

13  
AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA  
i m. JANA I JĘDRZEJA SNIADKICH  
W BYDGOSZCZY

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 50



MECHANIKA

(18)

EDWARD WALICKI

RUCH PŁYNÓW LEPKICH W SZCZELINACH WZDŁUŻNYCH  
ŁOŻYSK ŚLIZGOWYCH

BYDGOSZCZ 1977

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA  
i m. JANA I JĘDRZEJA SNIADKICH  
W BYDGOSZCZY

## ZESZYTY NAUKOWE

Nr 50

## MECHANIKA

(18)

EDWARD WALICKI

**RUCH PŁYNÓW LEPKICH W SZCZELINACH WZDŁUŻNYCH  
ŁOŻYSK ŚLIZGOWYCH**

BYDGOSZCZ 1977



REDAKTOR NACZELNY

Juliusz Skonieczny

REDAKTOR TECHNICZNY

Halina Koziołkiewicz

REDAKTOR NAUKOWY

Tadeusz Boenigk

Wydano za zgodą Rektora  
Akademii Techniczno-Rolniczej  
w Bydgoszczy

Strona P 61/78

78D.14/12

## Spis treści

	Strona
1. Cel pracy .....	7
2. Stan aktualny zagadnienia .....	10
3. Równania ruchu płynu lepkiego .....	21
3.1. Współrzędne krzywoliniowe .....	21
3.2. Płyny jednorodne o lepkości newtonowskiej .....	26
3.3. Płyny mikropolarne .....	30
4. Uprozczone formy równań ruchu .....	31
4.1. Równania ruchu płynu newtonowskiego .....	32
4.2. Równania ruchu płynu mikropolarnego .....	34
5. Ruch płynu niemagnetycznego o stałych współ- czynnikach materiałowych .....	36
5.1. Równania ruchu i warunki brzegowe .....	36
5.2. Całki równań ruchu .....	38
5.3. Przypadki szczególne ruchu .....	42
5.3.1. Przypadek symetrii kołowej .....	42
5.3.2. Przypadek ruchu ustalonego .....	43
5.3.3. Przypadki szczególne równania Reynoldsa .....	44
5.4. Profile i prędkości temperatur w szczel- linie .....	45
5.5. Rozkład ciśnienia w szczelinie .....	51
5.6. Parametry mechaniczne łożyska .....	54

6. Ruch płynu niemagnetycznego o zmiennych współczynnikach materiałowych .....	56
6.1. Całki równań ruchu .....	56
6.2. Przypadki szczególne przepływu .....	60
6.2.1. Przepływ cieczy o stałej lepkości i przewodności .....	60
6.2.2. Zlinearyzowane rozwiązanie dla $\mu = \mu(T)$ oraz $\lambda = \lambda(T)$ .....	60
6.3. Profile prędkości dla liniowego przybliżenia .....	62
7. Ruch nieściśliwego płynu magnetycznego o stałych współczynnikach materiałowych .....	66
7.1. Równania ruchu. Całki równań ruchu .....	66
7.2. Profile prędkości .....	71
8. Ruch ściśliwego płynu niemagnetycznego o zmiennych współczynnikach materiałowych .....	75
8.1. Całki równań ruchu .....	75
8.2. Przypadki szczególne ruchu .....	79
8.2.1. Rozwiązanie dla stałych wartości $\mu$ i $\lambda$ .....	79
8.2.2. Przybliżone rozwiązanie dla $\mu = \mu(T)$ oraz $\lambda = \lambda(T)$ .....	80
8.2.3. Przybliżone rozwiązanie dla stałych wartości $\mu$ i $\lambda$ .....	83
8.2.4. Rozwiązania dla przepływu izotermicznego .....	83
8.3. Profile prędkości dla liniowego przybliżenia .....	83

8.4. Rozkład ciśnienia w szczelinie dla izotermicznego ruchu .....	86
9. Ruch ściśliwego płynu magnetycznego o stałych współczynnikach materiałowych .....	88
10. Ruch płynu mikropolarnego .....	91
10.1. Warunki brzegowe .....	91
10.2. Całki równań ruchu .....	92
10.3. Profile prędkości .....	94
11. Zakończenie i podsumowanie .....	100
12. Aneks: równania, wzory i oszacowania .....	106
12.1. Równania ruchu płynu newtonowskiego .....	106
12.2. Równania ruchu płynu mikropolarnego .....	108
12.3. Klasyfikacja przepływów w łożyskach .....	110
12.4. Wzory pomocnicze opisujące niektóre funkcje z rozdziału 6 .....	113
12.5. Wzory pomocnicze opisujące niektóre funkcje z rozdziału 7 .....	116
12.6. Obliczenia i wzory pomocnicze dla rozdziału 8 .....	118
12.7. Wzory pomocnicze dla rozdziału 9 .....	121
12.8. Wzory pomocnicze dla rozdziału 10 .....	121
Literatura .....	123



## 1. Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest podanie i omówienie ogólnych rozwiązań dla przepływów płynów lepkich zarówno newtonowskich jak i nienewtonowskich w szczelinach krzywoliniowych wzdłużnych łożysk ślizgowych z jednoczesnym uwzględnieniem pola temperatury i odśrodkowych sił bezwładności.

Pod terminem "rozwiązania ogólne" rozumie się tutaj rozwiązanie analityczne odpowiednio uproszczonych równań ruchu płynu lepkiego, charakterystycznych dla przepływów w cienkich warstwach ograniczonych sztywnymi ściankami. Rozważania prowadzono dla płynów elektrycznie nieprzewodzących i przewodzących, badając wpływ pola magnetycznego na zachowanie się tych ostatnich. Aby uniknąć dwuznaczności przy operowaniu zwrotem "płyn przewodzący" /kojarzącym się zazwyczaj z przewodzeniem ciepła/, w dalszej części pracy używa się nie budzących wątpliwości zwrotów "płyn magnetyczny" lub "płyn niemagnetyczny".

Rozważania zawarte w pracy można logicznie podzielić na cztery części:

Część pierwszą - o charakterze wstępu - stanowią rozdziały 1 + 4, w których - po przedstawieniu aktualnego stanu zagadnienia - formułuje się ogólne równania ruchu płynów lepkich, a następnie podaje się równania właściwe



dla przepływów w cienkich warstwach.

W drugiej części, na którą składają się rozdziały 5 + 7, rozważa się przepływy płynów nieściśliwych /cieczy/ newtonowskich w szczelinie między wirującymi /w ogólności mimośrodowo/ powierzchniami obrotowymi. Rozwiązania równań ruchu dla płynów niemagnetycznych oparte są na założeniu bądź stałej lepkości i przewodności cieplnej, bądź lepkości i przewodności będących funkcjami temperatury. Dla przypadku zmiennych lepkości i przewodności cieplnej w celu uzyskania efektywnych rozwiązań zastosowano linearyzację odpowiednich zależności funkcyjnych. Rozwiązania równań ruchu dla płynów magnetycznych ograniczono do przypadku stałych wartości współczynników materiałowych /lepkość, przewodność cieplna i przewodność elektryczna/. Rozważania dla przepływów płynów magnetycznych zawężono do przypadku małych wartości pól elektrycznych i magnetycznych /co jest całkowicie uzasadnione w teorii łożysk ślizgowych/ pozwalających na pominięcie wpływu wielkości indukowanego ruchem płynu.

Część trzecia pracy - składająca się z rozdziałów 8 i 9 - poświęcona została przepływowi płynów ściśliwych zarówno niemagnetycznych, jak i magnetycznych. Tutaj rozważania dla przepływów płynów magnetycznych ograniczono w zasadzie do przepływów izotermicznych.

W części czwartej stanowiącej treść rozdziału 10 rozważa się pewną ogólniejszą klasę płynów nienewtonow-

skich, mianowicie płynów mikropolarnych /nazywanych inaczey płynami z mikrostrukturą/. Rozważania - ze względu na zastosowania praktyczne - ograniczono do przypadku przepływu płynów nieściśliwych.

Rozwiązania przytoczone w kolejnych punktach pracy omówiono oddzielnie dla poszczególnych przypadków przepływu z dwu zasadniczych powodów:

po pierwsze: nie wszystkie przypadki przepływu są jednako interesujące dla praktyki;

po drugie: nie dla wszystkich przepływów uzyskuje się rozwiązania w zamkniętej postaci.

Ponieważ praca ta - oprócz celów poznawczych - ma ułatwiać /lub w wielu przypadkach w ogóle umożliwiać/ przeprowadzenie obliczeń przepływu w łożyskach ślizgowych - konieczne jest podanie odpowiednich formuł w możliwie prostej postaci dogodnej do zastosowań praktycznych, a zarazem zapewniającej wystarczającą dokładność.

Dla większej przejrzystości rozważań, niektóre równania różniczkowe, oszacowania i wzory pomocnicze zebrano w Aneksie.

## 2. Stan aktualny zagadnienia

Dotychczasowe rozwiązania zagadnienia przepływu płynu lepkiego w szczelinach łożysk ślizgowych można podzielić ogólnie na dwie zasadnicze klasy: rozwiązania opisujące przepływ w łożyskach poprzecznych - ograniczonych cylindrycznymi powierzchniami czopa i panwi oraz rozwiązania opisujące przepływy w płaskich wzdłużnych łożyskach ślizgowych modelowanych przez dwie równoległe tarcze kołowe. Niejako na pograniczu tych dwu klas znalazły się rozwiązania odpowiadające przepływowi w szczelinach łożysk o kulistym lub stożkowym zarysie powierzchni, a więc rozwiązania szczególnych przypadków przepływu w krzywoliniowych szczelinach wzdłużnych łożysk ślizgowych.

Ze względu na pewne podobieństwa tych przepływów wynikające z podstawowego założenia o małej grubości warstwy płynu uczestniczącego w ruchu, istnieje pewne podobieństwo metod badawczych. Stąd siłą rzeczy, niniejsze przedstawienie aktualnego stanu zagadnienia musi nawiązywać również do obu wymienionych klas rozwiązań przepływów.

Ze względu na zakres pracy ograniczymy się tylko do omówienia niektórych prac bardziej ciekawych lub charakterystycznych dla poszczególnych grup łożysk; jednak bardziej szczegółowo zajmiemy się pracami z ostatnich lat

wskazującymi na rosnące zainteresowanie klasą przepływów w łożyskach o zakrzywionych powierzchniach będących przedmiotem tej pracy.

Historycznymi już pracami rozważającymi ruch w cienkich warstwach płynu są prace Pietrowa [1] i Reynoldsa [2] omawiające przepływy między wirującymi powierzchniami cylindrycznymi. W obu tych pracach zajmowano się przepływami nieściśliwych lepkich płynów newtonowskich.

Pierwszymi pracami, w których rozważano szczególnie przypadki przepływu w łożyskach o krzywoliniowych szczelinach były prace Wanniera [3], Gottwalda i Viewega [4], Wannerusa [7], Łojcjańskiego [8,9] oraz praca Łojcjańskiego i Stiepanjanca [11]. Właśnie w tych pracach zajmowano się ruchem płynu newtonowskiego w szczelinach łożysk stożkowych i kulistych.

W dalszej kolejności podejmowano próby badań przepływów w cienkich warstwach w dowolnym kształcie, dochodząc do różnych zapisów równania różniczkowego Reynoldsa dla określenia rozkładu ciśnienia. Przykładami mogą być tutaj prace Dowsona [15] i Sagota [16].

Następnie zaczęły pojawiać się opracowania odnoszące się do przepływów między płaskimi tarczami kołowymi mogące stanowić modele płaskich wzdłużnych łożysk ślizgowych [5,6,12,22].

Równocześnie z rozwojem metod analitycznych obserwuje się wzrost zainteresowania badaniami numerycznymi ru-

chu płynu w łożyskach. Rozwiązania numeryczne oparte są bądź na klasycznej już metodzie różnic skończonych, bądź - zwłaszcza ostatnio - na metodzie elementów skończonych.

Rozwiązania te obejmowały zarówno przepływy w łożyskach poprzecznych o cylindrycznym zarysie współpracujących powierzchni, jak również modelowe przepływy między wirującymi powierzchniami kulistymi [27, 31, 45, 53].

Dążenie do zapewnienia niezawodnej pracy łożysk ślizgowych w warunkach spotykanych w wielu współczesnych urządzeniach i maszynach spowodowało pojawienie się specyficznych mediów smarnych. Można wymienić tutaj: elektrolity i ciekłe metale, płyny ferromagnetyczne, a także zjonizowane gazy. Media te często pracują w obecności silnych pól magnetycznych lub elektrycznych.

Konieczność uwzględnienia zjawisk zachodzących przy przepływach tego rodzaju płynów w łożyskach wzdłużnych doprowadziła do badań przepływów magnetohydrodynamicznych, których opisy znajdują się w podanej literaturze [26, 28, 36, 55, 59, 60].

Problem wydłużenia czasu przydatności do pracy czynników smarnych, a zwłaszcza olejów, skłonił konstruktorów maszyn do stosowania specjalnych dodatków uszlachetniających. W szczególności mogą to być:

- dodatki antykorozyjne - chroniące elementy metalowe przed korozją;
- dodatki myjące /detergenty/ - mające na celu zmyć i utrzymać w zawieszynie cząstki nierozpuszczalne w oleju;

- dodatki mające na celu poprawienie smarności przy tarcu granicznym.

Dodatki takie mogą powodować fizykalne zmiany własności lepkościowych smarów, co prowadzi do konieczności posłużenia się teorią smarowania nienewtonowskiego.

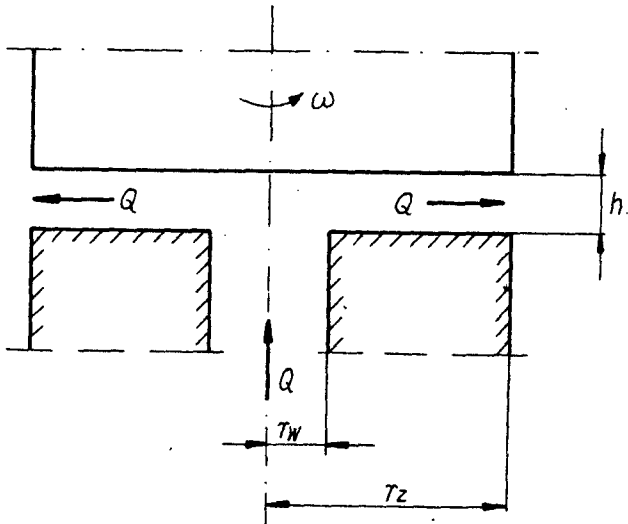
Jak wykazały badania doświadczalne, większość uszlachetnionych smarów zaliczyć można do grupy płynów z mikrostrukturą [37,48,50,58].

Zdecydowana większość autorów wymienionych w załączonym spisie literatury traktuje przepływ w łożyskach w tzw. przybliżeniu Reynoldsa pomijając całkowicie siły bezwładności - co jest słuszne w odniesieniu do wolnoobrotowych łożysk. Ponieważ wirniki wielu budowanych obecnie maszyn osiągają znaczne prędkości obrotowe powodujące tym samym znaczne prędkości przepływu czynnika smarnego w łożyskach, należy choćby częściowo uwzględnić wpływ sił bezwładności.

Spośród już wymienionych tutaj prac i z prac przytoczonych w spisie literatury, a zawierających badania łożysk wzdłużnych, uwzględniono wpływ odśrodkowych sił bezwładności na przepływ czynnika smarnego jedynie w pracach [19,22,28,29,33,36,39,47,51,52,54,55,62,65-71].

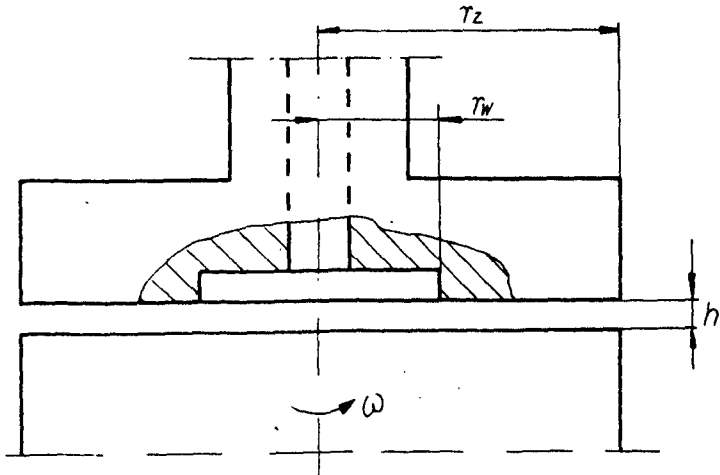
Badaniami wpływu sił bezwładności na przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między płaskimi tarczami, z których jedna wiruje /rys.1.1/ zajmował się Gołubiew [19,22].

Natomiast Bassani [32] przeprowadza pewne bardzo ogólne rozważania dotyczące przepływu cieczy lepkiej, o



Rys.1.1.

lepkości zmiennej w funkcji temperatury, w szczelinie  
wzdłużnego płaskiego łożyska ślizgowego /rys.1.2/.



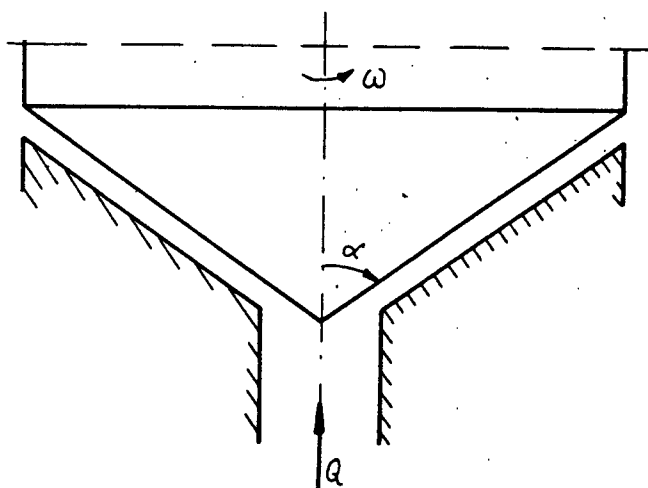
Rys.1.2.

Anderson, Fleming i Parker [51] podając przykłady konstrukcyjne połączenia łożyska poprzecznego i wzdłużnego uwzględniają w rozważaniach przepływu w łożysku wzdłu-

znym wpływ odśrodkowych sił bezwładności.

Model izotermicznego przepływu gazu lepkiego w szczelinie między płaskimi wirującymi tarczami /rys.1.1/ był przedmiotem badań Zuka i Ludwiga [47].

Rozważania dotyczące przepływów w łożyskach stożkowych /rys.1.3/ można znaleźć w pracach Szaniawskiego [29], Apanasewicza, Kazimierskiego, Lewandowskiego i Szaniawskiego [39] oraz autora tej pracy [54].



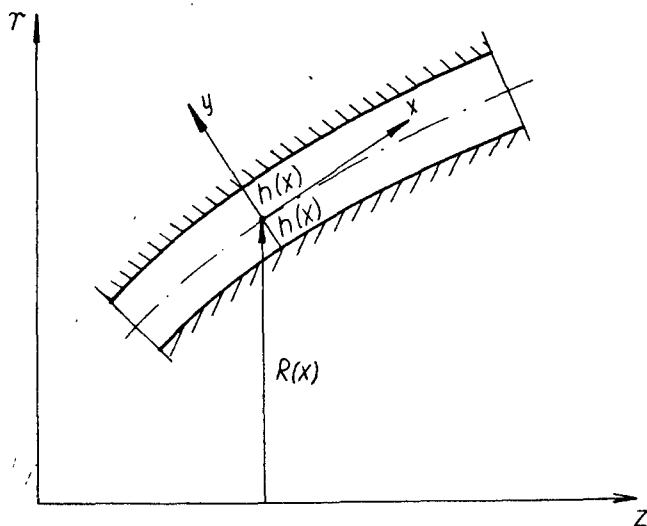
Rys.1.3.

W pracach [29,54] badano przepływ cieczy, natomiast w pracy [39] przepływ gazu. W rozważaniach dotyczących przepływu gazu zbadano szczególnie przepływ izotermiczny, jak również przepływ gazu o lepkości zmieniającej się w funkcji temperatury.

Badaniami przepływów między wirującymi lub nieruchomymi powierzchniami obrotowymi o krzywoliniowych tworzą-



cych /rys.1.4/ zajmowali się McAlister i Rice [33, 52]. Ich rozważania oparte na równaniach typowych dla warstwy przyściennej są słuszne jedynie dla pewnych zadanych kształtów tworzących powierzchnie ograniczających przepływ.

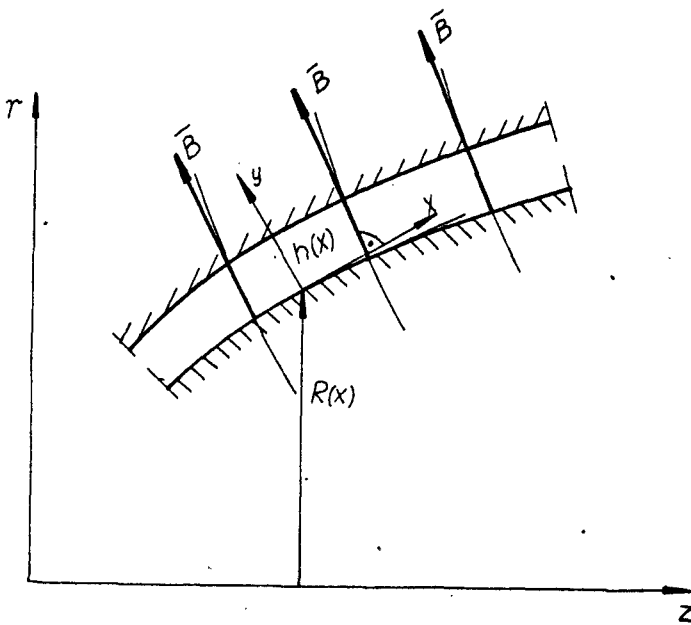
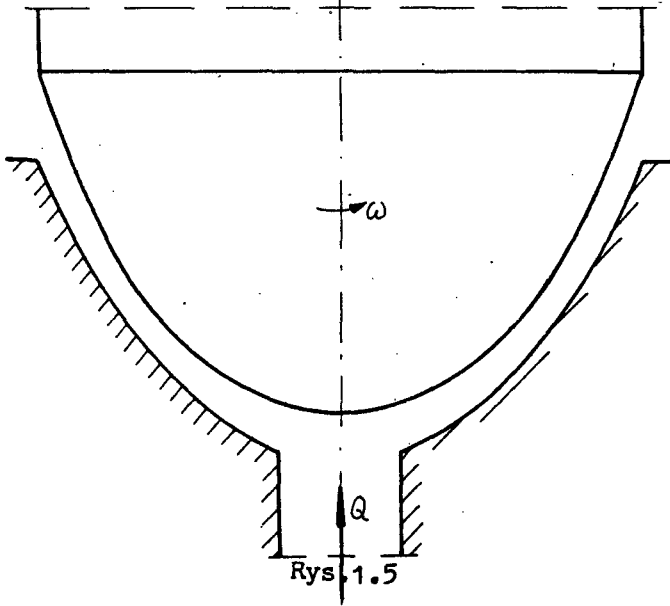


Rys.1.4

Badaniami przepływów magnetycznych w odniesieniu do płaskich łożysk wzdłużnych /rys.1.1/ w obecności prostopadłego /do płaszczyzny tarcz ograniczających szczelinę/ pola magnetycznego zajmowali się Kamiyama [28,36] oraz Kamiyama i Sato [33]. W ostatnich dwu pracach podjęto nawet próbę uwzględnienia wpływu przewodności elektrycznej ścianek ograniczających na ruch czynnika smarnego.

Odrębną grupę stanowią badania przepływów - z uwzględnieniem odśrodkowych sił bezwładności - płynów lepkich w szczelinie łożysk ślizgowych o krzywoliniowym zarysie współpracujących powierzchni /rys.1.5/ lub w szczel-

linach między wirującymi powierzchniami obrotowymi /rys. 1.4, 1,6/ przeprowadzone przez autora tej pracy [62,65 - 71].



Rys.1.6

Rozważania dotyczące przepływu cieczy niemagnetycznej o stałej lepkości przeprowadzono w pracach [62,65,67] podając formuły określające profile prędkości i ciśnienia dla szczelin o dowolnym kształcie i o zmiennej grubości.

Natomiast w pracach [66,71] zbadano przepływy cieczy lepkiej o zmiennej lepkości i przewodności cieplnej.

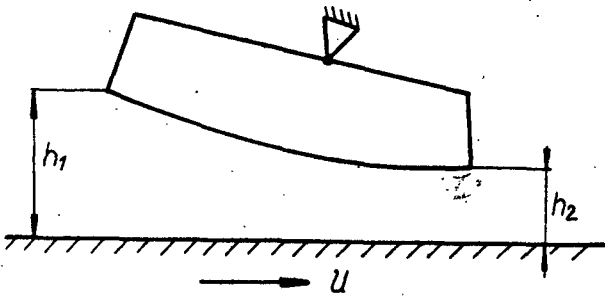
Przepływ lepkiego i przewodzącego ciepło gazu w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi modelującymi łożysko gazowe był przedmiotem pracy [70]. Rozważania ogólne prac [70,71] zilustrowano tzw. przybliżeniami liniowymi dla lepkości i przewodności cieplnej.

Przedmiotem pracy [68] jest przepływ cieczy magnetycznej w wąskiej szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi zachodzący w obecności pola magnetycznego /rys.1.6/. Przepływ ten może stanowić model przepływu w łożysku magnetycznym.

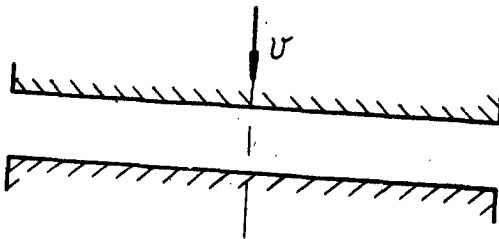
Nieco odmienne podejście do zagadnienia wpływu sił bezwładności przedstawiono w pracy [69], mianowicie - wychodząc z równań warstwy przyściennej w ortogonalnym układzie współrzędnych krzywoliniowych - wyprowadzono pewne ogólne równania pozwalające określić rozkład ciśnienia w łożysku o dowolnym kształcie. Wpływ sił bezwładności uwzględniono poprzez uśrednienie członów bezwładnościowych w równaniach warstwy przyściennej.

Omówione tutaj szczegółowo prace odnosiły się do badań ruchu płynów newtonowskich.

