

B

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA  
im. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH  
w Bydgoszczy



ZESZYTY NAUKOWE

Nr 11

MECHANIKA - KONSTRUKCJE

(7)

BYDGOSZCZ 1974



W Y Ż S Z A   S Z K O Ł A   I N Ż Y N I E R S K A  
im. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH  
w Bydgoszczy

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 11

MECHANIKA - KONSTRUKCJE

(7)

BYDGOSZCZ 1974

Wydano za zgodą Rektora  
Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Bydgoszczy

Redaktor naukowy  
dr inż. Edward Walicki

UMK zam. 174, nakł. 250, ark. 7,1 N-4 4 02 74, cena zł 9,—

## Spis treści

	str.
1. Z.Kasprowicz, W.Weiner: Cechy wytrzymałościowe przy zginaniu laminatu epoksydowo-szklanego, poddanego działaniu wybranych czynników . . . . .	3
2. J.Steinborn, W.Weiner: Wybrane współczynniki odkształceń poprzecznych laminatu epoksydowo-szklanego . . . . .	21
3. Z.Dąbek: Ustalenie optymalnych tolerancji wykonawczych w oparciu o kryterium kosztu produkcji . . . . .	35
4. E.Walicki: Przepływ cieczy lepkiej kanałem o przekroju ograniczonym łukami elips i hiperbol . . . . .	51
5. B.Siołkowski: Hydrodynamiczne oddziaływanie mieszanej cieczy na mieszadło . . . . .	59
6. B.Siołkowski: Modelowanie dynamiczne wału z mieszadłem . . . . .	69
7. B.Siołkowski: Słateczność ruchu mieszadła cieczy . . . . .	81

!

Zofia Kasprowicz  
Wojciech Weiner

CECHY WYTRZYMAŁOŚCIOWE  
PRZY ZGINANIU LAMINATU EPOKSYDOWO-SZKLANEGO  
PODDANEGO DZIAŁANIU WYBRANYCH CZYNNIKÓW

Badano zmianę modułu sprężystości i wytrzymałości doraźnej przy zginaniu tworzywa poddanego działaniu wybranych czynników w czasie 12-tu miesięcy. Okres ten uznano za wystarczający dla celów porównawczych.

Wstęp

Zastosowanie tworzyw sztucznych zbrojonych do budowy zbiorników, pojemników, osłon, rur, itp. jest atrakcyjne szczególnie ze względu na łatwość formowania tych tworzyw, ich lekkość i antykorozyjność.

W literaturze, dotyczącej tych tworzyw [1,2,4], mało jest jednak danych na temat degradacji cech wytrzymałościowych w czasie i pod działaniem różnych czynników, takich, jak paliwa i płynne produkty chemiczne.

Znalezienie charakteru funkcji  $E_g = f / T /$  i  $R_g = f / T /$  dla wybranych cieczy było celem omówionych dalej badań.

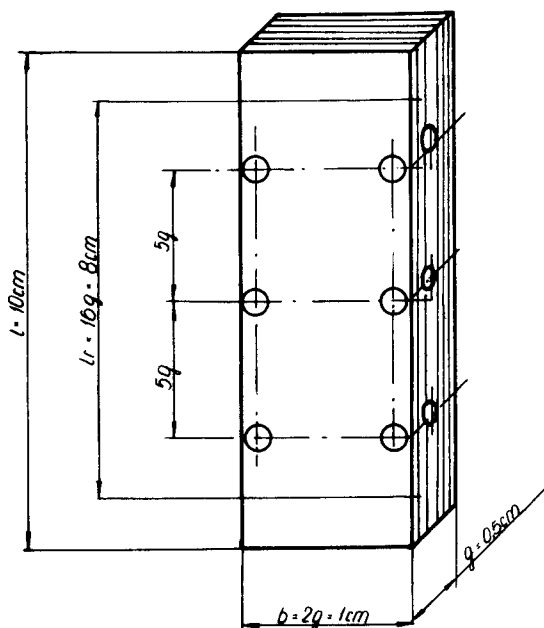
## 1. Tworzywo badane

Tworzywem badanym był wykonany metodą kontaktową izotropowy w płaszczyźnie laminat epoksydowo-szkłany, sporządzony przez przesycenie siedmiu warstw maty M 300 żywicą epoksydową Epidian 53 z dodatkiem 10,5 cz. wag. utwardzacza trójetylenoczweroaminy, o nazwie handlowej TECZA. Uzyskano płyty o grubości nominalnej 5 mm.

Wyznaczona doświadczalnie zawartość szkła wynosiła 32 %.

## 2. Kształtki do badań

Z wykonanych płyt, po ich sezonowaniu i wygrzewaniu [6], wycinano próbki prostokątne o wymiarach 5 x 10 x 100 mm. Próbki mierzone z dokładnością do 0,01 mm. /rys.1/.



Rys.1. Schemat pomiaru wielkości geometrycznych kształtek pomiarowych.



### 3. Metodyka badań

#### 3.1. Moduł sprężystości przy zginaniu

Do prób przyjęto licznosc serii  $n = 20$  sztuk z tym, że wyboru dokonano według metody losowej, przy użyciu tablic Kadyrowa.

Cechy wytrzymałościowe przy zginaniu mierzono zgodnie z obowiązującą normą PN-69/C-89027, przyjmując rozstaw podpór  $l_r = 16$  g i szerokość próbki  $b = 2$  g /gdzie:  $g$  - grubość nominalna kształtki pomiarowej/.

Przyjęto okresy 1,3,6 i 12 miesięcy poddawania kształtek działaniu czynnika w temperaturze pokojowej / $20 \div 22^\circ\text{C}$ /. Po każdym okresie próbki były myte, suszone i klimatyzowane w komorze MYTRON w czasie 48 godz. /temp.  $21^\circ\text{C} \pm 1$ , wilgotność względna  $65 \pm 5$  %/.

Moduł sprężystości przy zginaniu  $E_g$  wyliczono z wzoru:

$$E_g = \frac{P \cdot l_r^3}{4b \cdot h^3 \cdot f} \quad \text{kg/cm}^2, \quad (1)$$

gdzie:

- P - obciążenie kg,
- $l_r$  - rozstaw podpór cm  
/ $l_r = 16$  g = const = 8 cm/,
- b - szerokość próbki cm  
/ $b = 2$  g = const = 1 cm/,
- h - grubość próbki cm  
/ $h = g$  = const = 0,5 cm/,
- f - strzałka ugięcia cm.

Do obliczeń przyjęto postać:

$$E_g = \frac{\Delta P \cdot l_r^3}{4A_0 \cdot g^2 \cdot \Delta f_{\text{śr}}} \quad \text{kg/cm}^2, \quad (2)$$

gdzie:

$$\Delta P = P_{n+1} - P_n = \text{const.}$$

$A_0$  - przekrój początkowy średni

$$\Delta f = f_{n+1} - f_n$$

$$\Delta f_{\text{śr}} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta f_i}{n} \quad . \quad (3)$$

### 3.2. Wytrzymałość doraźna przy zginaniu

Zależność, określającą wytrzymałość doraźną w postaci:

$$R_g = \frac{3 P l_r}{2 b h^2} \quad \text{kg/cm}^2 \quad (4)$$

przekształcono, przyjmując do obliczeń jako:

$$R_g = \frac{3P l_r}{2A_0 g} \quad ,$$

gdzie oznaczenie jak dla (1) i (2).

### 4. Czynniki

Do badań przyjęto następujące czynniki:

- a/ olej napędowy,
- b/ 30% kwas siarkowy,
- c/ 30% kwas solny,
- d/ warunki naturalne.

Za warunki naturalne przyjęto temperaturę pokojową  $20^{\circ} \pm 22^{\circ}\text{C}$ /i wilgotność względną  $\sim 60\%$ .

Wybór tych czynników uzasadnia się możliwością szerokiego stosowania zbiorników i pojemników do paliw płynnych, oraz brakiem szczególnych danych, dotyczących wpływu 30 % kwasu solnego i 30 % kwasu siarkowego na badane tworzywo. Poza tym są to czynniki chemiczne szczególnie istotne w naszym regionie, ze względu na rozwinięte kopalnictwo soli i przemysł chemiczny.

## 5. Wyniki badań i ich opracowanie

### 5.1. Moduł sprężystości przy zginaniu

Wzięto średnią wyników pomiarów poszczególnych serii, uzyskując na wykresie  $E_g - T$  punkty, reprezentujące 20 pomiarów i pozwalające na podanie ogólnej postaci zmienności  $E_g = f / T$ .

Postępując w ten sposób uzyskano 3 wykresy /rys.2/:

$$E_g = f / T \text{ w warunkach naturalnych,}$$

$$E_g = f / T \text{ pod wpływem działania oleju napędowego,}$$

$$E_g = f / T \text{ pod wpływem 30 \% kwasu solnego.}$$

W 30 % kwasie siarkowym w ciągu 1 miesiąca laminat uległ całkowitemu zniszczeniu.

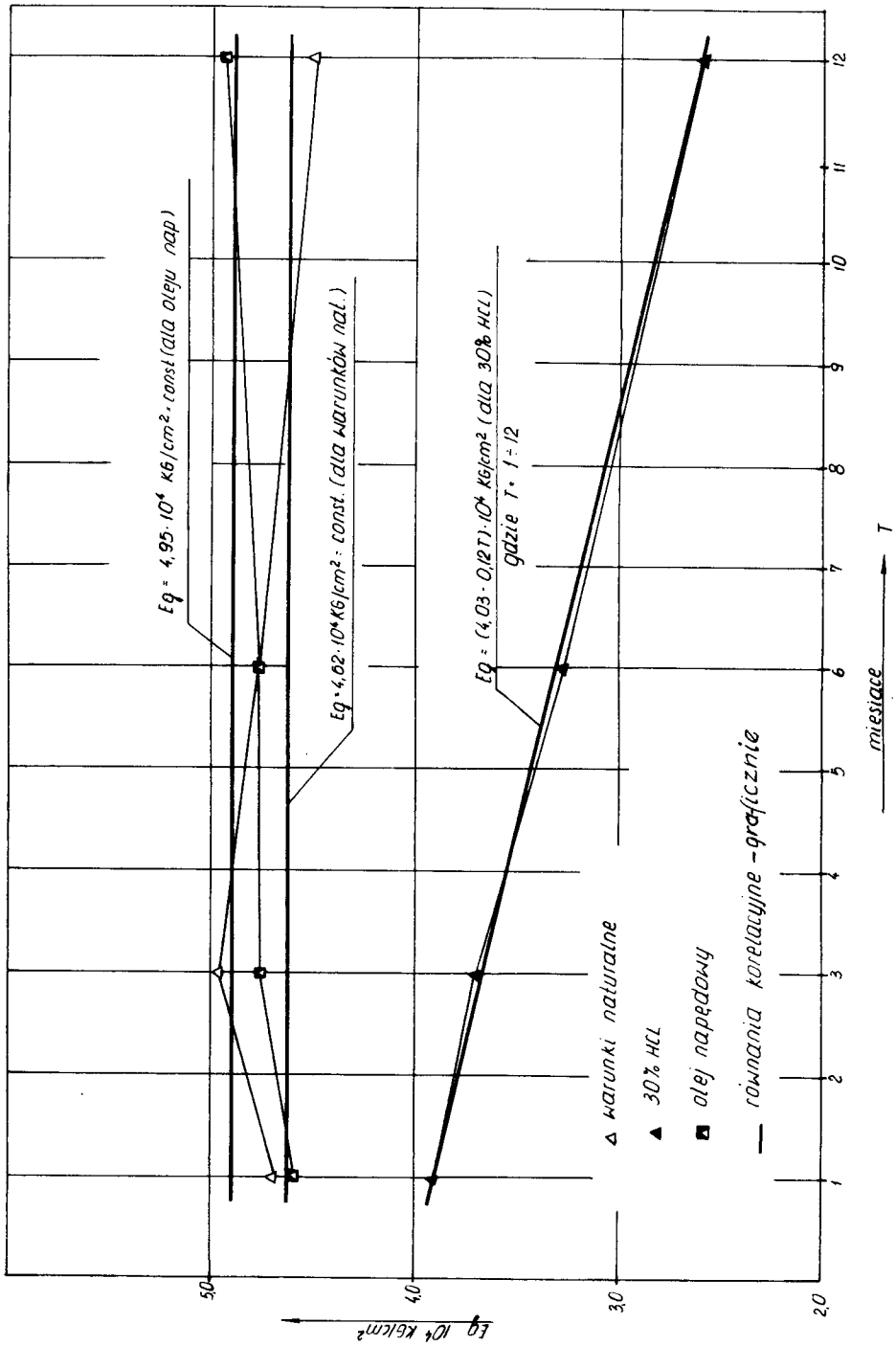
Podobne wyniki uzyskał C.Kopczyński [3], badając odporność laminatów epoksydowo-szklanych wykonanych na bazie żywicy Epidian 3 i tkaniny ST 21.

Wobec stwierdzenia normalności rozkładów zmiennej  $E_g$  we wszystkich seriach na podstawie ekscesu i asymetrii rozkładu [7] stosowano dalej zależność taką, jak dla rozkładu gaussowskiego.

Wyniki średnich wartości  $E_g$ , wraz z obliczonym średnim błędem odchylenia standardowego [5], obliczono według wzoru:

$$S_{E_g} = \sqrt{\frac{\sum /x_i - \bar{x}/^2}{n / n - 1/}} ; \quad (5)$$

zamieszczono je w tabelicy 1.



Rys.2. Zależność modułu sprężystości przy zginaniu laminatu epoksydowo-szklanego od czasu działania badanych czynników

Tablica 1

Wartości modułu sprężystości  $E_g$ 

	1 miesiąc		3 miesiące		6 miesięcy		12 miesięcy	
	$E_g \cdot 10^4$	$S \cdot 10^4$	$E_g \cdot 10^4$	$S \cdot 10^4$	$E_g \cdot 10^4$	$S \cdot 10^4$	$E_g \cdot 10^4$	$S \cdot 10^4$
Warunki naturalne	4,7	0,102	5,1	0,084	4,8	0,076	4,5	0,146
Działanie oleju napędowego	4,6	0,096	4,8	0,123	4,8	0,084	5,0	0,128
Działanie 30 % kwasu solnego	3,9	0,107	3,7	0,099	3,3	0,084	2,6	0,065

Gdzie:  $E_g$  - moduł sprężystości przy zginaniu, $S$  - średni błąd odchylenia standardowego.

Z analizy graficznej wynika wniosek, że posługując się metodą sekwencyjno - iteracyjną można opisać zależności o ogólnej postaci:

$$E_g = f / T / \quad (6)$$

równaniem prostej:

$$E_g = a + bT, \quad (7)$$

określając współczynniki  $a$  i  $b$  z zależności:

$$a = \frac{\sum T^2 \sum E_g - \sum T \cdot E_g \sum T}{n \sum T^2 - / \sum T /^2} \quad (8)$$

$$b = \frac{n \sum T \cdot E_g - \sum T \cdot \sum E_g}{n \sum T^2 - / \sum T /^2} \quad (9)$$

Dla znalezionych w ten sposób prostych regresji  $E_g$  - pod wpływem poszczególnych czynników i czasu - sprawdzono współzależność cech metodą weryfikacji współczynnika korelacji [7] :

$$r_{TE_g} = \frac{n \cdot S_{TE_g}}{\sqrt{nS_T^2 \cdot nS_{E_g}^2}} \quad (10)$$

hipotezą zerową:

$$H_0 : \rho = 0 ,$$

obliczoną dla współczynnika korelacji funkcją testową:

$$t^0 = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (11)$$

i porównywano z wartością  $t_{\alpha}$  dla współczynnika istotności  $\alpha = 0,05$  [5].

Wyniki powyższej analizy zawiera tablica 2.

Widać wyraźnie, że wobec  $t^0 > t_{\alpha}$  dla 30 % kwasu solnego korelacja istnieje, a więc można mówić o udowodnieniu istnienia degradacji

wartości modułu sprężystości  $E_g$  w czasie. Natomiast wpływ oleju napędowego, jak również warunków naturalnych, można uznać za nieistotny i przyjmując zależność  $E_g = f/T$ , w tym przypadku jako funkcję stałą /mimo odczytanego z rysunku 2 pewnego narastania wartości  $E_g$  dla oleju napędowego i jej spadku dla warunków naturalnych/.

## 5.2. Wytrzymałość doraźna przy zginaniu

Wartość  $R_g$  określono tak, jak w punkcie 3.2., wyniki zaś - zestawiono w tabelicy 3.

Analiza graficzna /rys.3/ pozwoliła przyjąć interpretację prostoliniową dla warunków naturalnych, oraz dla kąpieli olejowej w normalnym układzie współrzędnych.

Dla przypadku kąpieli solnej, interpretację prostoliniową uzyskano w układzie osi:

$$X = \lg x \qquad Y = \lg /c - y/.$$

Zależność  $R_g = f/T$  opisano analitycznie równaniem korelacyjnym, posługując się metodą taką, jak dla  $E_g$  /punkt 5.1/. Otrzymane z analizy wyniki zestawiono w tabelicy 4.

Wartość graniczna funkcji testowej wynosi:

$$t_{\alpha} = 4,303$$

dla poziomu istotności  $\alpha = 0,05$  i stopni swobody  $\nu = 2$ .

Dla mniejszych od  $t_{\alpha}$  wartości  $t_0 = 0,18$ , oraz  $t_0 = 0,94$  wnioskuje się, że korelacja nie istnieje. Wobec powyższego dla warunków naturalnych i oleju napędowego

$$R_g = f/T = \text{const.} \qquad (12)$$

Dla kwasu solnego  $t_0 = 13,25 > t_{\alpha}$ ; w tym przypadku istnieje korelacja między wytrzymałością doraźną przy zginaniu, a okresem działania kąpieli solnej.

Tablica 2

Wyniki analizy korelacyjnej dla uzyskania ostatecznej postaci równań  $E_g = f(T/$

	Analiza sekwencyj- no iteracyjna Równanie wyliczone	Analiza korelacyjna			Ostateczna forma równania
		$r_{E_g T}$	$t_{\alpha}$ dla $\alpha = 0,05$	$t^0$	
Warunki natu- ralne	$E_g =$ /4,95 - 0,0326 T/. 10 <sup>4</sup> kg/cm <sup>2</sup> gdzie: T - miesiące /1÷12/	-0,6232	4,303	1,124	$E_g = 4,95 \cdot 10^4$ kg/cm <sup>2</sup> = const
Olej na- pędowy	$E_g =$ /4,62 + 0,032T/. 10 <sup>4</sup> kg/cm <sup>2</sup> gdzie: T - miesiące /1÷12/	+0,9361	4,303	3,565	$E_g = 4,62 \cdot 10^4$ kg/cm <sup>2</sup> = const
Kwas solny	$E_g =$ /4,03 - 0,1195/. 10 <sup>4</sup> kg/cm <sup>2</sup> gdzie: T - miesiące /1÷12/	- 0,99	4,303	13,97	$E_g = /4,03 - 0,12 T/ \cdot$ 10 <sup>4</sup> kg/cm <sup>2</sup> gdzie: T - miesiące /1 do 12/

gdzie: r - współczynnik korelacji

$t_{\alpha}$  - wartość tabelaryczna

$t^0$  - wartość wyliczona



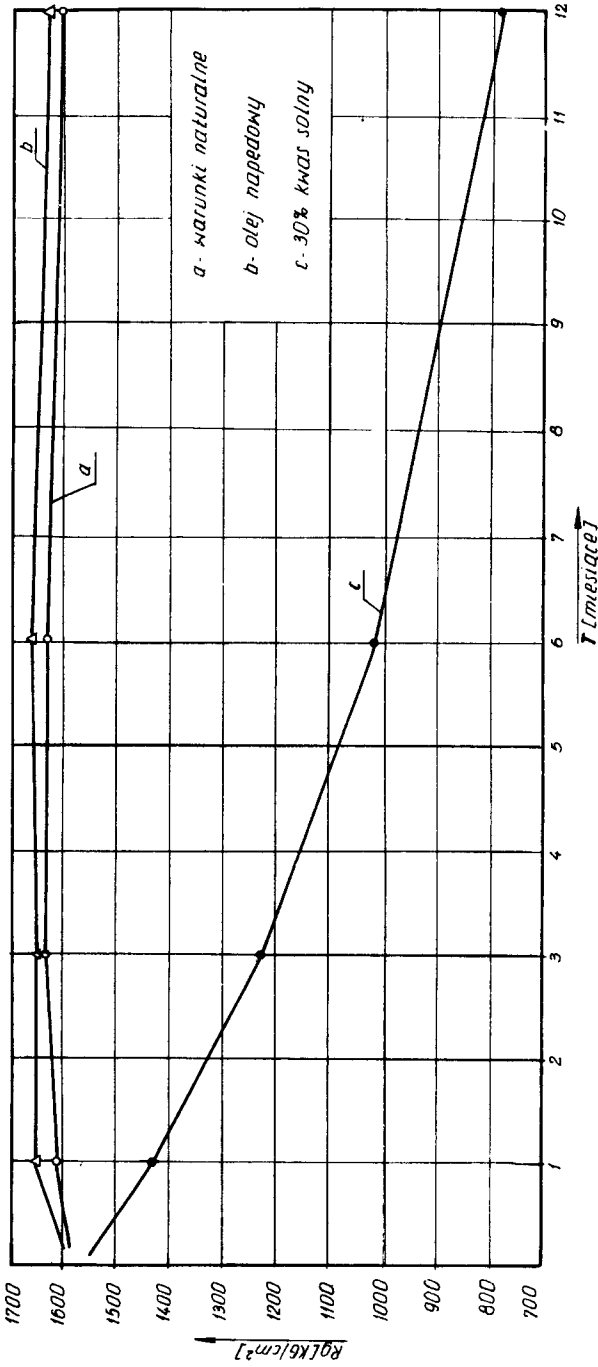
Tablica 3

wartości wytrzymałości doraźnej  $R_g$ 

	1 miesiąc		3 miesiące		6 miesięcy		12 miesięcy	
	$R_g$	S	$R_g$	S	$R_g$	S	$R_g$	S
Warunki naturalne	1606	19	1632	25	1628	34	1609	34
Wpływ oleju napędowego	1653	30	1651	46	1676	29	1625	31
Wpływ 30 % kwasu solnego	1435	23	1227	17	1018	19	786	20

gdzie:  $R_g$  - wytrzymałość doraźna przy zginaniu,

S - średni błąd odchylenia standardowego.

