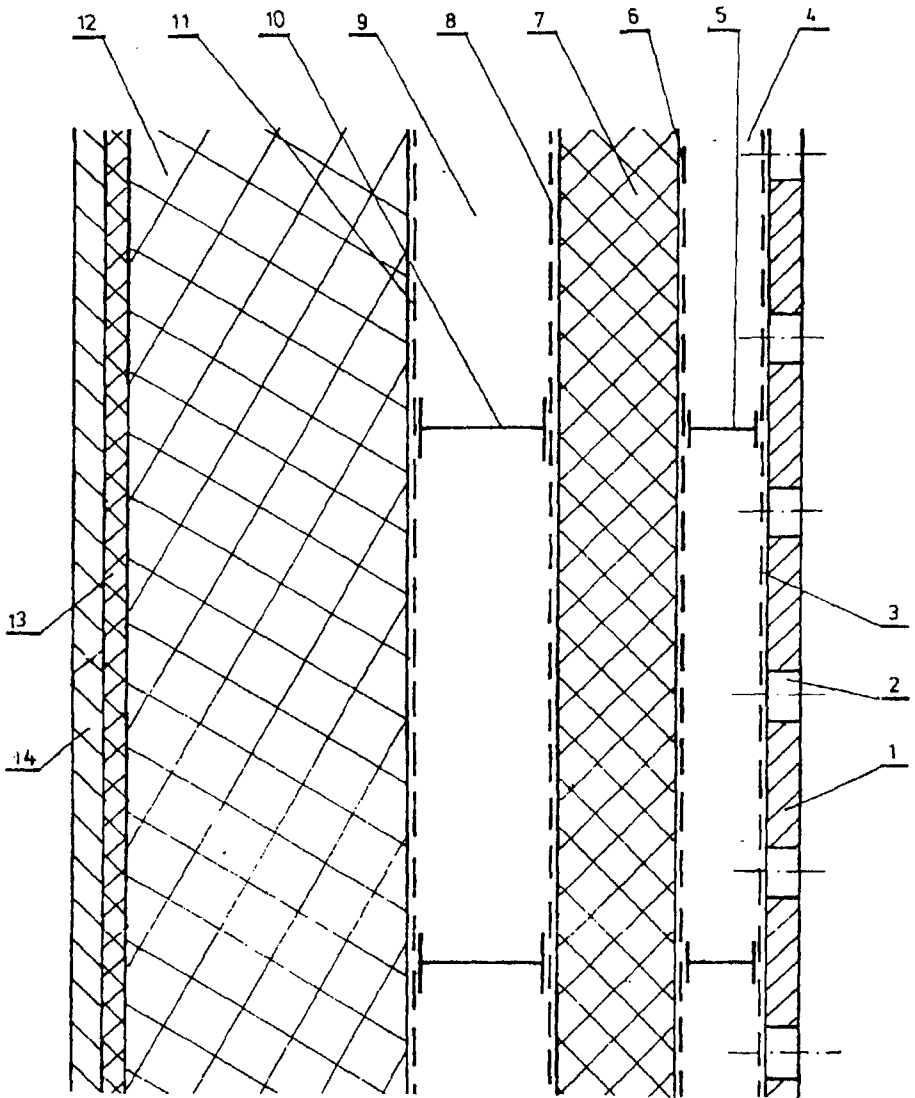
Rys.1. Stożkowo-walcowy pochłaniacz przestrzenny: 1 - blacha perforowana, 2 - wełn szklany, 3 - materiał włóknisty w mniejszej gęstości, 4 - materiał porowaty o większej gęstości, 5 - guma, 6 - osłona

Pochłaniacz przestrzenny jest skuteczny w całym paśmie tonów o częstotliwościach słyszalnych i stanowi cenne uzupełnienie wyciszenia stanowisk maszyn oraz całych pomieszczeń.



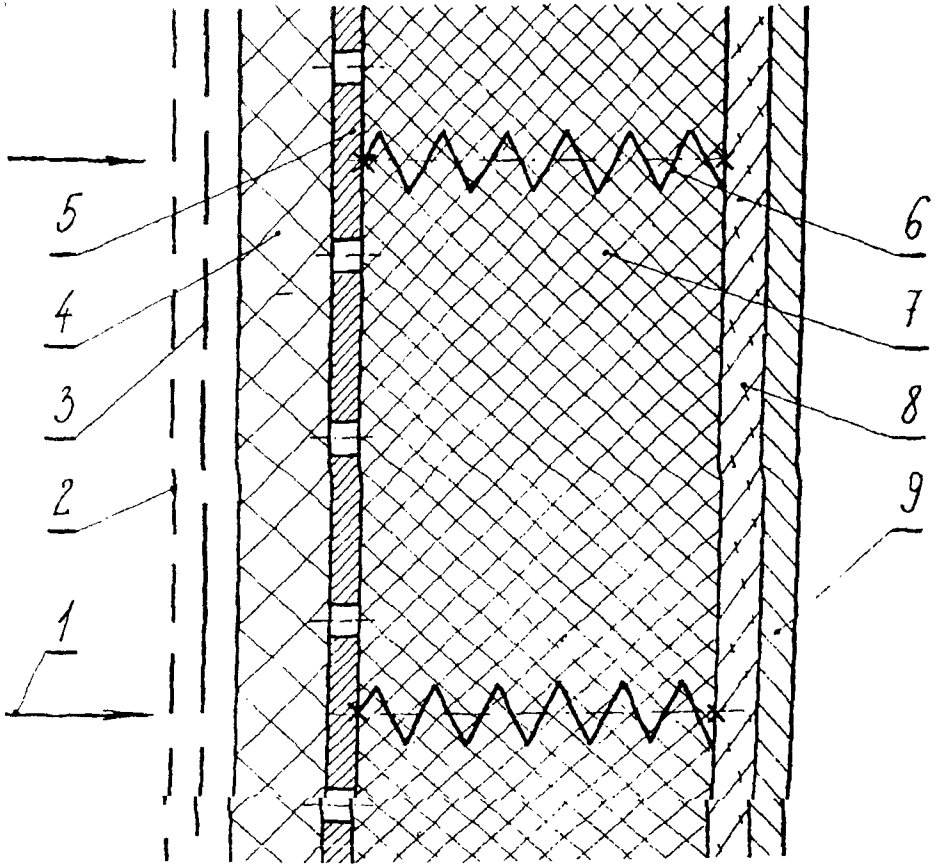
Rys.2. Ekran izolacyjno-rezonansowy: 1 - osłona, 2 - płyty perforowane, 3 - warstwy welonu szklanego, 4 - element powietrznej przestrzeni rezonansowej, 5 - guma, 6 - warstwy porowate, 7 - podstawa