Spotykane w literaturze opisy badań przepływów mikropolarnych odnoszą się do dwi zasadniczych rodzajów łożysk, tj. do łożysk płytkowych /rys.1.7/, bądź łożysk z wyciskany filmem /rys.1.8/. W obu przypadkach pomijano wpływ sił bezwładności.



Rys.1.7



Rys.1.8

Przedstawiona praca - zawierająca badania ruchu czynników smarnych newtonowskich i nienewtonowskich w szczelinach wzdłużnych łożysk ślizgowych - oparta jest na oryginalnych już publikowanych, bądź niepublikowanych dotąd pracach autora. Nie jest to jednak zwykle zestawienie prac własnych, lecz odrębna całość zawierająca kompleksowe opracowanie zagadnień ruchu płynów lepkich w łożyskach o krzywoliniowym zarysie współpracujących powierzchni.

Pisząc pracę starano się:

- ująć wpływ odśrodkowych sił bezwładności dla wszystkich rodzajów omawianych mediów smarnych;
- wyprowadzić zależności określające profile prędkości i ciśnienia w szczelinach krzywoliniowych wzdłużnych łożysk ślizgowych o dowolnym zarysie współpracujących powierzchni.

Uzyskane w ramach pracy wzory można stosować do obliczeń łożysk wzdłużnych płaskich, stożkowych, kulistych, czy też o parabolicznym lub eliptycznym zarysie powierzchni.

### 3. Równania ruchu płynu lepkiego

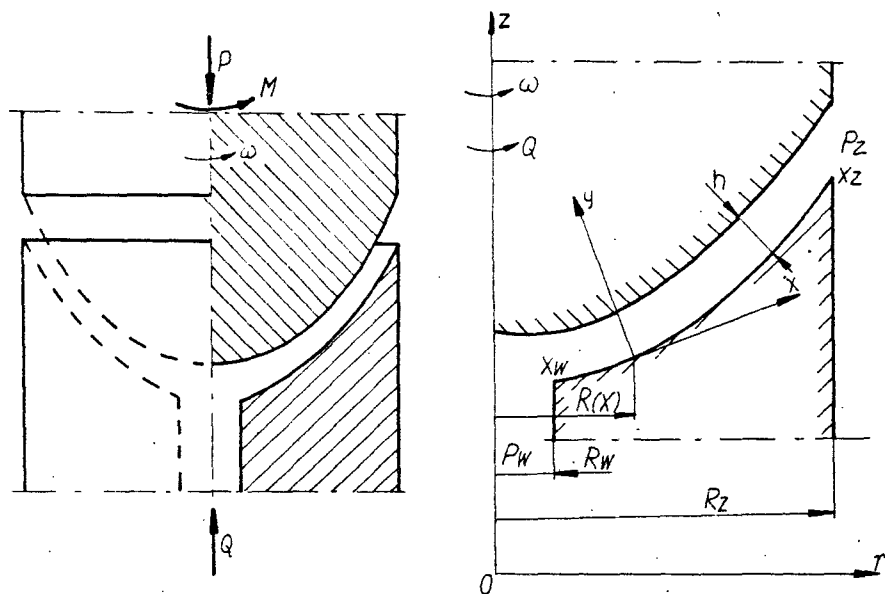
W rozdziale tym przedstawione zostaną równania ruchu dwu podstawowych modeli płynów lepkich, a mianowicie: płynów jednorodnych o lepkości newtonowskiej. /ściśliwych i nieściśliwych/ oraz nieściśliwych płynów z mikrostrukturą.

O płynach tych będziemy zakładać, że są płynami przewodzącymi /elektrycznie/ i w ogólności mogą być poddane działaniu pól elektromagnetycznych.

Równania ruchu płynu lepkiego - niezależnie od jego struktury i rodzaju lepkości - można otrzymać w oparciu o zasady zachowania masy, pędu, momentu pędu i energii. Ze względu na cel i założenia pracy w dalszej części tego rozdziału ograniczymy się tylko do krótkiego omówienia równań ruchu dla każdego ze stosowanych tutaj modeli płynu lepkiego.

#### 3.1. Współrzędne krzywoliniowe

Obszar przepływu płynu w krzywoliniowym łożysku wzdłużnym pokazano schematycznie na rysunku 3.1.

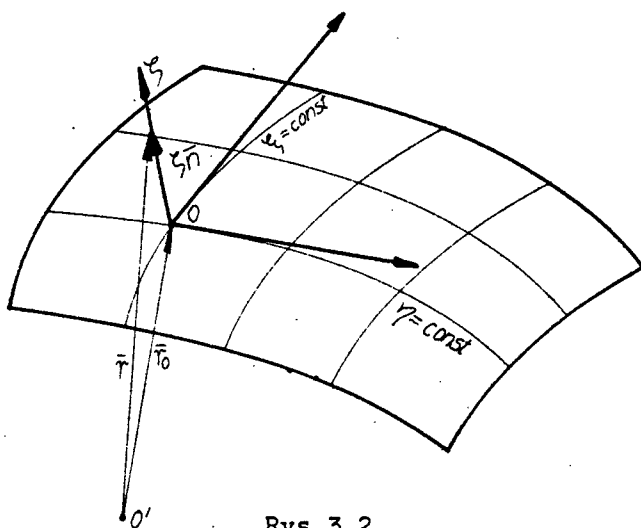


Rys.3.1

Nieruchoma powierzchnia niech będzie opisana funkcją  $R/x/$  oznaczającą promień tej powierzchni. Grubość szczeliny  $h/x, \sigma, t/$  niech będzie wielkością małą w porównaniu do promienia  $R$ , co wyrazi się zależnością:

$$h(x, \sigma, t) \ll R(x) \quad (3.1)$$

Wprowadzimy krzywoliniowy, lokalnie ortogonalny układ współrzędnych  $x, \sigma, y$  związany z nieruchomą powierzchnią. Aby wyrazić równania ruchu w przyjętym układzie współrzędnych należy określić współczynniki Lamégo. W tym celu rozważmy przedstawiony na rysunku 3.2 element powierzchni ograniczającej przepływ z zaznaczonymi liniami  $\xi = \text{const.}$  oraz  $\eta = \text{const.}$  tworzącymi ortogonalną siatkę



Rys.3.2

kę . Wektorowe równanie rozważanej powierzchni można przedstawić w postaci

$$\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_0(\xi, \eta)$$

Położenie dowolnego punktu przestrzeni - leżącego w odległości  $\xi$  mierzonej wzdłuż normalnej, określa wektor

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_0(\xi, \eta) + \xi \bar{n}(\xi, \eta)$$

Kwadrat elementu długości w ortogonalnym układzie współrzędnych  $\xi, \eta, \xi$  jest równy

$$ds^2 = (d\bar{r})^2 = \left(\frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \bar{n}}{\partial \xi}\right)^2 d\xi^2 + \left(\frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial \bar{n}}{\partial \eta}\right)^2 d\eta^2 + d\xi^2$$

Zakładając, że współrzędne  $\xi$  i  $\eta$  pokrywają się z liniami krzywiznowymi powierzchni oraz stosując wzory Rodrigues'a [10]:



$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial r_0}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \eta} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}$$

mamy

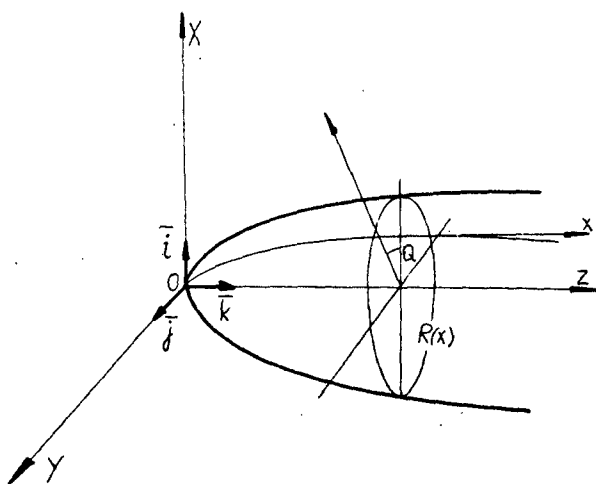
$$ds^2 = \left(\frac{\partial r_0}{\partial \xi}\right)^2 \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right)^2 d\xi^2 + \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}\right)^2 \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right)^2 d\eta^2 + d\xi^2$$

gdzie:

(3.2)

$R_1, R_2$  oznaczają odpowiednio promienie krzywizny powierzchni. Dla powierzchni obrotowej przedstawionej na rysunku 3.3 w układzie współrzędnych  $X, Y, Z$  równanie wektorowe przyjmie postać [41]:

$$\bar{\tau}_0 = \bar{i} R(x) \cos \theta + \bar{j} R(x) \sin \theta + \bar{k} Z(x) \quad (3.3)$$



Rys. 3.3

Podstawiając (3.3) do (3.2) i przyjmując

$$\xi = x, \quad \eta = \theta, \quad \zeta = y$$

otrzymamy po prostych wyliczeniach:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{y}{R_1}\right)^2 dx^2 + R^2 \left(1 + \frac{y}{R_2}\right)^2 d\theta^2 + dy^2 \quad (3.4)$$

przy czym  $R_1, R_2 \geq R$ .

Wracając do przepływu stanowiącego temat pracy zauważymy, że  $y \leq h$ ; przy założeniu (3.1) wyrażenie określające kwadrat elementu liniowego w układzie współrzędnych  $x, \theta, y$  można zapisać w postaci:

$$ds^2 = dx^2 + R^2 d\theta^2 + dy^2 \quad (3.5)$$

Zatem współczynniki Lamégo będą równe:

$$H_x = 1, \quad H_\theta = R(x), \quad H_y = 1 \quad (3.6)$$

Stosując współczynniki Lamégo we wzorach wynikających z zasad zachowania [34, 61] możemy otrzymać zamknięty układ równań ruchu płynu w przyjętym tutaj do rozważań krzywoliniowym układzie współrzędnych.

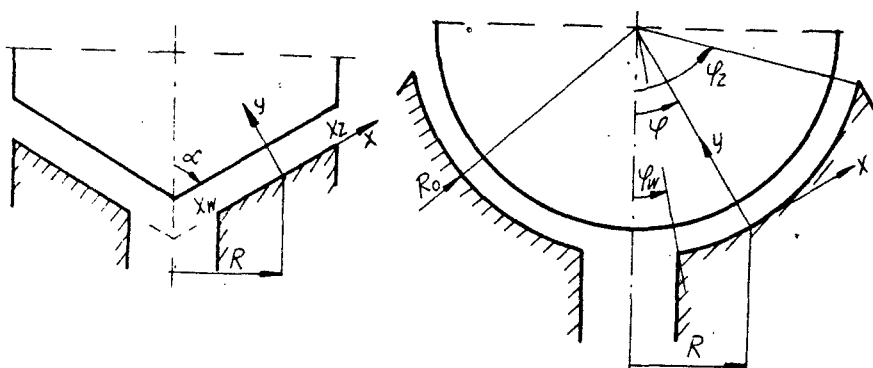
Dla typowych łożysk pokazanych na rysunku 3.4 wartości współczynników Lamégo będą wynosiły:

dla łożyska stożkowego

$$H_x = 1, \quad H_\theta = x \sin \alpha, \quad H_y = 1 \quad (3.6.a)$$

zaś dla łożyska kulistego

$$H_x = 1, \quad H_\theta = R_0 \sin \varphi, \quad H_y = 1 \quad (3.6.b)$$



Rys.3.4

gdzie użyto oznaczenia  $\varphi = \frac{x}{R_0}$

### 3.2. Płyny jednorodnie o lepkości newtonowskiej

Spośród licznych postaci zapisu równań ruchu płynu jednorodnego o lepkości newtonowskiej posłużymy się tutaj zapisem wektorowo - tensorowym zaczerpniętym z prac [14, 34, 35]. Podstawowymi równaniami ruchu jednorodnego płynu magnetycznego /omawiamy płyn magnetyczny, bowiem płyn niemagnetyczny można traktować jako szczególny przypadek/ poddanego działaniu pola elektromagnetycznego są:

równanie ciągłości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0 \quad (3.7)$$

równanie pędu:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \text{Div} \bar{S} + \bar{j} \times \bar{B} \quad (3.8)$$

równanie energii wewnętrznej

$$\rho \frac{d}{dt} (c_v T) = \text{div} (\lambda \text{grad} T) + \text{div} (S \bar{U}) +$$

$$- \bar{U} \text{Div} S + \bar{J} \cdot \bar{E} - (\bar{J} \times \bar{B}) \cdot \bar{U} \quad (3.9)$$

Tutaj dla uproszczenia zapisu przyjęto:

$$S = 2\mu T_d - \left[ \rho + \frac{2}{3} \mu \text{div} \bar{U} \right] \cdot \bar{\varepsilon} \quad (3.10)$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają:

$S$  - tensor naprężeń

$T_d$  - tensor prędkości deformacji

$\bar{\varepsilon}$  - jedność tensorowa

W celu zamknięcia układu równań (3.7 - 3.10) musimy połączyć równania Maxwella wiążące parametry pola elektromagnetycznego:

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} \quad (3.12)$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0 \quad (3.13)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (3.14)$$

prawo Ohma

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) \quad (3.15)$$

oraz równania wiążące gęstość pływu z parametrami stanu

$$\rho = \rho(T, p) \quad (3.16)$$

Współczynniki materiałowe takie, jak współczynnik lepkości  $\mu$ , współczynnik przewodności cieplnej  $\lambda$  i  $\mu$  współczynnik przewodności elektrycznej  $\sigma$  również wiąże się z parametrami stanu.

W teorii łożysk /a zwłaszcza łożysk "słabo" obciążonych, to znaczy pracujących przy ciśnieniach  $p \leq 10^7 \text{ N/m}^2$  czynnika roboczego/ przyjmuje się uproszczone zależności:

$$\mu = \mu(T) \quad (3.17)$$

$$\lambda = \lambda(T) \quad (3.18)$$

$$\sigma = \sigma(T) \quad (3.19)$$

W rozważaniach dotyczących ruchu płynów magnetycznych ograniczymy się do tzw. przybliżenia hydrodynamicznego [14, 35], to znaczy do założenia:

- małych wartości wektora natężenia pola elektrycznego  $E$ ;
- małych wartości magnetycznej liczby Reynoldsa:

$$Rm \ll 1$$

(3.20)

Przy tych założeniach w równaniach ruchu można pominąć wpływ pola elektrycznego oraz indukowanego pola magnetycznego na przepływ płynu [14,35].

Dodatkowo założymy - bez istotnego zmniejszenia ogólności dalszych rozważań - że wektor pola magnetycznego  $\vec{B} (0,0 B_0)$  jest prostopadły do tworzącej jednej ze ścianek ograniczających przepływ /rys.1.6/. Założenie to pozwalające dokonać pewnego formalnego uproszczenia równań ruchu i formuł końcowych - jest jednocześnie uzasadnione konstrukcją wzdłużnych łożysk ślizgowych prowadzącą do wytwarzania tak działającego pola magnetycznego. Posługując się współczynnikami Lamégo wyprowadzonymi w punkcie 3.1 można równania ruchu (3.7 - 3.9) wyrazić w krzywoliniowym układzie współrzędnych  $x, \sigma, y$  - dla przybliżenia hydrodynamicznego w postaci / zamieszczonej w Aneksie/ dogodnej do dalszych rozważań.

Dla stałych wartości  $\varrho, \mu, \lambda$  można wyznaczyć pole prędkości i ciśnień w oparciu o równanie ciągłości (3.7) i równanie pędu (3.8) [34].

### 3.3. Płyny mikropolarne

Ze względów czysto praktycznych ograniczymy się do rozważenia przepływów nieściśliwych płynów z mikrostrukturą, dla których równanie stanu przyjmie postać określoną wzorem:

$$\varrho = \text{const.} \quad (3.21)$$

Podstawowymi równaniami ruchu nieściśliwego płynu mikropolarnego są [23,24,30,38,49] :

równanie ciągłości:

$$\text{div } \bar{U} = 0 \quad (3.22)$$

równanie pędu:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d\bar{U}}{dt} = & - \text{grad } p + k \text{rot } \bar{\Omega} + \\ & - (\mu + k) \text{rot rot } \bar{U} \end{aligned} \quad (3.23)$$

równanie momentu pędu:

$$\begin{aligned} \varrho j \frac{d\bar{\Omega}}{dt} = & - 2k \bar{\Omega} + k \text{rot } \bar{U} - \gamma \text{rot rot } \bar{\Omega} + \\ & + (\alpha + \beta + \gamma) \text{grad } (\text{div } \bar{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdzie symbolem  $\bar{\Omega}$  - oznaczono wektor mikrorotacji elementu płynu; symbolem  $j$  - gęstość mikrobezwładności.

Dla nieściśliwych płynów mikropolarnych przyjmuje się, że współczynniki materiałowe są wielkościami stałymi, przy czym

$\mu$  - jest klasyczną lepkością ścinania,

$k$  - jest lepkością sprzężenia

$\alpha, \beta, \gamma$  - są lepkościami obrotowymi.

Przy założeniu stałych wartości gęstości płynu i współczynników materiałowych pole przepływu dla płynu mikropolarnego jest - podobnie jak w przepływach klasycznych płynów newtonowskich - niezależne od pola temperatur. Zatem równania: ciągłości (3.22), pędu (3.23) i momentu pędu (3.24) stanowią zamknięty układ równań ruchu, który w krzywoliniowym układzie współrzędnych  $x, \theta, y$  można wyrazić w postaci zamieszczonej w Aneksie /punkt 12.2/.

#### 4. Uproszczone formy równań ruchu

Ograniczymy się do zbadania przepływów w cienkich warstwach charakterystycznych dla przepływów w łożyskach ślizgowych.

Zakładając, że grubość szczeliny  $h/x, \theta, y$  między powierzchniami ograniczającymi przepływ spełnia warunek (3.1) można dokonać oszacowania wielkości poszczególnych składników równań ruchu podanych w rozdziale 3 pracy. Ponieważ sposób przeprowadzania oszacowania jest typowy [21,22,29,32] i dość prosty - nie będziemy się nim



tutaj zajmować. Pewne szczegóły dotyczące oszacowania podano w punkcie 12.3.

Dokonując w równaniach ruchu podanych w rozdziale 3 odpowiednich przejść asymptotycznych otrzymamy równania ruchu określające przepływ w cienkich warstwach.

#### 4.1. Równania ruchu płynu newtonowskiego

Uwzględniając oszacowania opisane w punkcie 12.3 pracy i zakładając izotermiczność ścianek ograniczających przepływ możemy otrzymać z równań podanych w rozdziale 3 /lub w Aneksie/ uproszczone układy równań opisujące ruch płynu newtonowskiego w szczelinie krzywoliniowego łożyska ślizgowego. Zgodnie z wywodami punktu 12.3 podane zostaną równania dla obu klas przepływu.

Dla pierwszej klasy będzie:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial (R \rho u_x)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial (\rho v \sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\partial (\rho v u_y)}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(T) \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] - \sigma B_0^2 u_x \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(T) \frac{\partial v \sigma}{\partial y} \right] - \sigma B_0^2 v \sigma \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \mu(T) \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial y} \right)^2 \right] + 6 B_0^2 (u_x^2 + u_\theta^2) = 0$$

(4.5)

Dla drugiej klasy przepływu - zgodnie z oszacowaniami (12.19) równania (4.2) i (4.5) zastępuje się równaniami

$$-\rho u_\theta^2 \frac{R'}{R} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(T) \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] - 6 B_0^2 u_x \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \mu(T) \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial y} \right)^2 + 6 B_0^2 u_\theta^2 = 0 \quad (4.7)$$

przecinek przy symbolu  $R$  oznacza pochodną względem zmiennej  $x$ . Równania (4.1 - 4.7) odnoszą się do przepływu płynu ściśliwego, dla którego współczynniki materiałowe określone są zależnościami typu (3.17 - 3.19). Dla płynów nieściśliwych /  $\rho = \text{const.}$  / o stałej lepkości /  $\mu = \text{const.}$  / i przewodności cieplnej /  $\lambda = \text{const.}$  / równania (4.1-4.7) ulegają dalszemu uproszczeniu, a pole prędkości staje się niezależne od pola temperatur [34].

## 4.2. Równania ruchu płynu mikropolarnego

Zdefiniujmy dla przepływu płynu mikropolarnego liczbę Reynoldsa zależnością (12.13) oraz pozostałe liczby i wielkości charakterystyczne następującymi zależnościami (24, 30, 49, 56).

$$R_{em} = \frac{U_0 h_0 \rho}{\mu + k} = O(1) \quad (4.9)$$

$$R_{int} = \frac{U_0 h_0 \rho}{k} = O(1) \quad (4.10)$$

$$R_{mi} = \frac{U_0 h_0^3 \rho}{\alpha + \beta} \ll 1 \quad (4.11)$$

$$\frac{\rho j U_0 h_0}{\gamma} \ll 1 \quad (4.12)$$

gdzie:

$R_{em}$  - mikropolarna liczba Reynoldsa

$R_{int}$  - liczba Reynoldsa sprzężenia prędkości i mikrorotacji

$R_{mi}$  - liczba Reynoldsa mikrorotacji

przechodząc od oszacowań (4.9 - 4.12) do równań ruchu (12.6 - 12.12) możemy również tutaj stwierdzić ist -

nienie dwu klas przepływów, w których decydującą rolę odgrywają wzajemne proporcje między poszczególnymi składowymi prędkości wyrażone zależnościami (2.18) i (2.19).

Ponieważ pierwsza klasa przepływu może być traktowana formalnie jako przypadek szczególny drugiej klasy - analitycznie ogólniejszej - zatem rozważania ograniczymy do tej ostatniej.

Uproszczone formy równań ruchu można przedstawić dla drugiej klasy przepływu w postaci:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(R\Omega_x)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial\Omega_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

$$-\rho v_0^2 \frac{R'}{R} + \frac{\partial p}{\partial x} = (\mu + k) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - k \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial y} \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} = (\mu + k) \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial y^2} + k \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

$$\gamma \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial y^2} - k \frac{\partial v_\theta}{\partial y} = 0 \quad (4.17)$$

$$\gamma \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial y^2} + k \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega y}{\partial y^2} = 0 \quad (4.19)$$

przecinek przy  $R$  oznacza pochodną względem zmiennej  $x$ .

Dla pierwszej klasy przepływu w równaniu (4.14) należy pominąć składnik zawierający  $\rho v_\theta^2 \frac{R'}{R}$  i wyrażający wpływ odśrodkowej siły bezwładności.

## 5. Ruch płynu niemagnetycznego o stałych współczynnikach materiałowych

### 5.1. Równania ruchu i warunki brzegowe

Fodstawiając do równań (4.1 - 4.7) zależności  $\rho = \text{const.}$ ,  $\mu = \text{const.}$ ,  $\lambda = \text{const.}$ ,  $\delta = 0$ , otrzymamy równania opisujące przepływ w krzywoliniowym łożysku niezgowym klasycznej cieczy newtonowskiej:

dla pierwszej klasy przepływu

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5.4)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\mu \left[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.5)$$

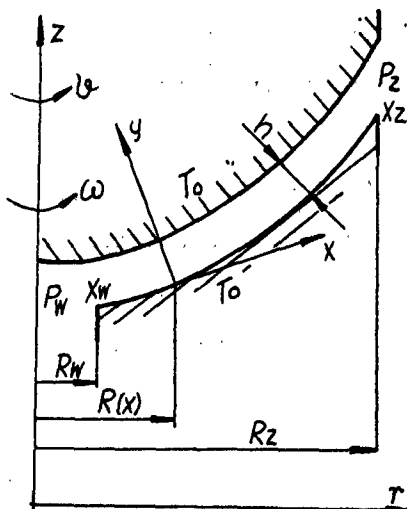
dla drugiej klasy będzie odpowiednio:

$$-\rho v \sigma^2 \frac{R'}{R} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \quad (5.6)$$

oraz

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\mu \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right)^2 \quad (5.7)$$

Parametry przepływu na ściankach ograniczających przepływ spełniać powinny następujące warunki brzegowe /rys.5.1/:



Rys.5.1

$$u_x(x, \theta, 0, t) = 0, \quad u_x(x, \theta, h, t) = 0 \quad (5.8)$$

$$u_\theta(x, \theta, 0, t) = 0, \quad u_\theta(x, \theta, h, t) = \omega R \quad (5.9)$$

$$u_y(x, \theta, 0, t) = 0, \quad u_y(x, \theta, h, t) = \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.10)$$

Warunki brzegowe odnoszące się do ciśnienia zostaną podane później.

## 5.2. Całki równań ruchu

Ponieważ pole wielkości mechanicznych przepływu jest tutaj niezależne od pola temperatur, a równanie (5.2) jest analitycznie szczególnym przypadkiem równania (5.6) rozpatrzmy najpierw układ złożony z równań (5.1, 5.3, 5.4 i 5.6).

Po wyznaczeniu z tego układu składowych prędkości możemy z równań (5.5) lub (5.7) wyznaczyć rozkład temperatur w łożysku.

Całkując równanie (5.4) stwierdzamy, że:

$$p = p(x, \theta, t) \quad (5.11)$$

Natomiast całkowanie równania (5.3) pozwala określić rozkład prędkości obwodowej w cieczy wypełniającej szczelinę:

$$v_{\theta} = \omega R \frac{y}{h} + \frac{1}{2\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta} (y^2 - yh) \quad (5.12)$$

Składową wzdłużną prędkości otrzymamy uwzględniając (5.12) w (5.6) i całkując otrzymane wyrażenie przy spełnieniu warunków brzegowych (5.8):

$$\begin{aligned} v_x = & \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) - \frac{\rho \omega^2 R R'}{12\mu h^2} (y^4 - yh^3) \\ & - \frac{\rho \omega R'}{60\mu^2 R h} \frac{\partial p}{\partial \theta} (3y^5 - 5y^4h + 2yh^4) + \\ & - \frac{\rho R'}{240\mu^2 R^3} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)^2 (2y^6 - 6y^5h + 5y^4h^2 - yh^6) \quad (5.13) \end{aligned}$$

Wzory (5.12) i (5.13) pozwalają scałkować równanie ciągłości (5.1) w poprzek szczeliny w granicach od  $y = 0$  do  $y = h/x$ ,  $\theta$ ,  $t$ .

