

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

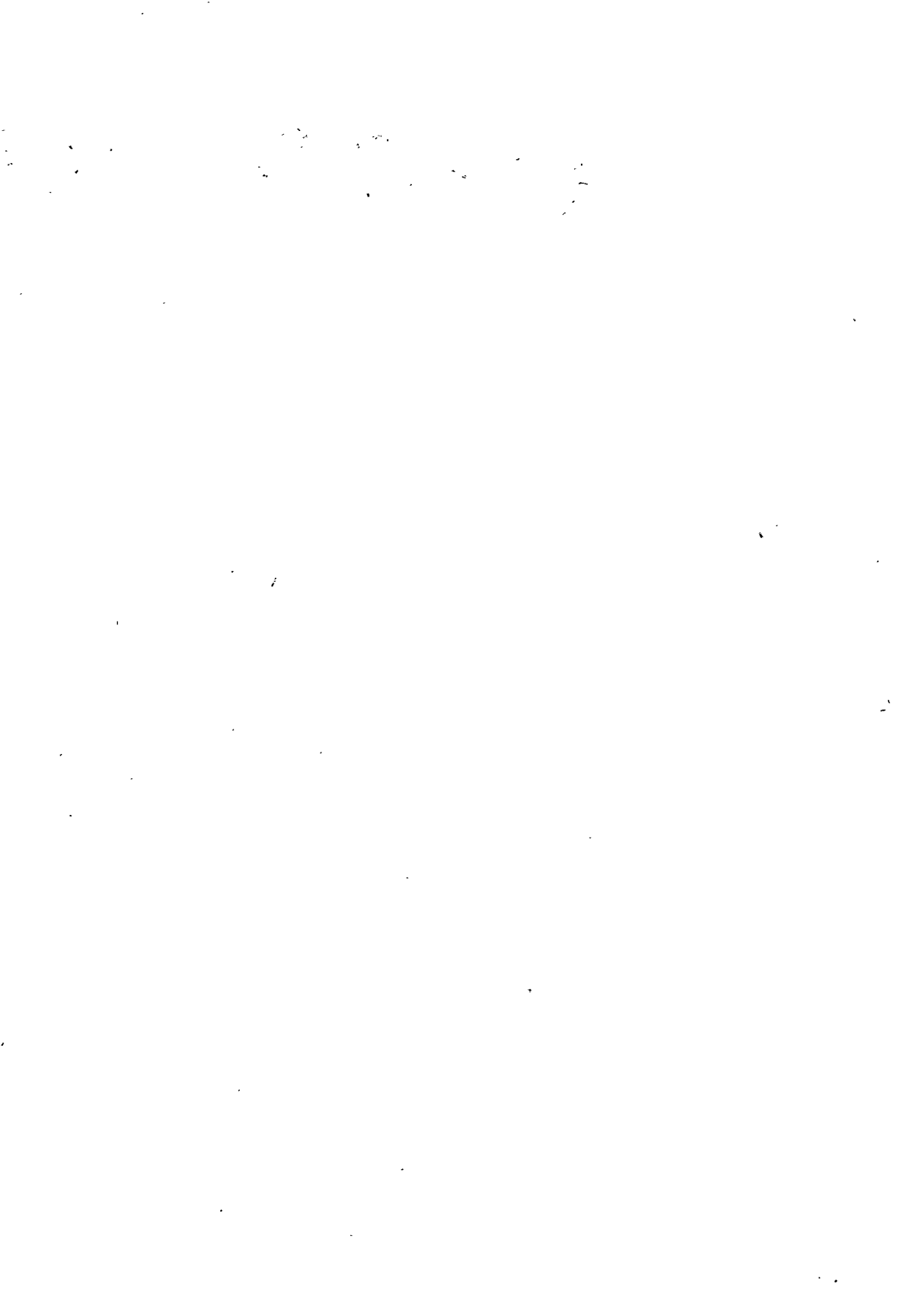
Rozprawy

Nr 9

Antoni Zabłudowski

ALGORYTMY
OPTYMALIZACJI STRUKTUR
TOPOLOGICZNYCH SIECI

BYDGOSZCZ - 1982



AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

Rozprawy
Nr 9

Antoni Zabłudowski

ALGORYTMY
OPTYMALIZACJI STRUKTUR
TOPOLOGICZNYCH SIECI

Biblioteka Wydziału Telekomunikacji
i Elektrotechniki ATR w Bydgoszczy



130000002971

BYDGOSZCZ - 1982

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO

doc. dr hab. Juliusz Skonieczny

OPINIODAWCY

prof. dr hab. Juliusz Kulikowski

prof. dr hab. Wojciech Sobczak

REDAKTOR NAUKOWY

doc. dr hab. Jacek Gieras

OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE

mgr Halina Koziółkiewicz, Alfons Grzenkowicz

Wydano za zgodą Rektora
Akademii Techniczno-Rolniczej
w Bydgoszczy



11603

**WYDAWNICTWO UCZELNIANE AKADEMII TECHNICZNO-ROLNICZEJ
W BYDGOSZCZY**

Nakład 100+50 egz. Ark. wyd. 5,4 Ark. druk. 5. Papier mat. kl. V, 70 g, 70 x 100
Oddano do druku we wrześniu 1982 r. Druk ukończono w październiku 1982 r. Zam. nr 889
Cena zł 65,- MNSzWiT C-6/99
WSiP Zakłady Graficzne w Bydgoszczy

S P I S T R E Ś C I

	str.
Wykaz oznaczeń	4
Wstęp	7
1. Podstawowe problemy syntezy sieci przesyłania informacji cyfrowych	9
1.1. Sformułowanie problemu'	9
1.2. Koszt utworzenia sieci komputerowej	12
1.3. Opóźnienie przesyłania informacji między blegunami sieci .	13
1.4. Wpływ uszkodzeń kanałów sieci na jej pracę	16
1.5. Wskaźniki niezawodnościowe określone dla sieci	18
1.6. Ocena sprawności działania algorytmów zadań optymalizacji .	22
2. Metody wyznaczania wskaźników niezawodnościowych sieci	27
2.1. Metoda przeglądu stanów sieci	28
2.2. Metoda wyznaczania parametrów niezawodnościowych z wykorzystaniem ścieżek lub drzew opinających	30
2.3. Metoda wykorzystująca dekompozycję sieci na podsieci	30
2.4. Inne metody wyznaczania prawdopodobieństwa istnienia połączenia pomiędzy węzłami s oraz t	44
3. Metody wyznaczania topologii sieci z uwzględnieniem wskaźników niezawodnościowych	50
3.1. Ogólna metoda rozwiązania	51
3.2. Algorytm optymalizacji sieci oparty o metodę podziału i oszacowań	57
3.3. Algorytm optymalizacji sieci wykorzystujący metodę ich rozbicia	62
Wnioski	71
Literatura	73

WYKAZ OZNACZEŃ

- A - macierz incydencji węzły - gałęzie grafu,
 B - zbiór gałęzi,
 Bd_i - zbiór dekompozycyjny,
 b_k - gałąź o numerze k ,
 C_k - przepustowość k -tego kanału,
 D - macierz określająca przynależność kanału do przekroju,
 d_i - stopień węzła,
 e_i - zdarzenie losowe,
 $F(x)$ - dystrybuanta zmiennej losowej,
 F_i - podzbiór kanałów występujących w strukturze,
 \bar{F}_i - podzbiór kanałów nie występujących w strukturze odpowiadającej i -temu wierzchołkowi,
 G - graf,
 $G(x)$ - dystrybuanta zmiennej losowej,
 h_i - i -ta klasa stanów sieci typu "trójkąt" lub "gwiazda",
 K - liczba kanałów występujących w sieci,
 M - liczba kanałów przyjęta w algorytmie syntezy,
 N - zbiór węzłów,
 n_i - węzeł o numerze i ,
 P_0 - parametr niezawodnościowy - oznaczenie ogólne,
 P_{st} - prawdopodobieństwo istnienia połączenia między węzłami s oraz t ,
 P_c - prawdopodobieństwo spójności sieci,
 $\bar{P}(\bar{C})$ - wektor, którego składowe określają prawdopodobieństwa poprawnej pracy przy ustalonej przepustowości,
 P_k - prawdopodobieństwo poprawnej pracy k -tego kanału,
 q_k - prawdopodobieństwo uszkodzenia k -tego kanału,
 R - ogólne oznaczenie przyjętej reguły sterowania,
 R_i - podzbiór kanałów występujący w algorytmie syntezy sieci,

- r - wskaźnik określający numer podsieci,
- S_k - natężenie strumienia przepływającego w k -tym kanale,
- s - węzeł źródłowy przy obliczeniu wartości P_{st} ,
- \mathcal{T} - topologia sieci,
- T - parametr określający średnie ważone opóźnienie przesyłania pakietu w sieci,
- t - węzeł końcowy przy obliczaniu wartości P_{st} ,
- X - zmienna losowa,
- x_i - boolowska zmienna prosta,
- \bar{x}_i - boolowska zmienna zanegowana,
- Y - zmienna losowa,
- y_i - wielkość określająca liczbę gałęzi należących do zbioru Bd_i ,
- V - podzbiór rozdzielający węzłów,
- W - liczba węzłów,
- Z_i - binarna zmienna losowa,
- $\alpha(r)$ - proces awarii,
- α_Q^{i-1} - współczynnik służący do obliczania P_{st} ,
- β_i - zbiór indeksów kanałów,
- $\gamma_{i,j}$ - natężenie strumienia zgłoszeń,
- $\mathcal{J}_M(F_i, R_i)$ - zbiór indeksów kanałów,
- \mathcal{P} - podzbiór stanów sieci,
- τ - współczynnik służący do obliczania P_c ,
- ξ_k - wielkość przyjmująca wartości ze zbioru $\{0,1\}$,
- $\pi(V)$ - podział na zbiorze V ,
- α - koszt sumaryczny sieci,
- $\mathcal{K}_k(C_k)$ - koszt budowy k -tego kanału o przepustowości C_k ,
- \mathcal{K}_d - oszacowanie dolne w algorytmie podziału i oszacowań,
- λ_k - natężenie strumienia pakietów kierowanych w k -ty kanał,
- μ - parametr rozkładu wykładniczego.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

In the second section, the author outlines the various methods used to collect and analyze the data. This includes both primary and secondary data collection techniques. The primary data was gathered through direct observation and interviews, while secondary data was obtained from existing reports and databases.

The third section details the statistical analysis performed on the collected data. This involves the use of descriptive statistics to summarize the data and inferential statistics to test hypotheses. The results of these analyses are presented in the following tables and charts.

The fourth section provides a comprehensive overview of the findings. It highlights the key trends and patterns observed in the data. For example, it was found that there is a significant correlation between the variables being studied. These findings have important implications for the field of study.

Finally, the document concludes with a discussion of the limitations of the study and suggestions for future research. It acknowledges that there are certain constraints on the data and methods used, but also offers insights into how these limitations can be addressed in subsequent studies.

W S T Ę P

Wraz z rozwojem nowych technologii i wprowadzeniem ich do tworzenia systemów cyfrowych nastąpił intensywny wzrost mocy obliczeniowych budowanych komputerów. Pojawiły się duże, a zarazem szybkie komputery posiadające złożone urządzenia zewnętrzne oraz oprogramowanie, które mogło być wykorzystane przez wielu potencjalnych użytkowników. Tak dynamiczny rozwój techniki komputerowej spowodował jednocześnie rosnące zapotrzebowanie na usługi związane z przetwarzaniem informacji. Rozpoczęto zatem prace nad znalezieniem takiego rozwiązania, które doprowadziłoby do jak najlepszego wykorzystania już istniejącego sprzętu. Jednym z pierwszych rozwiązań stało się zapewnienie dostępu do komputerów poprzez odpowiednie urządzenia telekomunikacyjne. Wobec tego zaczęto najpierw wykorzystywać komputery jako systemy obliczeniowe, do których dołączone były zewnętrzne terminale, następnie tworzyć struktury złożone z kilku lub kilkunastu dużych komputerów. Równocześnie z rozwojem dużych komputerów nastąpił rozwój niewielkich komputerów /mini- i mikrokomputerów/ służących do rozwiązywania pewnych wyspecjalizowanych zadań, takich między innymi jak sterowanie węzłami sieci telekomunikacyjnej. Pozwoliło to na sprzęgnięcie dużych komputerów obliczeniowych z siecią telekomunikacyjną poprzez małe komputery nazywane komputerami komunikacyjnymi. Oddzielono przy tym funkcje obliczeniowe od funkcji sterujących i rozpoczęto prace nad utworzeniem takiego systemu, w którym każdy komputer obliczeniowy stałby się dostępny dla dowolnego użytkownika. Systemy takie nazwane zostały sieciami komputerowymi lub teleinformatycznymi. Sieci komputerowe charakteryzują się specyficznym sposobem przesyłania informacji między poszczególnymi węzłami. Ze względu na to, że w węzłach sieci telekomunikacyjnej umieszczono komputery, które mogły w swych pamięciach przechowywać przesyłane informacje, możliwa stała się taka transmisja informacji od węzła początkowego do końcowego, która polegała na przesyłaniu jej tylko między kolejnymi komputerami komunikacyjnymi. Dopuszczano przy tym również możliwość podziału informacji na mniejsze segmenty zwane pakietami i przesyłanie poszczególnych pakietów niezależnie od siebie. Taki sposób przesyłania informacji nazwano przesyłaniem informacji z komutacją wiadomości lub komutacją pakietów.

Ocena tworzonych systemów zależy przede wszystkim od przyjętych kryteriów jakościowych. Za podstawowe takie kryteria, które mogły służyć do oceny istniejącej sieci zwykło się przyjmować wielkość opóźnienia przesyłanej informacji między węzłami sieci, wartość parametrów niezawodności-

wych oraz koszt utworzenia sieci. Przystępując zatem do tworzenia sieci projektant zmuszony jest rozwiązać zadanie, które uwzględniać powinno poszczególne kryteria jakościowe. Podstawowy problem, jaki musi być rozwiązany w etapie projektowania, to problem wyboru ze wszystkich potencjalnych połączeń między węzłami telekomunikacyjnymi takiego ich podzbioru /odpowiedniej struktury topologicznej/, dla którego utworzona sieć zachowuje podane kryteria jakościowe. Jednym z podstawowych kryteriów jest koszt utworzenia /koszt budowy/ sieci telekomunikacyjnej łączącej komputery obliczeniowe. Wybrana w procesie projektowania struktura topologiczna sieci powinna minimalizować globalny koszt budowy przy zachowaniu warunków dotyczących pozostałych kryteriów jakościowych. Tak postawione zadanie nosisi nazwę zadania optymalizacji struktury topologicznej sieci.

Tezą naukową rozprawy jest wykazanie, że istnieje rozwiązanie takiego zadania optymalizacyjnego, głównym zaś celem pracy - podanie dokładnych i konstruktywnych algorytmów służących do rozwiązania tego zadania.

Praca składa się z trzech rozdziałów.

W rozdziale pierwszym przedstawiono podstawowe kryteria jakościowe, charakteryzujące sieć komputerową, a więc koszt utworzenia sieci, średnie ważone opóźnienie przesyłania pakietu między węzłami sieci, oraz niezawodność sieci. Po zdefiniowaniu procesu uszkodzeń kanału określone zostały odpowiednie wskaźniki /parametry/ niezawodnościowe, a następnie przedstawiony został rozważany problem optymalizacyjny.

W rozdziale drugim zaprezentowano metody poszukiwania wskaźników niezawodnościowych. Najbardziej efektywny z algorytmów służący do znajdowania wartości parametrów niezawodnościowych użyty został w etapie syntezy do sprawdzenia, czy zachowany jest warunek narzucony na ten parametr.

Trzecia część pracy poświęcona jest omówieniu sposobów wyboru odpowiednich struktur topologicznych. Na początek omówiono krótko heurystyczną metodę generowania struktur topologicznych, a następnie podano algorytmy wykorzystujące metodę podziału i oszacowań. Przedstawione rozważania poparto szeregiem przykładów rachunkowych.

1. PODSTAWOWE PROBLEMY SYNTEZY SIECI PRZESYŁANIA INFORMACJI CYFROWYCH

W rozdziale tym podane zostaną ogólne rozważania związane z przedstawieniem zadania wyboru struktury topologicznej sieci przy uwzględnieniu ograniczeń. Na początek zostanie sformułowana najbardziej ogólna postać zadania optymalizacyjnego, a następnie omówione będą - funkcja kryterialna i ograniczenia rozpatrywanego zadania. W szczególności zostaną wyprowadzone zależności dotyczące średniego czasu przesyłania pakietu między węzłami sieci, a następnie omówiony będzie wpływ niezawodności kanałów sieci na czas przesyłania pakietów. Z kolei zostaną wyprowadzone podstawowe wzory, które służyć będą do znajdowania wielkości miary niezawodnościowej dla sieci, a następnie będzie podane szczególne zadanie optymalizacji, w którym uwzględniono tylko ograniczenia niezawodnościowe. Ostatnia część tego rozdziału została poświęcona ocenie sprawności działania algorytmów, które mogą być użyte do rozwiązania zadania optymalizacji.

1.1. Sformułowanie problemu

Szybki rozwój techniki komputerowej spowodował wzrost zainteresowania przesyłaniem informacji cyfrowych z wykorzystaniem zasobów /urządzeń/ telekomunikacyjnych. Buduje się więc specjalne sieci łączące komputery między sobą /komputery z oddalonymi końcówkami/, bądź też wykorzystuje się do tego celu już istniejące sieci telekomunikacyjne. Równocześnie dla celów sterowania wprowadzone zostały do systemów telekomunikacyjnych szybkie komputery spełniające rolę urządzeń zestawiających połączenia i nadzorujących prawidłowość procesu przesyłania informacji. Główną rolę w sieciach komputerowych odgrywają duże komputery obliczeniowe [1, 52, 85, 87], które poprzez urządzenia telekomunikacyjne stają się dostępne dla wszystkich uprawnionych użytkowników sieci. Komputery te są zasadniczym źródłem wszystkich informacji generowanych do sieci traktowanych jako zgłoszenia, które muszą być obsługiwane przez sieć. Komputery sterujące zwane komputerami komunikacyjnymi, których zadanie polega na obsługiwaniu pojawiających się informacji z komputerów głównych stają się więc w sposób pośredni /z punktu widzenia zasobów telekomunikacyjnych/ źródłami informacji, które muszą być z kolei obsługiwane poprzez istniejące zasoby telekomunikacyjne /przesłane pomiędzy poszczególnymi komputerami sterującymi/.

Istniejące obecnie sieci komputerowe budowane są bądź jako sieci ze sterowaniem centralnym, a więc takie, w których istnieje jeden komputer

nadzorujący pracę komputerów komunikacyjnych, rozstrzygający o tym, w jaki sposób należy przesyłać informację w sieci /np. sieć N/440 [1] /, bądź też sieci ze sterowaniem zdecentralizowanym, w których każdy z komputerów komunikacyjnych sam dokonuje wyboru drogi, po której przesyłać będzie nadaną informację od komputera inicjującego /bieguna źródłowego/ do komputera docelowego /bieguna docelowego, np. sieć ARPA [17, 85, 87] /.

W sieciach komputerowych ze sterowaniem zdecentralizowanym przesyłanie informacji między poszczególnymi węzłami /komputerami komunikacyjnymi/ odbywa się z wykorzystaniem zasady komutacji pakietów [27, 56, 81, 92], przy czym proces przesyłania pakietu pomiędzy biegunem źródłowym i docelowym polega na przesyłaniu tego pakietu między kolejnymi węzłami na trasie łączącej bieguny-źródłowy i docelowy. Taki sposób przesyłania informacji polegający na tym, że pakiety, na które podzielona została informacja, przechowywane są kolejno w buforach komputerów komunikacyjnych, powoduje, iż pojawia się skończone opóźnienie pomiędzy momentem wysłania informacji z bieguna źródłowego, a momentem dotarcia tej informacji do bieguna docelowego. Wartość tego opóźnienia zależna jest nie tylko od szybkości przesyłania rozważanej informacji w poszczególnych kanałach /czyli od przepustowości kanałów/, ale także od sposobu sterowania przesyłaniem /przepływem/ wszystkich pozostałych informacji [52, 56, 85]. Reguły określające sposób przesyłania informacji między węzłami sieci noszą nazwę reguł doboru tras [11, 33, 42, 82, 83].

Praca rzeczywistej sieci wymaga również uwzględnienia wpływu uszkodzeń jej elementów /w szczególności kanałów/ na sposób przesyłania informacji między poszczególnymi komputerami. Każde uszkodzenie węzła lub kanału powoduje, że wydłuża się czas między momentem pojawienia się informacji w biegunie źródłowym, a momentem jej dotarcia do bieguna docelowego.

Kolejnym czynnikiem mającym wpływ na czas przepływu informacji między biegunami są użyte w sieci zasoby telekomunikacyjne, a w szczególności przepustowość kanałów [40, 87]. Im szybciej będą przesyłane pakiety między węzłami sieci, tym szybciej pakiet osiągnie biegun docelowy. Wobec tego z punktu widzenia użytkowników sieci najbardziej celowe byłoby użycie kanałów o jak największej przepustowości. Ponieważ koszt budowy lub dzierżawy urządzeń telekomunikacyjnych wchodzących w skład kanału rośnie wraz z ich przepustowością, optymalne, z punktu widzenia użytkownika, rozwiązanie wymagałoby dużych nakładów finansowych ze strony administracji zarządzającej siecią. Z kolei w interesie administracji sieci jest, aby nakłady na środki telekomunikacyjne były jak najmniejsze. Jak widać interesy administracji zarządzającej siecią komputerową oraz użytkownika sieci są w przypadku wyboru urządzeń telekomunikacyjnych przeciwstawne.

Uwzględniając przedstawione tutaj czynniki, a mianowicie koszt sieci, czas pomiędzy momentem pojawienia się informacji w biegunie docelowym, a momentem dotarcia do bieguna źródłowego oraz niezawodność, projektant przystępując do tworzenia sieci napotyka na zadanie, które sformułować można następująco:

znając rozłożenie węzłów w sieci oraz natężenie strumieni informacji pojawiających się w tych węzłach znaleźć należy strukturę topologiczną \mathcal{T} /dokonać wyboru połączeń między węzłami/, wybrać przepustowość kanałów \bar{C} oraz dobrać tak odpowiednie reguły sterowania R , aby zminimalizować globalne nakłady finansowe /koszt/, zminimalizować czas pomiędzy momentem pojawienia się informacji w biegunie źródłowym, a momentem dotarcia jej do bieguna docelowego oraz zmaksymalizować niezawodność sieci.

Stosując sposób oznaczenia problemu optymalizacyjnego, jak to przyjęto w pracy [87, 88], problem można zapisać następująco:

$$\text{ZP: } \mathcal{T}, \bar{P}(\bar{C}), R; \mathcal{X}(\mathcal{T}, \bar{C}), T(\mathcal{T}, R), P_0(\mathcal{T}, \bar{P}(\bar{C})) \quad (1.1)$$

gdzie zapis zadania w postaci (1.1) oznacza zadanie polioptymalizacji polegające na optymalizacji funkcji kryterialnych \mathcal{X}, T, P_0 poprzez dobór topologii, przepustowości kanałów i reguł sterowania.

Zadanie optymalizacyjne przedstawione w podanej postaci jest nie do rozwiązania w praktyce, gdyż zespół wskaźników jakościowych zależy od zmiennych binarnych /istnienie lub brak kanału w sieci/, od zmiennych całkowitoliczbowych /przepustowości kanałów/ oraz od zmiennych rzeczywistych /wybór reguły sterowania/. Dlatego też zadanie postaci (1.1) ulega przekształceniu w taki sposób, że jako kryterium przyjmuje się koszt budowy sieci, pozostałe zaś wskaźniki traktowane są jako ograniczenia dla przedstawionego problemu. Formalnie więc, zadanie optymalizacyjne dla sieci przedstawić można następująco [10, 24, 27, 43, 71, 107]:

- dane jest:

a/ rozłożenie węzłów w sieci,

b/ średnie natężenie strumieni informacji pojawiających się w poszczególnych węzłach sieci,

- należy zminimalizować ogólny koszt utworzenia sieci rozumiany jako sumaryczny koszt budowy kanałów przyjmując w odpowiedni sposób:

a/ strukturę topologiczną, czyli odpowiedni wybór połączeń między węzłami,

b/ przepustowość kanałów,

c/ właściwą regułę sterowania przepływem pakietów w sieci,

- uwzględniając dodatkowo:

a/ ograniczenia ze względu na przepustowość kanałów,

b/ ograniczenia dotyczące czasu między momentami pojawiania się zgłoszeń w biegunie źródłowym, a momentem ich dotarcia do bieguna docelowego,

c/ ograniczenia niezawodnościowe.

Wykorzystując symbolikę podobną, jak to uczyniono dla zadania polioptymalizacji, tak określone zadanie optymalizacyjne przedstawia się w sposób następujący:

$$\text{ZO: } \mathcal{T}, \bar{P}(\bar{C}), R; \mathcal{X}(\mathcal{T}, \bar{C}) \quad | \quad T(\mathcal{T}, R), P_0(\mathcal{T}, \bar{P}(\bar{C})) \quad (1.2)$$

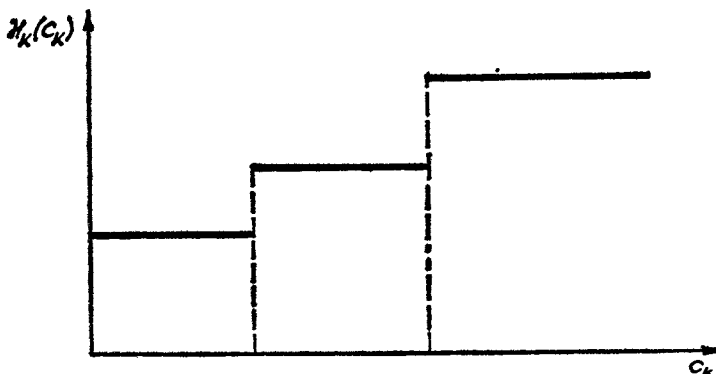
Mimo pewnych uproszczeń, tak sformułowany problem optymalizacji jest nadal trudny do rozwiązania i dlatego z reguły dokonuje się jego dalszej modyfikacji. Zanim jednak możliwe stanie się bliższe określenie modyfikacji problemu optymalizacji, na początek dokładniej należy omówić zarówno funkcję kryterialną, jak i występujące w problemie ograniczenia.