Wypadkowa skuteczność akustyczna jest znaczna, $\Delta L = \text{ok. } 20 \text{ dB(A)}$.
Izolacyjność akustyczna właściwa ekranu jest wyższa od teoretycznej (8).



Rys.3. Schemat wyciszającego urządzenia wielokrotnego, pochłaniająco-rezonansowego: 1 - płyta perforowana, 2 - otwór o działaniu rezonansowym, 3, 6, 8, 11 - warstwy welonu szklanego, 4, 9 - rezonansowe warstwy powietrza, 5, 10 - elementy przestrzeni rezonansowych, 7 - materiał włóknisty o mniejszej gęstości, 12 - materiał porowaty o większej gęstości, 13 - guma, 14 - osłona

Ustrój zapewnia skuteczne tłumienie rezonansowe tonu podstawowego w stosunkowo szerokim paśmie, wyższych składowych harmonicznych i szumu.

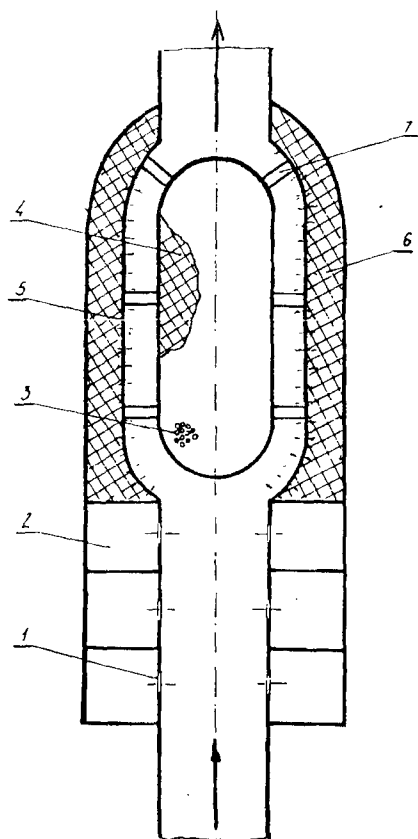


Rys.4. Ustrój wyciszający hałas udarowy o bardzo niskiej częstotliwości: 1 - tony hałasu, 2 - welon szklany, 3 - pierwsza płyta perforowana, 4 - materiał dźwiękochłonny o mniejszej gęstości, 5 - druga płyta perforowana, 6 - sprężyna, 7 - materiał porowaty o większej gęstości, 8 - guma, 9 - blacha

Wyciszenie tonów o niskich częstotliwościach jest bardzo trudne. Materiały porowate i włókniste nie są skuteczne, konstrukcje rezonansowe są zbyt duże.

W ustroju wykorzystano fakt, że działanie fal akustycznych o bardzo niskich częstotliwościach jest zbliżone do drgań mechanicznych. Płyta 5 umieszczona na sprężynach 6 tworzy układ wibracyjny zamieniający energię akustyczną na mechaniczną. Opory tarcia w materiałach 4,7 są znikome i praktycznie są bez znaczenia. Otwory w 3,5 tworzą z 4,7 drugi i trzeci układ rezonansowo-tłumiący. Materiał 7 rozszerza pasmo rezonansowe podstawowej częstotliwości. Warstwy 4,8 zapewniają ograniczenie szumu i harmonicznych o wysokich częstotliwościach.

Ustrój wyciszający hałas udarowy zapewnia rezonansowe tłumienie trzech tonów, wyższych składowych harmonicznych i szumu maszynowego.



Rys.5. Wielokrotny tłumik hałasu wylotu sprężonego powietrza: 1 - otwór, 2 - boczna komora rezonansowa, 3 - perforacja blachy elementu wewnętrznego, 4, 6 - materiał porowaty lub włóknisty, 5 - blacha o gęstej perforacji, 7 - podpora

Najczęściej tłumiki wylotu sprężonego powietrza są uproszczone o małej skuteczności. Opracowana konstrukcja zapewnia realne tłumienie podstawowych tonów, składowych harmonicznycch i szumu.

4. WDROŻENIA W REGIONIE BYDGOSKIM

Uzyskano obniżenie poziomu hałasu maszyn do równoważnej wartości dopuszczalnej.

