WYDAWNICTWO
PAŃSTWOWEJ WYŻSZEJ SZKOŁY ZAWODOWEJ
WE WŁOCŁAWKU

Karolina Kalińska

MATEMATYKA:
PRZYKŁADY I ZADANIA

Włocławek 2011

REDAKCJA WYDAWNICTWA
PAŃSTWOWEJ WYŻSZEJ SZKOŁY ZAWODOWEJ
WE WŁOCŁAWKU

Matematyka: przykłady i zadania
Włocławek 2011

Redaktor Naczelny
dr Ernest Kuczyński

Recenzent
dr inż. Wanda Gryglewicz-Kacerka, Politechnika Łódzka

ISBN 978-83-60607-32-9

Złożono do druku – wrzesień 2011

Druk i oprawa: PRINTPAP Łódź

Spis treści

I. Funkcje jednej zmiennej – jej własności i granice 5
II. Elementy rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej i dwóch zmiennych 18
III. Wybrane zagadnienia rachunku całkowego – całkowanie przez podstawienie i całkowanie przez części 43
IV. Elementy algebry liniowej 57
V. Układ równań i nierówności liniowych 78

I. FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ – JEJ WŁASNOŚCI I GRANICE

Uwaga. Jeżeli przyjmiemy, że $-\infty$, ∞, 1, 0 to granice pewnych funkcji, wówczas należy pamiętać, że wyrażenia typu: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ – to symbole nieoznaczone.

Przykład 1.

Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^5 - x^2 + 3x + 2)$,

Rozwiązanie.

Przekształcamy badany wielomian wyłączając przed nawias x^5:

$$\lim_{x \to -\infty} (4x^5 - x^2 + 3x + 2) = \lim_{x \to -\infty} x^5 \left(4 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right).$$

Zgodnie z twierdzeniem dotyczącym obliczania granicy funkcji, która jest iloczynem dwóch funkcji, można obliczyć osobno każdą z granic występujących funkcji (pod warunkiem, że istnieją).

Mamy więc

$$\lim_{x \to -\infty} \left(4 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right) = 4,$$

ponieważ trzy granice ułamków równają się zeru. Na podstawie definicji granicy

$$\lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty.$$

Ostatecznie

$$\lim_{x \to -\infty} (4x^5 - x^2 + 3x + 2) = \lim_{x \to -\infty} x^5 \left(4 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right) = [-\infty \cdot 4] = -\infty.$$

Uwaga. W przypadku obliczania granicy wielomianu przy $x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$, można bezpośrednio skorzystać z twierdzenia powiązania stopnia wielomianu i kierunku dążenia x, z ostateczną wartością granicy.

Odpowiedź. $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^5 - x^2 + 3x + 2) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$,

Rozwiązanie.

Podstawiamy wartość do której dąży x

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1} = \left[\frac{\infty-\infty}{\infty}\right]$$

i otrzymujemy symbol nieoznaczony. W związku z tym przekształcamy badaną funkcję (patrz przykład a.)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}.$$

Przy obliczaniu granicy funkcji, która jest ilorazem dwóch funkcji korzystamy z odpowiedniego twierdzenia, które sprowadza się do obliczenia granicy z licznika funkcji oraz granicy z mianownika badanej funkcji, o ile granica mianownika $\neq 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}.$$

Granice trzech ułamków równają się zeru, mamy więc

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$

Zatem otrzymujemy

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0.$$

Uwaga. W praktyce obliczając granicę przy $x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$ funkcji, która jest ilorazem wielomianów warto podzielić każdy z występujących wielomianów w funkcji przez x podniesiony do najwyższej potęgi, jaka występuje w mianowniku badanej funkcji – jest to inny sposób przekształcenia badanej funkcji, czyli

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\left[\frac{\infty-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}.$$

Następnie należy skorzystać z odpowiedniego twierdzenia (j/w) i obliczyć każdą z granic z osoba:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x^3}}=\left[\frac{0}{1}\right]=0.$$

<u>Odpowiedź.</u> $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=0.$

c) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$,

<u>Rozwiązanie.</u>

Podstawiając $x=2$ do badanej funkcji zarówno jej licznik, jak i mianownik przyjmują wartość równą zeru

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

W związku z tym $x=2$ jest miejscem zerowym wielomianów: x^3-8 oraz x^2+x-6. Wydzielamy więc czynnik $x-2$ z licznika korzystając ze wzoru:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\ .$$

Mamy

$$x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4).$$

Natomiast mianownik sprowadzamy do postaci iloczynowej

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3).$$

Stąd

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to2}\left(\frac{x-2}{x-2}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x+3}\right)=\frac{12}{5},$$

gdyż

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x-2}=1,\qquad \lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+3}=\left[\frac{2^2+2\cdot2+4}{2+3}\right]=\frac{12}{5}.$$

Odpowiedź. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}=\frac{12}{5}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{2x-4}$.

Rozwiązanie.

Podstawiają wartość, do której dąży x otrzymamy symbol nieoznaczony $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$, dlatego należy przekształcić badaną funkcję w taki sposób, by można było skorzystać z następującego wzoru

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Wykonujemy przekształcenie

$$\left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{2x-4}=\left(\frac{x+5-8}{x+5}\right)^{2x-4}=\left(\frac{x+5}{x+5}+\frac{-8}{x+5}\right)^{2x-4}=\left(1+\frac{-8}{x+5}\right)^{2x-4}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{-8}}\right)^{2x-4}=\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{-8}}\right)^{\left(\frac{x+5}{-8}\cdot\frac{-8}{x+5}\right)2x-4}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{-8}}\right)^{\left(\frac{x+5}{-8}\cdot\frac{-8}{x+5}\right)2x-4}=\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{-8}}\right)^{\left(\frac{x+5}{-8}\right)\cdot\frac{-8\cdot(2x-4)}{x+5}}.$$

Korzystając z odpowiedniego twierdzenia dotyczącego obliczania granic oraz powyższego wzoru, mamy

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{2x-4}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{-8}}\right)^{\left(\frac{x+5}{-8}\right)}\right]^{\frac{-8\cdot(2x-4)}{x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8\cdot(2x-4)}{x+5}}=e^{-16},$$

gdyż

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8\cdot(2x-4)}{x+5}=-16.$$

Uwaga. Inny sposób rozwiązania powyższego przykładu. Dokonujemy przekształcenia

$$\left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{2x-4}=\left[\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}\right]^{2x-4}=\left(\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}}\right)^{2x-4}=\left(\frac{1+\frac{1}{-\frac{x}{3}}}{1+\frac{1}{\frac{x}{5}}}\right)^{2x-4}=$$

$$=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}\cdot\left(-\frac{3}{x}\right)}}{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}\cdot\frac{5}{x}}}\right]^{2x-4}=\frac{\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-\frac{3}{x}\cdot(2x-4)}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}\cdot(2x-4)}}.$$

Podobnie jak powyżej, korzystając z odpowiedniego twierdzenia dotyczącego obliczania granic, przedstawionego wzoru oraz przekształconego powyżej wyrażenia, mamy

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{2x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-\frac{3}{x}\cdot(2x-4)}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}\cdot(2x-4)}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{\frac{-6x+12}{x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{10x-20}{x}}}.$$

Obliczamy każdą z granic z osobna:

– z licznika

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{\frac{-6x+12}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-6x+12}{x}\right)}=e^{-6},$$

– z mianownika

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{10x-20}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x-20}{x}}=e^{10}.$$

Zatem otrzymujemy

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{\frac{-6x+12}{x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{10x-20}{x}}}=\frac{e^{-6}}{e^{10}}=e^{-16}.$$

<u>Odpowiedź.</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{2x-4}=e^{-16}$.

Przykład 2.

Wyznacz asymptoty, zbadaj własności funkcji (parzystość i nieparzystość) oraz wyznacz punkty przecięcia z osiami współrzędnych:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+4}.$$

<u>Rozwiązanie.</u>

1) Dziedzina funkcji: $x^2-5x+4\neq 0$

$a=1, b=-5, c=4.$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=9$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)-3}{2\cdot 1}=1,$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)+3}{2\cdot 1}=4.$$

Zatem dziedziną funkcji jest zbiór $R-\{1,4\}$.

2) Granice na końcach przedziału i w punktach nieciągłości:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-5x+4}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-5\frac{x}{x^2}+4\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{0}{1}\right]=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-5x+4}=\left[\frac{\infty}{\infty-\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-5\frac{x}{x^2}+4\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{0}{1}\right]=0,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-5x+4}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-5x+4}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to4^-}\frac{x}{x^2-5x+4}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to4^+}\frac{x}{x^2-5x+4}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=\infty.$$

3) Asymptoty

Z wyliczonych granic wynika, że prosta $y=0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $\left(\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0\right)$. Ponadto proste $x=1$ oraz $x=4$ są asymptotami pionowymi obustronnymi.

4) Własności funkcji

$$f(-x)=\frac{-x}{x^2+5x+4},$$

$$-f(x)=-\frac{x}{x^2-5x+4}.$$

Mamy

$$f(-x)\neq f(x),$$

$$f(-x)\neq -f(x),$$

Zatem funkcja nie jest parzysta ani nieparzysta.

5) Punkty przecięcia z osiami

a) z 0X, czyli $f(x)=0$

$$\frac{x}{x^2-5x+4}=0,$$

dla $x=0$.

Mamy zatem punkt $(0,0)$.

b) z 0Y, czyli $x=0$

$f(0)=\frac{0}{0^2-5\cdot0+4}=0.$

Mamy zatem punkt $(0,0)$.

Odpowiedź. Funkcja nie jest parzysta ani nieparzysta, prosta $y = 0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji, proste $x = 1$ oraz $x = 4$ są asymptotami pionowymi obustronnymi.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{2x-4}$,

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$,

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+4}$,

d) $f(x) = \sqrt[3]{(-x+4)(x-2)}$,

e) $f(x) = \sqrt{(x-4)^2}$,

f) $f(x) = \frac{-5}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$,

g) $f(x) = \frac{e^{-x}+2^x}{3}$,

h) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x+2}{x}}}$,

i) $f(x) = \frac{3x}{1-e^{\frac{x^2-x-2}{x}}}$,

j) $f(x) = sin\frac{2}{\sqrt[5]{(x-2)^2}}$,

k) $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$,

l) $f(x) = \frac{ln(1+x)-ln\,(1-x)}{x}$,

m) $f(x) = log\ \sqrt[3]{\frac{6}{2x-6}}$,

n) $f(x) = \sqrt{\frac{-x+3}{x-2}}$,

o) $f(x) = 5^{3x^2-5} + \sqrt{-x-6}$,

p) $f(x) = \frac{1}{log(-x)} + \frac{1}{5^x}$,

q) $f(x) = log_2(-x^2 + 3x + 10) + \sqrt{\frac{x-2}{-x-3}}$,

r) $f(x) = ln(x^2 - 5x + 8) - \sqrt[3]{\frac{x^2-2}{|x-3|}}$.

Zadanie 2.

Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x-2}{x^2-2x}$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-3x-2}{x^2-2x} - x\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2+3x-4}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(1-x)$,

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3\right)$,

f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{sin5x}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$,

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2 + 5n - 7} - 2n\right)$,

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-3x-2}{x^2+x-6}$,

j) $\lim\limits_{t\to0} \left(\frac{sin4t}{t} - 4\frac{t}{sin4t}\right)$,

k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3x-4}$

l) $\lim\limits_{y\to\infty} \left(\sqrt{(y+2)(y+2^2)} - y\right)$,

m) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$,

n) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{-2x-4}{x^2-4}$,

o) $\lim\limits_{x\to7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$,

p) $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{2x-4}$,

q) $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin^2x}{1-cosx}$,

r) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)$,

s) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sinx-cosx}{cos2x}$,

t) $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin7x}{3x}$,

u) $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin7x-sin5x}{sinx}$,

v) $\lim\limits_{x\to0} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+9}-3}$,

w) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$,

x) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$,

y) $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^3+125}{2x^2-50}$,

z) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-4x+3}}{x}$,

aa) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{-2x+4}$.

Zadanie 3.

Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x+4}\right)^{x^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+4}{4x+1}\right)^{2x}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(ln(n+1)-ln(n)\right)n\right]$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x+3}\right)^{5x-2}$,

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{3x}+2^x+1}{8^x+7}$.

Zadanie 4.

Zadanie oblicz granice jednostronne funkcji w podanych punktach:

a) $f(x)=\frac{x^3-3x-2}{x^2-2x}$, $x=0,\ x=2,$

b) $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-2x-3}$, $x=-1,\ x=3,$

c) $f(x)=\frac{x-5}{-x+6}$, $x=5,\ x=6,$

d) $f(x)=x\cdot\sqrt{x-x^2}$, $x=0,\ x=1,$

e) $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{2}{x}}}$, $x=0,$

f) $f(x)=e^{\frac{1}{1-x^2}}$, $x=-1,\ x=1,$

g) $f(x)=\frac{4^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+4}$, $x=0,$

h) $f(x)=ctgx$, $x=0,$

i) $f(x)=\frac{1-cosx}{x^2}$, $x=0,$

j) $f(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$, $x=0.$

Zadanie 5.

Wyznacz asymptoty $f(x)$:

a) $f(x)=\frac{3}{x+1}$,

b) $f(x)=\frac{3x}{(x-1)^2}$,

c) $f(x)=\frac{3x}{9-x^2}$,

d) $f(x)=\frac{x^3}{2(4-x^2)}$,

e) $f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$,

f) $f(x)=e^{\frac{1}{1-x}}$,

g) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,

h) $f(x)=ln(-x+3)$,

i) $f(x)=\sqrt{x^2+x-6}$.

Zadanie 6.

Sprawdź, czy podana funkcja jest ciągła:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x+1}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1,\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+5x & x\geq 0\\ -x^2-5x & x<0,\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & x\in\langle -1,3\rangle\\ -x & x\in(-\infty,-1)\\ x-3 & x\in(3,\infty),\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-3|}{x-3} & x<-1\\ 2x+3 & -1\leq x\leq 1\\ 2+2x+x^2 & x>1,\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3}{1-x^2} & x\in R-\{-1,1\}\\ 2 & x\in\{-1,1\},\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}-(-x+1{,}5)^2 & x<1{,}5\\ 3-2x & x\geq 1{,}5.\end{cases}$

ODPOWIEDZI

Zadanie 1.

a) $x\in\langle 2,\infty),$

b) $x\in R\backslash\{2,3\},$

c) $x\in R,$

d) $x\in R,$

e) $x\in R,$

f) $x\in(1,2),$

g) $x\in R,$

h) $x\in(-\infty,-2\rangle\cup(0,\infty),$

i) $x\in R-\{-1,0,2\},$

j) $x\in R-\{2\},$

k) $x\in(-1,1),$

l) $x\in(-1,0)\cup(0,1),$

m) $x\in(3,\infty),$

n) $x\in(2,3\rangle,$

o) $x\in(-\infty,-6\rangle,$

p) $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0),$

q) $x\in(-2,2\rangle,$

r) $x\in R-\{3\}.$

Zadanie 2.

a) $-\infty,$

b) $2,$

c) $0,$

d) $-\infty,$

e) $-\infty,$

f) $\frac{1}{10},$

g) $\frac{1}{2},$

h) $\frac{5}{4},$

i) ∞,
j) 3,
k) 2,
l) 3,
m) 0,
n) $\frac{1}{2}$,
o) $-\frac{1}{56}$,
p) $\frac{1}{3}$,
q) 2,
r) ∞,
s) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
t) $\frac{7}{3}$,
u) 2,
v) $-\frac{3}{2}$,
w) 2,
x) 5,
y) $-\frac{15}{4}$,
z) $\sqrt{2}$,
aa) $-\frac{3}{2}$.

Zadanie 3.

a) e^5,
b) e^{-3},
c) 0,
d) $e^{\frac{3}{2}}$,
e) 1,
f) e^2,
g) e^{-2},
h) 1.

Zadanie 4.

	Punkt	lewostronna	prawostronna
a)	0	$-\infty$	$+\infty$
	2	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
b)	-1	$-\infty$	$+\infty$
	3	$-\infty$	$+\infty$
c)	5	0	0
	6	$+\infty$	$-\infty$
d)	0	nie istnieje	0
	1	0	nie istnieje
e)	0	0	0
f)	-1	0	$+\infty$
	1	$+\infty$	0
g)	0	$\frac{3}{4}$	0
h)	0	$-\infty$	∞
i)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
j)	0	2	2.

Zadanie 5.

a) Dz. $x \in R - \{-1\}$, $y = 0$ – asymptota pozioma obustronna, $x = -1$ - asymptota pionowa obustronna,

b) Dz. $x \in R - \{1\}$, $y = 0$ – asymptota pozioma obustronna, $x = 1$ - asymptota pionowa obustronna,

c) Dz. $x \in R - \{-3, 3\}$, $y = 0$ – asymptota pozioma obustronna, $x = -3$ oraz $x = 3$ - asymptoty pionowe obustronne,

d) Dz. $x \in R - \{-2, 2\}$, $y = -\frac{1}{2}x$ – asymptota ukośna obustronna, $x = -2$ oraz $x = 2$ - asymptoty pionowe obustronne,

e) Dz. $x \in R - \{-1, 1\}$, $y = x + 1$ – asymptota ukośna obustronna, $x = -1$ oraz $x = 1$ - asymptoty pionowe obustronne,

f) Dz. $x \in R - \{\, 1\}$, $y = 1$ – asymptota pozioma obustronna, $x = 1$ - asymptota pionowa lewostronna,

g) Dz. $x \in (-1, 1\rangle$, $x = -1$ - asymptota pionowa prawostronna,

h) Dz. $x \in (-\infty, 3)$, $x = 3$ - asymptota pionowa lewostronna,

i) Dz. $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$, $y = -x - \frac{1}{2}$ - asymptota ukośna lewostronna, $y = x + \frac{1}{2}$ - asymptota ukośna prawostronna.