1.2. Koszt utworzenia sieci komputerowej

Jak już wspomniano, połączenie komputerów komunikacyjnych między sobą wymaga użycia zasobów telekomunikacyjnych, którymi przesyłane są informacje binarne. Zasobami telekomunikacyjnymi, które mogą być użyte do przesyłania informacji binarnych, są dla przykładu, kanały telefoniczne wyposażone na ich wejściu i wyjściu w modemy przekształcające informację binarną w informację ciągłą. Budowa lub dzierżawa kanału telefonicznego i modemu związana jest z wydatkowaniem pewnego kosztu, jaki należy ponieść, aby zapewnić przesyłanie informacji binarnych. Koszt ten zawiera pewien składnik stały, niezależny od długości oraz składnik zależny od długości kanału. Oznaczmy koszt związany z utworzeniem k -tego kanału o przepustowości C_k przez $x_k(C_k)$. Zatem całkowity koszt, jaki należy ponieść, aby utworzyć sieć składającą się z K kanałów, jest równy [43, 87, 104]:

$$x = \sum_{k=1}^K x_k(C_k) \quad (1.3)$$

W większości przypadków przepustowość kanałów telefonicznych oraz szybkość pracy modemów jest standaryzowana i przyjmuje wartości dyskretne. Nie można przyjąć zatem, że koszt $x_k(C_k)$ utworzenia k -tego kanału jest funkcją ciągłą jego przepustowości. Typową postać wykresu kosztu utworzenia kanału w zależności od przepustowości [40, 41, 43] pokazano na rys.1.1.



Rys.1.1. Zależność kosztu budowy kanału od jego przepustowości

Jak widać z przedstawionego wykresu, wybór przepustowości kanałów wiąże się ściśle z globalnym kosztem utworzenia całej sieci. Problem wyboru odpowiednich przepustowości kanałów wiąże się ściśle z uwzględnieniem ograniczeń nałożonych na przepustowości kanałów [86, 87]. Ograniczenia te są z kolei zależne również od sposobu sterowania siecią, a więc wybór struktury topologicznej, wybór przepustowości kanałów i dobór odpowiednich reguł sterowania są ściśle ze sobą powiązane. Sprawdzenie warunku nałożonego na ograniczenia /a/ oraz /b/ zadania optymalizacji sieci wymagać będzie dla każdej znalezionej struktury topologicznej doboru odpowiednich przepustowości kanałów i rozwiązania dodatkowego zadania, polegającego na optymalizacji reguł sterowania. Rozwiązanie przedstawionego zadania można uprościć przyjmując zasadę, że wszystkie kanały w sieci posiadają jednakową przepustowość. Dobór w sieci kanałów o jednakowej przepustowości jest uzasadniony z punktu widzenia praktycznej realizacji, gdyż użycie kanałów o różnych przepustowościach wymaga stosowania dodatkowych urządzeń telekomunikacyjnych, pozwalających na współpracę kanałów o różnej szybkości przesyłania informacji binarnych.

1.3. Opóźnienie przesyłania informacji między biegunami sieci

Dotychczas rozważano opóźnienie pomiędzy momentem pojawienia się informacji w biegunie źródłowym, a momentem dotarcia tej informacji do bieguna docelowego. Jest to wskaźnik jakości sieci określany z punktu widzenia pojedynczego użytkownika. Operowanie tak zdefiniowanym wskaźnikiem jakości sieci stwarza duże trudności w ocenie pracy sieci i dlatego za podstawowy wskaźnik jakości sieci związany /przy ustalonej topologii sieci i ustalonych przepustowościach kanałów/ z jej sterowaniem przyjęto używać średnie ważone opóźnienie przesyłania pakietu w sieci [55, 56]. Pojęcie średniego ważonego opóźnienia przesyłania pakietu w sieci komputerowej zdefiniowane zostało po raz pierwszy przez Kleinrocka w jego fundamentalnej pracy [54], dotyczącej metodologii działania takiej sieci. Kleinrock przyjął, że średnie ważone opóźnienie pakietu przesyłanego między dowolnymi biegunami sieci jest określone zależnością:

$$T = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{\gamma_{ij}}{\gamma} T_{ij} = \frac{1}{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \gamma_{ij}} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \gamma_{ij} T_{ij} \quad (1.4)$$

gdzie:

- γ_{ij} - średnie natężenie strumienia zgłoszeń pakietów pomiędzy biegunem źródłowym o numerze i , a biegunem docelowym o numerze j ;
- T_{ij} - średnie opóźnienie przesyłania pakietu wysłanego z bieguna źródłowego o numerze i do bieguna docelowego o numerze j ;

$$\gamma = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \quad - \text{sumaryczne natężenie strumienia zgłoszeń napływających do sieci.}$$

Wykorzystanie wyników teorii grafów oraz teorii masowej obsługi [55, 87] pozwala przekształcić zależność określoną w postaci (1.4) do następującej postaci, która łatwo może być użyta dla znalezienia średniego opóźnienia ważonego T :

$$T = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\gamma} T_k \quad (1.5)$$

gdzie:

- K - liczba wszystkich kanałów występujących w sieci komputerowej,
- λ_k - natężenie strumienia pakietów kierowanych w kanał o numerze k ,
- T_k - średnie opóźnienie pakietu przesyłanego w kanale o numerze k .

Problem sprowadza się obecnie do obliczenia natężenia λ_k oraz czasu T_k , zależnych od wielkości γ_{ij} oraz sposobu sterowania przepływem informacji w sieci. Jeżeli przyjąć następujące założenia [43, 55]:

- a/ źródła zgłoszeń mają charakter poissonowski,
- b/ długość trwania pakietu przesyłanego w sieci ma rozkład wykładniczy z wartością średnią $1/\mu$,
- c/ pojemność buforów jest nieskończona,
- d/ ustalona jest reguła sterowania siecią,
- e/ kanały pracują bez uszkodzeń,
- f/ zmienne losowe określające momenty pojawiania się zgłoszeń oraz zmienne losowe opisujące długość trwania pakietów są statystycznie niezależne,

to opóźnienie T_k w kanale określone jest:

$$T_k = \frac{1}{\mu C_k - \lambda_k} \quad (1.6)$$

gdzie:

- $1/\mu$ - średnia długość trwania pakietu mierzona w bitach/pakiet,
- C_k - przepustowość k -tego kanału mierzona w bitach/sekundę,
- λ_k - średnie natężenie pojawiających się pakietów w k -tym kanale mierzony w pakietach /sekundę.

Zależność (1.6) czasu opóźnienia pakietu przesyłanego w k -tym kanale wynika z przyjętego modelu procesu masowej obsługi takiego, jak to pokazano na rys.1.2, gdzie λ_k jest natężeniem strumienia pakietów napływających do bufora k -tego kanału. Bezpośrednie wykorzystanie wyników teorii procesów masowej obsługi dla systemu $M/M/1$ daje zależność (1.6).



Rys.1.2. Kanał w sieci jako proces masowej obsługi

Wstawiając do (1.5) wzór na czas opóźnienia T_k w k -tym kanale, a ponadto przyjmując za λ_k/μ wielkość s_k określającą średni strumień informacji w k -tym kanale, średnie opóźnienie ważone można zapisać w następującej postaci

$$T = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^K \frac{s_k}{c_k - s_k} \quad (1.7)$$

Przedstawiona w postaci (1.7) zależność na średnie ważone opóźnienie w sieci nie uwzględnia pewnych dodatkowych czynników, które pojawiają się w rzeczywistych warunkach pracy sieci. Z tego względu obliczenia teoretyczne z wykorzystaniem wzoru (1.7) dają wynik przybliżony. Na podstawie badań istniejącej sieci ARPA oraz symulacji komputerowej, Kleinrock [56] zaproponował następującą zależność, określającą średnie ważone opóźnienie pakietu w sieci:

$$T = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^K \lambda_k (T_k + T_{pr}(k) + T_{prz}(k)) \quad (1.8)$$

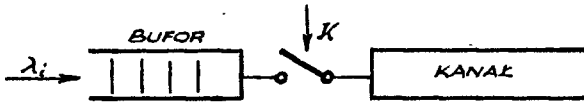
gdzie:

- T_k - dane jest w postaci (1.6),
- $T_{pr}(k)$ - określa czas opóźnienia propagacji w kanale o numerze k ,
- $T_{prz}(k)$ - określa czas przetwarzania tych informacji w węźle, które są związane z k -tym kanałem.

Zasadniczy wpływ na średnie opóźnienie przesyłania pakietu w kanale ma wielkość λ_k /zależność (1.6)/ ściśle zależna od sposobu sterowania strumieniami pakietów przepływających w sieci. Znalezienie optymalnego sterowania wymaga rozwiązania zadania poszukiwania ekstremum nieliniowej funkcji celu przedstawionej w postaci (1.6), przy liniowych ograniczeniach wynikających z równań zachowania strumienia i ograniczeń nałożonych na przepustowości kanałów [87]. W celu rozwiązania problemu optymalnego sterowania przepływem informacji w sieci, stosować można zarówno gradientowe metody programowania nieliniowego /np. metoda gradientu rzutowanego [85, 86] /, jak i bezpośrednie metody iteracyjne /metoda odchyłek strumienia [33] /. Czas niezbędny na znalezienie najlepszego rozwiązania problemu sterowania powodować będzie znaczne wydłużenie całkowitego czasu rozwiązywania zadania optymalizacyjnego.

1.4. Wpływ uszkodzeń kanałów sieci na jej pracę

Rozpatrzony tutaj zostanie bliżej przypadek pracy sieci w warunkach, gdy kanały pracują w sposób zawodny, co oznacza, że w każdym momencie czasu mogą one ulegać uszkodzeniom i wymagać będą naprawy. Pojawienie się uszkodzenia kanału związane jest z pojawieniem się uszkodzeń na trakcie telekomunikacyjnym /np. uszkodzenie wzmacniaków w systemach nośnych lub regeneratorów w systemach PGM/ lub uszkodzeniem występującym w urządzeniach stacyjnych związanych z rozważanym kanałem. Przyjmuje się, że w momencie pojawienia się uszkodzenia kanał zostaje odłączony od bufora, do którego napływają zgłoszenia. Tym samym niemożliwa staje się obsługa tych zgłoszeń /przesłanie pakietów/, które znajdują się w buforze. Pracę kanału, w którym dopuszczalne jest występowanie uszkodzeń, przedstawić można w sposób pokazany na rys.1.3.



Rys.1.3. Model masowej obsługi kanału zawodnego w sieci

Klucz K otwierany i zamykany jest losowo /tzn. losowy jest jego moment otwarcia oraz losowy moment zamknięcia/ odpowiednio w momentach pojawienia się uszkodzenia i jego usunięcia. Przedstawiany system przestaje być /nawet przy bardzo ostrych założeniach dotyczących momentów pojawiania się uszkodzeń i czasów ich trwania/ systemem markowskim i dla jego oceny użyć należy bardzo złożonych metod analizy [55, 57]. Dodatkowo szczegółowa analiza przedstawionego systemu jest możliwa przy założeniu, że intensywność pojawiania się zgłoszeń napływających do bufora rozważanego kanału jest stała. Otrzymane wyniki są złożone i zależne od liczby kanałów leżących na trasie łączącej wybrane bieguny sieci /strumień wyjściowy traci charakter strumienia Poissona [55] /. Niemożliwe staje się więc wykorzystanie prostych zależności określających średnie ważne opóźnienie w sieci, które zostały podane w punkcie 1.3 tego rozdziału.

W rzeczywistych sieciach komputerowych wybierane są także reguły sterowania, które powinny po pierwsze zapewniać przeciwdziałanie efektowi napływania zgłoszeń do bufora tego kanału, który jest uszkodzony, po wtóre - po wyłączeniu kanału na czas jego naprawy - powinny określać zbiór nowych tras, po których należy kierować pakiety między poszczególnymi biegunami [74, 89]. Wymaga to ponownego rozwiązania zadania optymalizacji reguły sterowania. Taki sposób podejścia jest uzasadniony ponadto tym, że średni czas trwania uszkodzenia jest o kilka rzędów większy, niż średni czas pomiędzy momentami pojawienia się zgłoszeń w sieci. Zatem wyłączenie kanału może być traktowane jako wybór nowej topologii sieci, w której przy ustalonych przepustowościach kanałów należy znaleźć optymalną regułę ste-

rowania, a następnie obliczyć dla stanu ustalonego przy optymalnej regule średnie ważone opóźnienie w sieci. W takim przypadku okazać się może, że opóźnienie to przekracza /niekiedy nawet znacznie/ przyjętą wartość średniego opóźnienia ważonego. Wobec tego w warunkach, gdy pojawiają się uszkodzenia kanałów w sieci, zdarzają się takie okresy pracy sieci, kiedy średnie opóźnienie przesyłania pakietu między biegunami jest duże. Ze względu na dużą złożoność przedstawionego problemu jedyną użyteczną metodą, która może służyć do oceny wpływu pojawiania się uszkodzeń kanałów w sieci na średni czas T jest metoda symulacyjna. Pozwala ona jedynie tylko przebadac zachowanie się sieci w warunkach pojawiania się uszkodzeń, nie dając przy tym odpowiedzi na pytanie, jaki parametr łączący niezawodność kanałów z czasem opóźnienia pakietu przechodzącego między biegunami należy wybrać. Trudności, które zostały przedstawione spowodowały, że zarówno w procesie analizy /badania/ istniejącej sieci, jak i w procesie syntezy /projektowania/ sieci, oddziela się ograniczenia niezawodnościowe oraz ograniczenia dotyczące średniego ważonego opóźnienia przesyłania pakietu w sieci^{1/}. Należy zatem zdefiniować pewien wskaźnik niezawodnościowy, który określa miarę niezawodnościową dla całej sieci zależną od niezawodności poszczególnych jej elementów. W procesie syntezy poszukiwać się więc będzie takiej struktury topologicznej, dla której określony wskaźnik niezawodnościowy przekracza pewien z góry zadany próg, a ponadto średnie ważone opóźnienie przesyłania pakietu przesyłanego w sieci w warunkach, gdy wszystkie kanały są sprawne, jest mniejsze od zadanej z góry wielkości. Na podstawie powyższych rozważań można wysunąć wniosek, że celowym staje się podział zadania optymalizacyjnego na dwa podzadania:

- a/ zadanie optymalizacyjne uwzględniające globalny wskaźnik niezawodnościowy dla sieci, zależny od topologii i niezawodności kanałów sieci;
- b/ zadanie, w którym dla topologii sieci znalezionej w etapie /a/ poszukuje się zbioru optymalnych reguł sterowania i sprawdza się czy średnie ważone opóźnienie przesyłania pakietu nie przekracza ustalonego progu.

Możliwe jest również rozwiązywanie tego zadania postępując w następujący sposób:

- a/ rozwiązać zadanie polegające na znalezieniu takiej topologii sieci, aby w optymalnych warunkach sterowania średnie opóźnienie pakietu było mniejsze od ustalonej wielkości;
- b/ dla wybranej w pkt./a/ topologii sieci dokonać analizy niezawodnościowej i sprawdzić, czy wskaźnik niezawodnościowy przekracza ustalony próg.

Należy zauważyć, że w etapie pierwszym uwzględnia się dobór przepustowości kanałów, gdyż zarówno niezawodność kanałów jak i opóźnienie w sieci zależą od użytych zasobów telekomunikacyjnych.

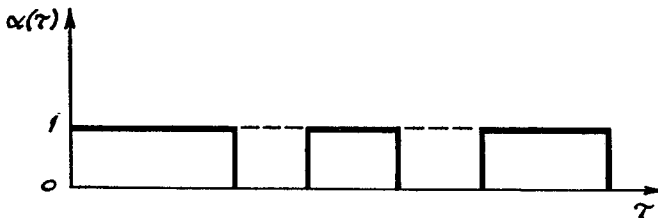
^{1/} W pracy [19] dokonano oceny wielkości parametru T , przy uwzględnieniu uszkodzeń kanałów.

W tej pracy rozwiązuje się zadanie optymalizacyjne przedstawione w pierwszej postaci. Dokładniej, podaje się tylko rozwiązanie etapu /a/, określając sposób wyboru takiej topologii sieci, dla której sumaryczny koszt utworzenia jest możliwie najmniejszy przy warunku, że wartość pewnego wskaźnika niezawodnościowego, zdefiniowanego dla sieci przekracza ustalony próg. Sposób rozwiązania etapu /b/ jest dobrze znany i opisany przez wielu autorów, np. [5, 33, 86].

Obecnie zostaną zdefiniowane odpowiednie parametry niezawodnościowe /wskaźniki niezawodnościowe/ dla sieci oraz omówiony będzie wpływ niezawodności poszczególnych kanałów na globalny wskaźnik niezawodnościowy, określony dla całej sieci.

1.5. Wskaźniki niezawodnościowe określone dla sieci

Zanim możliwe stanie się bliższe przedstawienie parametrów niezawodnościowych określonych dla sieci, omówiony będzie dokładniej proces uszkodzeń kanału jako podstawowego elementu sieci. Przyjmuje się, że w dowolnym momencie czasowym kanał może ulec uszkodzeniu i na czas usuwania uszkodzenia /czas usuwania uszkodzenia składa się z czasu lokalizacji uszkodzenia i czasu naprawy/ jest on wyłączony z sieci. Proces awarii $\alpha(\tau)$ takiego kanału można przedstawić jak na rys.1.4, gdzie $\alpha(\tau) = 0$ oznacza, że kanał znajduje się w stanie uszkodzonym, $\alpha(\tau) = 1$ oznacza zaś, że kanał znajduje się w stanie poprawnej pracy.



Rys.1.4. Proces awarii kanału w sieci

Aby znaleźć prawdopodobieństwa przebywania w poszczególnych stanach procesu $\alpha(\tau)$ należy założyć:

- a/ długość czasu poprawnej pracy kanału od chwili zakończenia $n-1$ - ej naprawy do momentu pojawienia się n -tego uszkodzenia dana jest zmienną losową X_n ; rozkład zmiennych losowych X_n jest jednakowy dla wszystkich n

$$P [X_n < x] = F(x) \quad n = 1, 2, \dots, \dots \quad (1.9)$$

Zmienna losowa opisująca długość czasu poprawnej pracy kanału oznaczona będzie dalej przez X . Wartość średnia i wariancja tej zmiennej jest skończona,

$$E(X_n) = E(X) < \infty$$

$$D^2(X_n) = D^2(X) = \sigma_1^2 < \infty \quad (1.10)$$

b/ długość czasu awarii dla n-tego uszkodzenia opisana jest zmienną losową Y_n , przy czym rozkład zmiennych Y_n jest znany i jednakowy dla wszystkich n

$$P[Y_n < x] = G(x) \quad n = 1, 2, \dots, \dots \quad (1.11)$$

Zmienna losowa określająca długość czasu awarii oznaczona będzie dalej przez Y . Wartość średnia i wariancja tej zmiennej jest skończona

$$E(Y_n) = E(Y) < \infty$$

$$D^2(Y_n) = D^2(Y) = \sigma_2^2 < \infty \quad (1.12)$$

c/ zmienne losowe X oraz Y są statystycznie niezależne.

Jak wykazano w pracy [58], dla procesu awarii opisanego założeniami /a/, /b/, /c/ gotowość elementu w chwili τ prawdopodobieństwo $p(\tau) = P[\alpha(\tau) = 1]$ dane jest w postaci:

$$p(\tau) = 1 - F(\tau) + \int_0^\tau (1 - F(\tau - x)) dH_\phi(x) \quad (1.13)$$

przy czym

$$H_\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x F_n(x-u) dG_n(u) \quad (1.14)$$

gdzie $F_n(x)$ i $G_n(x)$ są dystrybuantami sumy n niezależnych zmiennych losowych odpowiednio o rozkładzie $F(x)$ i $G(x)$.

Korzystanie z prawdopodobieństwa $p(\tau)$ /znajomość rozkładu rzędu pierwszego dla procesu $\alpha(\tau)$ / jest praktycznie niemożliwe ze względu na bardzo złożoną zależność opisującą to prawdopodobieństwo. W praktyce interesująca jest tylko graniczna ocena parametru $p(\tau)$ czyli:

$$p = \lim_{\tau \rightarrow \infty} p(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} P[\alpha(\tau) = 1] \quad (1.15)$$

Korzystając z węzłowego twierdzenia teorii odnowy, prawdopodobieństwo p wyliczyć można korzystając z prostego wzoru:

$$p = \frac{E(X)}{E(X) + E(Y)} \quad (1.16)$$

Z zależności (1.16) widać, że graniczne prawdopodobieństwo p tego, że dla procesu awarii opisanego założeniami /a/, /b/, /c/ kanał będzie sprawny, nie zależy od rozkładów $F(x)$ i $G(x)$, a zależy tylko od wartości pierwszych momentów tych zmiennych. Wzór (1.16) określa nam praktyczny sposób oceny /pomiaru/ prawdopodobieństwa granicznego p . Wystarczy w dostatecznie długim okresie czasu obserwacji za p przyjąć stosunek sumarycznej długości czasu poprawnej pracy kanału do całkowitego czasu obserwacji.

Przedstawione rozważania dotyczące jednego kanału zostaną obecnie rozszerzone na całą sieć. Przyjmuje się, że

A1/ topologia sieci określona jest grafem $G = \langle N, B \rangle$ gdzie $N = \{n_1, n_2, \dots, n_w\}$ jest zbiorem węzłów sieci, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_K\}$ zaś zbiorem kanałów występujących w sieci,

A2/ procesy awarii kanałów $\alpha_k(\tau)$ są znane, a ponadto poszczególne procesy awarii są statystycznie niezależne.

Zdefiniowany zostanie wielowymiarowy proces stochastyczny utworzony jako iloczyn kartezyjański procesów $\alpha_k(\tau)$. Jeżeli przez $\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K \rangle$ oznaczyć wektor o składowych $\xi_k \in \{0, 1\}$, to można go traktować jako wektor określający taki stan sieci, w którym w stanie poprawnej pracy występują te kanały, dla których $\xi_k = 1$ oraz w stanie uszkodzonym te kanały, dla których $\xi_k = 0$. Prawdopodobieństwo przebywania sieci w chwili τ w stanie określonym wektorem $\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K \rangle$ /dalej wektor identyfikowany będzie ze stanem sieci i nazywany po prostu stanem sieci/ jest równe:

$$\begin{aligned} P[\alpha_1(\tau) = \xi_1, \alpha_2(\tau) = \xi_2, \dots, \alpha_K(\tau) = \xi_K] = \\ = \prod_{i \in \beta(1)} P[\alpha_{k_i}(\tau) = 1] \prod_{j \in \beta(0)} P[\alpha_{k_j}(\tau) = 0] \quad (1.17) \end{aligned}$$

Graniczna wartość /dla $\tau \rightarrow \infty$ / prawdopodobieństwa przebywania w stanie $\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K \rangle$ jest zatem równa:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} P[\alpha_1(\tau) = \xi_1, \alpha_2(\tau) = \xi_2, \dots, \alpha_K(\tau) = \xi_K] = \\ = P[\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K \rangle] = \prod_{i \in \beta(1)} p_{k_i} \prod_{j \in \beta(0)} (1 - p_{k_j}) \quad (1.18) \end{aligned}$$

Znajomość prawdopodobieństw przebywania sieci w poszczególnych stanach pozwala ocenić prawdopodobieństwo tego, czy sieć w określonej chwili τ_0 jest sprawna, czy nie jest sprawna. W dalszym ciągu za sieć sprawną w chwili τ_0 uznawać się będzie taką sieć, która spełnia jeden z dwóch poniższych warunków [31, 109]:

a/ w chwili τ_0 istnieje w sieci połączenie między wybraną parą biegunów s oraz t ,

b/ w chwili τ_0 istnieje w sieci połączenie między wszystkimi jej węzłami /sieć jest spójna/.

Prawdopodobieństwo zajścia w chwili τ_0 zdarzenia /a/ oznaczone będzie przez $P_{st}(\tau_0)$, zdarzenia /b/ zaś przez $P_c(\tau_0)$. Wydłużając czas obserwacji do nieskończoności uzyskuje się graniczne wartości prawdopodobieństwa P_{st} oraz P_c /dla $\tau \rightarrow \infty$ /. Prawdopodobieństwa te, które nazywane będą dalej wskaźnikami niezawodnościowymi sieci, są równe:

$$P_0 = \sum_{i \in C_0} P [\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle] \quad (1.19)$$

gdzie:

- P_0 - w zależności od zdefiniowanego wskaźnika niezawodnościowego jest równe P_{st} lub P_c ,
- C_0 - określa zbiór indeksów tych stanów sieci, dla których w zależności od rozważanego parametru niezawodnościowego istnieje połączenie między s oraz t lub sieć jest spójna

Parametry P_{st} oraz P_c są najbardziej wygodnymi, choć wcale nie jedyne wskaźnikami niezawodnościowymi określonymi dla sieci. Spotyka się również takie wskaźniki, które uwzględniają wpływ niezawodności kanałów na ich przepustowość [21, 101], bądź miary, które wynikają z analizy deterministycznej [60], a które mogą być użyte dla celów analizy probabilistycznej [97, 99]. Ze względu na to, że nie istnieją zwarte wzory pozwalające znajdować wielkości tak zdefiniowanych parametrów, miary te nie są w praktyce wykorzystywane.