Korzystając z ogólnej zależności:

$$\begin{aligned} \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dy = & \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} f(x, y, z) dy + \\ & - f(x, h_2, z) \frac{\partial h_2}{\partial x} + f(x, h_1, z) \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (5.14) \end{aligned}$$

oraz uwzględniając warunki brzegowe (5.10), możemy przedstawić całkę równania ciągłości (5.1) w postaci:



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} R h^3 \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{3 \varrho \omega^2 R R'}{10} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \\
& + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\varrho \omega R' h^5}{10 \mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{3 \varrho R' h^7}{280 \mu^2 R^2} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \\
& = 6 \mu \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12 \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie prostokątnym po lewej stronie wzoru (5.15) jest wielkością małą drugiego rzędu w stosunku do pozostałych wyrażen tego wzoru i może być pominięte.

Zatem całkę równania ciągłości można zapisać wzorem:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} R h^3 \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{3 \varrho \omega^2 R R'}{10} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \\
& = 6 \mu \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12 \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Wzór powyższy stanowi podstawowe równanie różniczkowe dla określenia rozkładu ciśnienia  $p$  /  $x$ ,  $\theta$ ,  $t$  / w szczelinie krzywoliniowego łożyska ślizgowego. Wyznaczając z tego wzoru ciśnienie i wracając do wzorów (5.12) i (5.13) możemy wyznaczyć składowe  $v_\theta$  i  $v_x$  prędkości przepływu cieczy. Składową  $v_y$  wyznaczamy całkując równanie ciągłości (5.1) przy uwzględnieniu warunków brzegowych (5.10).

Otrzymamy wtedy:

$$U_y = -\frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial x} R \int U_x dy + \frac{\partial}{\partial \theta} \int U_\theta dy \right] \quad (5.16)$$

Aby otrzymać rozwiązanie dla przepływu pierwszej klasy /tzn. bez uwzględnienia sił bezwładności/ należy we wzorze (5.13) pominąć wszystkie składniki po prawej stronie z wyjątkiem pierwszego, a we wzorze (5.15) drugi składnik pierwszego nawiasu lewej strony. Otrzymamy wtedy:

$$U_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y^2 - yh) \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} (R h^3 \frac{\partial P}{\partial x}) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (h^3 \frac{\partial P}{\partial \theta}) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.18)$$

Zauważymy, że wprowadzając do wzoru (5.15) funkcję ciśnienia określoną zależnościami:

$$P = p - 0,15 \rho \omega^2 R^2 \quad (5.19)$$

można sprowadzić go do postaci:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} (R h^3 \frac{\partial P}{\partial x}) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (h^3 \frac{\partial P}{\partial \theta}) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.20)$$

formalnie podobnej do wzoru (5.18)

### 5.3. Przypadki szczególne ruchu

Wyprowadzone w poprzednim punkcie pracy wzory zostaną użyte do określenia rozkładu ciśnienia dla przepływu w dwóch szczególnych - często spotykanych w praktyce - przypadkach pozwalających scałkować równanie (5.20) w postaci ogólnej bez dodatkowych założeń dotyczących kształtu szczeliny.

#### 5.3.1. Przypadek symetrii kołowej

W tym przypadku  $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$  oraz  $h = h(x, t)$ ; zatem równanie (5.20) ulega uproszczeniu przyjmując postać:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} (Rh^3 \frac{\partial p}{\partial x}) = 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.12)$$

Całkując to równanie przy uwzględnieniu (5.19) i warunków brzegowych dla ciśnienia, zadanych - na wylocie i wlocie ze szczeliny - w następujący sposób:

$$p = p_w \quad \text{dla} \quad x = x_w$$

$$p = p_z \quad \text{dla} \quad x = x_z \quad (5.22)$$

otrzymamy:

$$P(x,t) = 12\mu D(x,t) + \frac{[A(x) - A_z]B_H - [A(x) - A_H]B_z}{A_H - A_z} \quad (5.23)$$

tutaj oznaczono:

$$D(x,t) = \int \frac{1}{Rh^3} \left( \int R \frac{\partial h}{\partial t} dx \right) dx, \quad A(x) = \int \frac{dx}{Rh^3}$$

$$B_H = P_H - 0,15 \rho \omega^2 R_H^2 - 12\mu D_H$$

$$B_z = P_z - 0,15 \rho \omega^2 R_z^2 - 12\mu D_z \quad (5.24)$$

$$A_H = A(x_H), \quad A_z = A(x_z), \quad D_H = D(x_H, t)$$

$$D_z = D(x_z, t), \quad R_H = R(x_H), \quad R_z = R(x_z)$$

### 5.3.2. Przypadek ruchu ustalonego

W tym przypadku  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial t} \equiv 0$  oraz  $h = h/x$ . Równanie różniczkowe dla wyznaczenia rozkładu ciśnienia w szczelinie ulegnie dalszemu uproszczeniu i przyjmie postać:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( Rh^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.25)$$

Rozwiązanie tego równania wynika natomiast ze wzorów (5.23) i (5.24) po przyjęciu  $D/x, t/ = 0$ . Bardziej szczegółowo omówiono właściwości tego przepływu w pracach [62, 65, 67].

### 5.3.3. Przypadki szczególne równania Reynoldsa

Przytoczone przypadki szczególne wyczerpują możliwości wyznaczania całek równania różniczkowego dla ciśnienia bez zadania postaci funkcji  $h/x, \theta, t/$ . Zauważmy dużą uniwersalność wyprowadzonych tutaj równań różniczkowych dla rozkładu ciśnienia. Różne odmiany podanych tu wzorów spotykane są w literaturze pod nazwą równań Reynoldsa. Mianowicie dokonując podstawień:

$$R = R_0, \quad x = z \quad (5.26)$$

otrzymamy równanie Reynoldsa dla rozkładu ciśnień w łożysku promieniowym o skończonej długości:

$$h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.27)$$

zaś podstawienie

$$R = a \cdot x \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (5.28)$$

prowadzi do równania Reynoldsa dla rozkładu ciśnień w płaskim łożysku oporowym  $/a = 1/$  lub w łożysku stożkowym  $/a \neq 1/$ :

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} h^3 x \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\alpha^2 x^2} \frac{\partial}{\partial \theta} h^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.29)$$

Podstawienie:

$$R = R_0 \sin \varphi, \quad \varphi = \frac{x}{R_0} \quad (5.30)$$

prowadzi do równania Reynoldsa określającego rozkład w łożysku kulistym

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} h^3 \sin \varphi \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} h^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} = \\ = 6\mu R_0^2 \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu R_0^2 \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ponieważ metody rozwiązań tych szczególnych przypadków są znane [13,17] nie będziemy ich tutaj szczegółowo omawiać.

#### 5.4. Profile i prędkości temperatur w szczelinie

Rozważania dotyczące rozkładu prędkości i temperatur w szczelinie bez zmniejszenia ogólności rozważań można ograniczyć do przypadku przepływu rozpatrzonego w punkcie 5.3.2.

Biorąc pod uwagę wzór (5.23) i wzory (5.12), (5.13) oraz (5.16) możemy napisać:

$$v_{\theta} = \omega R \frac{y}{h} \quad (5.32)$$

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{B_H - B_z}{A_H - A_z} \frac{y^2 - yh}{Rh^3} - \frac{\rho \omega^2 R R'}{60\mu h^2} (5y^4 - 9h^2y^2 + 4h^3y) \quad (5.33)$$

$$v_y = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{12\mu h^3} \frac{B_H - B_z}{A_H - A_z} (2y^3 - 3hy^2) + \right. \\ \left. - \frac{\rho \omega^2 R^2 R'}{60\mu h^2} (y^5 - 3h^2y^3 + 2h^3y^2) \right] \quad (5.34)$$

Uwzględniając (5.32) i (5.33) we wzorach (5.5) i (5.7) otrzymamy formuły określające odpowiednio rozkład temperatury w szczelinie:

dla pierwszej klasy przepływu:

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{\mu}{\lambda} \left[ \frac{\omega^2 R^2}{2h^2} (hy - y^2) + \right. \\ \left. - \frac{1}{24\mu^2} \left( \frac{B_H - B_z}{A_H - A_z} \right)^2 \frac{2y^4 - 4hy^3 + 3h^2y^2 - h^3y}{R^2 h^6} + \right. \\ \left. + \frac{\rho \omega^4 R^2 R'}{25200\mu^2 h^4} (50y^8 - 168h^2y^6 + 56h^3y^5 + 189h^4y^4 + \right. \\ \left. - 168h^5y^3 + 56h^6y^2 - 15h^3y) + \right. \\ \left. + \frac{\rho \omega^2 R'}{180\mu^2 h^4} \left( \frac{B_H - B_z}{A_H - A_z} \right) (4y^6 - 3hy^5 - 9h^2y^4 + \right. \\ \left. + 13h^3y^3 - 6h^4y^2 + h^5y) \right]$$

(5.35)

oraz

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{\mu \omega^2 R^2}{2\lambda h^2} (hy - y^2) \quad (5.36)$$

dla drugiej klasy przepływu;

tutaj całkowanie równań (5.5) i (5.7) przeprowadzono przy warunku brzegowym

$$T = T_0 \quad \text{dla} \quad y = 0 \quad \text{oraz} \quad y = h \quad (5.37)$$

Wzory opisujące pole przepływu cieczy i rozkładu temperatur w szczelinie łożyska można przedstawić w prostej postaci niezależnej od kształtu powierzchni współpracujących:

$$v_\theta = D_1 f_1(\eta) \quad (5.38)$$

$$v_x = D_2 f_2(\eta) + D_3 f_3(\eta) \quad (5.39)$$

$$v_y = D_4 f_4(\eta) + D_5 f_5(\eta) + D_6 f_6(\eta) \quad (5.40)$$

$$\Delta T = D_7 f_7(\eta) + D_8 f_8(\eta) \quad (5.41)$$

gdzie dla uproszczenia oznaczono



$$f_1 = \eta \quad , \quad f_2 = \eta(1-\eta)$$

$$f_3 = \eta(1-\eta)[-4+5\eta(1+\eta)]$$

$$f_4 = \eta^2(2-3\eta+\eta^3), \quad f_5 = \eta^2(-4+9\eta-5\eta^3)$$

$$f_6 = \eta^2(1-\eta), \quad f_7 = \eta(1-\eta)$$

$$f_8 = \eta(1-3\eta+4\eta^2-2\eta^3), \quad \eta = \frac{y}{h} \quad (5.42)$$

Tutaj  $D_1$  oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia szczeliny.

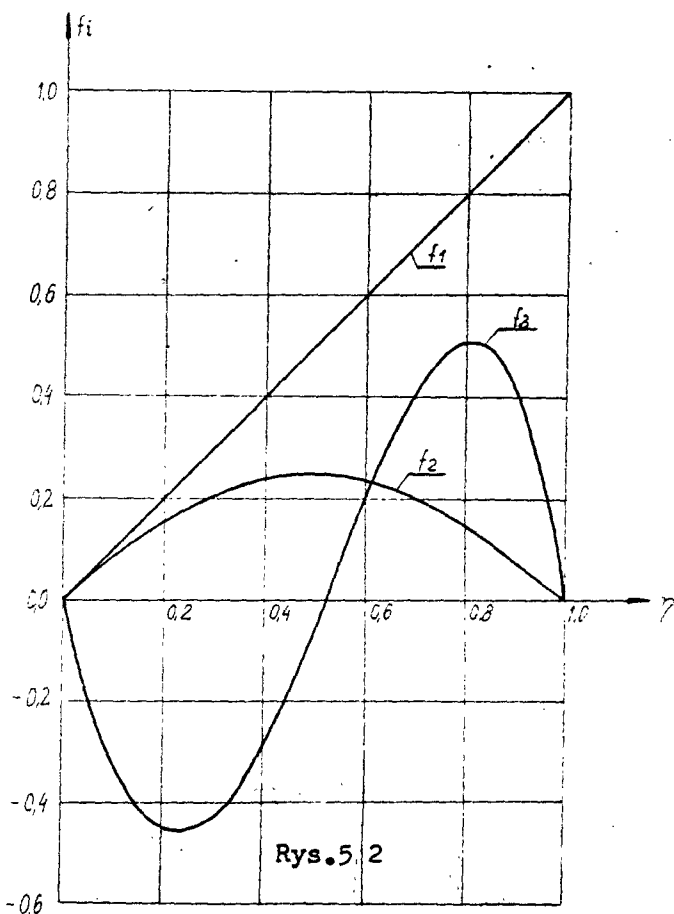
W wyrażeniu dla  $\Delta T$  pominięto wielkości małe wyższych rzędów zachowując jedynie główne wyrażenia kształtujące profil rozkładu temperatury. Rozkład temperatury dla przepływu drugiej klasy /z uwzględnieniem sił bezwładności/ opisuje funkcja  $f_7 / \eta /$ .

Przebiegi zmienności funkcji  $f_1$  obrazują rysunki 5.2 i 5.4.

Wzory charakteryzujące składowe prędkości przepływu pozwalają stwierdzić, że profil prędkości obwodowej  $v_\theta$  dla ustalonej wartości współrzędnej  $x$  jest liniowy /funkcja  $f_1$  na rys. 5.2/ niezależnie od kształtu szczeliny.

Profil ten jest identyczny z profilem przepływu Couette'a między dwiema płaszczyznami, z których jedna jest nieruchoma, a druga posiada lokalną prędkość równą  $\omega \cdot R / x /$ .

Z postaci wzorów opisujących składową wzdłużną prędkości  $v_x$  wynika, że główną częścią jej profilu jest pa-

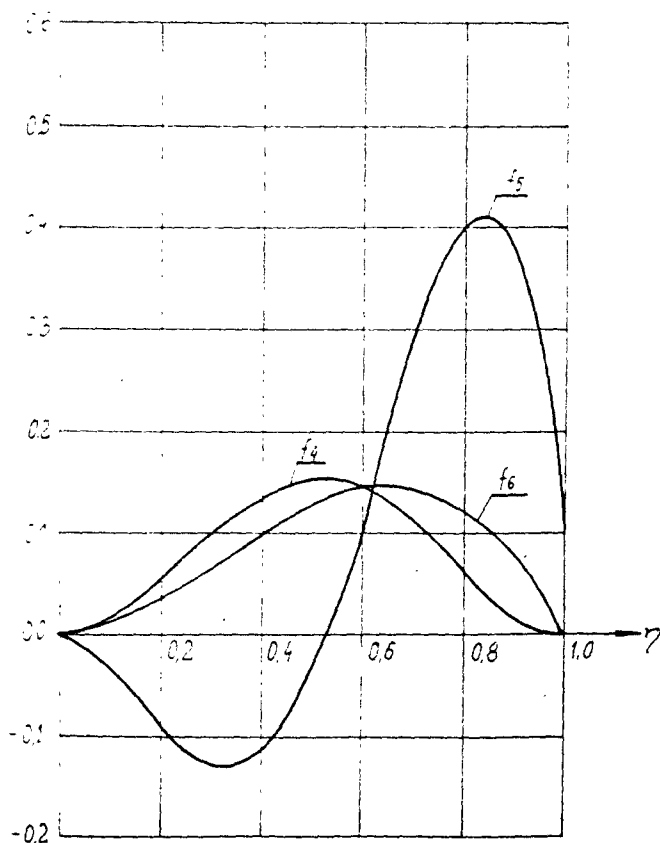


Rys.5.2

paraboliczny profil płaskiego przepływu Poiseuille'a /funkcja  $f_2$  na rys. 5.2/ uwarunkowana istnieniem różnicy ciśnień między wlotem i wylotem ze szczeliny.

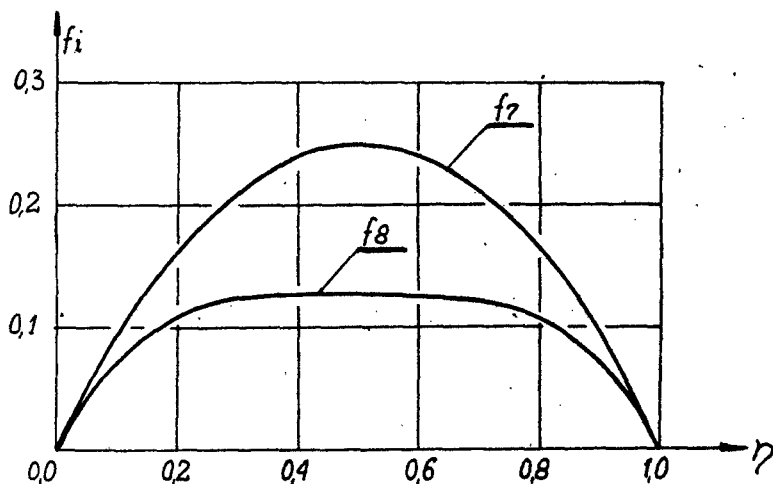
Na główną część składowej prędkości wzdłużnej nakłada się przepływ wtórny, wywołany ssącym działaniem wirującej powierzchni wewnętrznej. Powierzchnia ta zasysa w swoim sąsiedztwie ciecz wywołując jej ruch wzdłużny i odśrodkowy. Ruch ten musi być równoważony ruchem wzdłużnym dośrodkowym przy powierzchni zewnętrznej i ruchem poprzecznym określonym składową  $v_y$  prędkości. Przepływ wtórny opisany jest drugim składnikiem prędkości  $v_x$  /funkcja  $f_3$  na rys. 5.2/ i prędkością  $v_y$ ; profile prze-

plywu wtórnego związane ze składową prędkości  $v_y$  reprezentowane są funkcjami  $f_4 + f_6$  pokazanymi na rysunku 5.3.



Rys.5.3

Dla rozkładu temperatury główny profil jest profilem parabolicznym niezależnie od klasy przepływu. Określa go funkcja  $f_7$  pokazana na rysunku 5.4. Profil wtórny określony jest funkcją  $f_8$ .



Rys.5.4

### 5.5. Rozkład ciśnienia w szczelinie

Z postaci wzorów wyprowadzonych w punktach 5.2 i 5.3 pracy wynika, że tylko dla zadanego kształtu szczeliny można wyznaczyć rozkład ciśnienia. Aby ocenić wpływ kształtu szczeliny na rozkład ciśnienia rozpatrzmy dwa łożyska o kształtach pokazanych na rysunku 3.4, mianowicie: łożysko stożkowe i łożysko kuliste.

Bez zmniejszenia ogólności rozważań można przyjąć ustalony i osiowo - symetryczny przypadek przepływu; wtedy formuły określające rozkład ciśnienia otrzymamy z wzoru (5.23) pomijając w nim wyrażenie  $D/x, t/$ .

Dla łożyska stożkowego będzie:

$$p = 0,15 \rho \omega^2 R^2 +$$

$$+ \frac{(p_1 - 0,15 \rho \omega^2 R_1^2) \ln \frac{R}{R_1} - (p_2 - 0,15 \rho \omega^2 R_2^2) \ln \frac{R}{R_2}}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (5.43)$$



tutaj oznaczono na mocy zależności (3.6.a)

$$R = x \sin \alpha, \quad R_H = x_H \sin \alpha, \quad R_Z = x_Z \sin \alpha$$

zaś dla łożyska kulistego:

$$+ \frac{(P_H - 0,15 \rho \omega^2 R_0^2 \sin^2 \varphi_H) (\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2})}{\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_Z}{2}} +$$

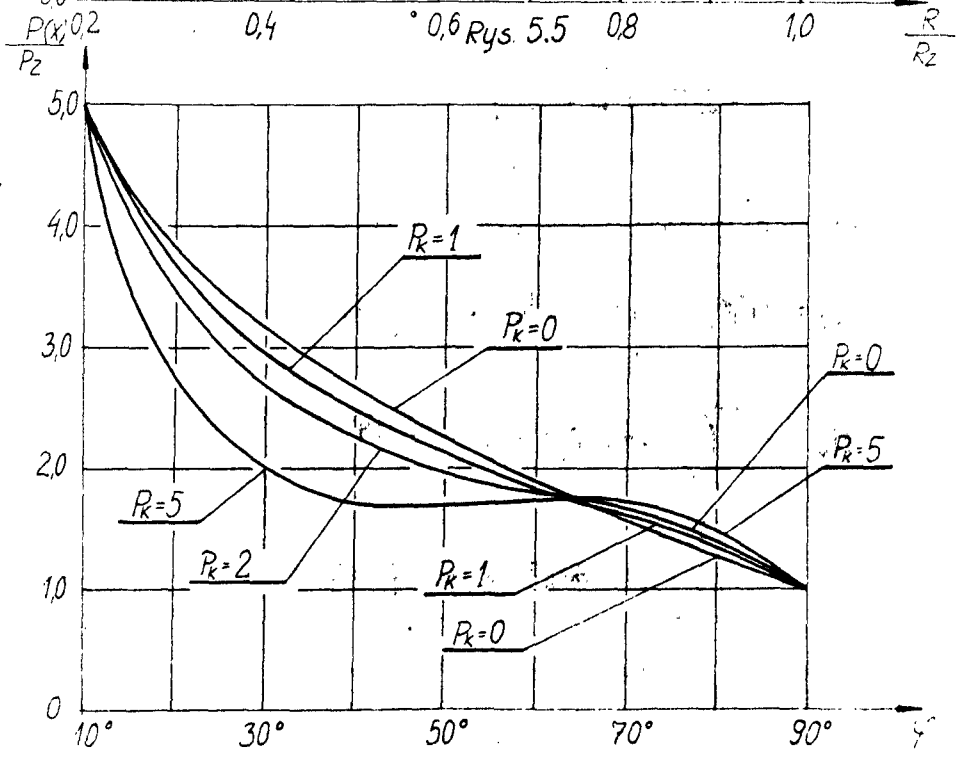
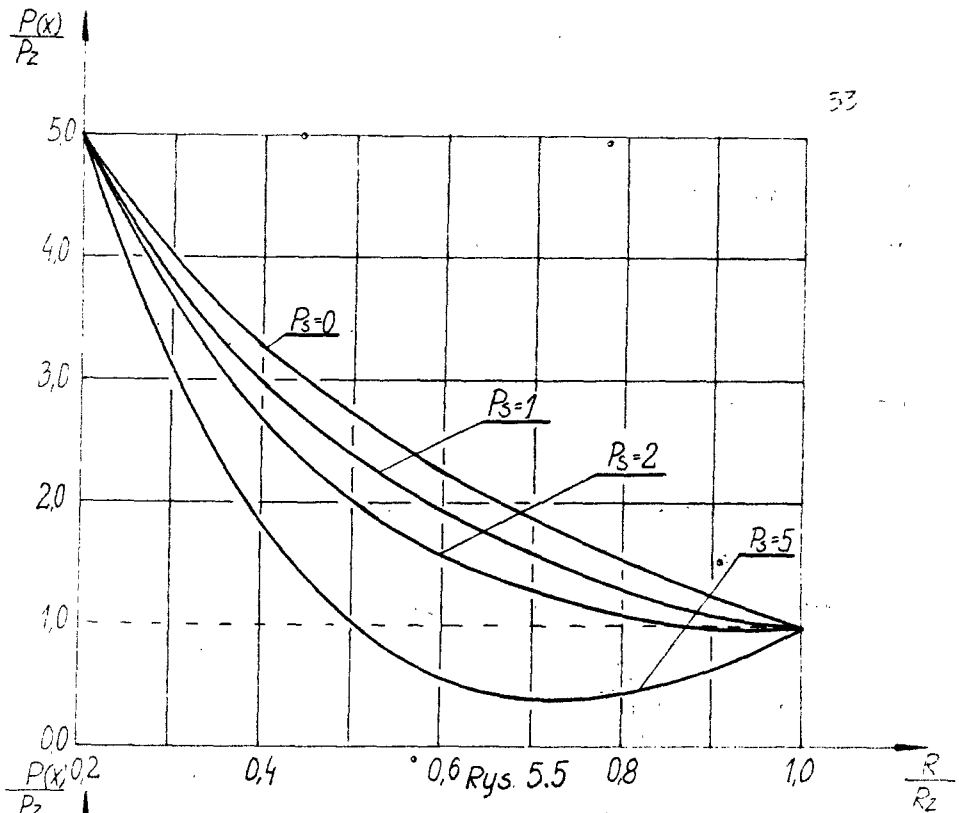
$$- \frac{(P_Z - 0,15 \rho \omega^2 R_0^2 \sin^2 \varphi_Z) (\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_Z}{2})}{\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_Z}{2}} \quad (5.44)$$

sens użytych oznaczeń wynika z rysunku 3.4.

Na rysunku 5.5 i 5.6 przedstawiono graficzne przebiegi rozkładu ciśnienia wzdłuż tworzących ścianki każdego z łożysk /rys. 5.5 - łożysko stożkowe, rys. 5.6 - łożysko kuliste/ wyprowadzając bezwymiarowe wielkości określone zależnościami

$$P_s = \frac{0,15 \rho \omega^2 R_0^2}{P_z}, \quad P_k = \frac{0,15 \rho \omega^2 R_0^2}{P_z} \quad (5.45)$$

Przypadek  $P_{s,k} = 0$  odpowiada przepływowi między nieruchomymi powierzchniami szczeliny. Z postaci wykresów ciśnień dla szczeliny w łożysku stożkowym wynika możliwość istnienia podciśnień dla odpowiednio dużych prędkości obrotowych. Zauważmy, że pominięcie sił bezwładności /odpowiadające również przypadkowi  $P_{s,k} = 0$  /



Rys 5.6

dla szybkoobrotowego łożyska wzdłużnego może prowadzić do znacznych błędów w określeniu jego nośności.