Zadanie 6.

a) ciągła,

b) ciągła,

c) w $x = -1$ - ciągła prawostronnie, w $x = 3$ – ciągła lewostronnie,

d) w $x = -1$ - ciągła prawostronnie, w $x = 1$ – ciągła,

e) w $x = -1$ - nieciągła, w $x = 1$ – nieciągła,

f) ciągła.

II. ELEMENTY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO FUNKCJI JEDNEJ I DWÓCH ZMIENNYCH

Przykład 1.

Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}.$$

Rozwiązanie.

Rozpoczynając jakąkolwiek analizę funkcji należy zbadać zawsze jej dziedzinę.

1) Dziedzina funkcji: $x^2 - 5x + 4 \neq 0$

$a = 1, b = -5, c = 4.$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 3}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 3}{2 \cdot 1} = 4.$$

Zatem dziedziną funkcji jest zbiór $R - \{1, 4\}$.

2) Pochodna funkcji

$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x^2 - 5x + 4) - x(x^2 - 5x + 4)'}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{1 \cdot (x^2 - 5x + 4) - x(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 + 4}{(x^2 - 5x + 4)^2}.$$

3) Dziedzina pochodnej: $x^2 - 5x + 4 \neq 0$. Zatem dziedzina pochodnej jest taka sama, jak dziedzina badanej funkcji.

4) Miejsce zerowe pochodnej $f'(x) = 0$

$$\frac{-x^2 + 4}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 0,$$

$$-x^2 + 4 = 0,$$

$$x = -2 \ \vee x = 2.$$

Zatem funkcja ma dwa punkty stacjonarne $(-2,0)$ oraz $(2,0)$ – są to punkty podejrzane o istnienie ekstremum.

5) Znak pochodnej funkcji w sąsiedztwie punktów stacjonarnych

$\bigvee_{x \in Dz}(x^2 - 5x + 4)^2 > 0$,

Zatem na znak pochodnej wpływa tylko licznik pochodnej.

Stąd

$f'(x) > 0$ dla $x \in (-2,1) \cup (1,2)$,

$f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty,-2) \cup (2,4) \cup (4,\infty)$.

Zatem funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-2,1)$ oraz $(1,2)$, a w przedziałach $(-\infty,-2)$ oraz $(2,4)$ oraz $(4,\infty)$ jest malejąca.

Z powyższego wynika, że w punkcie $x = -2$ funkcja osiąga minimum lokalne, a w punkcie $x = 2$ funkcja osiąga maksimum lokalne.

Ponadto

$$f(-2) = \frac{-2}{(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 4} = -\frac{1}{9}$$

$$f(2) = \frac{2}{2^2 - 5 \cdot 2 + 4} = -1.$$

Odpowiedź. Funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-2,1)$ oraz $(1,2)$, a w przedziałach $(-\infty,-2)$ oraz $(2,4)$ oraz $(4,\infty)$ jest malejąca. W punkcie $x = -2$ funkcja osiąga minimum lokalne, a w punkcie $x = 2$ funkcja osiąga maksimum lokalne.

Przykład 2.

Wyznacz przedziały wklęsłości i wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = 16 - \sqrt[3]{(x-2)^5}.$$

Rozwiązanie.

1) Dziedzina funkcji $x \in R$.
2) Pierwsza pochodna

$$f'(x) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

3) Dziedzina pierwszej pochodnej – taka sama jak dziedzina funkcji, czyli $x \in R$
4) Druga pochodna

$$f''(x) = \frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}.$$

5) Dziedzina drugiej pochodnej: $x - 2 \neq 0$, czyli $x \neq 2$.
6) Znak drugiej pochodnej

   $f''(x) > 0$ dla $x > 2$, zatem $f(x)$ jest wypukła - f ∪, dla $x > 2$,

   $f''(x) < 0$ dla $x < 2$, zatem $f(x)$ jest wklęsła - f ∩, dla $x < 2$

   Punkt $x = 2$ nie należy do dziedziny drugiej pochodnej, ale należy do dziedziny funkcji i skoro w jego sąsiedztwie wykres funkcji zmienia się z wklęsłej na wypukłą, więc punkt o odciętej $x = 2$ jest punktem przegięcia $f(x)$.

Odpowiedź. $x = 2$ jest punktem przegięcia $f(x)$, f ∪ dla $x > 2$, f ∩ dla $x < 2$.

Przykład 3.

Zbadaj przebieg zmienności funkcji i sporządź jej wykres

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}.$$

Rozwiązanie.

Przebieg zmienności funkcji można wykonywać opierając się o pewien schemat:

1) Dziedzina funkcji: $x^2 - 4 \neq 0$

$$(x-2)(x+2) \neq 0.$$

Zatem dziedziną funkcji jest zbiór $R - \{-2, 2\}$.

2) Granice na końcach przedziału i w punktach nieciągłości:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2-4} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \left[\frac{-\infty}{1}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1 - 4\frac{1}{x^2}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{2x^3}{x^2-4} = \left[\frac{-16}{0^+}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{2x^3}{x^2-4}=\left[\frac{-16}{0^-}\right]=\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{2x^3}{x^2-4}=\left[\frac{16}{0^-}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{2x^3}{x^2-4}=\left[\frac{16}{0^+}\right]=\infty.$$

3) Asymptoty

Z przeprowadzonych powyżej obliczeń wynika, że proste $x=-2$ oraz $x=2$ są asymptotami pionowymi obustronnymi badanej funkcji.

Ponadto badamy, czy funkcja posiada asymptotę ukośną $y=mx+k$,

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad k=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx].$$

Obliczamy wartości współczynników m i k, przy $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{-\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^3-4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-\frac{4}{x^2}}=2$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-2x^3+8x}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=0.$$

Te same wartości współczynników otrzymamy, gdy powyższe granice obliczać będziemy przy $x\to\infty$.

Zatem prosta $y=2x$ jest asymptotą ukośną obustronną badanej funkcji.

4) Własności funkcji

$$f(-x)=\frac{-2x^3}{x^2-4},$$

$$-f(x)=-\frac{2x^3}{x^2-4},$$

Mamy $f(-x)=-f(x)$, zatem badana funkcja jest nieparzysta, czyli symetryczną względem początku układu współrzędnych.

5) Punkty przecięcia z osiami

a) z 0X, czyli $f(x) = 0$

$$\frac{2x^3}{x^2 - 4} = 0$$

dla $x = 0$.

Mamy zatem punkt $(0, 0)$.

b) z 0Y, czyli $x = 0$

$$f(0) = \frac{0}{0^2 - 4} = 0.$$

Mamy zatem punkt $(0, 0)$.

6) Pochodna funkcji

$$f'(x) = \frac{(2x^3)' \cdot (x^2 - 4) - 2x^3(x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} = \frac{6x^2 \cdot (x^2 - 4) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{2x^4 - 24x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}.$$

7) Dziedzina pochodnej: $x^2 - 4 \neq 0$. Zatem dziedzina pochodnej jest taka sama, jak dziedzina badanej funkcji.

8) Miejsce zerowe pochodnej $f'(x) = 0$

$$\frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = 0,$$

$$2x^2(x^2 - 12) = 0.$$

Mamy

$$x = 0 \vee x = -2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{3}.$$

Zatem funkcja ma trzy punkty stacjonarne $\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$, $(0, 0)$ oraz $\left(0, 2\sqrt{3}\right)$ – są to punkty podejrzane o istnienie ekstremum.

9) Badamy znak pochodnej funkcji w sąsiedztwie punktów stacjonarnych

$\bigwedge_{x \in Dz} (x^2 - 4)^2 > 0,$

zatem na znak pochodnej wpływa tylko wielomian z licznika pochodnej funkcji.

Ponadto $\bigwedge_{x \in Dz} 2x^2 \geq 0$, więc o znaku pochodnej decyduje znak wielomianu $x^2 - 12$.

Zatem

$f'(x) > 0$ dla $x \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \ \infty\right)$,

$f'(x) < 0$ dla $x \in \left(-2\sqrt{3}, -2\right) \cup (-2, 0) \cup (0, \ 2) \cup \left(2, 2\sqrt{3}\right)$.

Zatem funkcja jest rosnąca w przedziałach $\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right)$ oraz $\left(2\sqrt{3}, \ \infty\right)$, a w przedziałach $\left(-2\sqrt{3}, \ -2\right)$, $(-2, 2)$ oraz $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ jest malejąca.

Z powyższego wynika, że w punkcie $x = -2\sqrt{3}$ funkcja osiąga maksimum lokalne, a w punkcie $x = 2\sqrt{3}$ funkcja osiąga minimum lokalne. Punkt $x = 0$ nie jest punktem ekstremum, ponieważ w jego sąsiedztwie funkcja nie zmieniła znaku.

Ponadto

$$f\left(-2\sqrt{3}\right) = \frac{2 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^3}{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4} = -6\sqrt{3},$$

$$f\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{2 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^3}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4} = 6\sqrt{3}.$$

10) Druga pochodna

$$f''(x) = \frac{(2x^4 - 24x^2)' \cdot (x^2-4)^2 - (2x^4 - 24x^2) \cdot ((x^2-4)^2)'}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{(8x^3 - 48x) \cdot (x^2-4)^2 - (2x^4 - 24x^2) \cdot 2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{8x \cdot (x^2-4) \cdot [(x^2-6) \cdot (x^2-4) - (x^4 - 12x^2)]}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{8x \cdot (x^2-4) \cdot (x^4 - 4x^2 - 6x^2 + 24 - x^4 + 12x^2)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{8x \cdot (x^2-4) \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2-4)^4}.$$

11) Dziedzina drugiej pochodnej – jest taka sama jak dziedzina funkcji.

12) Miejsce zerowe drugiej pochodnej $f''(x) = 0$

$$\frac{8x \cdot (x^2 - 4) \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^4} = 0$$

dla $x = 0$,

ponieważ $\bigwedge_{x \in Dz.f''}(2x^2 + 24) > 0$ oraz $x = -2,\ x = 2$ nie należą do dziedziny drugiej pochodnej funkcji.

Zatem otrzymaliśmy punkt $(0, 0)$.

13) Znak drugiej pochodnej - dla każdego x należącego do dziedziny drugiej pochodnej wielomiany $2x^2 + 24 > 0$ oraz $(x^2 - 4)^4 > 0$, więc nie wpływają na jej znak.

Zatem

$8x \cdot (x^2 - 4) > 0$ dla $x \in (-2, 0) \cup (2, \infty)$,

$8x \cdot (x^2 - 4) < 0$ dla $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

Stąd

$f''(x) > 0$ dla $x \in (-2, 0) \cup (2, \infty)$, więc wykres $f(x)$ jest wypukły w przedziałach dla $(-2, 0)$ oraz $(2, \infty)$,

$f''(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$, więc wykres $f(x)$ jest wklęsły w przedziałach dla $(-\infty, -2)$ oraz $(0, 2)$.

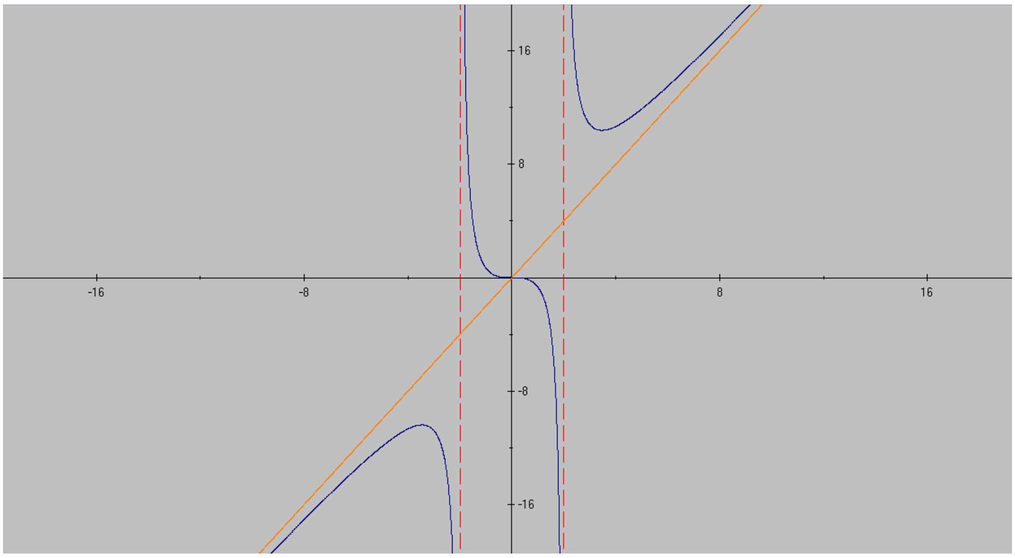
Natomiast w punkcie $x = 0$ $f(x)$ posiada punkt przegięcia (wykres funkcji w otoczeniu $x = 0$ zmienia się z wypukłego na wklęsły).

Ponadto

$$f(0) = \frac{-2 \cdot 0^3}{0^2 - 4} = 0.$$

14) Tabela i wykres funkcji

x	$-\infty$	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-2		$\cdots$	0		2			$2\sqrt{3}$		∞
$f''(x)$		$-$		$-$	Asymptota		$+$	0	$-$	asymptota		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$-$	0	$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$ $\nearrow$	$-6\sqrt{3}$ *max*	$\cap$ $\searrow$	$-\infty$	∞	$\cup$ $\searrow$	0	$\cap$ $\searrow$	$-\infty$	∞	$\cup$ $\searrow$	*min* $6\sqrt{3}$	$\cup$ $\nearrow$	∞



Przykład 4.

Oblicz granicę funkcji korzystając z twierdzenia de L'Hospitala

$$\lim_{x\to -5}\frac{5+x}{\sqrt{-x-4}-1}.$$

Rozwiązanie.

Bezpośrednio z twierdzenia de L'Hospitala możemy korzystać, gdy mamy symbol nieoznaczony typu $\frac{\infty}{\infty}$ lub $\frac{0}{0}$.

W przypadku badanej funkcji, gdy $x \to -5$ otrzymujemy

$$\lim_{x\to -5}\frac{5+x}{\sqrt{-x-4}-1} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Stosując wskazane twierdzenie wyznaczamy pochodną – osobno - funkcji z licznika oraz mianownika i otrzymujemy

$$\lim_{x\to -5}\frac{5+x}{\sqrt{-x-4}-1} \overset{H}{=} \lim_{x\to -5}\frac{1}{\frac{-1}{2\sqrt{-x-4}}} = -\lim_{x\to -5} 2\sqrt{-x-4} = -2.$$

Odpowiedź. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{5+x}{\sqrt{-x-4}-1} = -2.$

Przykład 5.

Wyznacz ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = 2y^3 + x^2y + x^2 + 5y^2.$$

Rozwiązanie.

1) Wyznaczamy dziedzinę badanej funkcji, czyli $(x,y) \in R^2$.
2) Obliczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego względem każdej ze zmiennych i mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 + x^2 + 10y.$$

3) Dziedziną powyższych pochodnych cząstkowych są $x \in R$, $y \in R$.
4) Wyznaczamy punkty stacjonarne (przyrównując pochodne cząstkowe rzędu pierwszego do zera)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Mamy

$$\begin{cases} 2xy + 2x = 0 \\ 6y^2 + x^2 + 10y = 0. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy mamy

$$2x(y+1) = 0$$

stąd

$$x = 0 \ \vee y + 1 = 0.$$

Zatem

$$x = 0 \ \vee y = -1.$$

Postawiamy wyznaczone wartości do drugiego równania.

I. Gdy $x = 0$ mamy

$$6y^2 + 0^2 + 10y = 0,$$

$$y(6y + 10) = 0.$$

Stąd

$$y = 0 \vee 6y + 10 = 0.$$

Mamy

$$y = 0 \vee y = -\frac{5}{3}.$$

Otrzymaliśmy dwa punkty $(0, 0)$ oraz $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$.

II. Gdy $y = -1$ mamy

$$6(-1)^2 + x^2 + 10(-1) = 0,$$
$$x^2 - 4 = 0.$$

Zatem

$$x = 2 \vee x = -2.$$

Mamy zatem dwa punkty $(-2, -1)$ oraz $(2, -1)$.

Ostatecznie mamy cztery punkty stacjonarne: $P_1(0, 0)$, $P_2\left(0, -\frac{5}{3}\right)$, $P_3(-2, -1)$ oraz $P_4(2, -1)$, w których badana funkcja może mieć ekstrema lokalne.

5) Wyznaczamy wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y + 10,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x.$$

6) Obliczamy wartości pochodnych cząstkowych rzędu drugiego w punktach stacjonarnych – w celu bardziej przejrzystego zapisu posłużymy się tabelą

	$P_1(0, 0)$	$P_2\left(0, -\frac{5}{3}\right)$	$P_3(-2, -1)$	$P_4(2, -1)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 2$	2	$-\frac{4}{3}$	0	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y + 10$	10	-10	-2	-2
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$	0	0	-4	4

7) Budujemy hesjany $\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_P & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_P \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_P & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_P \end{bmatrix}$ dla każdego punktu stacjonarnego:

- dla $P_1(0,0)$ mamy $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, skąd $det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = 20 > 0$, przy czym $2 > 0$.