Prawdopodobieństwa graniczne P_{st} lub P_c łatwo można znaleźć wykorzystując taki model sieci, w którym dla poszczególnych kanałów zdefiniowane zostały tylko prawdopodobieństwa graniczne. Model sieci jest w tym przypadku następujący:

- A1/ struktura topologiczna sieci dana jest grafem $G = \langle N, B \rangle$, gdzie N - zbiór węzłów, B - zbiór kanałów w sieci
- A3/ stan każdego kanału sieci opisany jest losową zmienną binarną Z_i , przy czym rozkład jej jest znany, czyli:

$$P [Z_i = 1] = p_i$$

$$P [Z_i = 0] = q_i$$

- A4/ zmienne losowe opisujące stany poszczególnych kanałów sieci są statystycznie niezależne.

W dalszym ciągu dla celów analizy niezawodnościowej przyjęty zostanie model sieci określony założeniami A1, A3, A4. Zadanie optymalizacyjne, jakie będzie rozwiązywane, brzmi [108]:

dane jest rozłożenie węzłów w sieci; dla każdej pary węzłów określony jest zbiór kanałów /zbiór zasobów telekomunikacyjnych/ o przepustowościach C_k , kosztach $\mathcal{K}_k(C_k)$ - związanych z utworzeniem tego kanału i prawdopodobieństwie poprawnej pracy $p_k(C_k)$. Należy znaleźć najtańszą możliwą sieć, dla której jeden z parametrów niezawodnościowych P_{st} lub P_c przekracza ustalony z góry próg.

Korzystając z przyjętej notacji zadanie to można zapisać w następującej formie:

$$ZO: \tau, \bar{P}(\bar{C}); \mathcal{K}(\tau, C) \mid P_0(\tau, \bar{P}(\bar{C})) \quad (1.20)$$

Rozwiązanie tego zadania składać się będzie z dwóch etapów:

- 1/ etapu generowania struktur topologicznych /określenia grafu sieci/,
- 2/ etapu sprawdzania /analizy/, czy przy odpowiednim doborze przepustowości kanałów, a co za tym idzie przy odpowiednim doborze prawdopodobieństw $p_k(C_k)$, spełnione są ograniczenia niezawodnościowe.

Każdy z algorytmów, który może być użyty do rozwiązania zadania optymalizacyjnego przedstawionego w postaci (1.20), musi składać się z obydwu tych etapów. Czas obliczeń każdego z etapów ma zasadniczy wpływ na całkowity czas określania optymalnej struktury. Dlatego też poszukiwać należy zarówno szybkich procedur generowania struktur topologicznych, jak i szybkich metod wyznaczania wskaźników niezawodnościowych.

W literaturze poświęconej przedmiotowi, metody analizy niezawodnościowej /metody wyznaczania wskaźników niezawodnościowych/, szczególnie metody poszukiwania parametru P_{st} , są opisane bardzo szeroko. Znacznie mniej prac poświęconych jest procesom generacji struktur topologicznych. Ponadto większość prac dotyczy metod generacji struktur dla sieci drzewiastych [24, 25, 27, 53, 60, 110]. W pracach tych przedstawione zostały zarówno algorytmy dokładne poszukiwania takich struktur [14, 15], jak i algorytmy heurystyczne [12, 27, 53, 110]. Dla sieci o dowolnej strukturze znanych jest tylko niewiele algorytmów syntezy - przeważnie heurystycznych. Dlatego też w tej pracy podano tylko dokładne algorytmy służące do rozwiązania zadania optymalizacji sieci z ograniczeniami niezawodnościowymi. W następnych rozdziałach opisane będą dokładniej sposoby wyznaczania wskaźników niezawodnościowych, jak również podane zostaną algorytmy generacji optymalnych struktur topologicznych sieci o dowolnej strukturze. Najpierw jednak zostanie omówiony sposób oceny algorytmów, co pozwoli zorientować się bliżej, na jakie trudności można napotkać w trakcie rozwiązywania postawionego zadania.

1.6. Ocena sprawności działania algorytmów zadań optymalizacji

Jak wyjaśniono w części 1.5 tego rozdziału, podstawowe zadanie, jakie postawiono w pracy, polega na znalezieniu optymalnej struktury sieci

przy uwzględnieniu jej niezawodności. Ze względu na różne możliwości rozwiązania przedstawionego zadania, a stąd różne możliwe algorytmy, celowe staje się bliższe omówienie kryterium oceny poszczególnych algorytmów. Podstawowymi takimi kryteriami, decydującymi najczęściej o praktycznych możliwościach wykorzystania algorytmów dla komputerowego rozwiązania przedstawionego zadania, są:

- a/ czas obliczeń algorytmu, mierzony jako funkcja wielkości danych wejściowych,
- b/ obszar pamięci komputera wymagany przez algorytm, również zależny od wielkości danych wejściowych.

Z reguły obydwie te kryteria są ze sobą ściśle powiązane, dlatego też najczęściej za ocenę jakości algorytmu przyjęto używać kryterium czasu obliczeń dla rozważanego problemu. Porównując kilka znanych algorytmów, bądź też oceniając nowo skonstruowany algorytm, należy posiadać możliwość określenia czasu obliczeń tych algorytmów zależnego nie od szybkości działania komputera, lecz od liczby podstawowych operacji wymaganych przez rozważany algorytm. Za taką obiektywną miarę jakości algorytmów przyjęto miarę noszącą nazwę złożoności obliczeniowej algorytmów [6, 95, 96]. Pojęcie to wprowadzono dla oceny tych algorytmów, które mogły być rozwiązywane przez pewien abstrakcyjny model urządzenia liczącego, nazywanego maszyną Turinga [6]. Złożonością obliczeniową algorytmów nazywa się wielkość określającą rozmiar rozwiązywanego problemu /mierzoną w liczbach operacji arytmetycznych lub logicznych/ jako funkcję wielkości danych wejściowych. Możliwe są dwa sposoby określania złożoności obliczeniowej algorytmów. Można rozważać tzw. średnią złożoność obliczeniową, która zależy nie tylko od wielkości danych wejściowych, ale także od rodzaju tych danych, bądź też złożoność obliczeniową dla przypadku najgorszego /skrajnego/. Pierwszy ze sposobów wymaga znajomości rozkładów statystycznych danych wejściowych, co w praktyce jest nieosiągalne i dlatego jest on stosowany bardzo rzadko. W związku z tym w dalszym ciągu pod pojęciem złożoności obliczeniowej algorytmu należy rozumieć złożoność dla przypadku najgorszego. Dla formalnego sposobu oceny algorytmów wprowadza się kilka pojęć podstawowych.

Funkcja T czasu obliczeń jest rzędu $g(n)$, co zapisuje się $O(g(n))$ wtedy, gdy istnieje taka stała c , że

$$T(n) \ll c g(n), \quad n \gg 0$$

dla wszystkich skończonych liczb $n \gg 0$ [95].

Dokonując oceny algorytmu należy sprecyzować jaką funkcją jest $g(n)$, a konkretniej - czy $g(n)$ jest czy też nie pewnym wielomianem liczby n . Bazując na uzyskanych wynikach przyjęto, że algorytm A , znajdujący rozwiązanie jakiegoś problemu, nosi nazwę algorytmu efektywnego, gdy czas obliczeń $T(n)$ z wykorzystaniem tego algorytmu jest rzędu $O(p(n))$, gdzie $p(n)$ jest pewnym wielomianem. Z kolei, gdy czas obliczeń algorytmu jest rzędu $O(f(n))$, gdzie $f(n)$ jest funkcją wykładniczą, to o takim algoryt-

mie mówi się, że jest on nieefektywny. Jak wykazano [6], problemy rozwiązywane przez algorytmy efektywne /nazywane algorytmami klasy P/, mogą być obliczone w czasie rzędu pewnego wielomianu z wykorzystaniem deterministycznej maszyny Turinga. Z kolei problemy rozwiązywane przez algorytmy nieefektywne /nazywane algorytmami klasy NP/ mogą być również obliczone w czasie rzędu pewnego wielomianu, jednakże wymagają wykorzystania niedeterministycznej maszyny Turinga [6, 18]. Rozwiązywanie zadania z wykorzystaniem niedeterministycznej maszyny Turinga polega na tworzeniu w poszczególnych krokach algorytmu kopii istniejących maszyn tak, że po n krokach otrzymać można a^n ($a > 1$) kopii, które w tym samym momencie czasowym rozstrzygają, czy dany problem może być rozwiązany dla przypadku rozważanego przez określoną kopię. Jak z tego widać, obliczenia przeprowadzone z wykorzystaniem deterministycznej maszyny Turinga wymagają generowania /odtworzenia/ kolejno każdej kopii maszyny niedeterministycznej. Tym samym liczba możliwych wariantów rozważanych w trakcie obliczeń na deterministycznej maszynie Turinga jest nie mniejsza niż a^n . Istnieje wiele typów problemów, o których wiadomo, że należą do klasy NP. Problemy te tworzą klasę zwaną NP - zupełną. Zanim można będzie określić, jakie problemy są problemami typu NP - zupełne, trzeba podać niezbędne definicje.

Definicja 1.1

Problem P_1 jest wielomianowo transformowalny w problem P_2 , jeżeli P_1 może być rozwiązany za pomocą algorytmu A , który posiada następujące własności:

- a/ algorytm A wywołuje zero lub więcej razy podprogram A' rozwiązujący problem P_2 ,
- b/ pomijając czas zużyty na wywołanie podprogramu A' , algorytm A znajduje rozwiązanie w czasie, który jest wielomianową funkcją długości konkretnych danych problemu P_1 dla algorytmu A .

Z definicji 1.1 wynika, że jeżeli problem P_2 posiada wielomianowy algorytm, wtedy również dla problemu P_1 istnieje algorytm wielomianowy, podobnie jeżeli nie istnieje wielomianowy algorytm dla problemu P_2 , wtedy również P_1 nie posiada takiego algorytmu.

Definicja 1.2

Problem P nosi nazwę problemu NP - zupełnego, wtedy gdy jest on problemem typu NP oraz każdy inny problem należący do klasy NP może być wielomianowo transformowalny w problem P .

Szczegółowy przegląd problemów należących do klasy NP - zupełnych przedstawiono w pracach [6, 96].

Wszystkie przeprowadzone tutaj rozważania dotyczą tzw. problemów decyzyjnych, czyli takich, dla których komputer /maszyna Turinga/ powinien rozstrzygnąć czy istnieje, bądź czy nie istnieje odpowiedź dla przedstawionego problemu. Z kolei każdy problem optymalizacyjny traktować można

jako rozwiązywanie kolejnych problemów decyzyjnych, tym samym więc wszystkie powyższe rozważania stają się słuszne dla algorytmów rozwiązujących problemy optymalizacyjne.

Istnienie problemów optymalizacyjnych, dla których algorytmy są algorytmami klasy NP, uzasadnia celowość pojawienia się metod heurystycznych /najczęściej o czasach wielomianowych/ służących do rozwiązywania tych zadań. Dlatego też algorytmy służące do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych należących do klasy NP podzielić można na:

- a/ heurystyczne algorytmy przybliżone, dla których najczęściej stosowaną jest metoda lokalnego przeszukiwania sąsiedztwa [18],
- b/ dokładne algorytmy oparte na metodach przeglądu, przy czym najczęściej stosowana jest tutaj metoda podziału i oszacowań [35, 44, 63].

Podstawowa idea algorytmów lokalnego przeszukiwania sąsiedztwa jest następująca:

- a/ dla każdego punktu należącego do dopuszczalnego zbioru rozwiązań /spełniającego ograniczenia problemu/ zdefiniowany jest podzbiór punktów zwany sąsiedztwem punktu,
- b/ dany jest algorytm, który w prosty sposób wybiera punkt początkowy /rozwiązanie początkowe/, spełniający ograniczenia - najczęściej stosowany jest tutaj losowy algorytm generacji punktu początkowego, różny w kolejnych wywołaniach programu,
- c/ określona jest reguła, która przeszukuje sąsiedztwo punktu wygenerowanego przez algorytm. Ze wszystkich punktów sąsiedztwa wybiera ona punkt o najmniejszym koszcie /gdy rozwiązywany jest problem minimalizacji/ lub o największym koszcie /gdy rozwiązywany jest problem maksymalizacji/.

Znalezione w taki sposób rozwiązanie jest rozwiązaniem lokalnie optymalnym.

Główna idea algorytmów opartych na metodzie podziału i oszacowań polega na przeglądaniu zbioru możliwych rozwiązań przy wykorzystaniu maksimum informacji związanych z przeglądaniem zbiorem. Algorytmy podziału i oszacowań generują drzewa przeglądu, w których każdy z wierzchołków opisany jest liczbami określającymi oszacowania dolne i górne. Oszacowania te służą do sterowania algorytmem. Istotną rolę w metodach przeglądu odgrywa sposób, w jaki dokonuje się przeglądu wierzchołków wygenerowanego drzewa. Stosowane są najczęściej dwie metody przeglądu [44]:

- a/ metoda rozbudowy ostatnio wygenerowanego wierzchołka; metoda taka pozwala na znaczne zmniejszenie niezbędnego obszaru pamięci, lecz z reguły czas obliczeń algorytmów wykorzystujących tę metodę jest długi,
- b/ metoda rozbudowy wierzchołka o najmniejszym oszacowaniu dolnym; metoda ta zmniejsza nakład obliczeń, lecz wymaga pamiętania wszystkich wygenerowanych wierzchołków, które mogą być dalej rozbudowywane.

W trakcie rozwiązywania postawionego zadania z reguły próbuje się znaleźć algorytm poszukujący rozwiązanie dokładne, a dopiero gdy jest to

niemożliwe, poszukuje się algorytmów przybliżonych. Często również używa się algorytmów przybliżonych do znalezienia pierwszego oszacowania górnego, które pozwala na zmniejszenie zarówno nakładu obliczeń jak i wymaganego obszaru pamięci.

Ponieważ celem rozprawy stało się określenie dokładnych metod rozwiązywania zadania optymalizacji struktur topologicznych sieci przy ograniczeniach niezawodnościowych, stąd też eksponowane są w niej tylko algorytmy oparte na metodzie podziału i oszacowań.

2. METODY WYZNACZANIA WSKAŹNIKÓW NIEZAWODNOŚCIOWYCH SIECI

Jak to już wyjaśniono w poprzednim rozdziale, każdy krok procedury poszukiwania rozwiązania zadania optymalizacyjnego składa się z etapu generacji struktury oraz etapu sprawdzenia, czy spełnione są ograniczenia niezawodnościowe. Analiza sieci /sprawdzenie, czy spełnione są ograniczenia niezawodnościowe/ dokonywana będzie pod warunkiem, że spełnione są założenia A1, A3, A4 z punktu 1.5. Szukana będzie wartość prawdopodobieństwa tego, że między wybranymi węzłami sieci s oraz t istnieje połączenie /parametr P_{st} / bądź też wartość prawdopodobieństwa tego, że sieć jest spójna /parametr P_c /. Z rozważań przeprowadzonych w punkcie 1.5 wynika, że podstawową metodą poszukiwania parametrów P_{st} oraz P_c jest metoda przeglądu stanów sieci. Wiadomo również, że warunkiem koniecznym na to, żeby istniało połączenie między dwoma węzłami s oraz t , jest istnienie co najmniej jednej ścieżki łączącej te węzły. Podobnie sieć jest spójna wtedy, gdy istnieje w niej co najmniej jedno drzewo opinające. Nie wdając się chwilowo w szczegóły, wszystkie znane metody poszukiwania prawdopodobieństw P_{st} oraz P_c podzielić można na [65, 107]:

- a/ metody polegające na przeglądaniu zbioru wszystkich stanów sieci [8, 34, 100],
- b/ metody wykorzystujące zbiór ścieżek łączących wybrane węzły s oraz t /parametr P_{st} / [2, 3, 4, 29, 30, 76, 78] lub zbiór wszystkich /dendrytów/ drzew opinających /parametr P_c / [34, 103],
- c/ metody wykorzystujące dekompozycję sieci na podsieci [73, 90, 93, 102, 103, 106].

Przedstawione metody poszukiwania miar niezawodnościowych dotyczą jak widać obydwu parametrów niezawodnościowych. Do poszukiwania parametru P_{st} zaproponowano jeszcze szereg innych metod takich jak:

- a/ metody wykorzystujące zbiór przekrojów rozdzielających węzły s oraz t [13, 48, 49, 51],
- b/ metody redukcji sieci [32, 45, 46, 75],
- c/ metody wykorzystujące transformację podsieci typu "trójkąt" na podsieć typu "gwiazda" [9, 84].

Każda ze znanych metod wyznaczania wskaźników niezawodnościowych wymaga dużych nakładów obliczeniowych. Wynika to po prostu z faktu, że zadanie wyznaczenia wielkości parametrów niezawodnościowych jest zadaniem klasy NP. Przyjmując, że dana jest sieć zupełna o W węzłach, musimy sprawdzić $2^{W(W-1)/2}$ stanów sieci, albo znaleźć $2^{W(W-1)/2-W+2}$ [48] ścieżek

dla wyznaczenia prawdopodobieństwa P_{st} lub też W^{W-2} [20] drzew opinających dla wyznaczenia prawdopodobieństwa spójności sieci. Oczywiście jest, że każda z przedstawionych metod wymaga mniejszych nakładów obliczeniowych w przypadku, gdy sieć rozważana nie jest siecią zupełną.

Obecnie dokładniej zostaną omówione poszczególne metody wyznaczania parametrów niezawodnościowych.

2.1. Metoda przeglądu stanów sieci

Metoda ta wynika bezpośrednio z rozważań przeprowadzonych w części 1.5, gdzie wykazano, że P_{st} (P_c) jest równa sumie prawdopodobieństw tych stanów sieci, dla których spełniony jest warunek, tego że istnieje połączenie między s lub t lub sieć jest spójna. Zgodnie z przyjętymi założeniami prawdopodobieństwo istnienia określonego stanu sieci $\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle$ jest równe:

$$P[\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle] = \prod_{j \in \beta(1)} P_{1j} \prod_{k \in \beta(0)} (1 - P_{1k}) \quad (2.1)$$

Niech będzie dana funkcja $f(\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle)$ przyjmująca wartości ze zbioru $\{0, 1\}$. Funkcja $f(\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle) = 1$ wtedy, gdy dla określonego stanu sieci istnieje połączenie między węzłami s oraz t /parametr P_{st} / lub gdy istnieje połączenie między wszystkimi węzłami /parametr P_c /. Korzystając z funkcji $f(\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle)$ oraz znając prawdopodobieństwo $P(\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle)$ można podać zależność określającą poszukiwany parametr niezawodnościowy. Szukany parametr dany jest w postaci:

$$P_s = \sum_{i=0}^{2^K - 1} f(\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle) \prod_{j \in \beta(1)} P_{1j} \prod_{k \in \beta(0)} (1 - P_{1k}) \quad (2.2)$$

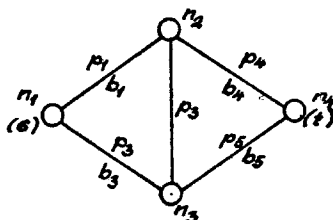
gdzie: za P podstawić należy P_{st} lub P_c w zależności od tego czy funkcja $f(\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle)$ określona jest dla P_{st} czy P_c .

Z zależności (2.2) wynika, że w celu znalezienia parametru niezawodnościowego trzeba wygenerować $2^K / K$ liczba kanałów w sieci/ stanów sieci / 2^K ciągów $\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle$ / sprawdzając dla każdego stanu, jaką wartość przyjmuje funkcja $f(\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle)$. Jeżeli $f(\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle)$ przyjmuje wartość 1, to należy obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia stanu i $[\langle \xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i \rangle]$. Jak wynika z przedstawionych rozważań, nakład obliczeń nie zależy praktycznie od rodzaju struktury, ale jest tylko funkcją liczby kanałów występujących w sieci. Ze względu na to, że liczba wszystkich stanów wynosi 2^K , zaś do obliczania prawdopodobieństwa

określonego stanu należy wykonać K mnożeń, metoda ta wymaga około $K \cdot 2^K$ mnożeń oraz około 2^K dodawań. Ponadto dla wyznaczenia wartości funkcji $f(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_K^i)$ należy wykonać pewną liczbę operacji logicznych. Istnieją co prawda metody, które pozwalają poprzez odpowiednią generację stanów zmniejszyć liczbę mnożeń do wartości 2^K , jednakże jak wiadać jest to liczba rosnąca wykładniczo z rozmiarem sieci /mierzoną liczbą kanałów występujących w sieci/. Poważną zaletą metody przeglądu stanów jest to, że nie wymaga ona w trakcie obliczeń rezerwowania dużych obszarów pamięci. Metoda przeglądu stanów stosowana jest tylko do analizy niewielkich sieci, jednakże ze względu na to, że w prosty sposób można w niej określić liczbę działań, wykorzystuje się ją również do porównania nakładów obliczeń tej metody w stosunku do innych metod. Obecnie podany zostanie przykład ilustrujący omówioną metodę.

Przykład 2.1

Dla sieci przedstawionej grafem na rys.2.1 poszukiwane jest prawdopodobieństwo P_{st} oraz P_c . Kanały są sprawne z prawdopodobieństwem p_k /ulegają uszkodzeniu z prawdopodobieństwem $q_k = 1 - p_k$ /. Jako węzeł początkowy s został przyjęty węzeł n_1 , zaś jako węzeł końcowy t węzeł n_4 /dla P_{st} /.



Rys.2.1. Graf sieci użyty w przykładzie 2.1

Rozważając wszystkie istniejące stany sieci i sprawdzając, czy istnieje połączenie między s oraz t , otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 P_{st} = & p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 q_5 + p_1 p_2 p_3 q_4 p_5 + p_1 p_2 q_3 p_4 p_5 + \\
 & + p_1 p_2 q_3 p_4 q_5 + p_1 p_2 q_3 q_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 p_4 q_5 + \\
 & + p_1 q_2 p_3 q_4 p_5 + p_1 q_2 q_3 p_4 p_5 + p_1 q_2 q_3 p_4 q_5 + q_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + \\
 & + q_1 p_2 p_3 p_4 q_5 + q_1 p_2 p_3 q_4 p_5 + q_1 p_2 q_3 p_4 p_5 + q_1 p_2 q_3 q_4 p_5 \cdot
 \end{aligned}$$

zaś sprawdzając, czy sieć jest spójna, wartość P_c obliczyć można z zależności:

$$\begin{aligned}
 P_c = & p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 q_5 + p_1 p_2 p_3 q_4 p_5 + p_1 p_2 q_3 p_4 p_5 + \\
 & + p_1 p_2 q_3 p_4 q_5 + p_1 p_2 q_3 q_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 p_4 q_5 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + p_1 q_2 p_3 q_4 p_5 + p_1 q_2 q_3 p_4 p_5 + q_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + q_1 p_2 p_3 p_4 q_5 + \\
 & + q_1 p_2 p_3 q_4 p_5 + q_1 p_2 q_3 p_4 p_5 \cdot
 \end{aligned}$$

Koniec przykładu 2.1.

Obecnie zostaną omówione takie metody wyznaczania wskaźników niezawodnościowych, w których istotną rolę odgrywa struktura topologiczna analizowanej sieci. Metody te pozwalają w niektórych przypadkach zmniejszyć sumarycznie nakłady obliczeń.

2.2. Metoda wyznaczania parametrów niezawodnościowych z wykorzystaniem ścieżek lub drzew opinających

Bezpośrednio z definicji prawdopodobieństw P_{st} lub P_c wynika, że dysponując zbiorem wszystkich ścieżek łączących węzły s oraz t lub zbiorem wszystkich drzew opinających występujących w grafie reprezentującym sieć nieuszkodzoną znaleźć można szukaną wielkość każdego z parametrów. Niech przez e_i oznaczone będzie zdarzenie polegające na istnieniu i -tej ścieżki łączącej węzły s oraz t /przy obliczaniu P_{st} / lub istnieniu i -tego drzewa opinającego /przy obliczaniu P_c /. Szukana wielkość wskaźnika niezawodnościowego jest równa prawdopodobieństwu sumy zdarzeń e_i , czyli

$$P_0 = P \left[\bigcup_{i=1}^r e_i \right] \quad (2.3)$$

gdzie:

r - ilość wszystkich zdarzeń e_i /ilość wszystkich ścieżek lub drzew/

Korzystając ze wzorów określających prawdopodobieństwo sumy zdarzeń /należy zauważyć, że zdarzenia e_i nie są zdarzeniami niezależnymi/ otrzymuje się [79]:

$$P_0 = \sum_{i=1}^r P[e_i] + \sum_{k=2}^r (-1)^{k-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} P[e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}] \quad (2.4)$$

gdzie:

$P[e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}]$ jest prawdopodobieństwem łącznego wystąpienia zdarzeń $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$, przy czym prawdopodobieństwo to brane jest po wszystkich kombinacjach k elementarnych w zbiorze zdarzeń $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$.

Prawdopodobieństwa łącznego wystąpienia zdarzeń $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ wylicza się korzystając z następującej zależności:

$$P[e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}] = \prod_{j \in \bigcup_{m=1}^k \beta_m} p_{i_j} \quad (2.5)$$

gdzie:

β_m - zbiór indeksów określających numery kanałów należących do m -tej ścieżki

Przykład 2.2

Dla sieci danej z rys.2.1 znaleźć należy prawdopodobieństwo P_{st} wykorzystując zbiór ścieżek łączących węzły s oraz t .