4.1. Zakłady Rowerowe "PREDOM-ROMET", Bydgoszcz

Wielokrotny ustrój dźwiękochłonny rury materiałowej automatów tokarskich okazał się skuteczny.

4.2. Zakłady Stolarki Budowlanej "STOLBUD", Sępólno Krajeńskie

Wykonano skuteczne ustroje rezonansowo-dźwiękochłonne, osłony i ekrany wyciszające. Obniżono poziom hałasu strugarek, pilarki, czopiarki, frezarki oraz sękarki. Zastosowano również specjalny tłumik wylotu sprężonego powietrza w linii do łączenia drewna.

4.3. Janikowskie Zakłady Sodowe, Janikowo i Piechcin

Zastosowano ekrany dźwiękochłonno-rezonansowe i specjalny ustrój wyciszający. Uzyskano znaczne obniżenie poziomu hałasu dużych sprzężarek.

4.4. Fabryka Akcesoriów Meblowych, Chełmno i Chełmża

Młyny do tworzyw sztucznych zostały wyciszone przez specjalne ustroje dźwiękochłonno-rezonansowe. Ustrój wibroakustyczny obniżył znacznie poziom hałasu automatów tokarskich.

4.5. Bydgoskie Zakłady Elektromechaniczne "BELMA", Bydgoszcz

Specjalny ustrój wibroakustyczny zapewnił skuteczne wyciszenie prasy kolanowej.

4.6. Zakłady Naprawcze Taboru Kolejowego im. Obrońców Bydgoszczy

Wyciszenie odlewni żeliwa i stolarni. Zastosowano stożkowe pochłaniacze przestrzenne, specjalne ustroje dźwiękochłonno-izolacyjne i ekrany.

LITERATURA

- [1] Cempel Cz.: *Wibroakustyka stosowana*. PWN, Warszawa 1989
- [2] Engel Z.: *Ochrona środowiska przed drganiami i hałasem*. PWN, Warszawa 1993
- [3] Sadowski J.: *Podstawy izolacyjności akustycznej ustrojów*. PWN, Warszawa 1973
- [4] Wernerowski K.: *Zagadnienia minimalizacji hałasu maszyn na drodze jego propagacji*. Materiały Międzynarodowej Konferencji Zwalczenia Hałasu "Noise Control 85", Kraków 1985
- [5] Wernerowski K.: *Noise Reduction of Longitudinal Automatic Lathes*, Proceedings. "Noise Control 88". Kraków 1988
- [6] Wernerowski K.: *Analysis of Sound Absorption by a Three-Layer Resonant and Absorbing Structure*. Archives Acoustics, PAN, Warszawa 1988
- [7] *Analiza izolacyjności akustycznego ekranu lekkiego i ekonomicznego*. Zastosowania Ergonomii, nr 21, Zielona Góra 1992
- [8] *Vibroacoustic Damping System for Low Tones*. "Noise Control 92", Kraków 1992

MACHINE NOISE DAMPING PROBLEMS IN THE INDUSTRY OF BYDGOSZCZ REGION

Summary

Problems of machine noise damping were solved in Bydgoszcz Region by the Dynamic and Vibroacoustic Establishment of Applied Mechanics Chair ATR. Connection of theoretical analysis, laboratory tests and exploitation made the real silencing of machines in same factories possible. For noise level over 95 dB(A) or 100 dB the nonlinear method was applied. Problem of low tones was researched. New spatial sound absorber was effective. Acoustic baffles and system have good unitary acoustic isolating power. Effective silencer for pneumatic system is also presented.

BADANIE WŁAŚCIWOŚCI LEPKOSPREŻYSTYCH SPOIN KLEJOWYCH ŁĄCZĄCYCH ELEMENTY DREWNIANE

Arnold Wilczyński, Marek R. Gogolin

Institut Techniki Wyższej Szkoły Pedagogicznej
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono założenia, przebieg oraz rezultaty badań prowadzonych w Instytucie Techniki WSP nad pełzaniem spoin klejowych. Opisano próbkę i aparaturę badawczą, podano też rezultaty wstępnej obróbki wyników eksperymentów. Przedstawiono także wnioski dotyczące zarówno wykorzystanej metodyki badań, jak i samych wyników.

1. WSTĘP

W Instytucie Techniki WSP w Bydgoszczy już od 1984 r. prowadzone są badania nad konstrukcjami z drewna i materiałów drzewnych. Został tam utworzony zespół badawczy którego zakres zainteresowań obejmuje takie zagadnienia, jak: właściwości mechaniczne drewna i materiałów drewnopochodnych z uwzględnieniem zjawisk związanych z ich anizotropią [11, 13, 15, 23], nośność i sztywność elementów konstrukcji drewnianych [24, 26], wytrzymałość i sztywność połączeń drewnianych elementów konstrukcyjnych [16], a także właściwości mechaniczne spoin klejowych łączących elementy wykonane z drewna. Ostatni z wymienionych kierunków badań ma szeroki zasięg, obejmując między innymi wytrzymałość spoin klejowych [16], analizę stanu naprężenia [12, 14, 17, 18, 19, 21, 22] oraz zjawiska lepkospreżyste zachodzące w obciążonych złączach klejowych.