Zatem w $P_1(0,0)$ badana funkcja ma minimum lokalne.

- dla $P_2\left(0, \frac{5}{3}\right)$ mamy $\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$, skąd $det \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \frac{40}{3} > 0$, przy czym $-\frac{4}{3} < 0$.

Zatem w $P_2\left(0, \frac{5}{3}\right)$ badana funkcja ma maksimum lokalne.

- dla $P_3(-2,-1)$ mamy $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$, skąd $det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = 0 - 16 = -16 < 0$.

Zatem w $P_3(-2,-1)$ badana funkcja nie ma ekstremum.

- dla $P_4(2,-1)$ mamy $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, skąd $det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = 0 - 16 = -16 < 0$.

Zatem w $P_4(2,-1)$ badana funkcja nie ma ekstremum.

Uwaga. Wnioski dotyczące ekstremów badanej funkcji wyciągane są na podstawie odpowiedniego twierdzenia, w którym sprawdza się wyznacznik hesjanu dla konkretnego punktu i jeżeli jego wartość jest:
- większa od zera, to funkcja ma ekstremum,
- mniejsza od zera, to funkcja nie ma ekstremum,
- równa zeru, to mamy do czynienia z przypadkiem nierozstrzygniętym, czyli funkcja może mieć lub nie w danym punkcie ekstremum – przypadku tego nie będziemy rozstrzygać.

Odpowiedź. Badana funkcja ma ekstremum w $P_1(0,0)$ – minimum, w $P_2\left(0, \frac{5}{3}\right)$ - maksimum, natomiast w $P_3(-2,-1)$ oraz $P_4(2,-1)$ nie ma ekstremum.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Korzystając z definicji, wyznacz – o ile istnieje - wartość pochodnej funkcji $f(x)$ w danym punkcie x_0:

a) $f(x) = 2x + 5$, $x_0 = 3$,

b) $f(x) = 2 - 3x$, $x_0 = -2$,

c) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 4$,

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$,

e) $f(x) = 2sin3x$, $x_0 = \frac{\pi}{18}$,

f) $f(x) = ctgx$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$,

g) $f(x) = |x - 3|$, $x_0 = 3$.

Zadanie 2.

Korzystając z definicji, wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$, $x \in R$,

b) $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$, $x \in R - \{0\}$,

c) $f(x) = \frac{3}{x}$, $x \in R - \{0\}$,

d) $f(x) = cos3x$, $x \in R$,

e) $f(x) = tgx$, $x \in R$,

f) $f(x) = lnx$, $x \in (0, \infty)$.

Zadanie 3.

Korzystając ze wzorów na pochodne funkcji elementarnych, wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$,

b) $f(x) = 4x^5 + 10x^2 - 3 + e^x$,

c) $f(x) = 3x^4 - 2\sqrt{x} + \sqrt{\pi} + \frac{3}{x^7} + \frac{x^7}{4}$,

d) $f(x) = (x - 3)^2 + (x + 1)^3$,

e) $f(x) = 4^x + 2^{ctgx}$,

f) $f(x) = \sqrt{6 - 2x^2}$,

g) $f(x) = (2x + 9)^6$,

h) $f(x) = e^{-3x}(x + \sqrt{x})$,

i) $f(x) = (x - 4)^2 \cdot (x^2 - 3)$,

j) $f(x) = (x^4 + 3x^2 + 2) \cdot (x^2 - 1) + \sqrt{x} \cdot (4x^2 + 3)$,

k) $f(x) = sin3x + sin^4 2x + tg(sinx)$,

l) $f(x) = 3 \cdot (2x - 4)^5 \cdot (x^2 + 5x + 6)$,

m) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$,

n) $f(x) = sin(e^{-x} + 3) \cdot ln\frac{1}{x} + \sqrt{tg45^\circ}$,

o) $f(x) = 2sin^3 x + 3cos2x - ctg\sqrt[3]{x}$,

p) $f(x) = x \cdot tgx$,

q) $f(x) = \frac{8x+1}{4x+3}$,

r) $f(x) = \frac{5}{x^2+3}$,

s) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$,

t) $f(x) = \frac{(x^2-2x+3)^2}{(x-1)^3}$,

u) $f(x) = \frac{1}{sinx} + arctg\sqrt{1 + x^2}$,

v) $f(x) = ln(x^2 + 5x - 3) + ln\sqrt{cosx}$,

w) $f(x) = 4ln^3\left(sin2x + \frac{1}{3x+2}\right)^2$,

x) $f(x) = log[2 - sin(3e^{-2x} + x^2)]$,

y) $f(x) = x^x$,

z) $f(x) = (tgx)^{e^x}$.

Zadanie 4.

Wyznacz pochodną rzędu drugiego funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 3x - 2$,

b) $f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$,

c) $f(x) = 8x^2 - x^4$,

d) $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$,

e) $f(x) = (x-3) \cdot \sqrt{3}$,

f) $f(x) = x^2 lnx$,

g) $f(x) = e^x \cdot ctgx$,

h) $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$,

i) $f(x) = e^{-2x} + e^x$,

j) $f(x) = cos^3 2x$,

k) $f(x) = 16 - \sqrt[3]{(x-2)^5}$.

Zadanie 5.

Wyznacz pochodną rzędu czwartego funkcji:

a) $f(x) = lnx$,

b) $f(x) = sin5x$,

c) $f(x) = e^x$,

d) $f(x) = 2x^5 + 5x^2 - 3 + e^{-2x}$,

e) $f(x) = xlnx$.

Zadanie 6.

Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-3x-4}$,

b) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$,

d) $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin^2 x}{1-cosx}$,

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sinx-cosx}{cos2x}$,

f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin4x-sin2x}{sinx}$,

g) $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin4x}{3x}$,

h) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+4}-2}$,

i) $\lim\limits_{x\to5} \frac{5-x}{\sqrt{x-1}-2}$,

j) $\lim\limits_{x\to0} \frac{tx2x}{tgx}$,

k) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{1-e^x}$,

l) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-cosx}{x^2}$,

m) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x+4e^{-x}-5}{x}$,

n) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$,

o) $\lim\limits_{x\to1^+} [(x-1) \cdot ln(x-1)]$.

Zadanie 7.

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$,

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$,

c) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$,

d) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$,

e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3$,

f) $f(x) = x^3 + 3x - 2$,

g) $f(x) = x^2(1-x)$,

h) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$,

i) $f(x) = (1-x^2)\cdot(1-x^3)$,

j) $f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$,

k) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$,

l) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$,

m) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x+1}$,

n) $f(x) = x \cdot \sqrt{x - x^2}$,

o) $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$,

p) $f(x) = e^{-2x} + e^x$,

q) $f(x) = \frac{3x}{e^x}$,

r) $f(x) = \frac{e^x}{3x}$,

s) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-3x+6}}$,

t) $f(x) = \frac{2x}{lnx}$,

u) $f(x) = (16 - x^2)\cdot\sqrt[3]{x^2}$,

v) $f(x) = -x \cdot \sqrt{8 - x^2}$,

w) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-9)^2}$,

x) $f(x) = 8 - \sqrt[4]{(x-3)^3}$,

y) $f(x) = 16 - \sqrt[5]{(x-3)^3}$,

z) $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$.

Zadanie 8.

Wyznacz przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia funkcji:

a) $f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$,

b) $f(x) = 8x^2 - x^4$,

c) $f(x) = x^2(1-x)$,

d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$,

e) $f(x) = \frac{2lnx}{x}$,

f) $f(x) = \sqrt[5]{x-1} + 5$,

g) $f(x) = \sqrt[5]{(x-8)^6}$.

Zadanie 9.

Zbadaj przebieg zmienności funkcji i narysuj jej wykres:

a) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$,

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$,

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$,

d) $f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$,

e) $f(x) = (x - 3) \cdot \sqrt{3}$,

f) $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{x^2-2x}$,

g) $f(x) = x^2 lnx$,

h) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$,

i) $f(x) = \frac{-2x}{e^x}$,

j) $f(x) = \sqrt[5]{(-x-3)^6}$.

Zadanie 10.

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji na podanym przedziale:

a) $f(x) = 8x^2 - x^4$, $x \in \langle -1, 3 \rangle$,

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$,

c) $f(x) = x \cdot \sqrt{2-x}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$,

d) $f(x) = \sqrt[3]{(x^3-8)^2}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$,

e) $f(x) = \frac{x-5}{x-6}$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$,

f) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$, $x \in \langle -2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3} \rangle$.

Zadanie 11.

Oblicz pochodne cząstkowe rzędu pierwszego względem każdej ze zmiennych:

a) $f(x,y) = 3x^2 - 5y^3 - 8$,

b) $f(x,y) = 5x^9y^3 - 3xy^2 + 2x$,

c) $f(x,y) = (3x^2 - 5y^3 - 8)^3$,

d) $f(x,y) = sin(3x+5) + cos(x-y)$,

e) $f(x,y) = 4 + 3x^2y - 5xy^2$,

f) $f(x,y) = (2 - 6x^2y - 5x)^4$,

g) $f(x,y) = lnsin\frac{x}{y}$,

h) $f(x,y) = e^{x^2-y} \cdot xy$,

i) $f(x,y) = ln(\sqrt{x+x^2} + 3) \cdot y$,

j) $f(x,y) = x^{lny}$,

k) $f(x,y) = e^{x^2} \cdot x + \frac{y}{x}$,

l) $f(x,y) = \frac{2x^2+y}{y^2}$,

m) $f(x,y) = e^{xy} ln\,(x+1)$,

n) $f(x,y) = x \cdot siny$,

o) $f(x,y) = \frac{x}{siny}$.

Zadanie 12.

Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego:

a) $f(x,y) = \frac{x}{y}$,

b) $f(x,y) = x \cdot cosy$,

c) $f(x,y) = e^{x+y}$,

d) $f(x,y) = e^{xy}$,

e) $f(x,y) = x^2y^3 - 3xy^2 + 2x + 3$,

f) $f(x,y) = e^{-x}(x^2 + y)$,

g) $f(x,y) = ln(x + 2y^2)$,

h) $f(x,y) = cos^2(4x + 3y)$,

i) $f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - x + 6y$.

Zadanie 13.

Zbadaj istnienie ekstremum lokalnego podanych funkcji

a) $f(x,y) = x^2 + y^4 - 4y$,

b) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$,

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$,

d) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 9xy$,

e) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x - 5y$,

f) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy - x + 4y + 10$,

g) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 2x + 1$,

h) $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$,

i) $f(x,y) = -8x^2y - 16x^2 + \frac{2}{3}y^3$,

j) $f(x,y) = -e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$,

k) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

ODPOWIEDZI

Zadanie 1.

a) $f'(3) = 2$,

b) $f'(-2) = -3$,

c) $f'(4) = 8$,

d) $f'(3) = -\frac{1}{9}$,

e) $f'\left(\frac{\pi}{18}\right) = 3\sqrt{3}$,

f) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4}{3}$,

g) Nie istnieje pochodna w punkcie $x_0 = 3$.

Zadanie 2.

a) $f'(x) = 4x$,

b) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

c) $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$,

d) $f'(x) = -3sin3x$,

e) $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$,

f) $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Zadanie 3.

a) $f'(x) = 6x - 5$,

b) $f'(x) = 20x^4 + 20x + e^x$,

c) $f'(x) = 12x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{x^8} + \frac{7}{4}x^6$,

d) $f'(x) = 2x - 6 + 3 \cdot (x+1)^2 = 3x^2 + 8x - 3$,

e) $f'(x) = 4^x \cdot ln4 - 2^{ctgx} \cdot \frac{1}{sin^2x} \cdot ln2$,

f) $f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{6-2x^2}}$,

g) $f'(x) = 12 \cdot (2x+9)^5$,

h) $f'(x) = e^{-3x}\left(-3x - 3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)$,

i) $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 26x + 24$,

j) $f'(x) = 6x^5 + 8x^3 - 2x + \frac{3}{2\sqrt{x}} + 10x^{\frac{3}{2}}$,

k) $f'(x) = 3cos3x + 8sin^3 2x \cdot cos2x + \frac{cosx}{cos^2(sinx)}$,

l) $f'(x) = 6 \cdot (2x-4)^4 \cdot (7x^2 + 26x + 20)$,

m) $f'(x) = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,

n) $f'(x) = -cos(e^{-x}+3) \cdot e^{-x} \cdot ln\frac{1}{x} - sin(e^{-x}+3) \cdot \frac{1}{x}$,

o) $f'(x) = 6sin^2xcosx - 6sin2x + \frac{1}{3}\frac{1}{sin^2(\sqrt[3]{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$,

p) $f'(x) = tgx + \frac{x}{cos^2x}$,

q) $f'(x) = \frac{20}{(4x+3)^2}$,

r) $f'(x) = \frac{-10x}{(x^2+3)^2}$,

s) $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$,

t) $f'(x) = \frac{(x^2-2x+3)\cdot(x^2-2x-5)}{(x-1)^4}$,

u) $f'(x) = -\frac{cosx}{(sinx)^2} + \frac{1}{2+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

v) $f'(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x-3} - \frac{1}{2}tgx$,

w) $f'(x) = 24 \cdot ln^2\left(sin2x + \frac{1}{3x+2}\right)^2 \cdot \frac{1}{sin2x+\frac{1}{3x+2}} \cdot \left(2cos2x - \frac{3}{(3x+2)^2}\right)$,

x) $f'(x) = \frac{1}{[2-\sin(3e^{-2x}+x^2)]\cdot\ln 10} \cdot [-\cos(3e^{-2x}+x^2)] \cdot (-6e^{-2x}+2x)$,

y) $f'(x) = x^x \cdot (lnx + 1)$,

z) $f'(x) = (tgx)^{e^x} \cdot \left(e^x \cdot lntgx + e^x \cdot \frac{1}{tgx\cdot cos^2x}\right)$.

Zadanie 4.

a) $f''(x) = 6x$,

b) $f''(x) = \frac{2}{x^3}$,

c) $f''(x) = 16 - 12x^2$,

d) $f''(x) = \frac{-10(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$,

e) $f''(x) = 0$,

f) $f''(x) = 2lnx + 3$,

g) $f''(x) = e^x\left(ctgx + \frac{2ctgx-2}{sin^2x}\right)$,

h) $f''(x) = \frac{3lnx - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}$,

i) $f''(x) = 4e^{-2x} + e^{x}$,

j) $f''(x) = 12cos2x \cdot (2sin^{2}2x - cos^{2}2x)$,

k) $f''(x) = -\frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$.

Zadanie 5.

a) $f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^{4}}$,

b) $f^{IV}(x) = 625sin5x$,

c) $f^{IV}(x) = e^{x}$,

d) $f^{IV}(x) = 240x + 16e^{-2x}$,

e) $f^{IV}(x) = \frac{2}{x^{3}}$.

Zadanie 6.

a) 2,

b) 0,

c) $\frac{2}{3}$,

d) 2,

e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

f) 2,

g) $\frac{4}{3}$,

h) $\frac{2}{3}$,

i) -4,

j) 2,

k) -1,

l) $\frac{1}{2}$,

m) -3,

n) $\frac{1}{2}$,

o) 0.

Zadanie 7.