W sieci tej istnieją cztery ścieżki między s oraz t .

$$s_1 = b_1 b_4 \quad P[e_1] = p_1 p_4$$

$$s_2 = b_2 b_5 \quad P[e_2] = p_2 p_5$$

$$s_3 = b_1 b_3 b_5 \quad P[e_3] = p_1 p_3 p_5$$

$$s_4 = b_2 b_3 b_4 \quad P[e_4] = p_2 p_3 p_4$$

Korzystając ze wzoru (2.4) i wykorzystując (2.5) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P_{st} = & p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_1 p_3 p_5 + p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_4 p_5 - p_1 p_3 p_4 p_5 + \\ & - p_1 p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_5 - p_2 p_3 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + \\ & + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \end{aligned}$$

Koniec przykładu 2.2.

Jak widać, metoda ta wymaga wyliczenia $2^R - 1$ różnych prawdopodobieństw i dlatego dla sieci, w których istnieje większa liczba ścieżek, nie może być ona wykorzystana ze względu na dużą czasochłonność obliczeń. Z tego też względu nie podaje się tutaj zależności pozwalającej obliczyć P_c , gdyż w sieci danej grafem na rys.2.1 istnieje osiem drzew opinających, co wymagałoby obliczenia 57 prawdopodobieństw łącznego wystąpienia zdarzeń $P[e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}]$.

Znajdowanie prawdopodobieństw $P[e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}]$ nastrocza dużych trudności obliczeniowych i dlatego w praktyce metoda poszukiwania P_{st} lub P_c z wykorzystaniem zdarzeń polegających na istnieniu zbioru ścieżek lub drzew nie jest stosowana. Poszukuje się więc takich algorytmów, które są znacznie bardziej efektywne. Jednym z takich algorytmów jest algorytm zaproponowany przez Frattę i innych [29, 62, 65], w którym stosuje się modyfikację zbioru ścieżek z wykorzystaniem praw algebry Boole'a. Łatwo dostrzec, że wzór (2.2) służący do obliczania parametru P_{st} lub P_c jest analogiczny do przedstawienia funkcji boolowskiej w postaci kanonicznej [69] sumy iloczynów pełnych. Istnieją przy tym następujące odpowiedniki:

- wartość prawdopodobieństwa p_i - zmienna prosta x_i ,
wartość prawdopodobieństwa q_i - zmienna zanegowana \bar{x}_i . (2.6)
iloczyn - iloczyn logiczny ,
suma - suma logiczna

Z algebry układów przełączających wiadomo, że funkcję logiczną w postaci kanonicznej można przedstawić wykorzystując diagram Karnaugh [69]. Zastosowanie diagramu Karnaugh do obliczania prawdopodobieństwa P_{st} lub P_c polega na wpisaniu w miejsce odpowiadające stanom sieci /stan sieci określony jest poprzez pewien iloczyn pełny w taki sposób, że zmienne proste określają istniejące kanały, zaś zmienne zanegowane kanały nie istniejące/ wartości funkcji $f(\langle x_1^1, x_2^1, \dots, x_K^1 \rangle)$. Korzystając dalej z własności funkcji logicznych, funkcję $f(\langle x_1^1, x_2^1, \dots, x_K^1 \rangle)$ można przedstawić w postaci sumy implikantów. Na rys.2.2 przedstawiono diagram Karnaugh dla sieci z rys.2.1 służący do obliczania P_{st} rys.2.2(a) i P_c rys.2.2(b) oraz zakreślono występujące implikanty minimalne.

a)

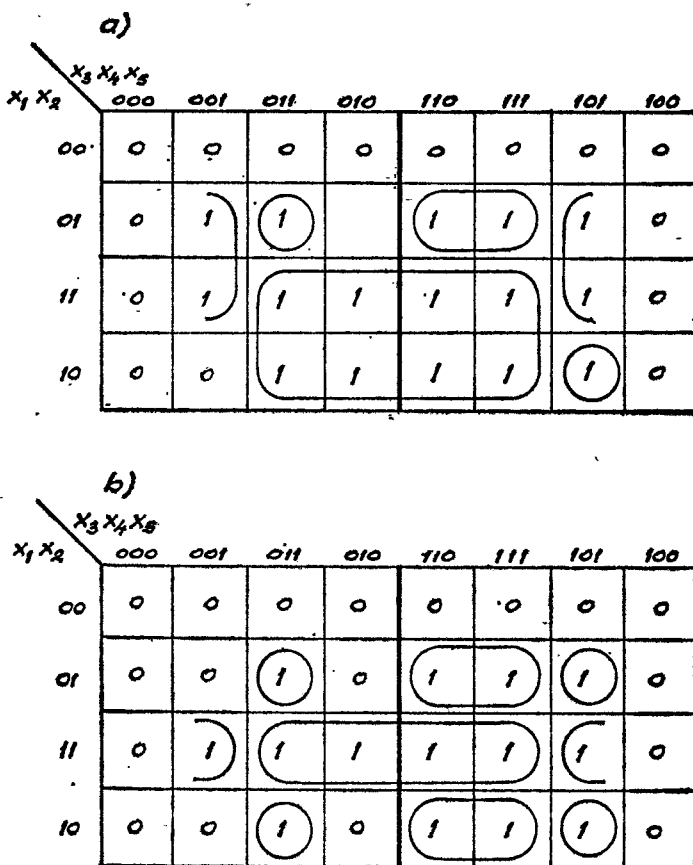
$x_1 x_2$	$x_4 x_4 x_5$	000	001	011	010	110	111	101	100
00		0	0	0	0	0	0	0	0
01		0	1	1	0	1	1	1	0
11		0	1	1	1	1	1	1	0
10		0	0	1	1	1	1	1	0

b)

$x_1 x_2$	$x_3 x_4 x_5$	000	001	011	010	110	111	101	100
00		0	0	0	0	0	0	0	0
01		0	0	1	0	1	1	1	0
11		0	1	1	1	1	1	1	0
10		0	0	1	0	1	1	1	0

Rys.2.2. Diagram Karnaugh wraz z implikantami dla sieci z rys.2.1 służący do obliczania P_{st} /a/ i P_c /b/

Jeżeli w miejsce x_1 wstawione zostaną zmienne b_1 , wówczas każdy implikant przedstawia sobą ścieżkę łączącą węzły s oraz t lub drzewo opinającą. Takie przedstawienie funkcji boolowskiej jest dopuszczalne w teorii układów przełączających, jednakże nie może być ono użyte do obliczeń P_{st} lub P_c , gdyż np. stan sieci złożony z kanałów b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 występuje 3-krotnie przy obliczaniu P_{st} i 8-krotnie przy obliczaniu P_c . Podobnie można znaleźć inne stany występujące wielokrotnie w minimalnej postaci funkcji. Przedstawienie funkcji w postaci sumy implikantów może być użyte do obliczenia P_{st} pod warunkiem, że implikanty pokrywać będą rozłączne zbiory stanów sieci. Zbiór takich implikantów dla sieci z rys.2.1 przedstawiono z wykorzystaniem diagramu Karnaugh'a na rys.2.3, przy czym rys.2.3(a) służy do obliczania P_{st} , zaś rys.2.3(b) do obliczania P_c .



Rys.2.3. Diagramy Karnaugh'a z zaznaczonymi implikantami pokrywającymi rozłączne zbiory stanów sieci

Funkcje logiczne opisane poprzez zbiory implikantów z rys.2.3 są następujące:

a/ dla obliczenia P_{st} :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_4 + x_2 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5$$

b/ dla obliczenia P_c :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_4 x_5 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$$

Wykorzystując określone implikanty, wartość prawdopodobieństwa P_{st} i P_c można wyliczyć zgodnie z zależnościami:

$$/a/ \quad P_{st} = p_1 p_4 + p_2 q_4 p_5 + q_1 p_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 q_4 p_5$$

$$/b/ \quad P_c = p_1 p_2 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 q_4 p_5 + p_1 q_2 q_3 p_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 q_4 p_5 + q_1 p_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 p_5 + q_1 p_2 q_3 p_4 p_5$$

Porównując wartości funkcji boolowskich przedstawione w postaci sumy implikantów minimalnych /rys.2.2/ oraz w postaci sumy implikantów pokrywających rozłączne zbiory stanów /rys.2.3/, łatwo można dostrzec, że implikanty rozłączne utworzone są poprzez modyfikację implikantów minimalnych. Generalna zasada, jaką należy tutaj stosować, jest następująca:

warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dwa implikanty były rozłączne jest, aby w jednym z nich wystąpiła przynajmniej jedna zmienna jako prosta, zaś w drugim ta sama zmienna jako zanegowana. (2.7)

Zasada (2.7) określa sposób postępowania w trakcie modyfikacji zbioru implikantów minimalnych /ścieżek lub drzew/ w zbiór implikantów pokrywających rozłączne zbiory stanów sieci. Wykorzystywana jest ona zarówno w algorytmie Fratty i innych pokrewnych algorytmach służących do znajdowania parametru P_{st} [29, 30, 65, 76], jak również w algorytmie zaproponowanym w pracy Zabłudowskiego [103] służącym do modyfikacji zbioru implikantów minimalnych odpowiadających drzewom opinającym dla obliczenia prawdopodobieństwa P_c . Dokładne opisy algorytmów znaleźć można w cytowanych pracach.

Porównując zakres stosowalności metody przeglądu stanów sieci oraz metody wykorzystania ścieżek lub drzew opinających /w szczególności metody modyfikacji implikantów/ łatwo dostrzec, że dla pewnych sieci, w których liczba ścieżek /drzew opinających/ jest niewielka, metoda wykorzystująca ścieżki lub drzewa wykazuje znaczną przewagę nad metodą przeglądu stanów.

Trudno jednak ocenić w pełni jednoznacznie złożoność obliczeniową algorytmów wykorzystujących opisaną metodę, gdyż liczba działań algorytmu mniej zależy od rozmiaru danych wejściowych, a bardziej od topologii rozważanej sieci. Stąd też w większości algorytmów tego typu porównanie przeprowadzone być może tylko dla konkretnych sieci. Biorąc dla przykładu sieć z rys.2.1 należałoby wykonać 64 mnożenia i 16 dodawań korzystając z metody przeglądu stanów /przy wyznaczaniu P_{st} / oraz 14 mnożeń i 5 dodawań przy wykorzystaniu metody modyfikacji ścieżek. Zmniejszenie liczby działań algebraicznych z wykorzystaniem przedstawionej metody zostało okupione zwiększeniem liczby działań logicznych mających na celu zmodyfikowanie zbioru ścieżek lub drzew. Stąd też celowe staje się rozpatrzenie innych metod pozwalających szybciej wyznaczać wskaźniki niezawodnościowe. Najbardziej obiecującą stała się metoda wykorzystująca dekompozycję sieci na podsieci.

2.3. Metoda wykorzystująca dekompozycję sieci na podsieci

Metoda wykorzystująca dekompozycję sieci na mniejsze podsieci zaproponowana została w celu zmniejszenia nakładów obliczeń przy wyznaczaniu parametrów niezawodnościowych w szczególności dla takich sieci, które są określone grafami silnie zbliżonymi do grafów płaskich. Sieci określone takimi grafami mogą być wykorzystywane w praktyce, gdyż rzeczywiste sieci posiadają niewiele krzyżujących się kanałów. Po raz pierwszy metoda dekompozycji użyta w celu wyznaczenia P_{st} zaproponowana została w pracy de Mercado i inni [73, 93] do obliczania prawdopodobieństwa P_{st} . Ponadto inny od podanego przez de Mercado sposób poszukiwania prawdopodobieństwa P_{st} zaproponowany został w pracy [90]. Metoda dekompozycji rozwinięta została następnie w pracach Zabłudowskiego dotyczących obliczania prawdopodobieństwa P_{st} [102] oraz prawdopodobieństwa P_c [103, 106].

Omówiona zostanie tutaj dokładniej metoda, która może być wykorzystana do obliczania obydwu parametrów probabilistycznych P_{st} lub P_c . Metody zaproponowane w pracach [73, 93] służą tylko do poszukiwania parametru P_{st} , zaś algorytm podany w pracy [103] wykorzystujący twierdzenie Chena [16] służy tylko do poszukiwania prawdopodobieństwa P_c . Idea metody obliczania parametrów niezawodnościowych dla sieci z wykorzystaniem dekompozycji sieci jest następująca:

pierwotną /dużą/ sieć dzielimy na podsieci w taki sposób, że podział następuje według pewnego podzbioru węzłów. Dla poszczególnych podsieci liczymy prawdopodobieństwa odpowiednich zdarzeń, zaś prawdopodobieństwo P_{st} lub P_c znajdujemy poprzez odpowiednią kombinację obliczonych prawdopodobieństw.

Na początek przytoczone zostaną niezbędne definicje.

D e f i n i c j a 2.1

Graf $G_3 = \langle N_3, B_3 \rangle$ jest nazywany połączeniem /sumą/ grafów $G_1 = \langle N_1, B_1 \rangle$ oraz $G_2 = \langle N_2, B_2 \rangle$ / $G_3 = G_1 \cup G_2$ / wtedy, gdy [20]:

$$\begin{aligned} N_3 &= N_1 \cup N_2 \\ B_3 &= B_1 \cup B_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

D e f i n i c j a 2.2

Podzbiór V_1 zbioru węzłów N spójnego grafu $G = \langle N, B \rangle$ nazywany jest rozdzielającym zbiorem węzłów wtedy, gdy:

- a/ usunięcie wszystkich węzłów z V_1 powoduje, że graf staje się nie-spójny.
- b/ nie istnieje właściwy podzbiór zbioru V_1 posiadający własność /a/.

D e f i n i c j a 2.3

Dekompozycją grafu $G = \langle N, B \rangle$ względem rozłącznych zbiorów rozdzielających V_1, V_2, \dots, V_s nazywa się operację, która dzieli graf G na podgrafy G_1, G_2, \dots, G_{s+1} takie, że spełnione są następujące warunki:

- a/ $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{s+1} = G$
- b/ $\forall i = 1, 2, \dots, s$
 $N_i \cap N_{i+1} = V_i$
- c/ $\forall i, j = 1, 2, \dots, s+1, \quad i \neq j, \quad i \neq j+1$
 $N_i \cap N_j = \emptyset$
- d/ $\forall i, j = 1, 2, \dots, s+1, \quad i \neq j$
 $B_i \cap B_j = \emptyset$

Przykład grafu zdekompanego na podgrafy przedstawiono na rys.2.4.

D e f i n i c j a 2.4

Podziałem $\Pi(V)$ na zbiorze V nazywa się rodzinę rozłącznych podzbiorów zbioru V , których suma mnogościowa jest równa V , czyli:

$$\Pi(V) = \{ F_j \}$$

takich że

$$F_i \cap F_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \quad (2.10)$$

$$U F_j = V$$

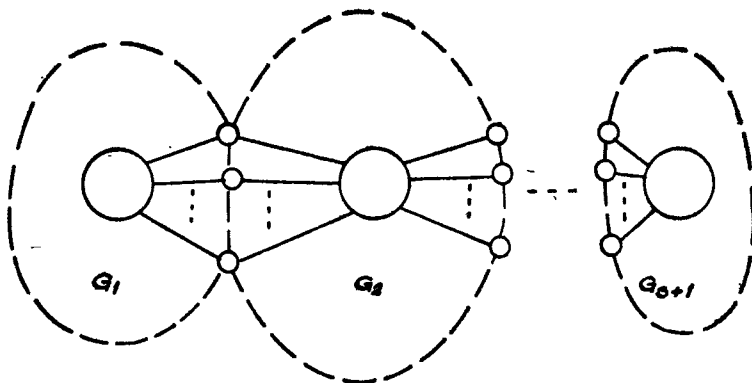
Podzbiory podziału $\pi(V)$ nazywane będą blokami podziału $\pi(V)$ [50].
Dla przykładu, niech będzie dany zbiór $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i następujący podział na zbiorze V :

$$\{\{1, 3, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{7, 8\}\}$$

wtedy podział $\pi(V)$ można zapisać w postaci:

$$\pi(V) = \{\overline{1, 3, 4, 5}; \overline{2, 6}; \overline{7, 8}\}$$

Dwa podziały $\pi_k(V)$, $\pi_l(V)$ są równe, jeśli posiadają wszystkie bloki jednakowe.



Rys.2.4. Dekompozycja grafu G na podgrafy G_1, G_2, \dots, G_{s+1}

Definicja 2.5/a/

Zbiorem $\varphi(s, Q^i | V_j \setminus Q^i)$ nazywa się taki zbiór stanów w podgrafie $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_j$, dla których istnieje co najmniej jedna ścieżka prowadząca z węzła s do każdego węzła podzbioru Q^i zbioru V_j przy warunku, że nie istnieje ścieżka łącząca węzeł s z węzłami należącymi do podzbioru $V_j \setminus Q^i$.

Definicja 2.5/b/

Zbiorem $\varphi(R^i | V_j \setminus R^i, t)$ nazywa się taki zbiór stanów podgrafu $G_{j+1} \cup G_{j+2} \cup \dots \cup G_{s+1}$, że istnieje co najmniej jedna ścieżka łącząca każdy węzeł podzbioru R^i ($R^i \subset V_j$) z węzłem t przy warunku, że nie istnieje połączenie między węzłami z podzbioru $V_j \setminus R^i$ a węzłem t .

Definicja 2.5/c/

Zbiorem $\Psi(\pi_k(V_1))$ nazywa się taki zbiór stanów podgrafu $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_s$, że:

- a/ podgraf $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_s$ jest podzielony na składowe spójne pod warunkiem, że każda składowa spójna zawiera co najmniej jeden węzeł z V_1 ,
- b/ każde dwa węzły z V_1 , które należą do jednego bloku podziału $\pi_k(V_1)$, należą do tej samej składowej spójnej.

Obecnie dokładniej zostaną wyjaśnione znaczenia definicji 2.5/a/, 2.5/b/, 2.5/c/. Niech będzie dany graf przedstawiony na rys.2.5/a/ oraz jego dwa podgrafy przedstawione na rys.2.5/b/. Dla wyjaśnienia znaczeń definicji 2.5/a/, 2.5/b/ przyjmuje się, że węzeł n_1 jest węzłem s , zaś węzeł n_6 węzłem t . Wszystkie stany podgrafu G_1 należące do zbioru stanów $\Psi(s, \{\overline{n_2}, \overline{n_3}\} | \{\overline{n_4}\})$ przedstawiono na rys.2.5/c/, zaś stany tego podgrafu należące do $\Psi(\{\overline{n_2}; \overline{n_3}, \overline{n_4}\})$ na rys.2.5/d/. Stany podgrafu G_2 należące do $\Psi(\{\overline{n_3}, \overline{n_4}\} | \{\overline{n_2}, t\})$ przedstawione zostały na rys.2.5/e/.

Sposób znajdowania prawdopodobieństwa P_{st} lub P_c z wykorzystaniem metody dekompozycji określony jest następującymi twierdzeniami:

Twierdzenie 2.1

Dla sieci danej grafem G zdekomponowanej na podsieci G_1, G_2, \dots, G_{s+1} prawdopodobieństwo P_{st} jest określone w postaci:

$$\forall Q^i \subset V_s, \quad R^j \subset V_s$$

$$P_{st} = \sum_{Q^i \subset V_s} P[\Psi(s, Q^i | \overline{V_s \setminus Q^i})] \sum_{\substack{R^j \subset V_s \\ Q^i \cap R^j \neq \emptyset}} P[\Psi(R^j | \overline{V_s \setminus R^j, t})] \quad (2.11)$$

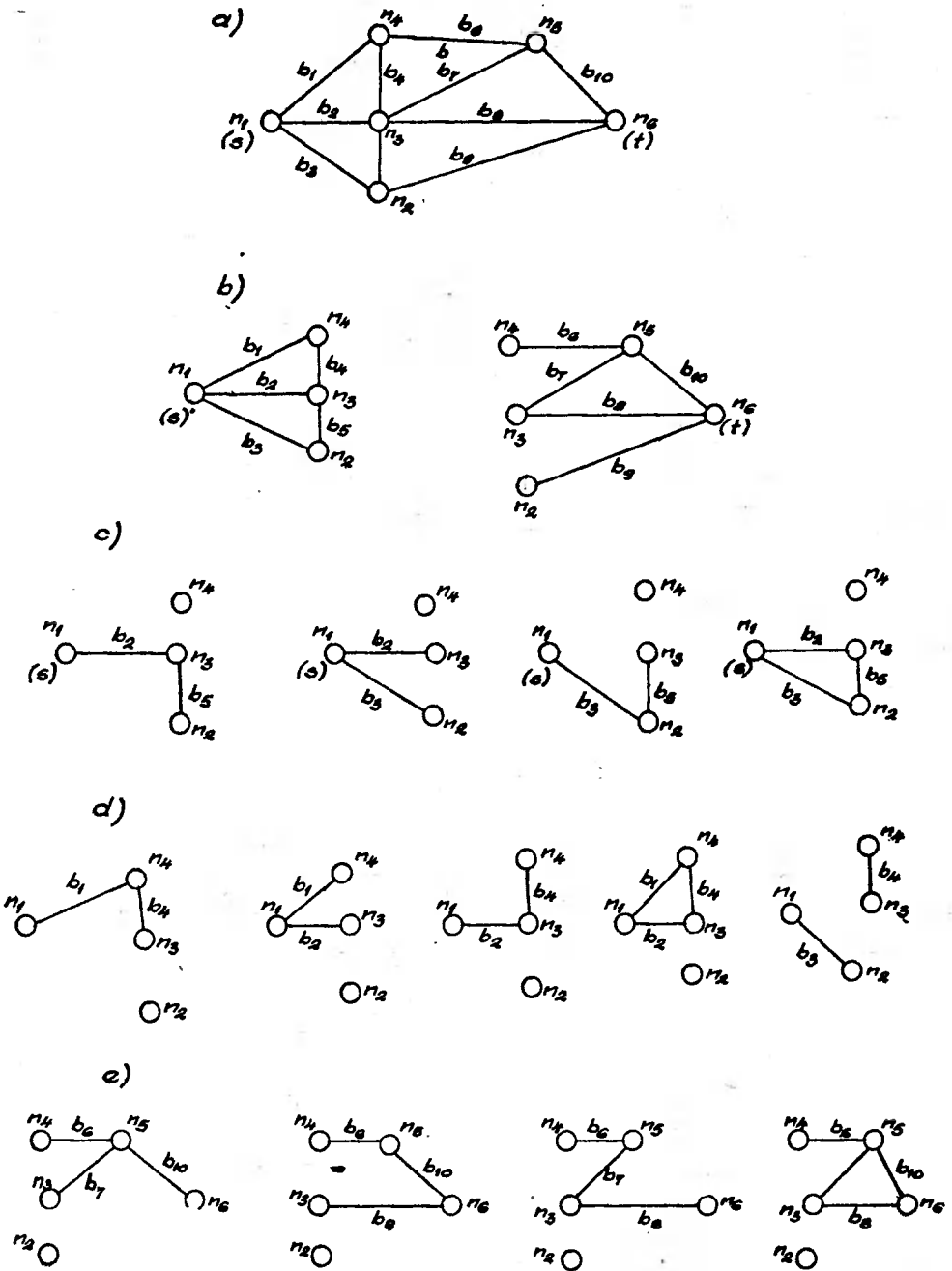
przy czym: $\forall k = 2, 3, \dots, s$

$$P[\Psi(s, Q^i | \overline{V_k \setminus Q^i})] = \sum_{j=0}^{K_k - 1} P[\langle \xi_{1_1}^j, \xi_{1_2}^j, \dots, \xi_{1_{K_k}}^j \rangle]$$

$$\sum_{Q^{i-1} \subset V_{k-1}} \alpha_{Q^{i-1}} P[\Psi(s, Q^{i-1} | \overline{V_{k-1} \setminus Q^{i-1}})] \quad (2.12)$$

gdzie:

K_k - liczba kanałów w podsieci określonej podgrafem G_k



Rys.2.5. Zbiory stanów użyte dla wyjaśnienia znaczeń definicji 2.5/a/, 2.5/b/, 2.5/c/

$$\alpha_{Q^{i-1}} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \text{jeśli dla semigrafu odpowiadającego stanowi} \\ \langle \xi_{11}^j, \xi_{12}^j, \dots, \xi_{Kk}^j \rangle \text{ istnieje ścieżka prowa-} \\ \text{dząca z co najmniej jednego wężła podzbioru} \\ Q^{i-1} \text{ do każdego wężła podzbioru } Q^i \\ 0 - \text{ w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Dowód twierdzenia 2.1 znaleźć można w pracy [102].

T w i e r d z e n i e 2.2

Dla sieci danej grafem G zdekomponowanej na podsieci G_1, G_2, \dots, G_{s+1} prawdopodobieństwo P_c określone jest w postaci:

$$P_c = \sum_{i=0}^{2^{K_{s+1}} - 1} \sum_{\pi_k(\nu_s)} P[\langle \xi_{s1}^i, \xi_{s2}^i, \dots, \xi_{sK_{s+1}}^i \rangle]$$

$$P[\varphi(\pi_k(\nu_s))] \vartheta_{\pi_k(\nu_s)}^c \quad (2.13)$$

przy czym $\forall r = 2, 3, \dots, s$

$$P[\varphi(\pi_k(\nu_r))] = \sum_{i=0}^{2^{K_r} - 1} \sum_{\pi_1(\nu_{r-1})} P[\langle \xi_{r1}^i, \xi_{r2}^i, \dots, \xi_{rK_r}^i \rangle] \quad (2.14)$$

$$P[\varphi(\pi_1(\nu_{r-1}))] \vartheta_{\pi_1(\nu_{r-1})}^{\pi_k(\nu_r)}$$

gdzie:

$$\vartheta_{\pi_k(\nu_s)}^c = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \text{w stanie } \langle \xi_{s1}^i, \xi_{s2}^i, \dots, \xi_{sK_{s+1}}^i \rangle \text{ podgrafu } G_{s+1} \\ \text{istnieje co najmniej jedno drzewo opinające przy} \\ \text{warunku, że wężły z } \nu_s \text{ należące do odpowiednich} \\ \text{bloków } \pi_k(\nu_s) \text{ są połączone,} \\ 0 - \text{ w przeciwnym razie} \end{cases}$$

K_{s+1} - liczba kanałów w podsieci danej podgrafem G_{s+1} ;

$$\vartheta_{\pi_1(\nu_{r-1})}^{\pi_k(\nu_r)} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \text{w stanie } \langle \xi_{r1}^i, \xi_{r2}^i, \dots, \xi_{rK_r}^i \rangle \text{ podgrafu } G_r \\ \text{istnieje połączenie wężłów należących do bloków} \\ \pi_k(\nu_r) \text{ przy warunku, że wężły należące do bloków} \\ \pi_1(\nu_{r-1}) \text{ są połączone,} \\ 0 - \text{ w przeciwnym razie} \end{cases}$$

K_r - liczba kanałów w podsieci określonej podgrafem G_r .