Badania rcologii spoin klejowych łączących elementy drewniane były dominującym kierunkiem prac prowadzonych w Instytucie Techniki WSP przez ostatnich kilka lat. Tym też zagadnieniom poświęcone jest niniejsze opracowanie. Potrzeba prowadzenia prac badawczych w tej dziedzinie związana jest z coraz szerszym stosowaniem różnych technik klejenia dołączenia elementów konstrukcji drewnianych - zarówno małych, jak konstrukcje meblarskie, jak i większych, z budowlanymi włącznie. Z doświadczeń producentów i użytkowników konstrukcji klejonych wynika, że zjawiska pełzania występują szczególnie intensywnie w złączach klejonych klejem polioctanowinylowym. Uznano zatem, że ten rodzaj kleju należy objąć badaniami w pierwszej kolejności.

2. METODYKA BADAŃ

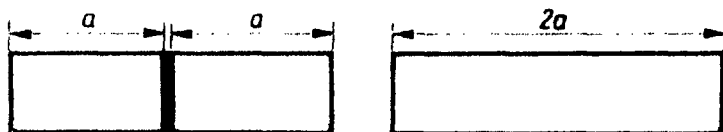
Badania eksperymentalne w zakresie reologii spoiny klejowej związane są przede wszystkim z pomiarem odkształceń cienkiej, a jednocześnie nierównomierniej warstwy, jaką tworzy spoina klejowa w drewnie. Trudności w dokładnym przeprowadzeniu takich pomiarów są przypuszczalną przyczyną braku eksperymentalnych badań w tym zakresie. Należy podkreślić, że wyniki badań w spoinach znacznie pogrubionych, a także na próbkach wykonanych z utwardzonej masy klejowej, nie mogą być przeniesione na naturalną, cienką spoinę klejową. Nie można też zakładać, jak się to czyni w przypadku badania spoiny klejowej łączącej elementy metalowe [4], że w połączeniu takim odkształca się tylko spoina (tzn. w zasadzie tylko warstwa kleju), podczas gdy sklepane elementy są nieodkształcalne. W drewnianych złączach klejowych odkształcenia drewna i spoiny klejowej mogą być tego samego rzędu.

Z pojedynczych publikacji, jak np. [5, 10] wynika, że próbowano ocenić podatność spoiny klejowej na odkształcenia spowodowane długotrwałym obciążeniem w sposób pośredni. Porównywano odkształcenia próbek połączeń klejowych i odpowiednich próbek litych [10], bądź odkształcenia próbek sklejonnych różnymi klejami [5]. Próbowano też stosować próbkę o takiej konstrukcji, że udział spoiny klejowej w jej odkształceniu jest większy, niż udział drewna [6].

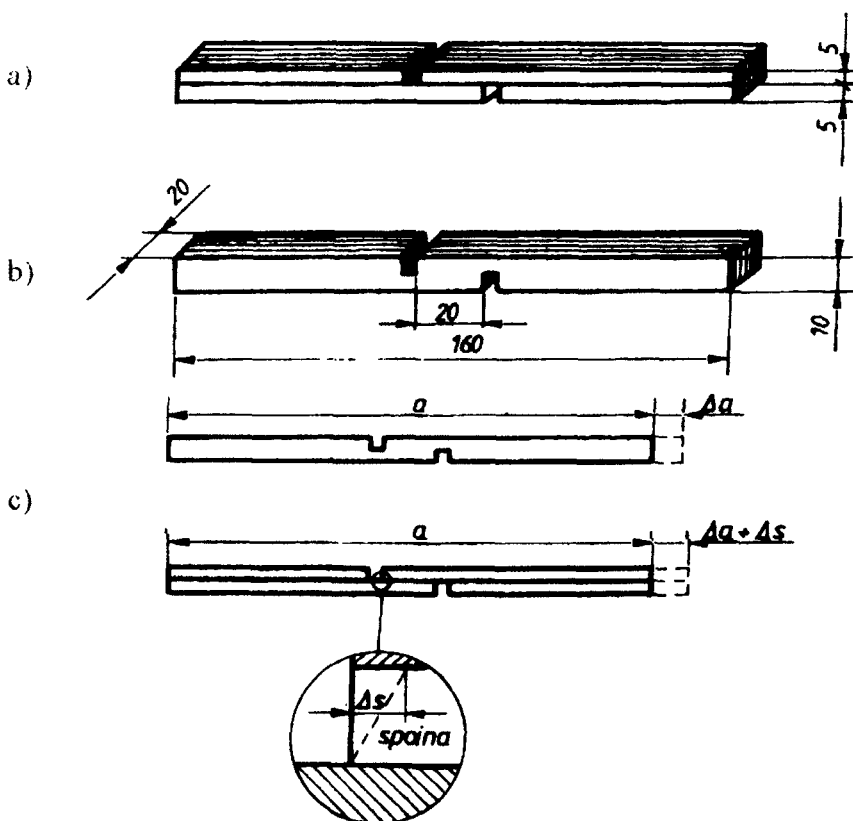
Wobec opisywanych już trudności, związanych z bezpośrednim pomiarem odkształceń spoiny klejowej, postanowiono wykorzystać znaną już [10] ideę pośredniego pomiaru odkształceń. Zasadę tak prowadzonego pomiaru przedstawia rysunek 1. Dwie próbki lita i klejona, mają tę samą geometrię i wykonane są z drewna o jednakowych właściwościach. Każdą z próbek poddaje się działaniu jednakowego obciążenia i dokonuje się pomiarów odkształcenia, równego odpowiednio Δk i Δl . Jeśli uwzględnić fakt, że odkształcenie próbki klejonej Δk jest sumą odkształcenia Δd drewna zawartego w próbce oraz odkształcenia Δs spoiny klejowej, $\Delta k = \Delta d + \Delta s$, można, przy założeniu $\Delta k = \Delta l$, wyznaczyć poszukiwane odkształcenie spoiny $\Delta s = \Delta k - \Delta l$. Możliwe jest więc wyznaczenie odkształcenia spoiny przez łatwy w realizacji pomiar wydłużeń próbek.