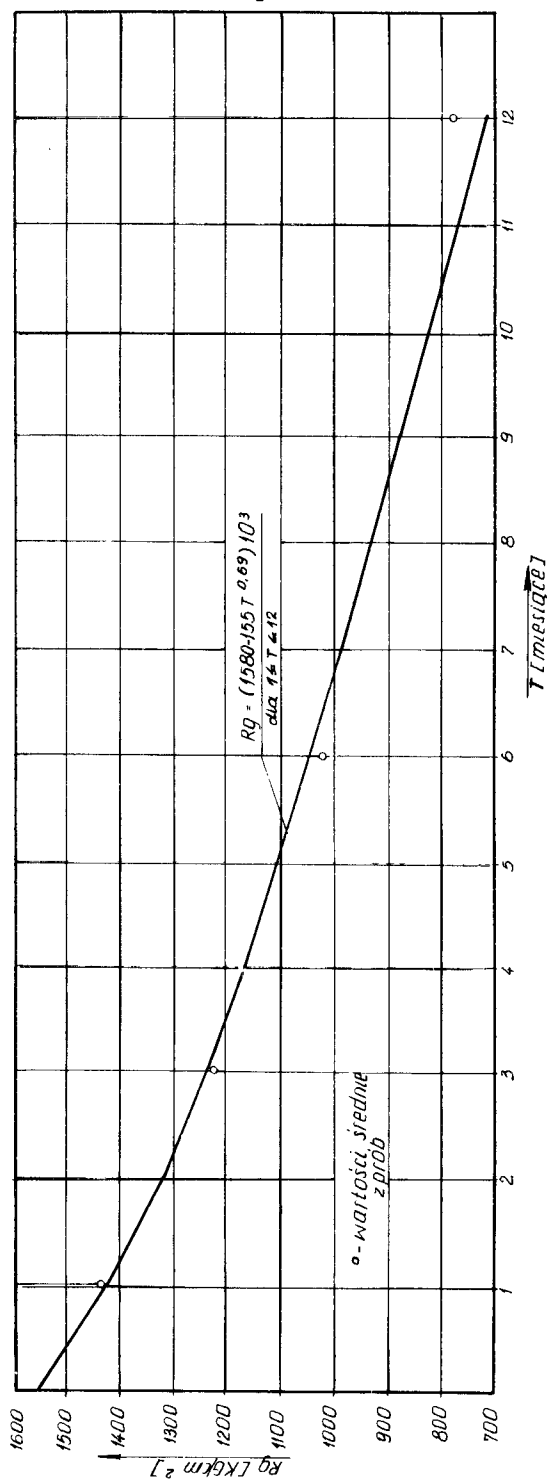


rys. 5. Wpływ wilgotności na zginanie jako funkcja czasu działania czynnika

Tablica 4

wyniki analizy korelacyjnej dla uzyskania ostatecznej postaci równań.  $R_g = f/T/$

	Analiza sekwencyjno-iteracyjna Równanie wyliczone	Analiza korelacyjna				Ostateczna forma równania
		$r_{R_g T}$	$t_{\alpha}$ dla $\alpha=0,05$	$t^{\circ}$	korelacja	
Warunki natu- r. line	$R_g = 1620,28 - 0,37 T$ kg/cm <sup>2</sup> gdzie: T-miesiące /1÷12/	-0,13	4,303	0,18	nie istnieje	$R_g = 1620 \text{ kg/cm}^2$ = const.
Olej na- pędowy	$R_g = 1664,44 - 2,40 T$ kg/cm <sup>2</sup> gdzie: T-miesiące /1÷12/	-0,55	4,303	0,94	nie istnieje	$R_g = 1664 \text{ kg/cm}^2$ = const.
Kwas solny	$R_g = /1580-155 T^{0,69}/$ 10 <sup>3</sup> kg/cm <sup>2</sup> gdzie: T-miesiące /1÷12/	-0,99	4,303	13,25	zachodzi	$R_g = /1580-155 T^{0,69}/$ gdzie: 10 <sup>3</sup> kg/cm <sup>2</sup> T-miesiące /1÷12/



Rys.4. krzywa regresji wytrzymałości doraźnej na zginanie pod wpływem działania 30 % HCL w czasie

Przekształcone równanie ma postać:

$$R_g = \sqrt{1580 - 155 T^{0,69}} \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2 \quad (13)$$

Próbie teoretycznego uzasadnienia zbadanych zjawisk można podjąć w oparciu o omówione w "Proczności płaśtmass" [6] prace I. Fischera i J. Holmana. Obniżenie własności wytrzymałościowych tworzyw zbrojonych związane jest z ilością mikropęknięć na jednostkę powierzchni laminatu /wy - raźny wpływ na cechy wytrzymałościowe od  $\sim 1000$  mikropęknięć na  $\text{cm}^2$ /.

Wzrost ilości mikropęknięć można wiązać z penetracją czynnika ciekłego siecią kapilar wzdłuż włókien zbrojenia. Zapewne ułatwia to preparacja mniej odporna na działanie czynników chemicznych niż żywica czy włókno.

Prowadzi to też do obniżenia sił adhezji i kohezji między włóknem i żywicą. Zagadnienia te nie znalazły jednak, jak dotąd, jednoznacznego wyjaśnienia.

#### Wnioski

1. Uzyskane pod wpływem omawianych czynników równania korelacyjne  $E_g = f/T$  i  $R_g = f/T$  są ważne dla badanego przedziału czasowego /12 miesięcy/. Przedłużenie tego okresu może spowodować konieczność dokonania korekty otrzymanych równań.

2. Wyniki otrzymane dla oleju napędowego mogą dla użytkowników paliw płynnych stanowić zachętę do stosowania zbiorników i pojemników z laminatu epoksydowo-szklanego.

3. Wyrażna degradacja wartości cech wytrzymałościowych przy zginaniu pod wpływem działania 30 % kwasu solnego stanowi wskazówkę, by czynić starania dla uzyskania laminatów epoksydowo-szklanych o dużej odporności na działanie tego czynnika; umożliwi to stosowanie ich jako ele -

mentów konstrukcyjnych aparatury i urządzeń narażonych na działanie tego kwasu.

4. Odporność laminatu epoksydowo-szklanego na działanie 30% kwasu siarkowego jest znikoma.

#### Literatura

1. Brojer Z., Hertz Z., Penczek P.: Żywice epoksydowe. WNT.Warszawa,1972
2. Jahn H.: Epoxidharze VEB Deutscher Verlag Leipzig, 1969.
3. Kopczyński C.: Wpływ wodnych roztworów kwasu siarkowego na laminały epoksydowo-szklane, stosowane do ochrony stali przed korozją - Polimery 4/69 str. 182.
4. Leontiew N.L.: Technika statističeskich wycislienij. Gosliesbumizdat Moskwa, 1961.
5. Metodyka eksploatacyjnych badań niezawodności i trwałości maszyn i urządzeń mechanicznych - zbieranie, rejestracja i obróbka danych. Praca zbiorowa. IMER, Warszawa, 1968.
6. Niemiec I., Sierensen S.W., Strieljajew S.W.: Procznost płastrmass. Maszynostrojenie, Moskwa, 1970.
7. Oktaba W.: Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczal - nictwa PWN - Warszawa 1970.

#### BENDING STRENGTH QUALITIES OF DISID GLASS LAMINATE YIELDED UNDER THE ACTION OF SELECTED FACTORS

#### /Summary/

The comparative test results of a longterm action of fuel oil, 30 %  $H_2SO_4$ , 30 % HCl and natural conditions on bending strength qualities of disid glass laminate have been described in the paper.

The results obtained suggest to be correct /with the 5 % risk of error/ due to the suitable number of observations and the comprehensive statistical elaboration.

ОСОБЕННОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ЭПОКСИДНО-СТЕКЛЯННОГО  
ЛАМИНАТА ПОДВЕРЖЕННЫЕ ДЕЙСТВИЮ ИЗБРАННЫХ ФАКТОРОВ

/Резюме/

В статье проанализированы результаты сравнительных исследований продолжительного воздействия машинного масла, 30% соляной кислоты, 30% серной кислоты, а также естественных условий на величину особенностей сопротивления при изгибе эпоксидно-стеклянного ламината.

Полученные результаты можно признать правильными /допускаемая возможность ошибки 5%/ благодаря соответствующему числу и пар наблюдений и полной статистической обработке.





Jerzy Steinborn  
Wojciech Weiner

WYBRANE WSPÓŁCZYNNIKI ODKSZTAŁCEŃ POPRZECZNYCH  
LAMINATU EPOKSYDOWO-SZKLANEGO

W artykule omówiono wyniki badań współczynników odkształceń poprzecznych w próbie rozciągania laminatu epoksydowo-szklanego, powstałego przez przesycenie maty szklanej żywicą epoksydową z dodatkiem trójetyloczteroaminy /TECZA/.

Celem badań było ustalenie ścisłych zależności wiążących te wartości współczynników Poissona, które rzutują na zachowanie się złączeń metal-laminat, w zależności od naprężeń występujących w laminacie.

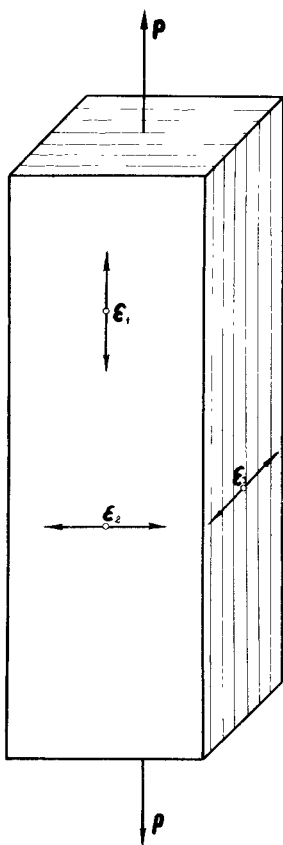
Wstęp

Wartość współczynnika Poissona tworzywa zbrojonego [2] zmienia się wraz ze zmianą naprężeń, podobnie jak wartość modułu sprężystości [1,4]. Wynika to z badań przeprowadzonych przez różnych autorów, między innymi na laminatach poliestrowych.

Jednocześnie, w zależności od rodzaju zbrojenia i związanej z tym anizotropii płaskiej lub przestrzennej, może istnieć aż sześć współczynników Poissona. Wynika to z istnienia różnych wartości  $\nu$  dla każdego kierunku -  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , a w związku z tym sześciu różnych wartości  $\nu$ :

$$\nu_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \quad \nu_2 = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}, \quad \nu_3 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2},$$

$$\nu_4 = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2}, \quad \nu_5 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3}, \quad \nu_6 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3}.$$



Rys.1. Kierunki odkształceń przestrzennych próbki poddanej jednoosiowemu rozciąganiu

Dla tworzywa zbrojonego matą można przyjąć istnienie izotropii płaskiej, jak również założyć, że kierunek działania sił, prostopadły do warstw maty, nie ma technicznego uzasadnienia. /To znaczy, że  $\nu_1 = \nu_3$ , a  $\nu_2 = \nu_4$  w przypadku działania siły zgodnie z kierunkiem  $\epsilon_2$ . Działanie sił zgodnie z kierunkiem  $\epsilon_3$  należy w konstrukcjach z laminatów eliminować, jako niemożliwe do przyjęcia przez zbrojenie/. Pozostają więc do oznaczenia dwa współczynniki  $\nu_1$  i  $\nu_2$  /rys.1/, gdzie:

$$\nu_1 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad /1/ \quad \nu_2 = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} \quad /2/$$

Wymienione liczby Poissona oznaczono w trakcie badań dla naprężeń, w zakresie praktycznie występującym w konstrukcjach /do  $\sim 0,6 R_m$ /.

Wybranie  $\nu_1$  i  $\nu_2$  jest uzasadnione powłokowym najczęściej charakterem konstrukcji wykonywanych z badanego laminatu /zbiorniki, pojemniki, rurociągi, osłony, elementy przestrzenne itp./.

## 1. Tworzywo badane

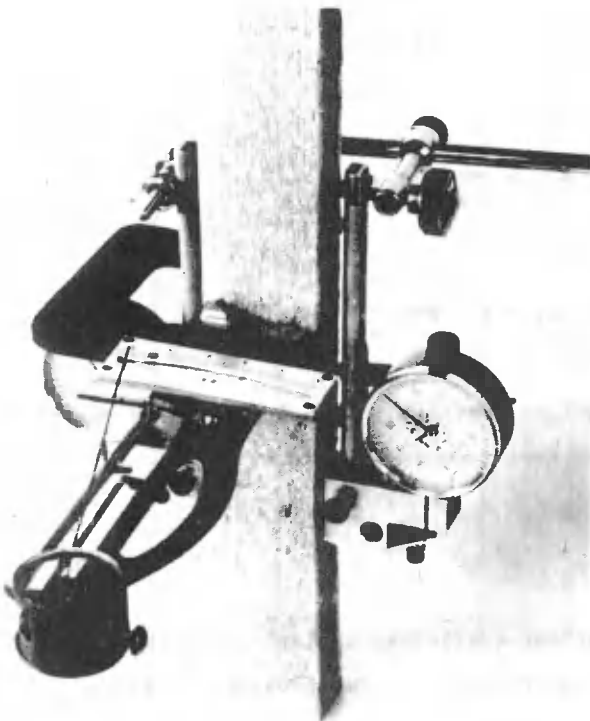
Tworzywem badanym był laminat epoksydowo-szkłany, powstały z przesycenia maty szklanej M 300 żywicą epoksydową Epidian 53, zmieszaną z utwardzaczem TECZA w proporcji 100:10,5 cz.wag. Z tworzywa tego wykonano metodą kontaktową płyty, z których po odpowiednich zabiegach /sezonowanie w czasie 48 godz. w temperaturze  $17 \pm 1^{\circ}\text{C}$ , wilgotność względna  $75 \pm 5 \%$  wygrzewanie w czasie 24 godz. w temperaturze  $50 \pm 55^{\circ}\text{C}$ / wycięto próbki do badań [1] .

## 2. Metodyka badań

W wyniku przeprowadzo-  
nej analizy wybrano metodę  
bezpośredniego pomiaru od-  
kształceń wzdłużnych i  
poprzecznych tensometrów  
mechanicznymi o duże  
ności:

- do mierzenia odkształceń wzdłużnych tensometr MK 2 o bazie 100 mm i dokładności wskazań 0,01 mm,
- do mierzenia odkształceń poprzecznych tensometr TR - 794 o bazie 20 mm i dokładności wskazań 0,001 mm.

Próbki uzbrojone w tensometry /rys.2/ rozciągano przy użyciu typowej zrywar-  
ki ZDM 10 na zakresie B



Rys.2. Próbka uzbrojona w tensometry

/0 ÷ 5000 kg/ o dźwiakce elementarnej 10 kg.

Prędkość rozciągania wynosiła  $6 \pm 1$  mm/min /minimalna dla tego typu srywarki/.

Odczytów wskazań tensometrów dokonywano na przyjętych poziomach naprężeń.

### 3. Wyniki badań i ich opracowanie

Z pomierzonych odkształceń wyliczono wartości współczynników Poissona /tabl.1/ według poniższych wzorów:

$$\nu_1 = \frac{l_1 \cdot \Delta l_2}{l_2 \cdot \Delta l_1} = 5 \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1}, \quad /3/$$

$$\nu_2 = \frac{l_1 \cdot \Delta l_3}{l_3 \cdot \Delta l_1} = 5 \frac{\Delta l_3}{\Delta l_1}, \quad /4/$$

gdzie:

$$1 - \text{baza tensometru} / l_1 = 100 \text{ mm}, \\ l_2 \text{ i } l_3 = 20 \text{ mm} /.$$

Zmiennosc  $\nu_1$  i  $\nu_2$  przedstawiono graficznie /rys.3 i rys.4/ w zależności od naprężeń, otrzymując krzywe o ogólnej postaci:

$$\nu_1 = f_1 / \sigma / \quad /5/$$

$$\nu_2 = f_2 / \sigma / \quad /6/$$

W wyniku przeprowadzonej anamorfozy graficznej znaleziono układ współrzędnych, w którym powyższe funkcje przyjmują postać prostych /rys.5/:

$$\nu_1 = \psi_1 / \lg \sigma / \quad /7/$$

$$\nu_2 = \psi_2 / \lg \sigma / \quad /8/$$

Wyniki badań

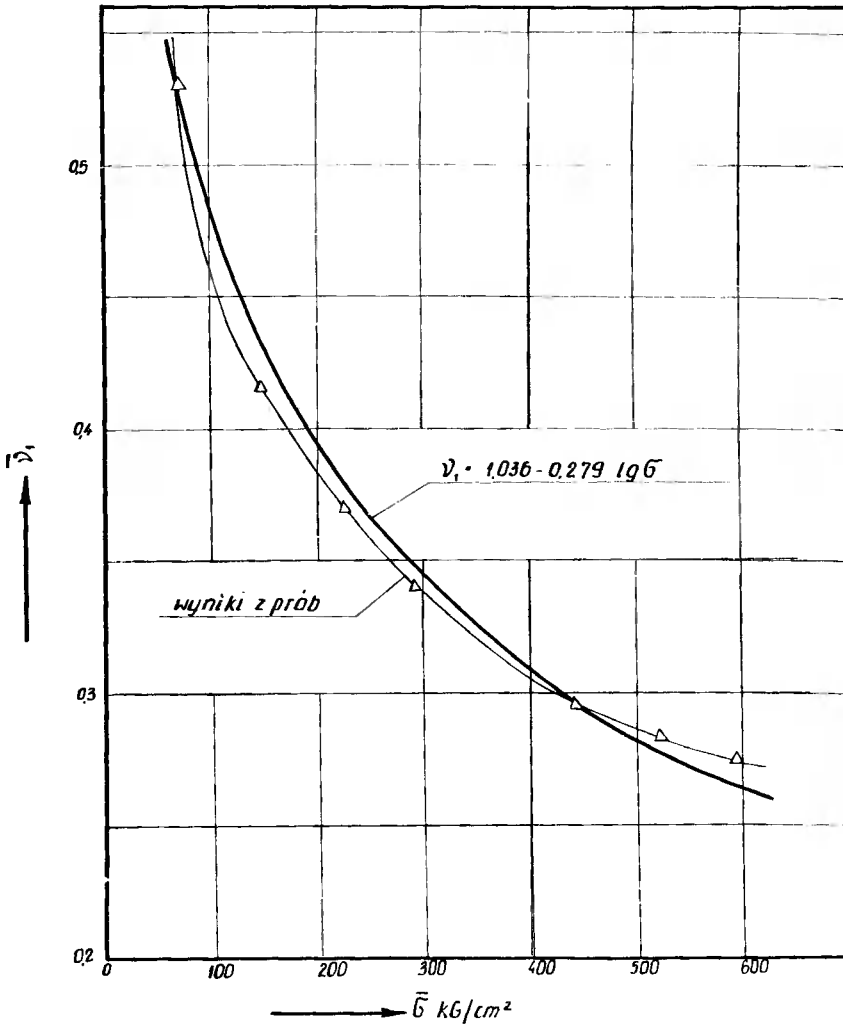
Tablica 1

Licz- ność serii $n_1$	rozmiar naprężenia $\bar{\sigma}$	średnia liczba Poissona $\bar{\nu}_1$	błąd standardowy wartości średniej $s \cdot \nu_1$	licz- ność serii $n_2$	rozmiar naprężenia $\bar{\sigma}$	średnia liczba Poissona $\bar{\nu}_2$	błąd standardowy wartości średniej $s \cdot \nu_2$
12	74	0,5295	0,036	10	121	0,8400	0,041
	149	0,4172	0,049		242	0,6765	0,036
	223	0,3695	0,036		363	0,5640	0,018
	298	0,3434	0,026		484	0,5048	0,019
	372	0,3187	0,030		605	0,4666	0,030
	447	0,2939	0,040		726	0,4325	0,010
	521	0,2827	0,032				
	595	0,2742	0,039				

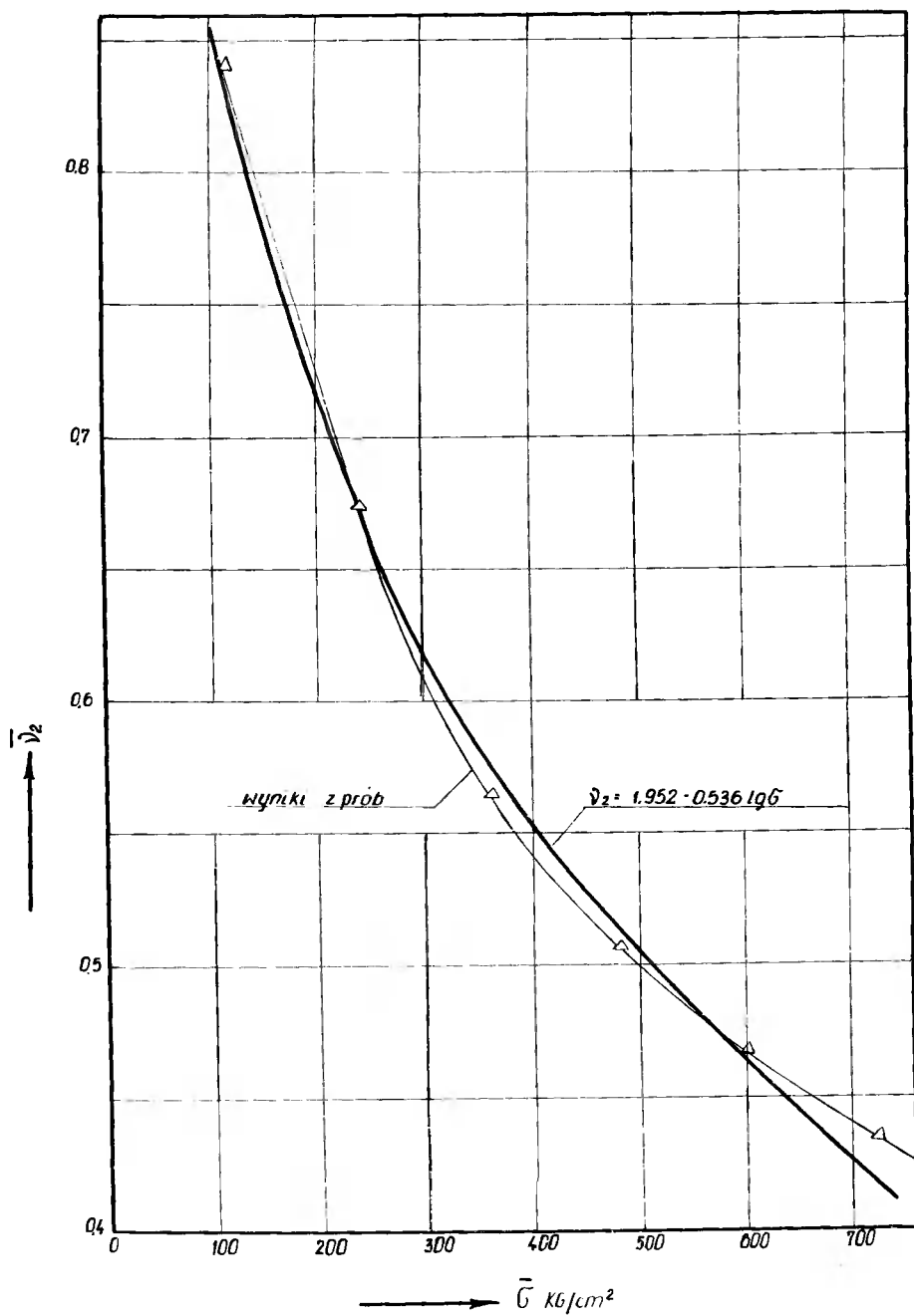
Możliwość przedstawienia wyników badań w postaci prostej równania:

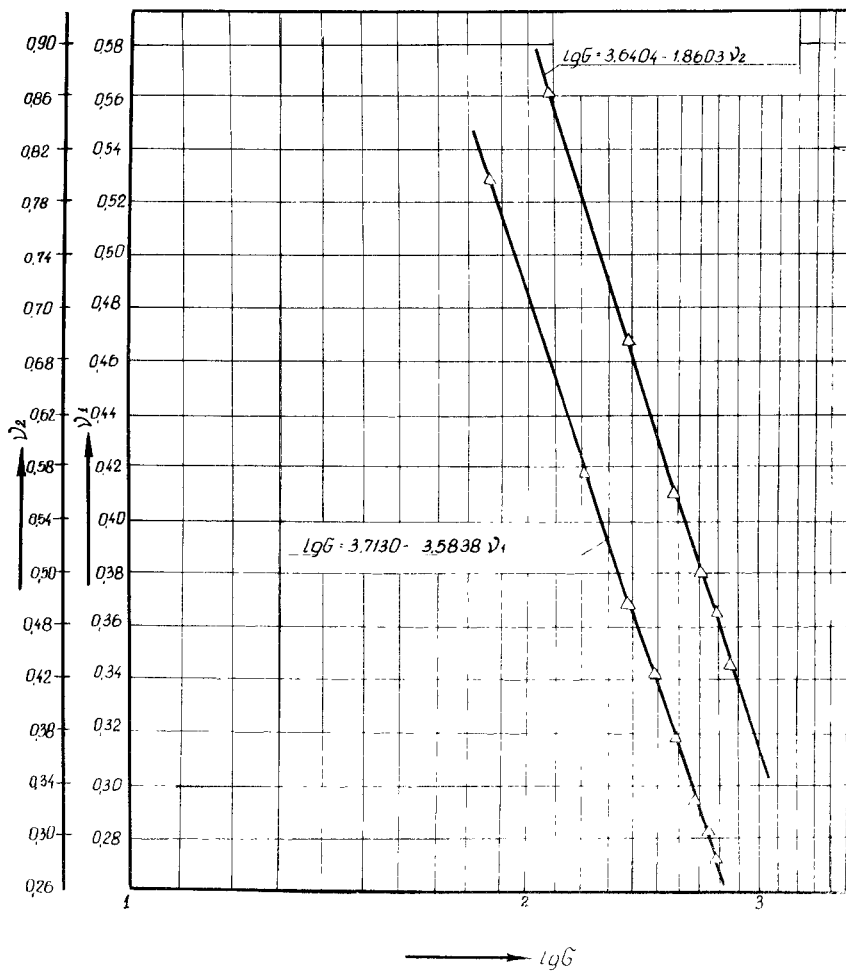
$$Y = A + BX \quad /9/$$

pozwoili na wyliczenie współczynników A i B metodą najmniejszych kwadratów [3] i na statystyczne opracowanie istotności zależności korelacyjnych, oraz postaci analitycznej równań /7/ i /8/.