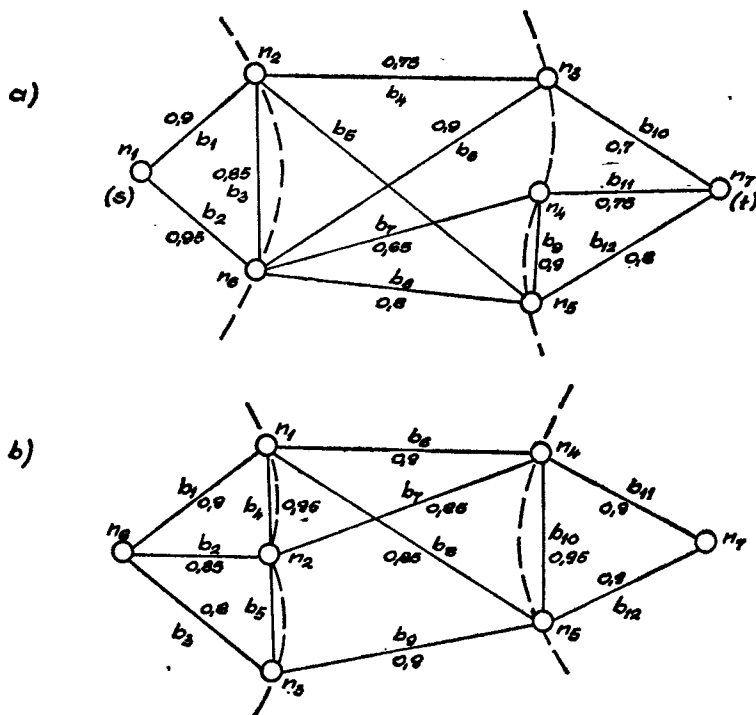
Dowód twierdzenia 2.2 podany został w pracy [106].

Dla ilustracji poszukiwania parametrów P_{st} oraz P_c metodą dekompozycji podany zostanie przykład.

Przykład 2.3

/a/ dla sieci przedstawionej grafem na rys.2.6/a/ należy znaleźć prawdopodobieństwo P_{st} .

/b/ dla sieci przedstawionej grafem na rys.2.6/b/ należy znaleźć prawdopodobieństwo P_c .



Rys.2.6. Grafy sieci użyte dla ilustracji znajdowania prawdopodobieństw P_{st} /a/ i P_c /b/ metodą dekompozycji /linie przerywane przechodzą przez węzły rozdzielające poszczególne podsieci/

Prawdopodobieństwo P_{st}

Przeglądając stany podsieci danej grafem $G_1 = \langle \{n_1, n_2, n_6\}, \{b_1, b_2, b_3\} \rangle$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 P[\varphi(s, \{n_2, n_6\})] &= 0.9740 \\
 P[\varphi(s, \{n_2\} | \{\overline{n_6}\})] &= 0.00675 \\
 P[\varphi(s, \{n_6\} | \{\overline{n_2}\})] &= 0.01425
 \end{aligned}$$

Rozważając stany podsieci danej grafem $G_2 = \langle \{n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, \{b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\} \rangle$ i korzystając ze wzoru (2.12) łatwo można uzyskać

$$\begin{aligned}
 P[\varphi(s, \{n_3, n_4, n_5\})] &= 0.60438105 \\
 P[\varphi(s, \{n_3, n_4\} | \{\overline{n_5}\})] &= 0.025476262 \\
 P[\varphi(s, \{n_3, n_5\} | \{\overline{n_4}\})] &= 0.325516950 \\
 P[\varphi(s, \{n_4, n_5\} | \{\overline{n_3}\})] &= 0.015561 \quad (2.15) \\
 P[\varphi(s, \{n_3\} | \{\overline{n_4, n_5}\})] &= 0.013819238 \\
 P[\varphi(s, \{n_4\} | \{\overline{n_3, n_5}\})] &= 0.000818350 \\
 P[\varphi(s, \{n_5\} | \{\overline{n_3, n_4}\})] &= 0.008649
 \end{aligned}$$

Przeglądając stany podsieci danej grafem $G_3 = \langle \{n_3, n_4, n_5\}, \{b_9, b_{10}, b_{11}, b_{12}\} \rangle$ wyliczone zostaną prawdopodobieństwa:

$$\begin{aligned}
 P[\varphi(\{n_3, n_4, n_5, t\})] &= 0.6405 \\
 P[\varphi(\{n_3, n_4\} | \{\overline{n_5}\}, t)] &= 0.0105 \\
 P[\varphi(\{n_3, n_5\} | \{\overline{n_4}\}, t)] &= 0.014 \\
 P[\varphi(\{n_4, n_5\} | \{\overline{n_3}\}, t)] &= 0.2745 \quad (2.16) \\
 P[\varphi(\{n_3\} | \{\overline{n_4, n_5}\}, t)] &= 0.035 \\
 P[\varphi(\{n_4\} | \{\overline{n_3, n_5}\}, t)] &= 0.0045 \\
 P[\varphi(\{n_5\} | \{\overline{n_3, n_4}\}, t)] &= 0.006
 \end{aligned}$$

W końcu mnożąc zgodnie z (2.11) odpowiednie prawdopodobieństwa dane w postaci (2.15) i (2.16) uzyskuje się:

$$P_{st} = 0.972730261$$

Prawdopodobieństwo P_c

Dla podsieci danej grafem $G_1 = \langle \{n_1, n_2, n_3, n_6\}, \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\} \rangle$ znajduje się /przeglądając jej stany/ następujące prawdopodobieństwa:

$$P[\varphi(\{\overline{n_1}; \overline{n_2}; \overline{n_3}\})] = 0.00056$$

$$P[\varphi(\{\overline{n_1}; \overline{n_2}, n_3\})] = 0.00564$$

$$P[\varphi(\{\overline{n_1}, n_3; \overline{n_2}\})] = 0.00108$$

$$P[\varphi(\{\overline{n_1}, n_2; \overline{n_3}\})] = 0.04124$$

$$P[\varphi(\{\overline{n_1}, n_2, n_3\})] = 0.94848$$

Z kolei przeglądając stany podsieci danej podgrafem $G_2 = \langle \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}, \{b_6, b_7, b_8, b_9\} \rangle$ i korzystając ze wzoru (2.14) łatwo można otrzymać:

$$P[\varphi(\{\overline{n_4}; \overline{n_5}\})] = 0.03445474$$

$$P[\varphi(\{\overline{n_4}, n_5\})] = 0.95765501$$

W końcu przeglądając stany podsieci przedstawionej podgrafem $G_3 = \langle \{n_4, n_5, n_7\}, \{b_{10}, b_{11}, b_{12}\} \rangle$ i wykorzystując zależność (2.13) otrzymuje się:

$$P_c = 0.98187856$$

Koniec przykładu 2.3.

Znajdowanie parametrów niezawodnościowych metodą dekompozycji sieci na podsieci wymaga najmniejszych nakładów obliczeń, a zatem algorytmy wykorzystujące metodę dekompozycji są najbardziej sprawnymi algorytmami ze wszystkich dotychczas znanych. Co prawda podstawowym czynnikiem w przedstawionej metodzie jest przeszukiwanie stanów sieci, jednakże mamy tutaj do czynienia z podsieciami o niewielkiej liczbie kanałów, a więc wymagających niewielu obliczeń. I tak dla przykładu rozpatrując sieć daną grafem 2.6/a/ należałoby dokonać przeglądu 4096 stanów, z których każdy zawierałby 12 kanałów. Używając metody dekompozycji wystarczy przejrzeć 56 stanów, o nie więcej niż 5-ciu kanałach w każdym ze stanów. W celu obliczenia prawdopodobieństwa P_c dla sieci z rys.2.6/b/ należałoby stosując algorytm przedstawiony w pracy [103] znaleźć i zmodyfikować 329 drzew opinających. Algorytm obliczający P_c wymagałby w takim przypadku 329 dodawań oraz 3133 mnożeń. Algorytm wykorzystujący metodę dekompozycji wymaga 72 dodawań oraz 311 mnożeń. Dodatkową zaletą metody dekompozycji jest konieczność wykonywania znacznie mniejszej liczby działań logicznych, które należy wykonać w celu sprawdzenia, czy spełniony jest warunek określający, że sieć jest spójna lub istnieje połączenie między wybranymi węzłami s oraz t sieci. Poważną również zaletą algorytmów korzystających z dekompozycji sieci na podsieci jest fakt, że nie wymagają one rezerwacji dużych obszarów pamięci /co jest konieczne dla algorytmów wykorzystujących ścieżki lub

drzewa/. Wadą algorytmów wykorzystujących dekompozycję sieci jest fakt, iż nakład obliczeń zależy od sposobu zdekomponowania sieci na podsieci oraz wyboru zbiorów rozdzielających.

2.4. Inne metody wyznaczania prawdopodobieństwa istnienia połączenia pomiędzy węzłami s oraz t

Jak to wynika z rozważań przedstawionych w punkcie 2.3, najbardziej efektywną metodą poszukiwania wskaźników niezawodnościowych jest metoda dekompozycji. W tej części omówione zostaną jednakże także dodatkowe metody, które mogą być wykorzystywane tylko do obliczania prawdopodobieństwa P_{st} .

Na początek zostanie rozważona metoda redukcji sieci. W tym celu należy skorzystać ze wzoru Mine'a - Moskowitza [98] pozwalającego wyliczyć prawdopodobieństwo P_{st} całej sieci dysponując pewnymi prawdopodobieństwami warunkowymi:

$$P_{st} = p_j (P_{st} | b_j \text{ jest w stanie 1}) + (1 - p_j) (P_{st} | b_j \text{ jest w stanie 0}) \quad (2.17)$$

gdzie:

- p_j - prawdopodobieństwo poprawnej pracy j -tego kanału,
- $P_{st} | b_j \text{ jest w stanie 1}$ - prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia polegającego na tym, że istnieje połączenie między węzłami s oraz t w takiej sieci, w której kanał b_j jest sprawny,
- $P_{st} | b_j \text{ jest w stanie 0}$ - prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia polegającego na tym, że istnieje połączenie między węzłami s oraz t w takiej sieci, w której kanał b_j nie istnieje.

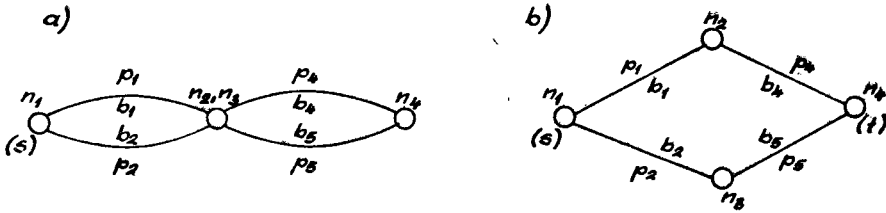
Algorytmy służące do obliczania P_{st} w oparciu o metodę redukcji sieci podane zostały w pracach [31, 45, 75].

Przykład 2.4

Znaleźć prawdopodobieństwo P_{st} stosując metodę redukcji sieci dla sieci przedstawionej grafem na rys.2.1. Sieci otrzymane po redukcji przedstawione zostały na rys.2.7.

$$P_{st} = p_3 (p_1 + q_1 p_2) (p_4 + q_4 p_5) + q_3 (p_1 p_4 + p_2 p_5 (1 - p_1 p_4))$$

Koniec przykładu 2.4.



Rys.2.7. Podsieci otrzymane po redukcji względem kanału b_3 , sieci określonej grafem na rys.2.1

Jak łatwo się przekonać, otrzymany wynik jest identyczny z wynikami uzyskanymi w przykładach 2.1 oraz 2.2.

Metoda wykorzystania przekrojów między węzłami s oraz t

Jak wiadomo, warunkiem koniecznym, aby między wybranymi węzłami sieci s oraz t istniało połączenie, jest brak przekroju rozdzielającego te węzły. Niech będzie dany zbiór $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ wszystkich przekrojów rozdzielających węzły s oraz t . Zdarzenie polegające na wystąpieniu przekroju Q_i oznaczone zostanie przez e_i . Wówczas:

$$P_{st} = 1 - P\left[\bigcup_{i=1}^n e_i\right] \quad (2.18)$$

Postępując podobnie jak przy metodzie wykorzystania zbioru ścieżek, otrzymuje się:

$$P_{st} = 1 - \left(\sum_{i=1}^n P[e_i] + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} P[e_{i_1}, \dots, e_{i_k}] \right) \quad (2.19)$$

gdzie:

$P[e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}]$ - prawdopodobieństwo łącznego wystąpienia przekrojów $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_k}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wystąpieniu i -tego przekroju rozdzielającego jest równe:

$$P[e_i] = \prod_{l \in \beta_i} q_{l_1} \quad (2.20)$$

gdzie:

β_i - zbiór indeksów tych kanałów, które wchodzi w skład i -tego przekroju,

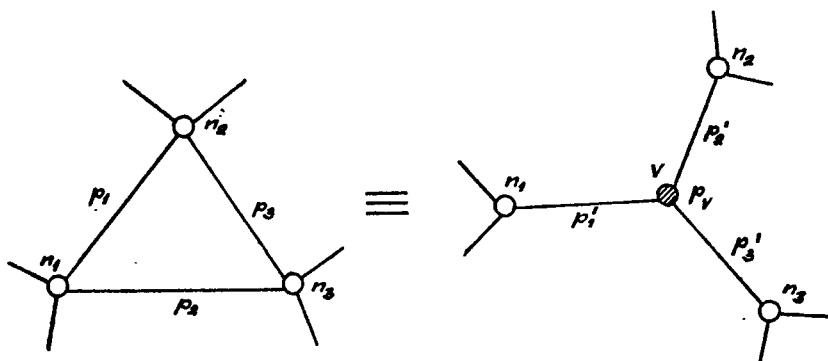
zaś

$$P [e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}] = \prod_{k \in \bigcup_{m=1}^i \beta_{i_m}} q_{j_1} \quad (2.21)$$

Podobnie jak przy obliczaniu prawdopodobieństwa P_{st} z wykorzystaniem ścieżek, również w przypadku korzystania z przekrojów rozdzielających można stosować algorytmy modyfikacji przekrojów pozwalające łatwiej znaleźć szukane prawdopodobieństwo. Można do tego celu użyć algorytmu zaproponowanego przez Frattę do modyfikacji zbioru ścieżek, pamiętać należy tylko że do obliczenia przekroju zmiennej prostej x_i odpowiada q_i , zaś zmiennej zanegowanej \bar{x}_i odpowiada p_i . Ponadto otrzymany wynik należy odjąć od jedności, aby otrzymać prawdopodobieństwo P_{st} . Hänsler i inni [47, 48] zaproponowali algorytm specjalnie przystosowany do poszukiwania prawdopodobieństwa P_{st} metodą modyfikacji przekrojów rozdzielających węzły s oraz t .

Metoda transformacji podsieci typu "trójkąt" na podsieć typu "gwiazda"

Jedną z pierwszych propozycji dotyczących wykorzystania metody transformacji sieci była praca Banerjee i inni [9]. Metoda transformacji polega na zamianie podsieci typu Δ /"trójkąt"/ występujących w dużej sieci na podsieci typu Υ /"gwiazda"/. Metodę tę ilustruje rys.2.8.



Rys.2.8. Zamiana podsieci typu „trójkąt” na podsieć typu „gwiazda”

Zaproponowana w pracy [9] metoda dawała tylko przybliżone rozwiązanie. Dokładne rozwiązanie tego problemu podano w pracy [84]. Zaletą tej metody jest zamiana złożonych sieci na sieci prostsze tak, że użycie do obliczeń prawdopodobieństwa P_{st} jednej ze znanych metod daje szybkie rozwiązanie. Metoda ta może być użyta do „ręcznego” poszukiwania P_{st} . Wadą

tej metody jest pojawienie się w podsieci typu γ węzła ulegającego uszkodzeniu /węzeł v na rys.2.8/ pomimo tego, że przed transformacją wszystkie węzły były sprawne. Zależności na prawdopodobieństwa p_1, p_2, p_3 oraz p_v w podsieci typu γ wyprowadza się przez porównanie 5-ciu klas stanów związanych z obydwoма podsieciami. Są to następujące klasy stanów:

$$\begin{aligned} h_1 &= \{\text{stanów sieci} : [n_1, n_2, n_3]\} \\ h_2 &= \{\text{stanów sieci} : [n_1, n_2] [n_3]\} \\ h_3 &= \{\text{stanów sieci} : [n_1, n_3] [n_2]\} \\ h_4 &= \{\text{stanów sieci} : [n_2, n_3] [n_1]\} \\ h_5 &= \{\text{stanów sieci} : [n_1] [n_2] [n_3]\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdzie zapis $[n_i, n_j] [n_k]$ oznacza, że węzły n_j, n_i mogą komunikować się między sobą, ale nie mogą komunikować się z węzłem n_k . Oczywiście spełniony musi być również warunek:

$$\sum_{i=1}^5 P [h_i] = 1 \quad (2.23)$$

Prawdopodobieństwo $P [h_i]$ każdej z klas stanów sieci jest bardzo łatwe do znalezienia w podsieci typu Δ oraz γ . Ponieważ prawdopodobieństwa te muszą być równe, więc rozwiązując równania dla p_1 oraz p_v można znaleźć szukane zależności. I tak dla podsieci typu Δ prawdopodobieństwa $P [h_i^{\Delta}]$ są równe:

$$\begin{aligned} P [h_1^{\Delta}] &= p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 \\ P [h_2^{\Delta}] &= p_1 q_2 q_3 \\ P [h_3^{\Delta}] &= q_1 p_2 q_3 \\ P [h_4^{\Delta}] &= q_1 q_2 p_3 \\ P [h_5^{\Delta}] &= q_1 q_2 q_3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

zaś dla sieci typu γ

$$\begin{aligned} P [h_1^{\gamma}] &= p_1' p_2' p_3' p_v \\ P [h_2^{\gamma}] &= p_1' p_2' q_3' p_v \\ P [h_3^{\gamma}] &= p_1' q_2' p_3' p_v \\ P [h_4^{\gamma}] &= q_1' p_2' p_3' p_v \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$P[h_5^y] = 1 - \sum_{i=1}^4 P[h_i^y]$$

Rozwiązując równania dla p_i otrzymuje się:

$$p_1' = \frac{P[h_1^a]}{P[h_1^a] + P[h_4^a]}$$

$$p_2' = \frac{P[h_1^a]}{P[h_1^a] + P[h_3^a]}$$

$$p_3' = \frac{P[h_1^a]}{P[h_1^a] + P[h_2^a]}$$

$$p_v = \frac{(P[h_1^a] + P[h_4^a]) (P[h_1^a] + P[h_3^a]) (P[h_1^a] + P[h_2^a])}{(P[h_1^a])^2}$$

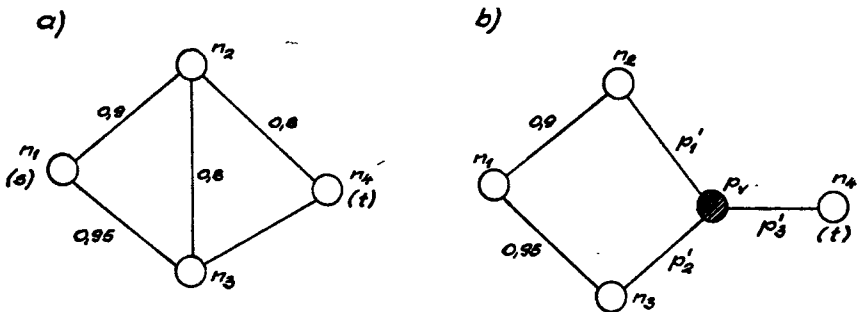
(2.26)

Metoda transformacji sieci pozwala również obliczać prawdopodobieństwo P_{st} dla takich sieci, w których uszkodzeniom ulegają kanały i węzły [84]. Należy tylko fakt ten uwzględnić w trakcie ustalania prawdopodobieństwa stanów $P[h_i^a]$.

Obecnie podany zostanie przykład ilustrujący przedstawioną metodę.

Przykład 2.5

Dla sieci przedstawionej na rys.2.9/a/ znaleźć należy prawdopodobieństwo P_{st} metodą transformacji sieci.



Rys.2.9. Sieć użyta w przykładzie, przed /a/ i po /b/ transformacji

Obliczając z zależności (2.24) i (2.26) prawdopodobieństwa p_1 oraz p_v uzyskuje się:

$$P[h_1^A] = 0.8^3 + 3 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 = 0.896$$

$$P[h_2^A] = P[h_3^A] = P[h_4^A] = 0.8 \cdot 0.2^2 = 0.032$$

wobec tego:

$$p'_1 = p'_2 = p'_3 = 0.896/0.928 = 0.96551724$$

$$p_v = 0.928^3/0.896^2 = 0.99546939$$

Traktując następnie sieć z rys.2.9/b/ jako połączenie szeregowo-równoległe sieci z jednym uszkodzalnym węzłem, łatwo wyliczyć, że:

$$P_{st} = 0.95081213$$

Koniec przykładu 2.5.

Jak wynika z przedstawionych rozważań, zaproponowane algorytmy służą do poszukiwania dokładnej wartości miary niezawodnościowej. Spotyka się również prace, w których podaje się zależności określające przybliżoną wartość P_{st} [89,93] lub P_c [34, 36, 37, 38, 64, 66], najczęściej również dla pewnej klasy struktur topologicznych. Wzory zaproponowane w tych pracach są bądź oszacowaniem parametru P_{st} lub P_c , bądź przybliżeniem asymptotycznie dążącym do dokładnej wartości parametru niezawodnościowego dla sieci o dużej liczbie kanałów. Złożony aparat matematyczny wymagany do znajdowania tych przybliżeń oraz niewielka klasa struktur topologicznych, dla których mogą być stosowane te przybliżenia, znacznie ograniczają możliwość ich stosowania.

3. METODY WYZNACZANIA TOPOLOGII SIECI Z UWZGLĘDNIENIEM WSKAŹNIKÓW NIEZAWODNOŚCIOWYCH

Jak to wyjaśniono w rozdziale 1, rozwiązanie problemu syntezy sieci spełniającej ograniczenia niezawodnościowe składa się z dwóch etapów: etapu generacji struktury topologicznej sieci oraz etapu analizy niezawodnościowej. Analiza niezawodnościowa sieci omówiona została w rozdziale 2, gdzie przedstawiono szereg metod służących do wyznaczania wskaźników niezawodnościowych. Najbardziej użyteczną z punktu widzenia złożoności obliczeń okazała się metoda wykorzystująca dekompozycję sieci. W tym rozdziale pracy omówione zostaną takie metody generacji struktur topologicznych, które mogą być użyte do rozwiązania zadania optymalizacji. Z ogólności postawionego zadania wynika, że jako rozwiązanie otrzymać możemy zupełnie dowolny graf przedstawiający budowaną sieć. Dla sieci drzewiastej znana jest z góry jej topologia, a zatem rozwiązanie zadania optymalizacji sieci scentralizowanej polega na odpowiednim wyborze takiego drzewa, którego koszt jest najmniejszy, a ponadto spełnione są ograniczenia postawione w zadaniu [2, 7, 53, 80]. Wybór grafu reprezentującego topologię sieci o dowolnej strukturze jest zadaniem znacznie trudniejszym, gdyż nie można przyjąć żadnych założeń dotyczących samej struktury takiej sieci. Jest to więc czynnik, który znacznie utrudnia rozwiązanie postawionego zadania optymalizacji. Kolejnym czynnikiem, który również utrudnia rozwiązanie tego zadania jest fakt, że każda zmiana topologii sieci wymaga dokonania analizy niezawodnościowej dla nowo otrzymanej sieci. Wspomniane trudności spowodowały, że znanych jest bardzo niewiele algorytmów, które mogą być użyte dla celów rozwiązania zadania optymalizacji. Najczęściej używany do tego celu jest algorytm będący modyfikacją heurystycznego algorytmu podanego w pracy [94], który z kolei opiera się na algorytmie Lina [66] używanym do rozwiązania problemu komiwojażera. Spotykane są także algorytmy dokładne [103, 106], w których wykorzystuje się metodę podziału i oszacowań, a także algorytmy poszukujące struktury topologicznej maksymalizujące parametr niezawodnościowy bez uwzględniania kosztów budowy sieci [65].

Zanim omówione będą dokładniej algorytmy syntezy sieci, przedstawione zostanie na początek zadanie optymalizacji w najwygodniejszej postaci, służącej do jego rozwiązania.

3.1. Ogólna metoda rozwiązania

Rozwiązywane zadanie optymalizacyjne zapisane w postaci (1.20) brzmi następująco:

znane jest rozłożenie węzłów;
znaleźć taką sieć, dla której koszt

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^K \mathcal{X}_k(C_k) \quad (3.1)$$

jest najmniejszy, przy warunku, że spełnione są ograniczenia niezawodnościowe.

