



UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNO-PRZYRODNICZY  
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH  
W BYDGOSZCZY

## **ROZPRAWY NR 145**

Leszek Knopik

### **METODA WYBORU EFEKTYWNEJ STRATEGII EKSPLOATACJI OBIEKTÓW TECHNICZNYCH**

BYDGOSZCZ – 2010

REDAKTOR NACZELNY  
prof. dr hab. inż. Janusz Prusiński

REDAKTOR DZIAŁOWY  
dr hab. inż. Henryk Tylicki, prof. nadzw. UTP

OPINIODAWCY  
prof. dr hab. inż. Leszek Powierża  
dr hab. inż. Józef Żurek, prof. ITWL

OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE  
mgr Michał Górecki, mgr Patrycja Fereni-Morzyńska

© Copyright  
Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego  
Bydgoszcz 2010

ISSN 0209-0597

Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego  
ul. Ks. A. Kordeckiego 20, 85-225 Bydgoszcz, tel. 52 3749482, 3749426  
e-mail: [wydawucz@utp.edu.pl](mailto:wydawucz@utp.edu.pl) <http://www.wu.utp.edu.pl>

---

Wyd. I. Nakład 120 egz. Ark. aut. 7.0. Ark. druk. 7,6. Zamówienie nr 7/2010  
Oddano do druku i druk ukończono w listopadzie 2010 r.  
Uczelniany Zakład Małej Poligrafii UTP Bydgoszcz, ul. Ks. A. Kordeckiego 20

## Spis treści

Wykaz oznaczeń.....	5
1. Wprowadzenie.....	6
1.1. Geneza problemu.....	6
1.2. Cel pracy.....	9
2. Modele czasów życia obiektów technicznych.....	13
2.1. Rozkład gamma.....	15
2.2. Rozkład Weibulla.....	16
2.3. Uogólniony rozkład gamma.....	16
2.4. Potęgowy rozkład Weibulla i inne uogólnienia rozkładu Weibulla.....	17
2.5. Odwrócony rozkład Weibulla.....	18
2.6. Odwrócony rozkład normalny.....	18
2.7. Rozkład Birnbauma-Saundersa.....	21
2.8. Mieszaniny rozkładów czasów do uszkodzenia.....	23
2.9. Klasy funkcji niezawodnościowych.....	24
3. Modele wymian profilaktycznych.....	26
3.1. Modele odnowy prewencyjnej.....	26
3.2. Model obsługi profilaktycznych Harriagi.....	27
3.2.1. Przykłady numeryczne.....	31
3.3. Optymalizacja wymian profilaktycznych oparta na zastosowaniu procesów semi-markowskich.....	37
3.3.1. Przykłady numeryczne.....	41
3.4. Model wymian profilaktycznych z gwarancją.....	45
3.4.1. Model wymian bez gwarancji.....	45
3.4.2. Model wymian z gwarancją.....	46
3.4.3. Optymalne strategie.....	47
3.4.4. Porównanie wymian elementów z gwarancją i bez gwarancji.....	50
3.4.5. Przykłady numeryczne.....	50
4. Model wymiany prewencyjnej.....	52
4.1. Wstęp.....	52
4.2. Oznaczenia i założenia.....	52
4.3. Funkcja kryterialna w przypadku ogólnym.....	54
4.4. Warunki istnienia maksimum funkcji kryterialnej.....	57
4.5. Przypadek szczególny funkcji kryterialnej.....	60
4.6. Porównanie przypadków ogólnego i szczególnego.....	61
4.7. Przykłady numeryczne.....	62
5. Model n-stanowy.....	71
5.1. Oznaczenia i założenia.....	71
5.2. Własności funkcji kryterialnej.....	72
5.3. Przypadek szczególny.....	75
5.4. Przykłady numeryczne rzeczywistych systemów eksploatacji.....	77
6. Model wymiany prewencyjnej dla obiektów technicznych z gwarancją.....	88
6.1. Sformułowanie problemu i podstawowe oznaczenia.....	88
6.2. Model wymian dla obiektu z gwarancją.....	89

6.3. Współczynnik gotowości .....	94
6.4. Przykłady numeryczne .....	97
7. Wybrane własności modeli czasów do uszkodzenia dla obiektów technicznych ...	103
7.1. Klasa MTFR.....	103
7.2. Tworzenie mieszanin rozkładu prawdopodobieństwa z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń .....	104
7.2.1. Przypadki szczególne .....	106
7.2.2. Przykłady numeryczne .....	107
7.3. Mieszanina rozkładu wykładniczego z rozkładem Rayleigha.....	109
7.4. Kryterium przynależności do klasy MTFR .....	110
7.5. Uwagi dotyczące średniego czasu między uszkodzeniami.....	111
8. Podsumowanie.....	114
Literatura .....	115
Streszczenia.....	121

### Wykaz oznaczeń

$\lambda(t)$	– funkcja intensywności uszkodzeń dla zmiennej losowej $T$ ,
$\Lambda(t)$	– skumulowana funkcja intensywności uszkodzeń,
BFR	– klasa rozkładów z „wannową” funkcją intensywności uszkodzeń (Bathtub Failure Rate),
DFR	– klasa rozkładów prawdopodobieństwa z malejącą (nierosnącą) funkcją intensywności uszkodzeń,
DT	– odchylenie standardowe zmiennej losowej $T$ ,
$d(x)$	– zysk przypadający na jednostkę czasu w modelu Grabskiego,
$D^2T$	– wariancja zmiennej losowej $T$ ,
ET	– wartość średnia zmiennej losowej $T$ ,
$ET(x)$	– wartość średnia zmiennej losowej $\min\{T, x\}$ ,
$f(t)$	– gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $T$ ,
$F(t)$	– dystrybuanta zmiennej losowej $T$ ,
$g(x)$	– zysk na jednostkę czasu w uogólnionym modelu Grabskiego,
$g(x,w)$	– zysk na jednostkę czasu dla modelu wymian profilaktycznych z gwarancją producenta,
IFR	– klasa rozkładów prawdopodobieństwa z rosnącą (niemalejącą) funkcją intensywności uszkodzeń $\lambda(t)$ ,
IFRA	– klasa rozkładów prawdopodobieństwa taka, że $-\ln R(t)/t$ rośnie dla $t$ należącego do dziedziny funkcji,
$k_1(x), k_2(x)$	– zysk przypadający na jednostkę czasu w model Yecha,
MRL(x)	– średni resztowy czas życia,
MTBF	– średni czas między uszkodzeniami (Mean Time Between Failure),
MTRF	– klasa rozkładów prawdopodobieństwa czasów do uszkodzenia (Mean Time to Failure or Repair),
P	– macierz kwadratowa $P = [p_{ij}]$ , $i, j = 1, 2, \dots, n$ prawdopodobieństw przejścia dla włożonego łańcucha Markowa,
$R(t)$	– funkcja niezawodności, $R(t) = 1 - F(t)$ ,
$T$	– zmienna losowa oznaczająca czas do uszkodzenia (czas życia elementu lub obiektu technicznego),
$T_i$	– losowy czas przebywania obiektu technicznego w $i$ -tym stanie procesu eksploatacji,
UBFR	– klasa rozkładów z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń (Upside-down Bathtub Failure Rate),
$z$	– zysk przypadający na jednostkę czasu, gdy obiekt techniczny pracuje poprawnie,
$z_i$	– zysk (koszt) przypadający na jednostkę czasu wynikający z przebywania obiektu technicznego w stanie $S_i$ ,
$z(x)$	– zysk przypadający na jednostkę czasu w modelu Harriaga.

# 1. Wprowadzenie

## 1.1. Geneza problemu

Współczesne maszyny pracujące w przemyśle, budownictwie i transporcie są bardzo wydajne, a jednocześnie skomplikowane i drogie. Awaria i postój z tym związany powodują duże straty ekonomiczne. W ostatnich kilkudziesięciu latach rozwinęła się teoria i praktyka obsługi profilaktycznych obiektów technicznych. Przez obsługę profilaktyczną należy rozumieć wymianę, naprawę lub diagnostykę obiektu technicznego. Obsługi profilaktyczne mają za zadanie poprawę niezawodności obiektów działających w systemie eksploatacji.

Ograniczenie się do przeprowadzania obsługi tylko po uszkodzeniu elementu (obiektu technicznego) prowadzi najczęściej do dużych kosztów ekonomicznych. W związku z tym opracowuje się różne strategie prowadzenia obsługi profilaktycznych polegających na tym, że wykonywane są one przed i po uszkodzeniu obiektu. Działalność taka musi mieć jednak uzasadnienie ekonomiczne. Obsługę w przypadku, gdy element (obiekt techniczny) jest sprawny nazwano w pracy prewencyjną, zaś w przypadku awarii – obsługą korekcyjną. Momenty czasowe przeprowadzenia obsługi prewencyjnych zależą od wielu czynników – przede wszystkim od struktury niezawodnościowej obiektu zawierającego jako składnik elementy, które planuje się poddawać obsłudze profilaktycznym oraz od relacji kosztów związanych z uszkodzeniami do kosztów obsługi profilaktycznej. Sposób przeprowadzenia obsługi prewencyjnych jest uwarunkowany od przyjętej strategii prowadzenia obsługi prewencyjnych. W tym kontekście szczególnie ważne jest wykonywanie obsługi prewencyjnych tak, aby w jak najlepszy sposób osiągnąć założony cel.

W pracy tej wprowadza się pojęcie funkcji kryterialnej wyrażającej zysk osiągany przez obiekt techniczny przypadający na jednostkę czasu. W starszych pracach dotyczących budowania optymalnych strategii pojawiają się tylko określenia: koszt obsługi prewencyjnej i koszt usunięcia awarii (koszt naprawy). Budowane w rozprawie modele obsługi uwzględniają zysk wynikający z poprawnej pracy obiektu technicznego. Pod uwagę bierze się także inne koszty związane z utrzymaniem systemu eksploatacji takie, jak na przykład koszty pogotowia technicznego. Jako strategie optymalne w tej pracy przyjmuje się takie, które zapewniają maksymalny zysk przypadający na jednostkę czasu. Możliwość wyznaczenia strategii optymalnej, dającej maksymalny zysk zależy od określenia funkcji kryterialnej. W tym celu buduje się funkcję kryterialną dla nieskończonego horyzontu czasowego, co w praktyce oznacza, że można ją stosować dla dostatecznie długiego okresu użytkowania obiektu technicznego. Proces wyznaczenia optymalnych obsługi prewencyjnych jest złożony z budowy modelu dla optymalnej strategii obsługi prewencyjnych, który powinien zawierać wszystkie istotne wskaźniki eksploatacyjne rozważanego obiektu. Na dalszym etapie wykonuje się optymalizację funkcji kryterialnej i na tej podstawie wyznacza się optymalną strategię. Podstawową strategią analizowaną w tej pracy jest strategia wyznaczenia obsługi prewencyjnych według wieku elementu (obiektu technicznego).

W literaturze dotyczącej zagadnień wyznaczenia optymalnych obsługi prewencyjnych stosuje się różne sposoby opisu modelu działania systemu eksploatacji. Najczę-

ściej zakłada się, że obiekt ma skończoną liczbę stanów, przy czym jeden z nich wyraża stan całkowitej niezdatności obiektu technicznego, a drugi stan całkowitej sprawności obiektu. Najczęściej w przypadku analizowania zdadności zakłada się, że obiekt ma tylko dwa stany zdadności, które są podzbiorem wszystkich stanów systemu eksploatacji. W systemie eksploatacji przejście z jednego stanu do innego odbywa się losowo. Losowe są także czasy przebywania w stanach. Proces zmian stanów systemu eksploatacji może być sterowany przez podejmowanie różnych decyzji dotyczących procesu eksploatacji. Dotyczyć to może wykonywania napraw częściowych lub całkowitych wymian elementów. Obiekty techniczne złożone są z wielu elementów, przy czym stosowanie obsługi profilaktycznych może najczęściej dotyczyć tylko pewnego podzbioru elementów.

Stosowanie racjonalnych (optymalnych) obsług prewencyjnych wymaga znajomości wielu cech charakteryzujących dany obiekt, takich jak: rozkłady czasów poprawnej pracy elementów obiektu, czasy odnów obiektu, czasy trwania awarii, koszty awarii i obsług profilaktycznych. Wyznaczanie tych wielkości wymusza zbieranie danych statystycznych i korzystanie z metod statystyki matematycznej.

Analizując literaturę dotyczącą obsług profilaktycznych można stwierdzić, że problemy z tym związane są przez cały czas przedmiotem różnych prac naukowych. Wzrastające koszty wytwarzania i rosnąca złożoność współczesnych maszyn (urządzeń technicznych) są naturalnym stymulatorem do dalszych badań w tej dziedzinie nauki.

Jedną z ważnych charakterystyk niezawodnościowych prostego obiektu technicznego jest jego funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$ , która ma prostą interpretację probabilistyczną. Dla każdego  $t$  wartość  $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$  jest prawdopodobieństwem tego, że obiekt uszkodzi się w przedziale  $(t, t + \Delta t)$  pod warunkiem, że do chwili  $t$  obiekt ten będzie pracował poprawnie. Jak wiadomo z praktyki i literatury przebieg funkcji  $\lambda(t)$  może być różny i jest zależny od wielu zjawisk fizycznych zachodzących w obiekcie i jego otoczeniu. Malejąca funkcja intensywności uszkodzeń oznacza, że w obiekcie powstają procesy adaptacyjne, stała intensywności uszkodzeń oznacza stabilizację procesów fizycznych (zanik adaptacji), rosnąca funkcja  $\lambda(t)$  świadczy o tym, że w obiekcie zachodzą procesy starzenia (zużycia, degradacji). Większość prac dotycząca profilaktyki obiektów technicznych obejmuje przypadek, gdy funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  jest rosnąca [64].

W rozdziale 2 wprowadza się podstawowe pojęcia z teorii niezawodności. Omówiono klasyczne rozkłady prawdopodobieństwa wykorzystywane w rozprawie. Dokonano przeglądu różnych uogólnień klasycznych rozkładów na rozkłady z niemonotonicznymi funkcjami intensywności uszkodzeń. W szczególności analizowano wszystkie dostępne i przydatne w planowaniu obsług profilaktycznych uogólnienia rozkładów: Weibulla, gamma, normalnego odwróconego i Birnbauma-Saundersa. Szczególną uwagę zwrócono na modelowanie procesu uszkodzeń z wannową i jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. W końcowej części tego rozdziału przeprowadzono przegląd generowania nowych rozkładów prawdopodobieństwa za pomocą skończonych mieszanin. Badano literaturę pod kątem tworzenia mieszanin znanych rozkładów, dających rozkłady z wannową i jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Podano również podstawowe wyniki dotyczące klas rozkładów niezawodnościowych.

W rozdziale 3 analizuje się trzy różne modele strategii obsług prewencyjnych. Pierwszy z nich wprowadzony został w pracy [55]. Jego budowę oparto na założeniach:

- a) czasy inspekcji i czasy napraw są pomijalne,
- b) wszystkie uszkodzenia przynoszą takie same straty,
- c) inspekcje są wolne od błędów,

- d) uszkodzenia obiektu zatrzymują pracę systemu,
- e) zmienne losowe wyrażające czas do uszkodzenia przed i po naprawie mają taki sam rozkład.