Rys.3. Zmienność współczynnika  $\bar{v}_1$  w funkcji naprężeń  $\bar{G}$

Rys.4. Śmierność współczynnika  $\bar{\nu}_2$  w funkcji naprężeń  $\bar{\sigma}$



Rys.5. Anamorfoza funkcji  $v_1 = f_1 / G / 1$   $v_2 = f_2 / G /$



3.1. Współczynnik  $\nu_1$ 

Wartości A i B równania /9/ wynoszą:

$$A = 3,7130$$

$$B = -3,5838,$$

co w wyniku przeprowadzonej anamorfozy graficznej pozwala na przedstawienie prostej o zapisie:

$$\lg \zeta = 3,7130 - 3,5838 \nu_1 \quad /7a/$$

i dalej:

$$\nu_1 = 1,036 - 0,279 \lg \zeta. \quad /7b/$$

Zgodność wyników badań z przyjętą zależnością teoretyczną przedstawia tabela 2.

Następnie stwierdzono, czy korelacja między wartościami  $\zeta$  i  $\nu_1$  jest istotna.

Obliczony współczynnik korelacji ma wartość:

$$r_{\nu_1 \lg \zeta} = -0,9978,$$

a obliczona wartość funkcji testowej współczynnika korelacji:

$$t^0 = 36,486.$$

Z tablic t - Studenta [3] dla założonego poziomu istotności  $\alpha = 0,05$  oraz  $\mu = n - 2 = 6$ ,

odczytana wartość  $t_{\alpha} = 2,447$ .

Ponieważ  $t^0 \gg t_{\alpha}$ , wnioskuje się o istotności korelacji między współczynnikiem Poissona  $\nu_1$ , a wartością  $\zeta$ , oraz o ważności uzyskanej zależności korelacyjnej /7b/.

3.2. Współczynnik  $\nu_2$ 

Wartości A i B równania /9/ wynoszą:

$$A = 3,6404, \quad B = -1,8603$$

Tablica 2

Błąd wartości liczb Poissona uzyskanych z równań 7" i 8"

wartość $\bar{\nu}_1$ z pomiarów	wartość $\bar{\nu}_1$ z równania /7"/	$\Delta$ i % wartości z pomiarów	wartość $\bar{\nu}_2$ z pomiarów	wartość $\bar{\nu}_2$ z równania /8"/	$\Delta$ i % wartości z pomiarów
0,5235	0,5143	- 2,87	0,8400	0,8566	- 0,40
0,4172	0,4306	+ 3,21	0,6765	0,6757	- 0,12
0,3693	0,3804	+ 3,00	0,5640	0,5791	+ 2,68
0,3434	0,3469	+ 1,02	0,5048	0,5147	+ 1,96
0,3167	0,3190	+ 0,03	0,4666	0,4611	- 1,18
0,2939	0,2967	+ 1,02	0,4325	0,4182	- 3,31
0,2627	0,2772	- 1,95			
0,2742	0,2632	- 6,02			

co pozwala na przedstawienie prostej w zapisie:

$$\lg \delta = 3,6404 - 1,8603 \nu_2 \quad /8a/$$

i dalej:

$$\nu_2 = 1,952 - 0,536 \lg \delta. \quad /8b/$$

Zgodność wyników badań z przyjętą zależnością teoretyczną przedstawiono w tabelicy 2. Następnie stwierdzono, czy rzeczywiście istnieje korelacja między wartościami  $\delta$  i  $\nu_2$ .

Obliczony współczynnik korelacji:

$$r_{\nu_2 \lg \delta} = -0,9902,$$

a obliczona wartość funkcji testowej:

$$t^0 = 14,04.$$

I w tym przypadku wobec  $t^0 \gg t_{\alpha}$  można wnioskować o istotności korelacji między badanymi cechami.

#### 4. Określenie związku między liczbami Poissona $\nu_1$ i $\nu_2$

Rozwiązując układ równań /7b/ i /8b/ określono relację między  $\nu_1$  i  $\nu_2$  w postaci równania:

$$\nu_2 = 1,921 \nu_1 - 0,038. \quad /9/$$

Zależność ta pozwala na określenie wartości  $\nu_2$  przy znanym  $\nu_1$ .

Dla celów praktycznych zależność ta może przyjąć postać uproszczoną:

$$\nu_2 = 1,9 \nu_1. \quad /10/$$

#### Wnioski

1. Badane zależności /5/ i /6/, określone równaniami ogólnymi, można odwzorować w badanym zakresie naprężeń przy pomocy krzywych o zapisie /7b/ i /8b/.

Poszerzenie przedziału zmienności może oczywiście prowadzić do innego kształtu rozpatrywanych zależności.

2. Stwierdzono, że poziom naprężeń różnicuje średnie wartości współczynników odkształceń poprzecznych /liczb Poissona  $\nu_1$  i  $\nu_2$ /.

Liczba Poissona maleje ze wzrostem naprężeń.

3. Określono zależność /10/, mającą praktyczne znaczenie dla wyznaczenia wartości liczby Poissona  $\nu_2$ , przy znajomości wartości liczby Poissona  $\nu_1$  badanego tworzywa.

Powłokowy charakter wytworów z tworzyw zbrojonych pozwala na uzyskanie kształtek pomiarowych o niewielkiej grubości, utrudniającej dokładny pomiar wartości  $\nu_2$ , ze względu na dysponowanie małą bazą pomiarową - uzasadnia to praktyczną użyteczność zależności /10/.

Interpretacja ustalonych zależności /7b/ i /8b/ może być oparta na analizie zupełnie odmiennego przejmowania naprężeń w różnych kierunkach przez laminat niż materiały tradycyjne-izotropowe.

Współpraca dwu tak różnych komponentów, jak włókno szklane i żywica, jest przedmiotem rozlicznych badań. Nie doprowadziły one jednak dotąd do ustalenia ogólnie przyjętej teorii.

#### Literatura

1. Kasprowicz Z., Steinborn J., Weiner W.: Badania cech materiałowych epoksydowych tworzyw zbrojonych włóknem szklanym. WSI, Bydgoszcz 1970, maszynopis.
2. Kłosowska-Wołkowicz Z., Królikowski W., Penczek P.: Żywice i laminaty poliestrowe. WNT, Warszawa, 1969.
3. Oktaba W.: Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa. PWN, Warszawa 1966.
4. Steinborn J., Sendlewski W.: Moduł sprężystości liniowej epoksydowego tworzywa zbrojonego włóknem szklanym jako funkcja naprężeń oraz grubości kształtki pomiarowej. Praca złożona do druku w Zeszytach Naukowych WSI, Mechanika-Konstrukcje /7/.

THE SELECTED TRANSVERSE STRAIN FACTORS OF DISID  
GLASS LAMINATE*/Summary/*

The results of tests of Poisson's factors dealing with disid glass laminate in the tension test have been described in the paper.

The mutability of properties in the stress function and their relations have been showed.

ИЗБРАННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОПЕРЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ  
ЭПОКСИДНО - СТЕКЛЯННОГО ЛАМИНАТА*/Резюме/*

В статье даны результаты исследований коэффициентов Пуассона эпоксидно-стеклянного ламината при растяжении. Определён характер изменений этих особенностей в функций напряжения, а также их обобщённого соотношения.



Zbigniew Dąbek

USTALANIE OPTIMALNYCH TOLERANCJI WYKONAWCZYCH  
W OPARCIU O KRYTERIUM KOSZTU PRODUKCJI

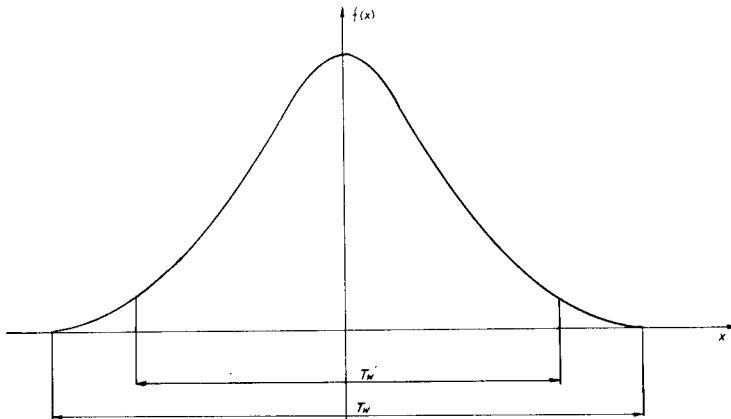
W artykule przedstawiono opracowaną przez autora metodę obliczania optymalnej tolerancji wykonawczej z punktu widzenia kosztów produkcji. Obliczenia prowadzone są przy zastosowaniu rachunku prawdopodobieństwa i metod statystyki matematycznej. Tak postawione zadanie prowadzi do układu równań, którego nie da się rozwiązać w postaci ogólnej. Autor proponuje zastosowanie elektronicznych maszyn cyfrowych. Całość obliczeń realizuje procedura opt napisana w języku ALGOL-60. Program główny napisany jest w języku ALGOL-1204 i umożliwia przeprowadzenie obliczeń na EMC Odra-1204.

Konstruując jakiegokolwiek urządzenie mechaniczne konstruktor - mechanik tak dobiera wymiary i ich tolerancje, aby zapewnić, z konstrukcyjnego punktu widzenia odpowiednie luzy i wciski. Oczywiście dobrze jest, jeśli potrafi on spojrzeć na swoją konstrukcję oczami technologa. Pozwala to czasami uniknąć szeregu błędów, zwiększyć trwałość urządzenia i niezawodność jego działania, a ponadto ułatwić wykonanie, co wiąże się na ogół z obniżką kosztów produkcji. Bez względu jednak na to, czy konstruktor posiada spojrzenie technologiczne czy też nie, przyjmuje on tolerancje wymiarów przede wszystkim tak, aby zapewniały one prawidłowość kons-

trukoji, prawidłowość pracy danego elementu w zespole konstrukcyjnym.

Z chwilą, kiedy dokumentacja konstrukcyjna przechodzi w ręce technologów, stoi przed nimi zadanie odpowiedniego zaprojektowania procesu technologicznego, aby spełniając wymagania konstruktora wykonanie było łatwe i możliwie tanie. Kryteria ustalania tolerancji wykonawczych mogą być różne. Rozpatrzmy jedynie jedno z nich, a mianowicie koszt wykonania pojedynczego wymiaru, jeśli została określona jego tolerancja, którą nazwiemy: tolerancją konstrukcyjną i oznaczymy symbolem  $T_k$ .

Przypuśćmy, że dla tego wymiaru przyjęliśmy tolerancję wykonawczą  $T_w$  równą  $T_k$  i przystąpiliśmy do produkcji seryjnej. Pomijając w tej chwili pewne czynniki zniekształcające można oczekiwać, że rozkład błędów wykonania będzie się przedstawiał tak, jak na rysunku 1.



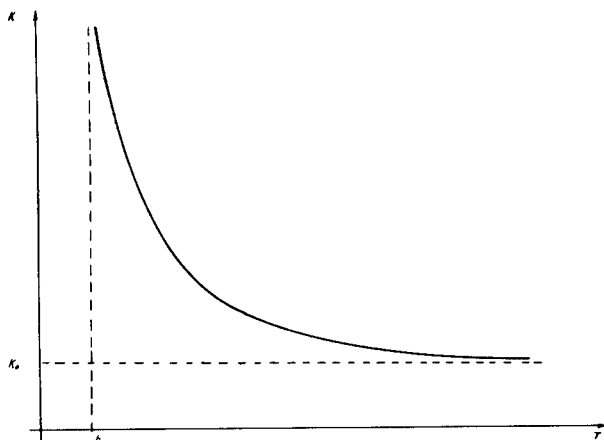
Rys.1

Jak widać na rysunku, prawdopodobieństwo wystąpienia wymiaru o wartości zbliżonej do wartości granicznych jest tak małe, że można oczekiwać, iż większość wykonywanych przedmiotów będzie wykonana w tolerancji mniejszej  $T'_w$ , a więc dokładniej niż tego żąda konstruktor. Oczywiście nie ma potrzeby wykonywania dokładniej niż to jest potrzebne z punktu widzenia prawidłowości konstrukcji. Można więc odwrócić zagadnienie i zapytać, jak ustalić taką tolerancję wykonawczą  $T_w > T_k$ , aby po wykonaniu całej serii opłacalna większość przedmiotów miała wymiar mieszczący się w tole -



rancji konstrukcyjnej. Jeśli przyjmieemy  $T_w > T_k$  - na pewno poniesiemy straty. Będą to przedmioty wykonane w tolerancji  $T_w$ , lecz nie mieszczące się w tolerancji konstrukcyjnej  $T_k$ . Przedmioty te należy uznać za dodatkowe braki produkcyjne. Takie postępowanie może jednak być ekonomicznie opłacalne w przypadku, kiedy rozszerzenie tolerancji wykonawczej spowoduje taką obniżkę kosztów, która pokryje straty poniesione na brakach.

Jak powszechnie wiadomo - im mniejsza tolerancja, tym na ogół trudniejsze wykonanie i większy jego koszt. Krzywą zależności kosztu wykonania od tolerancji przedstawić można w postaci hiperboli tak, jak na rysunku 2.



Rys.2.

Analitycznie krzywa ta jest określona następującą zależnością<sup>x/</sup>:

$$K = \frac{a}{T^w - b} + c;$$

tutaj oznaczono:

- K - koszt wykonania,
- a - współczynnik wzrostu kosztów,
- T - tolerancja wykonania,
- b - najmniejsza tolerancja wykonania,
- c - koszt stały.

---

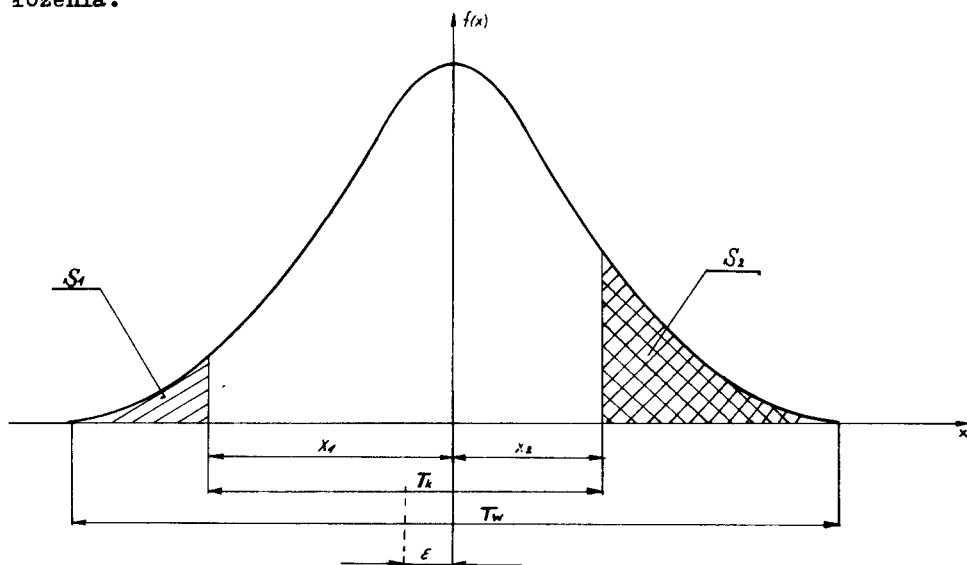
<sup>x/</sup> Wolniewicz E.: Ermittlung optimaler toleranzen in Massreihen.  
Acta IMEKO III, 1964.

Dla celów praktycznych można przyjąć, że  $w = 1$  oraz  $b = 0$ , co znacznie upraszcza rozważania, bowiem sprowadza zależność /1/ do postaci:

$$K = \frac{a}{T} + K_0,$$

przy czym koszt stały oznaczyliśmy przez  $K_0$ .

Jak widać z rysunku 1, w zakresie małych tolerancji nawet niezna-  
czne ich powiększenie może przynieść dużą obniżkę kosztów i może być opła-  
calne. Rozszerzenie tolerancji wykonawczej nie powinno się jednak odbywać  
symetrycznie względem tolerancji konstrukcyjnej, ponieważ koszt braku nie-  
naprawialnego jest zwykle dużo większy od kosztu poprawy braku naprawial-  
nego. Przyjmijmy model matematyczny taki, jak na rysunku 3 oraz pewne za-  
łożenia.



Rys. 3.

Zakłada się, że wartość wykonywanego wymiaru jest zmienną losową  $x$ . Zmienna ta ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną w środku tolerancji. Przyjmijmy dalej, że odchylenie standardowe wynosi:

$$\sigma = \frac{T_w}{2\tau} x/$$

$x/$  Zwykle przyjmuje się  $\tau = 3$ , zgodnie z regułą trzysigmową

Wspomnieliśmy, że wskutek rozszerzenia tolerancji wykonawczej  $T_w$  w stosunku do  $T_k$  mogą powstać braki, mieszczące się w tolerancji wykonawczej, lecz nie mieszczące się w tolerancji konstrukcyjnej. Mogą to być oczywiście zarówno braki nienaprawialne, jak i naprawialne. Przyjmijmy dalej następujące oznaczenia:

- $S_1$  - pole, przedstawiające prawdopodobieństwo wystąpienia braku nienaprawialnego,
- $S_2$  - pole, przedstawiające prawdopodobieństwo wystąpienia braku naprawialnego,
- $x_1$  - dolna granica sztuk dobrych,
- $x_2$  - górna granica sztuk dobrych,
- $k_{BN}$  - koszt jednostkowy braku nienaprawialnego,
- $k_{BP}$  - jednostkowy koszt poprawy braku naprawialnego,
- $\varepsilon$  - przesunięcie środka tolerancji wykonawczej względem środka tolerancji konstrukcyjnej.

Funkcję kosztu braków możemy zatem sformułować następująco:

$$k_B = S_1 \cdot k_{BN} + S_2 \cdot k_{BP} \quad /3/$$

gdzie:

$k_B$  - jednostkowy koszt braków.

Zależność tę można również przedstawić w postaci:

$$k_B = P\left(-\frac{T_w}{2} < x < -x_1\right) \cdot k_{BN} + P\left(x_2 < x < \frac{T_w}{2}\right) \cdot k_{BP} \quad /4/$$

Zadanie polega więc na znalezieniu takiego  $\varepsilon$ , aby funkcja  $k_B$  osiągnęła minimum, tzn. aby suma kosztu braków nienaprawialnych oraz kosztu poprawy braków naprawialnych była najmniejsza. Rozwiązanie tego zadania sprowadza się do rozwiązania następującego układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = T_k \\ \frac{\partial k_B}{\partial x_1} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial k_B}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad /5/$$

Rozwijając zależność /4/ otrzymamy:

$$k_B = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1 - \frac{\sqrt{x-m}/2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\sqrt{x-m}/2}{2\sigma^2}} dx \right) k_{BN} + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2 - \frac{\sqrt{x-m}/2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\sqrt{x-m}/2}{2\sigma^2}} dx \right) k_{BP} \quad /6/$$

Zgodnie z naszymi założeniami:

$$m = 0$$

$$\sigma = \frac{T_w}{2\tau} ;$$

stąd po standaryzacji rozkładu normalnego wartości górnych granic całkowania będą odpowiednio równe:

$$\alpha_1 = 2 \frac{\tau x_1}{T_w}$$

oraz

$$\alpha_2 = 2 \frac{\tau x_2}{T_w} ,$$

zaś równanie /6/ przybierze postać:

$$k_B = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha_1 - \frac{v^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right) k_{BN} + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha_2 - \frac{v^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right) k_{BP} \quad /7/$$

Rozwiązując dalej układ równań /5/ po dokonaniu niezbędnych przekształceń otrzymamy:

$$x_1 = \frac{T_k}{2} + \frac{T_w^2}{T_k} \frac{1}{4\tau^2} \ln \frac{k_{BN}}{k_{BP}}$$

oraz /8/

$$x_2 = \frac{T_k}{2} - \frac{T_w^2}{T_k} \frac{1}{4\tau^2} \ln \frac{k_{BN}}{k_{BP}}$$

stąd /9/

$$\mathcal{E} = \frac{T_w^2}{4\tau^2 T_k} \ln \frac{k_{BN}}{k_{BP}}$$

Zależności /8/ nazwijmy skrótowo warunkiem optymalizacji położenia, mając na uwadze wzajemne położenie  $T_k$  względem  $T_w$ .

Z dyskusji zależności /9/ widać, że  $\xi = 0$  jeśli  $k_{BN} = k_{BP}$ , a to znaczy, że tolerancję wykonawczą można rozszerzać symetrycznie względem tolerancji konstrukcyjnej o ile koszt braków nienaprawialnych oraz koszt poprawy braków nienaprawialnych są równe.