### 5.6. Parametry mechaniczne łożyska

Mając określone parametry przepływu można określić parametry mechaniczne łożyska. Wydatek przepływającej cieczy oraz moment tarcia dane są odpowiednio wzorami

$$Q = 2\pi R \int_0^h \sigma_x dy \quad (5.46)$$

$$M = 2\pi\mu \int_{x_H}^{x_Z} R \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dx \quad (5.47)$$

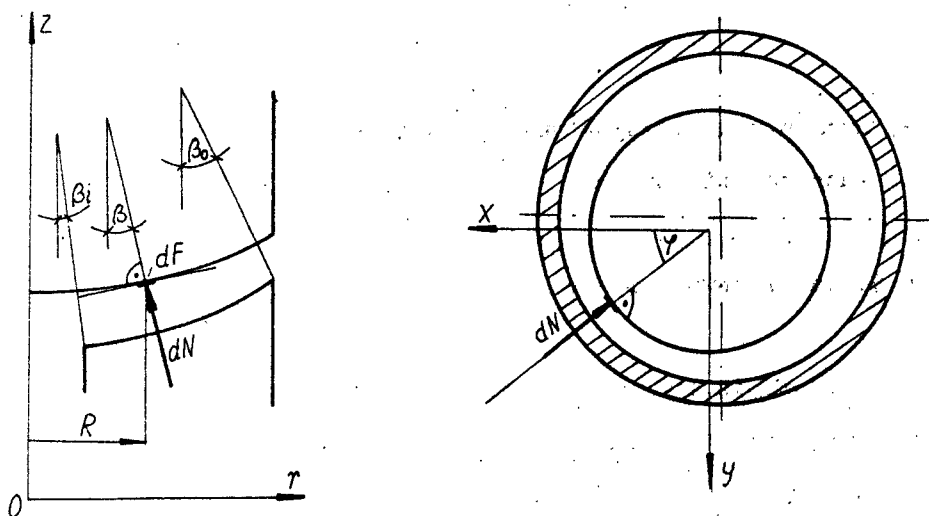
Składowe siły nośnej łożyska określają zależności:

$$N_z = \pi R_H^2 p_H + \int_0^{2\pi} \left( \int_{x_H}^{x_Z} p R \cos \beta dx \right) d\psi \quad (5.48)$$

$$N_x = - \int_0^{2\pi} \left( \int_{x_H}^{x_Z} p R \sin \beta dx \right) \cos \psi d\psi \quad (5.49)$$

$$N_y = - \int_0^{2\pi} \left( \int_{x_H}^{x_Z} p R \sin \beta dx \right) \sin \psi d\psi \quad (5.50)$$

Sens kątów  $\beta$  oraz  $\psi$  wynika z rysunku 5.7.



Rys.5.7

Dla przypadku osiowo - symetrycznego jest  $N_x = N_y = 0$ ,  
 $N_z = N$ ; zatem:

$$N = \pi R_H^2 p_H + 2\pi \int_{x_H}^{x_z} p R \cos \beta dx \quad (5.51)$$

W ogólnym przypadku nie da się wyznaczyć całek (5.40) + (5.51). Wynika stąd, że mechaniczne parametry łożyska można jedynie określić dla ściśle zadanych kształtów współpracujących powierzchni łożyska.



## 6. Ruch płynu niemagnetycznego o zmiennych współczynnikach materiałowych

### 6.1. Całki równań ruchu

Równania ruchu płynu niemagnetycznego o zmiennych współczynnikach otrzymamy z równań (4.1) + (4.7) zakładając w nich  $\zeta = 0$ . Wtedy odpowiednio będzie dla pierwszej klasy przepływu

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(R\sigma_x)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(T) \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} \right] \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(T) \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial y} \right] \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \mu(T) \left[ \left( \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (6.5)$$

dla drugiej klasy przepływu (6.2) i (6.5) zastępują równania

$$-\rho\sigma_\theta^2 \frac{R'}{R} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(T) \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} \right] \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(\tau) \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right] + \mu(\tau) \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (6.7)$$

Całki tych równań dla każdej z rozważanych klas przepływu w łożysku muszą spełniać warunki brzegowe (5.8) - (5.10), (5.22) oraz (5.37).

Tutaj - podobnie jak w poprzednio rozważanym przypadku - mimo sprzężenia równania energii z równaniami ruchu można formalnie potraktować równanie (6.2) jako szczególny przypadek równania (6.6).

Całkując układ (6.2 - 6.7) otrzymamy

$$p = p(x, \theta, t) \quad (6.8)$$

$$u_{\theta} = \omega R \delta + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left[ \Phi_1(x, \theta, y, t) - \Phi_1(x, \theta, h, t) \delta \right] \quad (6.9)$$

$$u_x = \left[ \Phi_1(x, \theta, y, t) - \Phi_1(x, \theta, h, t) \delta \right] \frac{\partial p}{\partial x} + \\ - \rho \frac{R'}{R} \left[ \Phi_2(x, \theta, y, t) - \Phi_2(x, \theta, h, t) \delta \right] \quad (6.10)$$

$$T = T_0 - \left[ \Psi(x, \theta, y, t) - \Psi(x, \theta, h, t) \delta \right] \quad (6.11)$$

Całkując równanie ciągłości (6.1) przy uwzględnieniu zależności (5.14) otrzymamy równanie ciśnienia w szczelinie:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} R \Phi_3 \left( \frac{\partial p}{\partial x} - I \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_3 \frac{\partial p}{\partial \theta} = \omega \frac{\partial \Phi_4}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (6.12)$$

Wzory określające funkcje występujące w zależnościach (6.1) + (6.12) podane są w punkcie 12.4.

Ze względu na zależności funkcji  $I/x, Q, t/$  od kąta nie można zapisać we wspólnej postaci równania Reynoldsa dla obu klas przepływu.

Podobnie jak dla przepływu cieczy o stałej lepkości i przewodności równanie (6.12) da się rozwiązać dla dwóch analogicznych przypadków rozpatrywanych w punktach 5.3.1. i 5.3.2.

Ograniczmy się dalej do szczegółowego rozpatrzenia przypadku ustalonego przepływu osiowo-symetrycznego z uwzględnieniem sił bezwładności. Wtedy w wyniku scałkowania równania (6.12) otrzymamy następujące wyrażenie dla składowych prędkości i ciśnienia:

$$v_{\theta} = \omega R \sigma(y) \quad (6.13)$$

$$T = T_0 - [\Psi(x, y) - \Psi(x, h) \delta(y)] \quad (6.14)$$

$$v_x = \left[ \frac{B_H - B_z}{A_H - A_z} A'(x) + D'(x) \right] [\Phi_1(x, y) - \Phi_1(x, h) \delta(y)] +$$

$$- \rho \frac{R'}{R} [\Phi_2(x, y) - \Phi_2(x, h) \delta(y)] \quad (6.15)$$

$$p = D(x) + \frac{[A(x) - A_z]B_w - [A(x) - A_w]B_z}{A_w - A_z} \quad (6.16)$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ R \left[ \frac{B_w - B_z}{A_w - A_z} A'(x) + D'(x) \right] \cdot \int_0^y [\Phi_1(x, y) + \Phi_1(x, h) \delta(y)] dy - p R' \int_0^y [\Phi_2(x, y) - \Phi_2(x, h) \delta(y)] dy \right\} \quad (6.17)$$

Wyrażenia określające występujące tutaj funkcje  $\sigma$ ,  $\gamma$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  dane są zależnościami analogicznymi do (12.20) + (12.26), lecz niezależnymi od  $\bar{\sigma}$  oraz  $t$ , natomiast pozostałe funkcje lub stałe określają zależności

$$A(x) = \int \frac{dx}{R \Phi_3(x)}, \quad D(x) = \int I(x) dx \quad (6.18)$$

$$A_w = A(x_w), \quad A_z = A(x_z)$$

$$D_w = D(x_w), \quad D_z = D(x_z)$$

$$B_w = p_w - D_w, \quad B_z = p_z - D_z$$

## 6.2 Przypadki szczególne przepływu

## 6.2.1. Przepływ cieczy o stałej lepkości i przewodności

W tym przypadku  $\mu(T) = \mu_0$ ,  $\lambda(T) = \lambda_0$ , gdzie  $\mu_0$  i  $\lambda_0$  są wartościami stałymi. Podstawienie tych warunków sprowadza rozwiązania (6.13) - (6.17) do postaci identycznej z postacią wyrażoną formułami (5.32) - (5.34), oraz (5.36).

6.2.2. Zlinearyzowane rozwiązanie dla  $\mu = \mu(T)$  oraz  $\lambda = \lambda(T)$ 

Przyjęcie zależności:

$$\Delta T \approx \Delta T^c$$

gdzie:

$$\Delta T = T - T_0 \quad \text{oraz} \quad \Delta T^c = T^c - T_0,$$

a wskaźnik  $c$  odnosi się do przepływu dla  $\mu, \lambda = \text{const}$  pozwala otrzymać zlinearyzowane rozwiązanie względem temperatury.

Zatem zgodnie z wzorem (5.36) można zapisać:

$$\Delta T = \frac{FR^2}{2} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (6.19)$$

gdzie:

$$F = \frac{\mu_0 \omega}{\lambda_0}$$

Współczynnik lepkości  $\mu$  i współczynnik przewodnictwa cieplnego  $\lambda$  jako funkcje zmiennych  $x$  i  $y$  można dla cieczy smarujących wyznaczyć z przybliżonych zależności [13]:

$$\mu(T) = \mu_0 e^{-n\Delta T} \quad (6.20)$$

$$\lambda(T) = \lambda_0 (1 + m\Delta T) \quad (6.21)$$

W większości praktycznie spotykanych przepływów  $n\Delta T$  oraz  $m\Delta T$  są znacznie mniejsze od 1, zatem równanie (6.20) można zastąpić liniowym przybliżeniem zachowując dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia w szereg funkcji wykładniczej. Wprowadzając (6.19) do (6.20) i (6.21) otrzymamy:

$$\mu(T) = \mu_0 \left[ 1 - \frac{nFR^2}{2} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right] \quad (6.22)$$

$$\lambda(T) = \lambda_0 \left[ 1 + \frac{mFR^2}{2} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right] \quad (6.23)$$

Rozwijając w szeregi wyrażenia podcałkowe w zależnościach (6.13), (6.15) i (6.18) oraz ograniczając się do wyrazów liniowych ze względu na  $nF$  oraz  $mF$  znajdziemy:

$$\sigma_0^2 = \omega R \frac{y}{h} \left[ 1 - \frac{nFR^2}{2} \left( 1 - 3 \frac{y}{h} + 2 \frac{y^2}{h^2} \right) \right] \quad (6.24)$$

$$P^L = \frac{3}{20} \rho \omega^2 R^2 \left( 1 + \frac{nFR^2}{360} \right) + \frac{[A_1^L(x) - A_2^L] \sigma_{11}^L - [A_1^L(x) - A_2^L] B_2^L}{A_4^L - A_2^L} \quad (6.25)$$

$$T^L = T_0 \left[ 1 + \frac{FR^2 y}{2I_0 h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right] \left[ 1 - \frac{FR^2}{12} \left[ n - (n-3m) \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right] \right] \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^L = & -\frac{1}{2\mu_0} \frac{B_H^L - B_Z^L}{A_H^L - A_Z^L} \frac{1}{R} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \left[ 1 - \frac{nFR^2}{20} \left( 1 - 5\frac{y}{h} + 5\frac{y^2}{h^2} \right) \right] + \\ & + \frac{\rho\omega^2 h^2 R R'}{60\mu_0} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \left[ -4 + 5\frac{y}{h} + 5\frac{y^2}{h^2} + \right. \\ & \left. - \frac{nFR^2}{60} \left( 8 + 65\frac{y}{h} - 155\frac{y^2}{h^2} - 70\frac{y^3}{h^3} + 140\frac{y^4}{h^4} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^L = & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{12\mu_0} \frac{D_H^L - D_Z^L}{A_H^L - A_Z^L} \frac{y^2}{h^2} \left[ 3 - 2\frac{y}{h} - \frac{nFR^2}{20} \left( 3 - 18\frac{y}{h} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + 15\frac{y^2}{h^2} - 6\frac{y^3}{h^3} \right) \right] + \frac{\rho\omega^2 h^3 R^2 R'}{60\mu_0} \frac{y^2}{h^2} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \left[ 2 - \frac{y}{h} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{nFR^2}{60} \left( 4 + 23\frac{y}{h} - 32\frac{y^2}{h^2} - 15\frac{y^3}{h^3} + 20\frac{y^4}{h^4} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.28)$$

gdzie:

$$A(x) = \int \frac{1 - \frac{nFR^2(x)}{20}}{R(x)h^3(x)} dx$$

$$B_H^L = p_H - 0,15 \rho \omega^2 R_H^2 \left( 1 + \frac{nFR_H^2}{360} \right), \quad B_Z^L = p_Z - 0,15 \rho \omega^2 R_Z^2 \left( 1 + \frac{nFR_Z^2}{360} \right) \quad (6.29)$$

### 6.3. Profile prędkości dla liniowego przybliżenia

Formuły określające pole prędkości wyprowadzone w poprzednim punkcie pracy można przedstawić w prostej postaci niezależnej od kształtu powierzchni łożyska:

$$v_{\theta}^L = D_1^L f_1(\eta; \alpha) \quad (6.30)$$

$$v_{\lambda}^L = D_2^L f_2(\eta; \alpha) + D_3^L f_3(\eta; \alpha) \quad (6.31)$$

$$v_y^L = D_4^L f_4(\eta; \alpha) + D_5^L f_5(\eta; \alpha) + D_6^L f_6(\eta; \alpha) \quad (6.32)$$

tutaj  $D_1^L$  oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia przekroju poprzecznego szczeliny, funkcje  $f_1(\eta; \alpha)$  dane są zależnościami (12.29) + (12.34);

natomiast

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \alpha = nFR^2 \quad (6.33)$$

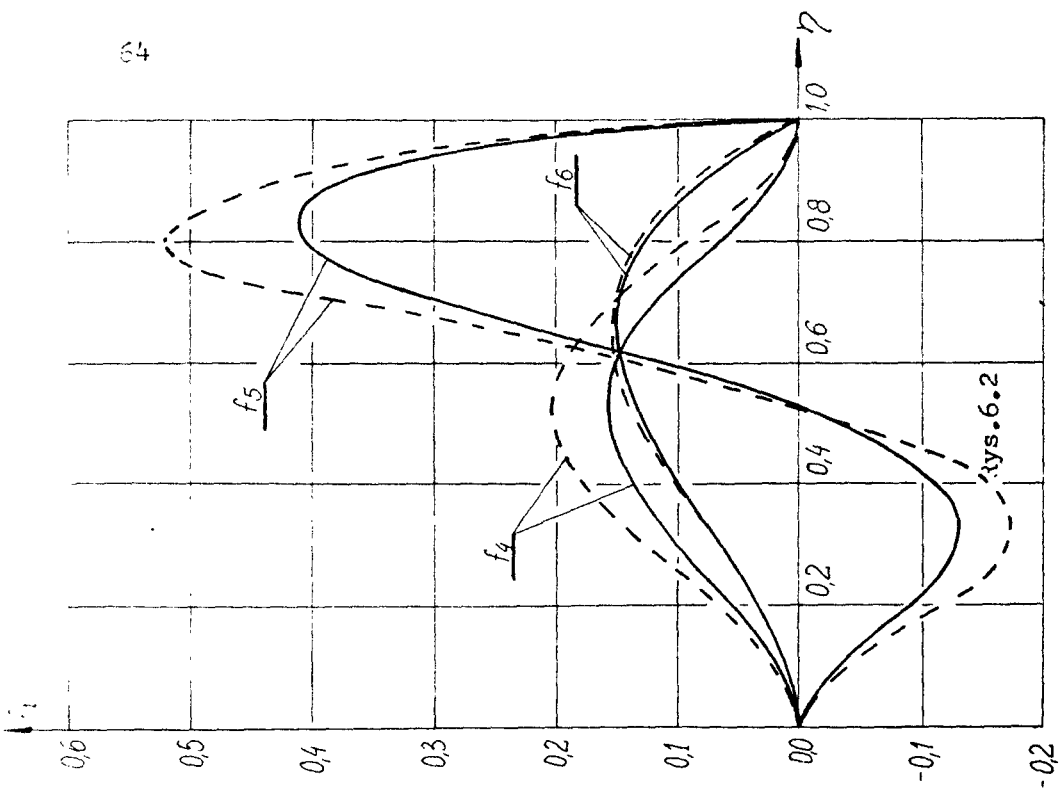
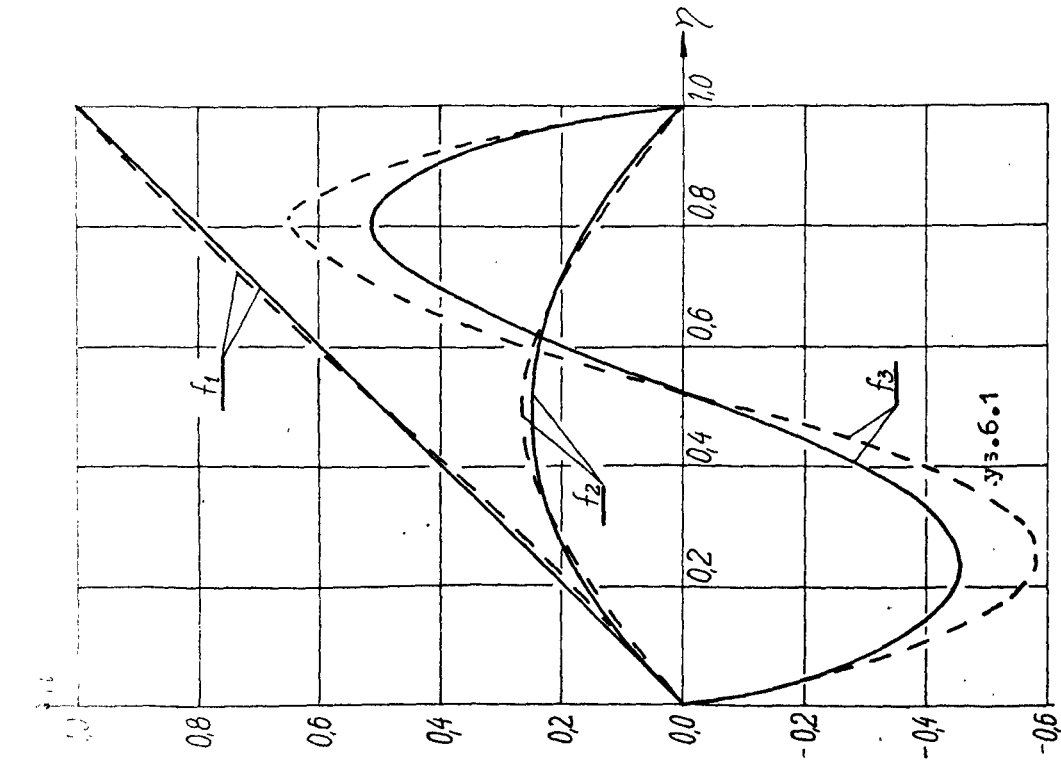
W rozwiązaniach technicznych łożysk ślizgowych wartość współczynnika  $\alpha$  zawiera się w granicach

$$0 \leq \alpha \leq 3.0$$

Rysunki 6.1 i 6.2 pokazują wykresy funkcji  $f_1$  dla  $\alpha = 0$  /przepływ ze stałymi wartościami  $\mu$  i  $\lambda$  / oraz dla  $\alpha = 3.0$  /przepływ dla zmiennych  $\mu$  i  $\lambda$  /.

Z analizy wykresów poszczególnych funkcji wynika zasadniczy wniosek: zmiana współczynnika lepkości związana ze zmianą temperatury czynnika smarnego przepływającego przez łożysko nie wpływa w istotny sposób na profil głów-





—  $\alpha = 0.0$     - - -  $\alpha = 3.0$

—  $\alpha = 0.0$     - - -  $\alpha = 3.0$

nych wartości prędkości obwodowej  $v_e$  /funkcja  $f_1$ / i prędkości wzdłużnej  $v_x$  /funkcja  $f_2$ /, natomiast dość wyraźnie wpływają zmiany temperatury na przepływ wtórny. Tutaj wielkość odchyłek - w przybliżeniu liniowym - może dochodzić nawet do 30% wartości maksymalnych funkcji  $f_1 / 1 = 3,4,6/$  w stosunku do wartości tych funkcji dla przepływu o stałych współczynnikach materiałowych.

Z postaci wzoru (6.25) określającego rozkład ciśnienia w szczelinie wynika, że zmiany rozkładu ciśnień związane ze zmianą współczynnika lepkości są stosunkowo niewielkie. Rząd wielkości tych zmian można określić jedynie dla zadanego kształtu szczeliny łożyska.

## 7. Ruch nieściśliwego płynu magnetycznego o stałych współczynnikach materiałowych

### 7.1. Prónania ruchu. Całki równań ruchu

Rozważania odnoszące się do przepływów nieściśliwych płynów magnetycznych ograniczymy do przepływów płynu o stałych współczynnikach materiałowych, to znaczy do takich, dla których:

$$\varphi = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}, \quad \lambda = \text{const.}, \quad \sigma = \text{const.} \quad (7.1)$$

Ograniczenie takie jest podyktowane względami czysto praktycznymi, bowiem używane w technice smarowniczej płyny magnetyczne są przeważnie stopionymi metalami lub ich związkami, które w zakresie stosowanych temperatur zachowują stałe wartości współczynników materiałowych.

Ponieważ w rozważanym przypadku, przy założeniach (7.1), pole przepływu jest niezależne od pola temperatur, dalsze rozważania ograniczymy tylko do przypadku przepływu osiowo - symetrycznego z uwzględnieniem sił odśrodkowych, bowiem tylko dla tego przypadku można z równania Reynoldsa wyznaczyć ogólną postać wyrażenia określającego rozkład ciśnienia w szczelinie łożyska.

Równania ruchu wtedy będą

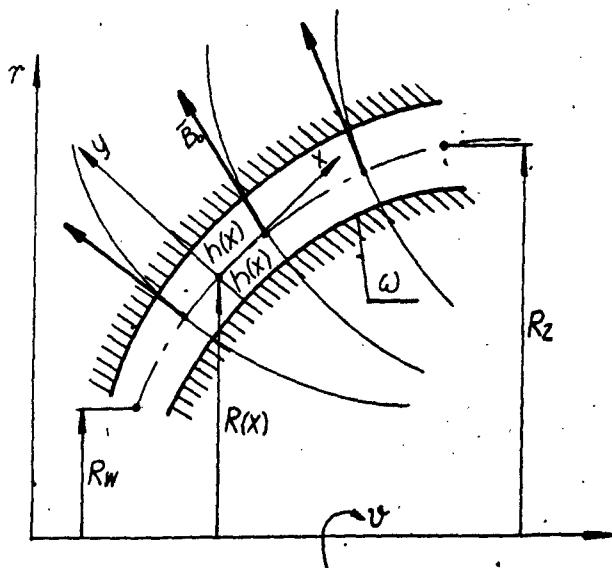
$$\frac{1}{R} \frac{\partial(R\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (7.2)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} - \delta B_0^2 \bar{u}_x = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \bar{u}_0^2 \frac{R'}{R} \quad (7.3)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial y^2} - \delta B_0^2 \bar{u}_0 = 0 \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (7.5)$$

Dla pewnego - czysto formalnego - uproszczenia postaci zapisu rozwiązania obierzemy układ współrzędnych w szczelinie w sposób pokazany na rysunku 7.1.



Rys. 7.1

Warunki brzegowe (5.8) + (5.10) przyjmują teraz postać:

$$\bar{u}_x(x, \pm h) = 0 \quad (7.6)$$

$$\bar{U}_\theta(x, -h) = \omega R, \quad \bar{U}_\theta(x, +h) = 0 \quad (7.7)$$

$$\bar{U}_y(x, \pm h) = 0 \quad (7.8)$$

Zakładając równania (7.2) - (7.5) podobnie jak to uczyniono w rozdziale 5 oraz w pracy [58] otrzymamy:

$$\bar{J}_\theta = \frac{\omega R}{2} \left( \frac{chky}{chkh} - \frac{shky}{shkh} \right) \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_x = & \frac{C}{\mu k^2 R} \frac{1}{thkh - kh} \left( \frac{chky}{chkh} - 1 \right) + \\ & - \frac{\rho \omega^2 R R'}{12 \mu k^2} \left\{ \frac{1}{ch^2 kh} \left[ sh^2 ky - 1 - (sh^2 kh - 1) \frac{chky}{chkh} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{4(sh^2 kh - 1)thkh - (sh2kh - 6kh)}{4(thkh - kh)} \left( \frac{chky}{chkh} - 1 \right) \right] + \\ & - \frac{4}{sh2kh} (chky - chkh) shky + \\ & - \frac{1}{sh^2 kh} \left[ ch^2 ky + 1 - (ch^2 kh + 1) \frac{chky}{chkh} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{4(ch^2 kh + 1)thkh - (sh2kh + 6kh)}{4(thkh - kh)} \left( \frac{chky}{chkh} - 1 \right) \right] \right\} \quad (7.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_y = & - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{C}{\mu k^3} \frac{1}{thkh - kh} \left( \frac{shky}{chkh} - ky \right) + \right. \\ & - \frac{\rho \omega^2 R^2 R'}{12 \mu k^3} \left( \frac{1}{ch^2 kh} \left[ sh2ky - 6ky - 4(sh^2 kh - 1) \frac{shky}{shkh} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4(sh^2 kh - 1)thkh - (sh2kh - 6kh)}{thkh - kh} \left( \frac{shky}{chkh} - ky \right) \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{\text{sh}^2 kh} (\text{ch}ky - \text{ch}kh)^2 + \frac{1}{4\text{sh}^2 kh} [\text{sh}^2 ky + 6ky + \\
 & -4(\text{ch}^2 kh + 1) \frac{\text{sh}ky}{\text{ch}kh} + \frac{4(\text{ch}^2 kh + 1)\text{th}kh - (\text{sh}^2 kh + 6kh)(\frac{\text{sh}ky}{\text{ch}kh} - ky)] \Big] \Big] \\
 & \qquad \qquad \qquad (7.11)
 \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe dla ciśnienia będzie:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dx} \left[ A'(x) \frac{dp}{dx} - A'(x) \cdot B'(x) \right] = 0 \quad (7.12)$$

a jego całka:

$$p(x) = B(x) + \frac{[A(x) - A_z] B_u - [A(x) - A_u] B_z}{A_u - A_z} \quad (7.13)$$

Symbole  $k$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  oznaczają:

$$k = B_0 \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

$$A(x) = \int \frac{dx}{(\text{th}kh - kh)R}, \quad A_u = A(x_u), \quad A_z = A(x_z)$$

$$\begin{aligned}
 B(x) = \frac{q\omega^2}{48} \int \frac{RR'}{\text{th}kh - kh} & \left[ \frac{\text{sh}^2 kh - 6kh - 4(\text{sh}^2 kh - 1)\text{th}kh}{\text{ch}^2 kh} + \right. \\
 & \left. + \frac{\text{sh}^2 kh + 6kh - 4(\text{ch}^2 kh + 1)\text{th}kh}{\text{sh}^2 kh} \right] dx
 \end{aligned}$$

$$B_u = p_u - B(x_u), \quad B_z = p_z - B(x_z); \quad C = \frac{B_u - B_z}{A_u - A_z} \quad (7.14)$$

Zauważymy, że wykorzystując analogię omawianego tutaj przepływu magnetycznego z przepływami niemagnetycznymi omówionymi w § 5 i § 6 tej pracy można napisać analogon równania Reynoldsa dla przepływu z mimośrodowym położeniem współpracujących powierzchni. Jednak równanie to - podobnie jak równanie (5.12) - nie da się rozwiązać w postaci ogólnej bez zadania postaci funkcji  $R/x/$  oraz  $h/x/$ .