Dodatkowo zakłada się, że w pierwszym cyklu obiekt techniczny jest sprawny. W pracy [55] dla obiektu technicznego rozważa się tylko dwa przypadki:

- obiekt techniczny przepracował bezawaryjnie  $x$  jednostek czasowych i w tym momencie następuje inspekcja,
- uszkodzenie nastąpiło przed upływem  $x$  jednostek czasowych.

Model opisany w pracy [55] jest względnie prosty, ponieważ przyjęto założenia a, b i c. W pracy [55] podano jeden przykład liczbowy i wyniki obliczeń numerycznych ujęto w tabeli. Do modelu Harriagi dodano trzy przykłady numeryczne. W tym celu opracowano metodę numeryczną obliczania wartości funkcji  $ET(x)$  określonej wzorem:

$$ET(x) = \int_0^x R(t) dt$$

gdzie:

- $R(t)$  – jest funkcją niezawodności odpowiadającą zmiennej losowej  $T$  oznaczającej czas do uszkodzenia,
- $ET(x)$  – jest wartością średnią zmiennej losowej  $\min\{T, x\}$ .

W przykładzie 3.1 założono, że zmienna losowa  $T$  ma rozkład gamma z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń, w przykładzie 3.2 przyjmuje się rozkład Weibulla z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń. W przykładzie 3.3 analizuje się czas do uszkodzenia  $T$  z niemonotoniczną funkcją intensywności uszkodzeń. W tym przypadku zmienna losowa  $T$  ma rozkład prawdopodobieństwa będący mieszaniną rozkładu wykładniczego i rozkładu z liniową i rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń. Taka mieszanina przy odpowiednim doborze parametrów posiada jednomodalną funkcję  $\lambda(t)$  intensywności uszkodzeń. Model Harriagi nie obejmuje takich rozkładów jako czasu do uszkodzenia. Obliczenia numeryczne przeprowadzone w podrozdziale 3.2 pokazują, że istnieje moment czasowy, w którym zysk na jednostkę czasu jest maksymalny.

W dalszej części rozdziału 3 analizuje się model Grabskiego [45], w którym proces eksploatacji opisuje 3-stanowy proces semi-markowski. Funkcją kryterialną jest zysk na jednostkę czasu i współczynnik gotowości. Obiekt techniczny może znajdować się w jednym z trzech stanów systemu:

- $S_1$  – użytkowanie obiektu technicznego (poprawna praca),
- $S_2$  – obsługa wymuszona (naprawa),
- $S_3$  – obsługa profilaktyczna.

Czasy przebywania obiektu technicznego w stanach są zmiennymi losowymi  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_3$  o skończonych i dodatnich wartościach średnich. Przyjmuje się, że dochód na jednostkę czasu jest równy  $a$ , zaś koszty naprawy i obsługi profilaktycznej są równe  $b$  i  $c$ .

W modelu Grabskiego przyjmuje się założenie, że obiekt techniczny po naprawie i obsłudze profilaktycznej jest w pełni sprawny. Funkcja kryterialna wyrażająca zysk na jednostkę czasu zależy od:

- rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $T_1$ ,
- wartości średnich  $ET_2$  i  $ET_3$ ,
- zysku jednostkowego  $a$  i kosztów jednostkowych  $b$  i  $c$ .



W pracy rozważa się tylko przypadek, gdy zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$ . Do analizy modelu Grabskiego dodano trzy przykłady numeryczne przyjmując, podobnie jak w modelu Harriagi, że zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład gamma, Weibulla i rozkład będący mieszaniną rozkładu wykładniczego i rozkładu z liniową i rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń.

Jako trzeci i ostatni omówiony został model Yecha [109]. W pracy [109] rozważa się model wymian (obsług) profilaktycznych elementów (obiektów technicznych) posiadających gwarancję producenta. Podstawowym założeniem w tym modelu jest: produkt (obiekt techniczny) uszkodzony w okresie trwania gwarancji zostaje wymieniony na nowy z pełną gwarancją. Model scharakteryzowany jest za pomocą trzech parametrów:

- $c_d$  – kosztu awarii,
- $c_p$  – kosztu zakupu,
- $w$  – długości przedziału gwarancji.

Podobnie, jak w modelu Harriagi zakłada się, że czasy napraw i wymiany są pomijane. Czas do uszkodzenia  $T_1$  jest zmienną losową o rosnącej funkcji intensywności uszkodzeń. Dla tego modelu opracowano trzy własne przykłady numeryczne dla takich samych rozkładów jak w przypadku modelu Harriagi i Grabskiego.

## 1.2. Cel pracy

Celem pracy jest opracowanie modelu wymian profilaktycznych dla systemów eksploatacji uwzględniającego następujące założenia:

- czasy przebywania obiektu technicznego we wszystkich analizowanych stanach procesu eksploatacji są zmiennymi losowymi,
- odnowa (naprawa) obiektu technicznego i wymiana profilaktyczna nie zawsze prowadzą do pełnej zdatności obiektu technicznego,
- czas  $T$  do uszkodzenia obiektu technicznego może mieć rozkład z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń.

Przyjęto następującą tezę:

**Możliwe jest zbudowanie efektywnej strategii eksploatacji obiektów technicznych opartej na modelach zaproponowanych w pracy.**

Podjęto próbę rozszerzenia zbioru analizowanych funkcji intensywności uszkodzeń na funkcje z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Jeśli obiekt ma stałą lub malejącą funkcję intensywności uszkodzeń, to wymiana przed uszkodzeniem nie zmniejsza prawdopodobieństwa uszkodzenia w następnej chwili, mimo że obiekt stary zastąpiono nowym. Innym warunkiem celowości stosowania wymian profilaktycznych jest zachowanie odpowiedniej relacji kosztów związanych z wymianą korekcyjną (po uszkodzeniu) do kosztów związanych z wymianą profilaktyczną (przeprowadzoną przed uszkodzeniem obiektu).

W pracy tej koszty wymian korekcyjnej i prewencyjnej zależą od ich średnich czasów trwania i kosztów wymian w jednostce czasu, które są zmiennymi losowymi. W literaturze najczęściej zakłada się, że uszkodzenia obiektu technicznego są natychmiast wykrywane, a wymiana korekcyjna i prewencyjna są równoważne z pełną odnową. Jedną z ważniejszych strategii wymian profilaktycznych jest strategia wymian profilaktycznych według wieku obiektu (age replacement policy). Wymianę przeprowadza się

wtedy, gdy obiekt się uszkodził (wymiana korekcyjna, wymuszona) lub też przepracował w pewnym przedziale czasu  $\langle 0, x \rangle$  (wymiana profilaktyczna). Liczba  $x$  nosi nazwę okresu wymian profilaktycznych, a strategia nazywa się okresową.

W pracy przedstawia się dwie strategie wymian według wieku: pierwsza dla elementów bez gwarancji producenta, druga dla elementów z gwarancją producenta. Efektywność działania systemu eksploatacji jest wyrażana przez zysk przypadający na jednostkę czasu i współczynnik gotowości systemu eksploatacji.

W dalszej części omówiono rozdziały 4, 5, 6 i 7 zawierające oryginalne wyniki autora rozprawy, które pokazują, że postawiony cel został osiągnięty.

W rozdziale 4 uogólnia się model Grabskiego. W przeciwieństwie do modelu Grabskiego nie przyjmuje się założenia, że odnowa (naprawa) i wymiana (obsługa profilaktyczna) prowadzą do stanu pełnej zdatności obiektu technicznego. Wiadomo, że znaczny stopień złożoności współczesnych maszyn (obiektów technicznych) powoduje, że demontaż i następnie montaż nie przywracają pierwotnych własności eksploatacyjnych obiektu. W praktyce zdarza się, że wizyta w serwisie samochodowym nie zawsze prowadzi do natychmiastowego przywrócenia pełnej zdatności pojazdu. Dodatkowym rozszerzeniem modelu Grabskiego jest przyjęcie założenia, że funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  nie musi być rosnąca. Odrzucenie założeń, że  $p_{21} = 1$  i  $p_{31} = 1$  ( $p_{21}$  oznacza prawdopodobieństwo warunkowe przejścia ze stanu  $S_2$  do  $S_1$ ,  $p_{31}$  ze stanu  $S_3$  do  $S_1$ ) prowadzi do komplikacji modelu wymian profilaktycznych. Dlatego w rozdziale 4 rozważa się także przypadek szczególny tego modelu. Bada się dwie funkcje kryterialne: zysk na jednostkę czasu i współczynnik gotowości. Formuluje się warunki istnienia maksimum funkcji kryterialnych dla różnych założeń dotyczących badanego modelu. Wartości funkcji kryterialnych zależą od:

- rozkładu czasu do uszkodzenia  $T_1$ ,
- rozkładu zmiennej losowej warunkowej  $T_{12}$  oznaczającej czas przebywania obiektu w stanie  $S_1$  pod warunkiem, że następnym stanem będzie  $S_2$ ,
- macierzy prawdopodobieństw przejścia  $P = [p_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  dla włożonego w proces semi-markowski łańcucha Markowa (wystarczą prawdopodobieństwa  $p_{12}$ ,  $p_{21}$  i  $p_{31}$ ),
- zysków jednostkowych  $z_1$ ,  $z_2$  i  $z_3$  wynikających z przebywania obiektu w stanach  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$ .

Dla modelu wymian opracowanego w rozdziale 4 przedstawiono pięć przykładów numerycznych wyznaczania maksimum zysku na jednostkę czasu i maksimum współczynnika gotowości w zależności od czasu wymiany profilaktycznej. W przykładzie 4.1 rozważa się przypadek, gdy zmienne losowe  $T_{12}$  i  $T_{13}$  mają taki sam rozkład gamma. W przykładzie 4.2 zmienna losowa  $T_{12}$  ma odwrócony rozkład normalny, a zmienna losowa  $T_{13}$  rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda_{13}$ . Wartość parametru  $\lambda_{13}$  dobiera się tak, aby zmienna losowa  $T_1 = p_{12}T_{12} + p_{13}T_{13}$  miała rozkład z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. W przykładzie 4.3 zakłada się, że  $T_{12}$  ma rozkład wykładniczy, natomiast  $T_{13}$  rozkład z liniową i rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń. Parametry rozkładów zmiennych losowych  $T_{12}$  i  $T_{13}$  dobiera się tak, aby funkcja  $\lambda(t)$  była jednomodalna. W przykładzie 4.4 omówiono przypadek, gdy zmienne losowe  $T_{12}$  i  $T_{13}$  mają taki sam rozkład Weibulla z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń. W przykładzie 4.5 autor proponuje modyfikację funkcji intensywności uszkodzeń z prac [5, 38]. Funkcje intensywności uszkodzeń podane w cytowanych pracach mają własność  $\lambda(\infty) = 0$ . Uniemożliwia ona formułowanie kryteriów istnienia maksimum funkcji kryterialnych. Modyfikacja funkcji  $\lambda(t)$  przeprowadzona w tej pracy prowadzi do tego, że  $\lambda(\infty) > 0$ .

W rozdziale 5 rozważa się uogólnienie modelu 3-stanowego z rozdziału 4 na model  $n$ -stanowy. Wnioski zawarte w tym rozdziale są oryginalnymi wynikami autora. Pokazano, że funkcje kryterialne w przypadku modelu  $n$ -stanowego mają taką samą postać jak w modelu 3-stanowym. W związku z tym warunki istnienia maksimum funkcji kryterialnej są podobne do przedstawionych w rozdziale 4. Ponadto udowodniono, że współczynniki liczbowe  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  oraz rozkład czasu  $T_1$  wystarczą do sformułowania warunków istnienia maksimum funkcji kryterialnych. W rozdziale 4 przy pewnych naturalnych założeniach dotyczących modelu 3-stanowego pokazano, że w przypadku zysku na jednostkę czasu zachodzi

$$\alpha < 0, \beta > 0, \gamma < 0$$

a dla współczynnika gotowości

$$\alpha < 0, \beta > 0, \gamma = 0$$

Współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  w modelu  $n$ -stanowym wyrażają się w zależności od: wartości średnich  $ET_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  zysków jednostkowych  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , macierzy prawdopodobieństw przejścia  $P = [p_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  włożonego w proces semi-markowski łańcucha Markowa stosunkowo skomplikowanymi wzorami macierzowymi.

W rozdziale 5 dla modelu  $n$ -stanowego pokazano, że  $\beta > 0$  dla obu funkcji kryterialnych i  $\gamma = 0$  dla współczynnika gotowości. Dla modelu  $n$ -stanowego pozostaje otwarty problem: jakie należy przyjąć założenia na parametry modelu, aby  $\alpha < 0$ ?

Dla modelu  $n$ -stanowego opracowano dwa przykłady numeryczne. Każdy z nich zawiera trzy przypadki dla rozkładu czasu  $T_1$ . W przykładzie 5.1 rozważa się model  $n = 6$ -stanowy. Dla czasu  $T_1$  przyjmuje się następujące rozkłady:

- Weibulla z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń,
- gamma z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń,
- odwrócony rozkład normalny.

Wyznaczono zysk na jednostkę czasu i współczynnik gotowości. We wszystkich analizowanych przypadkach funkcje kryterialne osiągają maksimum. W przykładzie 5.2 wykorzystano dane z rzeczywistego systemu eksploatacji pojazdów z zakładu komunikacji miejskiej. W systemie wyróżniono  $n = 11$  stanów eksploatacyjnych. Macierz  $P$  prawdopodobieństw przejścia i wartości średnie  $ET_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, 11$  oceniono na podstawie danych pochodzących z lat 2004-2008. Wartości zysków jednostkowych oceniono korzystając z danych uzyskanych z odpowiednich komórek ekonomicznych. Do analizy przyjęto trzy różne rozkłady dla czasu do uszkodzenia  $T_1$ . Wybrane rozkłady dobrze opisywały rozkłady empiryczne czasów do uszkodzenia pochodzących z danych eksploatacyjnych. W przykładzie 5.2.A jako rozkład zmiennej  $T_1$  przyjęto rozkład Weibulla, którego parametry dobrano tak, aby wartość średnia  $ET_1$  była bliska średniej empirycznej pochodzącej z danych eksploatacyjnych. Wykresy przebiegu funkcji zysku na jednostkę czasu i współczynnika gotowości pokazują, że istnieje możliwość poprawienia efektywności pracy systemu. W przykładzie 5.2.B założono, że czas  $T_1$  ma rozkład będący mieszaniną rozkładu wykładniczego i rozkładu Rayleigha. Model taki przyjęto na podstawie analizy niezawodnościowej niektórych podzespołów autobusu (odpowiednie obliczenia wykonano w rozdziale 7). Wyznaczona dla tego przypadku funkcja zysku na jednostkę czasu nie osiąga w analizowanym przedziale maksimum. W przykładzie 5.2.C przyjęto, że czas do uszkodzenia ma rozkład potęgowy Weibulla, który z powodzeniem był stosowany w pracach [88, 89] do analizy czasów do uszkodzeń silników autobusowych (analiza została dokonana dla 90 danych z eksploatacji).

W tym przypadku każda z analizowanych funkcji zysku na jednostkę czasu osiąga wartość maksymalną.