Zależność /8/ i /9/ wyprowadziliśmy tak, jak gdyby tolerancja  $T_w$  była znana. Tak jednak nie jest. Na tym etapie obliczeń nie znamy jeszcze wartości  $T_w$ , ale możemy ją wyznaczyć, uwzględniając stratę na brakach oraz obniżkę kosztów, która wyniknie z rozszerzenia tolerancji.

Koszt braków określiliśmy już poprzednio zależnością /2/. Funkcja  $k_B$  jest rosnąca ze względu na zmienną  $T_w$ , ponieważ im większa tolerancja - tym większa prawdopodobna liczba braków. Funkcja  $k_w$  jest natomiast malejąca względem  $T_w$ . Jeśli przyjmiemy oznaczenie:

$$k_s = k_w + k_B,$$

to znajdując minimum funkcji  $k_s$  ze względu na zmienną  $T_w$  będziemy mogli odpowiedzieć na pytanie, jaka powinna być tolerancja wykonawcza, aby suma kosztu wykonania i kosztu braków była najmniejsza. Znalezienie optimum sprowadza się więc do rozwiązania następującego równania:

$$\frac{\partial k_s}{\partial T_w} = \frac{\partial (k_w + k_B)}{\partial T_w} = 0. \quad /10/$$

Przekształcając to równanie otrzymamy:

$$x_1 \cdot e^{-\frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{x_1}{T_w}\right)^2} \cdot k_{BN} + (T_k - x_1) \cdot e^{-\frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{T_k - x_1}{T_w}\right)^2} \cdot k_{BP} = \frac{a \sqrt{2\tilde{n}}}{2\tilde{\gamma}} \quad /11/$$

Równanie /11/ wraz z warunkiem optymalizacyjnym /8/ tworzy układ równań, który umożliwi obliczenie optymalnej tolerancji wykonawczej zarówno co do wielkości pola tolerancyjnego, jak i jego położenia względem tolerancji konstrukcyjnej. Niestety tego układu równań nie da się rozwiązać w postaci ogólnej, natomiast jest on możliwy do rozwiązania na dro-

dze numerycznej przy użyciu elektronicznych maszyn cyfrowych.

Aby ułatwić korzystanie z przedstawionej metody obliczeń autor opracował tzw. procedurę w języku ALGOL-60, która realizuje całość przedstawionych tu obliczeń, oraz program obliczeniowy w języku ALGOL-1204 - umożliwiający przeprowadzenie obliczeń na ogólnie dostępnej w Polsce maszynie cyfrowej Odra-1204 - z podaniem sposobu przygotowania danych oraz przykładem obliczeniowym.

Dane wejściowe do tego programu są następujące:  $\tau$ ,  $a$ ,  $T_k$ ,  $k_{BN}$ ,  $k_{BP}$  oraz  $n$  jako liczba wariantów do przeliczeń. Na wyjściu EMC podaje następujące wielkości, jako wynik obliczeń:

- wielkości określające tolerancję optymalną  $T_w$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,
- prawdopodobieństwo powstania braku nienaprawialnego i naprawialnego,
- różnicę kosztu wykonania w tolerancji  $T_k$  i  $T_w$ ,
- prawdopodobne koszty braków i koszty poprawy.

W praktyce produkcyjnej mogą się zdarzać przypadki, kiedy nie musimy odwoływać się do pomocy EMC, np. przy produkcji wielkoseryjnej lub masowej często nie opłaca się zajmować poprawą braków naprawialnych, zwłaszcza gdy proces jest zautomatyzowany, a koszt półfabrykatu niewielki. Wtedy można przyjąć, że koszty braków są równe, tzn.:

$$k_{BN} = k_{BP} = k.$$

Przy takim założeniu układ równań /8/, /11/ znacznie się upraszcza i po jego rozwiązaniu otrzymujemy zależność:

$$T_w = \frac{\tau \cdot T_k}{\sqrt{2 \ln \left( \frac{2 \tau}{\sqrt{2 \pi}} \cdot \frac{k \cdot T_k}{a} \right)}}. \quad /12/$$

Jeśli przyjąć, jak to się najczęściej przyjmuje,

$$\tau = 3,$$

otrzymamy wtedy:

$$T_w = \frac{3 T_k}{\sqrt{2 \cdot \ln \frac{6}{\sqrt{2 \pi}} \cdot \frac{k \cdot T_k}{a}}} \approx \frac{2,12 T_k}{\sqrt{\ln 2,4 \frac{k \cdot T_k}{a}}}. \quad /13/$$

Otrzymana zależność ma już charakter czysto praktyczny, można więc określić zakres i granice jej stosowalności ze względu na parametry  $a$ ,  $k$  i  $T_k$ . W tym celu należy przede wszystkim ustalić graniczne wartości, jakie może przybierać wielkość  $T_w$ . Z przeprowadzonych rozważań wynika, że tolerancja wykonawcza powinna być większa od tolerancji konstrukcyjnej, ponieważ w przeciwnym przypadku nie będzie zachodziło żadne rozszerzenie tolerancji, a zatem:

$$T_w \min > T_k \quad .$$

Z matematycznego punktu widzenia tolerancja wykonawcza nie jest ograniczona z góry - może więc przybierać wielkości dowolnie duże. Praktycznie - tolerancja wykonawcza nie powinna przekraczać tzw. tolerancji warsztatowej, przy czym jako tolerancję warsztatową rozumiemy taką tolerancję wykonawczą, która jest umownie przyjęta w danym zakładzie do wykonywania wymiarów nietolerowanych /najczęściej przyjmuje się w takim przypadku 12 lub 13 klasę dokładności według układu ISO/. Wyłaniają się więc trudności w bezpośrednim określeniu  $T_w \max$ , ponieważ tolerancja warsztatowa będzie zależna od wymiaru nominalnego, przyjętej klasy dokładności oraz aktualnie obowiązującego układu pasowań, stąd też musimy wprowadzić nowy parametr  $T_t$ , który będzie oznaczał tolerancję warsztatową.

Wobec tego:

$$T_w \max < T_t \quad ,$$

a zatem można napisać:

$$T_t > T_w = \frac{\chi \cdot T_k}{\sqrt{2 \ln \frac{2\chi}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{k \cdot T_k}{a}}} > T_k \quad . \quad /14/$$

W celu łatwiejszego zapisu oznaczymy wyrażenie  $\frac{k \cdot T_k}{a}$  symbolem  $\chi$ .

Rozwiązując nierówność /14/ względem  $\chi$  otrzymamy:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot e^{\frac{\chi^2}{2} / \frac{T_k}{T_t} / 2} < \chi < \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot e^{\frac{\chi^2}{2}} \quad . \quad /15/$$

Zależność /15/ umożliwia szybką ocenę efektywności rozszerzenia tolerancji wykonawczej, poprzez porównanie obliczonej wartości z jej wartościami granicznymi dla przyjętych  $T_t$  i  $T'$ , przy czym interpretacja takiego porównania jest następująca:

1. Jeśli

$$\chi > \frac{\sqrt{2\pi}}{2\tau} \cdot e^{\frac{\tau^2}{2}},$$

to nie ma rozwiązania optymalnego, należy przyjąć  $T_w = T_k$ , rozszerzenie tolerancji jest nieopłacalne - wystąpią tylko straty.

2. Jeśli wartość  $\chi$  jest mniejsza od górnej granicy, ale ta różnica jest niewielka, to rozwiązanie optymalne co prawda istnieje, lecz efekt ekonomiczny jest wątpliwy, ponieważ tolerancja wykonawcza będzie się mało różniła od tolerancji konstrukcyjnej.

3. Jeśli

$$\chi > \frac{\sqrt{2\pi}}{2\tau} \cdot e^{\frac{\tau^2}{2} \left( \frac{T_k}{T_t} \right)^2},$$

to rozwiązanie optymalne istnieje, ale rozszerzenie tolerancji wykonawczej ma sens ekonomiczny jedynie w przypadku istotnej różnicy pomiędzy tolerancją konstrukcyjną a tolerancją warsztatową.

4. Jeśli wartość  $\chi$  jest mniejsza od dolnej wartości granicznej, to rozwiązanie optymalne co prawda istnieje, ale ma sens jedynie teoretyczny. Wtedy należy przyjąć  $T_w = T_t$ , a rozszerzenie tolerancji wykonawczej przyniesie efekt ekonomiczny jedynie w przypadku, kiedy /podobnie jak w p.3/ tolerancja konstrukcyjna  $T_k$  będzie istotnie różnić się od tolerancji warsztatowej  $T_t$ .

5. Jeśli wartość wyrażenia  $\chi$  mieści się w przedziale podanym przez zależność /15/ i jest istotnie różna od obu wartości granicz -



nych tego przedziału, to rozszerzenie tolerancji wykonawczej względem tolerancji konstrukcyjnej jest prawdopodobnie opłacalne.

Należy zwrócić uwagę, że nasz model matematyczny przyjmuje rozkład normalny jako rozkład błędów wykonania. Jeśli stwierdzono w praktycznym przypadku taką zgodność i zastosowano przedstawioną tu metodę obliczeń, to konieczne jest okresowe sprawdzanie rozkładu, ponieważ rozkłady empiryczne są zmienne w czasie.

Do badania stabilności rozkładu można stosować metody statystycznej kontroli jakości. Wydaje się, że w omawianym przypadku najlepsze wyniki powinna dawać metoda  $\bar{x} - S$ .

#### Opis programu

1. Nazwa programu: Obliczanie tolerancji optymalnej.
2. Funkcja programu: Program oblicza optymalną tolerancję wykonawczą w oparciu o kryterium kosztu produkcji.
3. Język: ALGOL-1204.
4. Komputer: Odra 1204, zestaw standardowy.
5. Wykorzystywane procedury: Program korzysta z procedury opt.
6. Dane: Perforowane na taśmie 8-kanałowej w kodzie BCD.  
Kolejność perforowania:  
n - liczba zestawów danych do obliczeń.  
Dane do obliczeń jednego wariantu /oznaczenia, jak w wykazie parametrów formalnych procedury opt/:  
 $\tau$ , a,  $T_k$ ,  $k_{BN}$ ,  $k_{BP}$ .  
Zakończenie liczby, wiersza i taśmy - standardowe.
7. Wyniki: /oznaczenie, jak w wykazie parametrów formalnych procedury opt/  
i,  $\tau$ , a,  $T_k$ ,  $T_w$ , X1, X2, PBN, KBN, PBP, KBP, deltaK.

#### Uwaga:

- i jest kolejnym numerem obliczanego wariantu,
- jeśli nie ma rozwiązania, program drukuje nr wariantu oraz na-

pis "przekroczenie optimum".

### 8. Uruchomienie programu.

- wczytać I część programu do znaku ?
- wczytać procedurę opt,
- wczytać II część programu.

Pozostałe czynności operatorskie - standartowe.

### 9. Sygnały zatrzymania pracy EMC.

Jest tylko jeden sygnał zatrzymania przewidziany w programie. Jeśli na monitorze zostanie wydrukowana litera s, operator wprowadza z monitora datę obliczeń w nawiasach łańcuchowych w formacie ll.ll.ll.

```
10.Program begin
  integer i,n;
  real a,Tk,kBN,kBP,tau,Tw,X1,X2,PBN,KBN,PBP,KBP,deltaK;
  boolean B;
  integer array A[1:4];
  comment miejsce procedury opt;
  ?
  line(3);
  space(20);
  print('Odra 1204');
  space(34);
  print('Data obliczen');
  setinput(0);
  instring(A[1]);
  outstring(A[1]);
  setinput(1);
  line(2);
  space(30);
  print('Obliczenia tolerancji optymalnych ??
  \p-----tau-----Tk-----Tw-----X1-----X2-----PBN
  -----KBN-----PBP-----KBP-----deltaK?');
  read(n);
  for i=1 step 1 until n do
    begin
      read(tau,a,Tk,kBN,kBP);
      opt(a,Tk,kBN,kBP,tau,B,Tw,X1,X2,PBN,KBN,PBP,KBP,deltaK);
      if ~B
        then
          begin
            format('111');
            line(1);
            print(i);
            space(5);
            print('przekroczenie optimum')
          end
        else
          begin
            format(
            '7111-----0.111-----0.111-----0.111-----0.111-----0.111-----0.11
            1-----0.111-----0.111-----00.111-----00.111');
            print(i,tau,a,Tk,Tw,X1,X2,PBN,KBN,PBP,KBP,deltaK)
          end
        end
      end
    end
  end
```

## Opis parametrów formalnych procedury opt

a - współczynnik wzrostu kosztu produkcji,

T<sub>k</sub> - tolerancja konstrukcyjna,

k<sub>BN</sub> - koszt jednostkowy braku nienaprawialnego,

k<sub>BP</sub> - koszt jednostkowy naprawy braku naprawialnego,

tau - współczynnik określający stosunek  $\frac{T_w}{2\sigma}$  /zwykle tau = 3 na podstawie reguły trzysigmowej/,

B - zmienna logiczna, która w treści procedury otrzymuje wartość false, jeśli nie ma rozwiązania,

T<sub>w</sub> - tolerancja wykonawcza,

X<sub>1</sub> - dolna granica sztuk dobrych,

X<sub>2</sub> - górna granica sztuk dobrych,

PBN - prawdopodobieństwo wystąpienia braku nienaprawialnego,

KBN - prawdopodobny koszt braku nienaprawialnego w odniesieniu do jednostki wyrobu,

PBP - prawdopodobieństwo wystąpienia braku naprawialnego,

KBP - prawdopodobny koszt naprawy braku naprawialnego w odniesieniu do jednostki wyrobu,

deltaK - różnica kosztu wykonania w tolerancji T<sub>k</sub> i T<sub>w</sub>.

```

procedure opt(a,Tk,kBN,kBP,tau,B,Tw,X1,X2,PBN,KBN,PBP,KBP,
  deltaK);
  value a,Tk,kBN,kBP,tau;
  real a,Tk,kBN,kBP,tau,Tw,X1,X2,PBN,KBN,PBP,KBP,deltaK;
  Boolean B;
  comment Procedura opt oblicza wartosc tolerancji optymalnej
    w oparciu o kryterium kosztu produkcji;
  begin
    integer b;
    real e,x1,x2,z,z1,s,S,E,alfa1,alfa2,v,suma;
    b:=1;
    Tw:=Tk;
  E1:
    e:=.25*Tw*Tw*ln(kBN/kBP)/(Tk*tau*tau);
    x1:=.5*Tk+e;
    x2:=.5*Tk-e;
    z:=tau*x1/Tw;
    z1:=tau*(Tk-x1)/Tw;
    s:=x1*exp(-2*z*z)*kBN+(Tk-x1)*exp(-2*z1*z1)*kBP-1.253314*a/
      tau;
  
```

```

if b=1
then
begin
S:=abs(s);
b:=2;
Tw:=Tw+.001;
go to E1
end;
if b=2
then
begin
if abs(s)>S
then
begin
B:=false;
go to END
and
else
begin
B:=true;
b:=3
end
end;
if abs(s)<S
then
begin
E:=s;
X1:=x1;
X2:=x2;
S:=abs(s);
Tw:=Tw+.001;
go to E1
and
else
begin
suma:=0;
Tw:=Tw-.001;
alfa1:=2*tau*X1/Tw;
alfa2:=2*tau*X2/Tw;
for v=0 step .001 until alfa1 do
suma:=suma+.001*exp(-.5*v*v);
PBN:=.5-.398942*suma;
KBN:=PBN*kBN;
suma:=0;
for v=0 step .001 until alfa2 do
suma:=suma+.001*exp(-.5*v*v);
PBP:=.5-.398942*suma;
KBP:=PBP*kBP;
deltaK:=a/Tk-a/Tw;
END;
and
and;

```

Przykładowe dane

10				
3	.02	.05	2	2
3	.04	.03	15	3
3	.008	.05	19	9
3	.01	.12	15	2
3	.02	.05	90	2
3	.015	.018	28	5
3	.02	.02	40	3
3	.05	.04	30	4
3	.06	.01	60	10
3	.07	.03	70	8

Odra 1204

Data obliczeń 26.10.72

obliczenia tolerancji optymalnych

lp	tau	a	Tk	Tw	x1	x2	PEW	KBN	FBP	KBP	delta
1	3.0	0.020	0.050	0.067	0.025	0.025	0.012	00.025	0.012	00.025	00.101
2	3.0	0.040	0.030	0.041	0.018	0.012	0.005	00.075	0.034	00.101	00.350
3		przekroczenie optimum									
4		przekroczenie optimum									
5	3.0	0.020	0.050	0.052	0.031	0.019	-0.000	-00.000	0.013	00.026	00.015
6	3.0	0.015	0.018	0.020	0.010	0.006	0.001	00.030	0.008	00.042	00.083
7	3.0	0.020	0.020	0.024	0.012	0.008	0.001	00.043	0.024	00.071	00.167
8	3.0	0.050	0.040	0.049	0.023	0.017	0.002	00.057	0.021	00.062	00.230
9	3.0	0.060	0.010	0.014	0.006	0.004	0.005	00.302	0.042	00.421	01.714
10	3.0	0.070	0.030	0.036	0.018	0.012	0.001	00.103	0.019	00.154	00.369

ESTABLISHMENT OF OPTIMIZING WORKING TOLERANCES  
WITH THE CRITERION OF PRODUCTION COSTS

/Summary/

Elaborated by the author analytical method of optimizing working tolerances with the point of view of production costs was given. Calculations was done with calculus of probability and statistical method. This problem leads to equations impossible to solve with general methods. The use of computers was recommended by the author. All the calculations may be done with procedure opt written in ALGOL-60. General routine written in ALGOL-1204 is recommended for computer Odra-1204.

УСТАНОВЛИВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ДОПУСКОВ  
В ВИДЕ КРИТЕРИЯ ИЗДЕРЖЕК ПРОИЗВОДСТВА

/Резюме/

В статье представлен автором метод вычисления оптимальных производственных допусков рассматриваемых с точки зрения издержек производства. Вычисления проведены с применением теории вероятностей и методов математической статистики.

Так поставленная задача ведёт к системе уравнений, которую невозможно решить общими методами. Автор предлагает применение электронных вычислительных машин. Целое вычисление реализуемое процедурой написанной на языке ALGOL - 60.

Главная программа написана на языке ALGOL - 1204. даёт возможность вести вычисления ЭВМ Odra - 1204.

Edward Walicki

PRZEPIYW CIECZY LEPKIEJ  
KANALEM O PRZEKROJU OGRANICZONYM ŁUKAMI  
ELIPS I HIPERBOL

W pracy zbadano ustalony przepływ cieczy lepkiej przez poziomy kanał o przekroju ograniczonym łukami elips i hiperbol. Równanie, opisujące rozważany ruch cieczy, rozwiązano, wprowadzając współrzędne eliptyczne. Podano zależność, opisującą rozkład prędkości cieczy w kanale oraz zależność, określającą wydatek objętościowy przepływającej cieczy.

W pracy rozpatrywany jest ustalony przepływ cieczy lepkiej przez cylindryczny kanał, jako dwuwymiarowy przepływ płaski. Równania Naviera i Stokesa oraz równanie ciągłości, opisujące dowolny przepływ cieczy lepkiej [4], redukują się do równania /1/ wiążącego jedyną składową prędkości przepływu  $w = w(x,y)$  z ciśnieniem  $p = p(z)$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{K}{\gamma} ; \quad /1/$$

tutaj oznaczono:

$$K = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = \text{const.} \quad - \text{gradient ciśnienia,}$$

$\gamma$  - lepkość kinematyczna cieczy,

$\rho$  - gęstość cieczy.

Założono przy tym, że pole sił masowych jest pomijalnie małe.

Stosując równanie /1/ do przepływu ograniczonego krzywoliniowym brzegiem, dogodnie jest wprowadzić współrzędne krzywoliniowe przy pomocy odwzorowania konformnego:

$$z = z / \zeta /,$$

gdzie:

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Wtedy lewa strona równania /1/ ulega ogólnie znanemu przekształceniu [1]:

$$\frac{\partial^2 N(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N(x, y)}{\partial y^2} = \left[ \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 N(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|^2; \quad /2/$$

tutaj:  $N[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \equiv N(\xi, \eta)$

Dla przepływu określonego w tytule pracy można przyjąć funkcję odwzorowującą w postaci:

$$z = c \sin \zeta, \quad /3/$$

lub po rozwinięciu lewej strony:

$$z = c(\sin \xi \cosh \eta + i \cos \xi \sinh \eta),$$

gdzie  $c$  jest rzeczywistą stałą związaną z liniami ograniczającymi brzeg przekroju kanału; równanie /1/ sprowadza się, po zastosowaniu odwzorowania /3/, do równania:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} = -\frac{K}{\nu} c^2 (\cosh^2 \eta - \sin^2 \xi) \quad /4/$$

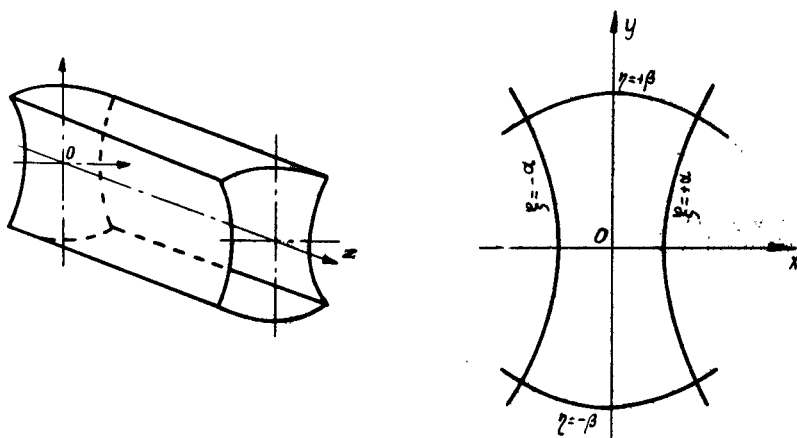


Rozwiązanie równania /4/ musi spełniać warunek przylegania cieczy do ścianek kanału. Łuki elips i hiperboli, ograniczające brzeg przekroju kanału /rys.1/, określone są teraz zależnościami:

$$\eta = \pm \beta \quad \xi = \pm \alpha$$

a stałe  $\alpha$  i  $\beta$ , mające praktyczne znaczenie, zawarte są w przedziałach

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 < \beta \leq \pi$$



Rys. 1

Zatem warunek brzegowy dla równania /4/ wyrazi się równościami:

$$w = 0 \quad \text{dla} \quad \xi = \pm \alpha \quad /5/$$

$$w = 0 \quad \text{dla} \quad \eta = \pm \beta \quad /6/$$

Rozwiązania równania /4/ poszukiwać będziemy w postaci:

$$w = \frac{Kc^2}{8\nu} (\cos 2\xi - \cos 2\alpha - \cosh 2\eta + \cosh 2\beta) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \xi \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \eta + B_n \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2\beta} \xi \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\beta} \eta \right]. \quad /7/$$

Uwzględnienie we wzorze /7/ warunków brzegowych /5/ i /6/ prowadzi do zależności:

$$\frac{Kc^2}{8\gamma} (\cosh 2\beta - \cosh 2\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cosh \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2\beta} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\beta} \eta. \quad /8/$$

oraz

$$\frac{Kc^2}{8\gamma} (\cos 2\xi - \cos 2\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cosh \frac{(2n+1)\pi\beta}{2\alpha} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \xi. \quad /9/$$

Rozwijając lewe strony powyższych zależności w szeregi Fouriera względem cosinusów [2,3] i porównując współczynniki, stojące po obu stronach otrzymanych równości, znajdziemy:

$$A_n = -\left(\frac{4\alpha c}{\pi}\right)^2 \frac{Kc \cos 2\alpha}{2\pi\gamma} \frac{(-1)^n \operatorname{sech} \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \beta}{\left[\left(\frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 - (2n+1)^2\right] (2n+1)} \quad /10/$$

$$B_n = \left(\frac{4\beta c}{\pi}\right)^2 \frac{K\beta \cosh 2\beta}{2\pi\gamma} \frac{(-1)^n \operatorname{sech} \frac{(2n+1)\pi}{2\beta} \alpha}{\left[\left(\frac{4\beta}{\pi}\right)^2 + (2n+1)^2\right] (2n+1)} \quad /11/$$

Zauważmy, że wzór określający  $A_n$  staje się wyrażeniem nie oznaczonym dla  $n = 0$  i  $\alpha = \pi/4$ . Stosując regułę de L'Hospitala, znajdujemy granicę:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\alpha}{\frac{4\alpha}{\pi} - 1} = -\frac{\pi}{2};$$

zatem współczynniki  $A_n$  są określone dla dowolnych wartości  $\alpha/z$  prze -  
działu zmienności/ i dla każdego  $n$ .