Oznaczenia: $f \uparrow$ - funkcja rosnąca, $f \downarrow$ - funkcja malejąca, *min*. – minimum lokalne, *ma*x. – maksimum lokalne funkcji,

a) $f \uparrow$ dla $x \in (-3, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, -3)$, w p. $x = -3$ ma *min*,

b) $f \uparrow$ dla $x \in (3, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, 3)$, w p. $x = 3$ ma *min*,

c) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $x \in (1, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-1, 1)$, w p. $x = -1$ ma *max,* w p. $x = 1$ ma *min,*

d) $f \uparrow$ dla $x \in (-1, 1)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $x \in (1, \infty)$, w p. $x = -1$ ma *min,* w p. $x = 1$ ma *max*,

e) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, 1)$ oraz $x \in (3, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (1, 3)$, w p. $x = 1$ ma *max,* w p. $x = 3$ ma *min,*

f) $f \uparrow$ dla $x \in R$, brak ekstremum,,

g) $f \uparrow$ dla $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, 0)$ oraz $x \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$, w p. $x = 0$ ma *min,* w p. $x = \frac{2}{3}$ ma max,

h) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $x \in (1, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-1, 1)$, w p. $x = -1$ ma *max,* w p. $x = 1$ ma *min,*

i) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, 0)$ oraz $x \in (1, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (0, 1)$, w p. $x = 0$ ma *max,* w p. $x = 1$ ma *min,*

j) $f \uparrow$ dla $x \in (-1, 1)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $x \in (1, \infty)$, w p. $x = -1$ ma *min,* w p. $x = 1$ ma max,

k) $f \uparrow$ dla $x \in (-1, 1)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $x \in (1, \infty)$, w p. $x = -1$ ma *min,* w p. $x = 1$ ma max,

l) $f \downarrow$ dla $x \in R$, brak ekstremum,

m) $f \uparrow$ dla $x \in \left(-1, -\frac{4}{5}\right)$ oraz $x \in (0, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$, w p. $x = -\frac{4}{5}$ ma *max,* w p. $x = 0$ ma *min*,

n) $f \uparrow$ dla $x \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$, $f \downarrow$ dla $x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$, w p. $x = \frac{3}{4}$ ma *max,*

o) $f \uparrow$ dla $x \in (0, e^2)$, $f \downarrow$ dla $x \in (e^2, \infty)$, w p. $x = e^2$ ma *max,*

p) $f \uparrow$ dla $x \in \left(\frac{1}{2}ln2, \infty\right)$, $f \downarrow$ dla $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}ln2\right)$, w p. $x = \frac{1}{2}ln2$ ma *min*,

q) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, 1)$, $f \downarrow$ dla $x \in (1, \infty)$, w p. $x = 1$ ma *max*,

r) $f \uparrow$ dla $x \in (1, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, 0)$ oraz $x \in (0, 1)$, w p. $x = 1$ ma *min*,

s) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, 2)$ oraz $x \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$, $f \downarrow$ dla $x \in \left(\frac{5}{2}, 3\right)$ oraz $x \in (3, \infty)$, w p. $x = \frac{5}{2}$ ma *max,*

t) $f \uparrow$ dla $x \in (e, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (0, 1)$ oraz dla $x \in (1, e)$, w p. $x = e$ ma *min*,

u) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (0, 2)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-2, 0)$ oraz $x \in (2, \infty)$, w p. $x = -2$ oraz $x = 2$ ma *max,* w p. $x = 0$ ma *min*,

v) $f \uparrow$ dla $x \in \left(-2\sqrt{2}, -2\right)$ oraz $x \in \left(2, 2\sqrt{2}\right)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-2, 2)$, w p. $x = -2$ oraz $x = -2$ ma *max,* w p. $x = 2$ ma *min*,

w) $f \uparrow$ dla $x \in (-3, 0)$ oraz $x \in (3, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, -3)$ oraz $x \in (0, 3)$, w p. $x = -3$ oraz $x = 3$ ma *min,* w p. $x = 0$ ma *max*,

x) $f \uparrow$ dla $x \in (3, \infty)$, brak ekstremum,

y) $f \uparrow$ dla $x \in (3, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, 3)$, w p. $x = 3$ ma *min*,

z) $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, 2)$ oraz $x \in (2, \infty)$, brak ekstremum.

Zadanie 8.

Oznaczenia: $f \cup$ - funkcja wypukła, $f \cap$ - funkcja wklęsła

a) $f \cup$ dla $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right)$ oraz $x \in \left(\sqrt{3}, \infty\right)$, $f \cap$ dla $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ oraz $x \in \left(0, \sqrt{3}\right)$, punkty przegięcia: $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$,

b) $f \cup$ dla $x \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $f \cap$ dla $x \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $\in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$, punkty przegięcia: $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

c) $f \cup$ dla $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $f \cap$ dla $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, punkt przegięcia: $x = \frac{1}{3}$,

d) $f \cup$ dla $x \in (-1, \infty)$, $f \cap$ dla $x \in (-\infty, -1)$, brak punktów przegięcia,

e) $f \cup$ dla $x \in \left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$, $f \cap$ dla $x \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, punkt przegięcia $x = e^{\frac{3}{2}}$,

f) $f \cup$ dla $x \in (-\infty, 1)$, $f \cap$ dla $x \in (1, \infty)$, punkt przegięcia $x = 1$,

g) $f \cup$ dla $x \in (8, \infty)$, $f \cap$ dla $x \in (-\infty, 8)$, punkt przegięcia $x = 2$.

Zadanie 9.

a) $f \uparrow$ dla $x \in (-2, 2)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (2, \infty)$, w p. $x = -2$ ma *min,* w p. $x = 2$ ma *max*, $f \cup$ dla $x \in (-\infty, 0)$, $f \cap$ dla $x \in (0, \infty)$, punkt przegięcia $x = 0$,

b) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, 0)$, $f \downarrow$ dla $x \in (0, \infty)$, w p. $x = 0$ ma *max*, $f \cup$ dla $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ oraz dla $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$, $f \cap$ dla $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, punkty przegięcia: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

c) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, -3)$ oraz $x \in (-1, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-3, -1)$, w p. $x = -3$ ma *max,* w p. $x = -1$ ma *min,* $f \cup$ dla $x \in (-2, \infty)$, $f \cap$ dla $x \in (-\infty, -2)$ punkt przegięcia $x = -2$,

d) $f \uparrow$ dla $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ oraz $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $f \downarrow$ dla $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ oraz $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, w p. $x = -\frac{1}{2}$ ma *max*, w p. $x = \frac{1}{2}$ ma *min*, $f \cup$ dla $x \in (0, \infty)$, $f \cap$ dla $x \in (-\infty, 0)$ brak punktów przegięcia,

e) $f \uparrow$ dla $x \in R$, brak ekstremum, brak punktów przegięcia – funkcja liniowa,

f) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $x \in (1, 2)$, oraz $x \in (2, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-1, 0)$ oraz $x \in (0, 1)$, w p. $x = -1$ ma *max*, w p. $x = 1$ ma *min*, $f \cup$ dla $x \in (0, \infty)$, $f \cap$ dla $x \in (-\infty, 0)$ brak punktów przegięcia,

g) $f \uparrow$ dla $x \in \left(e^{-\frac{1}{2}}, \infty\right)$, $f \downarrow$ dla $x \in \left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, w p. $x = e^{-\frac{1}{2}}$ ma *min*, $f \cup$ dla $x \in \left(e^{-\frac{3}{2}}, \infty\right)$, $f \cap$ dla $x \in \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$, punkt przegięcia $x = e^{-\frac{3}{2}}$,

h) $f \uparrow$ dla $x \in (0, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $x \in (-1, 0)$, w p. $x = -0$ ma *max*, $f \cup$ dla $x \in (-1, \infty)$, $f \cap$ dla $x \in (-\infty, -1)$, brak punktów przegięcia ,

i) $f \uparrow$ dla $x \in (1, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, 1)$, w p. $x = 1$ ma *min*, $f \cup$ dla $x \in (-\infty, 2)$, $f \cap$ dla $x \in (2, \infty)$, punkt przegięcia $x = 2$,

j) $f \uparrow$ dla $x \in (-3, \infty)$, $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty, -3)$, w p. $x = -3$ ma *min*, $f \cup$ dla $x \in (-\infty, -3)$, $f \cap$ dla $x \in (-3, \infty)$, punkt przegięcia $x = -3$,

Zadanie 10.

a) Wartość najmniejsza -9 dla $x = 3$, wartość największa 16 dla $x = 2$,

b) Wartość najmniejsza $-\frac{4}{5}$ dla $x = 2$, wartość największa $-\frac{1}{8}$ dla $x = 1$,

c) Wartość najmniejsza 0 dla $x = 0$ i $x = 2$, wartość największa $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ dla $x = \frac{4}{3}$,

d) Wartość najmniejsza 0 dla $x = 2$, wartość największa 4 dla $x = 0$,

e) Wartość najmniejsza $\frac{1}{2}$ dla $x = 4$, wartość największa $\frac{5}{6}$ dla $x = 4$,

f) Wartość najmniejsza $\frac{-16}{3}$ dla $x = -2$, wartość największa $\frac{16}{3}$ dla $x = 2$.

Zadanie 11.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -15y^2$,

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 45x^8y^3 - 3y^2 + 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 15x^9y^2 - 6xy$,

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 18x(3x^2 - 5y^3 - 8)^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -45y^2(3x^2 - 5y^3 - 8)^2$,

d) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3cos(3x + 5) - sin(x - y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = sin(x - y)$,

e) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 5y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 10xy$,

f) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot (2 - 6x^2y - 5x)^3 \cdot (-12xy - 5)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4 \cdot (2 - 6x^2y - 5x)^3 \cdot (-6x^2)$

g) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{sin\frac{x}{y}} \cdot cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{sin\frac{x}{y}} \cdot cos\frac{x}{y} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right)$,

h) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y}(2x^2y + y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2-y}(-xy + x)$,

i) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x+x^2}+3} \cdot \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = ln(\sqrt{x + x^2} + 3)$,

j) $\frac{\partial f}{\partial x} = lny \cdot x^{lny-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}lnx \cdot x^{lny}$,

k) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2}(2x^2 + 1) - \frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$,

l) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4x^2-y}{y^3}$,

m) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy}\left(y \cdot l\,n(x + 1) + \frac{1}{x+1}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}ln\,(x + 1)$,

n) $\frac{\partial f}{\partial x} = siny$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot cosy$,

o) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{siny}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-xcosy}{sin^2y}$.

Zadanie 12.

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2}$,

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -xcosy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -siny$,

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x+y}$,

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{xy}(1 + xy)$,

e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 - 6y$,

f) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x}(x^2 - 4x + y + 2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-x}$,

g) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+2y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x-8y^2}{(x+2y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{4y}{(x+2y^2)^2}$,

h) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -32(1 - 2\sin(4x + 3y))$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -18(1 - 2\sin(4x + 3y))$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -24(1 - 2\sin(4x + 3y))$,

i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{4\sqrt{y^2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Zadanie 13.

a) $P(0,1)$ – minimum,

b) $P(-1,2)$ - brak ekstremum,

c) $P_1(-1,-1)$ - maksimum, $P_2(0,0)$ - brak ekstremum,

d) $P(0,0)$ - brak ekstremum, $P(3,-3)$ - minimum,

e) $P(-1,3)$ - minimum,

f) $P(0,-1)$ – minimum,

g) $P(1,0)$ - brak ekstremum,

h) $P(1,0)$ - minimum,

i) $P_1(0,0)$ - przypadek nierozstrzygnięty, $P_2(1,-2)$ - brak ekstremum,
$P_3(-1,-2)$ - brak ekstremum,

j) $P_1(0,0)$ - brak ekstremum, $P_2(-4,-2)$ - maksimum,

k) $P(1,1)$ - minimum.

III. WYBRANE ZAGADNIENIA RACHUNKU CAŁKOWEGO – CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE I CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

Przykład 1.

Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int (x^2+1)^2 \cdot (x-1)dx.$$

Rozwiązanie. Przekształcając funkcję podcałkową do postaci wielomianu, m.in. przez podniesienie funkcji podcałkowej do kwadratu i wymnożenie, otrzymujemy

$$\int (x^2+1)^2 \cdot (x-1)dx = \int (x^4+2x^2+1)(x-1)dx =$$

$$= \int (x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1)dx.$$

W tej postaci korzystając z własności całek nieoznaczonych i podstawowych wzorów rachunku całkowego mamy

$$\int x^5 dx - \int x^4 dx + 2\int x^3 dx - 2\int x^2 dx + \int x dx - \int dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + c =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c.$$

Odpowiedź. Rozwiązaniem całki jest rodzina krzywych o równaniu $\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c.$

Przykład 2.

Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int (x^3+1)^2 \cdot x^2\, dx.$$

Rozwiązanie. Powyższy przykład można rozwiązać na dwa sposoby. Po pierwsze można tę całkę rozłożyć na trzy składniki, stosując m.in. wzór skróconego mnożenia (patrz przykład 1.)

$$\int (x^3+1)^2 \cdot x^2\, dx = \int (x^6+2x^3+1)x^2\, dx = \int (x^8+2x^5+x^2)\, dx =$$

$$= \frac{x^9}{9} + \frac{2x^6}{6} + \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^9}{9} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^3}{3} + c.$$

Możemy również zastosować podstawienie

$$x^3 + 1 = t.$$

Różniczkując obustronnie otrzymujemy

$$3x^2 dx = dt,$$

skąd

$$x^2 dx = \frac{1}{3} dt.$$

Stosując wzór na zmianę zmiennej, mamy

$$\int (x^3+1)^2 \cdot x^2\, dx = \frac{1}{3}\int t^2\, dt.$$

Powyższą całkę można rozwiązać za pomocą elementarnych wzorów rachunku całkowego, otrzymując

$$\frac{1}{3}\int t^2\, dt = \frac{1}{3}\frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{9}t^3 + c.$$

Powracając do zastosowanego wcześniej podstawienia mamy ostatecznie

$$\int (x^3+1)^2 \cdot x^2\, dx = \frac{1}{9}(x^3+1)^3 + c.$$

Odpowiedź. Rozwiązaniem całki jest rodzina krzywych o równaniu $\frac{1}{9}(x^3+1)^3 + c$.

Uwaga. Powyższe rozwiązania „różnią się” o stałą $\frac{1}{9}$. Jednak rozwiązaniem każdej z całek nieoznaczonych jest pewna rodzina funkcji różniąca się o stałą $c, c \in R$, więc rozwiązania powyższe „pokryją się” w zależności od wartości, jaką przyjmie ta stała. (Stała wartość + stała wartość = inna stała wartość ze zbioru liczb rzeczywistych).

Przykład 3.

Oblicz całkę nieoznaczoną :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}.$$

<u>Rozwiązanie.</u> Zakładamy, że $x > \frac{5}{3}$. Wykonujemy podstawienie

$$3x - 5 = t,$$

skąd różniczkując obustronnie mamy

$$3dx = dt,$$

$$dx = \frac{1}{3}dt.$$

Podstawiając powyższe wartości do całki i korzystając z podstawowych wzorów rachunku całkowego, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{t} + c = \frac{2}{3}\sqrt{3x-5} + c.$$

<u>Odpowiedź.</u> Rozwiązaniem całki jest rodzina krzywych o równaniu $\frac{2}{3}\sqrt{3x-5} + c$.

Przykład 4.

Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int 2xe^{x^2}dx.$$

<u>Rozwiązanie.</u> Wykonujemy podstawienie

$$x^2 = t.$$

Różniczkując obustronnie mamy

$$2xdx = dt,$$

stąd

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c.$$

<u>Odpowiedź.</u> Rozwiązaniem całki jest rodzina krzywych o równaniu $e^{x^2} + c$.

Przykład 5.

Oblicz całkę:

$$\int \frac{lnx}{x} dx.$$

<u>Rozwiązanie.</u> Zakładamy $x > 0$ i dokonujemy podstawienia $lnx = t$. Różniczkując obustronnie mamy $\frac{1}{x} dx = dt$, stąd

$$\int \frac{lnx}{x} dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2} ln^2 x + c.$$

<u>Odpowiedź.</u> Rozwiązaniem całki jest rodzina krzywych o równaniu $\frac{1}{2} ln^2 x + c$.

Przykład 6.

Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{x^4}{2x^5 + 6} dx.$$

<u>Rozwiązanie.</u> Zakładamy $2x^5 + 6 \neq 0$. Stosując podstawienie

$$2x^5 + 6 = t,$$

i różniczkując obustronnie, mamy

$$10x^4 dx = dt,$$

stąd

$$x^4 dx = \frac{1}{10} dt.$$

Podstawiając wyrażenie do całki otrzymujemy

$$\int \frac{x^4}{2x^5 + 6} dx = \frac{1}{10} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10} ln|t| + c = \frac{1}{10} ln|2x^5 + 6| + c.$$

<u>Odpowiedź.</u> Rozwiązaniem całki jest rodzina krzywych o równaniu $\frac{1}{10} ln|2x^5 + 6| + c$.

Przykład 7.

Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int x \cdot cosx \, dx.$$

Rozwiązanie. Funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji, które nie są w żaden sposób poprzez działanie różniczkowania ze sobą powiązane. W związku z tym należy zastosować wzór na całkowanie przez części przyjmując

$$u = x, \text{ skąd } du = dx,$$

oraz

$$dv = cosx\, dx, \text{ skąd } v = \int cosxdx = sinx.$$

Podstawiając do wzoru, daną całkę możemy zapisać w postaci

$$\int x \cdot cosx\, dx = xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + c.$$

Odpowiedź. Rozwiązaniem całki jest rodzina krzywych o równaniu $xsinx + cosx + c$.

Przykład 8.

Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_0^{\pi} e^{3x} \cdot cos2x\, dx.$$

Rozwiązanie. Obliczając całkę oznaczoną można postępować w różny sposób, tzn. wyznaczyć najpierw całkę nieoznaczoną i następnie podstawić granice całkowania lub od razu rozwiązywać całkę wraz z granicami całkowania.

Rozwiążemy powyższy przykład wyznaczając najpierw całkę nieoznaczoną, czyli

$$\int e^{3x} \cdot cos2x\, dx.$$

W celu wyznaczenia tej całki należ posłużyć się metodą całkowania przez części, dlatego też podstawiamy

$$u = e^{3x}, \qquad dv = cosx\, dx,$$

skąd

$$du = 3e^{3x}\, dx, \qquad v = \int cos2x\, dx = \frac{1}{2} sin2x.$$

Obliczając całkę $\int cos2x\, dx$ można skorzystać z podstawienia $2x = t$.