W rozdziale 6 przedstawiono uogólnienia modelu Yecha dla wymian profilaktycznych obiektów technicznych z gwarancją producenta [109]. Wyniki badań zawarte w tym rozdziale są oryginalnymi wynikami autora rozprawy. Analizowany w rozdziale 3 model Yecha dotyczący wymian profilaktycznych elementów (obiektów technicznych) posiadających gwarancję producenta zależy tylko od trzech parametrów liczbowych rozkładu czasu  $T_1$ . W rozdziale 6 podjęto próbę uogólnienia tego modelu na przypadek, gdy czasy wymian przed i po okresie gwarancji, czasy napraw są niepomijalne. Model wymian elementów (obiektów) z gwarancją jest oparty na 4-stanowym procesie semimarkowskim. W celu pokazania praktycznej przydatności modelu opracowano cztery przykłady numeryczne. W przykładzie 6.1 czas  $T_1$  ma rozkład Weibulla, w przykładzie 6.2 odwrócony normalny, w przykładzie 6.3 czas  $T_1$  ma zmodyfikowane w stosunku do prac [5, 38] funkcje intensywności uszkodzeń i w przykładzie 6.4 rozkład Birnbauma-Saundersa z modyfikacją Owena [95]. Dla każdego z tych przykładów wyznaczono funkcję zysku przypadającą na jednostkę czasu i współczynniki gotowości. Na podstawie analizy wyników obliczeń wnioskuje się, że istnieje możliwość podnoszenia efektywności systemu eksploatacji.

W rozdziale 7 zawarte są wyniki autora, które okazały się przydatne podczas rozwiązywania zagadnień dotyczących wymian profilaktycznych. W podrozdziale 7.1 skrótowo omówiono klasę MTFR (Mean Time of Failure or Repair) opisaną przez autora, zawierającą rozkłady zmiennych losowych starzejących się. Określenie klasy MTFR powstaje w sposób naturalny podczas budowania kryteriów istnienia maksimum współczynnika gotowości. W podrozdziale 7.2 pokazano, że mieszanina rozkładu wykładniczego i rozkładu Gurwicza z pracy [52] dla pewnych wartości parametrów daje rozkład z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Możliwości zastosowania takiej mieszaniny omówiono na przykładach 7.1, 7.2 i 7.3. W przykładzie 7.4 dla 4020 danych pochodzących z eksploatacji autobusów komunikacji miejskiej do opisu rozkładu czasu do uszkodzenia zastosowano mieszaninę przedstawioną w podrozdziale 7.2. Dane te zawierają czasy między uszkodzeniami układu elektrycznego autobusu. Rozkład prawdopodobieństwa mieszaniny jest zgodny z rozkładem empirycznym. Fakt ten potwierdza celowość tworzenia rozkładów z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. W podrozdziale 7.3 analizuje się mieszaninę rozkładu wykładniczego z rozkładem Rayleigha. Pokazano, że mieszanina ta może dawać rozkłady z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. W przykładzie 7.5 przeanalizowano dane dotyczące uszkodzeń silników autobusowych [89]. Wykonano estymację parametrów mieszaniny i test zgodności  $\chi^2$  rozkładu empirycznego z rozkładem mieszaniny. W podrozdziale 7.4 pokazano, że jeśli mieszanina dowolnego rozkładu z rozkładem wykładniczym ma jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń, to istnieje proste kryterium przynależności zmiennej losowej  $T_1$  do klasy MTFR. Podrozdział 7.5 poświęcony jest ocenie średniej czasu między kolejnymi uszkodzeniami, oznaczonej przez MTBF (Mean Time Between Failure) dla czasów do uszkodzenia z klasy MTFR.

## 2. Modele czasów życia obiektów technicznych

W teorii niezawodności podstawową rolę odgrywa zmienna losowa  $T$  oznaczająca czas życia (zdatności) elementu (obiekту technicznego). Funkcję

$$F(t) = P\{T \leq t\}$$

nazywa się dystrybuantą zmiennej losowej  $T$ , funkcję  $R(t) = 1 - F(t)$  określa się jako funkcję niezawodności. Dla zmiennej losowej  $T$  warunkową funkcję niezawodności definiuje się następująco:

$$P\{T - t > x \mid T > t\} = R(X \mid t) = \frac{R(t+x)}{R(t)}, \text{ jeśli } R(t) > 0$$

Podobnie określa się dystrybuantę warunkową:

$$P\{T - t \leq x \mid T > t\} = \frac{F(x+t) - F(t)}{R(t)} = 1 - R(x \mid t)$$

Jeśli istnieje granica:

$$\lambda(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \frac{F(x+t) - F(t)}{R(t)}$$

to funkcja  $\lambda(t)$  nazywa się funkcją intensywności uszkodzeń. W przypadku, gdy zmienna losowa  $T$  posiada gęstość prawdopodobieństwa  $f(t)$ , funkcja intensywności  $\lambda(t)$  wyraża się wzorem:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Całkując ostatnie równanie obustronnie, otrzymuje się

$$\int_0^x \lambda(t) dt = -\ln R(x)$$

stąd

$$R(x) = e^{-\Lambda(x)}$$

gdzie:

$\Lambda(x)$  – skumulowana funkcja intensywności uszkodzeń

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(t) dt$$

Bardzo często do analizy czasu życia elementu (obiekту technicznego) wykorzystuje się średni resztowy czas życia, który definiuje się następująco:

$$MRL(t) = E\{T - t \mid T \geq t\} = \frac{\int_t^\infty R(x) dx}{R(t)}$$

Łatwo można zauważyć, że  $MRL(0) = ET$ , gdzie  $ET$  jest wartością średnią zmiennej losowej  $T$ , wyrażającej się wzorem:

$$ET = \int_0^{\infty} R(x) dx$$

Jeśli zmienna losowa  $T$  posiada gęstość prawdopodobieństwa, to między funkcją intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  a średnim resztowym czasem  $MRL(t)$  zachodzi związek:

$$\lambda(t) = \frac{MRL'(t) + 1}{MRL(t)}$$

Z powyższego wynika, że:

$$R(t) = \frac{MRL(0)}{MRL(t)} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{dx}{MRL(x)} \right\}$$

Swartz w pracy [101] podał jako pierwszy warunki konieczne i dostateczne, aby funkcja  $m(t)$  była średnim resztowym czasem dla pewnej zmiennej losowej ze skończoną wartością średnią. Podobne warunki badali Hall [53], Guess [46] i Lillo [81]. Badania między postaciami wykresów funkcji intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  i średnim resztowym czasem  $MRL(t)$  prowadzili Mi [84] oraz Ghai [43].

W teorii odnowy i niezawodności bardzo ważną rolę odgrywa rozkład równoważny do danego rozkładu czasu życia. Dystrybuanta rozkładu równoważnego do danego rozkładu wyraża się wzorem (Feller [41], Deshapande [35]):

$$F_1(x) = \frac{1}{ET} \int_0^x R(t) dt$$

Zmienna losowa z dystrybuantą  $F_1(x)$  ma skończoną wartość średnią  $ET_1$ , jeśli zmienna losowa  $T$  posiada skończoną wariancję  $D^2T$ . Definicja zmiennej losowej  $T_1$  może być wykorzystana do budowy definicji rekurencyjnej w postaci:

$$F_n(x) = \frac{1}{ET_{n-1}} \int_0^x R_{n-1}(t) dt$$

gdzie  $R_{n-1}(t)$  i  $ET_{n-1}$  są odpowiednio funkcją niezawodności i wartością średnią zmiennej losowej  $T_{n-1}$ . W pracy Harknesa [54] bada się własności graniczne tego przekształcenia. Zmienna losowa  $T_1$  będzie wykorzystywana w dalszej części rozprawy.

W zależności od postaci funkcji intensywności uszkodzeń dzieli się rozkłady na rozkłady z monotoniczną funkcją intensywności uszkodzeń i niemonotoniczną. Dla monotonicznych funkcji intensywności uszkodzeń najczęściej rozważa się następujące postacie:

- stała (rozkład wykładniczy),
- niemalejąca oznaczana przez IFR (Increasing Failure Rate),
- nierosnąca oznaczana przez DFR (Decreasing Failure Rate).

Wśród niemonotonicznych funkcji intensywności uszkodzeń podstawową rolę w teorii niezawodności odgrywają dwie kategorie:

- funkcje intensywności uszkodzeń z kształtem wannowym, oznaczane przez BFR (Bathtub Failure Rate),
- funkcje intensywności uszkodzeń o kształcie odwróconej wanny, inaczej jednomodalne, oznaczane przez UBFR (Upside-down Bathtub Failure Rate).

Wymienimy teraz podstawowe rozkłady o monotonicznych funkcjach intensywności uszkodzeń. Zmienna losowa (czas życia)  $T$  ma rozkład wykładniczy, jeśli jej gęstość wyraża się wzorem:

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \text{ dla } t \geq 0$$

Dystrybuanta zmiennej losowej  $T$  o rozkładzie wykładniczym ma postać:

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t) \text{ dla } t \geq 0$$

Dla rozkładu wykładniczego funkcja intensywności jest stała,  $\lambda(t) = \lambda$ . Okazuje się, że twierdzenie odwrotne jest także prawdziwe. Niech zmienna losowa  $T \geq 0$  posiada gęstość prawdopodobieństwa  $f(t)$ . Prawdziwa jest równoważność: zmienna losowa  $T$  posiada rozkład wykładniczy wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  jest stała. W literaturze powyższy fakt formułuje się następująco: warunek  $\lambda(t) = \text{const}$  charakteryzuje rozkład wykładniczy. Poniżej omówiono rozkłady prawdopodobieństwa z monotoniczną funkcją intensywności uszkodzeń wykorzystywane w tej pracy.

## 2.1. Rozkład gamma

Zmienna losowa  $T > 0$  ma rozkład gamma, jeśli jej gęstość  $f(t)$  określa się wzorem:

$$f(t) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} t^{p-1} e^{-bt}, \quad t > 0, p, b > 0 \quad (1)$$

gdzie  $\Gamma(p)$  oznacza funkcję gamma (funkcję Eulera 2-go rodzaju). Dystrybuanta zmiennej losowej o rozkładzie gamma wyraża się przez całkę nieelementarną i jest możliwe wyliczenie jej wartości w każdym pakiecie programów statystycznych. Podstawowe parametry: wartość średnia  $ET$  i wariancja  $D^2T$  wyznacza się za pomocą wzorów:

$$ET = \frac{p}{b}, \quad D^2T = \frac{p}{b^2}$$

Warto zauważyć, że w szczególnym przypadku, gdy  $p = 1$ , rozkład gamma jest rozkładem wykładniczym. Funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla rozkładu gamma z parametrami  $p$  i  $b$  jest:

- stała dla  $p = 1$ ,  $\lambda(t) = b$ ,
- rosnąca dla  $p > 1$ , przy czym  $\lambda(t) \rightarrow b$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ ,
- malejąca dla  $0 < p < 1$ , przy czym  $\lambda(t) \rightarrow b$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.2. Rozkład Weibulla

Zmienna losowa  $T > 0$  ma rozkład Weibulla, jeśli dystrybuanta  $F(t)$  wyraża się wzorem:

$$F(t) = 1 - \exp(-a t^b), \text{ dla } t > 0 \quad (2)$$

Dla funkcji  $\lambda(t)$  intensywności uszkodzeń mamy

$$\lambda(t) = a t^{b-1}$$

Jeśli  $b = 1$ , to funkcja  $\lambda(t) = a$  jest stała, oznacza to, że dla  $b = 1$  zmienna losowa  $T$  o rozkładzie Weibulla ma rozkład wykładniczy. Rozkłady gamma i Weibulla posiadają różne uogólnienia.

## 2.3. Uogólniony rozkład gamma

Zmienna losowa  $T > 0$  ma uogólniony rozkład gamma, jeśli jej gęstość wyraża się wzorem:

$$f(t; p, b, c) = \frac{cb^{pc}}{\Gamma(p)} t^{pc-1} \exp(-(tb)^c), \text{ } t > 0 \quad (3)$$

gdzie  $p > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ . Parametr  $b$  jest parametrem skali,  $p$  i  $c$  są parametrami kształtu (formy). Jeśli  $c = 1$ , to otrzymujemy zwykły rozkład gamma rozpatrywany poprzednio. Dla  $p = 1$  otrzymuje się jako szczególny przypadek rozkład Weibulla. Wartość średnia  $ET$  i wariancja  $D^2T$  wyrażają się za pomocą wzorów:

$$ET = \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{c}\right)}{b\Gamma(p)}$$

$$D^2T = \frac{1}{\Gamma(p)b^2} \left[ \Gamma\left(p + \frac{2}{c}\right) - \frac{\Gamma^2\left(p + \frac{1}{c}\right)}{\Gamma(p)} \right]$$

Dla funkcji intensywności uszkodzeń uogólnionego rozkładu gamma można wyróżnić pięć przypadków [42, 63]:

- $p = 1$ ,  $c = 1$  mamy wtedy rozkład wykładniczy z funkcją intensywności uszkodzeń postaci  $\lambda(t) = b$ ,
- $c \leq 1$ ,  $p c \leq 1$  z wyjątkiem pary  $p = 1$ ,  $c = 1$ , funkcja  $\lambda(t)$  jest malejąca,
- $c \geq 1$ ,  $p c \geq 1$  z wyjątkiem pary  $p = 1$ ,  $c = 1$ , funkcja  $\lambda(t)$  jest rosnąca,
- jeśli  $c < 1$ ,  $p c > 1$ , to funkcja  $\lambda(t)$  jest jednomodalna,
- jeśli  $c > 1$ ,  $p c < 1$ , to funkcja  $\lambda(t)$  ma kształt wannowy i posiada jedno minimum.

Uogólniony rozkład gamma posiada różne postacie funkcji  $\lambda(t)$ , może być zatem wykorzystywany jako model matematyczny rozkładu czasu poprawnej pracy dla szerokiej klasy obiektów technicznych. W przedstawionej pracy duże znaczenie mają przypadki d) i e).



## 2.4. Potęgowy rozkład Weibulla i inne uogólnienia rozkładu Weibulla

Mudholkar [87] bada rozkład z dystrybuantą w postaci:

$$F(t) = [1 - \exp(-a t^b)]^c, \text{ dla } t > 0 \quad (4)$$

gdzie  $a > 0, b > 0, c > 0$ .

Rozkład ten w wielu pracach nazywa się wykładniczym rozkładem Weibulla. W przeciwieństwie do zwykłego rozkładu Weibulla posiada on dla pewnych wartości parametrów niemonotoniczną funkcję intensywności uszkodzeń. Dla  $c = 1$  rozkład ten redukuje się do zwykłego rozkładu Weibulla. Jeśli  $c = 1, b = 1$ , to mamy rozkład wykładniczy. Funkcja intensywności uszkodzeń wyraża się wzorem:

$$\lambda(t) = \frac{ab(1 - e^{-at^b})^{c-1} e^{-at^b} t^{b-1}}{1 - (1 - e^{-at^b})^c}$$

Mudholkar w pracy [88] pokazał, że funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  może mieć różne kształty:

- jeśli  $b \leq 1$ , to  $\lambda(t)$  jest malejąca,
- jeśli  $b \geq 1$  i  $b c \geq 1$ , to  $\lambda(t)$  jest rosnąca,
- jeśli  $b > 1$  i  $c b < 1$ , to  $\lambda(t)$  ma kształt wannowy,
- jeśli  $c < 1$  i  $c b < 1$ , to  $\lambda(t)$  jest jednomodalna.