Podstawiając wyrażenia /10/ i /11/ do wzoru /7/ otrzymujemy zależność ,  
określającą rozkład prędkości przepływającej cieczy:

$$w = \frac{Kc^2}{8\nu} (\cos 2\xi - \cos 2\alpha - \cosh 2\eta + \cosh 2\beta) +$$

$$+ \left(\frac{4\alpha c}{\pi}\right)^2 \frac{Kc \cos 2\alpha}{2\pi\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sech} \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \beta}{\left[\left(\frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 - (2n+1)^2\right] (2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \xi \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \eta +$$

$$- \left(\frac{4\beta c}{\pi}\right)^2 \frac{Kc \cosh 2\beta}{2\pi\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sech} \frac{(2n+1)\pi}{2\beta} \alpha}{\left[\left(\frac{4\beta}{\pi}\right)^2 + (2n+1)^2\right] (2n+1)} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2\beta} \xi \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\beta} \eta.$$

Natomiast wydatek objętościowy cieczy określa wyrażenie:

$$Q = \iint_F w dF = \iint_F w(x,y) dx dy = \iint_F w(\xi, \eta) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta, \quad /13/$$

gdzie:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{c^2}{2} (\cos 2\xi + \cosh 2\eta). \quad /14/$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$Q = \frac{Kc^4}{32\nu} (\beta \sin 4\alpha - \alpha \sin 4\beta) + \frac{Kc^4}{8\nu} (\beta \cosh 2\beta \sin 2\alpha +$$

$$- \alpha \cos 2\alpha \sinh 2\beta) +$$

$$- \left(\frac{4\alpha}{\pi}\right)^4 \frac{Kc^4 \alpha \cos 2\alpha}{4\pi\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi\beta}{2\alpha}}{\left[\left(\frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 - (2n+1)^2\right] (2n+1)} \left[ \cos 2\alpha +$$

$$+ \cosh 2\beta - \frac{4\alpha}{(2n+1)\pi} \sinh 2\beta \operatorname{ctgh} \frac{(2n+1)\pi\beta}{2\alpha} \right] + \quad /15/$$

$$- \left(\frac{4\beta}{\pi}\right)^4 \frac{Kc^4 \beta \cosh 2\beta}{4\pi\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2\beta}}{\left[\left(\frac{4\beta}{\pi}\right)^2 + (2n+1)^2\right] (2n+1)} \left[ \cos 2\alpha +$$

$$+ \cosh 2\beta + \frac{4\beta}{(2n+1)\pi} \sin 2\alpha \operatorname{ctgh} \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2\beta} \right].$$

Wprowadzone wyżej wzory określające pole przepływu w rozważanym kanale słuszne są jedynie dla dostatecznie małych prędkości, zapewniających istnienie laminarnego przepływu. Małe prędkości, dopuszczając założenie o dwuwymiarowym charakterze przepływu, pozwalają również na pominięcie zjawisk przepływu wtórnego, pojawiającego się przy narożach kanału.

#### Literatura

1. Babicz W.M. i inni: Równania liniowe fizyki matematycznej. PWN, Warszawa 1970.
2. Daniłow W.Ł. i inni: Funkcje, granice, szeregi, ułamki łańcuchowe. PWN, Warszawa 1970.
3. Gradsztein I.S., Ryzżyk I.N.: Tablice całek, sum, ciągów i przewidywań. Izd. Nauka, Moskwa 1971.
4. Prosnak W.J.: Mechanika płynów, t.I, PWN, Warszawa 1970.

#### VISCOUS FLUID FLOW THROUGH A CHANNEL BOUNDED BY ARCS OF ELLIPSE AND HIPERBOLAS

#### /Summary/

In this work the steady viscous fluid flow through a horizontal channel bounded by arcs of ellipse and hiperbolas is examined. Equation which described this flow has been solved by introduce elliptic coordinates. The formulae described the velocity distribution and flux of flowing fluid are given.

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ КАНАЛ С СЕЧЕНИЕМ  
ОГРАНИЧЕННЫМ ДУГАМИ ЭЛЛИПСОВ И ГИПЕРБОЛ

/Резюме/

В работе исследовано стационарное течение вязкой жидкости через горизонтальный канал с сечением ограниченным дугами эллипсов и гипербол. Уравнение описывающее рассматриваемое движение жидкости разрешено введением эллиптических координат. Выведены формулы определяющие распределение скорости и расхода текущей жидкости.



Bronisław Siołkowski

## HYDRODYNAMICZNE ODDZIAŁYWANIE MIESZANEJ CIECZY NA MIESZADŁO

W pracy podjęto próbę określenia sił oddziaływania mieszanej cieczy na mieszadło. Znajomość tych sił jest niezbędna do analizy dynamicznej elementów ruchomych mieszalników mechanicznych. Punktem wyjścia do rozwiązania tego problemu są analiza kinetyczna mieszadła i wielkości hydrodynamiczne, służące do oceny pracy różnych typów mieszalników. Rozpatruje się tu mieszadła turbinowe i śmigłowe, które stanowią tzw. grupę mieszadeł wysokoobrotowych, bardziej złożonych pod względem dynamicznym.

### 1. Wstęp

Analiza dynamiczna wysokoobrotowych mieszadeł cieczy wymaga dokładnego określenia oddziaływania mieszanego ośrodka na poruszające się mieszadła. Oddziaływanie to, zwane siłami hydrodynamicznymi, można podzielić na siły oporu poruszającego się w cieczy mieszadła i reakcję wytworzonego strumienia cieczy. Pierwsze będą zależały od składowych ruchów mieszadła<sup>x/</sup>, a drugie - od strumieni cyrkulacyjnych w mieszalnikach.

---

x/ Siły oddziaływania cieczy na wał mieszadła pomija się jako małe w stosunku do sił oddziaływania cieczy na mieszadło.

Ruch mieszadła w wyniku niewyważenia jego mas i oddziaływania mieszanego ośrodka jest ruchem kulistym. Może to być ruch precesyjny prosty lub odwrotny, sygnalizacyjny lub asynchroniczny. Zakładając, że odchylenia osi obrotu wału mieszadła są nieduże, można ruch mieszadła rozłożyć na ruch obrotowy /obrót własny/ i ruch poprzeczny płaski, będący superpozycją dwóch ruchów drgających o kierunkach ortogonalnych. Stąd można mówić o określonym momencie oporowym oporze ruchu obrotowego i o siłach oporu poprzecznego, zwanych w literaturze [1] siłami stycznymi oporu przy ruchu precesyjnym.

W hydrodynamicznej ocenie pracy mieszalników wprowadzono pojęcie cyrkulacji okrężnej, zwanej pierwotną, oraz cyrkulacji promieniowo-osiowej, zwanej wtórną.

Efektom cyrkulacji okrężnej, w przypadku zbiornika bez przegród jest wir centralny, który zmienia rozkład ciśnień hydrodynamicznych. Większe ciśnienia występują w przestrzeni pod mieszadłem, a mniejsze - nad mieszadłem. Jest to jedna z przyczyn powstawania siły osiowej. W przypadku, gdy w zbiorniku znajdują się przegrody, cyrkulacja okrężna zostaje zaburzona, zmniejsza się zdecydowanie wir centralny, ale pojawiają się cząstkowe strumienie okrężne, odbite od listew, powracające w obszar pracy mieszadła. Strumienie te wywołują dodatkowe siły styczne o charakterze zmiennym, udarowym.

Cyrkulacja promieniowo-osiowa związana jest z działaniem pompującym mieszadła, określonym wydajnością pompowania. Wyrzucony przez mieszadło strumień, w płaszczyźnie południkowej może być w przeważającej mierze strumieniem promieniowym /mieszadła turbinowe o łopatkach prostych/ lub strumieniem osiowym /mieszadła śmigłowe/ lub też strumieniem promieniowo-osiowym /mieszadła turbinowe o łopatkach pochylonych/. Tytułujący z mieszadła strumień wywołuje powstanie reakcji dynamicznych o zwrocie przeciwnym do jego prędkości, a więc mogą one mieć kierunek promieniowy, osiowy lub promieniowo-osiowy.



Ze względu na kierunek działania, siły hydrauliczne można po - dzielić na siły styczne, promieniowe i osiowe. Omówimy je w kolejności.

## 2. Siły styczne

Siły styczne są efektem oporu poruszającego się w cieczy mieszadła i efektem odbicia od listew strumieni cyrkulacji okrężnej. Ze względu na dwa składowe ruchy mieszadła w cieczy /obrot własny i prece - sja/ można mówić o dwóch rodzajach sił stycznych oporu i siłach stycznych wymuszających.

### 2.1. Siły styczne obrotu własnego

Siły styczne obrotu własnego wywołują moment oporowy, który -za - kładając, że jest równy momentowi obrotowemu- da się łatwo określić na podstawie charakterystyk mocy mieszania. Znajomość tego momentu jest nie - zbędna do analizy dynamicznej ruchów skrętnych. W oparciu o wymienioną w spisie literatury pozycję [2] możemy go zapisać:

$$/2.1/ \quad M_s = \frac{L_m \cdot d^5 \cdot \xi \cdot \omega^2}{8 \pi^3},$$

gdzie:

- $L_m$  - bezwymiarowy współczynnik mocy, zależny od liczby Reynoldsa oraz wielkości i kształtów mieszadła i zbiornika,
- $d$  [m] - średnica mieszadła,
- $\xi$  [kg/m<sup>3</sup>] - gęstość mieszanego ośrodka,
- $\omega$  [1/s] - prędkość kątowna mieszadła.

W przypadku perturbacji ruchu obrotowego nastąpi przyrost momentu opo - rowego o  $\Delta M_s$ , który można określić jako różniczkę następującym wzorem:

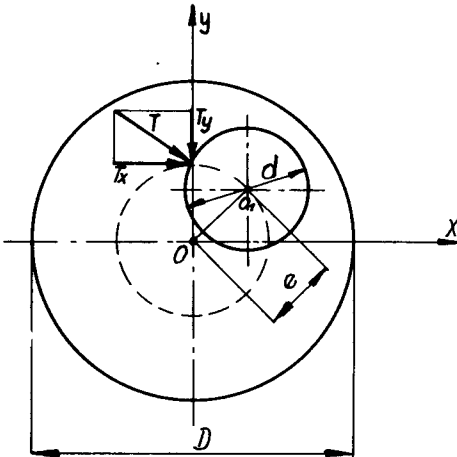
$$/2.2/ \quad \Delta M_s = \frac{L_m \cdot d^5 \cdot \xi \cdot \omega}{4 \pi^3} \dot{\psi}$$

gdzie:

$\dot{\varphi}$  - przyrost prędkości kątowej  $\omega$  wywołany zakłóceniem.

## 2.2. Siły styczne precesji

Jak już wspomniano we wprowadzeniu, precesję ruchu mieszadła można zastąpić dwoma ruchami drgającymi, gdyż wychylenia poprzeczne wału są nieduże. Tak więc można mówić o całkowitej sile stycznej oporu precesji lub o jej składowych o kierunkach ruchów drgających.



Rys.1

Oznaczenia:

$T$  - siła styczna precesji,

$T_x, T_y$  - składowe siły precesji,

$e$  - dynamiczne ugięcie wału w miejscu zamocowania mieszadła,

$d$  - średnica mieszadła,

$D$  - średnica zbiornika.

Ogólnie składowe siły precesji można określić:

$$\begin{aligned} /2.3/ \quad T_x &= h_x \dot{x} \\ T_y &= h_y \dot{y}, \end{aligned}$$

gdzie:

$h_x, h_y$  - współczynniki oporu wiskotycznego,

$x, y$  - składowe prędkości środka mieszadła.

W pracy [1] wyprowadzone zostały wzory na siłę styczną i jej składowe przy założeniu, że ruch precesyjny jest precesją prostą synchroniczną.

Wzory te, z dokładnością do znaku, są następujące:

$$\begin{aligned} T &= C d^3 g \omega^2 e \\ /2.4/ \quad T_x &= C d^3 g \omega \dot{x} \\ T_y &= C d^3 g \omega \dot{y}, \end{aligned}$$

gdzie:

$C$  - bezwymiarowy współczynnik zależny od liczby Reynoldsa oraz rodzajów i wymiarów mieszadła i zbiornika.

Dla mieszadeł turbinowych otwartych i zamkniętych oraz mieszadeł śmigłowych doświadczalnie określone wartości współczynnika  $C$  podane są w cytowanej wyżej pracy [1].

### 2.3. Siły styczne wymuszające

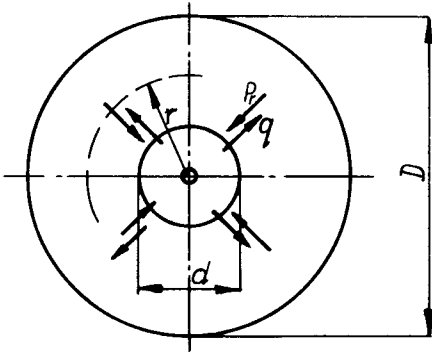
Siły styczne wymuszające występują wówczas, gdy zbiornik mieszalnika wyposażony jest w przegrody, czyli listwy, ustawione wzdłuż tworzących zbiornika. Od listew tych odbijają się strumienie cyrkulacji okrężnej i zwracają w obszar mieszadła. Wywołują one dodatkowy moment oporowy, znacznie większe zużycie mocy i dodatkowe stochastyczne działanie poprzeczne na mieszadło. Ilościowe określenie tych sił jest niezmiernie trudne.

### 3. Siła promieniowa

Siła promieniowa, działająca na mieszadło, jest wypadkową reakcją strumienia, wypływającego promieniowo z mieszadła. Można ją określić na podstawie hydrodynamicznej charakterystyki mieszadła, jaką jest wydajność pompowania. Opierając się na pracy [6], wydajność pompowania możemy zapisać:

$$/3.1/ \quad q = a \omega d^3,$$

gdzie:



Rys.2

$a$  - bezwymiarowa stała charakterystyczna dla danego typu mieszadła. Promieniowa reakcja dynamiczna, działająca jako obciążenie ciągłe  $pr$ , zwrócone do osi obrotu /rys.2/, wyrazi się następująco:

$$/3.2/ \quad pr = \frac{\rho q v}{2 \pi r} = \frac{\xi q}{2 \pi r} \cdot \frac{q}{2 \pi r b} = \frac{\rho q^2}{4 \pi^2 b r^2},$$

gdzie:

- $r$  - zmienny promień odmierzony od środka mieszadła,
- $b$  - wysokość strumienia /wysokość łopatki/,
- $v$  - prędkość promieniowa strumienia cieczy.

Gdy mieszadło wiruje dokładnie w osi zbiornika, to siły promieniowe wzajemnie się równoważą. Natomiast w przypadku, gdy mieszadło odchyli się od położenia środkowego, np. o wielkość  $e$  /rys.1/, to pojawi się wypadkowa siła promieniowa, której wielkość można określić następująco:

$$/3.3/ \quad P_r = \left[ \frac{pr}{r = r_1} - \frac{pr}{r = r_2} \right] \cdot d,$$

gdzie:

$$r_1 = \frac{D}{2} - e, \quad a \quad r_2 = \frac{D}{2} + e$$

Po podstawieniu zależności /3.1/ i /3.2/ do /3.3/ i przy założeniu, że

$$e \ll \frac{D}{2}, \quad \text{otrzymamy:}$$

$$/3.4/ \quad P_r = \frac{8a^2 \cdot g \cdot \omega^2 \cdot d^7 \cdot e}{\pi^2 \cdot b \cdot D^3} .$$

Jeżeli uwzględnimy, że  $b = k \cdot d$ , to ostateczny wzór na siłę promieniową będzie:

$$/3.5/ \quad P_r = K \cdot g \cdot d^3 \cdot \omega^2 \cdot e ,$$

gdzie:

$$/3.6/ \quad K = \frac{8 a^2}{\pi^2 k} \cdot \left/ \frac{d}{D} \right/ ^3 .$$

W pracach, omawiających zagadnienia hydrodynamiczne w mieszalnikach, można znaleźć wartości współczynnika  $a$ , a dla różnych typów mieszadeł i mieszalników znany jest współczynnik  $b$  i stosunek  $\frac{d}{D}$ . Stąd można obliczyć współczynnik  $K$ , określony wzorem /3.6/. W pracy [5] obliczono go dla mieszadła turbinowego sześciopatkowego dyskowego. Natomiast w pracy [1] jest on określony doświadczalnie dla mieszadeł turbinowych otwartych i zamkniętych oraz mieszadeł śmigłowych.

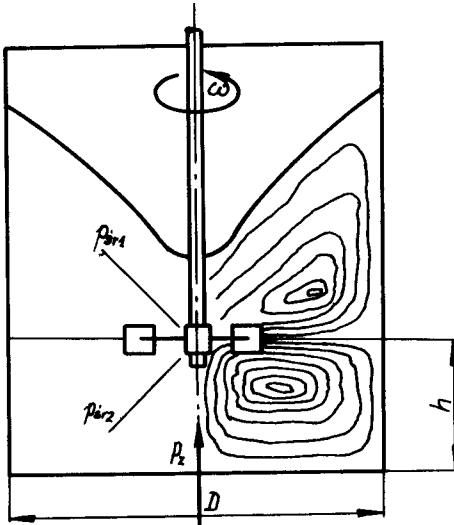
#### 4. Siły osiowe

Siły osiowe powstają jako wtórny efekt cyrkulacji pierwotnej w zbiornikach bez przegród i jako efekt odrzutu osiowego wypływającego z mieszadła strumienia.

##### 4.1. Osiowa siła powierzchniowa

Osiowa siła powierzchniowa występuje wówczas, jeżeli mieszadło posiada znaczną powierzchnię prostopadłą do osi wału i gdy na przeciwległych elementach powierzchniowych występuje różnica ciśnień. Ma to miejsce w przypadku mieszadeł turbinowych otwartych dyskowych, lub zamkniętych, pracujących w zbiornikach bez przegród. W przypadku zbiornika bez prze-

gród występuje wir centralny, a więc struktura wtórnego strumienia cyrkulacyjnego w mieszalniku jest taka, jak na rysunku 3.



Rys.3

Asymetryczna struktura wtórnego strumienia cyrkulacyjnego nad i pod mieszadłem jest przyczyną powstania różnic ciśnień, przy czym:

$$P_{\text{śr}2} > P_{\text{śr}1}, \text{ a stąd}$$

$$/4.1/ \quad P_z = /p_{\text{śr}2} - p_{\text{śr}1}/ \cdot F,$$

lub ogólnie można ją określić funkcją:

$$/4.2/ \quad P_z = f / \omega, \gamma, Re, d, h, D/,$$

gdzie:

Re - liczba Reynoldsa.

Funkcja ta jest bliżej nieznaną,

gdyż pomiary siły  $P_z$  nie zostały

wykonane, a charakterystyki hydrodynamiczne, określone doświadczalnie, nie pozwalają na jej obliczenie.

#### 4.2. Osiowa siła odrzutu

Osiowa siła odrzutu występuje w mieszalnikach o strumieniu cyrkulacyjnym osiowym lub promieniowo-osowym.

W literaturze [3] za pośrednictwem nacisku na dno zbiornika określa się doświadczalnie wydajność pompowania dla mieszadeł śmigłowych o strumieniu osiowym.

Zgodnie z zasadą akcji i reakcji, reakcją siły nacisku na dno naczynia /pomijając siłę ciężkości/ będzie siła osiowa oddziaływania mieszanej cieczy na mieszadło, zwrócona do góry. W cytowanej pracy siłę tę określono:

$$/4.3/ \quad F_z = \gamma q v \cos \alpha,$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem odchylenia strumienia od pionu, co ma miejsce tuż przy dnie. Wartość tego kąta wynosi około  $20^\circ$ . Na wylocie z wirnika kąt ten jest mniejszy i można przyjąć  $\cos \alpha \approx 1$ . Stąd siła osiowa działająca na mieszadło wyniesie:

$$/4.4/ \quad P_z = g q v = \frac{4 g q^2}{\pi d^2},$$

a po podstawieniu /3.1/:

$$/4.5/ \quad P_z = 1,274 a^2 g \omega^2 d^4.$$

#### 5. Uwagi końcowe

W wielu pracach, dotyczących dynamiki ruchu mieszadeł, można spotkać porównywanie zjawisk dynamicznych w mieszadłach do zjawisk zachodzących w pompach lub turbinach o analogicznym usytuowaniu osi mieszadeł i wirników. Porównywanie takie może w wielu przypadkach prowadzić do błędnych wniosków, gdyż przepływy cieczy w pompach lub turbinach mają inny charakter niż w mieszadłach, a więc siły hydrauliczne będą posiadały inne składowe. To jest między innymi przyczyną różnic w stateczności ruchu mieszadeł i turbin.

#### Literatura

1. Afonin O.D., Milczenko A.J., Michaliew F.M.: K rasczotu wałow bystrochodnych mieszalok. *Chimiczeskoje i nieftianoje maszynostrojenije* Nr 12, 1971.
2. Błasiński H.: Doświadczalne porównanie szeregu metod pomiaru mocy mieszania. *ZNPE Chemia* Nr 11, 1961.
3. Fort I., Tómes L.: The Action of a Stream from a Propeller Mixer on the Bottom of a Mixing Vessel. *Collection Czechoslov. Chem. Commun.* Vo 1. 32 1967.

4. Ružicka J.: Vliv vedlejších účinků na počet kritických o tacek letmo uložených míchadel. Strojirenstvi Nr 8, 1969.
5. Siołkowski B.: Wpływ parametrów mechanicznych na stany krytyczne mieszadeł cieczy. Praca doktorska AGH, Kraków 1972.
6. Stręk F.: Mieszanie i mieszalniki. WNT Warszawa 1971.