Po skorzystaniu ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\int e^{3x} \cdot cos2x\, dx = \frac{1}{2} e^{3x} sinx - \frac{3}{2} \int e^{3x} sin2x\, dx.$$

Ponownie korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części i mamy

$$u = e^{3x}, \qquad dv = sin2x\, dx,$$

skąd

$$du = 3e^{3x}\, dx, \qquad v = \int sin2x\, dx = -\frac{1}{2}cos2x.$$

Zatem

$$\frac{1}{2}e^{3x}sin2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}sin2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x}sin2x - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{3x}cos2x - 3\int e^{3x}\left(-\frac{1}{2}cos2x\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x}sin2x + \frac{3}{4}e^{3x}cos2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}cos2x\, dx.$$

W wyznaczonej całce otrzymaliśmy postać całki, którą mieliśmy rozwiązać

$$\int e^{3x}\cdot cos2x\, dx = \frac{1}{2}e^{3x}sin2x + \frac{3}{4}e^{3x}cos2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}cos2x\, dx,$$

zatem po przeniesieniu jej na lewą stronę otrzymujemy

$$\frac{13}{4}\int e^{3x}\cdot cos2x\, dx = \frac{1}{2}e^{3x}\left(sin2x + \frac{3}{2}cos2x\right).$$

Ostatecznie więc całka nieoznaczona wynosi

$$\int e^{3x}\cdot cos2x\, dx = \frac{2}{13}e^{3x}\left(sin2x + \frac{3}{2}cos2x\right) + c.$$

Podstawiając granice całkowania mamy

$$\int_0^{\pi} e^{3x}\cdot cosx\, dx = \left[\frac{2}{13}e^{3x}\left(sin2x + \frac{3}{2}cos2x\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{13}e^{3\pi}\left[sin(2\pi) + \frac{3}{2}cos(2\pi)\right] - \frac{2}{13}e^{3\cdot 0}\left[sin(2\cdot 0) + \frac{3}{2}cos(2\cdot 0)\right] =$$

$$= \frac{3}{13}e^{3\pi} - \frac{3}{13} = \frac{3}{13}(e^{3\pi} - 1).$$

<u>Odpowiedź.</u> $\int_0^{\pi} e^{3x}\cdot cos2x\, dx = \frac{3}{13}(e^{3\pi} - 1).$

Przykład 9.

Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x \cdot cosx^2\, dx.$$

Rozwiązanie. Wyznaczając całkę korzystamy z najpierw z podstawienia

$$x^2 = t,$$

stąd

$$2x\, dx = dt.$$

Dokonując zamiany zmiennych w funkcji podcałkowej, zmianie ulegną również granice całkowania

x	0	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$t = x^2$	0	$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$

Całka jest zatem postaci

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x \cdot cosx^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cost\, dt = [sint]_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 = 1 - 0 = 1.$$

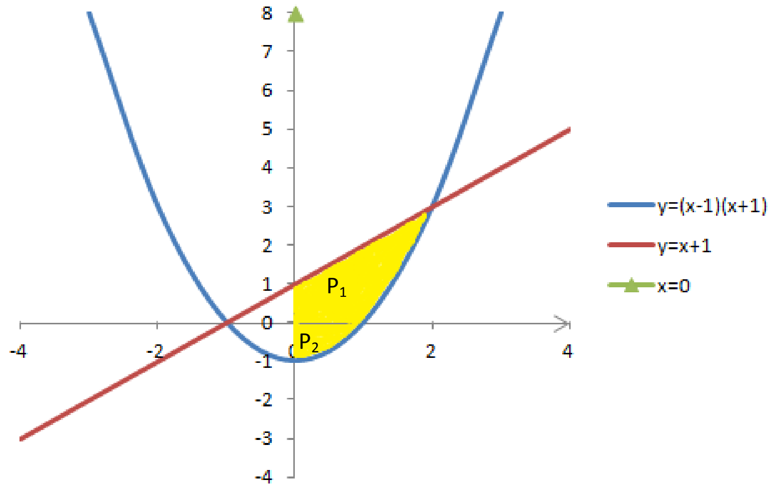
Uwaga. Całkę oznaczoną można najpierw rozwiązać jako całkę nieoznaczoną i na końcu postawić granice całkowania – nie dokonujemy wówczas zamiany granic całkowania – patrz przykład 8.

Odpowiedź. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x \cdot cosx^2\, dx$ =1.

Przykład 10.

Oblicz pole obszaru ograniczonego liniami: $y = x^2 - 1, y = x + 2$ oraz $x = 0$.

Rozwiązanie. Wykonujemy rysunek pomocniczy, aby wyznaczyć część wspólną ograniczoną liniami z treści zadania



Pole, które mamy obliczyć jest na wykresie zamalowane.

Pole składa się z dwóch części $P = P_1 + P_2$.

Obliczamy każde z pól osobno, więc

$$P_1 = \int_0^2 (x+1)dx - \int_1^2 (x^2-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 =$$

$$= 2 + 2 - \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{14}{3}(j^2).$$

Pole P_2 znajduje się pod osią $0x$, to zgodnie z definicją i interpretacją całki oznaczonej, pole wynosi

$$P_2 = -\int_0^1 (x^2-1)dx = \int_0^1 (-x^2+1)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}(j^2).$$

Mamy zatem

$$P = P_1 + P_2 = \frac{14}{3} + \frac{2}{3} = \frac{16}{3}(j^2).$$

Odpowiedź. Szukane pole wynosi $\frac{16}{3}j^2$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie1.

Wyznacz następujące całki nieoznaczone (korzystając z podstawowych wzorów rachunku całkowego):

a) $\int \left(x^2 - 3x + \frac{2}{\sqrt{x}} + 8\right)\, dx,$

b) $\int \frac{3x^5+2x^2-3x+8}{x^2}\, dx,$

c) $\int (2x^2 - x + 1) \cdot (x - 2)\, dx,$

d) $\int \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx,$

e) $\int \frac{4x\sqrt{x^3}+x\sqrt[4]{x}}{x^3}\, dx,$

f) $\int (x-2)^2\, dx,$

g) $\int (x^2+2)^2 \cdot x\, dx,$

h) $\int \left(5 + \sqrt[3]{x}\right)^2\, dx,$

i) $\int \frac{6x^2-3\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}}{x^2}\, dx,$

j) $\int \frac{4x-3\sqrt{x}-4\sqrt[5]{x^8}+8}{2\sqrt[3]{x^2}}\, dx,$

k) $\int (4sinx - e^x) dx,$

l) $\int \left(\frac{-4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{x^2+1}\right)\, dx,$

m) $\int \frac{3}{cos^2 x}\, dx,$

n) $\int 2^x 5^x\, dx.$

Zadanie 2.

Wyznacz następujące całki nieoznaczone (korzystając z metody całkowania przez podstawienie):

a) $\int (x^2-3)^4 \cdot x\, dx,$

b) $\int \frac{2x\, dx}{(x^2-3)^3},$

c) $\int \frac{x^2}{5+x^3} dx,$

d) $\int \frac{x^4}{(3-2x^5)^2} dx,$

e) $\int 2\sqrt{5x+3}\, dx,$

f) $\int x\sqrt{x^2-3}\, dx$

g) $\int 8(2x^4-3)^5 \cdot x^3\, dx,$

h) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-6}} dx,$

i) $\int \frac{4x^3}{\sqrt[3]{x^4+6}} dx,$

j) $\int \frac{x-3}{\sqrt[3]{x+2}} dx,$

k) $\int x \cdot cosx^2\, dx,$

l) $\int 3x^2 \cdot e^{-x^3} dx,$

m) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx,$

n) $\int \frac{dx}{4sin^2(5x+1)},$

o) $\int 12x^2 \cdot cos(2x^3 - 1)\, dx,$

p) $\int cosx \cdot six^3 x\, dx,$

q) $\int \frac{sinx}{\sqrt{2+cosx}}\, dx,$

r) $\int \frac{3x^4}{cos^2 x^5}\, dx,$

s) $\int e^x \cdot sin(e^x+2) dx,$

t) $\int \frac{ctgx}{sin^2 x} dx,$

u) $\int \frac{(lnx)^3}{x} dx,$

v) $\int \frac{1}{x} \cdot sin(lnx)\, dx,$

w) $\int \frac{dx}{x \cdot ln^3 x}$,

x) $\int \frac{e^x}{3e^x+6} dx$,

y) $\int tg^3 x \, dx$,

z) $\int sin^4 x \cdot cos^3 x \, dx$,

aa) $\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x} dx$,

bb) $\int \frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$,

cc) $\int \frac{dx}{9x^2+16}$,

dd) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Zadanie 3.

Wyznacz następujące całki nieoznaczone (korzystając z metody całkowania przez części):

a) $\int lnx \, dx$,

b) $\int e^x \cdot cosx \, dx$,

c) $\int x^3 e^x \, dx$,

d) $\int x^2 \cdot cosx \, dx$,

e) $\int x^2 \cdot sin6x \, dx$,

f) $\int e^{-2x} \cdot sin3x \, dx$,

g) $\int \sqrt{x} \cdot lnx \, dx$,

h) $\int (2x+5) sinx \, dx$,

i) $\int cos(lnx) \, dx$,

j) $\int x \cdot 2^x \, dx$,

k) $\int e^{2x} \cdot sine^x \, dx$,

l) $\int x^3 \cdot (lnx)^2 \, dx$,

m) $\int x^3 e^{x^2} \, dx$,

n) $\int x \cdot tg^2 x \, dx$,

o) $\int \frac{ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$,

p) $\int xsinxcosx \, dx$,

q) $\int 2^x \cdot cosx \, dx$

r) $\int \frac{x \cdot arcsinx}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$.

Zadanie 4.

Oblicz następujące całki oznaczone:

a) $\int_{-1}^{2} \frac{2x}{(x^2-3)^3} dx$,

b) $\int_1^e lnxdx$,

c) $\int_0^3 \frac{e^x}{e^x+1} dx$,

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} sinxcosx \, dx$,

e) $\int_{-1}^{2} xe^{x^2} dx$,

f) $\int_1^8 \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x^2} dx$,

g) $\int_1^e x^5 lnx \, dx$,

h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx}{cos^2 x} dx$,

i) $\int_0^1 5^{1-x} dx$,

j) $\int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} dx$,

k) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{2^{1/x}}{x^2}\,dx.$

Zadanie 5.

Oblicz pole obszaru ograniczonego liniami:

a) $xy = 4,\ y = -2x + 6,$

b) $y = e^x,\ x = -3,\ x = 1,\ y = 0,$

c) $y = x^2 - 1,\ y - 2x = 2,$

d) $y = \frac{1}{1+x^2},\ y = \frac{x^2}{2},$

e) $y^2 = 2 - x,\ x = -2,$

f) $y^2 = x,\ y = x^2,$

g) $y = x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = 3x,$

h) $y = 2x + 1, y = -x + 1, x = 2,$

i) $y = -x^2 + x + 2, y = x + 1.$

ODPOWIEDZI

Zadanie 1.

a) $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4\sqrt{x} + 8x + c,$

b) $\frac{3x^4}{4} + 2x - 3lnx - \frac{8}{x} + c,$

c) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + c,$

d) $\frac{6}{13}x^{13/6} + \frac{15}{28}x^{28/15} + c,$

e) $8\sqrt{x} - \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + c,$

f) $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + c,$

g) $\frac{x^6}{6} + x^4 + 2x^2 + c,$

h) $25x + \frac{15}{2}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c,$

i) $6x + \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[5]{x^3}} + c,$

j) $3\sqrt[3]{x^2} - \frac{9}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{30}{29}\sqrt[15]{x^{29}} + 12\sqrt[3]{x} + c,$

k) $-4cosx - e^x + c$,

l) $-4arcsinx + 2arctgx + c$,

m) $3tgx + c$,

n) $\frac{10^x}{ln10} + c$.

Zadanie 2.

a) $\frac{1}{10}(x^2 - 3)^5 + c$,

b) $-\frac{1}{2(x^2-3)^2} + c$,

c) $\frac{1}{3}ln|5 + x^3| + c$,

d) $-\frac{1}{30(3-2x^5)^3} + c$,

e) $\frac{4}{15}\sqrt{(5x + 3)^3} + c$,

f) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - 3)^3} + c$,

g) $\frac{1}{3}(2x^4 - 3)^6 + c$,

h) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 - 6} + c$,

i) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^4 + 6)^3} + c$,

j) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x + 2)^5} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{(x + 2)^2} + c$,

k) $\frac{1}{2}sinx^2 + c$,

l) $-e^{-x^3} + c$,

m) $-e^{1/x} + c$,

n) $-\frac{1}{20}ctg(5x + 1) + c$,

o) $2sin(2x^3 - 1) + c$,

p) $\frac{1}{4}sin^4x + c$,

q) $-2\sqrt{2 + cosx} + c$,

r) $\frac{3}{5}tgx^5 + c$,

s) $-cos(e^x + 2) + c$,

t) $-\frac{1}{2}ctg^2x + c$,

u) $\frac{1}{4}ln^4x + c$,

v) $-cos(lnx) + c$,

w) $-\frac{1}{4ln^4x} + c$,

x) $\frac{1}{3}ln|3e^x + 6| + c$,

y) $\frac{1}{2cos^2x} + ln|cosx| + c$,

z) $\frac{1}{5}sin^5x - \frac{1}{6}sin^6x + c$,

aa) $-\frac{1}{3sin^3x} + \frac{1}{sinx} + c$,

bb) $-2cos\sqrt{x} + c$,

cc) $\frac{1}{12}arctg\frac{3}{4}x$+c,

dd) $\frac{1}{2}arcsin2x$+c.

Zadanie 3.

a) $xlnx - x + c$,

b) $\frac{1}{2}e^x(sinx + cosx) + c$,

c) $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 1) + c$,

d) $(x^2-2)sinx+2xcosx+c$,

e) $-\frac{1}{6}x^2cos6x+\frac{1}{18}xsin6x+\frac{1}{108}cos6x+c$,

f) $-\frac{1}{13}e^{-2x}(2sin3x+3cos3x)+c$,

g) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(lnx-\frac{2}{3}\right)+c$,

h) $(-2x-5)cosx+2sinx+c$,

i) $\frac{1}{2}x(sinlnx+coslnx)+c$,

j) $\frac{2^x}{ln^2 2}(xln2-1)+c$,

k) $-e^x cose^x+sine^x+c$,

l) $\frac{1}{4}x^4\left(ln^2x-\frac{1}{2}lnx+\frac{1}{8}\right)+c$,

m) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+c$,

n) $xtgx-\frac{1}{2}x^2+ln|cosx|+c$,

o) $2\sqrt{x}(ln^2x-4lnx+8)+c$,

p) $-\frac{xcos2x}{4}+\frac{sin2x}{8}+c$,

q) $\frac{2^x(sinx+cosxln2)}{1+ln^2 2}+c$,

r) $-\sqrt{1-x^2}arcsinx+x+c$.

Zadanie 4.

a) $\left[\frac{-1}{2(x^2-3)^2}\right]_{-1}^{2}=-\frac{3}{8}$,

b) $[xlnx-x]_1^e=1$,

c) $[ln|e^x+1|]_0^3=ln\frac{e^3+1}{2}$,

d) $\left[\frac{1}{2}sin^2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}$,

e) $\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-1}^{2}=\frac{1}{2}(e^4-e)$,

f) $\left[\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^8=\frac{7-4\sqrt{2}}{8}$,

g) $\left[\frac{1}{6}x^6\left(lnx-\frac{1}{6}\right)\right]_1^e=\frac{5}{36}e^6-\frac{1}{36}$,

h) $\left[\frac{1}{2}tg^2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}$,

i) $\left[\frac{-5^{1-x}}{ln5}\right]_0^1=\frac{4}{ln5}$,

j) $\left[\sqrt{x^2-5}\right]_3^5=2(\sqrt{5}-1)$,

k) $\left[\frac{2^t}{ln2}\right]_1^3=\frac{6}{ln2}$.

Zadanie 5.

a) $P = (3 - 4ln2)j^2$,

b) $P = (e - e^{-3})j^2$,

c) $P = 9j^2$,

d) $P = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)j^2$,

e) $P = \frac{16}{3}j^2$,

f) $P = \frac{1}{3}j^2$,

g) $P = \frac{27}{2}j^2$,

h) $P = 8j^2$,

i) $P = 2j^2$.

IV. ELEMENTY ALGEBRY LINIOWEJ

Przykład 1.

Wykonaj mnożenie macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie.

Uwaga. Wykonując mnożenie macierzy należy najpierw sprawdzić, czy działanie jest możliwe do wykonania, czyli czy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy.

W podanym przykładzie liczba kolumn macierzy pierwszej jest równa 3, a liczba wierszy macierzy drugiej jest równa 3, zatem działanie jest możliwe do wykonania.

Wymiar macierzy którą uzyskamy w wyniku mnożenia będzie równy liczbie wierszy pierwszej macierzy i liczbie kolumn macierzy drugiej, zatem 3×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) & 4 \cdot 0 + (-4) \cdot 4 + 5 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 6 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 15 \end{bmatrix}$

Przykład 2.

Stosując twierdzenie Laplace'a, oblicz wyznacznik macierzy

$$A=\begin{bmatrix}0 & 5 & -3 & 1\\ -1 & -4 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

<u>Rozwiązanie</u>. Korzystając z twierdzenia Laplace'a należy wybrać dowolny wiersz lub kolumnę, według których będziemy dokonywać rozwinięcia. Wybieramy kolumnę czwartą, zatem

$$det\ A = a_{14}\cdot D_{14} + a_{24}\cdot D_{24} + a_{34}\cdot D_{34} + a_{44}\cdot D_{44},$$

gdzie:

D_{ij} - dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}.

$$det\ A = 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot det\begin{bmatrix}-1 & -4 & 2\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+4}\cdot det\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}+$$
$$+\,0\cdot(-1)^{3+4}\cdot det\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ -1 & -4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} + 4\cdot(-1)^{4+4}\cdot det\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ -1 & -4 & 2\\ 3 & 4 & -2\end{bmatrix}.$$

Należy obliczyć poszczególne wyznaczniki macierzy występujące w tym rozwinięciu.