Potęgowy rozkład Weibulla z powodzeniem wykorzystano jako model rozkładu czasu do uszkodzenia silników autobusowych [89]. Graficzne podejście do estymacji parametrów tego rozkładu przedstawiono w pracy [58]. W pracy [87] przeprowadzono analizę współczynników asymetrii i spłaszczenia dla tego rozkładu. Badano też niektóre statystyki ekstremalne tego rozkładu stosując je jako model do opisu poziomu rzeki Floyd w stanie Iowa. W pracy [90] wyznaczono transformatę Laplace'a dla potęgowego rozkładu Weibulla i na tej podstawie wyprowadzono wzory na momenty zwykłe tego rozkładu. W pracy [108] badano warunki istnienia minimów i maksimów funkcji intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  i średniego resztowego czasu życia  $MRL(t)$ . W pracy [107] analizuje się inne, podobne uogólnienie rozkładu Weibulla z dystrybuantą w postaci:

$$F(t) = 1 - \exp\left\{c \left[1 - \exp\left(-\frac{a}{b} t^b\right)\right]\right\} \text{ dla } t > 0$$

gdzie  $a > 0, b > 0, c > 0$ . W cytowanej pracy [107] dowodzi się, że dla  $b \geq 1$  funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  jest rosnąca, dla  $b < 1$  ma kształt wannowy. Dla analizowanego rozkładu Nadarajah [90] wyprowadził wzory na momenty zwykłe. Inną modyfikację rozkładu Weibulla podano w pracy Lai [80], w której zaproponowano rozkład prawdopodobieństwa z dystrybuantą w postaci:

$$F(t) = 1 - \exp[-a t^b \exp(c t)], \text{ dla } t > 0$$

gdzie  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ . W cytowanej pracy pokazano, że funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla tego rozkładu ma kształt wannowy, jeśli  $0 < b < 1$  i dla  $b \geq 1$  funkcja intensywności uszkodzeń rośnie. Większość znanych modyfikacji rozkładu Weibulla zebrali Nadarajah i Kotz [91].

## 2.5. Odwrócony rozkład Weibulla

Rozważamy teraz rozkład prawdopodobieństwa z dystrybuantą:

$$F(t) = \exp\left[-\left(\frac{a}{t}\right)^b\right] \text{ dla } t > 0 \quad (5)$$

Funkcja intensywności uszkodzeń ma postać:

$$\lambda(t) = \eta b t^{-b-1} e^{-z} / (1 - e^{-z})$$

gdzie  $\eta = a^b$ ,  $z = z(t) = (a/t)^b$ .

Można pokazać, że:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$$

Ostatnia równość czyni model mniej przydatnym niż model spełniający warunek  $\lambda(\infty) > 0$ . Pochodna funkcji  $\lambda(t)$  ma postać:

$$\lambda'(t) = \lambda(t) t^{-b-1} \left[ \frac{\eta b}{1 - e^{-z}} - (b+1)t^b \right]$$

Analiza równania  $\lambda'(t) = 0$  prowadzi do wniosku, że funkcja  $\lambda(t)$  jest jednomodalna z maksimum w punkcie  $t_0$  spełniającym równanie:

$$\frac{z(t_0)}{1 - e^{-z(t_0)}} = 1 + \frac{1}{b}$$

Odwrócony rozkład Weibulla jako pierwszy analizował Keller [64]. Jiang [60] badał różne modyfikacje tego rozkładu, Drapella [40] proponuje graficzną technikę estymacji parametrów rozkładu.

## 2.6. Odwrócony rozkład normalny

Gęstość rozkładu odwróconego normalnego (inverse Gaussian) z parametrami  $\lambda$  i  $\mu$  opisuje wzór:

$$f(t; \lambda, \mu) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda(t-\mu)^2}{2\mu^2 t}\right) \text{ dla } t > 0 \quad (6)$$

gdzie  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ . Wartość średnia  $ET$  i wariancja  $D^2T$  wyrażają się wzorami:

$$ET = \mu, D^2T = \mu^3 / \lambda.$$

Po raz pierwszy odwrócony rozkład normalny był badany przez Tweedie [102]. Gęstość  $f(t; \lambda, \mu)$  odwróconego rozkładu normalnego jest jednomodalna i asymetryczna,  $\mu$  jest parametrem skali, natomiast  $\lambda$  jest parametrem kształtu (formy). Wyniki dotyczące podstawowych własności i zastosowań odwróconego rozkładu normalnego są zawarte w pracach [30, 31].

Funkcję niezawodności odwróconego rozkładu normalnego charakteryzuje wzór:

$$R(t) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\right) - e^{-2\lambda/\mu} \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 + \frac{t}{\mu}\right)\right) \text{ dla } t > 0$$

gdzie  $\Phi$  jest dystrybuantą niestandardowego rozkładu normalnego. Funkcja intensywności uszkodzeń może być przedstawiona następująco:

$$\lambda(t) = \frac{(\lambda/(2\pi t^3))^{\frac{1}{2}} \exp(-\lambda(t-\mu)^2/2\mu^2 t)}{\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\right) - e^{-2\lambda/\mu} \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 + \frac{t}{\mu}\right)\right)} \text{ dla } t > 0 \quad (7)$$

Wyrażenie określające  $\lambda(t)$  jest raczej skomplikowane, ale nie jest trudne do obliczeń numerycznych. W pracach [30, 31] pokazano, że  $\lambda(t)$  jest jednomodalna i posiada maksimum w punkcie  $t_m$ , gdzie:

$$t_m = -\frac{3\mu^2}{\lambda} + \left(1 + \frac{9\mu^2}{4\lambda^2}\right)^{1/2}$$

Maksymalną wartość funkcji  $\lambda(t)$  otrzymuje się jako rozwiązanie równania:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{2\mu^2} + \frac{3}{2t} - \frac{\lambda}{2t^2}$$

Analiza przebiegu zmienności funkcji  $\lambda(t)$  prowadzi do wniosku, że przy  $t \rightarrow \infty$   $\lambda(t)$  osiąga pewną wartość graniczną:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \frac{\lambda}{2\mu^2}$$

W pracach [30, 31] udowodniono, że średni resztowy czas życia wyraża się za pomocą wzoru:

$$\text{MRL}(t) = \frac{(\mu - t)\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\right) + (\mu + t)e^{-2\lambda/\mu}\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 + \frac{t}{\mu}\right)\right)}{\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\right) - e^{-2\lambda/\mu}\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(1 + \frac{t}{\mu}\right)\right)}$$

Prawdziwe są równości:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{MRL}(t) = \frac{2\mu^2}{\lambda}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \text{MRL}(t) = \mu$$

Pierwsze wyniki dotyczące estymacji parametrów odwróconego rozkładu normalnego podano w pracy [102]. Metodą największej wiarygodności wyznaczono oceny parametrów  $\mu$  i  $\lambda$ . W pracy [30] przedstawiono nieobciążone i najefektywniejsze estymatory parametrów  $\mu$  i  $\lambda$ . Odwrócony rozkład normalny doczekał się różnych uogólnień. Jednym z nich jest trójparametrowy odwrócony rozkład normalny wprowadzony w pracy [95]. Gęstość trójparametrowego rozkładu normalnego ma postać:

$$f(t; \lambda, \mu, \eta) = \left[ \frac{\lambda}{2\pi(t-\eta)^2} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{\lambda[(t-\eta)-\mu]^2}{2\mu^2 t} \right\} \quad \text{dla } t > \eta \quad (8)$$

Parametr  $\eta$  jest parametrem położenia,  $\lambda$  – parametrem skali. Padgett [95] badał oceny parametrów rozkładu z gęstością (8) za pomocą metody momentów i największej wiarygodności. Problem estymacji parametrów trójparametrowego odwróconego rozkładu normalnego opisano następnie w pracach [7, 27, 29, 33, 34, 61]. W pracy [37] analizuje się metodę Bayesa dla estymacji parametru położenia. W pracy [77] przedstawiono mieszaną metodę momentów oceny parametrów rozkładu (8). Inne uogólnienie dwuparametrowego odwróconego rozkładu normalnego zaproponowano w pracach [2, 50, 48]. Cytowane uogólnienie dotyczy rozkładu z gęstością prawdopodobieństwa:

$$f_p(t) = (1-p) f_x(t) + p f_x^*(t) \quad 0 < p < 1 \quad (9)$$

gdzie:

$$f_x(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t^3}} \exp \left\{ \frac{-\lambda(t-\mu)}{2\mu^2 t} \right\} & \text{dla } t > 0, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases}$$

$f_x^*(t) = t f(t) / \mu$ , gdzie  $0 < \mu = EX < \infty$

Gęstość  $f_p(t)$  określona wzorem (9) jest mieszaniną dwóch rozkładów: odwróconego rozkładu Gaussa i rozkładu z gęstością  $f_x(t) = t f(t) / \mu$  należącego do klasy LBIGD (Length Based Inverse Gaussian Distribution). Gęstość  $f_p(x)$  reprezentuje bogatą rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa dla różnych wartości parametrów mieszania  $p$ . Jeśli  $p = 0$ , to gęstość  $f_p(t)$  ma rozkład zmiennej losowej  $X$  (odwrócony rozkład normalny). Dla  $p = 1$  mamy rozkład z klasy LBIGD, w przypadku gdy  $p = 1/2$  rozkład Birnbauma-Saundersa [20]. Relacje między rozkładem Birnbauma-Saundersa a rozkładem z gęstością prawdopodobieństwa (9) omówiono w pracach [17, 36, 62]. Dystrybuanta dla gęstości (9) wyraża się wzorem:

$$F_p(t) = \Phi(\alpha(t)) + (1-2p) e^{2\lambda/\mu} \Phi(\beta(t))$$

gdzie:

$$\alpha(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \left( \frac{t}{\mu} - 1 \right)$$

$$\beta(t) = -\sqrt{\frac{\lambda}{t}} \left( \frac{t}{\mu} + 1 \right)$$

$\Phi$  jest dystrybuantą rozkładu normalnego standardowego.

Podobnie dla funkcji niezawodności  $R_p(t)$  otrzymano:

$$R_p(t) = \Phi(-\alpha(t)) - (1 - 2p)e^{2\lambda/\mu} \Phi(\beta(t))$$

Funkcję intensywności uszkodzeń wyraża się wzorem:

$$\lambda_p(t) = \frac{(\lambda/2\pi t^3)^{1/2} (1 - p + pt/\mu) \exp\{-(\lambda/2\mu^2 t)/(t - \mu)^2\}}{\Phi(-\alpha(t)) - (1 - 2p)e^{2\lambda/\mu} \Phi(\beta(t))}$$

W pracy [47] udowodniono, że funkcja intensywności uszkodzeń jest jednomodalna. Punkt  $t_0$ , w którym funkcja  $\lambda(t)$  przyjmuje wartość maksymalną można wyznaczyć z równania:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{2\mu^2} + \frac{3}{2t} - \frac{\lambda}{2t^2} + \frac{p}{\mu(1-p) + pt}$$

W cytowanej pracy pokazano, że:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_p(t) = \frac{2\mu^2}{\lambda}$$

Średni resztowy czas życia MRL(t) dla rozkładu z gęstością (9) jest równy:

$$\begin{aligned} \text{MRL}(t) = & [(\mu - t + p\mu^2/\lambda)\Phi(-\alpha(t)) + (1 - 2p)(\mu + t - p\mu^2/\lambda)e^{2\lambda/\mu}\Phi(\beta(t)) + \\ & - 2p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{t\mu^2/\lambda} \exp\{-\frac{1}{2}(\lambda/t)(1 - t/\mu)^2\}] \times [\Phi(-\alpha(t)) - (1 - 2p)e^{2\lambda/\mu}\Phi(\beta(t))] \end{aligned}$$

Dla funkcji MRL(t) udowodniono twierdzenie: istnieje dokładnie jeden punkt  $k_p^*$  taki, że  $\text{MRL}'(t) < 0$  dla wszystkich  $t \in (0, k_p^*)$ ,  $\text{MRL}'(k_p^*) = 0$ ,  $\text{MRL}'(t) > 0$  dla wszystkich  $t > k_p^*$ . W pracach [48-50] przedstawiono metodę estymacji parametrów  $\mu$ ,  $\lambda$  i  $p$  funkcji niezawodności  $R_p(t)$  metodą największej wiarygodności.

## 2.7. Rozkład Birnbauma-Saundersa

W dalszej części pracy zostanie wykorzystany rozkład Birnbauma-Saundersa. W pracach [18, 19, 20, 83] zaproponowano rozkład prawdopodobieństwa z dystrybuantą:

$$F(t) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right] \quad \text{dla } t > 0 \quad (10)$$

gdzie  $\alpha = \sigma / \sqrt{w\mu}$ ,  $\beta = w / \mu$ . W skrócie będziemy pisali: zmienna losowa  $X$  ma rozkład o dystrybuancie (10) jako  $X \sim B - S(\alpha, \beta)$ . Podstawowe własności tego rozkładu zbadano w pracy [19]. Parametr  $\beta$  jest parametrem skali, ponieważ z (10) wynika, że:

$$X / \beta \sim B - S(\alpha, 1)$$

Parametr  $\alpha$  jest parametrem kształtu. Rozkład Birnbauma-Saundersa ma własność wzajemności rozumianą jako fakt, że zmienna losowa  $1 / X$  ma także rozkład Birnbauma-Saundersa, w szczególności:

$$1 / X \sim B - S(\alpha, 1 / \beta)$$

Własność wzajemności rozkładów była badana przez Saundersa [100].  
Jeśli zmienna losowa  $Z$  ma standardowy rozkład normalny, to zmienna losowa:

$$X = \frac{\beta}{2}[2 + \alpha^2 z^2 + \alpha z \sqrt{\alpha^2 z^2 + 4}] \quad (11)$$

ma rozkład Birnbauma-Saundersa z dystrybuantą daną wzorem (10). Wyrażenie (11) jest bardzo wygodne do generowania zmiennych o rozkładzie  $B - S(\alpha, \beta)$ . Wiadomo, że zmienna losowa  $X$  ma wartość średnią  $EX$  i wariancję  $D^2X$  wyrażające się wzorami:

$$EX = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (12)$$

$$D^2X = (\alpha \beta)^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right) \quad (13)$$

Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $B - S(\alpha, \beta)$  wyrażona jest wzorem:

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha\beta} \sqrt{\frac{\beta}{t}} \left(1 + \frac{\beta}{t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{t}\right)\right]$$

gdzie  $t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ .

Funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  jest rosnąca lub jednomodalna. Można udowodnić [83], że:

$$\lambda(0, \alpha, \beta) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha^2\beta} \quad (14)$$

Autorowi rozprawy nie są znane warunki na parametr  $\alpha$ , przy których funkcja intensywności uszkodzeń jest jednomodalna [83]. Estymacja parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  rozkładu  $B - S(\alpha, \beta)$  została opracowana w cytowanej pracy [19].