W opisywanych badaniach postanowiono - w odróżnieniu od opisanego wyżej przykładu - wykorzystać próbkę zawierającą złącze ścinane. Można to uzasadnić faktem, iż w konstrukcjach drewnianych klejonych spoiny poddawane są przede wszystkim ścinaniu, doznając głównie odkształceń postaciowych.

W przypadku spoin utworzonych z niektórych klejów syntetycznych, ich pełzanie może być podstawową przyczyną deformacji konstrukcji klejonych. Zatem badanie pełzania powinno dotyczyć typowej, ścinanej spoiny klejowej.



Rys.1. Bliźniacze próbki rozciągane - zasada różnicowego pomiaru odkształceń spoiny



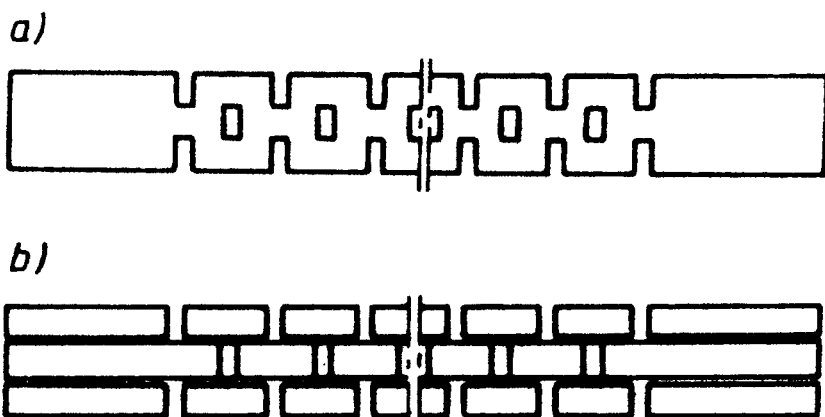
Rys.2. Próbką użytą w badaniach wstępnych: a) klejona, b) lita, c) zasada wyznaczania deformacji spoiny klejowej

Po przeglądzie publikacji, opisujących dotychczasowe badania wytrzymałościowe spoin klejowych, zdecydowano się na wykorzystanie w badaniach wstępnych próbki rozciąganej, zawierającej złącze zakładkowe, poddane ścinaniu. Wzorując się na normie DIN 53254 [7] przyjęto próbkę przedstawioną na rysunku 2. Próbką taką, wykorzystywaną już w licznych badaniach wytrzymałościowych, posiada takie zalety, jak prosta budowa, łatwość wykonania i mała materiałochłonność, a także możliwość prostego wykonania porównawczych, bliźniaczych próbek litych o identycznej geometrii.

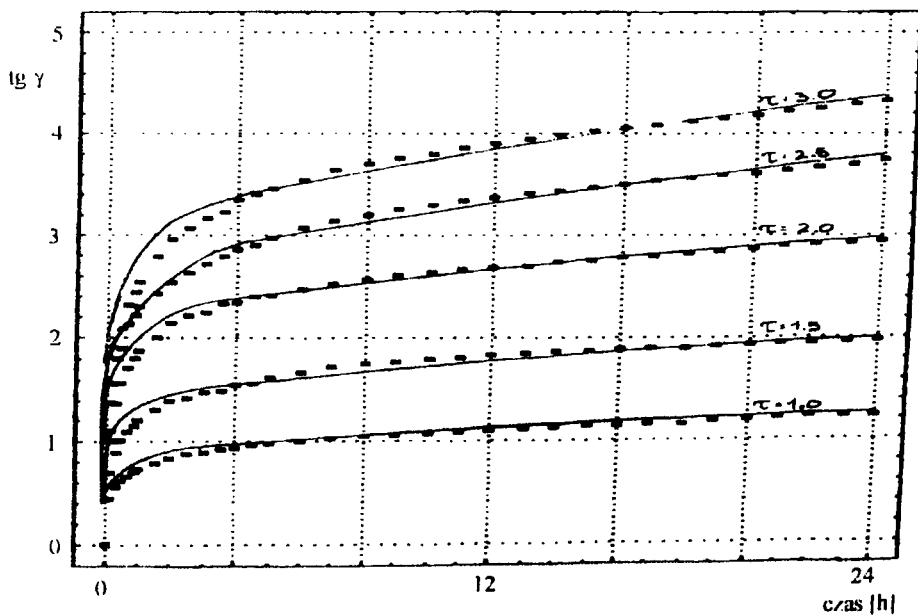
Analizując zachowanie się wyżej opisanej próbki w warunkach obciążenia siłą rozciągającą można zauważyć, że w strefie znajdującej się w pobliżu spoiny występuje efekt nieosiowego rozciągania, przejawiający się zginaniem środkowej części próbki. Powoduje to występowanie w spoinie, poza naprężeniami stycznymi, także naprężeń normalnych. Ponieważ jednak efekt ten występuje także w odpowiedniej strefie próbki litej, założono, że wydłużenie próbki klejonej różni się od wydłużenia próbki litej jedynie o wielkość Δs , wynikającą z odkształcenia postaciowego spoiny. Założono więc, że pomiar wydłużenia obydwu próbek umożliwi wyznaczenie odkształcenia spoiny klejowej z dokładnością wystarczającą dla badań wstępnych. Do badań zasadniczych zaprojektowano próbkę o odmiennej konstrukcji. W próbce tej zastosowano symetryczne złącza nakładkowe, w których nie występuje opisany efekt zginania strefy spoiny. Dla zwiększenia udziału odkształceń spoin klejowych w całkowitej deformacji próbki połączono szeregowo 16 elementarnych złącz klejowych tworząc próbkę ośmiopakładkową. Zaprojektowano też, w związku z przyjętą metodą różnicowego wyznaczania odkształceń spoiny, bliźniaczą próbkę z drewna litego. Obydwie próbki przedstawiono na rysunku 3.