Obliczamy po kolei wyznaczniki macierzy, stosując ponownie rozwinięcie Laplace'a:

- względem pierwszego wiersza:

$$det\begin{bmatrix}-1 & -4 & 2\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} =$$
$$= -1\cdot(-1)^{1+1}\cdot det\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+2}\cdot det\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}$$
$$\cdot\, det\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix} =$$
$$= -\big(12-(-4)\big) + 4\cdot(9+2) + 2\cdot(6-4) = 32,$$

- względem pierwszej kolumny:

$$det\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} =$$
$$= 0\cdot(-1)^{2}\cdot det\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix} + 3\cdot(-1)^{3}\cdot det\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & 3\end{bmatrix} + 1\cdot(-1)^{4}\cdot det\begin{bmatrix}5 & -3\\ 4 & -2\end{bmatrix} =$$
$$= -3\cdot 21 + 2 = -61.$$

Trzeciego wyznacznika nie obliczmy, ponieważ w wyniku pomnożenia jego wartości przez 0 otrzymamy 0.

Uwaga. Wyznacznik macierzy stopnia 3-go można szybko obliczyć korzystając z tzw. schematu Sarrusa.

Według tej metody obliczymy ostatni z wyznaczników, czyli

$$det\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \\ 3 & 4 \end{matrix} =$$

$$= 0 \cdot (-4) \cdot (-2) + 5 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \cdot 4 - 3 \cdot (-4) \cdot (-3) - 4 \cdot 2 \cdot 0 - (-2) \cdot (-1) \cdot 5 =$$

$$= 0 + 30 + 12 - 36 - 0 - 10 = -4.$$

Mając obliczone wszystkie wyznaczniki wracamy do obliczenia wyznacznika macierzy A:

$$detA = -32 - (-61) + 0 + 4 \cdot (-4) = 13.$$

Zatem $detA = 13$.

Przykład 3.

Oblicz rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -8 & 7 \end{bmatrix}$:

a) korzystając z definicji rzędu macierzy i z własności możliwych do wykonania działań na rzędach macierzy,
b) korzystając z twierdzenia o podmacierzy nieosobliwej,
c) korzystając z przekształceń elementarnych.

Rozwiązanie a). Korzystając z definicji rzędu macierzy i z własności możliwych do wykonania działań na rzędach macierzy obliczmy

$$rzA = rz\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} =$$

do elementów wiersza pierwszego dodajemy elementy wiersza drugiego pomnożone przez (-2),

czyli $w_1' = w_1 + (-2) \cdot w_2$

$$= rz\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} =$$

do elementów wiersza trzeciego dodajemy elementy wiersza drugiego pomnożone przez 3,

czyli $w_3' = w_3 + 3 \cdot w_2$

$$= rz\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 10 \end{bmatrix} =$$

Zauważamy, że kolumna pierwsza jest liniowo niezależna od pozostałych (czyli od kolumny drugiej, trzeciej i czwartej). Dokonując (podobnych) przekształceń, możemy w drugim wierszu w kolumnach: drugiej, trzeciej i czwartej uzyskać zera, stąd wiersz drugi jest również liniowo niezależny od pozostałych, czyli od wiersza pierwszego i trzeciego. Zatem, mamy jeden wiersz (jedną kolumnę) liniowo niezależny od pozostałych i opuszczając liniowo niezależny wiersz i liniowo niezależną kolumnę – w naszym przykładzie wiersz drugi i kolumnę pierwszą - kontynuujemy obliczanie rzędu macierzy

$$= 1 + rz\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -6 & -2 & 10 \end{bmatrix} =$$

Wiersz drugi jest liniowo zależny od wiersza pierwszego (i odwrotnie), ponieważ, gdy do elementów wiersza drugiego dodamy elementy wiersza pierwszego pomnożone przez 2, uzyskamy same zera w wierszu drugim, $w_2' = w_2 + 2 \cdot w_1$ $(w_2 = -2w_1)$. Podobnie można wyzerować kolumnę, np. pierwszą i trzecią, gdyż $k_1 = 3k_2$ oraz $k_3 = -5k_2$

$$= 1 + rz\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

Zgodnie z własnością rzędu macierzy – rząd macierzy nie ulegnie zmianie, gdy usuniemy wiersz (kolumnę) złożoną z samych zer, zatem

$$= 1 + rz[3 \quad 1 \quad -5] = 2.$$

Zatem $rzA = 2$.

<u>Odpowiedź.</u> $rzA = 2$.

<u>Rozwiązanie b).</u> Korzystając z twierdzenia o podmacierzy nieosobliwej

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Skoro w twierdzeniu jest mowa o podmacierzy nieosobliwej (której wyznacznik jest różny od zera), należy wziąć pod uwagę tylko macierze kwadratowe. W naszej macierzy – największą podmacierzą kwadratową, jest macierz stopnia 3. W naszym przykładzie są możliwe do utworzenia 4 podmacierze stopnia 3-go.

Wybieramy podmacierz – po usunięciu pierwszej kolumny i odliczamy wyznacznik

$$det\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} = 0$$

Nie możemy stwierdzić, że $rzA \neq 3$, ponieważ nie zbadaliśmy wszystkich podmacierzy, zatem szukamy dalej podmacierzy nieosobliwej o najwyższym stopniu (3):

- po usunięciu kolumny drugiej:

$$det\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} = 0,$$

– po usunięciu kolumny trzeciej:

$$det\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 7 \end{bmatrix} = 0,$$

– po usunięciu kolumny czwartej:

$$det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & -8 \end{bmatrix} = 0.$$

Żadna z możliwych podmacierzy stopnia 3-go nie jest nieosobliwa, zatem $rzA < 3$ i w związku z tym należy szukać nieosobliwej podmacierzy stopnia 2-go.

Wybieramy dowolną podmacierz stopnia 2-go (jest 18 możliwości) – po usunięciu pierwszej i czwartej kolumny oraz trzeciego wiersza mamy

$$det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 7 \neq 0.$$

Wybrana podmacierz stopnia 2-go jest największą nieosobliwą macierzą (wszystkie możliwe do utworzenia podmacierze stopnia 3-go miały wyznacznik równy 0), dlatego rząd naszej macierzy A jest równy 2.

<u>Odpowiedź.</u> $rzA = 2$

<u>Rozwiązanie c).</u> Korzystając z przekształceń elementarnych

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Szukamy stopnia macierzy jednostkowej występującej w jej postaci kanonicznej,

$$\begin{bmatrix} I_k & \vdots & R \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0_1 & \vdots & 0_2 \end{bmatrix}.$$

Zamieniamy miejscami wiersz pierwszy z drugim i otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Do elementów wiersza drugiego dodajemy elementy wiersza pierwszego pomnożone przez (-2) i do elementów wiersza trzeciego dodajemy elementy wiersza pierwszego pomnożone przez 3, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Kolumnę trzecią zamieniamy miejscami z drugą i otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Do elementów wiersza pierwszego dodajemy elementy wiersza drugiego pomnożone przez (-2) i do elementów wiersza trzeciego dodajemy elementy wiersza drugiego pomnożone przez 2, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po powyższy przekształceniach otrzymaliśmy postać kanoniczną macierzy A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -7 & 11 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 & -5 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

w której macierz jednostkowa jest stopnia 2-go.

Zatem rząd macierzy A jest równy 2.

Odpowiedź. $rzA = 2$.

Przykład 4.

Wyznacz macierz odwrotną do podanej macierzy:

a) korzystając z definicji dla

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Korzystając z definicji $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$, gdzie $A^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, mamy

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Wykonując mnożenie dwóch macierzy, otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix}-a_{11}+a_{21} & -a_{12}+a_{22}\\ 2a_{11}+3a_{21} & 2a_{12}+3a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

W oparciu o definicję równości dwóch macierzy, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases}-a_{11}+a_{21}=1\\ 2a_{11}+3a_{21}=0\\ -a_{12}+a_{22}=0\\ 2a_{12}+3a_{22}=1\end{cases},$$

a dokładnie – dwa układy równań z dwiema niewiadomymi każdy

$$\begin{cases}-a_{11}+a_{21}=1\\ 2a_{11}+3a_{21}=0\end{cases}\ \text{oraz}\begin{cases}-a_{12}+a_{22}=0\\ 2a_{12}+3a_{22}=1\end{cases}.$$

Rozwiązując powyższe układy równań (np. metodą przeciwnych współczynników), otrzymujemy

$$a_{11}=-\tfrac{3}{5},\ a_{21}=\tfrac{2}{5},\ a_{12}=\tfrac{1}{5},\ a_{22}=\tfrac{1}{5}.$$

Szukaną macierzą odwrotną do macierzy A, jest macierz postaci

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}.$$

Uwaga. Wyznaczanie macierzy odwrotnej w oparciu o definicję jest bardzo pracochłonne. W przypadku, np. macierzy stopnia 3-go, żeby znaleźć do niej macierz odwrotną należy rozwiązać trzy układy równań z trzema niewiadomymi.

Odpowiedź. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

b) korzystając z metody wyznacznikowej dla

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Metoda wyznacznikowa wynika bezpośrednio z twierdzenia i oparta jest na wzorze:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot A^d,$$

gdzie A^d oznacz macierz dołączoną, czyli transponowaną macierz dopełnień algebraicznych.

W naszym przykładzie szukamy macierzy $B^{-1} = \frac{1}{detB} \cdot B^d$,

gdzie $B^d = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}^T$.

Obliczamy wyznacznik macierzy (patrz przykład 2.)

$$detB = det\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 13$$

Macierz B jest macierzą nieosobliwą, w związku z tym istnieje do niej macierz odwrotna. Wyznaczamy dopełnienia algebraiczne dla wszystkich elementów macierzy:

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot det\begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = -16, \qquad D_{31} = det\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = -3,$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2} \cdot det\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = -(-27) = 27,$$

$$D_{32} = -det\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 14,$$

$$D_{13} = (-1)^4 \cdot det\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 30, \qquad D_{33} = det\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 17,$$

$$D_{14} = (-1)^5 \cdot det\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -32, \qquad D_{34} = -det\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -19,$$

$$D_{21} = -det\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = -24, \qquad D_{41} = -det\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -2,$$

$$D_{22} = det\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 47, \qquad D_{42} = det\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 5,$$

$$D_{23} = -det\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = -(-58) = 58, \qquad D_{43} = -det\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = 7,$$

$$D_{24} = det\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -61. \qquad D_{44} = det\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} = -4.$$

Zatem otrzymujemy macierz dołączoną następującej postaci

$$B^d = \begin{bmatrix} -16 & 27 & 30 & -32 \\ -24 & 47 & 58 & -61 \\ -3 & 14 & 17 & -19 \\ -2 & 5 & 7 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -16 & -24 & -3 & -2 \\ 27 & 47 & 14 & 5 \\ 30 & 58 & 17 & 7 \\ -32 & -61 & -19 & -4 \end{bmatrix}.$$

Stąd macierz odwrotna do macierzy B ma postać

$$B^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} -16 & -24 & -3 & -2 \\ 27 & 47 & 14 & 5 \\ 30 & 58 & 17 & 7 \\ -32 & -61 & -19 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\frac{3}{16} & -1\frac{11}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ 2\frac{1}{13} & 3\frac{8}{13} & 1\frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ 2\frac{4}{13} & 4\frac{6}{13} & 1\frac{4}{13} & \frac{7}{13} \\ -2\frac{6}{13} & -4\frac{9}{13} & -1\frac{6}{13} & -\frac{4}{13} \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Zaprezentowana metoda jest dość czasochłonna już w podanym przykładzie, czyli dla macierzy stopnia 4-go. Zwiększając stopień macierzy, dla której szukamy macierzy odwrotnej wykonywane obliczenia stają się coraz bardziej uciążliwe.

Odpowiedź. $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1\frac{3}{16} & -1\frac{11}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ 2\frac{1}{13} & 3\frac{8}{13} & 1\frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ 2\frac{4}{13} & 4\frac{6}{13} & 1\frac{4}{13} & \frac{7}{13} \\ -2\frac{6}{13} & -4\frac{9}{13} & -1\frac{6}{13} & -\frac{4}{13} \end{bmatrix}.$

c) korzystając z metody opartej na przekształceniach elementarnych dla

$$C=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie.

Uwaga. Należy pamiętać, że przekształceń elementarnych należy dokonywać wyłącznie na wierszach - jednocześnie dla danej macierzy i zapisanej obok macierzy jednostkowej, tego samego stopnia, czyli dla macierzy $[C \;\; \vdots \;\; I]$. Wykonując odpowiednie działania należy macierz C przekształcić do macierzy jednostkowej, wówczas w miejscu macierzy jednostkowej otrzymamy macierz odwrotną do danej macierzy, czyli macierz C^{-1}.

Jeżeli macierz jednostkową zapiszemy pod daną macierzą, czyli utworzymy macierz $\begin{bmatrix}C\\ \cdots\\ I\end{bmatrix}$, wówczas przekształcenia elementarne możemy wykonywać wyłącznie na kolumnach.

Zapisujemy daną macierz, do której mamy wyznaczyć macierz odwrotną i macierz jednostkową obok, tworząc macierz postaci

$$[C \;\; \vdots \;\; I]=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & -2 & \vdots & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Przekształceń dokonujemy od elementu c_{11}, następnie zerujemy wszystkie pozostałe elementy w kolumnie pierwszej. Później przechodzimy do kolumny drugiej, zmieniamy element c_{22} i zerujemy pozostałe elementy w drugiej kolumnie i przechodzimy do następnej kolumny – do czasu, aż otrzymamy macierz jednostkową.

W związku z tym w utworzonej macierzy $[C \;\; \vdots \;\; I]$, mnożymy wiersz pierwszy przez (-1) i otrzymujemy

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & -2 & \vdots & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Do elementów wiersza drugiego dodajemy elementy wiersza pierwszego pomnożone przez (-2), czyli $w_2' = w_2 + (-2)\cdot w_1$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & \vdots & 2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

a do elementów wiersza trzeciego dodajemy elementy wiersza pierwszego pomnożone przez (-1) i otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & \vdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przechodzimy do kolumny drugiej, przekształcając wiersz drugi, poprzez przemnożenie elementów tego wiersza przez $\left(-\frac{1}{4}\right)$, stąd

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do elementów wiersza pierwszego dodajemy elementy wiersza drugiego pomnożone przez (-4) i otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementy wiersza trzeciego mnożymy przez $\frac{1}{4}$, mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Ostatnim działaniem jest dodanie elementów wiersza trzeciego do elementów wiersza pierwszego, skąd otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Zatem szukana macierz odwrotna jest postaci

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

<u>Odpowiedź.</u> $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Wykonaj mnożenie macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

h) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$,

i) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\9 & -2 & 4\\8 & 0 & 3\end{bmatrix}$,

j) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\-1 & -2 & -3 & -6\\0 & 2 & 3 & 6\\-4 & -2 & -5 & -6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$,

k) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\2 & 3 & 4\\0 & 2 & -3\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}$,

l) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -2 & 3\\0 & 2 & 1 & 2 & 2\\1 & 1 & 3 & 0 & 0\\-2 & 2 & 0 & 4 & 0\\3 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 3 & 1\\2 & 0 & 3 & 1\\-1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & -3\\4 & 2 & 5 & 0\end{bmatrix}$.

Zadanie 2. Dla podanych macierzy:

1. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 2 & -3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\-1 & 5 & 3\\0 & 2 & 4\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\1 & 2 & 4\\0 & 6 & 7\\3 & 0 & 5\end{bmatrix}$,

2. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 5 & 0\\3 & -2 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 5\\4 & 3 & -5\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$,

3. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 0\\2 & 5\\3 & 4\\2 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2 & 1\\-1 & -2 & -2 & -2 & -1\end{bmatrix}$,

(o ile to możliwe) wykonaj działania:

a) $A\cdot B\cdot A$,

b) $A\cdot B\cdot A^T$,

c) $B\cdot C$,

d) B^2,

e) $C\cdot B$,

f) $4\cdot(A+B)\cdot A$,

g) $(A\cdot B)^T$,

h) $A+C^T$,

i) $A \cdot C + A \cdot B$.

Zadanie 3.

Oblicz iloczyny $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$ dla podanych macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4.

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ znajdź wszystkie macierze B spełniające warunek: $A \cdot B = B \cdot A$.

Zadanie 5.

Wyznacz wzór na A^n, gdy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 6.

Wykaż, że macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ jest miejscem zerowym wielomianu: $x^2 - 5x + 3I$.

Zadanie 7.

Dla jakiego $n \in N$ n-ta potęga macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ jest macierzą zerową.

Zadanie 8.

Wykaż, że dla dowolnej macierzy kwadratowej A, suma $A + A^T$ jest macierzą symetryczną.

Zadanie 9.

Oblicz wyznacznik macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$,

c) $C = \begin{bmatrix} 3a & 2 \\ 5a & 6 \end{bmatrix}$,

d) $D = \begin{bmatrix} log_4 3 & 1 \\ 1 & log_3 4 \end{bmatrix}$,

e) $E = \begin{bmatrix} sinx & cosx \\ -cosx & sinx \end{bmatrix}$,

f) $F = \begin{bmatrix} x & 2x \\ 4x & 8x \end{bmatrix}$,

g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

h) $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,

i) $I = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

j) $J = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

k) $K = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 10.