#### HYDRODYNAMIC REACTION OF MIXED LIQUID ON THE MIXER

##### /Summary/

In the paper there have been determined reaction forces of mixed liquid on the mixer. The knowledge of these forces is necessary for dynamic analysis of movable elements of the mechanical mixers. It has been considered the propeller and turbine mixers making a group of high-speed mixers.

#### ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ РАЗМЕШИВАЕМОЙ СРЕДЫ НА МЕШАЛКУ

##### /Резюме/

Автор статьи определил силы действия размешиваемой среды на мешалку. Знание этих сил необходимо в динамическом анализе мешалок. Величины и наклонения сил зависят от типов мешалок и резервуаров. Автор рассматривает силы в быстроходных турбинных и пропеллерных мешалках.



Bronisław Siołkowski

#### MODELOWANIE DYNAMICZNE WAŁU Z MIESZADŁEM

W pracy opisano budowę modelu dyskretnego wału z mieszadłem, zamocowanym na jego końcu. Obliczenia wielkości i położeń skupionych mas wału wykonane zostały w oparciu o obliczone częstotliwości drgań swobodnych układu rzeczywistego. Model dyskretny posiada dwa stopnie swobody, a więc nadaje się do analizy dynamicznej wału z mieszadłem wirującym z prędkościami: poniżej pierwszej częstotliwości krytycznej i między pierwszą a drugą częstotliwością krytyczną drgań giętnych. Zbudowany model dyskretny dotyczy często spotykanych wałów pionowych, podpartych swobodnie jednostronnie, o stosunku rozstawu podpór do całkowitej długości wału  $A = 0 \div 0,3$ .

#### 1. Wstęp

Dążenie do zwiększenia parametrów maszyn podkreśliło znaczenie sił dynamicznych i stworzyło konieczność prowadzenia intensywnych badań, zarówno doświadczalnych, jak i teoretycznych. Analiza dynamiczna rzeczywistych elementów ruchomych maszyn napotyka na bardzo duże trudności natury matematycznej. Wymagane jest wówczas zastępstwo elementu, czy grupy elementów rzeczywistych o masie rozłożonej w sposób ciągły, modelem o masach skupionych, czyli modelem dyskretnym.

W pracy wykonano dyskretny model wału z mieszadłem, dla którego wymagana jest analiza ruchu w paśmie częstości własnych między pierwszą, a drugą częstością harmoniczną drgań giętnych. Budowę modelu dyskretnego jako równoważnego - w określonym sensie - układowi rzeczywistemu, przeprowadzono w ten sposób, że porównano podstawowe i drugie harmoniczne częstości drgań swobodnych. Układ rzeczywisty wału z mieszadłem potraktowano jako układ ciągły z masą skupioną na końcu. Taki układ występuje bardzo często w mieszalnikach mechanicznych z mieszadłami turbinowymi lub śmigłowymi. Do obliczeń wału, jako układu ciągłego, przyjęto wał o stałym przekroju, co znacznie ułatwiło obliczenia, a nie zawężyło stosowalności wyników, gdyż w rzeczywistych wałach z reguły stopniowanie średnic występuje w obszarze międzypodporowym, zaś wpływ tego odcinka masy wału na dynamikę jego końca z mieszadłem jest niewielki. Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej "Odra 1204" dla stosunku rozstawu podpór do długości wału  $A = 0,1 + 0,3$  i stosunku masy mieszadła dla masy wału  $k = 0 + 0,3$ .

## 2. Obliczenie częstości drgań własnych wału z mieszadłem, jako układu ciągłego

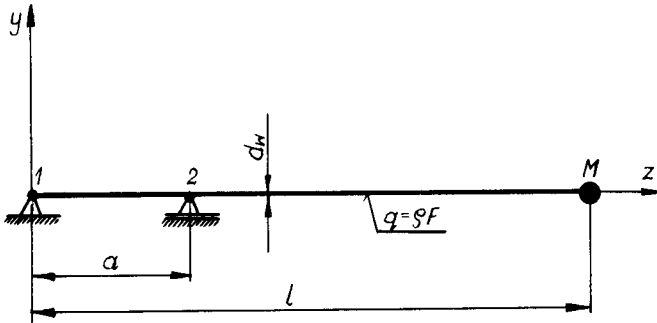
Do obliczeń częstości drgań własnych wału z mieszadłem można zastosować uproszczone równanie ruchu drgającej poprzecznie belki  $x/$  o masie rozłożonej w sposób ciągły /rys.1/.

Równanie ruchu drgającego poprzecznie wału ma postać:

$$/2.1/ \quad EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

---

x/ Wpływ momentów żyroskopowych, który odróżnia drgania wirującego wału od drgań belki, dla wałów z mieszadłami rozpatrywanego typu, jak wykazano w pracy [6], jest niewielki.



Rys. 1

Oznaczenie:

- $E I$  [ $\text{Nm}^2$ ] - sztywność wału na zgięcie,
- $q$  [ $\text{kg/m}$ ] - jednostkowa masa wału,
- $M$  [ $\text{kg}$ ] - masa mieszadła,
- $\rho$  [ $\text{kg/m}^3$ ] - gęstość stali,
- $F$  [ $\text{m}^2$ ] - przekrój poprzeczny wału.

Rozwiązaniem równania /2.1/ jest iloczyn dwóch funkcji:

$$/2.2/ \quad y = v \sin / \omega t + \psi / ,$$

gdzie amplituda:

$$/2.3/ \quad v = A S / \alpha, z / + B T / \alpha, z / + C U / \alpha, z / + D V / \alpha, z / .$$

W równaniu /2.3/ oznaczono:

$A, B, C, D$  - stałe określane z warunków brzegowych,

$S, T, U$  i  $V$  - kombinacje funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych,

tzw. funkcje Kryłowa [5] ,

$$/2.4/ \quad \alpha^4 = \omega^2 \frac{q}{EI} ,$$

$\omega$  [1/s] - częstotści własne.

Równanie /2.3/ posłuży nam do wyznaczenia częstotści własnych. Wykorzystując warunki brzegowe podpory 1:  $v|_{z=0} = 0$  i  $v''|_{z=0} = 0$ , uprościmy wzór do postaci:

$$/2.5/ \quad v = B T / \alpha, z / + D V / \alpha, z / .$$

Równanie /2.5/ ważne jest dla części międzypodporowej wału, a więc dla  $0 \leq z \leq a$ . Dla pozostałej części wału, a więc dla  $a \leq z \leq l$ , równanie to musi zawierać składnik, uwzględniający reakcję podpory 2.

Równanie to możemy zapisać:

$$/2.5'/ \quad v = BT / \alpha, z/ + DV / \alpha, z/ + \frac{R}{\alpha^3 EI} v [\alpha, z-a/],$$

gdzie:

R - reakcja podpory 2.

Podstawiając do równania /2.5'/ warunki brzegowe podpory 2 i swobodnego końca:

$$/v/_{z=a} = 0, \quad /v''/_{z=1} = 0, \quad /v'''/_{z=1} + \alpha^4 \frac{M}{q} \cdot /v/_{z=1} = 0,$$

otrzymujemy jednorodny, ze względu na stałe B, D i H =  $\frac{R}{\alpha^3 EI}$ , układ równań, którego wyznacznik charakterystyczny jest równaniem częstości. Równanie to w formie rozwiniętej i po wprowadzeniu funkcji Kryłowa oraz oznaczeniu:

$$/2.6/ \quad A = \frac{a}{l}, \quad k = \frac{M}{ql}, \quad u = \alpha l,$$

możemy zapisać jako równanie algebraiczne o zmiennej u i z parametrami A i k:

$$/2.7/ \quad /sh u \cdot \sin Au + sh Au \cdot \sin u/ \left\{ ch /l-A/u + \cos /l-A/u + \right. \\ \left. + ku [sh /l-A/u - \sin /l-A/u] \right\} - [sh /l-A/u + \sin /l-A/u] [sh Au + \\ + \cos u + \sin Au ch u + ku /sh u \cdot \sin Au - sh Au \cdot \sin u/ ] = 0.$$

Równanie /2.7/ rozwiązane zostało na maszynie cyfrowej "Odra 1204" dla następujących wartości parametrów:

$$A = 0,10, \quad 0,20 \quad i \quad 0,30$$

$$k = 0,00, \quad 0,05, \quad 0,10, \quad 0,15, \quad 0,20, \quad 0,25 \quad i \quad 0,30.$$

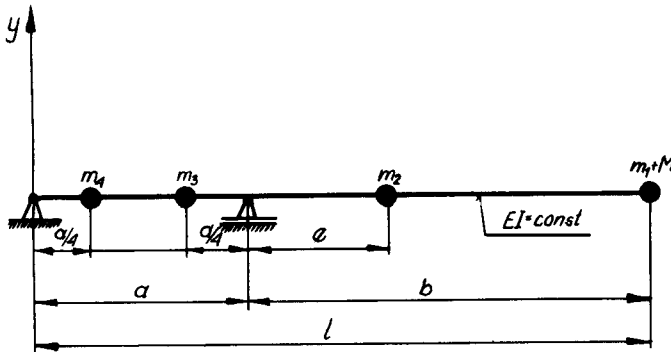
Obszary wartości parametrów A i k obejmują stosunki rozstawu podpór łożyskowych do długości wału i masy mieszadła do masy wału stosowanych w praktyce mieszalników z szybkoobrotowymi mieszadłami turbiniowymi lub śmigłowymi, zamocowanymi na końcu wału. Rozwiązanie równania /2.7/ ograniczono do dwóch pierwszych pierwiastków, które na mocy związków /2.4/ i /2.6/ wchodzą do równania

$$/2.8/ \quad \omega_i = \frac{u_i^2 \cdot d_w}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{S}}, \quad \text{gdzie } i = 1, 2,$$

wyznaczającego częstości własne. Równanie /2.8/ wykorzystane zostanie w następnym rozdziale pracy.

### 3. Obliczenie rozkładu i położenia mas układu dyskretnego

Układ dyskretny, zastępujący wał z mieszadłem, powinien uwzględniać dwie postacie drgań poprzecznych. Temu wymaganiu zadość uczyni układ przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2

Oznaczenia:

$m_1, m_2, m_3, m_4$  kg - masy dyskretne wału,  
przy czym:

$$/3.1/ \quad m_1 + m_2 = S \cdot F \cdot b, \quad m_3 = m_4 = S \cdot F \cdot \frac{a}{2}$$

$e$  [m] - nieznaną odległość masy  $m_2$ .

Jeśli uwzględnić związki /3.1/, w układzie dyskretnym, przedstawionym na rysunku 2, występują dwie niewiadome, którymi mogą być dyskretna masa  $m_1$  i odległość  $e$  masy  $m_2$ . Niewiadome te wyznaczymy, jeżeli do równania częstości układu dyskretnego podstawimy częstości podstawową i drugą harmoniczną układu rzeczywistego, wyznaczone z równania /2.8/. Równanie częstości układu dyskretnego, przedstawionego na rysunku 2, można otrzymać, pisząc równania ruchu swobodnego w postaci odwrotnej i podstawiając

doń rozwiązania szczególne, różniące się wartościami amplitud. Równanie to ma następującą postać:

$$/3.2/ \quad A \omega^8 + B \omega^6 + C \omega^4 + D \omega^2 + 1 = 0,$$

gdzie:

$\omega [1/s]$  - częstości własne,

A, B, C, D, - stałe zależne od współczynników wpływu Maxwella  $c_{ij}$  i mas dyskretnych  $m_1$ .

W pracy [6] wykazano, że bez wpływu na dokładność wyników równanie /3.2/ można uprościć przez pominięcie dwóch pierwszych składników, gdyż w stosunku do trzech pozostałych są one małe. Uproszczone równanie częstości możemy więc zapisać:

$$/3.3/ \quad C \omega^4 + D \omega^2 + 1 = 0,$$

gdzie:

$$/3.4/ \quad C = /c_{11}c_{22} - c_{12}^2 / m_1 m_2 + /c_{11}c_{33} - c_{13}^2 / m_1 m_3 + /c_{11}c_{44} - c_{14}^2 / m_1 m_4 + /c_{22}c_{33} - c_{23}^2 / m_2 m_3 + /c_{22}c_{44} - c_{24}^2 / m_2 m_4 + /c_{33}c_{44} - c_{34}^2 / m_3 m_4 ;$$

$$D = - c_{11}m_1 - c_{22}m_2 - c_{33}m_3 - c_{44}m_4.$$

Po podstawieniu wartości współczynników wpływu  $c_{ij}$  do współczynników C i D /3.4/ przyjmą one następującą formę:

$$/3.5/ \quad C = \frac{8a^6 m_2 m_4 + 9a^3 e^2 / 64e + 39a / m_2 m_4 + 9a^3 b^2 / 64b + 39a / m_1 m_4}{147456 / EI^2} +$$

$$+ \frac{9a^3 c^2 / 64e + 15a / m_2 m_3 + 9a^3 b^2 / 64b + 15a / m_1 m_3 + 4096e^2 - e^4}{147456 / EI^2} +$$

$$+ \frac{6be^3 + /4ab - 9b^2 / e^2 + /4b^3 - 8ab^2 / e + 4ab^3 m_1 m_2}{147456 / EI^2} ;$$

$$D = - \frac{9a^3 m_4 + 9a^3 m_3 + 253e^2 / a + e / m_2 + 253b^2 / a + b / m_1}{768 EI} .$$

Po podstawieniu współczynników /3.5/ i częstości własnych /2.8/ do równania /3.3/, otrzymamy układ równań algebraicznych o postaci:

$$\begin{aligned}
 /3.6/ \quad & /a_1^1 \xi^6 + a_2^1 \xi^5 + a_3^1 \xi^4 + a_4^1 \xi^3 + a_5^1 \xi^2 / \varrho^2 + /b_1^1 \xi^6 + \\
 & + b_2^1 \xi^5 + b_3^1 \xi^4 + b_4^1 \xi^3 + b_5^1 \xi^2 + b_6^1 / \varrho + /c_1^1 \xi^6 + c_2^1 \xi^5 + \\
 & + c_3^1 \xi^4 + c_4^1 \xi^3 + c_5^1 \xi^2 + c_6^1 / = 0, \quad i = 1, 2,
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$/3.7/ \quad \xi = \frac{e}{b}, \quad \varrho = \frac{m_1}{m_b} = \frac{m_1}{g \cdot P \cdot b}$$

$$/3.8/ \quad a_1^1 = 4096 \frac{u_1}{1-A} /^8$$

$$a_2^1 = -24576 \frac{u_1^8}{/1-A/^6}$$

$$a_3^1 = 4096 \frac{13A^2 - 22A + 9}{/1-A/^6} u_1^8$$

$$a_4^1 = 16384 \frac{3A^3 - 7A^2 + 5A - 1}{/1-A/^5} u_1^8$$

$$a_5^1 = -16384 \frac{u_1^8}{1-A}$$

$$b_1^1 = -4096 \frac{1-A-k}{/1-A/^7} u_1^8$$

$$b_2^1 = 24576 \frac{1-A-k}{/1-A/^5} u_1^8$$

$$b_3^i = 4096 \frac{/1 - A - k/ -13A^2 + 22A - 9/}{/1 - A/^3} u_1^8$$

$$b_4^i = \frac{16384 /1 - A - k/ -3A^3 + 7A^2 - 5A + 1/ - 576A^4}{/1 - A/^4} u_1^8 + \\ + \frac{48576}{/1 - A/^4} u_1^4$$

$$b_5^i = \left[ 16384 A /1 - A - k/ - \frac{243A^5}{/1 - A/^3} \right] u_1^8 + \frac{48576 A}{/1 - A/^3} u_1^4$$

$$b_6^i = 9A^4 /1 - A/ /64 - 37A/ u_1^8 - 48576 /1 - A/ u_1^4$$

$$c_1^i = - \frac{4096 k}{/1 - A/^3} u_1^8$$

$$c_2^i = 24576 \frac{k u_1^8}{/1 - A/^3}$$

$$c_3^i = 4096 \frac{-13A^2 + 22A - 9}{/1 - A/^3} u_1^8$$

$$c_4^i = \frac{16384 k / -3A^3 + 7A^2 - 5A + 1/ + 576 A^4}{/1 - A/^2} u_1^8 - \\ - \frac{48576}{/1 - A/^2} u_1^4$$

$$c_5^i = \left[ 16384 k /1 - A/^2 + 243 \frac{A^5}{1 - A} \right] u_1^8 - \frac{48576 A}{1 - A} u_1^4$$

$$c_6^i = \left[ 2 A^8 + 9kA^4 /1 - A/^2 /64 - 37A/ \right] u_1^8 + \left[ - 1728A^4 - \\ - 48576 /1 - A/^2 k \right] u_1^4 + 147456$$

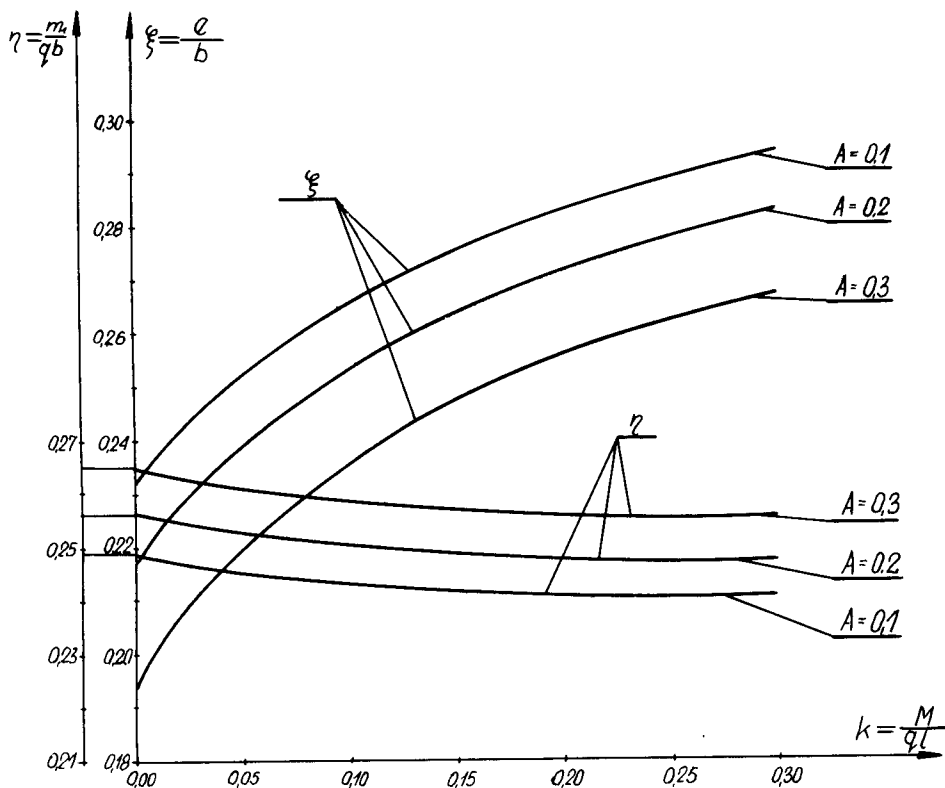


$i = 1, 2$ .

Podstawiając współczynniki C i D /3.5/ do równania /3.3/ zamiast  $m_1$  wstawiono  $m_1 + M$ . W ten sposób uwzględniono masę mieszadła.

Układ równań /3.6/ ze współczynnikami /3.8/ rozwiązany został na maszynie cyfrowej "Odra 1204" metodą rugowników.

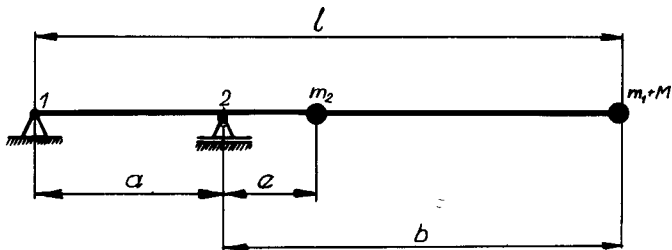
Pierwiastki tego układu równań, mające sens fizyczny, zestawione są w tablicy 1 i przedstawione na rysunku 3.



Rys. 3

Tablica 1

$A = \frac{a}{l}$	$k = \frac{M}{q \cdot l}$	$\xi = \frac{e}{b}$	$\eta = \frac{m_1}{q \cdot b}$
0,1	0,00	0,232	0,248
	0,05	0,252	0,245
	0,10	0,266	0,243
	0,15	0,276	0,242
	0,20	0,283	0,241
	0,25	0,289	0,240
	0,30	0,294	0,240
0,2	0,00	0,216	0,256
	0,05	0,239	0,253
	0,10	0,254	0,250
	0,15	0,264	0,249
	0,20	0,272	0,248
	0,25	0,278	0,247
	0,30	0,283	0,247
0,3	0,00	0,194	0,265
	0,05	0,220	0,261
	0,10	0,236	0,259
	0,15	0,248	0,257
	0,20	0,256	0,256
	0,25	0,262	0,256
	0,30	0,267	0,255



Rys. 4.

## 4. Uwagi końcowe

Wymodelowany układ dyskretny wału z mieszadłem przedstawiony został na rysunku 4. Składa się on z nieważkiego wału o sztywności równej na całej długości, podpartego swobodnie w punktach 1 i 2, ze skupionych mas  $m_1$  i  $m_2$ , zastępujących masę wału i skupionej masy mieszadła M. Układ ten różni się od układu dyskretnego, przedstawionego na rysunku 2, brakiem skupionych mas części międzypodporowej wału  $m_3$  i  $m_4$ . Dla małych stosunków  $A = a/l$ , co ma miejsce w pionowych wałach mieszadeł, można masę tę pominąć. Uzasadnia to uproszczone w stosunku do równania /3.2/ równanie /3.3/. Pominiecie tej masy nie oznacza jeszcze, że został całkowicie pominięty jej wpływ na drgania wału, gdyż występuje ona w współczynnikach C i D /3.4/, a więc podział masy wysięgnika  $m_1$  i  $m_2$  oraz położenie masy  $m_2$  są od niej uzależnione.

## Literatura

1. Bogusz W.: Drgania mechaniczne. Skrypt AGH, Kraków 1965.
2. Drgania i fale w ciałach stałych. Praca zbiorowa pod red. S. Kaliskiego PWN, Warszawa 1966.
3. Kończak T., Mikołajczak M., Osiecki J.: Budowa dyskretnego modelu dynamicznego złożonej przestrzennej konstrukcji prętowej na przykładzie ramy pługa wielokorpusowego. Archiwum Budowy Maszyn T. XVI, Z. 2., 1969.
4. Lipka J.: Wytrzymałość maszyn wirnikowych. WNT Warszawa 1967.
5. Panomariw S.D.: Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn. PWN, Warszawa 1957.
6. Siołkowski B.: Wpływ parametrów mechanicznych na stany krytyczne mieszadła cieczy. Praca doktorska, AGH, Kraków 1972.

## DYNAMIC MODELLING OF A SHAFT WITH MIXER

## /Summary/

The paper presents a construction method of discrete model of shaft with mixer fixed on its end. Calculations of values and positions of the discrete shaft masses have been made so that the first and second critical frequencies of model are equal. The model designed is suitable for dynamic analysis of shaft with mixer working within the supercritical range.

## ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВАЛОВ С МЕШАЛКАМИ

## /Резюме/

В статье автор представляет способ строения динамической модели вала с мешалкой. Вычисление величин и расположения сосредоточенных масс вала исполнено так, чтобы первые и вторые собственные частоты модели и вала являлись равными. Построенная модель заменяет вертикальный консольный вал мешалки, движение которого нужно исследовать.

Bronisław Siołkowski

### STATECZNOŚĆ RUCHU MIESZADŁA CIECZY

W pracy przedstawiono analizę teoretyczną i wyniki badań doświadczalnych, dotyczących stateczności ruchu mieszadeł cieczy. Rozważania przeprowadzono dla szybkoobrotowego mieszadła turbinowego sześciopłatkowego otwartego.

Z przeprowadzonej analizy wyciągnięto wnioski, mające duże znaczenie techniczne.

#### 1. Wstęp

Specyfika stateczności ruchu mieszadeł w cieczy wynika z faktu oddziaływania mieszanej cieczy na mieszadło. Zagadnienie stateczności ruchu wałów z mieszadłami poruszone było w pracach [1], [2], [11]. Autorzy tych prac wykazali istotność wpływu mieszanej cieczy na stateczność ruchu wału giętkiego, tj. wału obracającego się z prędkością kątową większą od podstawowej częstości drgań giętkich. Wykazali oni, że początek strefy niestatecznego ruchu wału giętkiego jest złożoną funkcją, zależną od własności mieszanej cieczy, energii cyrkulacji strumienia oraz wymiarów mieszadła i zbiornika. W zależności od liczbowych wzajemnych stosunków wyszczególnionych parametrów, początek strefy niestatecz-

nego ruchu może przewyższać 1,5 - 2 razy wartości podstawowych częstości drgań giętnych, a nawet w niektórych przypadkach pojawiać się bezpośrednio za nimi. Nie występuje w tym przypadku tzw. zjawisko samocentrowania się wałów giętkich, które jest zjawiskiem charakterystycznym dla wałów wirujących w powietrzu, albo w ośrodkach o małej gęstości i lepkości.

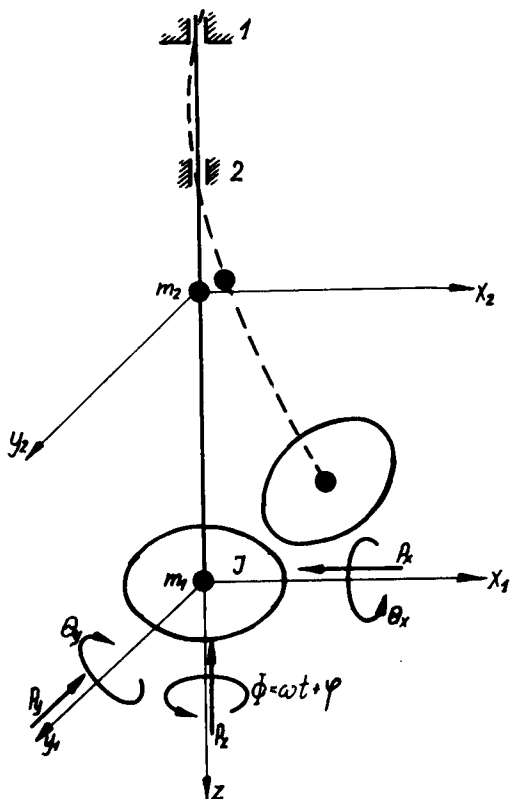
Ruch mieszadła w wyniku niewyważenia jego mas i oddziaływania mieszanego ośrodka jest ruchem kulistym. W przypadku ruchu mieszadła na wale sztywnym jest on ruchem precesyjnym prostym synchronicznym /precesja współbieżna synchroniczna/, natomiast w przypadku wału giętkiego - może on być ruchem precesyjnym prostym lub odwrotnym, synchronicznym lub asynchronicznym lub wreszcie ruchem nieregularnym. Z wymienianych regularnych ruchów mieszadła ruchem statecznym jest ruch precesyjny prosty synchroniczny. Ugięcie wału, towarzyszące temu ruchowi, jest nieduże, praca układu jest spokojna, łożyska, sprzęgła i dźwawnice nie ulegają szybkiemu zużyciu.

W części teoretycznej niniejszej pracy przeprowadza się analizę stateczności ruchu mieszadła turbinowego dyskowego. Wał mieszadła zastępuje się modelem dyskretnym dwumasowym o równej na całej długości sztywności na zginanie. Mieszadło zastępuje się tarczą zamocowaną na końcu wału. Wał podparty jest w łożyskach 1 i 2 /rys.1/. Modelowanie takiego układu podane jest w pracy [7].

W części doświadczalnej pracy podano wyniki badań doświadczalnych stateczności mieszadła turbinowego dyskowego sześciopłatkowego otwartego.

## 2. Teoretyczna analiza stateczności

Wymodelowany układ dyskretny wału z mieszadłem jest układem o siedmiu stopniach swobody. Jako współrzędne uogólnione, zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1, będą:  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = y_1$ ,  $q_3 = x_2$ ,  $q_4 = y_2$ ,  $q_5 = \theta_y$ ,  $q_6 = \theta_x$ ,  $q_7 = \phi = \omega t + \varphi$ .



Rys. 1.

Dla przedstawionego na rysunku 1 układu, jako układu holonomicznego i skleronomicznego, można napisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju:

$$/2.1/ \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} =$$

$$= Q_j - R_j; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie:

T - energia kinetyczna układu,

V - energia potencjalna układu,

Q<sub>j</sub> - uogólnione siły zewnętrzne działające na układ,

R<sub>j</sub> - uogólnione siły oporu ruchu.

Energię kinetyczną układu można zapisać:

$$/2.2/ \quad T = \frac{1}{2} \left[ m_1 \dot{x}_1^2 + m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_2 \dot{y}_2^2 + J \dot{\theta}_y^2 + J \dot{\theta}_x^2 + 2J\omega\dot{\psi}^2 \right],$$

gdzie:

J [kgm<sup>2</sup>] - moment bezwładności mieszkadła /krażka/ względem osi pokrywającej się z jego średnicą.

Energię potencjalną układu, jako energię sprężystą<sup>x/</sup>, można zapisać:

$$/2.3/ \quad V = \frac{1}{2} \left[ k_{11}x_1^2 + k_{22}y_1^2 + k_{33}x_2^2 + k_{44}y_2^2 + k_{55}\theta_y^2 + k_{66}\theta_x^2 + k_{77}\psi^2 - 2k_{13}x_1x_2 - 2k_{15}x_1\theta_y - 2k_{24}y_1y_2 + 2k_{26}y_1\theta_x + 2k_{35}x_2\theta_y - 2k_{46}y_2\theta_x \right],$$

x/ Pominięto energię potencjalną położenia, ponieważ zakłada się małe przemieszczenia poprzeczne wału.

gdzie:

$k_{ij}$  - współczynniki sprężystości, które można wyznaczyć ze współczynników wpływu Maxwella  $c_{ij}$ .

Wiadomo, że:

$$/2.4/ \quad k_{ij} = \frac{D_{ij}}{D},$$

gdzie:

$$/2.5/ \quad D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

$D_{ij}$  - odpowiedni minor wyznacznika współczynników wpływu D.

Uogólnione siły zewnętrzne i siły oporu można określić w oparciu o pracę [8] i przy założeniu, że oś mieszadła jest przesunięta w stosunku do osi wału o "a" i że płaszczyzna mieszadła jest odchylona o kąt  $\alpha$  od płaszczyzny prostopadłej do osi wału.

Siły zewnętrzne działające na masę  $m_1$ :

$$/2.6/ \quad \begin{aligned} Q_1 &= M \cdot a \omega^2 \cos \omega t - K g d^3 \omega^2 / x_1 + a \cos \omega t / \\ Q_2 &= M \cdot a \omega^2 \sin \omega t - K g d^3 \omega^2 / y_1 + a \sin \omega t / . \end{aligned}$$

Pierwsze składniki są rzutami odśrodkowej siły bezwładności mimośrodowo zamocowanego mieszadła, a drugie - rzutami promieniowej siły hydraulicznej.

Siły zewnętrzne działające na masę  $m_2$ :

$$/2.7/ \quad \begin{aligned} Q_3 &= 0 \\ Q_4 &= 0. \end{aligned}$$

Masa  $m_2$ , jak wykazano w pracy [9], znajduje się w odległości około 1/4



długości wysięgnika od podpory 2, a więc nad lustrem mieszanej cieczy.

Siły zewnętrzne, działające na mieszadło /momenty względem osi  $y_1$  i  $x_1$ /:

$$\begin{aligned} /2.8/ \quad Q_5 &= 2J \omega \dot{\theta}_x + P_z x_1 + J \omega^2 x \sin \omega t \\ Q_6 &= 2J \omega \dot{\theta}_y - P_z y_1 + J \omega^2 x \cos \omega t . \end{aligned}$$

Pierwsze składniki są momentami żyroskopowymi, a drugie i trzecie odpowiednio momentami hydraulicznej siły wzdłużnej i momentami sił niewyważenia mieszadła / $x$  - kąt odchylenia mieszadła/.

Siła zewnętrzna, odpowiadająca uogólnionej współrzędnej  $\phi$  :

$$/2.9/ \quad Q_7 = 0,$$

bo moment stycznych sił hydraulicznych jest zrównoważony przez moment obrotowy silnika, a przyrost momentu, wywołany perturbacją ruchu obrotowego, jest uogólnioną siłą oporu.

Uogólnione siły oporu można zapisać:

$$\begin{aligned} /2.10/ \quad R_1 &= -h_1 \dot{x}_1, & R_2 &= -h_1 \dot{y}_1, & R_3 &= R_4 = 0 \\ R_5 &= -h_2 \dot{\theta}_y, & R_6 &= -h_2 \dot{\theta}_x, & R_7 &= -h_3 \dot{\phi} , \end{aligned}$$

gdzie:

$h_1$ ,  $h_2$  i  $h_3$  - współczynniki oporu wiskotycznego mieszanej cieczy.

Oporu ruchu w powietrzu masy  $m_2$  nie uwzględnia się.

Podstawiając pochodne energii kinetycznej /2.2/ i potencjalnej /2.3/ oraz wyrażenia /2.6/, /2.7/, /2.8/, /2.9/ i /2.10/ do równań Lagrange'a /2.1/ otrzymamy równania drgań tłumionych i wymuszonych dyskretnego układu wał - mieszadło:

$$\begin{aligned} /2.11/ \quad m_1 \ddot{x}_1 + h_1 \dot{x}_1 + /k_{11} + K g d^3 \omega^2/ x_1 - k_{13} x_2 - k_{15} \theta_x &= \\ = a \omega^2 / M - K g d^3 / \cos \omega t & \\ m_1 \ddot{y}_1 + h_1 \dot{y}_1 + /k_{22} + K g d^3 \omega^2/ y_1 - k_{24} y_2 + k_{26} \theta_x &= \\ = a \omega^2 / M - K g d^3 / \sin \omega t & \end{aligned}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_{33} x_2 - k_{13} x_1 + k_{35} \theta_y = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_{44} y_2 - k_{24} y_1 - k_{46} \theta_x = 0$$

$$\begin{aligned} J \ddot{\theta}_y + h_2 \dot{\theta}_y + k_{55} \theta_y + k_{35} x_2 - /k_{15} + P_z / x_1 - 2J\omega \dot{\theta}_x = \\ = J \omega^2 \kappa \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J \ddot{\theta}_x + h_2 \dot{\theta}_x + k_{66} \theta_x - k_{46} y_2 + /k_{26} + P_z / y_1 + 2J\omega \dot{\theta}_y = \\ = J \omega^2 \kappa \cos \omega t \end{aligned}$$

$$2J \ddot{\psi} + h_3 \dot{\psi} + k_{77} \psi = 0$$

Sześć pierwszych równań układu /2.11/ opisuje drgania poprzeczne wału w ruchu obrotowym, a siódme równanie opisuje drgania skrętne. Wzajemne oddziaływanie tych rodzajów drgań na siebie w rozpatrywanym modelu nie istnieje. Częstość podstawowa drgań skrętnych wałów mieszadeł, jak wykazano w pracy [9], jest kilkakrotnie większa od drugiej harmonicznej drgań poprzecznych, a więc drgania skrętne nie są niebezpieczne dla wałów mieszadeł.

Do analizy stateczności ruchu mieszadeł weźmiemy więc tylko sześć pierwszych równań. Wobec tego, że niektóre współczynniki sztywności są sobie równe, a mianowicie  $k_{22} = k_{11}$ ,  $k_{24} = k_{13}$ ,  $k_{26} = k_{15}$ ,  $k_{46} = k_{35}$  i  $k_{66} = k_{55}$ , to równania te są równaniami sprzężonymi parami.

Przyjmując przemieszczenie uogólnione w postaci zespolonej:

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1 + iy_1 \\ /2.12/ \quad r_2 &= x_2 + iy_2 \\ \theta &= \theta_x + i\theta_y, \end{aligned}$$

gdzie  $i$  jest jednostką urojoną, możemy równania te sprowadzić do trzech równań:

$$\begin{aligned}
 & m_1 \ddot{r}_1 + h_1 \dot{r}_1 + \alpha r_1 - k_{13} r_2 + k_{15} i \theta = a \omega^2 / M - K g d^3 / e^{i \omega t}, \\
 /2.13/ \quad & m_2 \ddot{r}_2 + k_{33} r_2 - k_{13} r_1 - k_{35} i \theta = 0, \\
 & J \ddot{\theta} + h_2 \dot{\theta} + k_{55} \theta + k_{35} i r_2 - \beta i r_1 - 2J \omega i \dot{\theta} = J \omega^2 \alpha e^{i \omega t},
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 /2.14/ \quad & \alpha = k_{11} + K g d^3 \omega^2, \\
 & \beta = k_{15} + P_z.
 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem układu jednorodnego równań różniczkowych, odpowiadających układowi /2.13/, będą funkcje:

$$\begin{aligned}
 /2.15/ \quad & r_1 = A_1 e^{i \Lambda t}, \\
 & r_2 = A_2 e^{i \Lambda t}, \\
 & \theta = A_3 e^{i \Lambda t};
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$/2.16/ \quad \Lambda = \lambda + i \psi \quad \text{jest zespoloną wielkością, określającą częstotliwość własną.}$$

Równanie częstości własnych otrzymamy, podstawiając rozwiązania /2.15/ do jednorodnego układu równań, odpowiadających układowi /2.13/. Równanie to w postaci wyznacznika będzie:

$$/2.17/ \quad \begin{vmatrix} -m_1 \Lambda^2 + h_1 i \Lambda + \alpha & -k_{13} & k_{15} i \\ -k_{13} & -m_2 \Lambda^2 + k_{33} & -k_{35} i \\ -\beta i & k_{35} i & -J \Lambda^2 + /2J\omega + h_2 i \Lambda + k_{55} \end{vmatrix} = 0$$

albo - w postaci rozwiniętej:

$$\begin{aligned}
 /2.18/ \quad & a_0 \Lambda^6 + /a_1 + i b_1 / \Lambda^5 + /a_2 + i b_2 / \Lambda^4 + /a_3 + i b_3 / \Lambda^3 + /a_4 + i b_4 / \Lambda^2 \\
 & + /a_5 + i b_5 / \Lambda + a_6 = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$/2.19/ \quad a_0 = 1,$$

$$a_1 = -2\omega$$

$$a_2 = -\frac{\alpha}{m_1} - \frac{k_{33}}{m_2} - \frac{k_{55}}{J} - \frac{h_1 h_2}{m_1 J},$$

$$a_3 = 2\omega \left/ \frac{\alpha}{m_1} + \frac{k_{33}}{m_2} \right/ ,$$

$$a_4 = \frac{\alpha k_{33} - k_{13}^2}{m_1 m_2} + \frac{\alpha k_{55} - \beta k_{15}}{m_1 J} + \frac{k_{33} k_{55} - k_{35}^2}{m_2 J} +$$

$$+ \frac{k_{33}}{m_1 m_2 J} h_1 h_2 ,$$

$$a_5 = 2 \frac{k_{13}^2 - k_{33} \alpha}{m_1 m_2} ,$$

$$a_6 = -\frac{k_{13} k_{15} k_{35} + k_{13} \beta k_{35} - k_{15} \beta k_{33} - k_{13}^2 k_{55} + \alpha k_{33} k_{55}}{m_1 m_2 J} +$$

$$\frac{-\alpha k_{35}^2}{m_1 m_2 J} ,$$

$$b_1 = -\frac{h_1}{m_1} - \frac{h_2}{J} ,$$

$$b_2 = \frac{2\omega h_1}{m_1} ,$$

$$b_3 = \left/ \frac{k_{33}}{m_1 m_2} + \frac{k_{55}}{m_1 J} \right/ h_1 + \left/ \frac{\alpha}{m_1 J} + \frac{k_{33}}{m_2 J} \right/ h_2 ,$$

$$b_4 = -\frac{2\omega k_{33} h_1}{m_1 m_2} ,$$

$$b_5 = \frac{\sqrt{k_{35}^2 - k_{33} k_{55}}/h_1 + \sqrt{k_{13}^2 - \alpha k_{33}}/h_2}{m_1 m_2 J} .$$

Jeżeli do równania /2.18/ zamiast zespolonej częstości podstawią się /2.

$$20/ \quad \Lambda = \lambda + i\psi = \lambda/1 + i \frac{\psi}{\lambda} = \lambda/1 + i\delta/ ,$$

gdzie:

$$/2.21/ \quad \delta = \frac{\psi}{\lambda} ,$$

a dla małej wartości  $\delta / \delta \ll 1$  zachodzi:

$$\Lambda^2 \approx \lambda^2 / 1 + 2 i \delta / , \dots, \Lambda^n \approx \lambda^n / 1 + n i \delta / , ,$$

to równanie /2.18/ przekształci się do postaci:

$$\begin{aligned} /2.22/ \quad & /1 + 6i\delta / \lambda^6 + /a_1 + ib_1 //1 + 5i\delta / \lambda^5 + /a_2 + ib_2 //1 + 4i\delta / \\ & \lambda^4 + /a_3 + ib_3 //1 + 3i\delta / \lambda^3 + /a_4 + ib_4 //1 + 2i\delta / \lambda^2 + \\ & + /a_5 + ib_5 //1 + i\delta / \lambda + a_6 = 0. \end{aligned}$$

Po prostych wyliczeniach z równania częstości /2.22/ można wyznaczyć współczynnik:

$$/2.23/ \quad \delta = - \frac{b_1 \lambda^4 + b_2 \lambda^3 + b_3 \lambda^2 + b_4 \lambda + b_5}{6 \lambda^5 + 5a_1 \lambda^4 + 4a_2 \lambda^3 + 3a_3 \lambda^2 + 2a_4 \lambda + a_5} .$$

Z postaci rozwiązania /2.15/ wynika, że będzie ono asymptotycznie stateczne, jeżeli współczynnik  $\psi$  w zespolonej częstości /2.16/ będzie większy od zera. Dla precesyjnego prostego ruchu mieszała  $\lambda > 0$ , wobec tego warunkiem stateczności rozwiązań układu równań /2.13/ jest:

$$/2.24/ \quad \delta > 0 ,$$

a dla ruchu precesyjnego odwrotnego  $\lambda < 0$ , wobec tego warunkiem stateczności będzie:

$$/2.25/ \quad \delta < 0 .$$

Warunki /2.24/ i /2.25/ z uwzględnieniem zależności /2.23/ prowadzą do dwóch par nierówności, które mają sens fizyczny:

dla precesji prostej

$$\begin{aligned} /2.26/ \quad & b_1 \lambda^4 + b_2 \lambda^3 + b_3 \lambda^2 + b_4 \lambda + b_5 < 0 \\ & 6 \lambda^5 + 5a_1 \lambda^4 + 4a_2 \lambda^3 + 3a_3 \lambda^2 + 2a_4 \lambda + a_5 > 0, \end{aligned}$$

a dla precesji odwrotnej

$$/2.27/ \quad b_1 \lambda^4 + b_2 \lambda^3 + b_3 \lambda^2 + b_4 \lambda + b_5 > 0$$

$$6\lambda^5 + 5a_1\lambda^4 + 4a_2\lambda^3 + 3a_3\lambda^2 + 2a_4\lambda + a_5 > 0.$$

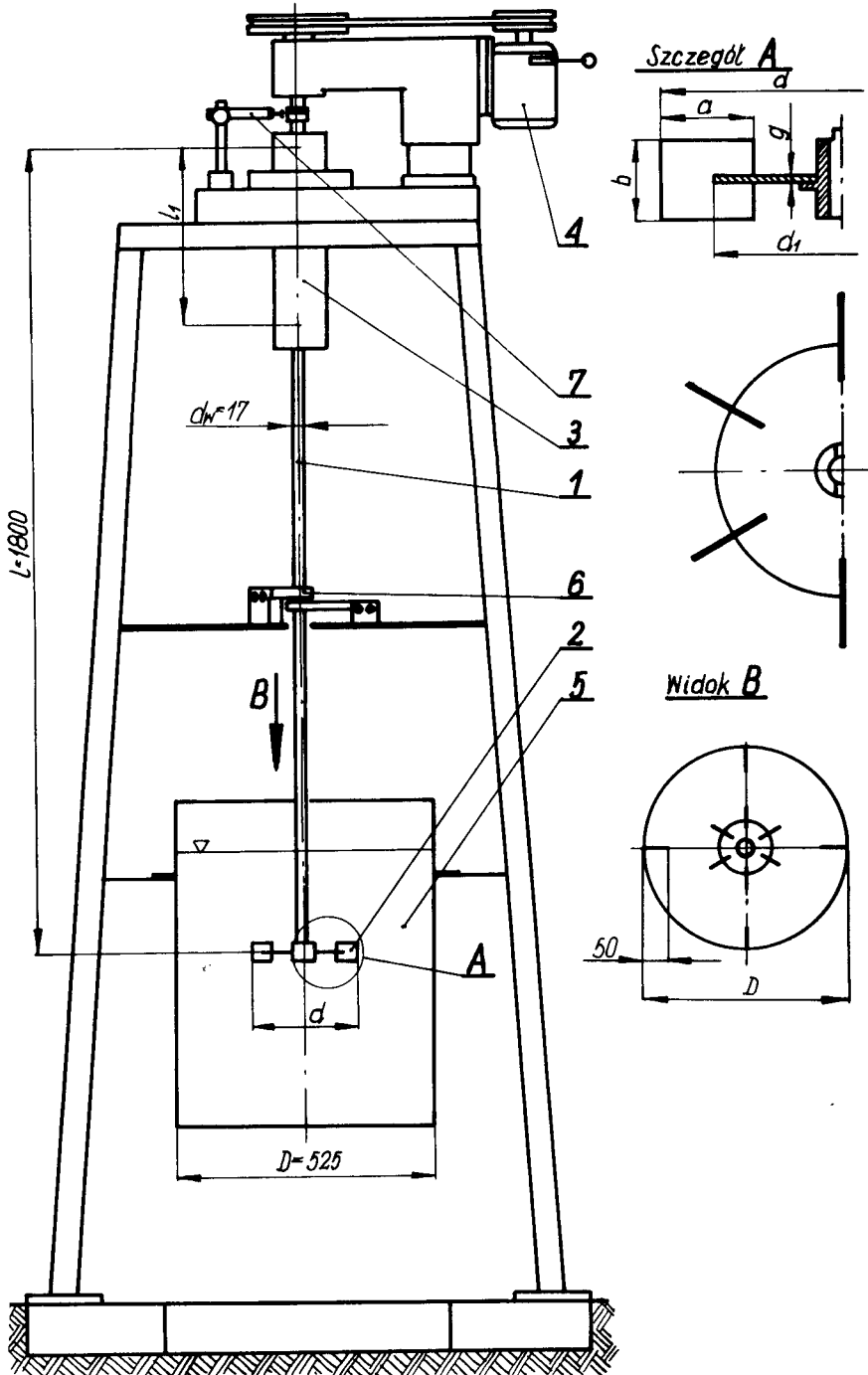
Pierwsza nierówność układu /2.26/ jest spełniona dla niedużych wartości  $\lambda$ . Podstawiając dane mieszadła opisanego w rozdziale 3 można stwierdzić że jest ona spełniona dla  $\lambda = \lambda_1$ , a nie jest spełniona dla  $\lambda = \lambda_2$ , gdzie  $\lambda_1$  jest częstotnością pierwszej postaci drgań, a  $\lambda_2$  częstotnością drugiej postaci drgań. Druga nierówność układu /2.26/ i /2.27/ po rozwinięciu i założeniu, że  $\frac{J}{m_1} \ll 1$  prowadzi do następującej nierówności:

$$\begin{aligned} /2.28/ \quad P_z < - \frac{2k_{55} m_1}{k_{15}} \lambda^2 + \frac{m_1/k_{33}k_{55} - k_{35}^2}{m_2 k_{15}} + \frac{\alpha k_{55}}{k_{15}} - k_{15} + \\ + \frac{h_1 h_2}{k_{15}} / \frac{k_{33}}{m_2} \lambda^2 / . \end{aligned}$$

Dla  $\lambda = \lambda_1$  prawa strona nierówności jest dodatnia, a dla  $\lambda = \lambda_2$  jest ona ujemna bez względu na znak częstotności własnej  $\lambda$ . Z tego wynika, że przy występowaniu siły  $P_z$  zwróconej do góry druga postać drgań jest niestateczna, a obszar stateczności kończy się między pierwszą a drugą częstotnością harmoniczną.