## 7.2. Profile prędkości

Wprowadzając bezwymiarową współrzędną w kierunku prostopadłym do osi symetrii szczeliny oraz oznaczając:

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad H = kh \quad (7.15)$$

można przedstawić wzory (7.9), (7.14) oraz (7.15) określające rozkład prędkości w szczelinie, w postaci:

$$v_{\theta} = D_1 f_1(H; \eta) \quad (7.16)$$

$$v_x = D_2 f_2(H; \eta) + D_3 f_3(H; \eta) \quad (7.17)$$

$$v_y = D_4 f_4(H; \eta) + D_5 f_5(H; \eta) + D_6 f_6(H; \eta) \quad (7.18)$$

gdzie:  $D_1$  oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia przekroju szczeliny; funkcje  $f_i(H; \eta)$  dane są zależnościami (12.35) - (12.40).

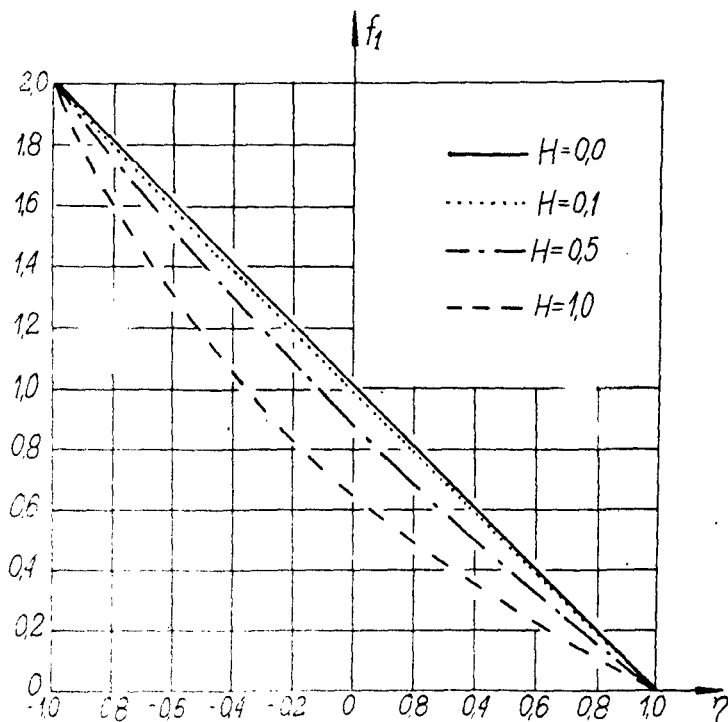
Z otrzymanych wzorów wynika, że tutaj - podobnie jak w poprzednio zbadanych przypadkach - przepływ wywołany jest przez dwa czynniki: ruch wirowy jednej z powierzchni ograniczających szczelinę oraz różnicę ciśnień między wlotem i wylotem ze szczeliny.

Wzór charakteryzujący składową obwodową prędkości pozwala stwierdzić, że profil tej prędkości dla ustalonego położenia przekroju szczeliny /funkcja  $f_1$ , na rys.7.2 : /



zmienia się od prostoliniowego dla  $H = 0$  do krzywoliniowego. dla  $H > 0$ , charakterystycznego dla hydromagnetycznego przepływu Couette'a między dwiema płaszczyznami umieszczonymi w prostym polu magnetycznym.

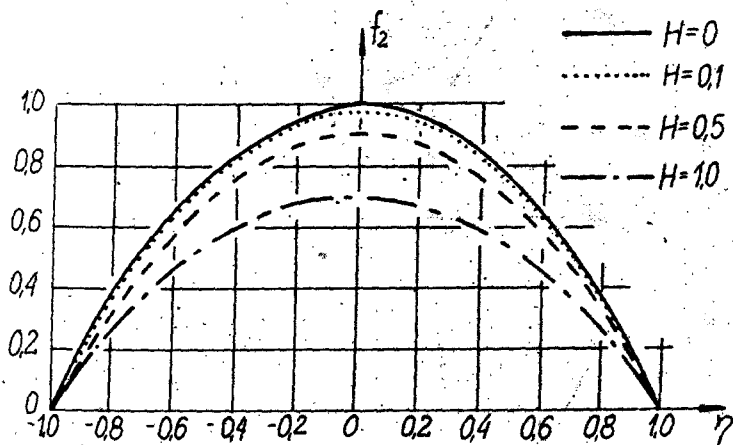
Z postaci wzorów opisujących profil składowej wzdłużnej prędkości  $v_x$  wynika, że główną jego częścią jest profil hydromagnetycznego płaskiego przepływu Poiseuille'a /funkcja  $f_2$  na rys. 7.3./ uwarunkowany istnieniem wspomnianej uprzednio różnicy ciśnień i ruchem wirowym powierzchni wewnętrznej.



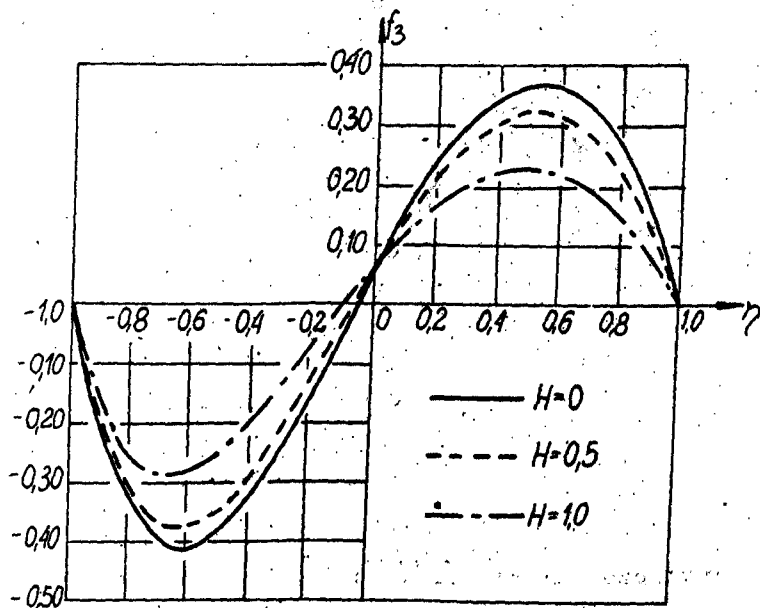
Rys. 7.2

Na główną część składowej wzdłużnej prędkości nakłada się przepływ wtórny wywołany ssącym działaniem wirują-

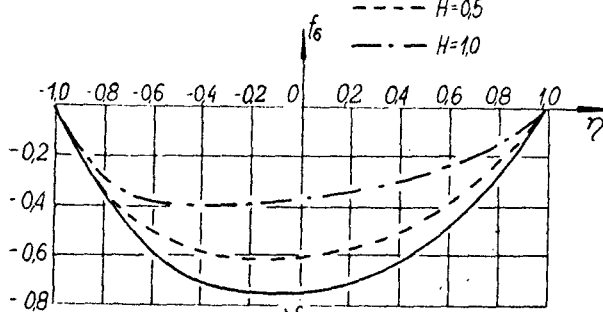
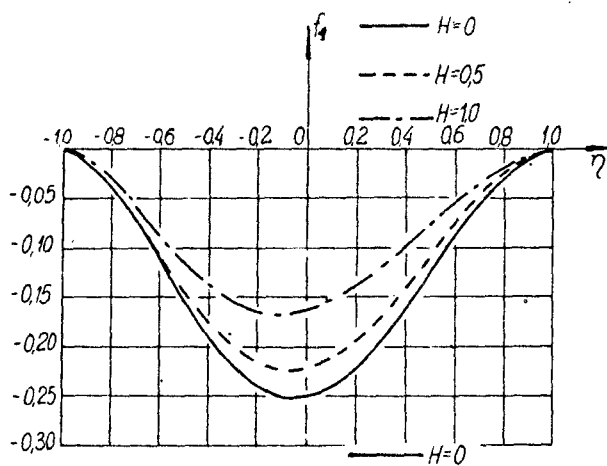
cej powierzchni. Przepływ ten opisany jest funkcjami  $f_3$  -  $f_6$  pokazanymi na rysunkach 7.4 - 7.7.



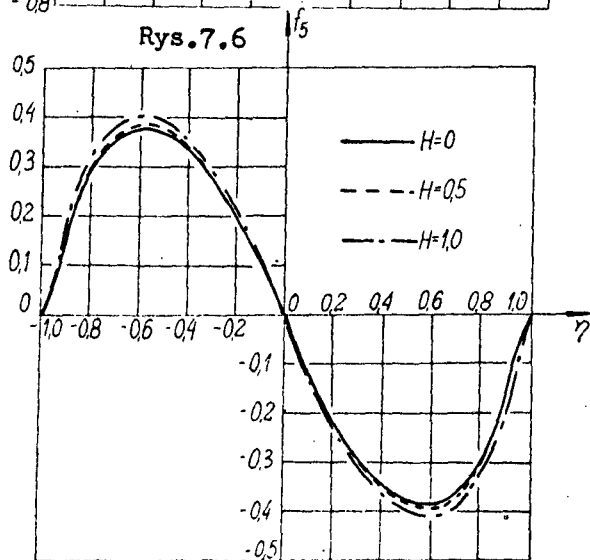
Rys. 7.3



Rys. 7.4



Rys.7.6



Rys.7.7

Z przytoczonych wykresów funkcji  $f_1$  wynika, że wzrost natężenia pola magnetycznego, wyrażający się wzrostem wartości  $H$ , wywiera hamujący wpływ na wartość prędkości przepływu.

## 8. Ruch ściśliwego płynu niemagnetycznego o zmiennych współczynnikach materiałowych

### 8.1. Załki równań ruchu

Równania ruchu ściśliwego płynu niemagnetycznego otrzymamy z równań (4.1) - (4.7) pomijając w nich składniki związane z działaniem pola magnetycznego. Wtedy odpowiednio będzie dla pierwszej klasy przepływu

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial (R \rho u_x)}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(T) \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] \quad (8.2)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(T) \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \mu(T) \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (8.5)$$

dla drugiej klasy przepływu równania (8.2) i (8.5) zastępuje się równaniami:

$$-\rho v_y^2 \frac{R'}{R} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(T) \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \mu(T) \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (8.7)$$

Do równań tych należy dołączyć równanie stanu:

$$p = \frac{R T}{\rho} \quad (8.8)$$

Całki równań ruchu dla każdej z klas przepływu muszą spełniać warunki brzegowe (5.8) - (5.10). Ponieważ przebieg rozwiązania jest tutaj podobny do rozwiązania opisanego w § 6 oraz w pracy [70] nie będziemy go w całości powtarzać. Opierając się na wynikach § 6 ograniczymy rozwiązanie do rozpatrzenia przypadku przepływu drugiej klasy, to znaczy przepływu z uwzględnieniem odśrodkowych sił bezwładności.

Całkując układ (8.3), (8.4) oraz (8.6) otrzymamy:

$$p = p(x, \theta, t) \quad (8.9)$$

$$u_{\theta} = \omega R \delta + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left[ \Phi_1(x, \theta, y, t) - \Phi_1(x, \theta, h, t) \delta \right] \quad (8.10)$$

$$T = T_0 - \left[ \Psi(x, \theta, y, t) - \Psi(x, \theta, h, t) \delta \right] \quad (8.11)$$

$$u_x = \left[ \Phi_1(x, \theta, y, t) - \Phi_1(x, \theta, h, t) \delta \right] \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \left[ \Phi_2(x, \theta, y, t) - \Phi_2(x, \theta, h, t) \delta \right] p \quad (8.12)$$

oraz równanie różniczkowe dla rozkładu ciśnienia w szczelinie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} R \Phi_3 P \left( \frac{\partial p}{\partial x} - I p \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_4 P \frac{\partial p}{\partial \theta} = \\ = \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_5 P + \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 P \end{aligned} \quad (8.13)$$

Wzory opisujące funkcje występujące we wzorach (8.10)

(8.13) podane są w punkcie 12.6.

Zauważmy, że dla przepływu izotermicznego gazu, lepkiego o stałych współczynnikach materiałowych - po pominięciu członów nieliniowych w drugim składniku lewej strony (8.13) - będzie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left[ R h^3 P \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{0.3 p \omega^2 R R'}{R T_0} \right) \right] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (h^3 P \frac{\partial p}{\partial \theta}) = \\ = 6 \mu_0 \omega \frac{\partial (p h)}{\partial \theta} + 12 \mu_0 \frac{\partial (p h)}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Równania różniczkowe (8.13) czy (8.14) dają się efektywnie scałkować jedynie dla dwóch przypadków szczególnych, analogicznych do rozpatrzonych w punktach 5.3.1. i 5.3.2. Dla przykładu osiowo - symetrycznego przepływu ustalonego będzie:

$$v_\theta = \omega R \delta(y) \quad (8.15)$$

$$T = T_0 - [\Psi(x, y) - \Psi(x, h) \delta(y)] \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_x = & [\Phi_1(x, y) - \Phi_1(x, h) \delta(y)] \frac{dp(x)}{dx} + \\ & + [\Phi_2(x, y) - \Phi_2(x, h) \delta(y)] p(x) \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_y = & - \frac{p^2(x_0) T(x, y)}{2 R p(x)} \frac{\partial}{\partial x} R \left\{ \frac{d}{dx} \left[ \frac{p(x)}{p(x_0)} \right]^2 \int_0^y \frac{1}{T(x, y)} [\Phi_1(x, y) - \right. \\ & \left. - \Phi_1(x, h) \delta(y)] dy + 2 \left[ \frac{p(x)}{p(x_0)} \right]^2 \int_0^y \frac{1}{T(x, y)} [\Phi_2(x, y) - \Phi_2(x, h) \delta(y)] dy \right\} \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{p(x)}{p(x_0)} \right]^2 = & \exp \left( - \int_{x_0}^x W(x) dx \right) \left[ 1 + \right. \\ & \left. + C_1 \int_{x_0}^x Q(x) \exp \left( \int_{x_0}^x W(x) dx \right) dx \right] \end{aligned} \quad (8.19)$$

gdzie  $C_1$  jest stałą całkowania, a  $p/x_0$  jest wartością ciśnienia  $p$  w dowolnym punkcie  $x_0, y_0$  szczeliny, natomiast funkcje  $W(x)$  i  $Q(x)$  określone są odpowiednio wzorami (12.48) oraz (12.49).

## 3.2. Przypadki szczególne ruchu

### 3.2.1. Rozwiązanie dla stałych wartości $\mu$ i $\lambda$

Przyjmie założenia, że  $(\mu) T = \mu_0$  oraz  $\lambda(T) = \lambda_0$  gdzie  $\mu_0$  i  $\lambda_0$  są wartościami stałymi pozwoli nam efektywnie scałkować równania ruchu. Odpowiednie wyrażenia określające składową prędkości  $v_\theta$  oraz temperaturę  $T$  będą:

$$v_\theta^c = \omega R \frac{y}{h} \quad (8.20)$$

$$T^c = T_0 \left[ 1 + \frac{FR^2}{2} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right] \quad (8.21)$$

gdzie:

$$F = \frac{\mu_0 \omega^2}{\lambda_0 T_0}$$

Zauważymy, że wyrażenia dla prędkości  $v_x$  oraz  $p$  pozostają bez zmiany. Natomiast funkcje pomocnicze wchodzące do wzorów dla  $v_x$  i  $p$  będą określone wzorami (12.50). Przy zadanych  $R(x)$  oraz  $h(x)$  możemy, po wyliczeniu pomocniczych funkcji (12.50), wyznaczyć ciśnienie  $p$  oraz składowe prędkości z równań (8.17), (8.18) i (8.19).



8.2.2. Przybliżone rozwiązanie dla  $\mu = \mu(T)$  oraz  $\lambda = (\lambda)T$

Aby znaleźć przybliżone rozwiązania dla zmiennych  $\mu$  i  $\lambda$  przyjmujemy typowe formuły dla  $\mu = (\mu)T$  oraz  $\lambda = \lambda(T)$  dla płynów ściśliwych [17,61]:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^n, \quad \lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^m \quad (8.22)$$

Dla przepływów spotykanych w praktyce można przyjąć równość różnic  $\Delta T = T - T_0$  oraz  $\Delta T^c = T^c - T_0$  z dokładnością do małych wyższego rzędu od  $(FR^2)$ . Zatem:

$$\Delta T \approx \Delta T^c = T_0 \frac{FR^2}{2} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (8.23)$$

Ponieważ wartość  $\Delta T/T_0$  jest mniejsza od 1 można zlinearyzować równania (8.22) i wyrazić zależnościami:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + n \frac{\Delta T}{T_0}\right), \quad \lambda = \lambda_0 \left(1 + m \frac{\Delta T}{T_0}\right) \quad (8.24)$$

uwzględniając tutaj (8.23) otrzymamy

$$\mu = \mu_0 \left[1 + n \frac{FR^2}{2} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right] \quad (8.25)$$

oraz podobne wyrażenia dla  $\lambda$ :

$$\lambda = \lambda_0 \left[1 + m \frac{FR^2}{2} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right] \quad (8.26)$$

Wykorzystując założenie, że wartość  $F$  jest mała i linearyzując wyrażenia podcałkowe we wzorach określających

$(\delta)y$ ,  $(\gamma)y$ ,  $\Phi_1(x,y)$ ,  $\Psi_1(x,y)$ ,  $\Phi_2(x,y)$  oraz  $W(x)$  i  $Q(x)$  otrzymamy [70]:

$$\frac{U}{\sigma} = \omega R \frac{y}{h} \left\{ 1 + \frac{nFR^2}{12} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \right] \right\} \quad (8.27)$$

$$T^L = T_0 \left[ 1 + \frac{FR^2}{2} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \left\{ 1 + \frac{FR^2}{12} \left[ n - (n+3m) \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right] \right\} \right] \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{P(x)}{P(x_0)} \right]^2 = & \exp\left(\frac{Q_3 \omega^2 R^2}{R T_0} \left[ 1 - \frac{FR^2}{360} (17+n) \right]\right) \left\{ \exp\left(-\frac{Q_3 \omega^2 R_0^2}{R T_0} \left[ 1 + \right. \right. \right. \\ & - \frac{FR_0^2}{360} (17+n) \left. \left. \left. \right] \right) + C_1^L \int_{x_0}^x \frac{1}{R h^3} \left[ 1 + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{FR^2}{20} (2+n) \right] \exp\left(-\frac{Q_3 \omega^2 R^2}{R T_0} \left[ 1 - \frac{FR^2}{360} (17+n) \right]\right) dx \right\} \quad (8.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_x^L = & \frac{\omega^2 h^2 R R' R(x)}{12 \mu_0 R T_0} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \left\{ -\frac{4}{5} + \frac{y}{h} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) + \right. \\ & - \frac{FR^2}{300} \left[ 3 \left( -7 + 10 \frac{y}{h} + 10 \frac{y^2}{h^2} + 10 \frac{y^3}{h^3} - 20 \frac{y^4}{h^4} \right) + \right. \\ & \left. \left. - n \left( 8 + 33 \frac{y}{h} - 58 \frac{y^2}{h^2} - 50 \frac{y^3}{h^3} + 210 \frac{y^4}{h^4} - 140 \frac{y^5}{h^5} \right) \right] \right\} + \quad (8.30) \\ & - \frac{C_1^L P^2(x_0)}{4 \mu_0 R n p(x)} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \left\{ 1 + \frac{FR^2}{20} \left[ 2 + n \left( 1 - 5 \frac{y}{h} + 5 \frac{y^2}{h^2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^L = & \frac{p^2(x_0) T(x_0)}{12 \mu_0 R p(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\omega^2 h^3 R^2 R'}{5 R T_0} \left[ \frac{p(x)}{p(x_0)} \right]^2 \frac{y^2}{h^2} \left\{ 2 - 3 \frac{y}{h} + \right. \right. \\
 & + \frac{y^3}{h^3} - \frac{FR^2}{30} \left[ 21 + 46 \frac{y}{h} - 195 \frac{y^2}{h^2} + 108 \frac{y^3}{h^3} + 80 \frac{y^4}{h^4} - 60 \frac{y^5}{h^5} + \right. \\
 & \left. \left. + n \left( 8 + 38 \frac{y}{h} - 110 \frac{y^2}{h^2} + 34 \frac{y^3}{h^3} + 70 \frac{y^4}{h^4} - 40 \frac{y^5}{h^5} \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{C_1^L}{2} \frac{y^2}{h^2} \left\{ 3 - 2 \frac{y}{h} + \frac{FR^2}{20} \left[ 6 - 24 \frac{y}{h} + 30 \frac{y^2}{h^2} - 12 \frac{y^3}{h^3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + n \left( 3 - 12 \frac{y}{h} + 15 \frac{y^2}{h^2} - 6 \frac{y^3}{h^3} \right) \right] \right\} \Big)
 \end{aligned}
 \tag{8.31}$$

Aby wyznaczyć stałą całkowania  $C_1^L$  oraz nieokreślone dodatnie ciśnienie  $p(x_0)$  weźmy pod uwagę warunki (5.22), przy czym niech

$$p_z = p(x_0)$$

wtedy na podstawie (8.29) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 C_1^L = & \frac{\left( \frac{p_H}{p_z} \right)^2 \exp\left(-\frac{0,3 \omega^2 R_H^2}{R T_0} \left[ 1 - \frac{FR_H^2}{360} (17+n) \right]\right) - \exp\left(-\frac{0,3 \omega^2 R_z^2}{R T_0} \left[ 1 - \frac{FR_z^2}{360} (17+n) \right]\right)}{\int_{x_z}^{x_H} \frac{1}{R h^3} \left[ 1 + \frac{FR^2}{20} (2+n) \right] \exp\left(-\frac{0,3 \omega^2 R^2}{R T_0} \left[ 1 + \frac{FR^2}{360} (17+n) \right]\right) dx}
 \end{aligned}
 \tag{8.32}$$

Stąd oraz z zależności (3.36) wynika, że rozkład ciśnienia w szczelinie  $p(x)$  nie zależy od  $\mu_0$ , a dla szczeliny o stałej grubości również nie zależy od wartości  $h$ .

### 8.2.3. Przybliżone rozwiązanie dla stałych wartości $\mu$ i $\lambda$

Dla stałych wartości  $\mu$  i  $\lambda$  jest  $\mu = \mu_0$ ,  $\lambda = \lambda_0$  oraz  $n = m = 0$ . Po podstawieniu  $n = 0$  do równań (8.27) - (8.31) i (8.32) otrzymano przybliżone formuły dla  $p(x)$ ,  $v_x(x,y)$ ,  $v_y(x,y)$  oraz dla stałej  $C_1$  dla liniowego przybliżenia.

### 8.2.4. Rozwiązania dla przepływu izotermicznego

Jeżeli  $F = 0$  w zależności (8.21), to wtedy  $T^c(x,y) = T_0$  i przepływ jest przepływem izotermicznym.

Podstawiając  $F = 0$  do równań (8.27) - (8.32) możemy łatwo wyznaczyć parametry tego przepływu.

### 8.3. Profile prędkości dla liniowego przybliżenia

Formuły dla prędkości w zlinearyzowanym przybliżeniu można przedstawić w prostej postaci

$$v_z^L = D_1^L f_1(\eta; \alpha; n) \quad (8.33)$$

$$v_x^L = D_2^L f_2(\eta; \alpha; n) + D_3^L f_3(\eta; \alpha; n) \quad (8.34)$$

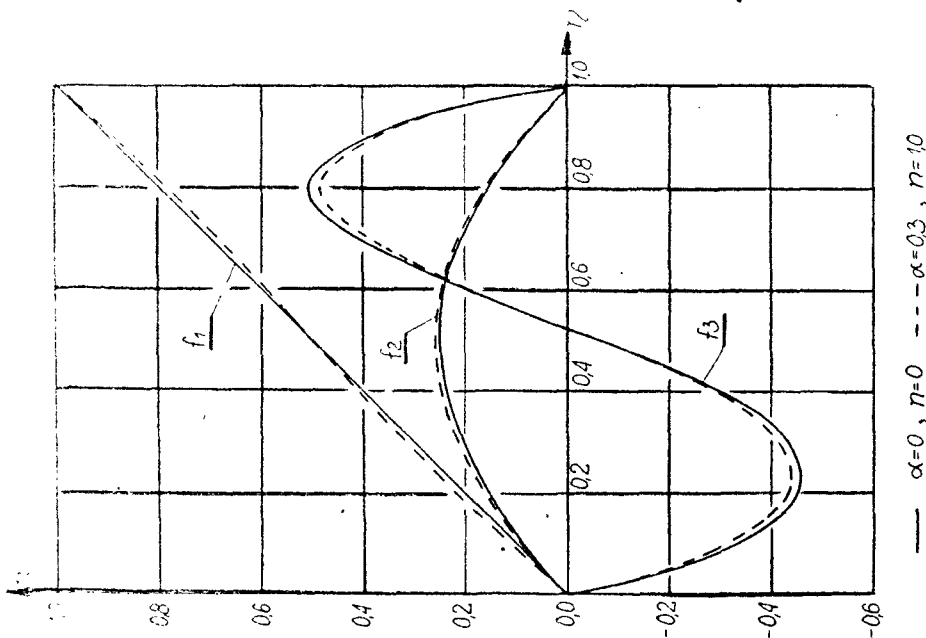
$$\sigma_y^L = D_4^L f_4(\eta; \alpha; n) + D_5^L f_5(\eta; \alpha; n) + D_6^L f_6(\eta; \alpha; n) \quad (8.35)$$

Tutaj  $D_i^L$  oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia przekroju poprzecznego szczeliny; funkcje  $f_i$  określone są wyrażeniami (12.51) - (12.56) natomiast  $\eta$  i  $\alpha$  dane są wzorami:

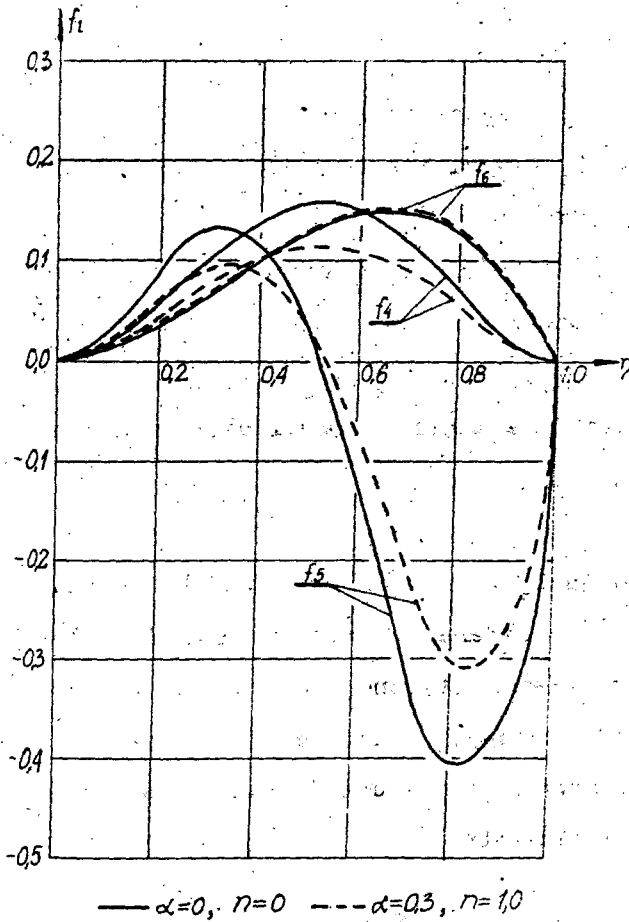
$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \alpha = FR^2 \quad (8.36)$$

W praktyce  $n \approx m \approx 1$  oraz  $0 \leq \alpha \leq 0,3$

Na rysunku (8.1) i (8.2) przedstawiono wykresy funkcji  $f_i$  dla  $\alpha = 0$ ,  $n = 0$  /przepływ izotermiczny/ oraz dla  $\alpha = 0,3$ ,  $n = 1,0$  /przepływ o zmiennych  $\mu$  i  $\lambda$ /.