Utworzenie sieci, dla której koszt jest najmniejszy, polega na wyborze struktury topologicznej oraz doborze odpowiednich przepustowości kanałów, którym przypisane są prawdopodobieństwa ich poprawnej pracy. W praktyce, z przyczyn technicznych /patrz rozdział 1/ przyjmuje się najczęściej, że kanały mają jednakowe przepustowości i wtedy przy ustalonej przepustowości problem budowy optymalnej sieci ogranicza się do problemu wyboru odpowiedniej struktury topologicznej. Nasze rozważania zilustrowane zostaną następującym przykładem.

Przykład 3.1

Niech będzie znane rozłożenie czterech węzłów w sieci, przy czym możliwe jest zastosowanie kanałów o następujących przepustowościach: $C_1 = 9,6$ kb/s, $C_2 = 19,2$ kb/s, $C_3 = 50$ kb/s. W tabeli 3.1 podano dla każdej przepustowości koszt budowy kanału i jego prawdopodobieństwo poprawnej pracy.

Tabela 3.1

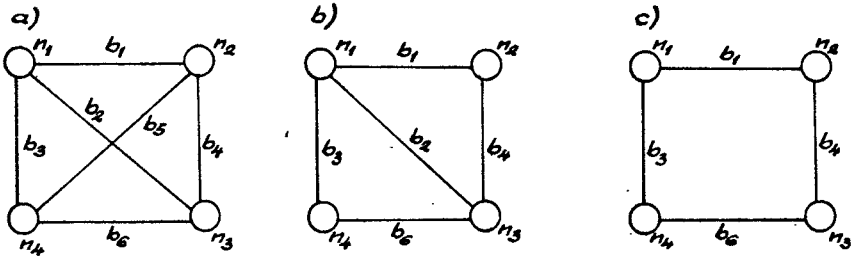
		b_1 (n_1, n_2)	b_2 (n_1, n_3)	b_3 (n_1, n_4)	b_4 (n_2, n_3)	b_5 (n_2, n_4)	b_6 (n_3, n_4)
C_1 9,6 kb/s	$\mathcal{X}(C_k)$	40	70	66	52	80	75
	$p(C_k)$	0.96	0.94	0.94	0.95	0.93	0.93
C_2 19,2 kb/s	$\mathcal{X}(C_k)$	50	85	78	68	100	95
	$p(C_k)$	0.98	0.97	0.97	0.98	0.96	0.96
C_3 50 kb/s	$\mathcal{X}(C_k)$	70	110	100	90	130	125
	$p(C_k)$	0.99	0.98	0.98	0.99	0.975	0.975



Przyjmując za wskaźnik niezawodnościowy np. prawdopodobieństwo P_c , zaś za kryterium, koszt budowy sieci, można wybierać odpowiednie struktury

topologiczne w zależności od ustalonej przepustowości kanału.

Dla przykładu niech $P_c = 0.997$. W takim przypadku sieć o przepustowościach $C = 9,6$ kb/s spełnia ograniczenie niezawodnościowe wtedy, gdy składa się ze wszystkich kanałów. Jej sumaryczny koszt jest wtedy równy 383. Dla przepustowości $C = 19,2$ kb/s struktura topologiczna sieci dana jest grafem na rys.3.1/b/, a jej koszt budowy wynosi 376; zaś dla przepustowości $C = 50$ kb/s optymalna struktura sieci dana jest grafem na rys.3.1/c/, a jej koszt budowy wynosi odpowiednio 385.



Rys.3.1. Grafy optymalnych sieci zbudowanych z sieci zupełnej /a/ przy założeniu, że przepustowości kanałów są równe $C = 19,2$ kb/s /b/ i $C = 50$ kb/s /c/

Przykład 3.1 pokazuje, że rozwiązanie zadania optymalizacji sieci wraz z wyborem przepustowości kanałów w sieci polega /przy założeniu, że wszystkie kanały mają jednakowe przepustowości/ na rozwiązaniu kilku zadań wyboru topologii sieci, a następnie na wyborze takiej sieci ze wszystkich otrzymanych, dla której koszt jest minimalny. Tym samym najbardziej ogólne zadanie optymalizacyjne zostało sprowadzone do zadania wyboru topologii sieci przy uwzględnieniu ograniczeń niezawodnościowych. Dlatego też szczegółowo omówione zostanie tutaj rozwiązanie zadania optymalizacji sieci przez wybór jej topologii.

Wyjaśnienia wymaga formalne sformułowanie zadania w taki sposób, ażeby można było łatwo ocenić, czy dla rozważanej topologii sieci spełnione są ograniczenia. W tym celu omówiony będzie bliżej przykład sformułowania zadania dla sieci z rys.3.1/a/. Na początek stosując jedną z metod przedstawionych w rozdziale 2 określone zostanie prawdopodobieństwo P_c . Jest ono dane w postaci:

$$\begin{aligned}
 P_c = & P_1 P_2 P_3 + P_1 (1 - P_2) P_4 P_5 + P_2 (1 - P_3) P_4 P_5 + (1 - P_1) P_3 P_4 P_5 + \\
 & + P_1 P_2 (1 - P_3) (1 - P_4) P_6 + P_2 (1 - P_3) P_4 (1 - P_5) P_6 + \\
 & + (1 - P_1) P_2 P_3 P_4 (1 - P_5) + (1 - P_1) P_2 P_3 (1 - P_4) P_5 + \\
 & + P_1 (1 - P_2) P_4 (1 - P_5) P_6 + P_1 (1 - P_2) (1 - P_4) P_5 P_6 + \\
 & + (1 - P_1) (1 - P_2) P_3 (1 - P_4) P_5 P_6 + (1 - P_1) (1 - P_2) P_3 P_4 (1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - p_5) p_6 + (1 - p_1) p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 p_6 + \\
& + p_1 (1 - p_2) p_3 p_4 (1 - p_5) (1 - p_6) + p_1 (1 - p_2) p_3 (1 - p_4) (1 + \\
& - p_5) p_6 + p_1 p_2 (1 - p_3) (1 - p_4) p_5 (1 - p_6)
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

Struktura topologiczna rzeczywistej sieci jest pewnym podgrafem grafu zupełnego, czyli może być opisana wektorem $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$, $x_i \in \{0, 1\}$, który interpretujemy w następujący sposób: jeżeli $x_i = 1$, to kanał b_i istnieje, jeżeli zaś $x_j = 0$, to kanał b_j nie istnieje. Tym samym również P_c dla dowolnej sieci staje się funkcją zmiennych binarnych x_i ($i = 1, 2, \dots, 6$). Zatem szukane prawdopodobieństwo P_c można zapisać jako funkcję binarnych zmiennych x_i w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
P_c(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = & p_1 x_1 p_2 x_2 p_3 x_3 + p_1 x_1 (1 - p_2 x_2) p_4 x_4 p_5 x_5 + \\
& + p_2 x_2 (1 - p_3 x_3) p_4 x_4 p_5 x_5 + (1 - p_1 x_1) p_3 x_3 p_4 x_4 p_5 x_5 + \\
& + p_1 x_1 p_2 x_2 (1 - p_3 x_3) (1 - p_4 x_4) p_6 x_6 + p_2 x_2 (1 - p_3 x_3) p_4 x_4 (1 - p_5 x_5) p_6 x_6 + \\
& + (1 - p_1 x_1) p_2 x_2 p_3 x_3 p_4 x_4 (1 - p_5 x_5) + (1 - p_1 x_1) p_2 x_2 p_3 x_3 (1 - p_4 x_4) p_5 x_5 + \\
& + p_1 x_1 (1 - p_2 x_2) p_4 x_4 (1 - p_5 x_5) p_6 x_6 + p_1 x_1 (1 - p_2 x_2) (1 - p_4 x_4) p_5 x_5 p_6 x_6 + \\
& + (1 - p_1 x_1) (1 - p_2 x_2) p_3 x_3 (1 - p_4 x_4) p_5 x_5 p_6 x_6 + \\
& + (1 - p_1 x_1) (1 - p_2 x_2) p_3 x_3 p_4 x_4 (1 - p_5 x_5) p_6 x_6 + \\
& + (1 - p_1 x_1) p_2 x_2 (1 - p_3 x_3) (1 - p_4 x_4) p_5 x_5 p_6 x_6 + \\
& + p_1 x_1 (1 - p_2 x_2) p_3 x_3 p_4 x_4 (1 - p_5 x_5) (1 - p_6 x_6) + \\
& + p_1 x_1 (1 - p_2 x_2) p_3 x_3 (1 - p_4 x_4) (1 - p_5 x_5) p_6 x_6 + \\
& + p_1 x_1 p_2 x_2 (1 - p_3 x_3) (1 - p_4 x_4) p_5 x_5 (1 - p_6 x_6) \gg P_0
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$$

Rozważany problem syntezy można obecnie formalnie zapisać w następujący sposób:

zminimalizować funkcję kryterialną:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_K) = \sum_{k=1}^K \alpha_k(C_k) x_k, \quad K = W(W-1)/2 \tag{3.4}$$

przy warunkach

$$\begin{aligned}
 f_1(x_{1P_1}, x_{2P_2}, \dots, x_{KP_K}) &\geq P_{O_1} \\
 \cdot &\cdot \\
 \cdot &\cdot \\
 \cdot &\cdot \\
 f_r(x_{1P_1}, x_{2P_2}, \dots, x_{KP_K}) &\geq P_{O_r} \\
 x_k \in \{0, 1\} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, K
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Zadanie postaci (3.4) przy warunkach (3.5) jest zadaniem z dziedziny programowania binarnego z liniową funkcją celu i nieliniowymi ograniczeniami, czyli należy do zadań klasy NP- zupełne [91]. W zależności od rodzaju parametru niezawodnościowego ograniczenia (3.5) mogą składać się z jednej funkcji /przy określeniu P_c / lub z $W(W-1)/2$ funkcji określających P_{st} dla każdej pary węzłów. Sformułowanie zadania syntezy sieci w takiej postaci jest praktycznie niemożliwe, ze względu na zapis funkcji ograniczeń. Każda z występujących funkcji w zależności (3.5) składa się z sumy wielu iloczynów /patrz (3.3)/ zawierających do K zmiennych. Funkcje te muszą być określone dla sieci zupełnej i mogą po prostych przekształceniach być użyte do obliczeń parametru niezawodnościowego dla dowolnej sieci. Przyjmując dla przykładu sieć z rys.3.1 /c/, dla której $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, otrzymamy

$$P_c = p_1 p_4 p_6 + q_1 p_3 p_4 p_6 + p_1 p_3 q_4 p_6 + p_1 p_3 p_4 q_6$$

Cała trudność w wykorzystaniu tak przedstawionych zależności opisujących żądany parametr niezawodnościowy polega na ich znalezieniu i umieszczeniu w pamięci komputera. Dlatego też, tak formalny sposób przedstawienia zadania optymalizacji może mieć tylko charakter poznawczy.

Należy zatem podać sposób przekształcenia ograniczeń niezawodnościowych zadanych w postaci układu nierówności (3.5) do postaci, która będzie bardziej przydatna do celów optymalizacji. W tym celu oszacowana zostanie moc minimalnego zbioru kanałów należących do każdego, z przekrojów w sieci, tak, aby spełnione mogły być ograniczenia (3.5). Rozstrzyga o tym następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 3.1

Warunkiem koniecznym na to, aby sieć spełniała ograniczenia narzucone na parametry niezawodnościowe P_c lub P_{st} jest, żeby każdy przekrój zawierał co najmniej S kanałów, gdzie:

$$S = \left\lceil \frac{\lg \left(\frac{1 - P_o}{2} \right)}{\lg (1 - p^*)} \right\rceil \tag{3.6}$$

przy czym zapis $\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą niż a ;

$$p^* = \max_k \{p_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$P_0 = \begin{cases} P_c & \text{- dla parametru określającego prawdopodobieństwo} \\ & \text{spójności sieci} \\ \min \{P_{st}\} & \text{- dla parametru określającego prawdopodobieństwo} \\ & \text{istnienia połączenia między węzłami } s \text{ oraz } t \end{cases}$$

Dowód twierdzenia 3.1 podany został w pracy [104]. Zasadniczy wniosek wynikający z twierdzenia 3.1 można sformułować w następujący sposób: sieć posiadająca jednakowe prawdopodobieństwa uszkodzeń kanałów równe $1 - p^*$ jest najbardziej odporna na uszkodzenia kanałów wtedy, gdy jej struktura jest zbliżona do struktury regularnej^{1/}. Wniosek ten udowodniony po raz pierwszy przez Legetta i Bedrosiana [64] dla parametru P_c poparty być może dodatkowo twierdzeniami dotyczącymi syntezy takich sieci, w których uwzględnia się warunki jej przeżywalności [23, 25].

Znajomość warunków koniecznych nałożonych na moc zbioru kanałów najmniejszego z przekrojów sieci pozwala sformułować obecnie zadanie optymalizacyjne z takimi ograniczeniami, które muszą być spełnione po to, aby spełnione były ograniczenia niezawodnościowe. Zadanie to może być przedstawione w następujący sposób:

zminimalizować funkcję

$$f(x_1, x_2, \dots, x_K) = \sum_{k=1}^K \alpha_k (C_k) x_k, \quad K = \frac{W \cdot (W-1)}{2}$$

przy warunkach

$$D \bar{x} \geq \bar{S}$$

$$x_k \in \{0, 1\}$$

(3.7)

gdzie:

D - jest macierzą o współczynnikach $d_{ij} \in \{0, 1\}$ określającą przynależność j -tego kanału do i -tego przekroju,

\bar{S} - jest wektorem składającym się ze składowych równych S wyliczonych zgodnie z (3.6).

Zadanie optymalizacyjne polegające na doborze struktury topologicznej sieci przy ograniczeniach (3.7) jest zadaniem łatwiejszym do rozwiązania

^{1/} Struktura regularna jest to taka struktura, której graf posiada węzły o jednakowych stopniach /jednakowej liczbie kanałów wychodzących z węzłów/.

/choć nadal wymagającym dużych nakładów obliczeń, gdyż jest zadaniem klasy NP - zupełne [95]/ od zadania (3.4) z ograniczeniami (3.5), ponieważ warunek konieczny przedstawiony twierdzeniem 3.1 określa, spośród jakiego podzbioru struktur topologicznych wybierać należy optymalną topologię. Zadanie to daje się rozwiązać w jednoznaczny sposób przy zastosowaniu następujących zasad:

1. Za K_{\min} /najmniejszą liczbę kanałów występujących w sieci/ przyjmij

$$K_{\min} = \left\lceil \frac{1}{2} W S \right\rceil \quad (3.8)$$

2. Znajdź strukturę topologiczną sieci o koszcie \mathcal{K} zawierającą K_{\min} kanałów i sprawdź, czy spełnione są ograniczenia (3.7)?
 Tak: idź do 3.
 Nie: idź do 4.
3. Czy istnieje możliwość budowy sieci składającej się z $K > K_{\min}$ kanałów o koszcie mniejszym od kosztu \mathcal{K} ?
 Tak: zwiększ K_{\min} o 1. Idź do 2.
 Nie: KONIEC.
4. Czy istnieje możliwość budowy sieci składającej się z K_{\min} kanałów?
 Tak: idź do 2.
 Nie: zwiększ K_{\min} o 1. Idź do 2.

W praktyce rozwiązanie zadania (3.4) przy ograniczeniach (3.5) wymaga rozwiązania najpierw zadania (3.4) przy ograniczeniach (3.7), a następnie sprawdzenia, czy otrzymana struktura spełnia pierwotne ograniczenia niezawodnościowe.

Jednym z nielicznych algorytmów syntezy sieci z uwzględnieniem warunków (3.7) może być algorytm będący modyfikacją przedstawionego w pracy [94]. Jest to heurystyczny algorytm należący do klasy algorytmów lokalnego przeszukiwania sąsiedztwa [18, 39], w którym w sposób losowy generowana jest struktura sieci spełniająca ograniczenia (3.7), a następnie dokonywana jest modyfikacja tej struktury poprzez wymianę kanałów w taki sposób, ażeby spełnione były ograniczenia, a koszt utworzenia sieci malał. Algorytm ten jest dosyć szybki, lecz jak każdy algorytm heurystyczny znajduje najczęściej tylko minimum lokalne. Podstawową wadą tego algorytmu ograniczającą możliwość jego wykorzystania do rozwiązania sformułowanego zadania jest fakt, że może, co prawda znaleźć on przybliżoną topologię optymalną spełniającą ograniczenia (3.7), ale nie spełniającą ograniczeń (3.5). Nie znany jest w takim przypadku sposób modyfikacji struktury zapewniającej spełnienie ograniczeń niezawodnościowych. Dlatego też niezbędne staje się podanie takiego algorytmu, który pozwala znaleźć optymalną strukturę topologiczną, dla której ograniczenia niezawodnościowe są zachowane. Algorytm wykorzystujący metodę podziału i oszacowań, który zaproponowany został w pracy [104], znajduje, przeglądając w ściśle zorganizowany sposób, najtańszą strukturę topologiczną spełniającą ograniczenia niezawodnościowe. Al-

gorytm ten omówiony zostanie dokładniej w następnej części tego rozdziału.

3.2. Algorytm optymalizacji sieci oparty o metodę podziału i oszacowań

Metodą wykorzystywaną do rozwiązywania zadań programowania binarnego przy ograniczeniach, jest metoda podziału i oszacowań [6, 7, 35, 44, 63]. Algorytmy wykorzystujące tę metodę są określane w taki sposób, iż skończony zbiór możliwych rozwiązań dzielony jest według pewnych reguł na mniejsze podzbiory. Z kolei dla każdego podzbioru algorytm znajduje oszacowanie dolne związane z tym podzbiorem. Wybierając każdorazowo taki podzbiór, którego oszacowanie dolne jest najmniejsze, znaleźć można po skończonej liczbie kroków taki element podzbioru, który spełnia ograniczenia, a koszt jego jest najmniejszy. Algorytmy oparte na metodzie podziału i oszacowań generują drzewo rozwiązań, którego wierzchołkom przypisane są wartości oszacowania dolnego. Wierzchołek, który możemy dalej rozbudowywać, nosi nazwę wierzchołka otwartego, wierzchołek którego nie możemy rozbudowywać, nosi nazwę wierzchołka zamkniętego. Zamykanie wierzchołka odbywać się może z dwóch powodów:

- a/ po pierwsze, nie mogą być spełnione ograniczenia dla wszystkich elementów podzbioru odpowiadającemu rozważanemu wierzchołkowi;
- b/ po drugie, oszacowanie dolne dla rozważanego wierzchołka jest większe od pewnej wielkości nazywanej oszacowaniem górnym.

Obecnie zostanie podana ogólna zasada algorytmu /wykorzystującego metodę podziału i oszacowań/ służącego do generowania struktur topologicznych spełniających zadane ograniczenia. Główną ideą algorytmu jest wybieranie kolejno ze zbioru wszystkich kanałów takich kanałów, których koszt jest najmniejszy. Dlatego też zbiór wszystkich kanałów uporządkowany jest według rosnących kosztów i do rozważanej struktury dodawany jest zawsze taki kanał, którego koszt jest najmniejszy. Każdy wierzchołek otwarty należący do drzewa rozwiązań może być podzielony na dwa wierzchołki. Jeden z wierzchołków reprezentuje zbiór wszystkich takich struktur, w których kanał b_1 /według którego dokonywany był podział tego wierzchołka/ istnieje, zaś drugi wierzchołek reprezentuje zbiór wszystkich takich struktur sieci, w których kanał b_1 nie istnieje. W celu ułatwienia zapisu przyjęto, że każdy wierzchołek wygenerowany przez algorytm opisany będzie przez trzy rozłączne podzbiory kanałów:

- podzbiór F_1 zawierający te wszystkie kanały, które występują w podzbiorze struktur odpowiadających i-temu wierzchołkowi wygenerowanemu przez algorytm;
- podzbiór \bar{F}_1 zawierający te kanały, które nie występują w podzbiorze struktur odpowiadających i-temu wierzchołkowi algorytmu;
- podzbiór R_1 zawierający wszystkie pozostałe kanały, czyli te, które nie należą do F_1 lub \bar{F}_1 .

Przez $\mathcal{K}(w_1)$ oznaczony będzie minimalny koszt /oszacowanie dolne/ dla struktury odpowiadającej i-temu wierzchołkowi. Wprowadzone zostanie również oszacowanie od góry oznaczone przez \mathcal{K}_g . Przez $\gamma^M(F_1, R_1)$ oznaczony będzie podzbiór indeksów pierwszych M kanałów, które należą do zbioru $F_1 \cup R_1$ uporządkowanego według rosnących kosztów. Z definicji zbiorów F_1 oraz R_1 wynika, że będą to indeksy wszystkich kanałów ze zbioru F_1 oraz indeksy pierwszych M-1 kanałów ze zbioru R_1 , gdzie l - liczba kanałów należących do zbioru F_1 .

Algorytm 3.1

1. W zbiorze R_0 umieść wszystkie kanały występujące w sieci uzupełnej uporządkowane wg rosnących kosztów. Przyjmij $F_0 = \emptyset$, $\bar{F}_0 = \emptyset$. Jako M podstaw K_{\min} obliczone według (3.8). Przyjmij $\mathcal{K}_g = \sum_{k=1}^K \mathcal{K}_k$; $K = W(W-1)/2$.

2. Oblicz oszacowanie dolne wierzchołka w_0

$$\mathcal{K}(w_0) = \sum_{i \in \gamma^M(F_0, R_0)} \mathcal{K}_i$$

Wierzchołek w_0 traktuj jako otwarty.

Czy $\mathcal{K}(w_0)$ jest mniejsze od \mathcal{K}_g ?

Tak: Idź do 3.

Nie: Koniec działania algorytmu.

Struktura odpowiadająca \mathcal{K}_g jest najtańsza.

3. Wybierz taki wierzchołek otwarty w_1 , dla którego oszacowanie dolne jest najmniejsze.

Czy oszacowanie dolne $\mathcal{K}(w_1)$ jest mniejsze od \mathcal{K}_g ?

Tak: Idź do 4.

Nie: Zwiększ M o 1. Idź do 2.

4. Sprawdź, czy zbiór F_1 zawiera M kanałów?

Nie: Idź do 5.

Tak: Sprawdź, czy spełnione są ograniczenia na liczbę kanałów w przekrojach w sieci?

Nie: Zamknij wierzchołek w_1 i wróć do 3.

Tak: Idź do 6.

5. Dokonaj podziału wierzchołka w_1 na dwa nowe wierzchołki w_{11} oraz w_{12} i utwórz zbiory $F_{11}, \bar{F}_{11}, R_{11}$ /i = 1, 2/ w następujący sposób: ze zbioru R_1 wybierz pierwszy kanał b_1 ;

$$\begin{aligned} \text{podstaw } R_{1_1} &= R_{1_2} = R_1 \setminus b_1; \\ \text{podstaw } F_{1_1} &= F_1 \cup b_1; \quad \bar{F}_{1_1} = \bar{F}_1; \\ \text{podstaw } F_{1_2} &= F_1; \quad \bar{F}_{1_2} = \bar{F}_1 \cup b_1; \end{aligned}$$

Dla obydwu wierzchołków znajdź oszacowania dolne:

$$\kappa(w_1) = \sum_{j \in \gamma^M(F_{1_1}, R_{1_1})} \kappa_j \quad i = 1, 2$$

Idź do 3.

6. Sprawdź, czy spełnione są ograniczenia niezawodnościowe?

Tak: Podstaw $\kappa_g = \kappa(w_1)$. Pamiętaj F_1 jako strukturę odpowiadającą κ_g . Zwiększ M o 1. Idź do 2.

Nie: Zamknij wierzchołek w_1 i wróć do 3.

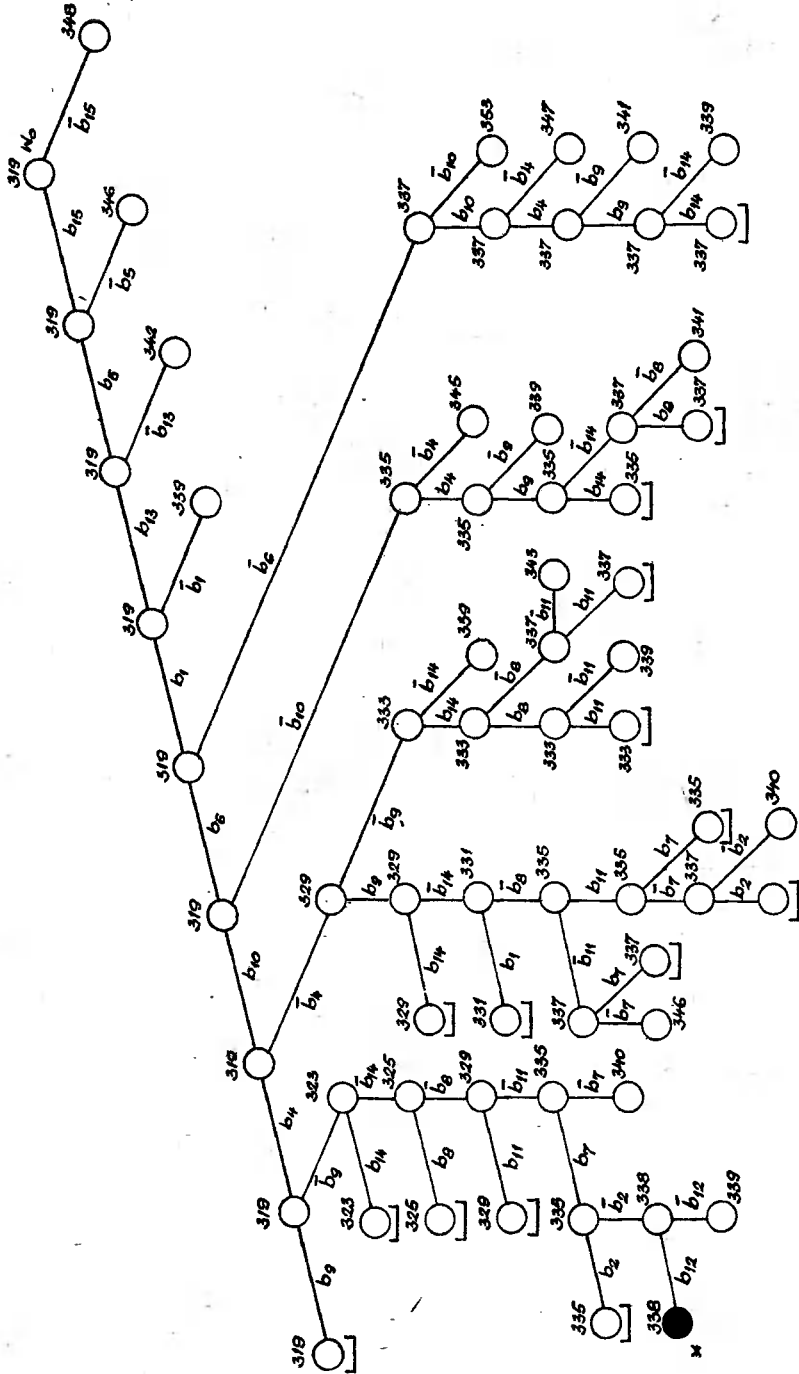
Z zasady pracy algorytmu wynika, że algorytm ten poszukuje pierwszej struktury sieci złożonej z M kanałów, dla której spełnione są ograniczenia niezawodnościowe. Może się tak zdarzyć, że koszt sieci składającej się z K_{\min} kanałów jest większy od kosztu sieci składającej się z $M > K_{\min}$ kanałów. Dlatego też w kroku 3 lub 6 algorytmu zwiększona zostaje o 1 liczba kanałów występujących w sieci, a algorytm powraca do poszukiwania nowej struktury. Oszacowanie od góry pozwala przy tym szybciej zakończyć pracę algorytmu.