W trakcie eksperymentu próbki obciążano za pomocą specjalnie wykonanego przyrządu sprężynowego. Przyrząd ten zaprojektowano z myślą o przeprowadzeniu prób pełzania w warunkach długotrwałego obciążania próbki stałą siłą rozciągającą. Wydłużenie próbki umieszczonej w przyrządzie obciążającym mierzone jest za pomocą czujnika indukcyjnego "VISTRONIK CE - 3", umożliwiającego pomiar z rozdzielczością 0.1 mm przy zachowaniu znacznej dokładności. Sygnał analogowy z urządzenia odprowadzany jest do rejestratora analogowego, gdzie przebieg wydłużenia próbki w funkcji czasu rejestrowany jest na taśmie papierowej. Układ wyposażony jest w elementy umożliwiające kalibrację toru pomiarowego.

Oznaczenie właściwości lepkosprężystych spoiny kleju polioctanowinyłowego przeprowadzono na podstawie wyników prób pełzania, dokonywanych przy pięciu poziomach naprężenia w spoinach: 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 i 5.0 MPa. Danymi wyjściowymi były krzywe pełzania spoin opisane przez wartości tangensa kąta odkształcenia postaciowego w funkcji czasu (rys.4). Do ich analizy przyjęto teoretyczny czteroparametrowy model Bürgersa ciała lepkosprężystego opisany przez licznych autorów (np. [9]). Model ten jest opisany równaniem:



Rys.3. Konstrukcja wielonakładkowej próbki: a) litej, b) klejonej



Rys.4. Krzywe pełzania spoin klejowych; punktami oznaczono przykładowe wyniki analizy regresji

$$\text{tgy} = A + Bt + C[1 - \exp(-Dt)]$$

w którym:

$$A = t/G_1, B = t/\lambda_1, C = t/G_2 \text{ i } D = G_2/\lambda_2.$$

W zależnościach tych G_1 i G_2 są umownymi modułami ścinania sprężystych elementów modelu, zaś λ_1 i λ_2 opisują jego elementy lepkie.

Współczynniki A, B, C i D wyznaczano za pomocą numerycznych programów analizy regresji. Z przekształceń podanych zależności otrzymano wartości G_1 , G_2 , λ_1 i λ_2 charakteryzujące właściwości lepkosprężyste spoiny klejowej przy każdym poziomie naprężenia. Ponieważ pełzanie spoiny kleju poliocetanolowego podlega prawom obowiązującym dla zjawisk lepkosprężystości liniowej [1], różnice w wartościach poszczególnych parametrów sprężystych bądź lepkich przy różnych poziomach naprężenia mogą być spowodowane jedynie błędami przypadkowymi wynikłymi w trakcie eksperymentu. Dlatego też wartości te poddane były obróbce statystycznej, dającej w efekcie wartości średnie oraz odchylenia standardowe umożliwiające ocenę popełnionego błędu.

3. WYNIKI BADAŃ I ICH ANALIZA

Pierwszą próbę wyznaczenia parametrów A, B, C i D modelu Bürgersa przeprowadzono przy wykorzystaniu pakietu programowego STATGRAPHICS i opisano w pracy [1]. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki analizy regresji funkcji pełzania uzyskane za pomocą pakietu "STATGRAPHICS"

Wartość naprężenia [MPa]	Parametr	A	B	C	D
1.0	wartość	0.108	0.0161	48.400	2.0100
	odchylenie standardowe	0.040	0.0015	6.000	0.2300
1.5	wartość	0.173	0.0215	62.200	1.8100
	odchylenie standardowe	0.069	0.0026	9.400	0.2100
2.0	wartość	0.179	0.0330	62.000	2.1600
	odchylenie standardowe	0.081	0.0029	6.800	0.1900
2.5	wartość	0.175	0.0465	54.700	2.1100
	odchylenie standardowe	0.095	0.0034	5.200	0.1700
3.0	wartość	0.312	0.0527	54.200	1.8100
	odchylenie standardowe	0.120	0.0045	6.000	0.1700

- Stwierdzono, że są one obciążone błędami, w szczególności stwierdzono, że:
- wartości parametru A modelu Bürgersa odpowiadające odkształceniu początkowemu spoiny wyraźnie przekraczają rzeczywiste odkształcenia początkowe,
 - wartości odchylenia standardowego dla tego parametru są niedopuszczalnie wysokie.

Wobec powyższych spostrzeżeń dokonano powtórnej analizy, zakładając wstępne zdefiniowanie parametru A na podstawie zadanej wartości obciążenia i rzeczywistego modułu ścinania spoiny kleju polioctanowinyloвого. Na podstawie badań Wilczyńskiego [18] przyjęto moduł ścinania kleju POW wynoszący 150 MPa, zatem po uwzględnieniu poszczególnych wartości naprężeń stycznych w spoinie wartości współczynnika A wyniosły dla naprężeń równych 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 i 3.0 MPa odpowiednio: 0.0667, 0.01000, 0.01333, 0.01667 i 0.02000. Pozostałe parametry obliczano przy wykorzystaniu doskonalszego pakietu programów "STATISTICA for WINDOWS", umożliwiającego wszechstronną analizę regresji oraz ekstrapolację wyznaczonej funkcji w zadanych granicach.