Rys. 8.1



Rys.8.2

Na podstawie analizy wykresów nasuwa się wniosek, że różnica wartości  $v_e$  i  $v_x$  dla przepływu izotermicznego i dla przepływu o zmiennych  $\mu$  i  $\lambda$  /w liniowym przybliżeniu/ jest pomijalnie małą. Natomiast analogiczne różnice dla prędkości  $v_y$  - obrazującej przepływ wtórny - nie przekraczają 30% wartości  $v_y^L$ .

Porównanie głównych wartości funkcji  $f_1$  dla przepływu izotermicznego rozpatrzonego tutaj, z głównymi wartościami analogicznych funkcji określonych wzorami (5.42) dla przepływu cieczy, pozwala stwierdzić, że profile prę-

kości obu przepływów są identyczne /różnice znaków w funkcjach  $f_5$  - wynikają z różnych znaków przyjętych dla współczynnika  $D_5$ /.

Wnioski jakościowe dotyczące obu przepływów są również identyczne.

#### 8.4. Rozkład ciśnienia w szczelinie dla izotermicznego ruchu

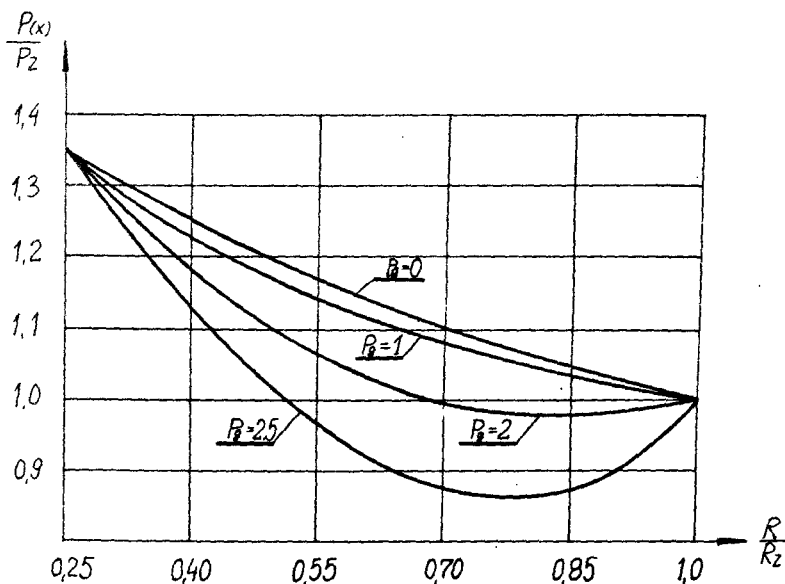
Z postaci wzorów (8.29) i (8.32) wynika, że rozkład ciśnienia dla zadanego kształtu szczeliny dla izotermicznego ruchu niemagnetycznego płynu o zmiennych współczynnikach materiałowych /gazu lepkiego/ można - podobnie jak dla przepływu cieczy - przedstawić w zależności od bezwymiarowego parametru:

$$P_g = \frac{Q_3 \omega^2 R_z^2}{RT_0} \quad (8.37)$$

Dyskusję na temat wpływu kształtu szczeliny na rozkład ciśnienia można przeprowadzić tylko dla zadanych postaci funkcji  $R(x)$  oraz  $h(x)$ .

Na rysunku 8.3 przedstawiono graficzny przebieg rozkładu ciśnienia wzdłuż tworzącej dla łożyska stożkowego /rys.3.4/ o stałej grubości szczeliny.

Przypadek  $P_g = 0$  odpowiada przepływowi między nieruchomymi ściankami łożyska z uwzględnieniem sił bezwładności - lub przepływowi z pominięciem wpływu sił bezwładności.



Rys.8.3

Ponieważ wykresy przedstawione na rysunkach 8.3 i 5.4 są podobne, można wyciągnąć stąd ogólny wniosek o istnieniu podobieństwa przebiegu krzywych ciśnień obu porównywanych tutaj przepływów dla identycznych kształtów szczeliny.

Wzory (8.29) i (8.32) pozwalają również wyciągnąć wniosek, że dla przybliżenia liniowego wpływ zmian wartości współczynników materiałowych na rozkład ciśnienia jest pomijalnie mały.



### 9. Ruch ściśliwego płynu magnetycznego o stałych współczynnikach materiałowych

Wykorzystując wnioski punktu 8.3 ograniczymy rozważania dotyczące płynu magnetycznego do przypadku izotermicznego, ustalonego przepływu osiowo-symetrycznego. Uwzględniając poczynione tutaj założenia w równaniach (4.1) - (4.7) otrzymamy następujące równania ruchu dla przepływu drugiej klasy

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} (R \rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) = 0 \quad (9.1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \sigma B_0^2 v_x = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho v_x^2 \frac{R'}{R} \quad (9.2)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} - \sigma B_0^2 v_\theta = 0 \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (9.4)$$

oraz równanie stanu

$$p = \rho K \quad (9.5)$$

Warunki brzegowe będą identyczne z warunkami brzegowymi dla przepływu rozpatrzonego w § 7, a odniesionymi do szczeliny pokazanej na rysunku 7.1.

Całkując równania (9.2) - (9.4) przy uwzględnieniu (9.5) otrzymamy [68]:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\omega R}{2} \left( \frac{chky}{chkh} - \frac{shky}{shkh} \right) \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{C_1 p^2(x_0)}{\mu k^2 R p(x)} \frac{1}{thkh - kh} \left( \frac{chky}{chkh} - 1 \right) + \\ & - \frac{\omega^2 p(x) R R'}{12 \mu k^2 K} \left\{ \frac{1}{ch^2 kh} \left[ sh^2 ky - 1 - (sh^2 kh - 1) \frac{chky}{chkh} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{4(sh^2 kh - 1)thkh - (sh2kh - 6kh)}{4(thkh - kh)} \frac{chky}{chkh} - 1 \right] + \\ & - \frac{4}{sh^2 kh} (chky - chkh)shky + \\ & - \frac{1}{sh^2 kh} \left[ ch^2 ky + 1 - (ch^2 kh + 1) \frac{chky}{chkh} + \right. \\ & \left. + \frac{4(ch^2 kh + 1)thkh - (sh^2 kh + 6kh)}{4(thkh - kh)} \left( \frac{chky}{chkh} - 1 \right) \right] \right\} \quad (9.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & - \frac{1}{R p(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{C_1 p^2(x_0)}{\mu k^3} \frac{1}{thkh - kh} \left( \frac{shky}{chkh} - ky \right) + \right. \\ & - \frac{\omega^2 p^2(x) R R'}{12 \mu k^3 K} \left( \frac{1}{4ch^2 kh} \left[ sh^2 ky - 6ky - 4(sh^2 kh - 1) \frac{shky}{chkh} + \right. \right. \\ & \left. + \frac{4(sh^2 kh - 1)thkh - (sh2kh - 6kh)}{thkh - kh} \left( \frac{shky}{chkh} - ky \right) \right] + \\ & - \frac{2}{sh^2 kh} (chky - chkh)^2 + \frac{1}{4sh^2 kh} \left[ sh^2 ky + 6ky - 4(ch^2 kh - 1) \frac{shky}{chkh} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{4(ch^2 kh + 1)thkh - (sh2kh + 6kh)}{thkh - kh} \left( \frac{shky}{shkh} - ky \right) \right] \right\} \quad (9.8) \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{p(x)}{p(x_0)} \right]^2 = \exp\left(-\int_{x_0}^x W(x) dx\right) \left[ 1 + C_1 \int_{x_0}^x Q(x) \exp\left(\int_{x_0}^x W(x) dx\right) dx \right] \quad (9.9)$$

gdzie  $C_1$  - jest stałą całkowania, a  $p(x_0)$  - jest wartością ciśnienia  $p$  w dowolnym punkcie  $(x_0, y_0)$  szczeliny.

Stałe  $C_1$  oraz  $p(x_0)$  można wyznaczyć przy pomocy warunków brzegowych (5.22). Funkcje  $W(x)$  i  $Q(x)$  określone są odpowiednio wzorami (12.57) oraz (12.58). Sens stałej  $k$  wyjaśniono w § 7.

Porównanie zależności (9.6), (9.12) i (9.13) z odpowiednimi zależnościami § 7 dla cieczy magnetycznej prowadzi do wniosku, że profile prędkości obu przepływów są identyczne. Wniosek ten pokrywa się z treścią wniosku kończącego punkt 8.3, a odnoszącego się do przepływów niemagnetycznych. Natomiast różne są rozkłady ciśnień w szczelinie dla obu przepływów. Różnice ilościowe można określić jedynie dla zadanych postaci funkcji  $R(x)$  oraz  $h(x)$ .

## 10. Ruch płynu mikropolarnego

## 10.1. Warunki brzegowe

Mając na uwadze rozważania § 5 dotyczące istnienia rozwiązania równania różniczkowego dla rozkładu ciśnienia w przypadku przepływu w łożysku o mimośrodkowym położeniu współpracujących powierzchni, ograniczymy badanie przepływu mikropolarnego do przypadku osiowo - symetrycznego, dla którego istnieje możliwość zbudowania rozwiązania ogólnego w sensie określonym w § 1 tej pracy.

Składowe prędkości i mikrorotacji powinny spełniać na ściankach ograniczających przepływ /rys.10.1/ następujące warunki brzegowe:

$$v_x(x, \pm h) = 0 \quad (10.1)$$

$$v_\theta(x, -h) = \omega R, \quad v_\theta(x, +h) = 0 \quad (10.2)$$

$$v_y(x, \pm h) = 0 \quad (10.3)$$

$$\Omega_x(x, \pm h) = 0 \quad (10.4)$$

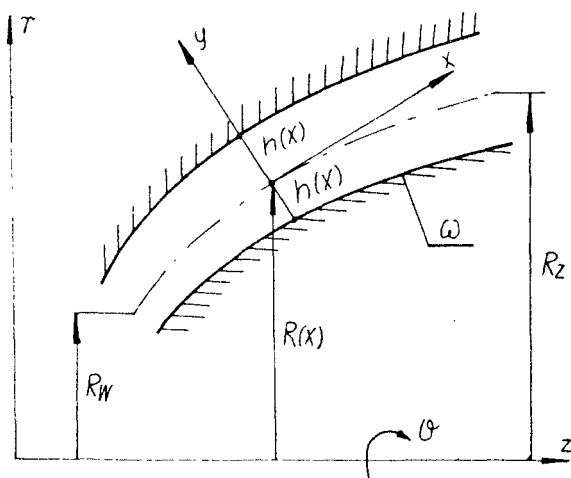
$$\Omega_\theta(x, \pm h) = 0 \quad (10.5)$$

$$\Omega_y(x, \pm h) = 0 \quad (10.6)$$

Dla ciśnienia przyjmujemy

$$p = p_H \quad \text{dla} \quad x = x_H \quad (10.7)$$

$$p = p_Z \quad \text{dla} \quad x = x_Z \quad (10.8)$$



Rys.10.1

## 10.2. Całki równań ruchu

Nie wdając się w szczegóły całkowania równań (4.13)-(4.19), które przebiega w podobny sposób do opisanego w §§ 5 i 7, możemy napisać dla przyjętej osiowo symetrii ruchu płynu następujące wyrażenia dla parametrów przepływu:

$$p = p(x) \quad (10.9)$$

$$\Omega_y \equiv 0 \quad (10.10)$$

$$\Omega_x = -\frac{k}{2m\gamma} \frac{\cos mh - \cos my}{\sin mh} \omega R. \quad (10.11)$$

$$v_\theta = \frac{\omega R}{2} \left(1 - \frac{\sin my}{\sin mh}\right) \quad (10.12)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\theta = & \frac{1}{km} \frac{P_H - B_H - (P_z - B_z)}{(A_H - A_z)(mh \operatorname{ctg} mh - 1) R h} \left( \frac{mh \sin my}{\sin mh} - my \right) + \\ & - \frac{\rho \omega^2 R R'}{4km} \left\{ \frac{1}{\sin^2 mh} \left[ mh + \sin mh (\cos mh - \cos my) + \right. \right. \\ & \left. \left. - (mh \cos mh \cos my + my \sin mh \sin my) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6 \sin^2 mh} \left[ (\cos mh - \cos my) \sin mh + \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{mh \sin my}{\sin mh} - my \right) \frac{\sin^2 mh}{mh \operatorname{ctg} mh - 1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} v_x = & \frac{\gamma m}{k^2} \frac{P_H - B_H - (P_z - B_z)}{(A_H - A_z)(mh \operatorname{ctg} mh - 1) R} \frac{\cos mh - \cos my}{\sin mh} + \\ & - \frac{\rho \omega^2 \gamma R R'}{4k^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 mh} \left[ my \cos my \sin mh - mh \cos mh \sin my \right] + \right. \\ & - \frac{\cos mh - \cos my}{6 \sin^3 mh (mh \operatorname{ctg} mh - 1)} \left[ mh \sin^2 mh + (2 \cos my + \right. \\ & \left. \left. + \cos mh) (mh \cos mh - \sin mh) \right] \right\} \end{aligned} \quad (10.14)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_y = & -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\gamma}{k^2} \frac{p_H - B_H - (p_z - B_z)}{(A_H - A_z)(\operatorname{mh} \operatorname{ctg} \operatorname{mh} - 1)} \frac{m\gamma \cos \operatorname{mh} - \sin m\gamma}{\sin \operatorname{mh}} + \right. \\
 & + \frac{\rho \omega^2 \gamma R^2 R'}{4k^2 m} \left\{ \frac{1}{\sin \operatorname{mh}} \left[ (1 + \operatorname{mh} \operatorname{ctg} \operatorname{mh})(\cos \operatorname{mh} - \cos m\gamma) + \right. \right. \\
 & + \operatorname{mh} \sin \operatorname{mh} - m\gamma \sin m\gamma \left. \right] + \frac{1}{6 \sin^3 \operatorname{mh} (\operatorname{mh} \operatorname{ctg} \operatorname{mh} - 1)} \left[ (m\gamma \cos \operatorname{mh} + \right. \\
 & - \sin m\gamma) \operatorname{mh} \sin^2 \operatorname{mh} + (\cos \operatorname{mh} \sin m\gamma + \\
 & \left. \left. - m\gamma \sin^2 \operatorname{mh} - \sin m\gamma \cos m\gamma) (\operatorname{mh} \cos \operatorname{mh} - \sin \operatorname{mh}) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe dla ciśnienia będzie:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dx} \left[ A'(x) \frac{dp}{dx} - A'(x) \cdot B'(x) \right] = 0 \quad (10.16)$$

a jego całka:

$$p(x) = B(x) + \frac{[A(x) - A_z](p_H - B_H) - [A(x) - A_H](p_z - B_z)}{A_H - A_z} \quad (10.17)$$

zatem oznaczono

$$A(x) = \int \frac{dx}{(\operatorname{mh} \operatorname{ctg} \operatorname{mh} - 1) R h}$$

$$B(x) = \frac{\rho \omega^2}{4} \int R R' \left[ 1 + \frac{3 \operatorname{mh} \operatorname{ctg} \operatorname{mh} - \cos^2 \operatorname{mh} - 2}{6 \sin^2 \operatorname{mh} (\operatorname{mh} \operatorname{ctg} \operatorname{mh} - 1)} \right] dx$$

$$A_H = A(x_H), \quad A_z = A(x_z)$$

$$B_H = B(x_H), \quad B_z = B(x_z) \quad (10.18)$$

### 10.3. Profile prędkości

Wprowadzając do wyrażeń poprzedniego punktu określającego składowe prędkości następujące zmienne bezwymiarowe:

$$\varrho = \frac{\mu}{\eta} \quad , \quad M = mh \quad (10.19)$$

można zapisać wzory (10.12), (10.14) oraz (10.15) w postaci:

$$v_{\theta} = D_1 f_1(M; \eta) \quad (10.20)$$

$$v_x = D_2 f_2(M; \eta) + D_3 f_3(M; \eta) \quad (10.21)$$

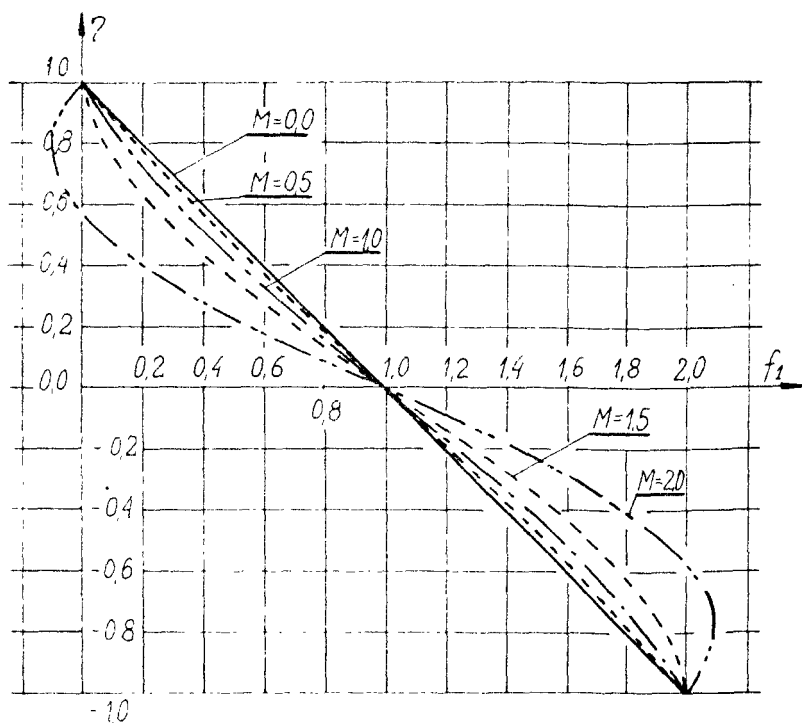
$$v_y = D_4 f_4(M; \eta) + D_5 f_5(M; \eta) + D_6 f_6(M; \eta) \quad (10.22)$$

Tutaj  $D_i$  oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia przekroju szczeliny, natomiast funkcje określone są zależnościami (12.59) - (12.64).

Wzory charakteryzujące składowe prędkości przepływu pozwalają stwierdzić, że profil prędkości obwodowej  $v_{\theta}$  dla ustalonego położenia przekroju szczeliny odbiega od profilu liniowego /funkcja  $f_1$  na rysunku 10.2/ charakterystycznego płynu newtonowskiego. Profil ten niezależny od kształtu szczeliny jest typowy dla mikropolarnego przepływu Couette'a między dwiema płaszczyznami, z których jedna jest nieruchoma a druga porusza się z lokalną prędkością równą  $\omega R(x)$ .

Z postaci wzorów opisujących składową wzdłużną prędkość  $v_x$  wynika, że główną częścią jej profilu jest profil charakterystyczny dla płaskiego przepływu Poiseuille'a



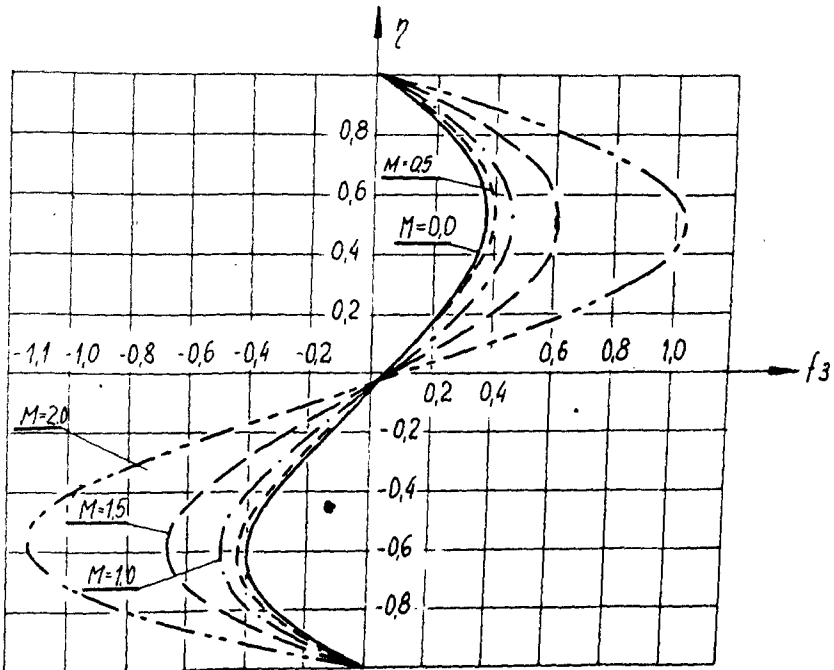
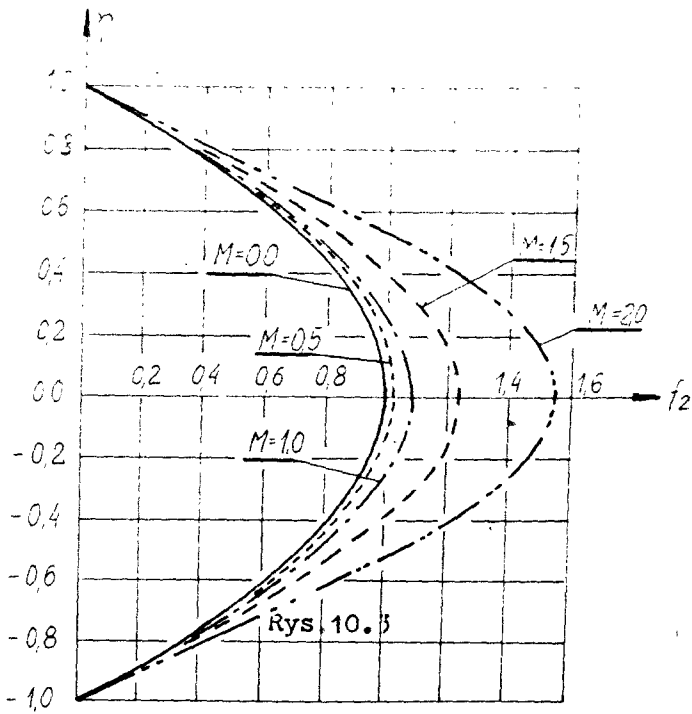


Rys.10.2

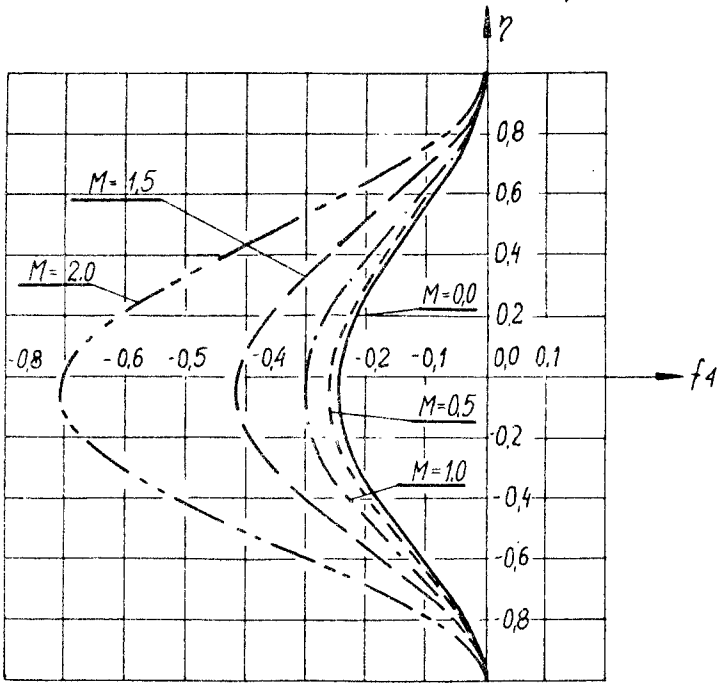
/funkcja  $f_2$  na rysunku 10.3/ uwarunkowany istnieniem różnicy ciśnień na wlocie i wylocie ze szczeliny oraz ruchem obrotowym powierzchni wewnętrznej.

Na główną część składowej wzdłużnej prędkości nakłada się przepływ wtórny wywołany ssącym działaniem wirującej powierzchni. Przepływ ten opisany jest funkcjami  $f_3 - f_6$  pokazanymi na rysunkach 10.3 - 10.7.