W literaturze znane są przynajmniej dwie prace dotyczące uogólnienia rozkładu Birnbauma-Saundersa z dystrybuantą w postaci:

$$F(t; L) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\sqrt{t}}{\beta} - \frac{u(\Theta, L)}{\sqrt{t}} \right) \right] \quad \text{dla } t > 0 \quad (15)$$

gdzie  $\alpha > 0, \beta > 0, u(\Theta, L) > 0$  dla wszystkich  $L$ . Funkcja  $u(\Theta, L)$  zależy od nieznanego parametru  $\Theta$  i znanej „zmiennej przyspieszającej”  $L$ . Zmienną losową  $T$  posiadającą dystrybuantę (15) można zapisać jako:

$$T \sim B - S(\alpha, \beta, \lambda)$$

Funkcja  $u(\Theta, L)$  nazywa się funkcją przyspieszającą (przyspieszenia). Mediana rozkładu (15) jest równa  $\beta \lambda(\Theta, L)$ . Jeśli  $T \sim B - S(\alpha, \beta, \lambda)$ , to zmienna losowa:

$$Z = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\sqrt{t}}{\beta} - \frac{u(\Theta, L)}{\sqrt{t}} \right]$$

ma standardowy rozkład normalny. Do określenia wzorów na wartość średnią i wariancję zmiennej losowej o rozkładzie  $B - S(\alpha, \beta, \lambda)$  wyznacza się  $X$  z równania. Otrzymuje się:

$$X = \frac{1}{2}[\alpha^2\beta^2Z^2 + \alpha\beta Z\sqrt{\alpha^2\beta^2Z^2 + 4\beta\lambda(\Theta, L)} + 2\beta u(\Theta, L)] \quad (16)$$

Wykorzystując (16) i podstawowe własności rozkładu normalnego standardowego, otrzymano:

$$EX = \beta^2 \left[ \frac{u(\Theta, L)}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2} \right]$$

oraz

$$D^2X = \alpha^2 \beta^4 \left[ \frac{u(\Theta, L)}{\beta} + \frac{5\alpha^2}{4} \right]$$

Zmienna losowa  $X$  o dystrybucji (15) posiada własność wzajemności [100]. Można pokazać, że jeśli  $X \sim B - S(\alpha, \beta, \lambda)$ , to  $1/X \sim B - S(\alpha, 1/\beta, 1/\lambda)$  i stąd:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \lambda^{-2}(\Theta, L) \left[ \frac{u(\Theta, L)}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2} \right]$$

Niestety nie są znane autorowi rozprawy własności niezawodnościowe rozkładu z dystrybucją (15). W szczególności ciekawy jest problem, czy funkcja intensywności uszkodzeń dla tego rozkładu jest jednomodalna dla pewnych wartości parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\Theta$ ? Jeśli tak, to jaka jest granica funkcji intensywności uszkodzeń przy  $t \rightarrow \infty$ ?

Inny 3-parametrowy rozkład Birnbauma-Saundersa podano w pracy Owena [94]. Dystrybucja tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$F(t) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{t^{1-k}}{\sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\beta}}{t^k} \right) \right] \quad \text{dla } t > 0 \quad (17)$$

gdzie  $\alpha = \sigma / \sqrt{w\mu} > 0$ ,  $\beta = w / \mu > 0$  i  $0 < k < 1$

## 2.8. Mieszanie rozkładów czasów do uszkodzenia

W teorii niezawodności, a szczególnie w zagadnieniach obsługi złożonych systemów rozważa się często rozkłady prawdopodobieństwa z niemonotoniczną funkcją intensywności uszkodzeń. Należą do nich rozkłady z wannową funkcją intensywności uszkodzeń (BFR). Przegląd rozkładów z wannową funkcją intensywności uszkodzeń umieszczono w pracach [25, 97]. Analiza literatury dotycząca złożonych modeli niezawodnościowych i badania własne uszkodzeń autobusów miejskich prowadzą do wniosku, że często do opisu procesu uszkodzeń użyteczne są rozkłady prawdopodobieństwa z odwróconą wannową funkcją intensywności uszkodzeń (upside-down bathtub) zwaną w tej pracy jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Klasę rozkładów z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń oznacza się jako UBFR. Rozkłady z klasy UBFR mają szerokie zastosowania w różnych dziedzinach nauki – do analizy życia populacji biologicznych [103, 104], do danych medycznych [1], do opisu uszkodzeń autobusów [89], do budowy modeli podejmowania decyzji dla obiektów technicznych

w okresie rozruchu [24, 28], do opisu modeli niezawodnościowych [59] i do opisu mobilności grup socjalnych [3].

Jedną z metod tworzenia rozkładów z niemonotoniczną funkcją intensywności uszkodzeń jest tworzenie mieszanin standardowych rozkładów. Podstawowy wynik dotyczący mieszanin uzyskał Prochan [96]: mieszanina dwóch rozkładów o malejących funkcjach intensywności uszkodzeń (DFR) ma malejącą funkcję intensywności uszkodzeń. Pierwsze praktyczne zastosowanie mieszanin rozkładów opisał Krohn w pracy [79]. W cytowanej pracy przedstawiono rozkład z wannową funkcją intensywności jako mieszaninę rozkładów: Weibulla z malejącą funkcją intensywności rozkładów, rozkładu wykładniczego i rozkładu Weibulla z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń. Jednak analiza teoretyczna tego modelu pokazuje, że funkcja intensywności uszkodzeń nie ma kształtu wannowego. W pracy [103] omówiono mieszaninę rozkładu wykładniczego z rozkładem z liniową funkcją intensywności uszkodzeń. Jednak model ten analizowany w całym zakresie zmiennej nie ma funkcji intensywności uszkodzeń o kształcie wannowym. Funkcja intensywności uszkodzeń zmierza do pewnej nieujemnej wartości granicznej. Glaser [44] i Gupta [49] analizują szczególne przypadki mieszanin rozkładów gamma i Weibulla do budowania mieszanin o różnych kształtach funkcji intensywności uszkodzeń. Gurland [51] podaje warunki, aby mieszanina rozkładu wykładniczego i rozkładu z klasy IFR była rozkładem z klasy DFR. W pracy [66] analizuje się przydatność modelu wannowego w praktyce. Empirycznie przebadano mieszaninę dwóch rozkładów Weibulla. Stwierdzono, że dla jednego z badanych przypadków analiza prowadzi do wniosku, że jako mieszaninę można uzyskać rozkład z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń (UBFR). Zauważono jednak, że analizowana w pracy [66] mieszanina daje rozkład z funkcją intensywności posiadającą na początku przebiegu przedział, w którym funkcja ta maleje [106]. Dokładną analizę mieszaniny dwóch rozkładów Weibulla zamieszczono w pracy [105]. Dla dwóch rozkładów Weibulla z takimi samymi parametrami kształtu znaleziono wszystkie możliwe postacie funkcji intensywności uszkodzeń. Dla mieszaniny z różnymi wartościami parametru kształtu wykonano obliczenia numeryczne. Wszystkie możliwe kształty funkcji intensywności uszkodzeń mieszaniny dwóch rozkładów o rosnących i liniowych funkcjach intensywności uszkodzeń wyznaczono w pracy [26]. Wynikiem takiej operacji są rozkłady rosnącej funkcji intensywności uszkodzeń (IFR), wannowej (BFR) i modyfikowanej wannowej, to znaczy rosnącej i następnie wannowej.

## 2.9. Klasy funkcji niezawodnościowych

W tym podrozdziale omówiono niektóre klasy rozkładów spotykane w teorii niezawodności [10, 11, 17]. Podczas formułowania warunków na istnienie maksimum współczynnika gotowości w sposób naturalny otrzymano klasę zwaną MTFR (Mean Time of Failure or Repair). Celem umiejscowienia nowej klasy MTFR na tle innych znanych klas rozkładów czasu do uszkodzenia podaje się tylko najbardziej znane klasy rozkładów zmiennych losowych starzejących się. Zwykle każda z wymienionych klas posiada klasę dualną, dlatego też większość klas definiuje się parami, tzn. klasę i klasę do niej dualną [12, 78]:

- a) klasa EXP rozkładów wykładniczych,
- b) klasa IFR (DFR) z rosnącą (malejącą) funkcją intensywności uszkodzeń,



- c) klasa IFRA (DFRA) rozkładów o średnio rosnącej (malejącej) funkcji intensywności uszkodzeń, to klasa dla której funkcja  $-\ln R(t)/t$  jest rosnąca (malejąca) dla  $t$  należącego do dziedzin tych funkcji,
- d) klasa NBU rozkładów „nowy lepszy od używanego” (New Better than Used), jeżeli

$$R(x + y) \geq R(x)R(y) \text{ dla } x, y > 0$$

klasa NWU rozkładów „nowy gorszy od używanego” (New Worse than Used), jeżeli:

$$R(x + y) \leq R(x)R(y) \text{ dla } x, y > 0,$$

- e) klasa NBUE) rozkładów czasów życia „nowy lepszy od średnio używanego” (New Better than Used in Expectation), jeśli istnieje skończona średnia  $ET$  i

$$\int_t^{\infty} R(x)dx \geq ET R(t) \text{ dla } t > 0$$

klasa NWUE rozkładów czasów życia „nowy gorszy od średnio używanego” (New Worse than Used in Expectation), jeśli istnieje skończona średnia  $ET$  i

$$\int_t^{\infty} R(x)dx \leq ET R(t) \text{ dla } t > 0.$$

Dla wyżej zdefiniowanych rozkładów prawdziwe są następujące łańcuchy relacji:

$$\begin{aligned} \text{EXP} \subset \text{IFR} \subset \text{IFRA} \subset \text{NBU} \subset \text{NBUE} \\ \text{EXP} \supset \text{DFR} \supset \text{DFRA} \supset \text{NWU} \supset \text{NWUE} \end{aligned}$$

### 3. Modele wymian profilaktycznych

#### 3.1. Modele odnowy prewencyjnej

Bardzo często czas naprawy (odnowy) i koszt naprawy uszkodzonego elementu (obiektu technicznego) jest większy od czasu i kosztu obsługi profilaktycznej. Fakt ten jest podstawą do budowania modeli różnych strategii prowadzenia odnowy prewencyjnej (profilaktycznej). W tej pracy jako odnowę rozumiemy wymianę elementu na inny sprawny, natomiast odnowa prewencyjna polega na wymianie elementu sprawnego. Odnowę prewencyjną stosuje się, gdy elementy (obiekty techniczne) starzeją się podczas użytkowania i uszkodzenie elementu może powodować znaczące straty. W celu zmniejszenia liczby uszkodzeń (strat) rozważa się dwie podstawowe strategie odnowy profilaktycznej: cykliczną (blokową) lub ze względu na wiek elementu (obiektu technicznego). Odnowa cykliczna następuje w ustalonych momentach czasowych  $x, 2x, 3x, \dots$  oraz w tych momentach, w których nastąpiło uszkodzenie ( $x$  oznacza okres wymiany profilaktycznej). Odnowa ze względu na wiek elementu następuje, gdy element osiągnie wiek  $x$  lub zostanie uszkodzony. Wybór rodzaju strategii zależy od różnych kryteriów. Przy odnowie cyklicznej możliwa jest odnowa bardzo „młodych” elementów. Odnowy ze względu na wiek (czas bezawaryjnej pracy) są planowane dla każdego elementu oddzielnie. Odnowa blokowa jest mniej skomplikowana w administrowaniu niż odnowa według wieku, ponieważ nie wymaga rejestrowania czasów uszkodzeń [14]. W tej pracy bada się głównie odnowę ze względu na wiek elementu. Za pierwszą pracą dotyczącą wymian blokowych i wymian według wieku uznaje się pracę [10].

Niech  $S_T(t)$  będzie prawdopodobieństwem tego, że odnawiany element w chwili  $T$  nie ulegnie uszkodzeniu do chwili  $t$ . Jeżeli  $F(t)$  jest dystrybuantą czasu pracy elementu,  $R(t) = 1 - F(t)$  funkcją niezawodności i  $n x \leq t \leq (n+1)x$ , to:

$$S_{Tx}(t) = R^n(x)R(t - x)$$

Można udowodnić, że funkcja  $S_{Tx}(t)$  jest rosnąca dla każdego  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna losowa  $T$  należy do klasy IFR. Średni czas do uszkodzenia elementu, przy założeniu, że odnowa prewencyjna odbywa się ze względu na wiek elementu, jest równy:

$$ET(x) = \frac{1}{F(x)_0} \int_0^x R(t) dt \quad (1)$$

Wartość średnia określona wzorem (1) będzie w dalszej części pracy podstawą do określenia nowej klasy rozkładów prawdopodobieństwa dla zmiennych losowych starzejących się. Dla wartości średniej  $ET(x)$  przy  $T \in$  IFR można uzyskać proste oszacowanie w postaci:

$$f(0) \leq \frac{1}{ET(x)} \leq \frac{1}{ET} \quad (2)$$

W dalszej części pracy pokazano, że nierówność (2) jest prawdziwa dla szerszej klasy niż IFR. Prawa strona nierówności (2) jest prawdziwa dla zmiennych losowych z klasy NBUE. Wartość średnia czasu między uszkodzeniami przy założeniu, że system posiada obsługę prewencyjną według wieku elementu wyrażającą się wzorem (1), była przedmiotem badania w pracach [4, 86].

Amari [4] uogólnił wyniki Mondro [86] i pokazał, że dla dowolnej zmiennej losowej  $T$  prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{R(x)}{F(x)} \leq ET(x) \leq \frac{x}{F(x)}$$

natomiast dla klasy IFRA pokazano, że:

$$\frac{-x}{\ln(R(x))} \leq ET(x) \leq \frac{x}{F(x)} \quad (3)$$

W dalszej części rozprawy pokazuje się możliwość oszacowania postaci (3) dla szerszej niż IFRA klasy rozkładów.

### 3.2. Model obsługu profilaktycznych Harriagi

Harriaga [55] przeanalizował model procesu eksploatacji dla pojedynczego obiektu technicznego podlegającego losowym uszkodzeniom. W cytowanej pracy formułuje się zadanie maksymalizacji zysku przypadającego na jednostkę czasu przy założeniu, że rozkład czasu do uszkodzenia jest dowolny. Program odnowy prewencyjnej realizowany przez okresowe inspekcje (przeгляdy) obiektu technicznego pozwala na redukcję liczby awarii i w rezultacie powiększenie oczekiwanego dochodu z pracy obiektu technicznego. Z drugiej strony inspekcje stanu obiektu technicznego związane są z różnymi kosztami materiałowymi, płacowymi i aparaturowymi. Na tych przesłankach buduje się zadanie poszukiwania optymalnego momentu inspekcji tak, aby oczekiwany zysk na jednostkę czasu był maksymalny. Przed opublikowaniem przez Harriagę pracy problem ten był analizowany przez Bakera [6] i Chunga [32]. Dla bardzo ogólnej klasy rozkładów prawdopodobieństwa czasu do uszkodzenia istnieje przynajmniej jeden optymalny przedział inspekcji, maksymalizujący oczekiwany zysk na jednostkę czasu [55]. Podano również warunki na to, aby optymalny przedział do inspekcji był jedyny. W celu dokładniejszego przedstawienia wyników pracy [55] wprowadzono oznaczenia i założenia:

- $z$  – zysk na jednostkę czasu, gdy obiekt techniczny pracuje,
- $c_r$  – koszt naprawy lub wymiany elementu (obektu technicznego) w przypadku uszkodzenia,
- $c_i$  – koszt planowanej inspekcji,
- $f(t)$  – gęstość prawdopodobieństwa czasu  $T$  do uszkodzenia,
- $F(t)$  – dystrybuanta zmiennej losowej  $T$ ,
- $R(t) = 1 - F(t)$  – funkcja niezawodności dla  $T$ ,
- $\lambda(t)$  – funkcja intensywności uszkodzeń,
- $x$  – długość przedziału inspekcji,
- $p(x)$  – oczekiwany zysk z pracy obiektu technicznego w jednym cyklu do inspekcji,
- $z(x)$  – oczekiwany zysk na jednostkę czasu w jednym cyklu.