Dla ilustracji zasady działania algorytmu rozpatrzony będzie następujący przykład:

P r z y k ł a d 3.2

Dana jest macierz kosztów $[\kappa_{ij}]$ oraz macierz prawdopodobieństw $[p_{ij}]$ poprawnej pracy kanałów dla sieci zupełnej złożonej z 6 węzłów. Należy znaleźć strukturę topologiczną sieci o najmniejszym koszcie budowy, dla której prawdopodobieństwo spójności sieci P_c jest nie mniejsze niż 0.985.

$$[\kappa_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 32 & 58 & 62 & 42 & 25 \\ 32 & 0 & 34 & 56 & 52 & 48 \\ 58 & 34 & 0 & 36 & 52 & 61 \\ 62 & 56 & 36 & 0 & 29 & 50 \\ 42 & 52 & 52 & 29 & 0 & 23 \\ 25 & 48 & 61 & 50 & 23 & 0 \end{bmatrix}$$



Rys.3.2. Drzewo rozwiązań otrzymane dla przykładu działania algorytmu 3.1

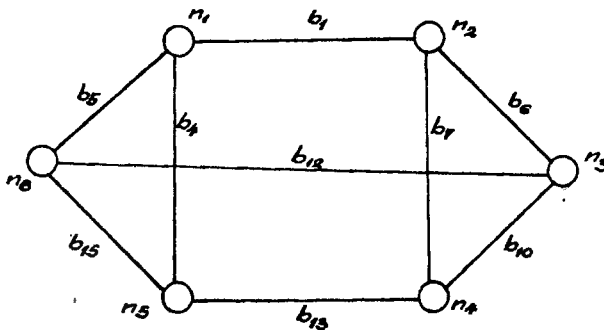
$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.85 & 0.8 & 0.85 & 0.9 \\ 0.9 & 0 & 0.9 & 0.8 & 0.8 & 0.85 \\ 0.85 & 0.9 & 0 & 0.9 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 0.9 & 0 & 0.9 & 0.8 \\ 0.85 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 0 & 0.9 \\ 0.9 & 0.85 & 0.8 & 0.8 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

Po to aby łatwiej można było prześledzić działanie algorytmu 3.1 kanały uporządkowane według rosnących kosztów przedstawione zostały w poniższej tabeli.

b_{15}	b_5	b_{13}	b_1	b_6	b_{10}	b_4	b_9	b_{14}	b_8	b_{11}	b_7	b_2	b_{12}	b_3
23	25	29	32	34	36	42	48	50	52	52	56	58	61	62

Wybór kanałów w sposób wynikający z zasady działania algorytmu 3.1 pozwala znaleźć poszukiwaną strukturę optymalną. Drzewo rozwiązań dla zadania z przykładu 3.2 przedstawione zostało na rys.3.2.

Każdy wierzchołek drzewa rozwiązań opisany jest liczbą określającą jego oszacowanie dolne. Wierzchołki otwarte dzielone są na dwa nowe wierzchołki poprzez przyporządkowanie poszczególnych kanałów odpowiednio do zbiorów \bar{F}_1 /zapis \bar{b}_{k_1} / lub zbioru F_1 /zapis b_{k_1} /. Znalezione wierzchołek o koszcie 338 spełnia ograniczenia, a ponadto oszacowanie dolne tego wierzchołka jest najmniejsze, stąd jest on szukany rozwiązaniem. Strukturę optymalną odpowiadającą temu wierzchołkowi pokazano na rys.3.3.



Rys.3.3. Optymalna struktura topologiczna dla przykładu, znaleziona przy zastosowaniu algorytmu 3.1

Koniec przykładu 3.2.

Wadą algorytmu 3.1 jest żądanie przydziału dużych obszarów pamięci komputera dla zapamiętania drzewa rozwiązań oraz dosyć długi czas obli-

czeń. Dlatego też celowe staje się poszukiwanie nowych algorytmów, które będą zmniejszać nakłady obliczeniowe oraz nie będą wymagać tak dużych obszarów pamięci komputera. Jedną z metod pozwalających na przyspieszenie działania algorytmu oszacowań i krawędzi jest metoda szybszego eliminowania pewnych wierzchołków otwartych drzewa rozwiązań / [18], tw. 6.2/. Eliminacja taka może być realizowana poprzez wprowadzenie dodatkowych ograniczeń, które szybko i łatwo mogą być sprawdzone. Najlepszą metodą eliminacji niektórych rozwiązań w procesie optymalizacji struktury topologicznej sieci okazała się metoda wykorzystująca rozbitcie sieci [105]. Algorytm oparty na tej metodzie przedstawiony zostanie w następnej części.

3.3. Algorytm optymalizacji sieci wykorzystujący metodę ich rozbitcia

Algorytm, który zostanie tutaj przedstawiony, jest szczególnym przypadkiem algorytmu rozwiązującego nieco ogólniejsze zadanie optymalizacji [105]. W pierwotnej wersji algorytm optymalizacji topologii sieci poprzez rozbitcie wykorzystany został do rozwiązania takiego zadania, w którym liczba kanałów należących do przekrojów rozdzielających była różna. Z twierdzenia 3.1 wynika jednakże, że sieć spełniająca ograniczenia niezawodnościowe jest zbliżona do sieci jednorodnej, stąd najmniejsza liczba kanałów w przekrojach jest równa S . Ponieważ warunek określający moc minimalnego zbioru kanałów w sieci dotyczy wszystkich przekrojów, wobec tego określa on również liczbę kanałów wychodzących z każdego węzła należącego do sieci. Liczbę kanałów wychodzących /wchodzących/ z węzła n_1 nazywa się stopniem węzła i oznacza przez d_1 . Zatem rozwiązanie zadania polega na zbudowaniu takiej sieci, której stopnie węzłów są równe S , a ponadto spełniane są dodatkowe ograniczenia (3.7). Zanim możliwe stanie się podanie algorytmu optymalizacji sieci z wykorzystaniem jej rozbitcia, podać należy niezbędne definicje i twierdzenia. Na początek zostaną określone warunki, jakie spełniać muszą liczby całkowite $\{d_1, d_2, \dots, d_W\}$, aby istniała sieć, w której poszczególne węzły mają stopnie d_1 . Zanim przytoczone zostanie podstawowe twierdzenie sformułowane przez Franka i Frischa [25] podana najpierw będzie niezbędna definicja.

Definicja 3.1

Zbiór całkowitych liczb nieujemnych $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_W$, z których co najmniej k liczb jest różnych od zera, nazywa się zbiorem komprymowalnym wtedy, gdy $d_1 \leq k-1$. Zbiór całkowitych liczb nieujemnych podlega kompresji poprzez zastosowanie następujących operacji:

- a/ odjęcie liczby 1 od d_2, d_3, \dots, d_{d+1} ;
- b/ przyjęcie $d_1 = 0$;
- c/ zamianę indeksów w taki sposób, aby $d_{i_1} \geq d_{i_2} \geq \dots \geq d_{i_W}$.

Otrzymany zbiór liczb całkowitych nazywa się zbiorem skomprymowanym.

Twierdzenie 3.2

Niezorientowany graf G o węzłach n_1, n_2, \dots, n_w ze stopniami d_1, d_2, \dots, d_w może być zbudowany wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór liczb $\{d_1, d_2, \dots, d_w\}$ reprezentujący stopnie węzłów w sieci jest zbiorem komprymowalnym i każdy zbiór otrzymany w wyniku kolejnych kompresji jest komprymowalny do momentu, aż wszystkie liczby d_i staną się równe 0.

Twierdzenie 3.2 może być użyte bezpośrednio do rozwiązania rozważanego zadania optymalizacji, jednakże w takim przypadku zaproponowana metoda sprowadzi się co najwyżej do modyfikacji algorytmu 3.1. Twierdzenie to służy zasadniczo dla dowodu pozostałych twierdzeń przytoczonych w tej części pracy.

Definicja 3.2

Rozbiciem sieci danej grafem $G = \langle N, B \rangle$ względem rozdzielających zbiorów kanałów Bd_1, Bd_2, \dots, Bd_q nazywa się operację, w wyniku której sieć dana grafem G rozpada się na podsieci dane grafami $G_1 = \langle N_1, B_1 \rangle, G_2 = \langle N_2, B_2 \rangle, \dots, G_s = \langle N_s, B_s \rangle$, w taki sposób, że spełnione są warunki:

$$\bigcup_{i=1}^s N_i = N$$

$$\forall_{i,j} \substack{N_i \cap N_j = \emptyset \\ i \neq j}$$

$$\forall_{i,j} \substack{B_i \cap B_j = \emptyset \\ i \neq j}$$

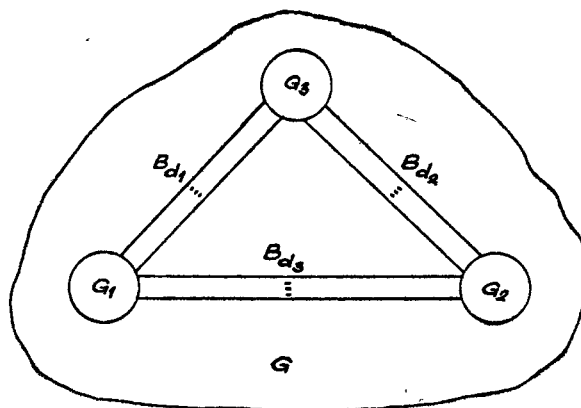
(3.9)

$$\bigcup_{i=1}^s B_i \cup \bigcup_{j=1}^q Bd_j = B$$

Trzeba zwrócić uwagę, że rozbicie sieci jest traktowane inaczej niż dekompozycja opisana w rozdziale 2. Rys.3.4 wyjaśnia definicję 3.2 dla przypadku, gdy $s = 3$.

Rozbicie sieci pozwala zmniejszyć nakład obliczeń, gdyż każda z podsieci, na które podzielona została sieć pierwotna, składa się ze znacznie mniejszej liczby węzłów i kanałów. Po to jednakże, aby rozbicie sieci można było zastosować do rozwiązania problemu optymalizacji, określić należy, jak wybierać zbiory rozdzielające kanałów Bd_1, Bd_2, \dots, Bd_q oraz struktury podsieci G_1, G_2, \dots, G_s . W początkowej fazie rozważań przyjęto założenie, że suma stopni węzłów jest parzysta. Założenie to niezbędne jest dla dowodu podanych dalej twierdzeń. W praktycznej realizacji algorytmu fakt, że suma stopni węzłów jest nieparzysta, pociąga za sobą trzy-

krotne wykorzystanie zaproponowanej metody, przy czym kolejno zwiększa się o jeden suma stopni w poszczególnych podsieciach. Na początek podana zostanie zależność określająca minimalną liczbę kanałów wychodzących z podsieci danej grafem G_i tak, żeby sieć była realizowalna przy określonym jej rozbićiu.



Rys.3.4. Rozbicie sieci G na trzy podsieci G_1, G_2, G_3 i zbiory rozdzielaające Bd_1, Bd_2, Bd_3

Twierdzenie 3.3

Liczba kanałów k_i^0 wychodzących z podsieci danej grafem G_i jest nie mniejsza od:

$$k_i^0 = \max \{ (W_i S - W_i (W_i - 1)), S \} \quad (3.10)$$

gdzie:

W_i - liczba węzłów, które należą do podsieci G_i .

Dowód twierdzenia 3.3 znaleźć można w pracy [105].

Twierdzenie 3.3 określa tylko najmniejszą liczbę kanałów wychodzących z podsieci danej grafem G_i . Dla rozwiązania zadania optymalizacji należy znać dokładną liczbę kanałów wychodzących z G_i . Liczbę tę określa następująco:

Twierdzenie 3.4

Liczba kanałów wychodzących z podsieci G_i jest równa:

$$a/ \quad k_i = k_i^0 + 2t$$

$$t = 0, 1, 2, \dots, \min \left\{ \left\lceil \frac{(W - W_i) W_i - k_i^0}{2} \right\rceil, \left(\frac{1}{2} (W_i S - k_i^0) \right) \right\} \quad (3.11)$$

gdy k_1^0 jest liczbą parzystą /liczbą nieparzystą/ oraz $W_1 S$ jest także liczbą parzystą /liczbą nieparzystą/.

$$b) k_1 = k_1^0 + 1 + 2t$$

$$t = 0, 1, 2, \dots, \min \left\{ \left\lfloor \frac{W - W_1 W_1 - k_1^0 + 1}{2} \right\rfloor, \left(\frac{1}{2} (W_1 S - (k_1^0 + 1)) \right) \right\} \quad (3.12)$$

gdy k_1^0 jest liczbą nieparzystą /liczbą parzystą/ oraz $W_1 S$ jest liczbą parzystą /liczbą nieparzystą/

gdzie:

$\lfloor z \rfloor$ - entier z

W - liczba wszystkich węzłów należących do sieci danej grafem G .

Podobnie jak dowód twierdzenia 3.3 również dowód twierdzenia 3.4 znaleźć można w [105].

Znając dokładną liczbę kanałów wychodzących z poszczególnych podsieci określić trzeba liczbę kanałów, które należą do poszczególnych zbiorów rozdzielających B_{d_j} . Dopiero znając liczby kanałów w zbiorach B_{d_j} przystąpić można do poszukiwania struktury optymalnej. Liczbę kanałów należących do zbiorów B_{d_j} znajduje się wykorzystując:

T w i e r d z e n i e 3.5

Liczby kanałów łączące poszczególne podsieci /należące do zbiorów rozdzielających/ w przypadku rozbicia sieci na $r \gg 3$ podsieci znajduje się rozwiązując równanie:

$$A \bar{y} = \bar{k} \quad (3.13)$$

gdzie:

\bar{y} - jest wektorem wymiaru $1 \times \frac{r(r-1)}{2}$;

\bar{k} - jest wektorem wymiaru $r \times 1$, którego składowa k_1 jest równa liczbie kanałów wychodzących z podsieci danej grafem G_1 / k_1 oblicza się z zależności (3.12) lub (3.11)/;

A - macierz incydencji węzły-gałęzie dla całkowitego grafu zawierającego r węzłów.

Z twierdzenia 3.5 wynika, że dla przypadku, gdy rozbicie sieci jest większe aniżeli na trzy podsieci, dla każdego zbioru $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ kanałów wychodzących z poszczególnych podsieci istnieje wiele różnych liczb y_1, y_2, \dots, y_q kanałów należących do zbiorów rozdzielających B_{d_j} . Tylko dla przypadku, gdy dokonuje się rozbicia na 2 lub 3 podsieci, rozwiązanie równania (3.13) jest jednoznaczne. Dlatego z punktu widzenia złożoności obliczeń należy dokonywać rozbicia sieci co najwyżej na 3 podsieci. W przypadku rozbicia sieci pierwotnej na 3 podsieci liczby kanałów na-

leżących do poszczególnych zbiorów rozdzielających są równe:

$$\begin{aligned}
 y_1 = y_{12} &= \frac{k_1 + k_2 - k_3}{2} \\
 y_2 = y_{13} &= \frac{k_1 + k_3 - k_2}{2} \\
 y_3 = y_{23} &= \frac{k_2 + k_3 - k_1}{2}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

gdzie:

k_1, k_2, k_3 określają liczby kanałów wychodzących z podsieci G_1, G_2, G_3 odpowiednio.

W przypadku rozbitcia sieci na dwie podsieci liczba kanałów należących do zbioru rozdzielającego jest równa:

$$y = \max \{k_1, k_2\} \tag{3.15}$$

Mając, po rozbitciu sieci na podsieci G_1, G_2, G_3 , ustalone liczby k_1, k_2, k_3 , można przystąpić do poszukiwania optymalnej struktury. Strukturę całej sieci znajdzie się przeglądając takie struktury podsieci G_1, G_2, G_3 , dla których stopnie węzłów $d'_{i_1}, d'_{i_2}, \dots, d'_{i_{W_i}}$ ($i=1,2,3$) spełniają założenia twierdzenia 3.2, a ponadto spełniają także następujący warunek:

$$\sum_{j=1}^{W_i} d'_{i_j} + k_i = W_i S \quad ; \quad i=1,2,3 \tag{3.16}$$

Należy obecnie wyjaśnić, jak postępować przy wykorzystaniu metody rozbitcia sieci na podsieci. Przystępując do rozwiązania zadania optymalizacji założyć trzeba, że macierz kosztów określona jest dla grafu zupełnego /istnieją kanały pomiędzy wszystkimi węzłami sieci/. W zupełnie dowolny sposób dokonuje się rozbitcia sieci na podsieci przyjmując np., że do pierwszej podsieci należy pierwszych $\lceil W/r \rceil$ węzłów /gdzie r jest liczbą podsieci/, do drugiej podsieci kolejne $\lceil W/r \rceil$ węzłów itd. Tym samym macierz kosztów podzielona została na szereg podmacierzy, przy czym macierze leżące wokół głównej diagonalii odpowiadają macierzom kosztów w poszczególnych podsieciach, zaś pozostałe macierze przedstawiają koszty kanałów należących do zbiorów rozdzielających. Tak przygotowane dane traktujemy jako rozbitcie sieci na podsieci. Zadaniem algorytmu jest dokonywanie odpowiedniego wyboru kanałów uporządkowanych w podsieciach i zbiorach rozdzielających według rosnących kosztów. Ponieważ zgodnie z przytoczonymi twierdzeniami znane są liczby kanałów należących do poszczególnych podsieci i zbiorów rozdzielających, algorytm wybiera tylko niektóre kanały i szybciej

może zakończyć obliczenia.

Podany obecnie zostanie algorytm poszukiwania optymalnej struktury sieci z wykorzystaniem rozdzicia pierwotnej sieci na trzy podsieci.

Algorytm 3.2

1. Podstaw $t = 0$. Oblicz k_1, k_2, k_3 zgodnie ze wzorem (3.11) lub (3.12).
Za x_g podstaw dowolnie dużą liczbę, np.

$$x_g = \sum_{k=1}^{W(W-1)/2} x_k$$

2. Czy możliwe jest znalezienie nowych liczb k_1, k_2, k_3 ?

Tak: Idź do 3.

Nie: Idź do 4.

3. Znajdź liczby y_1, y_2, y_3 kanałów należących odpowiednio do poszczególnych zbiorów rozdzielających Bd_1, Bd_2, Bd_3 . Określ:

$$x_d = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{y_i} x'_{i,j} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{z_i} x''_{i,j}$$

gdzie:

y_1 - jest liczbą kanałów należących do Bd_1 ,

$x'_{i,j}$ - jest kosztem kanału o numerze j , który należy do zbioru rozdzielającego Bd_i ; wszystkie kanały są uporządkowane według rosnących kosztów,

z_1 - jest liczbą kanałów należących do podsieci G_1 ,

$x''_{i,j}$ - jest kosztem kanału o numerze j należącym do podsieci G_i ; wszystkie kanały są uporządkowane według rosnących kosztów.

4. Wybierz taki zbiór liczb k_1, k_2, k_3 , dla których x_d jest najmniejsze.
Czy $x_d < x_g$?

Nie: Idź do 7.

Tak: Znajdź dla każdej podsieci G_i wszystkie możliwe zbiory $d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_{W_1}}$ stopni węzłów.

5. Biorąc pod uwagę kolejne zbiory stopni węzłów w podsieciach wygeneruj najtańszą strukturę topologiczną, dla której spełnione są ograniczenia. Oznacz koszt tej struktury przez x .

6. Czy $x < x_g$?

Tak: $x_g = x$. Zapamiętaj znalezioną strukturę topologiczną. Idź do 4.

Nie: Idź do 4.

7. Drukuj otrzymaną strukturę. STOP.

Algorytm 3.2 wymaga komentarza. Jak już wyjaśniono, idea tego algorytmu opiera się na metodzie podziału i oszacowań, gdyż zawsze poszukuje się takiego rozbitcia sieci, dla którego oszacowanie dolne \mathcal{A}_d rozumiane jako koszt utworzenia sieci powstałej z wyboru najtańszych kanałów wchodzących w skład poszczególnych podsieci G_i , jak i zbiorów rozdzielających Bd_j , jest najmniejsze. Takie podejście pozwala szybciej zakończyć proces wyznaczania struktury dla sieci całkowitej. Istotną rolę w algorytmie 3.2 odgrywa krok 5, w którym poszukuje się najtańszej struktury topologicznej spełniającej ograniczenia (3.7) oraz (3.5). Poszukiwanie takiej struktury wymaga zastosowania pewnej modyfikacji algorytmu 3.1 polegającej między innymi na tym, że nie rozważamy uporządkowanych kanałów w całej sieci, ale tylko w poszczególnych podsieciach G_i i zbiorach rozdzielających Bd_j .

Dla ilustracji działania algorytmu 3.2 podany zostanie przykład.

Przykład 3.3

Dla danych z przykładu 3.2 znaleźć sieć, w której każdy przekrój składa się z co najmniej 3 kanałów.

Przyjmujemy, że sieć jest podzielona na trzy podsieci:

$$\begin{aligned} G_1 & - \text{z węzłami } \{n_1, n_2\} \\ G_2 & - \text{z węzłami } \{n_3, n_4\} \\ G_3 & - \text{z węzłami } \{n_5, n_6\} \end{aligned}$$

Z zależności (3.10) wynika, że najmniejsza liczba kanałów wychodzących z poszczególnych podsieci jest równa:

$$k_i^c = \max \{ (w_i \cdot S - w_i(w_i - 1)), S \} \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

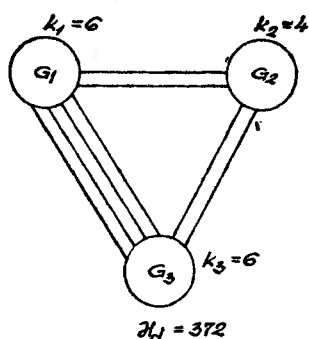
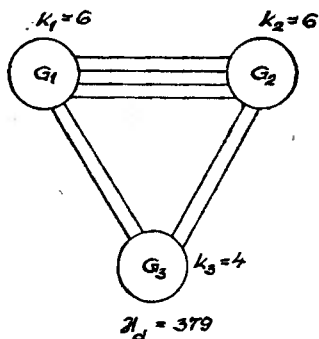
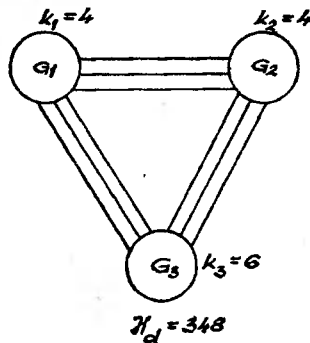
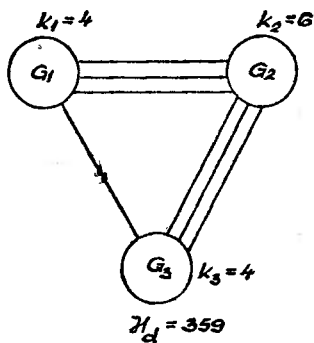
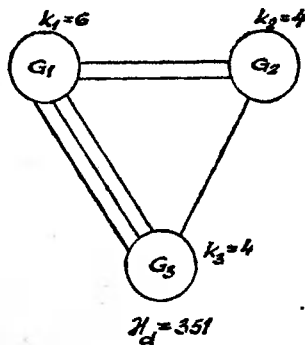
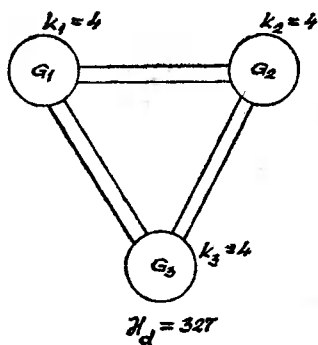
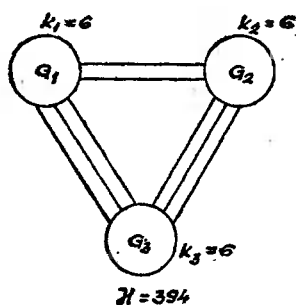
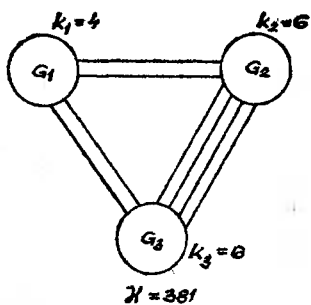
$$k_i^o = \max \{ (2 \cdot 3 - 2 \cdot 1), 3 \} = 4$$

Wszystkie możliwe sieci uzyskane z takiego rozbitcia wraz z kanałami należącymi do poszczególnych zbiorów Bd_j dla odpowiednich liczb k_1, k_2, k_3 przedstawione zostały na rys.3.5.