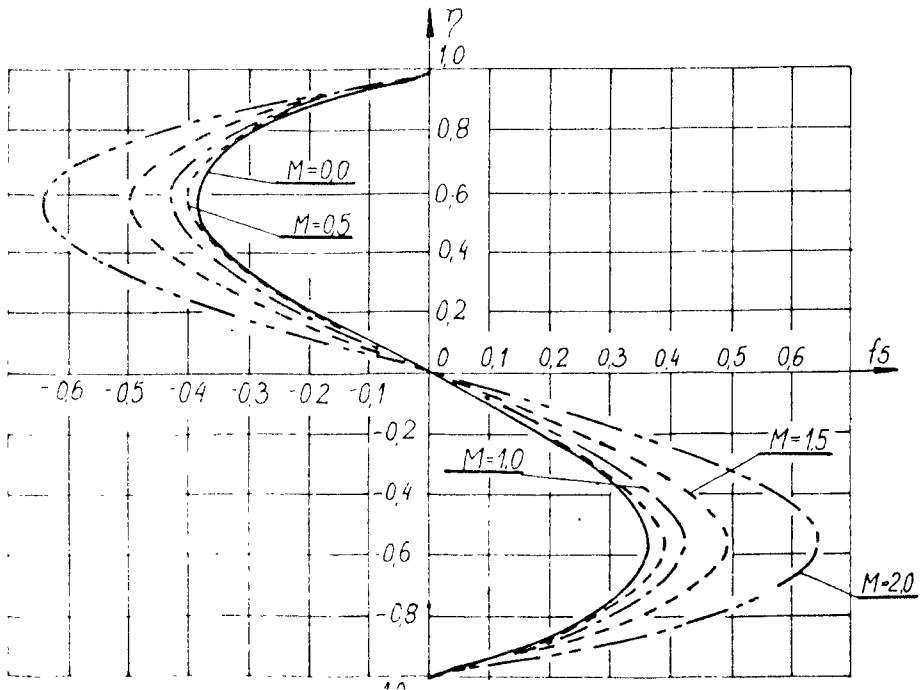
Z przytoczonych wykresów funkcji  $f_1$  wynika, że wzrost własności "mikrorotacyjnych" płynu wyrażający się wzrostem parametru  $M$  /będącego wskaźnikiem stosunku lepkości sprzężenia do pozostałych lepkości płynu/ wywiera "przyspieszający" wpływ na wartości prędkości przepływu.

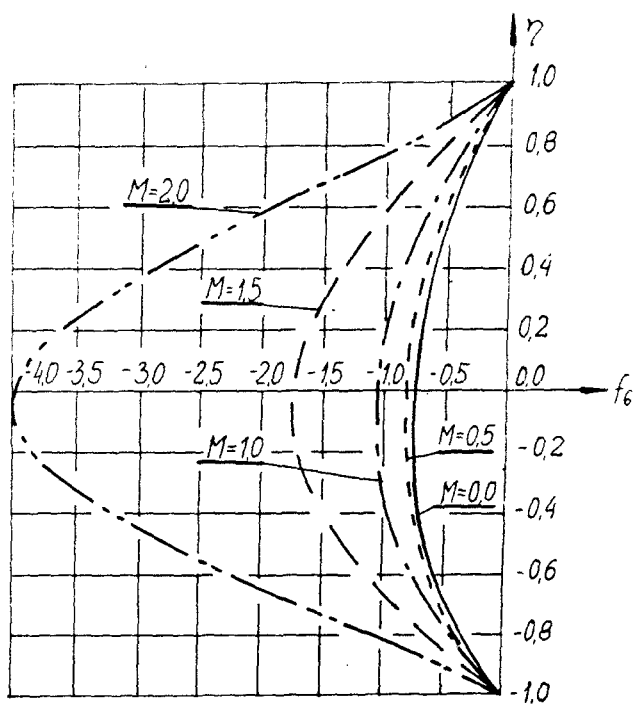


Rys. 10.4



Rys. 10.5





Rys.10.7

## 11. Zakończenie i podsumowanie

W pracy niniejszej omówiono ruch płynów newtonowskich jednorodnych ściśliwych i nieściśliwych oraz ruch płynu z mikrostrukturą w szczelinach krzywoliniowych wzdłużnych łożysk ślizgowych. Rozważania dotyczyły zarówno płynów niemagnetycznych jak i magnetycznych. Celem ich było:

- ujęcie wpływu odśrodkowych sił bezwładności na ruch omawianych płynów;
- wyprowadzenie zależności określających profile prędkości i ciśnienia w szczelinach łożysk o dowolnym zarysie współpracujących powierzchni.

Z analizy uzyskanych formuł wynika wniosek ogólny: ruch płynu lepkiego w cienkiej warstwie - z częściowym uwzględnieniem sił bezwładności nie zależy od kształtu ścianek ograniczających warstwę.

Pod pojęciem "ruch... nie zależy" rozumie się tutaj niezależność profilu składowych prędkości od kształtu warstwy.

Formuły wyprowadzane w poszczególnych rozdziałach pozwalają stwierdzić, że ruch płynu w szczelinie jest wywołany przez dwa czynniki:

- ruch wirowy jednej z powierzchni ograniczających szczelinę;
- różnicę ciśnień między wlotem i wylotem ze szczeliny.

Ze wzorów opisujących składowe prędkości dla poszczególnych przypadków ruchu omówionych w pracy wynika, że profile prędkości obwodowej  $v_\theta$  /funkcje  $f_1(\eta)$ ,  $f_1(\eta-L)$ ,  $f_1(H; \eta)$ ,  $f_1(M; \eta)$ / dla ustalonego położenia przekroju szczeliny zmieniają się od prostoliniowego do krzywoliniowych /dla  $H > 0$  lub  $M > 0$ / charakterystycznych dla hydromagnetycznych lub mikropolarnych przepływów Couette'a.

Postacie wzorów opisujących składową wzdłużną prędkości  $v_x$  wskazują, że główną częścią jej profilu /funkcje  $f_2(\eta)$ ,  $f_2(H; \eta)$ ,  $f_3(M; \eta)$ / jest profil płaskiego przepływu Poiseuille'a. /także hydromagnetyczny lub mikropolarny/ uwarunkowany istnieniem wspomnianej uprzednio różnicy ciśnień i ruchem wirowym jednej z powierzchni ograniczających szczelinę.

Na główną część profilu składowej wzdłużnej prędkości nakładają się profile przepływu wtórnego wywołane ssącym działaniem wirującej powierzchni /w rozważanych przypadkach była to powierzchnia wewnętrzna/. Powierzchnia ta zasysa w swoim sąsiedztwie płyn wywołując jego ruch wzdłużny odśrodkowy. Ruch ten musi być równoważony ruchem wzdłużnym dośrodkowym przy powierzchni nieruchomej i ruchem poprzecznym określonym składową  $v_y$  prędkości. Przepływ wtórny opisany jest funkcjami  $f_3(\eta) \div f_6(\eta)$ ,  $f_3(H; \eta) \div$

$$f_6(H; \eta), \quad f_3(M; \eta) \div f_6(M; \eta) \quad .$$

Z wykresów funkcji  $f_1(H; \eta)$  wynika, że wzrost natężenia pola magnetycznego wyrażający się wzrostem wartości  $H$ , wywiera "hamujący" wpływ na wartości prędkości przepływu. Natomiast z wykresów funkcji  $f_1(M; \eta)$  wynika wniosek, że wzrost własności "mikrorotacyjnych" płynu wyrażających się wzrostem parametru wywiera "przyspieszający" wpływ na wartości prędkości przepływu.

Rozważania odnoszące się do ruchu ściśliwych płynów /rozdziały 8 i 9/ wskazują, że istnieje analogon równania Reynoldsa dla rozkładu ciśnienia - z częściowym uwzględnieniem sił bezwładności - dany równaniem różniczkowym (8.13). Równanie to dla izotermicznych przepływów gazu lepkiego przyjmuje postać (8.14), która - dla zadanych funkcji  $R = R(x)$  oraz  $h = h(x)$  - daje się rozwiązać analitycznie jedynie w kilku prostych przypadkach. Opisy niektórych rozwiązań szczegółowych można znaleźć w pracach podanych w spisie literatury.

Równanie (8.13) daje się rozwiązać w postaci ogólnej jedynie w dwu przypadkach: dla osiowo - symetrycznych ustalonych lub nięustalonych przepływów cieczy /ulegając zarazem pewnym uproszczeniom i przyjmując postać omówioną w rozdziale 5/, natomiast dla gazów jedynie dla ustalonych i osiowo - symetrycznych przepływów. Oczywiście uzyskanie efektywnych postaci rozwiązań wymaga tutaj również zadania funkcji opisujących kształt szczeliny łożyska.

Dla przepływów osiowo - symetrycznych cieczy o stałych współczynnikach materiałowych równanie różniczkowe

dla rozkładu ciśnień drogą prostych przekształceń daje się sprowadzić do typowego równania Reynoldsa. Pozwala to na stosowanie do jego rozwiązania znanych dotąd metod analitycznych.

Nie wnikając w szczegóły rozwiązań można - na podstawie przeprowadzonych tutaj rozważań - wysnuć pewne ogólne wnioski dotyczące rozkładu ciśnienia w szczelinie krzywoliniowego łożyska ślizgowego o stałej grubości szczeliny.

Zwróćmy uwagę na wykresy ciśnień pokazane na rysunkach 5,5, 5.6 oraz 8.3. Wynika z nich, że dla szczelin o stałej grubości profile ciśnień zależą od bezwymiarowych parametrów:

$$P_s = \frac{0,15 \varrho \omega^2 R_z^2}{P_2} \quad \text{lub} \quad P_g = \frac{0,3 \omega^2 R_z^2}{RT_0}$$

i od kształtu szczeliny. Każdy z tych parametrów może być przedstawiony wzorem bardziej ogólnym /uwzględniającym własności magnetyczne lub mikropolarne płynu/

$$P_s = \frac{\varrho \omega^2 R_z^2}{P_2} f_p(H)$$

$$P_s = \frac{\varrho \omega^2 R_z^2}{P_2} f_p(M)$$

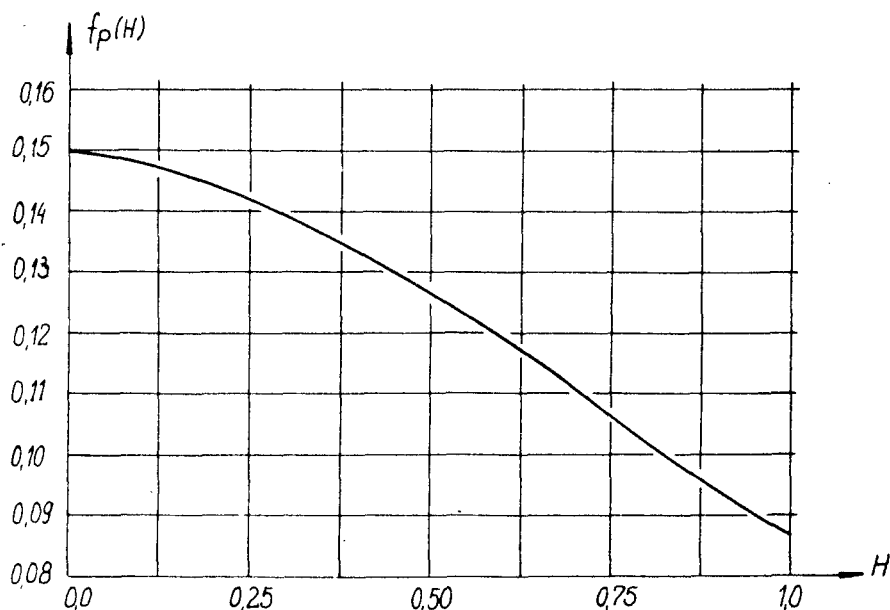
$$P_g = \frac{2 \omega^2 R_z^2}{RT_0} f_p(H)$$

Na rysunkach 11.1 i 11.2 pokazano przebiegi zmienności funkcji  $f_p(H)$  oraz  $f_p(M)$  pośrednio wskazujące na zmiany  $P_s$  i  $P_g$ . Z wykresów tych oraz z wykresów ciśnień wy-



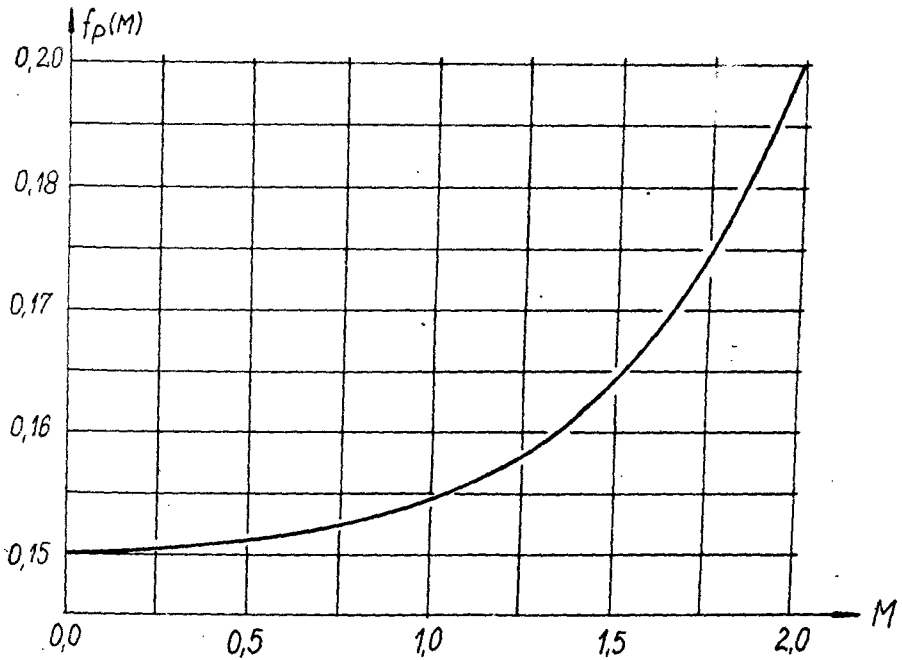
nikają następujące wnioski ogólne:

- wpływ sił bezwładności powoduje zmiany profilu ciśnienia prowadzące do zmniejszenia nośności łożyska;
- działanie pola magnetycznego częściowo zmniejsza wpływ sił bezwładności na profil ciśnienia;
- wzrost własności mikrorotacyjnych płynu zwiększa wpływ sił bezwładności na profil ciśnienia.



Rys.11.1

Porównanie wykresów ciśnień przedstawionych na rysunkach 5.5 i 5.6 prowadzi również do wniosku szczególnego, że łożyska wzdłużne o krzywoliniowym profilu szczeliny /w tym przypadku łożysko kuliste/ są mniej podatne na wpływ sił bezwładności niż łożysko o prostoliniowym



Rys.11.2

wym profilu szczeliny /łożyska płaskie lub stożkowe/.

Wnioski o podobnej treści - odnoszące się do ciśnienia - zachowują słuszność również dla łożysk o zmiennej grubości szczeliny.

## 12. Aneks: równania, wzory i oszacowania

## 12.1. Równania ruchu płynu newtonowskiego

Równania ruchu płynu newtonowskiego wynikające z zasad zachowania masy, pędu i energii - w układzie współrzędnych  $x, \theta, y$  - mają postać:

równanie ciągłości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial (R \rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_\theta)}{R \partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (12.1)$$

równanie pędu:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_\theta^2 \frac{R'}{R} \right) = \\ & = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left\{ 2R \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (R v_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_\theta}{R \partial \theta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] \right\} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \mu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} - v_\theta \frac{R'}{R} \right] + \\ & - 2\mu \left( \frac{\partial v_\theta}{R \partial \theta} + v_x \frac{R'}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \sigma B_0^2 v_x \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} + v_x v_\theta \frac{R'}{R} \right) = \\ & = - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} R^2 \mu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} - v_\theta \frac{R'}{R} \right) + \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \mu \left\{ \frac{\partial v_x}{R \partial \theta} + v_x \frac{R'}{R} - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (R v_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_y}{\partial \theta} \right) - \sigma B_0^2 v_{\theta}$$

(12.3)

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{v_{\theta}}{R} \frac{\partial v_y}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \mu R \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \mu \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_y}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left\{ 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (R v_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_{\theta}}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] \right\} \end{aligned} \quad (12.4)$$

równanie energii

$$\begin{aligned} \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_{\theta}}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = & \\ - P \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (R v_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_{\theta}}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda R \frac{\partial T}{\partial x}) + & \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda \frac{\partial T}{R \partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) + & \\ + \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_{\theta}}{R \partial \theta} + v_x \frac{R'}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. & \\ + \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + & \\ + \left( \frac{\partial v_x}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial x} - v_{\theta} \frac{R'}{R} \right)^2 - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (R v_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_{\theta}}{R \partial \theta} + \right. & \\ \left. \left. + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right]^2 \right\} + \sigma B_0^2 (v_x^2 + v_{\theta}^2) \end{aligned}$$

(12.5)

Tutaj i w pozostałych równaniach ruchu podanych w punkcie 12.2 przecinkiem oznaczono pochodną względem zmiennej  $x$ .

## 12.2. Równania ruchu płynu mikropolarnego

Równania ruchu płynu mikropolarnego wynikające z zasad zachowania masy, pędu, momentu pędu - w układzie współrzędnych  $x, \sigma, y$  - mają postać:

równanie ciągłości

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{R \partial \sigma} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (12.6)$$

równania pędu

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_\sigma}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_\sigma^2 \frac{R'}{R} \right) = \\ = - \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_x}{\partial x} - 2 \frac{R'}{R^2} \frac{\partial v_\sigma}{\partial \sigma} - \frac{R'^2}{R^2} v_x - \frac{R''}{R} v_x \right) + \\ + k \left( \frac{\partial v_y}{R \partial \sigma} - \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (12.7)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_\sigma}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} + \frac{v_\sigma}{R} \frac{\partial v_\sigma}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} + v_x v_\sigma \frac{R'}{R} \right) = \\ = - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 v_\sigma}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_\sigma}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 v_\sigma}{\partial y^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{R'}{R} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial x} + 2 \frac{R'}{R^2} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{R'^2}{R^2} \bar{v}_\theta - \frac{R''}{R} \bar{v}_\theta \Big) + \\
 & + k \left( \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{12.8}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_y}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \\
 & + (\mu + k) \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \\
 & + k \left( \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial x} + \frac{R'}{R} \Omega_\theta - \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega_x}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{12.9}$$

równania momentu pędu:

$$\begin{aligned}
 \rho j \left( \frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial \Omega_x}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} - v_\theta \Omega_\theta \frac{R'}{R} \right) &= \\
 = k \left( \frac{\partial v_y}{R \partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial y} - 2 \Omega_x \right) + \gamma \left( \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial y^2} + \right. \\
 & + \frac{R'}{R} \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - 2 \frac{R'}{R^2} \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial \theta} - \frac{R'^2}{R^2} \Omega_x - \frac{R'}{R} \Omega_x \Big) + \\
 & + (\alpha + \beta) \left( \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{R'}{R} \Omega_x - \frac{R^2}{R^2} \Omega_x - \frac{R'}{R^2} \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial \theta} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial x \partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{12.10}$$

$$\begin{aligned}
 \rho j \left( \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial y} + v_\theta \Omega_x \frac{R'}{R} \right) &= \\
 = k \left( \frac{\partial v_y}{R \partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial y} - 2 \Omega_x \right) + \gamma \left( \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial y^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{R'}{R} \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - 2 \frac{R'}{R^2} \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial \theta} - \frac{R'^2}{R^2} \Omega_x - \frac{R'}{R} \Omega_x \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\alpha + \beta) \left( \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{R''}{R} \Omega_x - \frac{R'^2}{R^2} \Omega_x - \frac{R'}{R^2} \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial \theta} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial x \partial y} \right)
 \end{aligned}$$

(12.11)

$$\begin{aligned}
 & \rho \left( \frac{\partial \Omega_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial \Omega_y}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + \frac{R'}{R} v_\theta - \frac{1}{R} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} - 2 \Omega_y \right) + \rho \left( \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial y^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{R'}{R} \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} \right) + (\alpha + \beta) \left( \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial x \partial y} + \frac{R'}{R} \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial \theta \partial y} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

(12.12)

### 12.3. Klasyfikacja przepływów w łożyskach

Aby określić rząd wielkości poszczególnych składowych prędkości przepływu w łożyskach wprowadzimy liczbę Reynoldsa zdefiniowaną wzorem:

$$Re = \frac{v_0 h_0 \rho_0}{\mu_0} \quad (12.13)$$

gdzie symbolem  $v_0$  oznaczono:

$$v_0 = \omega R_0$$

zaś indeksem 0 oznaczono średnie wartości w szczelinie parametrów wchodzących do wzoru (12.13). Określimy również bezwymiarową średnią grubość szczeliny:

$$H_0 = \frac{h_0}{R_0} \quad (12.14)$$

Wprowadzając wielkości średnie do równań ruchu możemy otrzymać ich bezwymiarową postać, z której wynikają wnioski dotyczące istnienia dwu zasadniczych klas przepływów w cienkich warstwach [44] związanych z wpływem sił odśrodkowych. W kożyskach ślizgowych liczba Reynoldsa określona wzorem (12.13) przyjmuje wartość:

$$Re = O(1) \quad (12.15)$$

natomiast w zależności od klasy przepływu, gradient bezwymiarowego ciśnienia może być równy:

$$\left| \text{grad} \frac{P}{\rho_0 U_0^2} \right| = O(H_0^{-1}) \quad (12.16)$$

lub też

$$\left| \text{grad} \frac{P}{\rho_0 U_0^2} \right| = O(1) \quad (12.17)$$

Pierwszej klasie przepływu odpowiadają następujące oszacowania rzędu wielkości składowych prędkości przepływu:

$$\bar{v}_x = O(1), \quad \bar{v}_\theta = O(1), \quad \bar{v}_y = O(H_0) \quad (12.18)$$

natomiast drugiej klasie przepływu:

$$\bar{v}_x = O(H_0), \quad \bar{v}_\theta = O(1), \quad \bar{v}_y = O(H_0) \quad (12.19)$$



Dla praktycznego objaśnienia obu klas przepływów można przytoczyć następujące przykłady liczbowe. Mianowicie przyjmijmy najpierw rzędy średnich wielkości dla przepływu gazu w łożysku [17,44] :

$$h_0 = O(10^{-6}) \text{ [m]}, \quad R_0 = O(10^{-3}) \text{ [m]}$$

$$\mu_0 = O(10^{-5}) \text{ [}\frac{\text{kg}}{\text{ms}}\text{]}, \quad \rho_0 = O(1) \text{ [}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\text{]}$$

Z wzorów (12.13) i (12.15) wynika rząd prędkości obwodowej:

$$\omega R_0 = O(10) \text{ [}\frac{\text{m}}{\text{s}}\text{]}^*$$

natomiast z wzorów (12.16) i (12.17) odpowiednio rzędy różnicy ciśnień między wlotem i wylotem z łożyska:

$$p = O(10^5) \text{ [}\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\text{]}$$

dla pierwszej klasy przepływu

lub

$$p = O(10^2) \text{ [}\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\text{]}$$

dla drugiej klasy przepływu.

Natomiast dla przepływów cieczy rzędy odpowiednich wielkości są równe [5,13,42]:

$$h_0 = O(10^{-5}) \text{ [m]}, \quad R_0 = O(10^{-2}) \text{ [m]}$$

$$\mu_0 = O(10^{-1}) \text{ [}\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}\text{]}, \quad \rho_0 = O(10^3) \text{ [}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\text{]}$$

\*/ Otrzymany rząd prędkości należy uznać za wielkość orientacyjną

Z wzorów (12.13) i (12.15) wynika ten sam rząd prędkości obwodowej co i dla gazu:

$$\omega R_0 = O(10) \left[ \frac{m}{s} \right]$$

zaś z wzorów (12.16) i (12.17) wynikają odpowiednio rzędy wspomnianej poprzednio różnicy ciśnień:

$$p = O(10^3) \left[ \frac{N}{m^2} \right]$$

dla pierwszej klasy przepływu oraz

$$p = O(10^5) \left[ \frac{N}{m^2} \right]$$

dla drugiej klasy przepływu .

Z równania liczbowego obu klas wynika, że dla przepływów gazu dopuszczalne jest przyjęcie pierwszej klasy przepływu /bowiem w praktyce różnica ciśnień na wlocie i wylocie z łożyska gazowego  $p \gg 0/10^2 / \left[ \frac{N}{m^2} \right] /$  określającej wzorami (12.18) rzędy prędkości, natomiast dla przepływu cieczy konieczne jest przyjęcie drugiej klasy przepływu i oszacowań (12.19), a tym samym uwzględnienie również wpływu odśrodkowych sił bezwładności.

#### 12.4. Wzory pomocnicze opisujące niektóre funkcje z rozdziału 6

Funkcje występujące w wyrażeniach (6.9) - (6.12) opisują następujące wzory:

$$\delta(x, \sigma, y, t) = \frac{\int_0^y \frac{dy}{\mu(\tau)}}{\int_0^h \frac{dy}{\mu(\tau)}} \quad (12.20)$$

$$\gamma(x, \sigma, y, t) = \frac{\int_0^y \frac{dy}{\lambda(\tau)}}{\int_0^h \frac{dy}{\lambda(\tau)}} \quad (12.21)$$

$$\Phi_1(x, \sigma, y, t) = \int_0^y \frac{y dy}{\mu(\tau)} \quad (12.22)$$

$$\Phi_2(x, \sigma, y, t) = -\frac{R'}{R} \int_0^y \frac{1}{\mu(\tau)} \left( \int_0^y [\bar{v}_\sigma(x, \sigma, y, t)]^2 dy \right) dy \quad (12.23)$$

$$\Phi_3(x, \sigma, t) = \int_0^h [\Phi_1(x, \sigma, y, t) - \Phi_1(x, \sigma, h, t) \delta] dy \quad (12.24)$$

$$\Phi_4(x, \sigma, t) = -\int_0^h \delta(x, \sigma, y, t) dy \quad (12.25)$$

$$\Gamma(x, \sigma, t) = \frac{gR'}{\Phi_3 R} \int_0^h [\Phi_2(x, \sigma, y, t) - \Phi_2(x, \sigma, h, t) \delta] dy \quad (12.26)$$

Postać funkcji  $\Psi$  zależy natomiast od klasy przepływu.

Dla pierwszej klasy będzie:

$$\Psi(x, \sigma, y, t) = \int_0^y \frac{1}{\lambda(\tau)} \left( \int_0^y \mu(\tau) \left\{ \left[ \frac{\partial v_x(x, \sigma, y, t)}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial v_\sigma(x, \sigma, y, t)}{\partial y} \right]^2 \right\} dy \right) dy \quad (12.27)$$

dla drugiej klasy:

$$\Psi(x, \sigma, y, t) = \int_0^y \frac{1}{\lambda(\tau)} \left( \int_0^y \mu(\tau) \left[ \frac{\partial v_0(x, \sigma, y, t)}{\partial y} \right]^2 dy \right) dy \quad (12.26)$$

Dla pierwszej klasy przepływu należy we wzorach (6.10) (5.12) oraz (12.26) pominąć funkcję  $\Phi_2$  wyrażającą wpływ się bezwładności.