Oblicz wyznacznik macierzy stosując rozwinięcie Laplace'a:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$,

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & x & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

f) $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

g) $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$,

h) $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$,

i) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}$,

j) $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 11.

Sprawdź, które macierze są nieosobliwe:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 12.

Wyznacz rzędy następujących macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & -7 & 3 \\ -3 & 3 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$,

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & -7 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$,

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & -7 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -9 & 0 & 12 & -5 & -2 \end{bmatrix}$,

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

g) $G = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 & 4 & -7 \\ 5 & -5 & -6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$,

h) $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$,

i) $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

j) $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

k) $K = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & 1 & -6 & -3 \\ -2 & 0 & -4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 13.

Dla jakiego x rząd macierzy jest:

a) mniejszy od 4 $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

b) równy 3 $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & x & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

c) równy 3 $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & x \end{bmatrix}$.

Zadanie 14.

Za pomocą macierzy odwrotnej rozwiąż równania macierzowe:

a) $AX - BX = X + B$,

b) $X + XB = A$,

c) $A - XA = I$,

d) $2X = A + BX$,

e) $BX - AX = -3X + 21I$,

gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 15.

Napisz przykładową macierz $A_{4\times 6}$, której rząd

a) jest równy 4,

b) jest mniejszy od 4,

c) jest większy od 4,

d) jest równy 1.

Zadanie 16.

Co możesz powiedzieć o istnieniu macierzy odwrotnej do macierzy A, która jest postaci:

a) $A_{4\times 6}$ i $rzA = 4$,

b) $A_{4\times 4}$ i $rzA = 3$,

c) $A_{3\times 3}$ i $rzA = 3$,

d) $A_{5\times 6}$ i $rzA = 5$.

ODPOWIEDZI

Zadanie 1.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 13 & -13 & 17 \\ 23 & 9 & 9 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 \\ -8 & -6 & -3 \\ 16 & 11 & 4 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$,

d) $[1 \quad 5]$,

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 7 & -16 & 20 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$,

h) $[-7]$,

i) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 9 & -2 & 4 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

j) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 & 24 \\ -1 & -6 & -6 & -24 \\ 0 & 6 & 6 & 24 \\ -4 & -6 & -10 & -24 \end{bmatrix}$,

k) $\begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 19 & 27 \\ 10 & -6 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$,

l) $\begin{bmatrix} 13 & 6 & 17 & 11 \\ 11 & 8 & 23 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 14 \\ 0 & 4 & 8 & -12 \\ 14 & 2 & 20 & 5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2.

1a) Działanie niemożliwe,

1b) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$,

1c) Działanie niemożliwe,

1d) $\begin{bmatrix} -1 & 14 & 11 \\ -6 & 29 & 26 \\ -2 & 18 & 22 \end{bmatrix}$,

1e) $\begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 20 & 23 \\ -6 & 44 & 46 \\ 3 & 16 & 23 \end{bmatrix}$,

1f) Działanie niemożliwe,

1g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 8 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$,

1h) Działanie niemożliwe,

1i) Działanie niemożliwe.

2a) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 13 & 125 & -35 \\ 81 & -46 & 35 \end{bmatrix}$,

2b) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 35 & 135 & 7 \\ -35 & -4 & 3 \end{bmatrix}$,

2c) $\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & -9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$,

2d) $\begin{bmatrix} 13 & 16 & 5 \\ 7 & 7 & -10 \\ 11 & 14 & 4 \end{bmatrix}$,

2e) Działanie niemożliwe,

2f) $\begin{bmatrix} 68 & 8 & 12 \\ 28 & 200 & -44 \\ 64 & -32 & 0 \end{bmatrix}$,

2g) $\begin{bmatrix} -1 & 20 & -7 \\ 0 & 19 & 2 \\ 2 & -15 & 28 \end{bmatrix}$,

2h) Działanie niemożliwe,

2i) Działanie niemożliwe.

3a) Działanie niemożliwe,

3b) Działanie niemożliwe,

3c) Działanie niemożliwe,

3d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

3e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$,

3f) Działanie niemożliwe,

3g) Działanie niemożliwe,

3h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,

3i) Działanie niemożliwe.

Zadanie 3.

a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 40 & 40 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 16 & 8 \\ -7 & 63 & 44 \\ 2 & -8 & -4 \end{bmatrix}$,

b) $A \cdot B = [3]$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 15 & -10 \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & 12 & -8 \end{bmatrix}$,

c) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 28 \\ 3 & -2 & 2 \\ 15 & 10 & 26 \end{bmatrix}$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 14 & 20 & 32 \\ 5 & 14 & 12 \end{bmatrix}$.

Zadanie 9.

a) -13,
b) 27,
c) $8a$,
d) 0,
e) 1,
f) 0,
g) 65,
h) 9,
i) 0,
j) 0,
k) 0.

Zadanie 10.

a) 9,
b) 17,
c) $8x - 48$,
d) 4,
e) -162,
f) 0,

g) -184,

h) 0,

i) $n!$,

j) $\begin{cases} 1 & \text{dla } 4n \text{ lub } 4n+1, \\ -1 & \text{dla } 4n+2 \text{ lub } 4n+3, \end{cases}$

$n \in C_+$.

Zadanie 11.

a) Tak,

b) Nie,

c) Tak.

Zadanie 12.

a) 2,

b) 3,

c) 3,

d) 4,

e) 3,

f) 1,

g) 2,

h) 4,

i) 0,

j) 3,

k) 2.

Zadanie 13.

a) $x = -4$,

b) $x \in R$,

c) $x \neq -1{,}4$.

Zadanie 14.

a) $X = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$,

b) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 3 & \frac{8}{3} \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$,

d) $X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10 & 14 & 13 \\ 7 & 8 & 10 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

e) $X = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ -5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$.

V. UKŁADY RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH

Przykład 1.

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ x - 2y + 3z = 13. \end{cases}$$

<u>Rozwiązanie.</u> Powyższy układ jest układem 3 równań z 3 niewiadomymi, który można zapisać w postaci macierzowej $AX = B$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Należy sprawdzić, czy podany układ jest układem Cramera, czyli czy $detA \neq 0$.

$$detA = det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -9 - 1 - 4 + 3 - 2 - 6 = -19.$$

Zatem $detA \neq 0$, więc jest to układ Cramera i układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, które można wyznaczyć za pomocą wzorów Cramera. Obliczamy kolejno wyznaczniki macierzy, w których poszczególne kolumny zastępujemy wektorem wyrazów wolnych

$$detA_x = det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 13 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 4 & -3 \\ 13 & -2 \end{matrix} = -36 - 13 - 8 + 39 - 8 - 12 = -38,$$

$$detA_y = det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 13 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 13 \end{matrix} = 12 - 4 + 26 - 4 + 13 - 24 = 19,$$

$$detA_z = det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -39 + 4 - 16 + 12 + 8 - 26 = -57.$$

Stąd

$$x = \frac{detA_x}{det\,A} = \frac{-38}{-19} = 2, \quad y = \frac{detA_y}{det\,A} = \frac{19}{-19} = -1, \quad z = \frac{detA_z}{det\,A} = \frac{-57}{-19} = 3.$$

<u>Odpowiedź.</u> Rozwiązaniem powyższego układu równań jest trójka liczb $x = 2, y = -1, z = 3$.

Przykład 2.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 1 \\ x - y - z = 3 \\ x + 3y - z = 3. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Powyższy układ jest układem 3 równań z 3 niewiadomymi, który można zapisać w postaci macierzowej $AX = B$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Należy sprawdzić, czy podany układ jest układem Cramera, czyli czy $detA \neq 0$.

$$detA = det \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 2 - 5 + 9 + 3 + 6 + 5 = 20.$$

Zatem $detA \neq 0$, więc jest to układ Cramera i układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, które można wyznaczyć za pomocą macierzy odwrotnej. Rozwiązanie układu Cramera jest postaci:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Skoro $detA \neq 0$, więc istnieje macierz odwrotna do macierzy A, którą wyznaczamy dowolną metodą:

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 14 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} & -\frac{7}{20} \end{bmatrix}.$$

Podstawiając wyznaczoną macierz do wzoru $X = A^{-1} \cdot B$ otrzymujemy

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} & -\frac{7}{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź. Rozwiązaniem powyższego układu równań jest $x = 2, y = 0, z = -1$.

Przykład 3.

Rozwiąż układ równań, podaj ile rozwiązań bazowych może posiadać układ i wyznacz je wszystkie oraz podaj jedno rozwiązanie szczególne

$$\begin{cases} 5x + 5y + z = 1 \\ x - y - 2z = 3 \\ 3x + 7y + 5z = -5. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Powyższy układ jest układem 3 równań z 3 niewiadomymi, który można zapisać w postaci macierzowej $AX = B$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Należy sprawdzić, czy podany układ jest układem Cramera, czyli czy $detA \neq 0$.

Stąd

$$detA = det\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} = 0.$$

Ponieważ $detA = 0$, więc powyższy układ nie jest układem Cramera, zatem korzystając z twierdzenia Kroneckera-Capellego i sprawdzamy, czy układ ma rozwiązanie. W tym celu obliczamy rząd macierzy układu oraz rząd macierzy uzupełnionej układu równań. Skoro $detA = 0$, więc $rzA < 3$, wybieramy więc podmacierz stopnia drugiego i otrzymujemy

$detA' = det\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -10 \neq 0$, zatem $rzA = 2$.

Obliczamy rząd macierzy uzupełnionej (czyli macierzy powstałej poprzez dołączenie do macierzy układu kolumny wyrazów wolnych) – zerujemy elementy kolumny pierwszej i trzeciej, przez elementy z wiersza drugiego

$$rzU = rz\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & -5 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 0 & 10 & 11 & -14 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & 11 & -14 \end{bmatrix} = 1 + rz\begin{bmatrix} 10 & 11 & -14 \\ 10 & 11 & -14 \end{bmatrix}$$
$$= 2.$$

Otrzymaliśmy $rzA = rzU = 2 < 3$ (ilość niewiadomych), zatem na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego powyższy układ ma rozwiązanie i jest układem nieoznaczonym.

Skoro $rzU = rzA = 2$, więc w powyższym układzie równań mamy 2 zmienne bazowe i $(3-2) = 1$ zmienną swobodną.

Wybrana wcześniej podmacierz A', jest nieosobliwa, zatem przy jej pomocy sprowadzamy nasz układ do postaci

$$\begin{cases} 5x + 5y = 1 - z \\ x - y = 3 + 2z, \end{cases}$$

gdzie zmienna z jest zmienną swobodną. Wprowadzając oznaczenie $z = t$, gdzie $t \in R$, powyższy układ przyjmuje postać

$$\begin{cases} 5x + 5y = 1 - t \\ x - y = 3 + 2t. \end{cases}$$

Powyższy układ jest układem równań liniowych Cramera, można go więc rozwiązać za pomocą macierzy odwrotnej lub korzystając ze wzorów Cramera. Korzystając ze wzorów Cramera otrzymujemy następujące rozwiązanie

$$x = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 - t & 5 \\ 3 + 2t & -1 \end{bmatrix} = \frac{8}{5} + \frac{9}{10}t,$$

$$y = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 1 - t \\ 1 & 3 + 2t \end{bmatrix} = -\frac{7}{5} - \frac{11}{10}t,$$

$z = t$, gdzie $t \in R$.

Powyższe rozwiązanie jest jednym z rozwiązań ogólnych. Rozwiązaniem bazowym jest rozwiązanie, w którym zmienne swobodne przyjmują wartość zero. Maksymalną liczbę rozwiązań można wyznaczyć w następujący sposób:

$$\binom{Ilość\ zmiennych\ z\ wyłączeniem\ stałych}{Ilość\ zmiennych\ niebazowych} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3.$$

Rozpatrywany układ równań może posiadać co najwyżej 3 rozwiązania bazowe. Z powyższego rozwiązania ogólnego otrzymujemy następujące rozwiązanie bazowe: $x = \frac{8}{5}, y = -\frac{7}{5}, z = 0$.

Przekształcając rozwiązanie ogólne – zamieniając rolami zmienne, otrzymamy pozostałe dwa rozwiązania bazowe. Niech x będzie zmienną niebazową, czyli $x = a, a \in R$

$$x = \frac{8}{5} + \frac{9}{10}t = a,$$

$$\frac{9}{10}t = a - \frac{8}{5},$$

$$t=\frac{10}{9}a-\frac{16}{9}.$$

Skoro $z=t$, więc $z=\frac{10}{9}a-\frac{16}{9}$, natomiast

$$y=-\frac{7}{5}-\frac{11}{10}\left(\frac{10}{9}a-\frac{16}{9}\right)=\frac{5}{9}-\frac{11}{9}a.$$

Otrzymaliśmy zatem inne rozwiązanie ogólne

$$x=a,\qquad y=\frac{5}{9}-\frac{11}{9}a,\qquad z=\frac{10}{9}a-\frac{16}{9},\qquad a\in R.$$

Postępując w analogiczny sposób, czyli zmienną y traktując jako zmienną niebazową otrzymamy trzecią postać rozwiązania ogólnego.

Na tej podstawie możemy wyznaczyć pozostałe dwa rozwiązania bazowe:

$x=0, y=\frac{5}{9}, z=-\frac{16}{9}$ oraz $x=\frac{5}{11}, y=0, z=-\frac{14}{11}$.

Rozwiązanie szczególne, jest wówczas, gdy zmienne swobodne przyjmują dowolną wartość ze zbioru liczb rzeczywistych, np. gdy $t=2$, to $x=\frac{17}{5}, y=-\frac{18}{5}$.

<u>Odpowiedź.</u> Rozwiązaniem powyższego układu jest $x=\frac{8}{5}+\frac{9}{10}t$, $y=-\frac{7}{5}-\frac{11}{10}t$, $z=t$, gdzie $t\in R$. Układ może posiadać co najwyżej trzy rozwiązania bazowe, które są postaci

$\left[\frac{8}{5},-\frac{7}{5},0\right]^T, \left[0,\frac{5}{9},-\frac{16}{9}\right]^T, \left[\frac{5}{11},0,-\frac{14}{11}\right]^T$. Rozwiązanie szczególe jest postaci

$\left[\frac{17}{5},-\frac{18}{5},2\right]^T$.

Przykład 4.

Stosując metodę Gaussa-Jordana rozwiąż układ równań liniowych

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ -x+2z=-1. \end{cases}$$

<u>Rozwiązanie.</u> Macierz uzupełniona powyższego układu równań jest postaci

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Przekształcamy ją tak, aby w lewym górnym rogu otrzymać macierz jednostkową – należy pamiętać, że można przestawiać kolumny z podmacierzy A, ale trzeba wiedzieć, które kolumny zostały przestawione, ponieważ odpowiadają one współczynnikom przy konkretnych zmiennych.

Do elementów wiersza drugiego dodajemy elementy wiersza pierwszego pomnożone prze -2, natomiast do elementów wiersza trzeciego dodajemy elementy wiersza pierwszego i otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dodajemy do elementów wiersza trzeciego, elementy wiersza drugiego, mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elementy wiersza drugiego mnożymy przez -1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dodając elementy wiersza drugiego pomnożone przez -1 do odpowiednich elementów wiersza pierwszego otrzymujemy szukaną macierz postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Powyższa macierz jest postacią kanoniczną macierzy uzupełnionej U , na podstawie której odczytujemy rozwiązanie zadanego układu równań

$$x = 1 + 2t,$$

$$y = -3t,$$

$$z = t, t \in R.$$

Odpowiedź. Rozwiązaniem układu równań jest $x = 1 + 2t, y = -3t, z = t, t \in R$.

Uwaga. Jeżeli dokonując przekształceń na macierzy U otrzymamy chociaż jeden wiersz postaci $[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad a]$, gdzie $a \neq 0$, wówczas rozpatrywany układ równań liniowych jest układem sprzecznym.