W tabeli 2 przedstawiono wartości wyznaczonych współczynników B, C i D oraz odpowiednie wartości parametrów statystycznych. Uzyskane wysokie wartości współczynników regresji R^2 równe odpowiednio: 0.9825, 0.9824, 0.9899, 0.9911 i 0.9891 dla poszczególnych poziomów naprężeń są dowodem wystarczająco dokładnego wyznaczenia współczynników równania modelu.

Tabela 2. Wyniki analizy regresji uzyskane za pomocą pakietu "STATISTICA for WINDOWS"

Wartość naprężenia [MPa]	Parametr	A *)	B	C	D
1.0	wartość odchylenie standardowe	150	0.01556 0.00149	0.88858 0.02077	1.91817 0.18603
1.5	wartość odchylenie standardowe	150	0.02499 0.00432	1.44320 0.06682	2.25509 0.66091
2.0	wartość odchylenie standardowe	150	0.03541 0.00442	2.17324 0.06788	2.41133 0.48893
2.5	wartość odchylenie standardowe	150	0.05076 0.00887	2.63284 0.14057	2.34297 0.83895
3.0	wartość odchylenie standardowe	150	0.05669 0.00443	3.07799 0.06243	2.04799 0.18942

*) wartość przyjęta na podstawie odrębnych badań (patrz tekst)

Na podstawie tych współczynników B, C i D obliczono parametry G_2 , λ_1 i λ_2 , których wartości podano w tabeli 3 (moduł ścinania G_1 jak już powiedziano - przyjęto jako 150 MPa).

Tabela 3. Wartości parametrów lepkosprężystych modelu Bürgersa

Wartość naprężenia [MPa]	Parametr	G_1	G_2	I_1	I_2
1.0	wartość	150	1.12539	64.26735	0.58670
1.5	wartość	150	1.03936	60.01921	0.46089
2.0	wartość	150	0.92028	56.48760	0.38165
2.5	wartość	150	0.94954	49.25623	0.40527
3.0	wartość	150	0.97466	52.91939	0.47591
parametry statystyczne	średnia	150	1.00185	56.58996	0.46209
	odchylenie standardowe	-	0.07321	5.25298	0.07130
	współczynnik zmienności	-	0.07307	0.09283	0.15430

Wykonano także wykresy krzywych odzwierciedlających przebieg funkcji pełzania wyznaczonej z analizy regresji, umieszczając na nich jednocześnie punkty odpowiadające rzeczywistym wartościom odkształcenia zmierzonym podczas eksperymentu. Potwierdzają się wnioski zawarte w pracy [2] dotyczące pewnych rozbieżności pomiędzy wartościami wyznaczonymi teoretycznie, a eksperymentalnymi, jednakże uznano, że pomimo ich występowania celowe jest podjęcie próby przewidywania zachowania się spoiny klejowej poddanej stałemu obciążeniu w dłuższym czasie. Na podstawie wyznaczonych parametrów lepkosprężystych dokonano ekstrapolacji teoretycznej krzywej pełzania dla różnych wartości naprężenia w czasie 100 godzin. Uzyskane rezultaty potwierdzają wynikające z istoty modelu Bürgersa założenie, że przy długim czasie pełzania istotne jest w zasadzie jedynie lepkie płynięcie materiału spoiny z prędkością niezmienną w czasie. Końcowe odkształcenie pełzania po 100 godzinach wyrażone przez tangens kąta odkształcenia postaciowego wynosi od 2.43 dla 1,0 MPa do 4.45 dla 3,0 MPa. Ponieważ, jak już stwierdzono, pełzanie na tym etapie odbywa się ze stałą prędkością, po czasie dłuższym narastające odkształcenie postaciowe spowoduje naruszenie ciągłości warstwy kleju, a tym samym zniszczenie połączenia.

4. PODSUMOWANIE

Realizacja opisanych badań związana była z opracowaniem metodyki postępowania badawczego i jej weryfikacją. Uznać można, że stworzono sprawdzony wzorzec postępowania, w wyniku którego możliwe jest określanie właściwości lepkosprężystych klejów konstrukcyjnych do drewna. Przeprowadzone badania

miały także istotny aspekt praktyczny. Określono w ich trakcie rzeczywiste właściwości reologiczne spoiny kleju polioctanowinylowego. Uznano, że opublikowanie uzyskanych wyników będzie istotną pomocą dla projektantów drewnianych konstrukcji klejonych. Przypuszczać też można, że przedstawiona metodyka badań, oparta na stosunkowo nieskomplikowanych zasadach i nie wymagająca przesadnie dużych nakładów, rozpowszechni się w stopniu umożliwiającym samodzielne badanie właściwości reologicznych spoin klejowych przez wszystkich zainteresowanych tym zagadnieniem.