Funkcje  $f_i$  określające składowe prędkości (6.30) - (6.32) dane są wzorami:

$$f_1 = \eta \left[ 1 - \frac{\alpha}{12} (1 - 3\eta + 2\eta^2) \right] \quad (12.29)$$

$$f_2 = \eta(1-\eta) \left[ 1 - \frac{\alpha}{20} (1 - 5\eta + 5\eta^2) \right] \quad (12.30)$$

$$f_3 = \eta(1-\eta) \left[ -4 + 5\eta(1-\eta) - \frac{\alpha}{60} (8 + 65\eta + 155\eta^2 - 70\eta^3 + 140\eta^4) \right] \quad (12.31)$$

$$f_4 = \eta^2 \left[ 2 - 3\eta + \eta^3 + \frac{\alpha}{60} (4 + 19\eta - 55\eta^2 + 17\eta^3 + 35\eta^4 - 20\eta^5) \right] \quad (12.32)$$

$$f_5 = \eta^2 \left[ -4 + 9\eta - 5\eta^3 - \frac{\alpha}{60} (8 + 57\eta - 220\eta^2 + 85\eta^3 + 210\eta^4 - 140\eta^5) \right] \quad (12.33)$$

$$f_6 = \eta^2 \left[ 1 - \eta - \frac{\alpha}{20} (1 - 6\eta + 10\eta^2 - 5\eta^3) \right] \quad (12.34)$$

12.5. Wzory pomocnicze opisujące niektóre funkcje z rozdziału 7

Funkcje  $f_1(H; \eta)$  określające składowe prędkości (7.16) - (7.18) dane są wzorami:

$$f_1(H; \eta) = \frac{\operatorname{ch} H \eta}{\operatorname{ch} H} - \frac{\operatorname{sh} H \eta}{\operatorname{sh} H} \quad (12.35)$$

$$f_2(H; \eta) = -\frac{2}{H^2} \left( \frac{\operatorname{ch} H \eta}{\operatorname{ch} H} - 1 \right) \quad (12.36)$$

$$\begin{aligned} f_3(H; \eta) = & \frac{1}{H^2} \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch}^2 H} \left[ \operatorname{sh}^2 H \eta - 1 - (\operatorname{sh}^2 H - 1) \frac{\operatorname{ch} H \eta}{\operatorname{ch} H} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{4(\operatorname{sh}^2 H - 1) \operatorname{th} H - \operatorname{sh} 2H + 6H}{4(\operatorname{th} H - H)} \left( \frac{\operatorname{ch} H \eta}{\operatorname{ch} H} - 1 \right) \right] + \\ & - \frac{4}{\operatorname{sh} 2H} (\operatorname{ch} H \eta - \operatorname{ch} H) \operatorname{sh} H \eta + \\ & + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 H} \left[ \operatorname{ch}^2 H \eta + 1 - (\operatorname{ch}^2 H + 1) \frac{\operatorname{ch} H \eta}{\operatorname{ch} H} + \right. \\ & \left. + \frac{4(\operatorname{ch}^2 H + 1) \operatorname{th} H - \operatorname{sh} 2H - 6H}{4(\operatorname{th} H - H)} \left( \frac{\operatorname{ch} H \eta}{\operatorname{ch} H} - 1 \right) \right] \right\} \quad (12.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(H; \eta) = & \frac{1}{H^3} \left\{ \frac{1}{4 \operatorname{ch}^2 H} \left[ \operatorname{sh} 2H \eta - 6H \eta - 4(\operatorname{sh}^2 H - 1) \frac{\operatorname{sh} H \eta}{\operatorname{ch} H} + \right. \right. \\ & \left. + \frac{4(\operatorname{sh}^2 H - 1) \operatorname{th} H - \operatorname{sh} 2H + 6H}{\operatorname{th} H - H} \left( \frac{\operatorname{sh} H \eta}{\operatorname{ch} H} - H \eta \right) \right] + \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{\text{sh}^2 H} (\text{ch} H \eta - \text{ch} H)^2 + \frac{1}{4 \text{ch}^2 H} [\text{sh} 2H \eta + 6H \eta - 4(\text{ch}^2 H + 1) \frac{\text{sh} H \eta}{\text{ch} H} +$$

$$+ \frac{4(\text{ch}^2 H + 1) \text{th} H - \text{sh} 2H - 6H}{\text{th} H - H} \left( \frac{\text{sh} H \eta}{\text{ch} H} - H \eta \right) \Big] \Big\}$$

(12.38)

$$f_5(H; \eta) = \frac{6}{H^4} (H \text{sh} H \eta - H \eta \text{sh} H)$$

(12.39)

$$f_6(H; \eta) = \frac{1}{H^2} \left\{ \frac{\text{ch} 2H}{(\text{th} H - H) \text{sh}^2 2H} \left[ \frac{6H + 4H \text{sh}^2 H - 3 \text{sh} 2H}{\text{ch}^2 H} \text{sh} H \text{sh} H \eta + \right. \right.$$

$$+ \left. \frac{6 \text{sh}^2 H \text{th} H - 2H \text{th}^2 H - 4H \text{sh}^2 H}{\text{th} H - H} \left( \frac{\text{sh} H \eta}{\text{ch} H} - H \eta \right) \right] +$$

$$+ 4 \frac{\text{ch} 2H \text{ch} H \eta - \text{ch} H}{\text{sh}^2 2H} (\text{ch} H \eta - \text{ch} H) +$$

$$- \frac{6H}{2 \text{ch}^3 H} [\text{sh} 2H \eta - 6H \eta - 4(\text{sh}^2 H - 1) \frac{\text{sh} H \eta}{\text{ch} H} +$$

$$+ \frac{4(\text{sh}^2 H - 1) \text{th} H - \text{sh} 2H + 6H}{\text{th} H - H} \left( \frac{\text{sh} H \eta}{\text{ch} H} - H \eta \right)] +$$

$$- \frac{\text{ch} H}{2 \text{sh}^3 H} [\text{sh} 2H \eta + 6H \eta - 4(\text{ch}^2 H + 1) \frac{\text{sh} H \eta}{\text{ch} H} +$$

$$+ \frac{4(\text{ch}^2 H + 1) \text{th} H - \text{sh} 2H - 6H}{\text{th} H - H} \left( \frac{\text{sh} H \eta}{\text{ch} H} - H \eta \right) \Big] \Big\}$$

(12.40)

## 12.6. Obliczenia i wzory pomocnicze dla rozdziału 8

Funkcje  $\delta(x, \theta, y, t)$ ,  $\gamma(x, \theta, y, t)$ ,  $\Phi_1(x, \theta, y, t)$  i  $\Psi(x, \theta, y, t)$  są opisane odpowiednio wzorami (12.20) (12.22) oraz (12.28).

Natomiast poz stałe funkcje występujące we wzorach (8.10) (8.13) dane są zależnościami:

$$\Psi_1(x, \theta, t) = - \int_0^h \frac{dy}{T(x, \theta, y, t)} \quad (12.41)$$

$$\Phi_2(x, \theta, y, t) = - \frac{1}{R} \frac{R'}{R} \int_0^y \frac{1}{\mu(\tau)} \left( \int_0^\tau \frac{[u_\theta(x, \theta, y, t)]^2}{T(x, \theta, y, t)} dy \right) dy \quad (12.42)$$

$$\Phi_3(x, \theta, t) = \int_0^h \frac{[\Phi_1(x, \theta, y, t) - \Phi_1(x, \theta, h, t)\delta]}{T(x, \theta, y, t)} dy \quad (12.43)$$

$$\Phi_4(x, \theta, t) = \int_0^h \frac{[\Phi_2(x, \theta, y, t) - \Phi_2(x, \theta, h, t)\delta]}{T(x, \theta, y, t)} dy \quad (12.44)$$

$$\Phi_5(x, \theta, t) = -\omega \int_0^h \frac{\delta(x, \theta, y, t)}{T(x, \theta, y, t)} dy \quad (12.45)$$

$$I(x, \theta, t) = - \frac{\Phi_4(x, \theta, t)}{\Phi_3(x, \theta, t)} \quad (12.46)$$

Równanie różniczkowe (8.13) dla rozkładu ciśnienia sprowadza się - po jednokrotnym całkowaniu - do postaci [70]:

$$\frac{d}{dx} [p(x)]^2 + [p(x)]^2 W(x) = Q(x) \quad (12.47)$$

gdzie:

$$W(x) = \frac{2 \int_0^h \frac{1}{T(x,y)} [\Phi_2(x,y) - \Phi_2(x,h) \sigma(y)] dy}{\int_0^h \frac{1}{T(x,y)} [\Phi_1(x,y) - \Phi_1(x,h) \sigma(y)] dy} \quad (12.48)$$

$$Q(x) = \frac{C}{R \int_0^h \frac{1}{T(x,y)} [\Phi_1(x,y) - \Phi_1(x,h) \sigma(y)] dy} \quad (12.49)$$

$C$  - jest tutaj stałą całkowania.

Funkcje pomocnicze  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $W(x)$ ,  $Q(x)$  dla stałych wartości  $\mu$  i  $\lambda$  przyjmują postać:

$$\Phi_1^c(x,y) = \frac{1}{\mu_0} \frac{y^2}{2}$$

$$\Phi_2^c(x,y) = - \frac{\omega^2 R R'}{\mu_0 R T_0 h^2} \int_0^y \left( \int_0^y \frac{y^2 dy}{1 + \frac{FR^2 y}{2h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)} \right) dy$$

$$W^c(x) = \frac{4 \int_0^h \frac{1}{T^c(x,y)} [\Phi_2^c(x,y) - \Phi_2^c(x,h) \frac{y}{h}] dy}{\frac{1}{\mu_0} \int_0^h \frac{y(y-h)}{T^c(x,y)} dy}$$

$$Q^c(x) = \frac{C^c}{R \int_0^h \frac{y(y-h)}{T^c(x,y)} dy} \quad (12.50)$$



Funkcje  $f_1(\eta, \alpha; n)$  określające składowe prędkości (8.33) (8.34) dane są wzorami

$$f_1 = \eta \left\{ 1 + n \frac{\alpha}{12} \left[ \frac{1}{2}(1-\eta) - \frac{1}{3}(1-\eta^2) \right] \right\} \quad (12.51)$$

$$f_2 = \eta(1-\eta) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{20} \left[ 2 + n(1-5\eta+5\eta^2) \right] \right\} \quad (12.52)$$

$$f_3 = \eta(1-\eta) \left\{ -4 + 5\eta(1-\eta) - \frac{\alpha}{60} \left[ 3(-7+10\eta+10\eta^2+10\eta^3-20\eta^4) - n(8+33\eta-58\eta^2+50\eta^3+240\eta^4-140\eta^5) \right] \right\} \quad (12.53)$$

$$f_4 = \eta^2 \left\{ 2-3\eta+\eta^3 - \frac{\alpha}{60} \left[ 21+16\eta-120\eta^2+63\eta^3+65\eta^4-47\eta^5+n(8+38\eta-110\eta^2+34\eta^3+70\eta^4-40\eta^5) \right] \right\} \quad (12.54)$$

$$f_5 = \eta^2 \left\{ 4-9\eta+5\eta^3 - \frac{\alpha}{60} \left[ 42+78\eta-585\eta^2+405\eta^3+405\eta^4-345\eta^5+n(16+114\eta-440\eta^2+170\eta^3+420\eta^4-280\eta^5) \right] \right\} \quad (12.55)$$

$$f_6 = \eta^2 \left\{ 1-\eta + \frac{\alpha}{20} \left[ 2-2\eta+n(1-6\eta+10\eta^2-5\eta^3) \right] \right\} \quad (12.56)$$

## 12.7. Wzory pomocnicze dla rozdziału 9

Równanie różniczkowe dla ciśnienia przyjmuje tutaj postać formalnie identyczną z równaniem (12.47) natomiast funkcje  $W(x)$  i  $Q(x)$  określone są wzorami:

$$W(x) = -\frac{\omega^2}{24X} \frac{RR'}{thkh - kh} \left[ \frac{sh2kh - 6kh - 4(sh^2kh - 1)thkh}{ch^2kh} + \frac{sh2kh + 6kh - 4(ch^2kh + 1)thkh}{6h^2kh} \right] \quad (12.57)$$

$$Q(x) = \frac{C}{(thkh - kh)R} \quad (12.58)$$

$C$  - jest stałą całkowania

## 12.8. Wzory pomocnicze dla rozdziału 10

Funkcje  $f_1(M; \eta)$  określające składowe prędkości (10.20) - (10.22) dane są wzorami:

$$f_1(M; \eta) = 1 - \frac{\sin M \eta}{\sin M} \quad (12.59)$$

$$f_2(M; \eta) = -\frac{2}{M} \left( \frac{\cos M - \cos M \eta}{\sin M} \right) \quad (12.60)$$

$$f_3(M; \eta) = \frac{3}{M^2} \left\{ \frac{M\eta \cos M\eta \sin M - M \cos M \sin M\eta}{\sin^2 M} + \frac{\cos M - \cos M\eta}{6 \sin^2 M (M \operatorname{ctg} M - 1)} \left[ M \sin^2 M + (2 \cos M\eta + \cos M)(M \cos M - \sin M) \right] \right\} \quad (12.61)$$

$$f_4(M; \eta) = -\frac{3}{M^4} \left\{ (1 + M \operatorname{ctg} M)(\cos M - \cos M\eta) + M \sin M - M\eta \sin M\eta + \frac{1}{6 \sin^2 M (M \operatorname{ctg} M - 1)} \left[ M \sin^2 M (M\eta \cos M - \sin M\eta) + (\cos M \sin M\eta - \cos M\eta \sin M\eta - M\eta \sin^2 M)(M \cos M - \sin M) \right] \right\} \quad (12.62)$$

$$f_5(M; \eta) = -\frac{6}{M^3} \left( M\eta - \frac{M \sin M\eta}{\sin M} \right) \quad (12.63)$$

$$f_6(M; \eta) = -\frac{3}{M^2 \sin^3 M} \left\{ \cos M (M \cos M \cos M\eta + M\eta \sin M\eta \sin M) + M(2 \cos M - \cos M\eta) - \frac{M(3 \cos^2 M - 1) - \sin 2M}{6 \sin^2 M (M \operatorname{ctg} M - 1)^2} \left[ M \sin^2 M (M\eta \cos M - \sin M\eta) + (\cos M \sin M\eta - \cos M\eta \sin M\eta + M\eta \sin^2 M)(M \cos M - \sin M) \right] + \frac{1}{6(M \operatorname{ctg} M - 1)} \left[ (\sin^2 M + M \sin 2M)(M\eta \cos M - \sin M\eta) - (\sin M \sin M\eta + M\eta \sin 2M)(M \cos M - \sin M) + M(\cos M \sin M\eta - \cos M\eta \sin M\eta) \sin M \right] \right\} \quad (12.64)$$

## Literatura

1. Pietrow N.P.: Trierenje w maszinach i wlijanije na nie-  
wo smazywajuszczzej židkosti, Imżyniernyj Żurnał,  
Kazań, 1883.
2. Reynolds O.: On the theory of lubrication..., Phil. Trans.  
CLXXVII, London, 1885 /Paper II/.
3. Wannier G.H.: A. Contribution to the hydrodynamics of  
lubrication, Quart. Appl Math., VIII, No1, 1950-1-32.
4. Gottwald F., Vieweg R.: Berchnung und Modeliversuche  
an Wasser - und Luftlagern, Z. Angew. Phys., Bd. II,  
h. 11, 1950, 437-443.
5. Targ S.M. Osnownyje zadaczi teorii laminarnych tie-  
czenij, GIT-IL, Moskwa, 1951.
6. Slezkin N.A.: Dinamika wjazkoj nieszimajemoj židkosti,  
Gostiechizdat, Moskwa, 1955.
7. Vannerus T.: Rotierende Scheiben für Luftvorwärmer mit  
geblesen - wirkung, Allg. Wärmetchn., 6, 1955, 251-  
262.
8. Łojcjańskij L.G.: K teorii sfiericzeskowo podszipnika,  
PMM, XIX, 1, 1965, 133-135.
9. Łojcjańskij L.G.: Gidrodinamiczeskaja teorija sfier-  
czeskowo podszipnika, PMM, XIX, 5, 1956, 531-540.

10. Norden A.P.: Teorija powierchnostiej, GIT-TL, Moskwa, 1956.
11. Łojcjański L.G., Stiepanjanc L.G.: Gidrodinamiczeskaja teorija sfiericzeskowo podwiesa, Tr Lennigradskowo Politech. Inst., 198, 1958, 89-98.
12. Dorfman L.A.: Gidrodinamiczeskoje soprotiwlenije i tieptootdacza wraszczajuszczichsja tież, Fizmatgiz, Moskwa, 1960,
13. Pinkus O., Sternlicht B.: Theory of hydrodynamic lubrication, McGraw - Hill Book Comp. Inc. New York, 1961.
14. Shih - J Pai: Magnetogasdynamics and plasma dynamics, Springer - Verlag, Wien, 1962.
15. Dowson D.: A generalized Reynolds equation for fluid film - lubrication, Int. J.Mech. Sci., 4, 1, 1962, 159-170.
16. Sagot J.: Theorie et calcul du palier à gaz sferique, Techn. Sci. Aeronaut. Spatiales, 1, 1963, 9-19.
17. Constantinescu V.N.: Lubricatia cu gaze, Ed.A.R.P.R., Bucuresti, 1963.
18. Ausman J.S.: Linearized ph stability theory for translatory half-speed whirl of long self-acting gas - lubricated journal bearings, Trans. ASME, ser. D, 85, 4, 1963, 611-619.

19. Gołubiew A.I.: Sowriemennyje uptonnienija wraszczajuszczichsja wałow, Maszgiz, Moškwa, 1963.
20. Cheng H.S., Pan C.H.T.: Stability analysis of gas-lubricated self-acting plan, cylindrical journal bearing of finite length using Galerkin method, Trans, ASME, ser. D, 87, 1, 1965, 185-192.
21. Comolet R.: Petites turbines à air sur palier à air, Societé Hydrotechnique de France, IX-eme Journées de l'Hydraulique, Question II, Rapport No 8, b - 1, Paris, 1966.
22. Gołubiew A.J.: Trienije w torcowych uptonniejnijach, Maszinowiedenije, 4, 1966, 114-117/.
23. Eringen A.C.; Theory of micropolar fluids, J.Math. Mech., 16, 1, 1966, 1-18.
24. Cowin S.C.: Polar fluids, Phys. Fluids, 11, 8, 1968, 1919-1927.
25. Di Prima R.C.: Higher order approximations in the asymptotic solution of the Reynolds equation for slider bearings of high bearing numbers, Trans. ASME, ser. F, 91, 1, 1969, 45-51.
26. Kamiyama S.: Magneto-hydrodynamic journal bearing, Trans. ASME, ser. F, 91, 3, 1969, 380-360.
27. Reddi M.M.: Finite - element solution of the incompressible lubrication problem, Trans. ASME, ser. F, 91, 3, 1969, 524-533.

28. Kamiyama S.: Inertia effects in MHD hydrostatic thrust bearing, *Trnas. ASME, ser. F*, 91, 4, 1969, 589-596,
29. Szaniawski A.: Przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w szczelinie stożkowego łożyska ślizgowego, *Prace IPPT*, 15/1970.
30. Kline K.A., Allen A.J.: Nonsteady flows of fluids with microstructure, *Phys. Fluids*, 13, 2, 1970, 263, 270.
31. Reddi M.M., Chu, T.Y.: Finite - element solution of the steady-state compressible lubrication problem, *Trans. ASME, ser. F*, 92, 3, 1970, 495-502.
32. Bassani R.: The thermodynamic flow equations for hydrostatic thrust bearings, *Meccanica*, 5, 4, 1970, 262-269.
33. McAlister K.W., Rice W.: Throughflows between rotating surfaces of revolution, having similarity solutions, *Trnas. ASME, ser. E*, 37, 4, 1970, 924-930.
34. Prosnak W.J.: *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa 1970.
35. Watażin A.B.; Lubimow G.A., Regirer, S.A.: *Magnitogidrodinamiczeskije tleczenija w kanałach*, Nauk, Moskwa 1970.
36. Kamiyama S.: The influence of wall conductance on performance of the MHD hydrostatic thrust bearing *Trans, ASME, ser. F*, 93, 1, 1971, 113-120.

37. Allen S.J., Kline K.A.: Lubrication theory for micro-polar fluids, Trans. ASME, ser. E, 38, 3, 1971, 646-650.
38. Kline K.A., Allen S.J.: A thermodynamical theory of fluid suspensions, Phys. Fluids, 14, 9, 1971, 186-1669.
39. Apanasewicz S., Kazimierski Z., Lewandowski J., Szaniawski A.: The flow of the gas layer between two conical surfaces, Fluid Dynamics Trans, vol. 5, pt.II, PWN, Warszawa 1971.
40. Kazimierski Z.: The optimization problem in the conical gas - film, Fluid Dynamics Trans, vol. 6, pt.II, WPN, Warszawa 1971.
41. Karaśkiewicz E.: Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, Warszawa, 1971.
42. Slezkin N.A.: O rozlicznych widaach differencjalnych urawnienij Reynoldsa dla prostranstwiennych tischenij gazowej smazki, Izv. An SSSR, M.Z.G., 3, 1971, 89-97.
43. Fiedorowa G.I.: Wyzislenije raschoda i gidrodinami-czeskoj siły sfericzeskich podszipnikow, Gidraw. Masziny, Resp. Mieżwied. n-t. sb. 5, 1971, 117-122.
44. Kazimierski Z.: Nieustalony przepływ w cienkiej war-  
stwie lepkiego gazu pomiędzy dwoma niewspółosiowymi stożkami, Ciepłne maszyny Przemysłowe 75/1972, wyd. Pol. Łódzkiej.



45. Allan T.: The application of finite element analysis to hydrodynamic and externally pressurized pocket bearings, *Wear*, 19, 1972, 159-206.
46. Rehsteiner F.H., Cannon R.H.: Static properties of hydrostatic thrust gas bearings with curved surfaces, *Trans ASME, ser. F*, 94, 1, 1972, 49-55.
47. Zuk, J., Ludwig L.P.: Analysis of rotational effects on compressible viscous flow across shaft face seals, *Lub. Enging*, 28, 3, 1972, 82-92.
48. Datta A.B.: Pivoted slider bearing with convex pad surface in micropolar fluid, *Jap. J. Appl. Phys*, 11, 1, 1972, 98-102.
49. Erdogan M.E.: Dynamic of polar fluids, *Acta Mech.*, 15, 1972, 233-253.
50. Agrawal, K.V, Ganju K.L., Jethi S.C.: Squeeze - film and externally pressurized bearings micropolar fluid lubricated, *Wear*, 19, 1972, 259-265.
51. Anderson W.J., Fleming D.P., Parker R.J.: The series hybrid bearing - a new high speed bearing concept, *Trans, ASME, ser. F*, 94, 2, 1972, 117-122.
52. McAlister K.W., Rice W.: Flows between stationary surfaces of revolution, having similarity solutions, *Trans. ASME, ser. E*, 39, 2 1972, 345-350.
53. Bookre J.F., Hubner K.H.: Application of finite element methods to lubrication: an engineering approach

- ach, Trans. ASME, ser. F, 94, 4, 1972, 313-323.
54. Walicki E.: Nośność stożkowego łożyska ślizgowego, Zeszyty Naukowe WSI w Bydgoszczy, Mechanika, 4, 1973, 123-133.
55. Kamiyama S., Sato A.: The effect of wall conductance on torque of the MHD viscous coupler and hydrostatic thrust bearing, Trans, ASME, ser. F. 95, 2, 1973, 181-186.
56. Ebert F.: A similiary solution for the boundary layer flow of a polar fluid, Chem. Eng. J., 5, 1973, 85-92.
57. Tayou Simo J.: Écoulement symmetrique non stationnaire dans un palier de butée, J.Méc., 12,3, 1973, 515-526.
58. Maiti H.: Composite and step slider bearings in micropolar fluid, Jap. J. Appl. Phys., 12, 7, 1973, 1058-1064.
59. Kowalew L.K., S.M.-A. Koniejew: Triechmiernyje tieczeniya zhidkosti i gaza w kolcewych kanałach pri bolszych paramietrach MGD - wzaimodiejstwija, Magnitnaja Gidromiechanika, 4, 1973, 84-93.
60. Bertinow A.I., Kowalew L.K., Koniejew S.M.-A., Polatawiec W.N.: Laminarnoje stoistoje tieczeniye prowadiaszczoj sriedy w kolcewych kanałach pri bolszych paramietrach MGD - Wzaimodiejstwija, Magnitnaja

Gidromiechanika, 1, 1973, 79-84.

61. Łojcjański L.G.: *Miechanika zidkosti i gaza*, Nauka, Moskwa, 1973.
62. Walicki E.: *Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Mech. Teoret. Stos., 12, 1, 1974, 2-12.
63. Ragab H.: *Performance of spherical thrust bearing*, Wear 29, 1974, 11-20.
64. Ahmadi G., Shahinpoor M.: *Universal stability of magnetomicro-polar fluid motions*, Int. J. Engng. Sci. 12, 1974, 657-663.
65. Walicki E.: *Viscous Fluid Flow in a slot of the curvilinear thrust bearing*, Méc. Appliquée, 20, 4, 1975, 483-493.
66. Walicki E.: *Przepływ cieczy lepkiej o zmiennej lepkości w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Zeszyty Naukowe ATR, Mechanika, 8, Bydgoszcz, 1975, 30-37.
67. Walicki E.: *Nośność krzywoliniowego wzdłużnego łożyska ślizgowego*, Zeszyty Naukowe ATR, Mechanika, 9, Bydgoszcz 1975, 69-79.
68. Walicki E.: *Hydromagnetyczny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Mech. Teoret. Stos. 14, 3, 1976, 417-426.

69. Walicki E.: Ogólne równanie teorii smarowania hydrodynamicznego, Prace BTN, ser. B, 8, 1976, 46-56.
70. Walicki E.: Viscous compressible fluid flow in a slot between rotating and fixed surfaces of revolution, ABM, 24, 1, 1977, 1-20.
71. Walicki E.: Throughflow of fluid with variable viscosity and thermal conductivity in a slot of the curvilinear thrust bearing, Méc. Appliquée, 22, 3, 1977, 353 - 364.





wna ATR

zcy

006

Ce  
10

1977