Model matematyczny dla procesu eksploatacji budowano przy następujących założeniach:

- czasy inspekcji i czasy napraw są pomijalne,
- wszystkie uszkodzenia przynoszą takie same straty,
- inspekcja jest wolna od błędów,
- uszkodzenie obiektu zatrzymuje działania systemu,
- zmienne losowe wyrażające czas do uszkodzenia przed i po naprawie mają takie same rozkłady prawdopodobieństwa z dystrybuantą  $F(t)$ .

Dodatkowo zakłada się, że w pierwszym cyklu pracy obiekt techniczny jest sprawny. Możliwe są tylko dwie różne sytuacje:

- obiekt techniczny przepracował bezawaryjnie  $x$  jednostek i w tym momencie następuje inspekcja,
- uszkodzenie nastąpiło przed upływem  $x$  jednostek czasowych.

W tym przypadku oczekiwany zysk w jednym cyklu w przedziale czasu  $< 0, t >$  można zapisać jako:

$$p(x) = \text{zysk dla cyklu bez uszkodzenia} \cdot \text{prawdopodobieństwo wystąpienia cyklu bez awarii} + \text{zysk dla cyklu z uszkodzeniem} \cdot \text{prawdopodobieństwo cyklu z uszkodzeniem.}$$

Zysk dla cyklu bez uszkodzenia jest równy:

$$z_1(x) = z x - c_i$$

dlatego, że obiekt techniczny jest sprawny po inspekcji w czasie  $x$ . W cyklu z uszkodzeniem obiekt może ulec uszkodzeniu w każdej chwili  $t < x$  cyklu. Zysk w takim cyklu jest równy:

$$z_2(x) = E\{z t \mid t < x\} - c_i - c_r$$

Ostatnią równość można przedstawić w postaci:

$$z_2(x) = \frac{1}{F(x)} \int_0^x p t f(t) dt - c_i - c_r$$

Oczekiwany zysk w jednym cyklu jest równy:

$$P(x) = (z x - c_i) R(x) + \int_0^x p u f(u) du - (c_i + c_r) F(x)$$

Uwzględniając, że  $F(t) = 1 - R(t)$  i przekształcając ostatnią równość, otrzymano:

$$p(x) = p \int_0^x R(t) dt + c_r R(x) - c_r - c_i$$

Średni zysk na jednostkę czasu dla jednego cyklu można zapisać w postaci:

$$z(x) = (p \int_0^x R(t) dt + c_r R(x) - c_r - c_i) / x \quad (4)$$

Poczyn  $z_\mu$ , gdzie  $\mu = ET$  jest wartością średnią zysku w jednym cyklu bez awarii. W związku z powyższym zakłada się, że różnica  $z_\mu - c_i - c_r$  jest dodatnia. Gwarantuje to opłacalność użytkowania obiektu technicznego. Oczywiście są zatem równości:

$$z(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} z(t) = -\infty$$

oraz

$$z(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{zET - c_i - c_r}{t} = 0^+$$

Ostatnia równość oznacza, że istnieje takie  $t_1$ , że dla wszystkich  $t > t_1$  zachodzi  $z(t) > 0$ .

Z powyższego wynika, że istnieje przedział inspekcji, w którym zysk jest równy zero. Fakt ten dokładniej przedstawiony zostanie w następnym wniosku. Licznik po prawej stronie wzoru (4) oznaczono przez  $g(x)$ , zatem:

$$g(x) = p \int_0^x R(t) dt + c_r R(x) - c_r - c_i$$

**Wniosek 1.** Dla dowolnego rozkładu istnieje przynajmniej jeden przedział inspekcji.

Dowód jest oczywisty, ponieważ  $g(0) = -c_i$  i  $g(\infty) = z\mu - c_i - c_r > 0$ .

Zatem istnieje (niekoniecznie jedyny) przedział inspekcji  $\langle 0, x_b \rangle$ .

Jednak przy pewnych założeniach dotyczących funkcji intensywności uszkodzeń  $r(t)$  można pokazać, że  $x_b$  jest jedyny. Wynik ten ujmuje następujący lemat:

**Lemat 1.** Przedział inspekcji  $\langle 0, x_b \rangle$  jest jedyny dla każdego z następujących typów rozkładów czasu do uszkodzenia obiektu technicznego:

- stała intensywność uszkodzeń,
- malejąca funkcja intensywności uszkodzeń (DFR),
- rosnąca funkcja intensywności uszkodzeń (IFR).

Dowód. Pochodna funkcji  $g(x)$  względem  $x$  ma postać:

$$g'(x) = zR(x) - c_r f(x) = r(p / r - r(x)) / R(x)$$

Rozwiązanie równania  $g(x) = 0$  spełnia warunek:

$$r(x_0) = p / c_r$$

Wykorzystując z wniosku 1 fakt, że  $g(0) < 0$  i  $g(\infty) > 0$ , pokazano, że dla każdego z trzech powyższych przypadków istnieje jedyny przedział inspekcji.

- Jeśli funkcja intensywności uszkodzeń  $r(t)$  jest stała, to  $r(t) = 1 / \mu$ . Natomiast, jeśli  $z\mu - c_r > 0$ , to  $g'(x) > 0$  dla każdego  $x > 0$ .
- Dla malejącej funkcji intensywności uszkodzeń rozważono dwa przypadki. Pierwszy, gdy  $p / c_r > g(0)$ , wtedy dla wszystkich  $x$  zachodzi  $g'(x) > 0$ . W drugim przypadku funkcja  $f(t)$  przekracza wartość  $p / c_r$  w punkcie  $x_0$ . Zostanie pokazany, że  $g(x_0) < g(0)$ . Z faktu, że funkcja intensywności uszkodzeń jest malejąca wynika, że  $p / c_r = r(0) < r(x)$  dla wszystkich  $x < x_0$ . Stąd  $zR(x) < c_r f(x)$  dla wszystkich  $x < x_0$ . Całkując obustronnie ostatnią nierówność otrzymano

$$p \int_0^{x_0} R(t) dt = c_r F(x_0) = c_r (1 - R(x_0))$$

lub

$$z \int_0^{x_0} R(t) dt + c_r R(x_0) - c_r < 0$$

Odejmując obustronnie  $c_i$ :

$$g(x_0) < g(0)$$

Powyżej pokazano, że  $g(x)$  jest ściśle rosnąca w przedziale  $\langle x_0, \infty \rangle$  od wartości ujemnej  $g(x_0)$  do wartości dodatniej  $g(\infty) > 0$ . Stąd istnieje jedyny moment inspekcji w przedziale  $\langle x_0, \infty \rangle$ .

3. Jeśli funkcja intensywności uszkodzeń jest rosnąca, to  $g'(x) > 0$  dla wszystkich  $x < x_0$  i ujemna dla pozostałych  $x$ . Podobnie jak w przypadku poprzednim można stwierdzić, że:

$$g(x_0) > g(\infty)$$

Wynika stąd, że istnieje jedyny przedział inspekcji w przedziale  $\langle 0, x_0 \rangle$ .  $\square$

Podstawowym celem inspekcji periodycznej jest wyznaczenie optymalnego momentu inspekcji maksymalizującego zysk na jednostkę czasu. Pochodna funkcji  $z(x)$  ma postać:

$$z'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

gdzie:

$$h(x) = c_i + c_r - z \int_0^x u f(u) du - c_r (R(x) + x f(x))$$

Ostatnią równość można zapisać w postaci:

$$h(x) = c_i - \int_0^x u (f(u) + f'(u)) du$$

Z tej równości wynika, że:

$$h(0) = c_i > 0$$

$$h(+\infty) = c_i + c_r - z \mu < 0$$

Z powyższych nierówności wynika, że istnieje (niekoniecznie jedyny) przedział czasowy  $\langle 0, t^* \rangle$  maksymalizujący oczekiwany zysk na jednostkę czasu.

Optymalny zysk wyraża się wzorem:

$$z^* = pR(t^*) - c_r f(t^*)$$

lub inaczej

$$z^* = pR(t^*) (p - c_r r(t^*))$$

Ponadto można pokazać, że

$$h(x) = (c_r R(x) / x) (z c_r - r(x)) > 0$$

dla rosnących i malejących funkcji intensywności uszkodzeń. Pochodna funkcji  $h(x)$  względem  $x$  ma postać:

$$h'(x) = -x c_r f(x) (p / c_r - k(x))$$

gdzie:

$$k(x) = -f'(x) / F(x) \quad (5)$$

Przy każdym z trzech wyżej sformułowanych założeń na podstawie poniższego twierdzenia można określić optymalny moment inspekcji. Przed sformułowaniem tych warunków zostaną zdefiniowane klasy rozkładów prawdopodobieństwa.

**Definicja.** Funkcja  $f(t)$  nazywa się log-wypukłą (log-wklęsłą), jeżeli funkcja  $\ln(f(x))$  jest stale rosnąca (malejąca).

Log-wypukłość i log-wkłęśłość będą zapewniać jednoznaczność optymalnego rozwiązania równania  $h(x) = 0$ , a w konsekwencji wyznaczenie maksimum oczekiwanego zysku na jednostkę czasu. Zasadniczym wynikiem omawianej pracy jest:

**Twierdzenie 1.** Jeśli jest spełnione jedno z założeń:

- czas do uszkodzenia ma rozkład wykładniczy,
  - czas do uszkodzenia ma gęstość prawdopodobieństwa log-wypukłą,
  - czas do uszkodzenia ma gęstość prawdopodobieństwa log-wkłęśłą,
- to istnieje dokładnie jedno  $t_1$  maksymalizujące oczekiwany dochód na jednostkę czasu.

Dowód.

- Jeżeli czas do uszkodzenia ma rozkład wykładniczy, to podstawiając  $f(x) = (1/\mu) \exp(-x/\mu)$  do wzoru (5) otrzymuje się  $k(x) = 1/\mu$ . Wtedy  $h'(x) = -(x f(x)/\mu)(z\mu - c_r) < 0$ , stąd  $z\mu - c_r - c_i > 0$ . Z tego wynika, że funkcja  $h(x)$  jest ściśle malejąca w przedziale  $<0, \infty)$  od  $c_i$  do  $-z\mu + c_i + c_r < 0$  i istnieje dokładnie jeden optymalny moment inspekcji.
- Wykorzystując definicję log-wypukłości jest oczywiste, że  $k(x)$  jest ściśle malejąca i  $x^*$  jest jedyny. Jednak jeśli  $z/c_r < k(0)$ , to  $h'(x) > 0$  dla każdego  $x > x_f$  i  $h'(x) < 0$  dla  $x > x_f$ , gdzie  $x_f$  jest rozwiązaniem równania  $z/c_r = k(x)$ . Pokazuje to, że trzeba udowodnić, że:

$$h(x_f) > h(0) = c_i$$

Faktycznie, dla wszystkich  $x < x_f$  zachodzi  $h'(x) > 0$  lub równoważnie

$$t(z f(t) + c_r f'(t)) dt > 0$$

Po dodaniu do obu stron  $c_i$  otrzymano

$$h(x_f) > c_i = h(0) > 0.$$

Wynika stąd, że istnieje jedyny optymalny moment inspekcji w przedziale  $<x_f, \infty)$ , stąd  $h(x)$  jest ściśle rosnąca od  $h(x_f) > 0$  do  $h(\infty) < 0$ .

- Log-wkłęśłość implikuje, że  $k(x)$  jest ściśle rosnąca. Jeśli  $z/c_r > k(\infty)$ , to  $h'(x) < 0$  i istnieje jedyne  $x^*$ . Z drugiej strony, jeśli  $z/c_r < k(\infty)$ , to istnieje jedyne  $x_f$  takie, że  $p/c_r = k(x_f)$ . Podobnie jak w poprzednim przypadku można pokazać, że istnieje jedyne  $x^*$  w przedziale  $<0, x_f >$ .  $\square$

### 3.2.1. Przykłady numeryczne

W tym podpunkcie przedstawiono trzy przykłady numeryczne. Pierwsze dwa dotyczą przypadku, gdy czas do uszkodzenia jest zmienną losową z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń (rozkład gamma i rozkład Weibulla), w trzecim przypadku czas do uszkodzenia ma rozkład będący mieszaniną dwóch rozkładów: wykładniczego i rozkładu z liniową i rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń.

**Przykład 3.1.** Założono, że zmienna losowa  $T$  oznaczająca czas do uszkodzenia ma rozkład gamma z gęstością prawdopodobieństwa określoną w rozdziale 2 wzorem (1).

Funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla rozkładu gamma może mieć tylko jeden z dwóch kształtów DFR lub IFR [63].

Wyznaczanie wartości dystrybuanty  $F(x)$  zmiennej losowej  $T$  można wykonać tylko za pomocą całkowania numerycznego. We wszystkich znanych programach komputer-

wych zawierających metody statystyczne dostępna jest taka procedura numeryczna. Jeszcze większym problemem jest obliczanie wartości funkcji  $ET(x)$  określonej wzorem:

$$ET(x) = \int_0^x R(t) dt, \text{ gdzie } R(t) = 1 - F(t)$$

Jest oczywiste, że  $ET(\infty) = ET = a / b$ . Poniżej pokazano, że wartość funkcji  $ET(x)$  można wyrazić za pomocą dystrybuanty  $F(t)$  rozkładu gamma zwanej w literaturze niepełną funkcją gamma. Po prostych przekształceniach:

$$ET(x) = \int_0^x (1 - F(t)) dt = x - \int_0^x F(t) dt$$

Całkując przez części, otrzymano:

$$ET(x) = x R(x) + \int_0^x t f(t) dt$$

Podstawiając wzór na gęstość rozkładu gamma uzyskano:

$$ET(x) = x R(x) + \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^x t^a e^{-bt} dt$$

Stąd

$$ET(x) = x R(x) + \frac{\Gamma(a+1)}{b\Gamma(a)} \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^x t^a e^{-bt} dt$$

co daje ostatecznie

$$ET(x) = x R(x) + \frac{a}{b} \text{IN}\Gamma(x, a+1, b)$$

gdzie

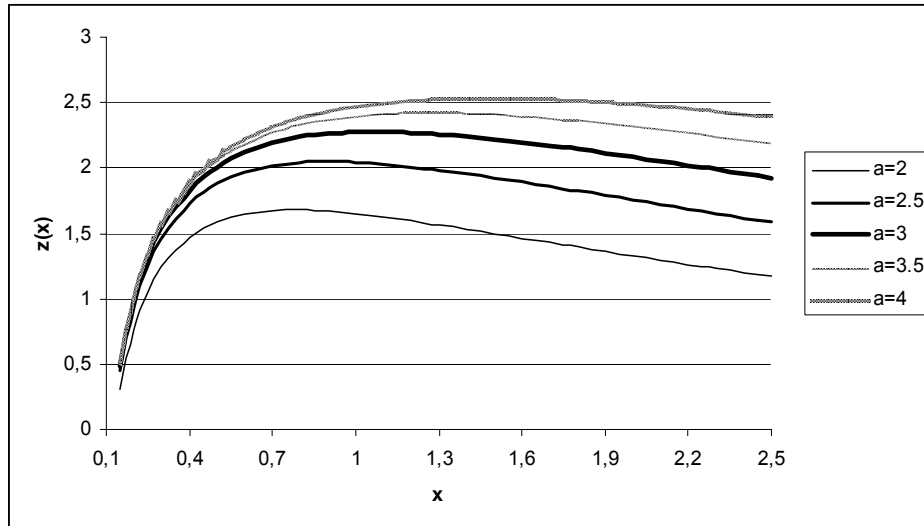
$\text{IN}\Gamma(x, a+1, b)$  jest dystrybuantą rozkładu gamma o parametrach  $a+1, b$ .