### 3. Badanie doświadczalne stateczności ruchu mieszadła

Badanie stateczności ruchu mieszadła przeprowadzono na stanowisku badawczym przedstawionym na rysunku 2. Zasadniczym elementem stanowiska badawczego jest wał 1 z mieszadłem 2. Wał ułożyskowany jest w korpusie łożyskowym 3 w dwóch łożyskach tocznych, a napędzany jest silnikiem elektrycznym rewersyjnym 4. Mieszadło turbinowe otwarte o stosunkach wymiarowych  $a/d = 0,25$  i  $b/d = 0,2$  wykonane zostało w sześciu wielkościach, co przy średnicy zbiornika  $D = 525$  mm pozwala na zmianę stosunku  $d/D = 1/7 \div 1/2,25$ . Zestawienie danych geometryczno-dynamicznych stosowanych mieszadeł podano w tabelicy 3.1.



Rys. 2.

Zbiornik mieszalnika 5 wyposażony jest w kosz, stanowiący cztery standardowe przegrody o szerokości 50 mm.

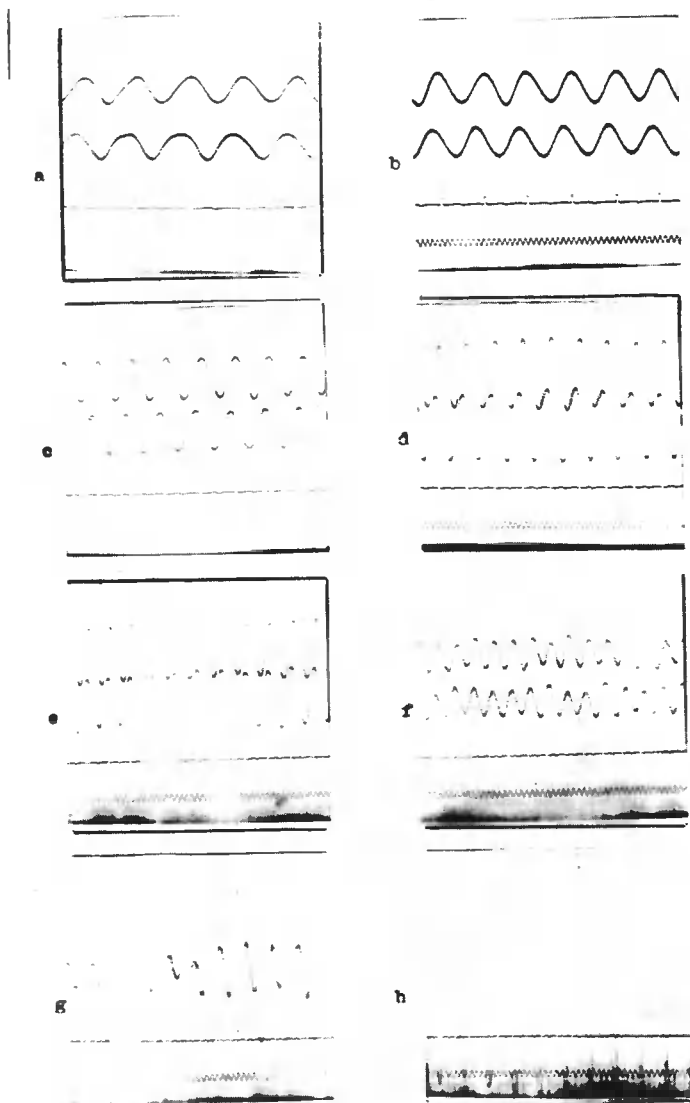
Układ pomiarowy składa się ze sprężystych beleczek 6 z naklejonymi tensometrami oporowymi, służącymi do pomiaru odkształceń poprzecznych wału, z czujnika indukcyjnego 7 do pomiaru obrotów wału i z nie pokazanych na rysunku 2 mostków z rejestratorem pętlicowym.

Tablica 3.1.

Nr miesz.	Wymiary w mm					Masa kg	Moment bezwł. względem osi mieszadła $\text{kgm}^2$
	d	$d_1$	a	b	g		
1	75	56	19	15	1,0	0,065	$228 \cdot 10^{-7}$
2	100	75	25	20	1,0	0,090	$602 \cdot 10^{-7}$
3	140	105	35	28	1,0	0,140	$2259 \cdot 10^{-7}$
4	175	131	44	35	1,5	0,305	$8211 \cdot 10^{-7}$
5	200	150	50	40	1,5	0,395	$14020 \cdot 10^{-7}$
6	233	175	58	47	1,5	0,485	$25974 \cdot 10^{-7}$

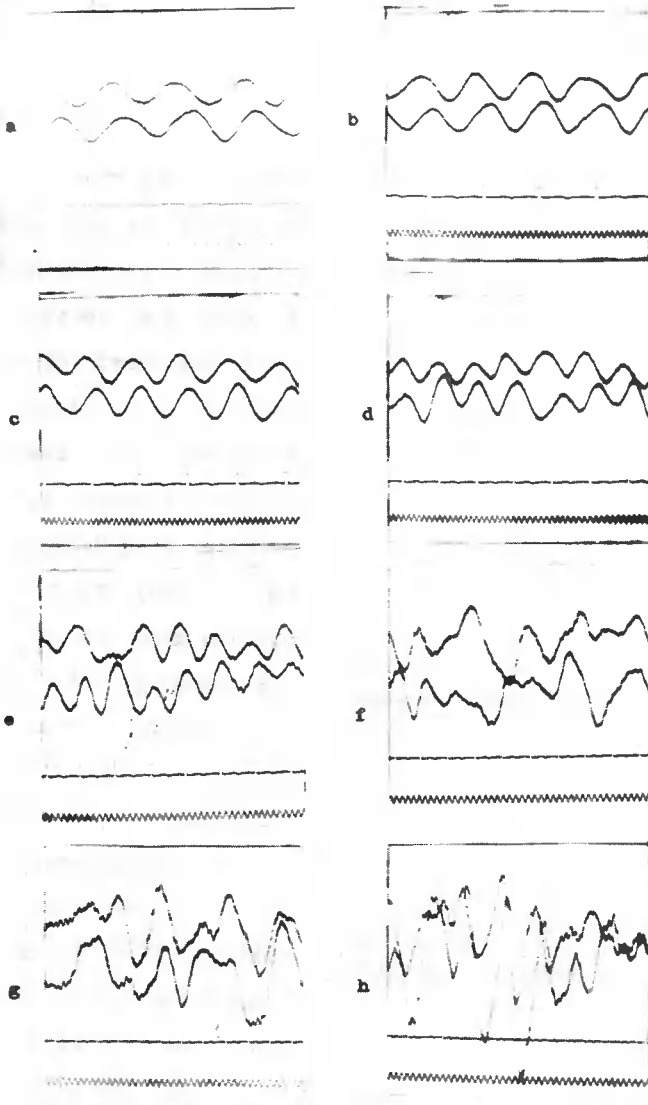
Badania wykonano dla ruchu mieszadła w zbiorniku bez przegród i w zbiorniku z przegrodami. Wysokość napełnienia zbiornika wodą w czasie badań wynosiła 460 mm. Mieszadła położone były w połowie wysokości słupa wody. W czasie ruchu mieszadła na taśmie rejestratora zostały zarejestrowane obroty wału i amplitudy jego ruchu poprzecznego w dwóch ortogonalnych kierunkach. Punkty pomiaru odległe były o 800 mm od dolnego łożyska. Na rysunku 3 od a - h przedstawione są fotografie taśmy rejestracyjnej drgań wału z mieszadłem nr 3, wirującym z prędkością od 120 do 440 obr/min. w zbiorniku bez przegród. Fotografie a, b i c przedstawiają ruch podkrytyczny, a więc ruch wału sztywnego. Fotogram d przedstawia drgania krytyczne z częstością podstawową. Fotografie e i f obrazują





drżania wału giętkiego po wyjściu z obszaru drgań krytycznych z częstością podstawową. Natomiast fotogramy g i h przedstawiają wejście w nowy obszar niestateczny, wywołany siłą wzdłużną  $P_z$ . Przy tych obrotach dało się zaobserwować głęboki jej centralny w mieszanej cieczy. Na wszystkich fotogramach widoczny jest przebieg regularny harmoniczny, charakterystyczny dla precesji prostej. Fotogramy a - f wskazują na precesję synchroniczną, natomiast na fotogramach g i h widać precesję asynchroniczną.

Rys.3.

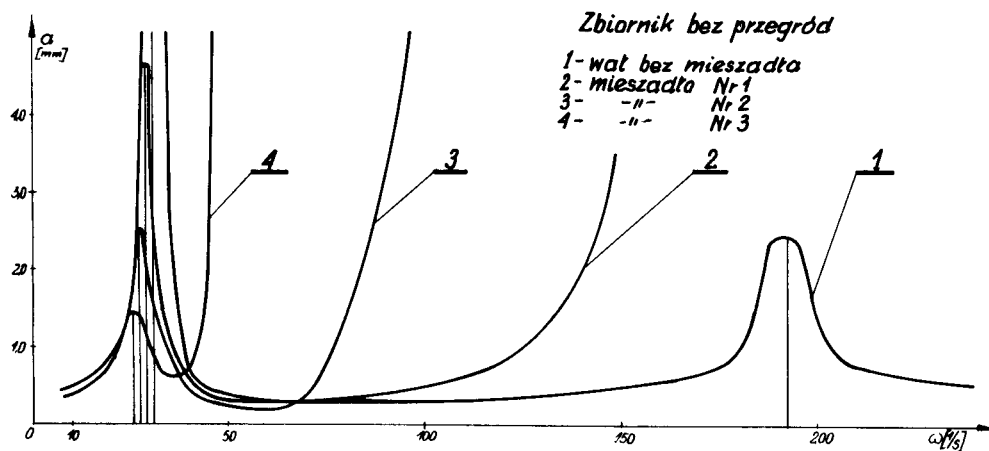


Rys.4.

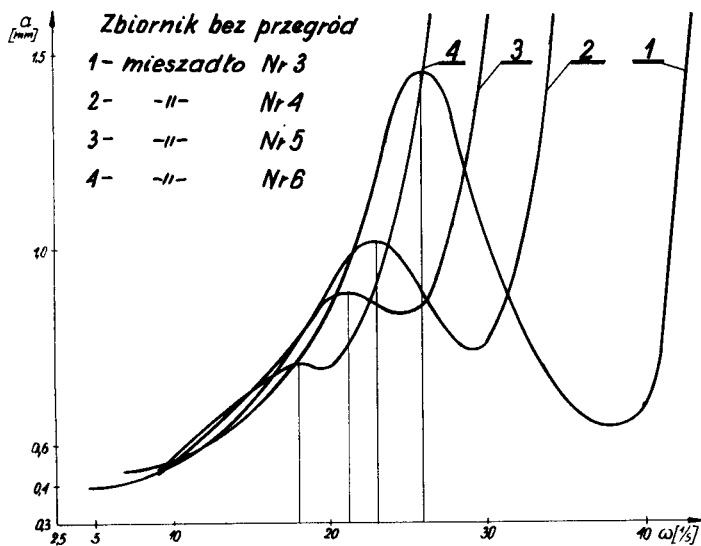
zaburzona, ale pojawiły się cząstkowe strumienie odbite od listew, które wpadały z powrotem na łopatki mieszadła. Wywoływały one wymuszenie stochastyczne o kierunku przeciwnym do obrotów. Wymuszenie to powodowało zanik precesji prostej, a pojawienie się nieregularnych drgań poprzecznych - o wzrastających amplitudach ze wzrostem obrotów.

Na rysunku 4 od a - h przedstawione są fotogramy taśmy rejestracyjnej drgań wału z mieszadłem nr 5, wirującym z prędkością od 96 do 410 obr/min. w zbiorniku z przegrodami. Fotogramy a i b przedstawiają ruch podkrytyczny, c i d - w obszarze strumionej częstości podstawowej, a fotogramy e, f, g i h przedstawiają wejście w obszar niestatecznej pracy wału giętkiego. Przy ruchu mieszadła w zbiorniku z przegrodami nie obserwowano się powstawania leja centralnego. Cyrkulacja okrężna została

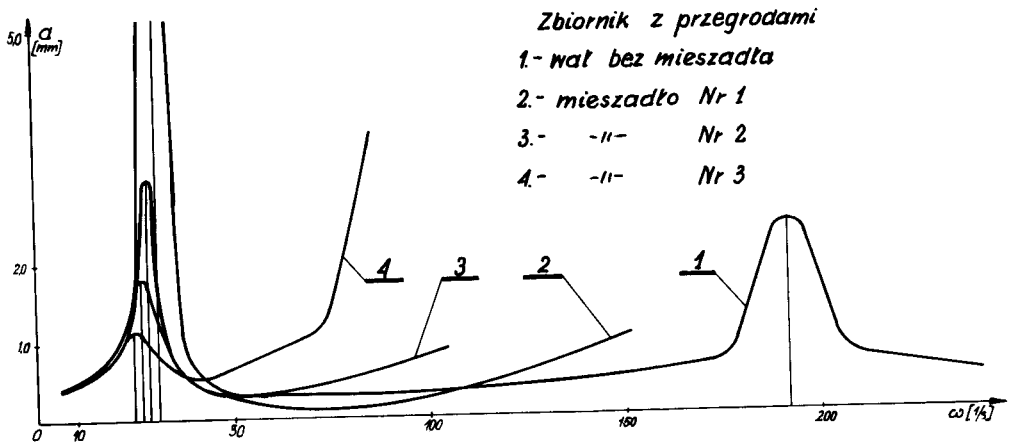
Opracowane statystycznie odcinki taśmy rejestracyjnej posłużyły do sporządzenia charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych, przedstawionych na rysunkach 5, 6, 7 i 8.



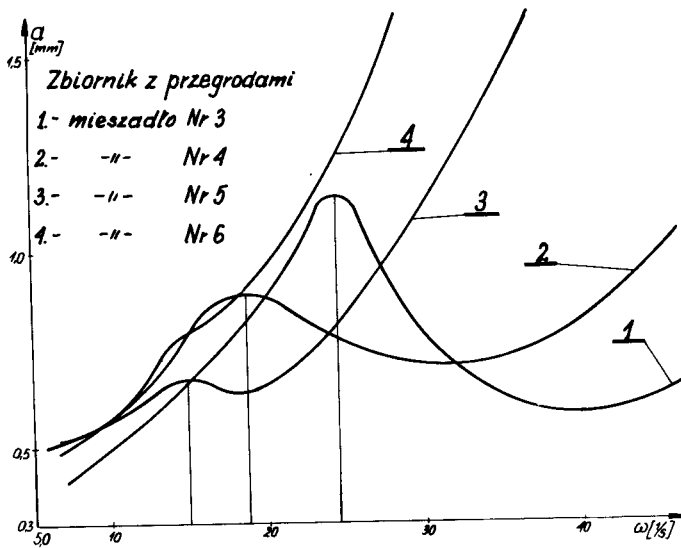
Rys. 5.



Rys. 6.



Rys.7.



Rys.8.

## 4. Wnioski końcowe

Charakterystyki amplitudowo-częstościowe pozwalają zaobserwować zmniejszenie amplitudy i częstości rezonansowej oraz ograniczenie od góry obszaru statecznej pracy wału giętkiego, wywołane wpływem mieszanej cieczy. Tak więc generalny wniosek rozważań teoretycznych został potwierdzony. Ze wzrostem wielkości mieszadła wzrasta tłumiące działanie mieszanego czynnika i skraca się obszar statecznej pracy wału giętkiego.

W oparciu o sporządzone statystyki amplitudowe-częstościowe można ilościowo określić wielkość tłumienia częstości rezonansowej. Tłumienia te, w postaci stosunków częstości drgań w wodzie do częstości drgań w powietrzu, zestawiono w tabelicy 4.1.

Tabela 4.1.

Wał z mieszadłem Nr	$\frac{\omega_1}{\omega'_1} = \frac{\text{Częstość rezonansowa drgań w wodzie w zbiorniku}}{\text{Częstość rezonansowa drgań w powietrzu}}$	
	bez przegród	z przegradami
sam wał	0,97	0,97
1	0,95	0,94
2	0,92	0,90
3	0,90	0,85
4	0,88	0,77
5	0,85	0,64
6	0,80	-

O szerokości obszaru statecznej pracy wału giętkiego decydują siły wzdłużne oddziaływania mieszanej ciecży i siły hydrauliczne strumieni odbitych od zabudowania wewnętrznego mieszalnika. Dla rozważanego typu mieszadła intensywniejsze było działanie sił wzdłużnych, występujących głównie w zbiorniku bez przegród, gdyż utrata stateczności wału występowała przy liczbie Reynoldsa  $Re = \frac{\omega \cdot d^2}{2\nu}$  wynoszącej około  $5 \cdot 10^5$ , natomiast w zbiorniku z przegrodami utrata stateczności wału giętkiego występowała przy  $Re = 7,5 \cdot 10^5$ .

Dla tradycyjnych, szybkoobrotowych mieszadeł o stosunkowo dużych średnicach  $d/D > 1/3$  /mieszadła nr 4, 5 i 6/, najbardziej niezawodnym stanem pracy jest stan podkrytyczny. Tylko mieszadła małe, o stosunkach  $d/D < 1/5$  /mieszadła nr 1 i 2/, mogą pracować w ograniczonym obszarze nadkrytycznym.

W dążeniu do zwiększania intensywności mieszania na drodze zwiększania obrotów należy zmienić rozwiązanie konstrukcyjne mieszalników. Nowoczesne rozwiązania konstrukcyjne powinny iść w kierunku skracania wałów, celem podniesienia ich sztywności lub zmniejszania średnic mieszadeł. Skrócenie wału można uzyskać przez boczne lub dolne usytuowanie napędu, zaś zmniejszenie średnicy mieszadeł - przez zainstalowanie kilku mieszadeł w jednym zbiorniku.

#### Literatura

1. Afonin O.D., Milczenko A.J., Michaliew F.M. : K rasczotu wałow bystrochodnych mieszazok. Chimiczeskoje i nieftianoje maszynostrojenije, Nr 12, 1971.
2. Dimentberg F.M.: Izgibnyje kolebanija wraszczajuszczichsia wałow. Izd. AN ZSRR 1959.
3. Drgania i fale w ciałach stałych. Praca zbiorowa pod red.S.Kaliskiego, PWN, Warszawa 1966.

4. Milczenko A.J., Taganow N.I., Kiril'kow B.M., Michaliew M.F.: K wyboru rezima raboty wałow bystrochodnych mieszadełok. Chemiczeskoje i nieftianoje maszynostrojenije, Nr 6, 1965.
5. Milczenko A.J., Taganow N.I., Kiril'kow B.M., Michaliew M.F.: Opredienije kriticzeskich skorostiej wałow mieszadełok w wiązkiach sredach. Chemiczeskoje i nieftianoje maszynostrojenije Nr 10, 1965.
6. Ruziczka J.: Vliv vedlejsich ucinku na pocet kriticzych otacek letmo ulozonych michadel. Strojirenstvi, Nr 8, 1969.
7. Siołkowski B.: Modelowanie dynamiczne wału z mieszadłem. Zeszyty Naukowe WSI w Bydgoszczy, Mechanika-Technologia /6/, 1973.
8. Siołkowski B.: Hydrodynamiczne oddziaływanie mieszanej cieczy na mieszadło. Zeszyty Naukowe WSI w Bydgoszczy, Mechanika-Technologia, /6/, 1973.
9. Siołkowski B.: Wpływ parametrów mechanicznych na stany krytyczne mieszadła cieczy. Praca doktorska. AGH, Kraków 1972.
10. Stręć F.: Mieszanie i mieszalniki. WNT, Warszawa 1971.
11. Wosiliew B.A., Milczenko A.J., Michaliew M.F.: Raszczot i issledowanije wibroustojczivosti wałow s dwumja bystrochodnymi mieszadełkami. Chemiczeskoje i nieftianoje maszynostrojenije, Nr 3, 1969.

## MOTION STABILITY OF LIQUID MIXER

## /Summary/

The paper presents a theoretical analysis and the experimental testing results relating to the motion stability of liquid mixers. Research has been done on a high-speed six-blade open-type turbo-mixer. On the base of the analysis made, some conclusions have been derived which are of great technical importance.

## УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ БЫСТРОХОДНЫХ МЕШАЛОК

/Резюме/

В статье автор представляет теоретический анализ и результаты устойчивого движения быстроходных мешалок. Экспериментальная работа была проведена автором на специальной установке с турбинной мешалкой открытого типа. Теоретический анализ и результаты исследования разрешили некоторые важные технические вопросы.

5





Biblioteka Główna ATR  
w Bydgoszczy

Ca

1006

M17

1976



BYDGOSZCZ