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 3, \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3a + 2b = 2 \\ 4a - 5b = 2, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 2y + 3z = -1, \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3z = -2 \\ -x + 3y + 4z = 1, \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3z = 1 \\ -2x + y - 3z = 1, \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x - 2y + z = -3 \\ -2x + y - 3z = 9 \\ x - 3y + 2z = -4, \end{cases}$

g) $\begin{cases} a + b - 2c + 2d = -1 \\ 2a + 4b - 5c + 2d = 0 \\ -a + 5b - 3c - 3d = 2 \\ 2b - 3d = 3, \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + 2c + d = 0 \\ a + 3b + c + 3d = 6 \\ a + 2b + 2c + d = 4, \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2a + b + c + d = -1 \\ 3a + 2b + 2c + d = -2 \\ a + 3b + c + 3d = 6 \\ a + 2b + 2c + d = 4, \end{cases}$

j) $\begin{cases} b + 2c + d = 1 \\ 4a + 2b + d = -7 \\ -2a + c + 2d = 2 \\ 3a + 2b + 2c = -3, \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + 4y + 5z = 2 \\ 2x - 2y - 2z = 3, \end{cases}$

l) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ -x + 4y + 5z = -5 \\ 2x - 2y - 2z = 4, \end{cases}$

m) $\begin{cases} -4x + y + 3z = 4 \\ -x + 3y + 2z = 1 \\ 7x + y - 4z = 5, \end{cases}$

n) $\begin{cases} 3x - 3y + 4{,}5z = 3 \\ -2x + 2y - 3z = -2 \\ -5x + 5y - 7{,}5z = -5, \end{cases}$

o) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ -2x + 4y - 6z = -12 \\ 3x - 6y + 9z = -18, \end{cases}$

p) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -2x - 6y + 4z = 0 \\ -x - 3y - 6z = 0, \end{cases}$

q) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -2x - 4y + 4z = 0 \\ -x - 3y - 6z = 0, \end{cases}$

r) $\begin{cases} x - 2z = -1 \\ 5y = 10 \\ -3x + 6z = 3, \end{cases}$

s) $\begin{cases} a + 2c + 3d = 0 \\ 2a + 5b - 3c - d = -1 \\ 3a + 3b - d = 2 \\ 2b - c + 3d = -3, \end{cases}$

t) $\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d = 1 \\ 3a - b + 2d = 1 \\ 4a + b + 3c + 6d = 2 \\ a + b + c + d = 0, \end{cases}$

u) $\begin{cases} 2a - 3b - 4c + 5d = -13 \\ 4a - 6b + c - d = 14 \\ 6a - 9b + c + 2d = 13 \\ -4a + 6b + 4c + 8d = -18, \end{cases}$

v) $\begin{cases} 1a + 2c - 3d = -2 \\ 3a + b + 8c - 4d = -1 \\ -2a - b - 6c + d = 2 \\ 2a + 2b + 2c + 2d = 4, \end{cases}$

w) $\begin{cases} 1a + 2c - 3d = 1 \\ 3a + b + 8c - 10d = 6 \\ -2a - b - 6c + 7d = -5 \\ 2a + 2b + 8c - 8d = 4, \end{cases}$

y) $\begin{cases} 2a + 6b - 2c - 4d = -6 \\ -3a - 9b + 3c + 6d = 9 \\ -a - 3b + 3c + 2d = 5 \\ -2a - 6b + 2c + 4d = 6. \end{cases}$

x) $\begin{cases} 1a + 2c - 3d = 1 \\ 3a + b + 8c - 10d = 6 \\ -2a - b - 6c + 7d = -5 \\ 2a + 2b + 8c - 8d = 8, \end{cases}$

Zadanie 2.

Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} 2x + 5y + z = 2 \\ x + 3y + 3z = 1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a - b - 3c + d = 2 \\ -2a + b + 3c - 4d = 8, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2a - b - 3c + 4d = 1 \\ -2a + b + 3c - 4d = 3, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2a + 2c + 5d = 3 \\ 4a + b + 3c + 2d = 5 \\ a - 2b + 2c + 6d = 0, \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3a - b + 2c = -1 \\ a + 2b - c = 6 \\ 3a + b + 4c = 1 \\ 2a - b + 5c = -5, \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2a - b + 3c = 0 \\ 2a + 4b - 5c = -1 \\ -3a + c = 2 \\ 4a - 2b + 3c = -3, \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2x + 4y - 5z = -1 \\ 4x + 3y - 2z = -1 \\ 4x - 2y + 3z = -3, \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4a - 2b + 6c = 0 \\ 2a + 4b - 5c = -1 \\ 4a + 3b - 2c = -1 \\ - 5b + 8c = 1, \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3a - 3b - 6c + 1{,}5d = 3 \\ 2a - 2b - 4c + d = 2 \\ -2a + 2b + 4c - d = -2, \end{cases}$

j) $\begin{cases} a + b + 8c + d = 0 \\ -a + 2b + 3c - d = 0 \\ 2a + b - c + 2d = 0, \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + n = 0. \end{cases}$

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie rozwiązania bazowe i jedno inne rozwiązanie szczególne układów:

a) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ -6x + 2y = -12, \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ c + d = 0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} a - 2c = -1 \\ b = 10 \\ -3a + 6c = 3, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2a - b - 3c + d = 2 \\ -2a + b + 3c - 3d = 6, \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ -x+4y+5z=-5 \\ 2x-2y-2z=4, \end{cases}$

f) $\begin{cases} a+2b+3c+4d=1 \\ 3a-b+2d=1 \\ 4a+b+3c+6d=2 \\ a+b+c+d=0, \end{cases}$

g) $\begin{cases} 1a+2c-3d=1 \\ 3a+b+8c-10d=6 \\ -2a-b-6c+7d=-5 \\ 2a+2b+8c-8d=8. \end{cases}$

Zadanie 4.

Ile może posiadać rozwiązań bazowych (i wyznacz wszystkie jakie istnieją) układ równań, którego rozwiązanie ogólne jest postaci:

a) $\begin{cases} a=3-2t_1+t_2 \\ b=2+2t_1-2t_2 \\ c=t_1 \in R \\ d=t_2 \in R, \end{cases}$

b) $\begin{cases} a=3+3t_1 \\ b=-2t_1 \\ c=4 \\ d=t_1 \in R, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2+a \\ y=-2a \\ z=a \in R, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=2a+b \\ y=-b \\ z=a \in R \\ n=b \in R, \end{cases}$

e) $\begin{cases} a=3+t \\ b=2-2t \\ c=1+t \\ d=t \in R, \end{cases}$

f) $\begin{cases} x=2+a \\ y=3 \\ z=a \in R. \end{cases}$

Zadanie 5.

Wyznacz wszystkie rozwiązania bazowe oraz dwa różne rozwiązania ogólne układu równań, mając daną postać bazową macierzy uzupełnionej:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 6.

Napisz przykład macierzy uzupełnionej układu 4 równań 3 niewiadomymi, wiedząc, że rząd macierzy współczynników:

a) $rzA = 2$,

b) $rzA = 3$.

Co możesz powiedzieć o rozwiązaniu tego układu?

Zadanie 7.

Napisz przykład macierzy układu równań, tak aby miała wymiar 4×6 oraz:

a) $rzA = 4$,

b) $rzA = 3$.

Co możesz powiedzieć o tym układzie równań?

Zadanie 8.

Napisz przykład macierzy uzupełnionej układu 5 równań z 4 niewiadomymi, tak żeby $rzA = 3$ oraz układ ten był:

a) sprzeczny,

b) niesprzeczny.

Zadanie 9.

Przeprowadź dyskusję dotyczącą rozwiązań układu 6 równań z 6 niewiadomymi, jeżeli rząd macierzy:

a) układu równań jest równy 6,

b) uzupełnionej układu równań jest równy 6,

c) układu równań jest równy 3,

d) uzupełnionej układu równań jest równy 4.

Zadanie 10.

Rozwiąż układy równań $AX = B$, gdy:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \end{bmatrix}$,

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix},$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Zadanie 11.

Rozwiąż graficznie układy nierówności:

a) $\begin{cases} x \geq -2 \\ 2x - y \leq -3 \\ y \geq 3, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x + 4y \geq 6 \\ 2y \leq 4, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \geq -1 \\ x + y \leq 3 \\ -x + 3y \geq -3 \\ -3x + y \leq 3, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y \geq -2 \\ x + 2y \leq -1 \\ 3x + 2y \leq 2, \end{cases}$

e) $\begin{cases} -2x + y \geq -1 \\ x - y \geq 0, \end{cases}$

f) $\begin{cases} -4x + 2y \leq 8 \\ -y \geq -1 \\ -2x - y \geq 0 \\ -x \leq 2. \end{cases}$

Zadanie 12.

Rozwiąż układy nierówności:

a) $\begin{cases} x + y + z \leq 2 \\ x + 2y + z \leq 4 \\ x + y + 3z \leq 5, \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b + c + 2d \leq 2 \\ a + 2b + c + d \leq 4 \\ 2a + 2b + 2c + 4d \leq 5, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - 2z \leq 1 \\ 3x + y - 3z \geq 2 \\ 2x + 2y - 4z \geq 4, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z \leq 3 \\ 2x + 3y \leq 1 \\ -x - 2y + z \leq -2 \\ x + 3z \leq 4 \\ 2x + y + 4z \leq 7. \end{cases}$

ODPOWIEDZI

Zadanie 1.

a) $x = -4, y = 3$,

b) $a = -2, b = -2$,

c) $x = 1\frac{2}{3}, y = 0, z = -\frac{1}{3}$

d) $x = -1, y = 0, z = 0$,

e) $x = 2, y = 2, z = -1$,

f) $x = 1, y = -1, z = -4$,

g) $a = 1, b = 0, c = 0, d = -1$,

h) $a = -2, b = 0, c = 2, d = 2$,

i) $a = -3, b = 1, c = 3, d = 3$,

j) $a = -5, b = 8, c = -2, d = -3$,

k) układ sprzeczny,

l) $x = 1 - \frac{1}{3}t,\ y = -1 - \frac{4}{3}t,\ z = t,\ t \in R$,

m) układ sprzeczny,

n) $x = t_1,\ y = -1 + t_1 + 1{,}5t_2,\ z = t_2,\ t_1, t_2 \in R$,

o) układ sprzeczny,

p) $x = 3t,\ y = t,\ z = 0,\ t \in R$,

q) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$,

r) $x = -1 + 2t,\ y = 2,\ z = t,\ t \in R$,

s) $a = -2 + \frac{26}{9}t,\ b = -2 - \frac{29}{9}t,\ c = -1 - \frac{31}{9}t,\ t \in R$,

t) $a = t,\ b = -1 - 7t,\ c = 1 + 11t,\ d = -5t,\ t \in R$

u) $a = t,\ b = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}t,\ c = 2,\ d = -2,\ t \in R$,

v) układ sprzeczny,

w) układ sprzeczny,

x) $a = 1 - 2t_1 + 3t_2,\ b = 3 - 2t_1 + t_2,\ c = t_1,\ d = t_2,\ t_1, t_2 \in R$,

y) $a = t_1,\ b = t_2,\ c = 1,\ d = 1 + \frac{1}{2}t_1 + 1\frac{1}{2}t_2,\ t_1, t_2 \in R$

Zadanie 2.

a) $x = 1 + 12t_1,\ y = -5t_1,\ z = t_1,\ t_1 \in R$,

b) $a = t_1,\ b = -12 + 2t_1 - 3t_2,\ c = t_2,\ d = 10,\ t_1, t_2 \in R$,

c) układ sprzeczny,

d) $a = 1 + 10t,\ b = \frac{5}{2} + \frac{9}{2}t,\ c = \frac{7}{2} - \frac{25}{2}t,\ d = t,\ t \in R$,

e) $a = 1,\ b = 2,\ c = -1$,

f) układ sprzeczny,

g) $x = 0{,}8;\ y = -1{,}4;\ z = -1$,

h) $a = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}t,\ b = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}t,\ c = t,\quad t \in R$,

i) $a = 1 + t_1 + 2t_2 - \frac{1}{2}t_3,\ b = t_1,\ c = t_2,\ d = t_3,\ t_1, t_2, t_3 \in R$

j) $a = t,\ b = 0,\ c = 0, d = -t,\ t \in R$,

k) $x = -t,\ y = t,\ z = -t,\ n = t,\ t \in R$.

Zadanie 3.

a) Rozwiązania bazowe: $[2, 0]^T$, $[0, -6]^T$,

Rozwiązanie szczególne: $[3, 3]^T$,

b) Rozwiązania bazowe: $[0, 0, 0, 0]^T$,

Rozwiązanie szczególne: $[-3, 3, -3, 3]^T$,

c) Rozwiązania bazowe: $[-1, 2, 0]^T$, $[0, 2, \frac{1}{2}]^T$

Rozwiązanie szczególne: $[5, 2, 3]^T$,

d) Rozwiązania bazowe: $[0, -6, 0, -4]^T$, $[0, 0, -2, -4]^T$, $[3, 0, 0, -4]^T$

Rozwiązanie szczególne: $[1, -7, 1, -4]^T$,

e) Rozwiązania bazowe: $[1, -1, 0]^T$, $[\frac{5}{4}, 0, -\frac{3}{4}]^T$, $[0, -5, 3]^T$

Rozwiązanie szczególne: $[-1, -9, 6]^T$,

f) Rozwiązania bazowe: $[0, -1, 1{,}0]^T$, $[-\frac{1}{7}, 0, -\frac{4}{7}, \frac{5}{7}]^T$, $[-\frac{1}{11}, -\frac{4}{11}, 0, -\frac{5}{11}]^T$

Rozwiązanie szczególne: $[2, -15, 23, -10]^T$,

g) Rozwiązania bazowe: $[1, 3, 0{,}0]^T$, $[0, \frac{10}{3}, 0,\ \frac{1}{3}]^T$, $[0, 2, \frac{1}{2}, 0]^T$,$[-8, 0, 0, -3]^T$,

$[-2, 0, \frac{3}{2}, 0]^T$, $[0, 0, 2, 1]^T$

Rozwiązanie szczególne: $[-9, -3,\ 2, -2]^T$.

Zadanie 4.

a) Co najwyżej 6: $[3, 2, 0,0]^T$, $[0, 0, 5, 7]^T$, $[0, 8, 0, -3]^T$,$[4, 0, 0,1]^T$, $\left[0, 5, \frac{3}{2}, 0\right]^T$, $[5, 0, -1, 0]^T$,

b) Co najwyżej 3: $[0, 2, 4, -1]^T$, $[3, 0, 4, 0]^T$,

c) Co najwyżej 3: $[2, 0, 0,]^T$, $[0, 4, -2]^T$,

d) Co najwyżej 6: $[0, 0, 0,0]^T$,

e) Co najwyżej 4: $[3, 2, 1,0]^T$, $[2, 4, 0, -1]^T$, $[4, 0, 2, 1]^T$,$[0, 8, -2, -3]^T$,

f) Co najwyżej 2: $[2, 3, 0]^T$, $[0, 3, -2]^T$.

Zadanie 5.

a) I: $\begin{cases} a = 1 - t \\ b = 2 \\ c = -4t \\ d = t \in R \end{cases}$, II: $\begin{cases} a = t \in R \\ b = 2 \\ c = -4 + 4t \\ d = 1 - t \end{cases}$,

rozwiązania bazowe: $[1, 2, 0,0]^T$, $[0, 2, -4, 1]^T$,

b) I: $\begin{cases} a = 4 - 2t_2 \\ b = 2 - t_1 + 3t_2 \\ c = t_1 \in R \\ d = t_2 \in R \end{cases}$, II: $\begin{cases} a = t_1 \in R \\ b = 8 - \frac{3}{2}t_1 - t_2 \\ c = t_2 \in R \\ d = 2 - \frac{1}{2}t_1 \end{cases}$,

rozwiązania bazowe:

$[1, 2, 0,0]^T$, $[0, 0, -8, 2]^T$, $[0, 8, 0,2]^T$, $[4, 0, 2, 0]^T$, $[\frac{16}{3}, 0,0, -\frac{2}{3}]^T$,

c) I: $\begin{cases} x = 4 - a - 2b \\ y = 0 \\ z = a \in R \\ n = b \in R \end{cases}$, II: $\begin{cases} x = a \in R \\ y = 0 \\ x = b \in R \\ n = 2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{cases}$,

rozwiązania bazowe: $[0, 0, 0, 2]^T$, $[0, 0, 4, 0]^T$, $[4,0, 0, 0]^T$,

d) I: $\begin{cases} x = 4 - 2b \\ y = -a \\ z = a \in R \\ n = b \in R \end{cases}$, II: $\begin{cases} x = a \in R \\ y = -b \\ c = b \in R \\ d = 2 - \frac{1}{2}a \end{cases}$,

rozwiązania bazowe: $[4, 0, 0, 0]^T$, $[0, 0, 0, 2]^T$.

Zadanie 10.

a) $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$,

b) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

c) $a = 2,\ b = 3,\ c = 1$,

d) $X = \begin{bmatrix} -1 + 2t \\ 2 \\ t \end{bmatrix}, t \in R$,

e) $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t \\ t \end{bmatrix}, t \in R$,

f) $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 12.

a) $x = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3,\ y = 2 + t_1 - t_2,\ z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_3, \quad t_1, t_2, t_3 \geq 0$,

b) $a = -m - 3n - 2t_1 + t_2,\ b = n + 2 + t_1 - t_2,\ c = m,\ d = n,$

$m, n \in R,\ t_1, t_2 \geq 0\ i - 2t_1 + t_2 = 1,$

c) układ sprzeczny,

d) $x = 4 - 3a - t_2,\ y = -1 + 2a - t_1 + t_2,\ z = a \in R, \quad t_1, t_2 \geq 0.$

Treści przedstawionych zadań, jaki i niektóre przykłady zostały zaczerpnięte z powszechnie znanych i dostępnych podręczników i zbiorów zadań oraz własnych notatek autorki z czasów nauki. Część z przykładów została wymyślona przez autorkę. Ponieważ trudno do przykładu przypisać oryginalne źródło, dlatego też nie jest ono podawane przy zadaniach i przykładach. Wykaz najpopularniejszych (według autorki) publikacji znajduje się poniżej.

BIBLIOGRAFIA

Krysicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach*, część I, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001,

Krysicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach*, część II, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002,

Matematyka dla ekonomistów, p. red. M. Matłoki, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2003,

Matłoka M., *Matematyka dla ekonomistów*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2003,

Stankiewicz W., *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych. Część A*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009,

Stankiewicz W., *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych. Część B*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009