Przeszukując w kroku 5 algorytmu dla $k_1 = k_2 = k_3 = 4$, struktury sieci spełniające ograniczenia nałożone na liczbę kanałów należących do przekrojów, łatwo można znaleźć topologię sieci o koszcie $\mathcal{A} = 338$, której struktura dana jest grafem na rys.3.3. Ponieważ dla wszystkich pozostałych rozbić sieci koszt \mathcal{A}_d jest większy od $\mathcal{A} = 338$, otrzymana struktura jest szukanym rozwiązaniem.

Koniec przykładu 3.3.

Jak można było się spodziewać, metoda rozbitcia sieci zapewnia, że globalny czas obliczeń potrzebny do wyboru optymalnej struktury sieci jest



Rys. 3.5. Różne sieci uzyskane dla wszystkich liczb kanałów wychodzących z poszczególnych podsieci

najmniejszy. Ponadto, zaletą tej metody jest znaczne zmniejszenie wielkości drzewa rozwiązań wygenerowanego przez algorytm w stosunku do drzewa wygenerowanego przez algorytm 3.1. Dla przykładu, algorytm 3.2 wykorzystany do optymalizacji sieci złożonej z 10-ciu węzłów wymaga około 10 minut pracy na komputerze ODRA 1204 /bez sprawdzenia ograniczeń 3.5 lecz z uwzględnieniem ograniczeń 3.7 / generując około 1000 wierzchołków drzewa rozwiązań, podczas gdy drzewo wygenerowane przez algorytm 3.1 dla tego samego zadania zawiera powyżej 1500 wierzchołków powodując przekroczenie dostępnego obszaru pamięci komputera i uniemożliwiając tym samym rozwiązanie zadania. Ponieważ skrócenie czasu działania algorytmów jak również zmniejszenie żądanego obszaru pamięci może nastąpić poprzez lepsze określenie oszacowania górnego dla każdego wierzchołka drzewa rozwiązań, stąd też celowe staje się połączenie metod heurystycznych z metodami dokładnymi. Znalezione rozwiązanie przybliżone może służyć wtedy do zamykania tych wierzchołków drzewa rozwiązań generowanych przez algorytm, których oszacowanie dolne przekracza znalezione rozwiązanie przybliżone. Postępowanie takie możliwe jest dla obydwu algorytmów prezentowanych w tej części pracy.

WNIOSKI

W pracy na przykładzie optymalizacji sieci telekomunikacyjnych przedstawiono metodę rozwiązania problemu wyboru najtańszej struktury topologicznej sieci przy zachowaniu określonych ograniczeń. Zaproponowana metoda rozwiązania może być użyta wszędzie tam, gdzie zadanie sprowadzić można do modelu danego grafem nieorientowanym, którego gałęziom przyporządkowane są wagi /mające sens kosztu/, zaś funkcja celu określona jest w postaci sumy wag gałęzi grafu. Osiągnięto zatem postawiony na wstępie cel oraz udowodniono tezę naukową rozprawy.

Po sformułowaniu w pierwszej części pracy rozważanego problemu optymalizacyjnego, w dwóch następnych rozdziałach zajęto się przedstawieniem sposobu rozwiązania tego problemu. W rozdziale drugim omówiono metody analizy niezawodnościowej sieci, w rozdziale trzecim zaś metody syntezy, czyli wyboru odpowiednich struktur topologicznych. Istotnym wkładem autora jest przedstawiona w rozdziale drugim metoda analizy niezawodnościowej sieci z wykorzystaniem dekompozycji sieci na podsieci. Metoda ta może być stosowana zarówno do poszukiwania prawdopodobieństwa P_{st} , jak i P_c . Wyniki uzyskane w tej części pracy mogą być wykorzystane wszędzie tam, gdzie modelem rozważanego systemu jest graf probabilistyczny, wskaźnikiem niezawodnościowym zaś jest bądź prawdopodobieństwo istnienia połączenia między wybranymi węzłami grafu, bądź też prawdopodobieństwo spójności grafu. Dla przykładu zaprezentowane w tej części pracy metody określania parametrów niezawodnościowych mogą być użyte do analizy systemów nadmiarowych /np. cyfrowych systemów sterowania/.

Z kolei w rozdziale trzecim przedstawione zostały, skonstruowane przez autora, dokładne algorytmy syntezy sieci wykorzystujące metodę podziału i oszacowań. Warto tutaj zwrócić uwagę na zaproponowany w tej części pracy algorytm syntezy wykorzystujący rozbicie sieci na trzy podsieci. Jak wynika z przedstawionych rozważań oraz otrzymanych wyników, metoda rozbicia sieci wydaje się być najbardziej efektywną ze znanych dokładnych metod syntezy sieci.

Mimo uproszczeń przyjętych w trakcie rozwiązywania zadania optymalizacji /nie uwzględnienie kryterium średniego opóźnienia ważonego oraz ustalenie jednakowej przepustowości kanałów sieci/ przedstawiona metoda syntezy sieci może być łatwo rozszerzona na taki przypadek, w którym oprócz ograniczeń niezawodnościowych uwzględniać będziemy dodatkowo inne ograniczenia. Dla pogłębienia prowadzonych badań nad przedstawionym problemem należałoby w przyszłości określić takie wskaźniki niezawodnościowe, które w bardziej oczywisty sposób uwzględniają wpływ niezawodności kanałów na inne wskaźniki jakościowe określone dla rozważanych sieci.

LITERATURA

- [1] Abramson F., Kuo: Sieci telekomunikacyjne komputerów. WNT, Warszawa 1978
- [2] Aggarwal K.K., Gupta J.S., Misra K.B.: A new method for system reliability evaluation. Microelectronics and Reliability, vol.12 1973, ss.435 - 440
- [3] Aggarwal K.K., Gupta J.S., Misra K.B.: A simple method for reliability evaluation of a communication system. IEEE Trans. on Comm. May 1975, ss.563 - 566
- [4] Aggarwal K.K., Misra K.B., Gupta J.S.: A fast algorithm for reliability evaluation. IEEE Trans. on Rel. R-24 No 1 April 1975, ss.83 - 85
- [5] Agnew C.E.: On quadratic adaptive routing algorithms. Communications of the ACM vol.19, No 1 Jan.1978, ss.18 - 22
- [6] Aho A.V., Hopcroft J.E., Ullman J.D.: The design and analysis of computer algorithms. Addison-Wesley Publishing Company Reading, Massachusetts 1976
- [7] Aleksiejew O.G.: Primienienije metoda wietwiej i granic dla rieszenija minimaksnoj zadaczi o naznachenijich. Techniczeskaja Kibiernietika No 5 1978 ss.191 - 202
- [8] Brown D.B.: A computerized algorithm for determining the reliability of redundant configurations. IEEE Trans. on Rel. vol.R-20 August 1971, ss.121 - 124
- [9] Banerjee K., Rajamani K.: Parametric representation of probability in two dimensions a new approach in system reliability evaluation. IEEE Trans. on Rel. vol.21 1972 ss.55 - 60
- [10] Boorstyn R.R., Frank H.: Large scale network topological optimization. IEEE Trans. on Comm. vol.Can-25, No 1 Jan.1977, ss.29 - 47
- [11] Cantor D., Gerla M.: Optimal routing in a packet switched computer network. IEEE Trans. on Computers vol.C-23, No 10 Oct.1974, ss. 1062 - 1069
- [12] Casey R.G.: Design of tree networks for distributed data. Proceedings of National Computer Conference 1973, ss.251 - 257

- [13] Cavers J.K.: Cutset manipulations for communication network reliability estimation. IEEE Trans. on Comm. vol.Com-23, No 6 June 1975, ss.569 - 575
- [14] Chandy K.M., Lo T.: The capacitated minimum spanning tree. Networks vol.3, 1973, ss.173 - 181
- [15] Chandy K.M., Russel R.A.: The design of multipoint linkages in a teleprocessing tree network. IEEE Trans. on Computers vol.C-21 No 10 Oct. 1972 ss.1062 - 1066
- [16] Chen W.K.: Applied graph theory. North-Holland Publishing Company Amsterdam - London 1971 ch.4
- [17] Chou W.: Computer communication networks - the parts make up the whole. Proceedings of the National Computer Conference 1975, ss. 119 - 128
- [18] Coffman G.: Teoria szeregowania zadań. WNT, Warszawa 1980
- [19] Coni F., de Leo R.: An availability evaluation for computer communication networks. Microelectronics and Reliability vol.20 No 3 ss. 309 - 313
- [20] Deo M.: Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce. PWN, Warszawa 1980
- [21] Evans J.R.: Maximum flow in probabilistic graph the discrete case. Networks vol.6 ss.161 - 183
- [22] Frank H.: Providing reliable networks with unreliable components. Proceeding Third IEEE Data Comm. Symp. Vov. 13-15 1973 ss.161 - 164
- [23] Frank H.: Survivability analysis of command and control communication networks - Part I and II. IEEE Trans. on Comm. vol.Com-22 No 5 May 1974 ss.589 - 605
- [24] Frank H., Chou W.: Topological optimization of computer networks. Proceedings of the IEEE vol.60 No 11 Nov. 1972
- [25] Frank H., Frisch I.T.: Communication transmission and transportation networks. Addison-Wesley, Reading Massachusetts 1971
- [26] Frank H., Frisch I.T.: Analysis and design of survivable networks. IEEE Trans. on Comm. Techn. vol.Com-18 Oct. 1970 ss.501 - 519
- [27] Frank H., Frisch I.T., Chou W.: Topological considerations in the design of the ARPA computer network. Proceedings of S.J.C.C. 1970 ss.581 - 587
- [28] Frank H., Frisch I.T., van Slyke R., Chou W.: Optimal design of centralized computer networks. Networks vol.1, 1971 ss.43 - 57
- [29] Fratta L., Montanari U.: A Boolean algebra method for computing the terminal reliability in a communication network. IEEE Trans. on Circuit Theory vol.C.T-20 No 3 May 1973 ss.203 - 211

- [30] Fratta L., Montanari U.: Analytical techniques for computers networks. Analysis and design. In "Computer architectures and networks" eds. E. Gelenbe R. Mahl, North Holland Publishing Company
- [31] Fratta L., Montanari U.G.: Synthesis of available networks. IEEE Trans. on Rel. vol.R-25 No 2 June 1976, ss.81 - 86
- [32] Fratta L., Montanari U.G.: A recursive method based on case analysis for computing network terminal reliability. IEEE Trans. on Comm. vol.Com-26 No 8 August 1976 ss.1166 - 1177
- [33] Fratta L., Gerla M., Kleinrock L.: The flow deviation method: an approach to store-and-forward communication network design. Networks vol.3, 1973, ss.97 - 133
- [34] Fu Y.: Applications of topological methods to probabilistic communication networks. IEEE Trans. on Comm. Techn. vol.Com-14 No 3 Sept. 1965 ss.301 - 307
- [35] Garfinkel R.S., Nemhauser G.L.: Programowanie całkowitoliczbowe. PWN, Warszawa 1978
- [36] Gadasin W.A., Łakajew A.S.: Ocena nadzieźności retranslacyjnych sietiej metodom dekompozycji. Techniczeskaja Kibiernietika No 4, 1978 ss.100 - 105
- [37] Gadasin W.A., Łakajew A.S.: Rascziet charakteristik nadzieźności retranslacyjnych sietiej swiazii na osnowie metoda dekompozycji. Techniczeskaja Kibiernietika No 6, 1978 ss.132 - 139
- [38] Gadasin W.A.: Asimptotyczeskije charakteristiki swiazności planarnogo słuczajnego grafa w widie reszетки. Techniczeskaja Kibiernietika No 4, 1979, ss.140 - 149
- [39] Gens G.W., Lewmier J.W.: Diskrietnyje optimizacijnyje zadaczi i efektiwnyje pribliźonnyje algoritmy. Techniczeskaja Kibiernietika No 6, 1979 ss.9 - 20
- [40] Gerla M.: New line tariffs and their impact on network design. Proceedings of National Computer Conference 1974 ss.577 - 582
- [41] Gerla M.: Approximations and bounds for the topological design of distributed computer networks. Raport Network Analysis Corporation
- [42] Gerla M.: Deterministic and adaptive routing policies in packet-switched computer networks. Proceedings Third IEEE Data Comm. Symp. Nov. 13 - 15, 1973 ss.23 - 28
- [43] Gerla M., Kleinrock L.: On the topological design of distributed computer networks. IEEE Trans. on Comm. vol.Com-25 No 1 Jan. 1977 ss.48 - 60
- [44] Gillet B.E.: Introduction to operations research. Mc Graw-Hill Book Company 1976 ch.4

- [45] Häsler E.: A fast recursive algorithm to calculate the reliability of a communication network. IEEE Trans. on Comm. vol.Com-20 No 3 June 1972 ss.637 - 640
- [46] Häsler E.: Comments on "A fast recursive algorithm to calculate reliability of a communication network". IEEE Trans. on Comm. May 1975 ss.563
- [47] Häsler E., Mc Auliffe G.K., Wilkov R.S.: Optimizing the reliability in centralized computer networks. IEEE Trans. on Comm. vol. Com-20 June 1972 ss.640 - 644
- [48] Häsler E., Mc Auliffe G.K., Wilkov R.S.: Exact calculation of computer network reliability. Networks vol.4, 1974, ss.95 - 112
- [49] Häsler E., Mc Auliffe G.K., Wilkov R.S.: Exact calculation of computer network reliability. Proceedings of F.J.C.C. 1972 ss.49 - 54
- [50] Hartmanis J., Stearns R.E.: Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice-Hall Englewood Cliffs N.J. 1966
- [51] Jensen P.A., Bellmore M.: An algorithm to determine the reliability of a complex system. IEEE Trans. on Rel. vol.R-18, Nov. 1969, ss. 169 - 174
- [52] Kahn R.: Resource-sharing computer communications networks. Proceedings of the IEEE vol.60, No 11, Nov. 1972, ss.1397 - 1407
- [53] Kershenbaum A., Chou W.: A unified algorithm for designing multiplex teleprocessing networks. IEEE Trans. on Comm. vol.Com-22, No 11, Nov. 1974, ss.1762 - 1772
- [54] Kleinrock L.: Communication nets: stochastic flow and delay. McGraw-Hill New York 1964
- [55] Kleinrock L.: Queuing systems. Vol.I Theory. Wiley Interscience New York 1975
- [56] Kleinrock L.: Analytic and simulation methods in computer network design. Proceedings of S.J.C.C. 1970 ss.568 - 579
- [57] Klimow G.P.: Procesy obsługi masowej. WNT, Warszawa 1979
- [58] Kopociński B.: Zarys teorii odnowy i niezawodności. PWN, Warszawa 1973
- [59] Kozłowska J.: Wybrane problemy optymalizacji niezawodnościowej sieci telekomunikacyjnych. W "Metodyka projektowania sieci telekomunikacyjnych". WKŁ, Warszawa 1977, s.91-106
- [60] Kozłowska J.: Niezawodność sieci informacyjnej. Opracowanie w ramach problemu węzłowego 06.11. Politechnika Gdańska 1977
- [61] Kozłowska J., Zabłudowski A.: Algorytmy projektowania struktur sieci przy uwzględnieniu jej niezawodności. Raport z pracy zleconej w ramach problemu RI-14 Gdańsk, Bydgoszcz 1980

- [62] Krajzner Ł.P., Tozik W.T.: Przymienienie algorytmów kubicznych kompleksów k analizie niezawodności sieci. Kibernetika No 3 1979 ss.58 - 65
- [63] Lawler E.L., Wood D.E.: Branch and bound methods - a survey. Operations Research vol.11 1966 ss.699 - 717
- [64] Leggett J.D., Bedrosian S.D.: Synthesis of reliable networks. IEEE Trans. on C.T. Aug. 1969 ss.384 - 385
- [65] Lin P.N., Leon B.J., Huang T.C.: A new algorithm for symbolic system reliability analysis. IEEE Trans. on Rel. vol.R-25 No 1 April 1976 ss.2 - 14
- [66] Lin S: Computer solution of the traveling salesman problem. B.S.T.J. vol.14 1965 ss.2245 - 2269
- [67] Łomonosow M.W., Poleskij W.P.: Niżniaja ocena niezawodności sieci. Problemy pieriadaczi informacji vol.VIII 1972 No 2 ss.47 - 53
- [68] Łomonosow M.W., Poleskij W.P.: O maksimumie wierności swiazności. Problemy pieriadaczi informacji vol.VIII 1972 No44 ss.68 - 73
- [69] Majewski W.: Układy logiczne. WNT, Warszawa 1974
- [70] Margulis G.A.: Wierojasznyje charakteristiki grafow z bolszoj swiaznostju. Problemy pieriadaczi informacji vol.X No 2 1974 ss. 101 - 108
- [71] Maruyama K.: Designing reliable packet-switched communication networks. Proceedings of Internat. Council for Computer Comm. - Evaluation in Comp. Communications - Kyoto Japan 1978 ss.493 - 498
- [72] de Mercado J.: Minimum cost - reliable computer communication networks. Proceedings of F.J.C.C. 1972 ss.553 - 559
- [73] de Mercado J., Spyrtatos N., Bowen B.A.: A methods for calculation of network reliability. IEEE Trans. on Rel. vol.R-25 No 2 June 1976 ss.71 - 76
- [74] Merlin P.M., Segall A.: A failsafe distributed routing protocol. IEEE Trans. on Comm. vol.Com-27 No 9 Sept. 1979 ss.1280 - 1287
- [75] Misra K.B.: An algorithm for the reliability evaluation of redundant networks. IEEE Trans. on Rel. vol.R-14 Nov. 1970 ss.146 - 151
- [76] Misra K.B., Rao T.S.M.: Reliability analysis of redundant networks using flow graphs. IEEE Trans. on Rel. vol.R-19 Feb. 1970 ss.19 - 24
- [77] Moore E., Shannon C.: Reliable circuits using less reliable relays. Part I. Journal Franklin Institute vol.262 Sept. 1956 ss.191 - 208
- [78] Nelson A.C. Jr., Batts I.R., Beadles R.L.: A computer program for approximating system reliability. IEEE Trans. on Rel. vol.R-19 May 1970 ss.61 - 65

- [79] Papoulis A.: *Prawdopodobieństwo zmienne losowe i procesy stochastyczne*. WNT, Warszawa 1972
- [80] Piersein O.J.: *Optimalnoje projektowanije drevovidnych komutacyjnych sietiej*. *Techniczeskaja Kibernetika* No 2, 1978
- [81] Mc Quillan J.M.: *Design considerations for routing algorithm in computer networks*. *Proceedings Seventh Hawaii Int. Conf. Systems Science*. Jan. 8 - 10 1974 ss.22 - 24
- [82] Mc Quillan J.M., Falk G., Richer I.: *A review the development and performance of the ARPANET routing algorithm*. *IEEE Trans. on Comm.* vol.Com-26 No 12 Dec. 1978 ss.1802 - 1811
- [83] Mc Quillan J.M., Richer I., Rosen E.C.: *The new routing algorithm for the ARPANET*. *IEEE Trans. on Comm.* vol.Com-28 No 5 May 1980 ss. 711 - 719
- [84] Rosenthal A., Frisque D.: *Transformations for simplifying network reliability calculations*. *Networks* vol.7 1977 ss.97 - 111
- [85] Schwartz M.: *Computer - Communication Network. Design and Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. 1977
- [86] Schwartz M., Cheung C.K.: *The gradient projection algorithm for multiple routing in message - switched networks*. *IEEE Trans. on Comm.* April 1976 ss.449 - 456
- [87] Seidler J.: *Analiza i synteza sieci łączności dla systemów teleinformatycznych*. PWN, Warszawa 1979
- [88] Seidler J., Badach A., Molisz W.: *Metody rozwiązywania zadań optymalizacji*. WNT, Warszawa 1980
- [89] Segall A., Merlin P.M., Gallager R.G.: *A recoverable protocol for loop - free distributed routing*. *National Conference on Communications Toronto, Canada, 1978*
- [90] Shogan A.W.: *A decomposition algorithm for network reliability analysis*. *Networks* vol.8, 1978, ss.231 - 251
- [91] van Slyke R., Frank H.: *Network reliability analysis. Part I*. *Networks* vol.1 1971 ss.279 - 290
- [92] van Slyke R., Chou W., Frank H.: *Avoiding simulation in simulating computer communication networks*. *Proceedings of National Computer Conference 1973* ss.165 - 169
- [93] Spyrtos N., Bowen A.: *A fast algorithm for reliability calculations in sparse networks*. *Networks* vol.7, 1977 ss.227 - 246
- [94] Steiglitz K., Weiner P., Kleitman D.J.: *The design of minimum - cost survivable networks*. *IEEE Trans. on C.T.* vol.CT-16 Nov. 1969 ss. 455 - 466

- [95] Steiglitz K.: Computational complexity theory and communication network problems. Presented at the NATO Advances Study Institute "New concepts in multi-user communications" Norwich G.B. 4-16 August 1980
- [96] Sysło M.M.: O złożoności obliczeniowej problemów kombinatorycznych. Raport N-19 Instytutu Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego - 1977
- [97] Tainiter M.: A new deterministic network reliability measure. Networks vol.6 1976 ss.191 - 204
- [98] Wilkov R.S.: Analysis and design of reliable computer networks. IEEE Trans. on Comm. vol.Com-20 No 3 June 1972 ss.660 - 678
- [99] Wilkov R.S.: Design of computer networks on a new reliability measure. Proceedings Int. Symp. on Computer Communication Networks and Teletraffic ss.371 - 384
- [100] Wing O., Demetriou P.: Analysis of probabilistic networks. IEEE Trans. on Comm. Techn. vol.Com-12 Sept. 1964 ss.38 - 40
- [101] Zabłudowski A.: Analiza i synteza przepustowości kanałów w sieci o losowej strukturze. A.A.i T. vol.XXII No 1-2 1977 ss.85 - 99
- [102] Zabłudowski A.: A method for evaluating network reliability. Biulletin de L'Academie Polonaise des Sciences vol.XXVII No 7 ss. 647 - 655
- [103] Zabłudowski A.: An algorithm for evaluating the probability of network connectivity. Biulletin de L'Academie Polonaise des Sciences vol.XXVII No 3 1979 ss.307 - 317
- [104] Zabłudowski A.: Metoda poszukiwania optymalnej struktury topologicznej sieci telekomunikacyjnej przy uwzględnieniu jej niezawodności. A.A. iT. vol.XXVI No 1 1981 ss.133 - 144
- [105] Zabłudowski A.: Optimization of decentralized computer networks using decomposition. Biulletin de L'Academie Polonaise des Sciences vol.XXIX No 1 1981 ss.105 - 114
- [106] Zabłudowski A.: A method for evaluating the probability of network connectivity. Przyjęto do druku w A.A. iT.
- [107] Zabłudowski A.: Metody optymalizacji sieci zdecentralizowanych przy założeniu kryterium kosztu z uwzględnieniem ograniczeń niezawodnościowych. Raport z pracy zleconej w ramach problemu resortowego RI-14, Bydgoszcz 1979
- [108] Zabłudowski A.: Optymalizacja topologiczna sieci teteleinformacyjnej z punktu widzenia jej niezawodności. III Krajowe Sympozjum Nauk Radiowych, Wrocław 1981

- [109] Zabłudowski A.: Miary niezawodnościowe określone dla sieci komputerowych przy uwzględnieniu uszkodzeń kanałów. Konferencja RELCOMEX, Zamek Książ 1981
- [110] Żokin J.N.: Ob odnom algoritmie topologiczeskowo projektowanijsia sietiej tieleobrabotki. Awtomatika i telemekhanika No 5 1978 ss. 170 - 172

ALGORITHMS OF OPTIMIZATION OF TOPOLOGICAL NETWORKS STRUCTURE

Summary

A method of searching for the decentralized network topology is given in this paper. The global cost of the network treated as the sum of the network channels cost is taken as an essential criterion for the network. There are taken as reliability measures the probability of existence of at least one path between two fixed nodes in the network and the probability of the network connectivity.

The paper consists of three parts. At the beginning of the first part of the paper the primary optimizing problem is formulated, next reliability measures and the essential optimizing problem are defined.

In the second part of the paper there are given methods for the evaluation of reliability measures. Particularly, the method using decomposition is described in detail. This method requires the shortest computation time.

In the final part of the paper algorithms of searching for the network topology are given. The algorithms suggested in the paper are based on the branch and bound principle.

All the considerations are illustrated by examples

АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

Резюме

Работа содержит возможность решения проблемы оптимизации топологических структур телекоммуникационных сетей. Основным определяющим критерием для сети является стоимость постройки, как сумма стоимости постройки отдельных каналов, но условием этого должна быть безотказность сети. Как мера надёжности принята, во-первых: вероятность связи, во-вторых: вероятность существования соединения между избранными узлами сети.

Работа состоит из трех частей.

В начале первой части была сформулирована первичная оптимизационная проблема, в которой были приняты во внимание другие ограничивающие факторы, кроме безотказности. После определения мер безотказности и некоторых упрощений была определена основная оптимизационная проблема.

Вторая часть работы посвящена более тщательному рассмотрению методов поиска мер безотказности сети. Особое внимание обращено на такие методы, которые дают самое короткое время подсчета.

В третьей части работы рассмотрены методы генерации топологических структур сетей, для которых выполнены заданные условия. Здесь даны алгоритмы основанные на методе оценок и ребер, служащие для решения представленной задачи.

Все рассмотренные вопросы дополнены рядом примеров.





T 11608