LITERATURA

- [1] Gogolin M.R.: Model reologiczny drewnianego złącza klejowego. W: *Badania dla meblarstwa. Materiały VI Sesji Naukowej*, AR Poznań, 1994
- [2] Gogolin M. AR.: Właściwości reologiczne spoiny kleju polioctanowinylowego. *Badania dla meblarstwa. Materiały VII Sesji Naukowej*, AR Poznań, 1995
- [3] Gogolin M.R., Wilczyński A.: Naprężenia w spoinie klejowej połączenia zakładkowego. *Przemysł Drzewny* nr 7, 1992
- [4] Hughes E.J., Rutherford J.L.: *Creep in Adhesive - bonded Metal Joints. Adhesives Age*, nr 11, 1979
- [5] Keylwerth R., Hofer W.: Rheologische Untersuchungen an Leimfugen bei Querzugbelastung. *Holz als Roh- und Werkstoff*, nr 3, 1962
- [6] Norma ASTM D 3535-79, Resistance to deformation under static loading for structural wood laminating adhesives used under exterior (wet use) exposure conditions
- [7] Norma DIN 53254, Bestimmung der Bindfestigkeit von Längsverleimungen in Zugversuch
- [8] Reologia drewna i konstrukcji drewnianych. *Materiały II Sympozjum - Rydzyna 1986. AR Poznań*, 1986
- [9] Siegel J.: Urcenie materialovych charakteristik z Burgersovho modelu pro lepene drevo. *Drevarsky Vyskum*, nr 107, 1985
- [10] Walter F.: Fragen der Entwicklung und Vereinheitlichung der mechanisch-technologische Prüfung von Klebstoffen. *Holztechnologie (Sonderheft)*, 1964
- [11] Wilczyński A., Graj L.: Porównywanie właściwości mechanicznych drewna orzecha pochodzącego z różnych części drzewa. *Zeszyty Naukowe WSP w Bydgoszczy, Studia Techniczne*, z. 12, 1984
- [12] Wilczyński A.: Wpływ szerokości sklejanых elementów na naprężenia w spoinie klejowej sosnowej próbki blokowej dwuciętej. *Zeszyty Naukowe WSP w Bydgoszczy, Studia Techniczne*, z. 13, 1985
- [13] Wilczyński A., Gogolin M.R.: Zmienność stałych sprężystości drewna bukowego w płaszczyźnie promieniowej. *Zeszyty Naukowe WSP w Bydgoszczy, Studia Techniczne* z. 13, 1985
- [14] Wilczyński A.: Wykorzystanie elektrycznej tensometrii oporowej do wyznaczania rozkładu naprężeń w spoinie klejowej w drewnie. W: *Nauka i kształcenie kadr dla przemysłu drzewnego*, cz. 2, *Technologie i wyroby*, SGGW-AR Warszawa, 1986

- [15] Wilczyński A.: Model anizotropii właściwości sprężystych drewna. *Zeszyty Problemowe Postępów Nauk Rolniczych*, z. 334, 1987.
- [16] Wilczyński A.: Wpływ wymiarów sklejaných elementów drewnianých próbki blokowej na wytrzymałość na ścinanie spoiny klejowej. *Folia Forestalia Polonica*, ser. B - Drzewnictwo, z. 18, 1987
- [17] Wilczyński A.: badanie sprężystości spoiny klejowej w drewnie przez skręcanie złącza. W: III Sesja - Badania dla Meblarstwa, AR Poznań, 1988
- [18] Wilczyński A.: Badania naprężeń ścinających w spoinie klejowej w drewnie. Wyd. WSP w Bydgoszczy, 1988
- [19] Wilczyński A.: Wpływ szerokości sklejaných elementów na naprężenia w spoinie klejowej próbki dwuczętej *Zeszyty Naukowe WSP w Bydgoszczy, Studia Techniczne* z. 13, 1988
- [20] Wilczyński A., Gogolin M.R.: Pełzanie spoiny klejowej w drewnie. *Przemysł Drzewny*, nr 8/9, 1989
- [21] Wilczyński A., Cysewski L.: Próba wyznaczenia rozkładu naprężeń w drewnianym złączu klejonym metodą elektrycznej tensometrii oporowej. *Zeszyty Naukowe WSP w Bydgoszczy, Studia Techniczne*, z. 14, 1989
- [22] Wilczyński A.: Rozkład naprężeń w spoinie klejowej symetrycznej tarczy drewnianej. *Zeszyty Problemowe Postępów Nauk Rolniczych*, z. 379, 1990
- [23] Wilczyński A., Gogolin M.R.: Badanie właściwości sprężystych drewna sosny, buka i dębu. *Zeszyty Naukowe WSP w Bydgoszczy, Studia Techniczne*, z. 15, 1991
- [24] Wilczyński A., Dziegielewski S.: Sprężystość elementów meblowych sklejaných warstwowo. *Zeszyty Problemowe Postępów Nauk Rolniczych*, z. 379, 1990
- [25] Wilczyński A., Gogolin M.R.: Badanie pełzania spoiny kleju poliocetanowinyłowego. *Przemysł Drzewny*, nr 1, 1993
- [26] Wilczyński A., Kwieciński P.: Badania drewnianých belek dwuteowych o średniku ze sklejką W: Badania dla meblarstwa Materiały VI Sesji Naukowej, AR Poznań, 1994
- [27] Zenktelek M., Trojanowska A.: Grubość spoin klejowych a ich wytrzymałość. *Prace Komisji Technologii Drewna PTPN*, t.1, z.2, 1973

INVESTIGATIONS OF VISCOELASTIC PROPERTIES OF GLUELINES, JOINING WOOD CONSTRUCTION ELEMENTS

Summary

In this paper describes the state of investigations of adhesive - bonded joints creeping and results of experiments. Applied testing method and devices were presented.

Biblioteka Główna ATR
w Bydgoszczy

Cz	1006 37 1995
----	-----------------

ISSN-0208-6395