Do obliczeń numerycznych przyjęto dla modelu Harriagi wartości parametrów:

$$z = 3, c_r = 2, c_p = 0.5.$$

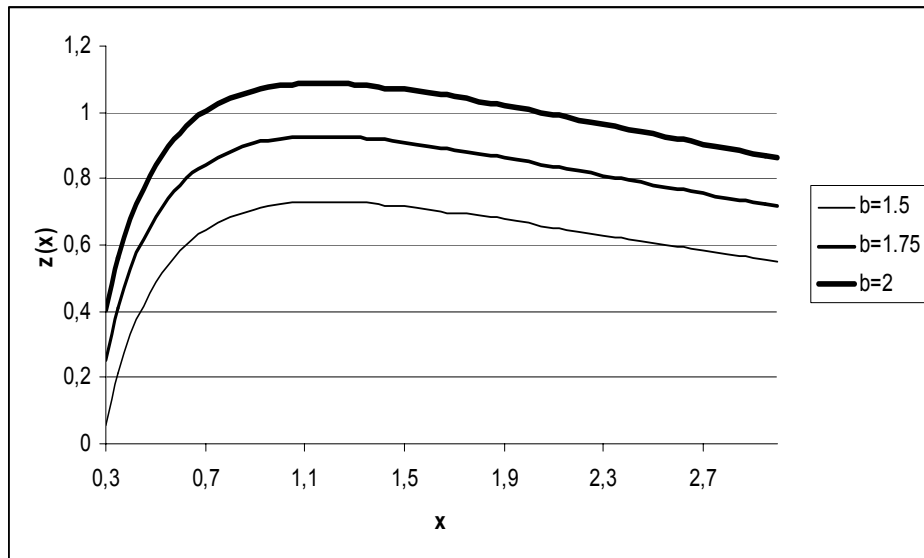
Dla rozkładu zmiennej losowej  $T$  przyjęto  $a \in \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$ ,  $b = 1$ . Wykresy wartości funkcji  $z(x)$  wyrażającej zysk na jednostkę czasu przedstawiono na rysunku 3.1.





Rys. 3.1. Przebieg funkcji kryterialnej  $z(x)$  dla pięciu wartości parametru  $a$

Dla tak dobranych parametrów modelu Harriagi funkcja osiągała dokładnie jedno maksimum. Dodatkowo wykonano obliczenia wartości funkcji  $z(x)$  dla szczególnego przypadku rozkładu gamma, rozkładu wykładniczego zakładając, że  $a = 1$ . Przyjmując wartości  $z$ ,  $c_r$  i  $c_p$  takie jak poprzednio i  $b \in \{1.5, 1.75, 2\}$  wyznaczono przykładowe przebiegi funkcji  $z(x)$ , które przedstawiono na rysunku 3.2. Zgodnie z przedstawionym w podrozdziale 3.2 twierdzeniem dla przypadku, gdy zmienna losowa  $T$  ma rozkład wykładniczy, funkcja  $z(x)$  może osiągnąć maksimum.



Rys. 3.2. Przebieg realizacji funkcji  $z(x)$  dla rozkładu wykładniczego

**Przykład 3.2.** Założono, że zmienna losowa  $T$  ma rozkład Weibulla z funkcją niezawodności:

$$R(x) = \exp(-a x^b) \text{ dla } x > 0, a, b > 0$$

Dla rozkładu Weibulla  $\lambda(t)$  jest funkcją rosnącą, jeśli  $b > 1$ . Aby wyznaczyć funkcję  $ET(x)$  trzeba obliczyć numeryczną wartość całki:

$$ET(x) = \int_0^x \exp(-at^b) dt$$

Stosując odpowiednie podstawienie otrzymano:

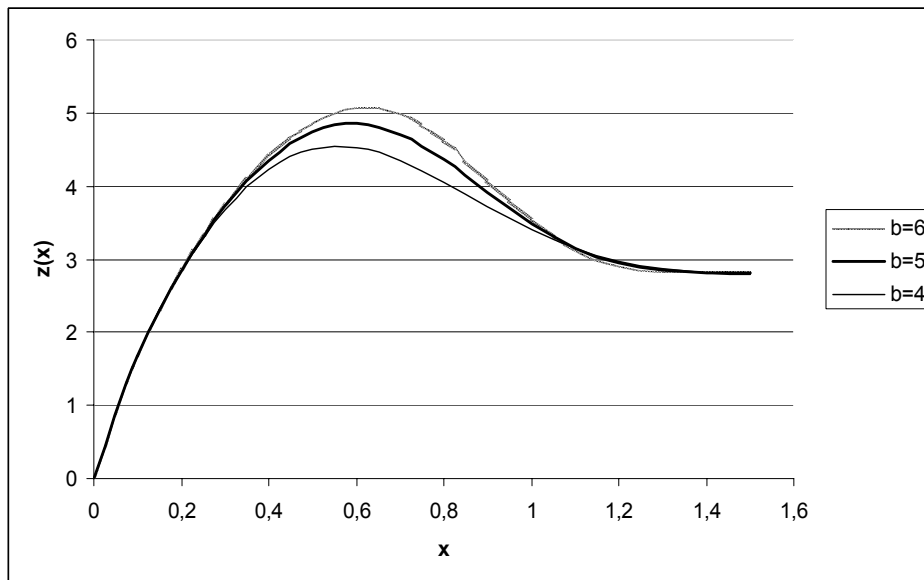
$$ET(x) = \frac{1}{b} \left( \frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \int_0^{\left( \frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{b}}} z^{\frac{1}{b}-1} e^{-z} dz$$

Ostatnią całkę można wyrazić za pomocą dystrybuanty rozkładu gamma:

$$ET(x) = \frac{1}{b} \left( \frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \Gamma \left( \frac{1}{b} \right) \text{IN} \Gamma \left( \left( \frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{b}}, \frac{1}{b}, 1 \right)$$

Obliczenia numeryczne wykonano dla wartości parametrów:  $z = 10$ ,  $c_r = 2$ ,  $c_p = 0.5$ .

Dla rozkładu zmiennej losowej  $T$  przyjęto  $a = 1$ ,  $b \in \{4, 5, 6\}$ . Wykresy trzech realizacji funkcji  $z(x)$  przedstawiono na rysunku 3.3.



Rys. 3.3. Przebieg realizacji funkcji  $z(x)$  dla rozkładu Weibulla

Dla tak dobranych parametrów każda z realizacji funkcji  $z(x)$  posiada dokładnie jedno maksimum.

**Przykład 3.3.** Założono, że zmienna losowa  $T$  oznaczająca czas do uszkodzenia ma rozkład będący mieszaniną rozkładu wykładniczego i rozkładu z funkcją intensywności uszkodzeń postaci  $\lambda_2(t) = a + b$ , gdzie  $a > 0$  i  $b \geq 0$ . Kumulowana funkcja intensywności uszkodzeń ma postać:

$$\Lambda_2(t) = \frac{1}{2} a t^2 + b t$$

Funkcję niezawodności odpowiadającą zmiennej  $T$  można zapisać jako:

$$R(x) = p \exp(-\lambda_1 x) + (1 - p) \exp(-\frac{1}{2} a t^2 - b t)$$

Dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa otrzymano:

$$f(x) = p \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x) + (1 - p) \frac{1}{2} (a t + b) \exp(-\frac{1}{2} a t^2 - b t)$$

Funkcję  $ET(x)$  określoną wzorem (1) można zatem zapisać w postaci:

$$ET(x) = \frac{p}{\lambda_1} (1 - \exp(-\lambda_1 x)) + (1 - p) \int_0^x \exp(-\frac{1}{2} a t^2 - b t) dt$$

Po odpowiednich przekształceniach funkcji podcałkowej, funkcję  $ET(x)$  można przedstawić następująco:

$$ET(x) = \frac{p}{\lambda_1} (1 - \exp(-\lambda_1 x)) + (1 - p) \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{2a}\right) \left[ \Phi\left(\frac{x + \frac{b}{a}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{b}{a}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right) \right]$$

gdzie  $\Phi(u)$  jest dystrybuantą zmiennej losowej  $U$  o rozkładzie normalnym (Gausa) standardowym, wyrażającą się wzorem:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp(-\frac{1}{2} t^2) dt$$

Całkę po prawej stronie powyższego wzoru można obliczyć jedynie numerycznie.

W każdym programie komputerowym zawierającym elementy statystyki matematycznej jest dostępna funkcja do obliczania wartości tej całki.

W rozdziale 7 tej pracy pokazano, że analizowana zmienna losowa  $T$  może mieć jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń. W modelu Harriagi nie uwzględnia się jako czasu do uszkodzenia zmiennej losowej z jednomodalną funkcją uszkodzeń. Okazuje się, że w takim przypadku można tak dobrać wartości parametrów modelu i parametrów rozkładu zmiennej  $T$ , aby funkcja  $z(t)$  osiągała wartość maksymalną. W analizowanym modelu przyjęto dla rozkładu zmiennej  $T$  następujące wartości parametrów:

$$\lambda_1 = 1,$$

$$a = 2,$$

$$b = 1,$$

$$p \in \{0.1, 0.2, 0.3\}.$$

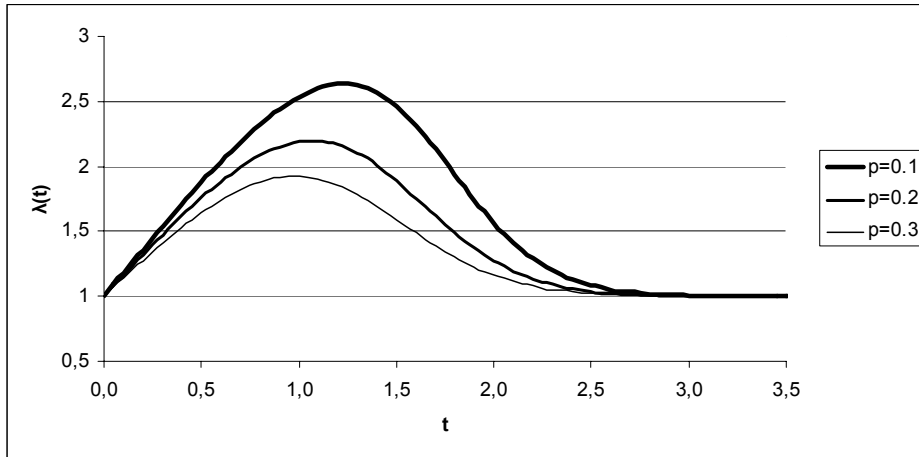
Dla danych dotyczących modelu Harriagi założono:

$$z = 10,$$

$$c_r = 2,$$

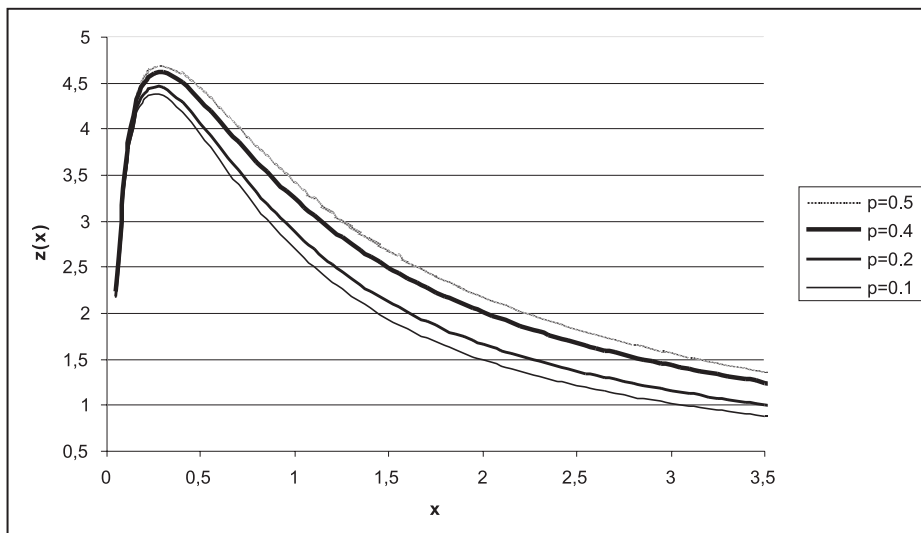
$$c_d = 0.5.$$

Na rysunku 3.4 przedstawiono trzy realizacje funkcji intensywności uszkodzeń dla zmiennej losowej  $T$ .



Rys. 3.4. Realizacje funkcji intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla przykładu 3.3

Na rysunku 3.5 przedstawiono odpowiadające trzem realizacjom funkcji  $\lambda(t)$  trzy realizacje funkcji  $z(x)$ . Parametry zmiennej losowej  $T$  dobrano tak, aby funkcja  $z(x)$  w trzech analizowanych przypadkach osiągała maksimum.



Rys. 3.5. Realizacje funkcji  $z(x)$  zysku na jednostkę czasu dla rozkładu mieszaniny

### 3.3. Optymalizacja wymian profilaktycznych oparta na zastosowaniu procesów semi-markowskich

W tym podrozdziale pokazano zastosowanie procesów semi-markowskich do znajdowania optymalnego czasu wymiany profilaktycznej. Rozważania oparto na pracy Grabskiego [45]. W procesie użytkowania obiektów technicznych stosuje się, oprócz napraw (odnów), również obsługi profilaktyczne. Powodem zastosowania obsługi profilaktycznych (prewencyjnych) jest fakt, że trwają one na ogół krócej i są tańsze od napraw. W podrozdziale tym zakłada się, że naprawy i obsługi profilaktyczne przywracają obiektowi pełną zdarność. Przyjmuje się ponadto, że chwilą rozpoczęcia naprawy jest chwila uszkodzenia, a chwilą rozpoczęcia obsługi profilaktycznej jest moment, gdy obiekt przepracuje bezawaryjnie  $x$  jednostek czasowych. Zadanie analizowane w cytowanej wyżej pracy polega na znalezieniu takiej wartości  $x$ , aby dochód przypadający na jednostkę czasu był maksymalny. Jako model procesu eksploatacji przyjęto 3-stanowy proces semi-markowski. Funkcją kryterialną jest średni dochód przypadający na jednostkę czasu, analizowany w dostatecznie długim przedziale czasu. Podobnie jak w poprzednim podrozdziale rozprawy analizuje się jeden obiekt techniczny. Badana funkcja kryterialna zależy od: rozkładu prawdopodobieństwa czasu poprawnej pracy obiektu, wartości średnich czasu trwania napraw i czasu obsługi profilaktycznej oraz dochodów i kosztów jednostkowych użytkowania obiektu technicznego. W cytowanej pracy zakłada się, że czas do uszkodzenia  $T_1$  jest nieujemną zmienną losową z dystrybuantą  $F(t)$ , gęstością  $f(t)$  i skończoną wartością średnią  $ET_1$ . Naprawa uszkodzonego obiektu trwa przez losowy czas  $T_2$  z wartością średnią  $ET_2$  spełniającą warunek  $0 < ET_2 < \infty$ . Losowy czas trwania obsługi profilaktycznej  $T_3$  spełnia warunek  $0 < ET_3 < \infty$ . Dochód na jednostkę czasu poprawnej pracy jest równy  $a$ , koszty naprawy i obsługi profilaktycznej na jednostkę czasu są odpowiednio równe  $b$  i  $c$ .

Poniżej podano zarys konstrukcji procesu stochastycznego, będącego modelem procesu eksploatacji obiektu. Przyjęto, że obiekt techniczny może znajdować się w jednym z trzech stanów:

$S_1$  – poprawna praca (użytkowanie obiektu),

$S_2$  – naprawa (odnowa),

$S_3$  – obsługa profilaktyczna.

Niech  $\{X(t), t \geq 0\}$  będzie procesem stochastycznym o zbiorze stanów  $S = \{1, 2, 3\}$  i niech  $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$  będą zmiennymi losowymi oznaczającymi chwile, w których następują zmiany stanów procesu. Zakłada się, że przy danym stanie w chwili  $\tau_n$  czas trwania tego stanu oraz stan osiągnięty w chwili  $\tau_{n+1}$  nie zależą stochastycznie od stanów procesu w chwili  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$  oraz czasów ich trwania. Można zatem zapisać:

$$\begin{aligned} P\{X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid X(\tau_n) = i, X(\tau_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(\tau_0) = i_0\} = \\ = P\{X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid X(\tau_n) = i\} \end{aligned}$$

Oznacza to, że proces  $X(t)$  jest procesem semi-markowskim. Jądro tego procesu określa się jako:

$$Q(t) = \{Q_{ij}(t): i, j \in S, t \geq 0\}$$

gdzie:

$$Q_{ij}(t) = P\{X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid X(\tau_n) = i\}, i, j \in S$$

Rozkład początkowy:

$$p_i^{(0)} = P \{X(0) = i\}, i \in S$$

W rozpatrywanym modelu jądro ma postać:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{21}(t) & 0 & 0 \\ Q_{31}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Niezerowe elementy jądra procesu zależą od zmiennych losowych  $T_1$ ,  $T_2$  i liczby  $x$  jednostek czasowych.

W szczególności:

$$Q_{12}(t) = \begin{cases} F(t) & \text{dla } t \leq x \\ F(x) & \text{dla } t > x \end{cases}$$

$$Q_{13}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq x \\ R(x) & \text{dla } t > x \end{cases}$$

$$Q_{21} = F_2(t)$$

$$Q_{31} = F_3(t)$$

gdzie  $F_2$ ,  $F_3$  są odpowiednio dystrybuantami zmiennych losowych  $T_2$  i  $T_3$ . Jako rozkład początkowy przyjęto:

$$p_i = P \{X(0) = i\} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = 1 \\ 0 & \text{dla } i = 2, 3 \end{cases}$$

Jądro  $Q(t)$  oraz rozkład początkowy procesu  $\{X(t): t \geq 0\}$  zostały określone, zatem zbudowano model procesu eksploatacji.

Do sformułowania zadania optymalizacji obsługi profilaktycznych obiektu technicznego trzeba wyznaczyć dodatkowe charakterystyki procesu eksploatacji. Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa  $X(\tau_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ma postać:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$p_{12} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{12}(t) = F(x)$$

$$p_{13} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{13}(t) = R(x)$$

$$p_{21} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{21}(t) = 1$$

$$p_{31} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{31}(t) = 1$$

Rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa, który w tym przypadku jest jednocześnie jego rozkładem granicznym obliczono rozwiązując układ równań:

$$\begin{aligned}
p_2^* + p_3^* &= p_1^* \\
p_1^* p_{12} &= p_2^* \\
p_2^* p_{13} &= p_3^* \\
p_1^* + p_2^* + p_3^* &= 1
\end{aligned}$$

Układ ten posiada jednoznaczne rozwiązanie w postaci:

$$\begin{aligned}
p_1^* &= \frac{1}{2} \\
p_2^* &= \frac{F(t)}{2} \\
p_3^* &= \frac{R(t)}{2}
\end{aligned}$$

Do budowania funkcji kryterialnej trzeba wykorzystać twierdzenie graniczne dla procesów semi-markowskich ze skończonym zbiorem stanów [56]. Jeśli proces semi-markowski  $\{X(t): t \geq 0\}$  o skończonym zbiorze stanów posiada włożony łańcuch Markowa  $\{X(\tau_n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  zawierający jedną klasę i wartości średnie czasów przebywania w stanach są dodatnie i skończone, to istnieją przy  $t \rightarrow \infty$  granice prawdopodobieństw stanów  $P_j(t) = P\{X(t) = j\}$  oraz:

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t) = \frac{p_j^* ET_j}{\sum_{j \in S} p_j^* ET_j}$$

Na podstawie cytowanego wyżej twierdzenia i wyznaczonych prawdopodobieństw granicznych  $p_j^*, j = 1, 2, 3$  prawdopodobieństwa graniczne dla procesu  $\{X(t): t \geq 0\}$  są następujące:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\int_0^x R(t) dt}{M(x)} \\
P_2 &= \frac{F(x) ET_2}{M(x)} \\
P_3 &= \frac{R(x) ET_3}{M(x)}
\end{aligned} \tag{6}$$

gdzie:

$$M(x) = \int_0^x R(t) dt + F(x) ET_2 + R(x) ET_3$$

Proces  $\{K_j(t): t \geq 0\}$  definiuje się jako:

$$K_j(t) = \int_0^t I_{\{j\}}(X(u)) du, j \in S, I_{\{j\}}(X(u)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } X(u) = j \\ 0 & \text{dla } X(u) \neq j \end{cases}$$

$K_j(t)$  oznacza sumaryczny czas przebywania procesu  $\{X(t): t \geq 0\}$  w stanie  $j$  w przedziale  $\langle 0, t \rangle$ .

Wielkość:

$$L(t) = a EK_1(t) - b EK_2(t) - c EK_3(t)$$

oznacza średni dochód z eksploatacji w przedziale  $\langle 0, t \rangle$ .

Granica (jeśli istnieje):

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(t)}{t}$$

jest średnim dochodem przypadającym na jednostkę czasu w długim przedziale czasowym.

Z określenia procesu  $K_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$  wynika, że:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{EK_j(t)}{t} = P_j \quad \text{dla } j = 1, 2, 3$$

Stąd:

$$I = a P_1 - b P_2 - c P_3$$

Uwzględniając (6) wzór dla  $I$  można zapisać w postaci:

$$I = \frac{\int_0^x a R(t) dt - b F(x) E T_2 - c R(x) E T_3}{M(x)} \quad (7)$$

Funkcja  $I = d(x)$  określona powyżej opisuje zależność średniego zysku przypadającego na jednostkę czasu od czasu użytkowania  $x$ .

Wprowadzono oznaczenia:

$\lambda(t) = f(t) / R(t)$  oznacza funkcję intensywności uszkodzeń,

$$B = (b - c) E T_2 E T_3,$$

$$C = (a + c) E T_3,$$

$$D = (a + b) E T_2,$$

$$A = C - D.$$

Warunek istnienia maksimum funkcji  $d(x)$ ,  $x \in \langle 0, \infty \rangle$  zawiera następujące :

**Twierdzenie 2.** Jeżeli czas zdatności obiektu technicznego  $T_1$  jest zmienną losową o rosnącej funkcji intensywności uszkodzeń w przedziale  $\langle 0, \infty \rangle$  oraz:

$$b \geq c$$

$$\lambda(0) \leq \frac{C}{B}$$

$$\lambda(\infty) E T_1 \geq \frac{1}{1 - \frac{C}{D}}$$

to istnieje dokładnie jedna liczba  $x^*$ , dla której funkcja  $d(x)$ ,  $x \in \langle 0, \infty \rangle$  określona wzorem (7) przyjmuje wartość maksymalną. Liczba  $x^*$  jest pierwiastkiem równania:



$$\left[ A \int_0^x R(t) dt - B \right] \lambda(x) + A R(x) + D = 0$$

Dla  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  funkcja kryterialna  $d(x)$  jest współczynnikiem gotowości obiektu:

$$d(x) = \frac{\int_0^x R(t) dt}{M(x)}$$

W tym przypadku zachodzi:

$$B = 0, C = ET_3, D = ET_2, A = ET_3 - ET_2$$

Licznik pochodnej funkcji  $d(T)$  można zapisać następująco:

$$h(x) = R(x) \left[ A \lambda(x) \int_0^x R(t) dt + AR(x) + D \right]$$

Zmiana znaku pochodnej zależy od wyrażenia w nawiasie.

Niech:

$$h_1(x) = A \left[ \lambda(x) \int_0^x R(t) dt - F(x) \right] + C$$

Po to, aby dla każdego  $x \in < 0, \infty$  zachodziła nierówność  $h_1(x) \leq h_1(0)$ , musi być prawdziwa nierówność:

$$h(x) = \lambda(x) \int_0^x R(t) dt - F(x) \geq 0$$

Rozkłady prawdopodobieństwa czasów do uszkodzenia spełniające powyższą nierówność będą badane w rozdziale 7 pracy.

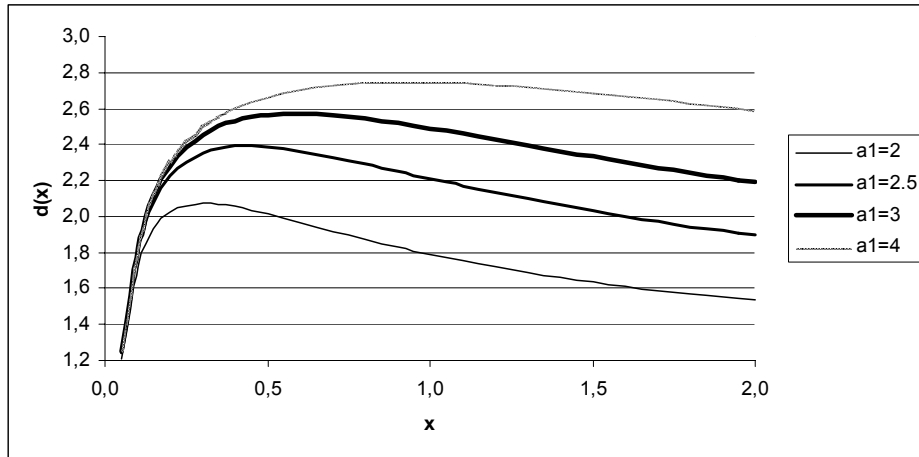
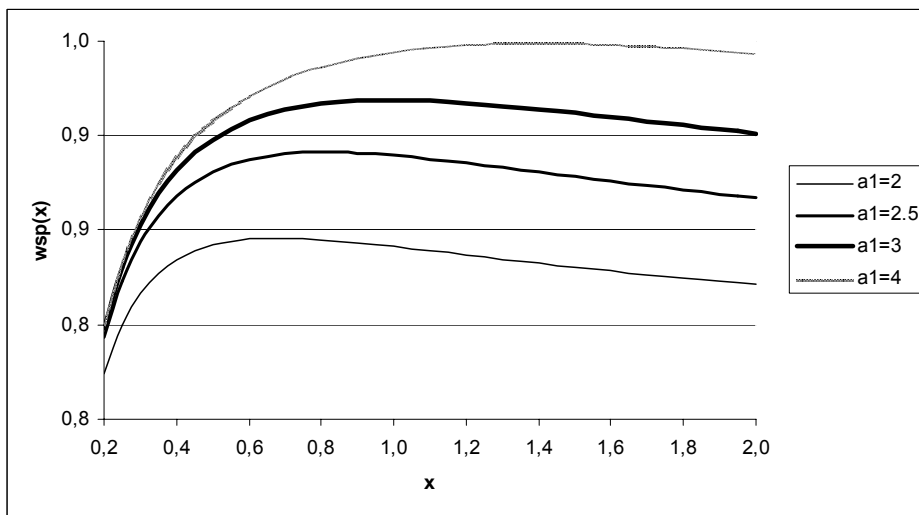
### 3.3.1. Przykłady numeryczne

Podobnie jak dla modelu Harriagi omówionego w podrozdziale 3.2 omówione będą trzy przykłady numeryczne pokazujące celowość wyznaczania maksimum zysku na jednostkę czasu.

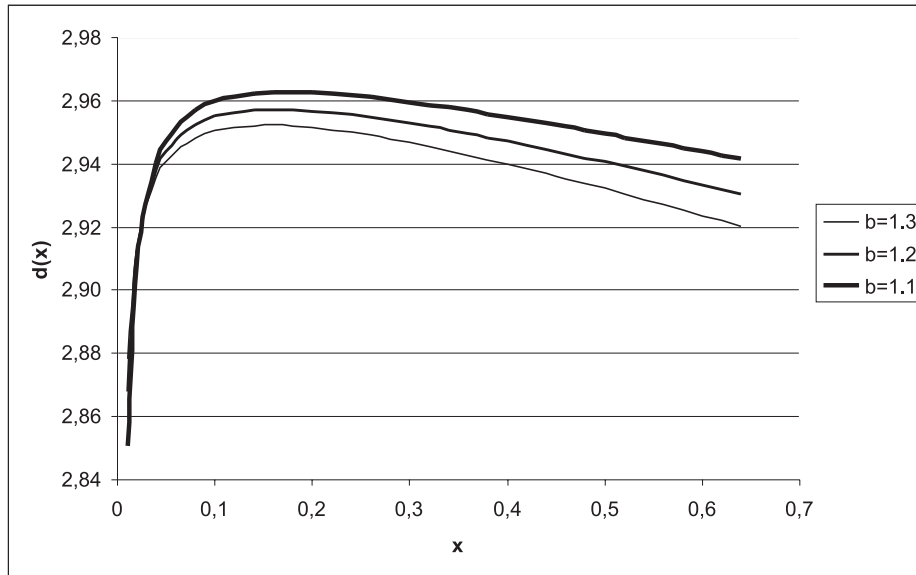
**Przykład 3.4.** Analogicznie do przykładu 3.1 z podrozdziału 3.3 zakłada się, że czas  $T$  do uszkodzenia ma rozkład gamma z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń. Przyjmuje się, że dla modelu Grabskiego:

$$\begin{aligned} a &= 3, \\ b &= 2, \\ c &= 0.5. \end{aligned}$$

Przyjmując dla rozkładu gamma wartość parametru kształtu  $a_1 \in \{2, 2.5, 3, 4\}$  i skali  $b_1 = 1$  wyznaczono trzy realizacje funkcji  $z(x)$  – zysku na jednostkę czasu (rys. 3.6). Przyjmując  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  otrzymano jako funkcję kryterialną współczynnik gotowości  $g(x)$ . Wykresy przebiegu współczynnika gotowości przedstawiono na rysunku 3.7. W obu przypadkach funkcje kryterialne osiągają jednoznaczne maksimum.

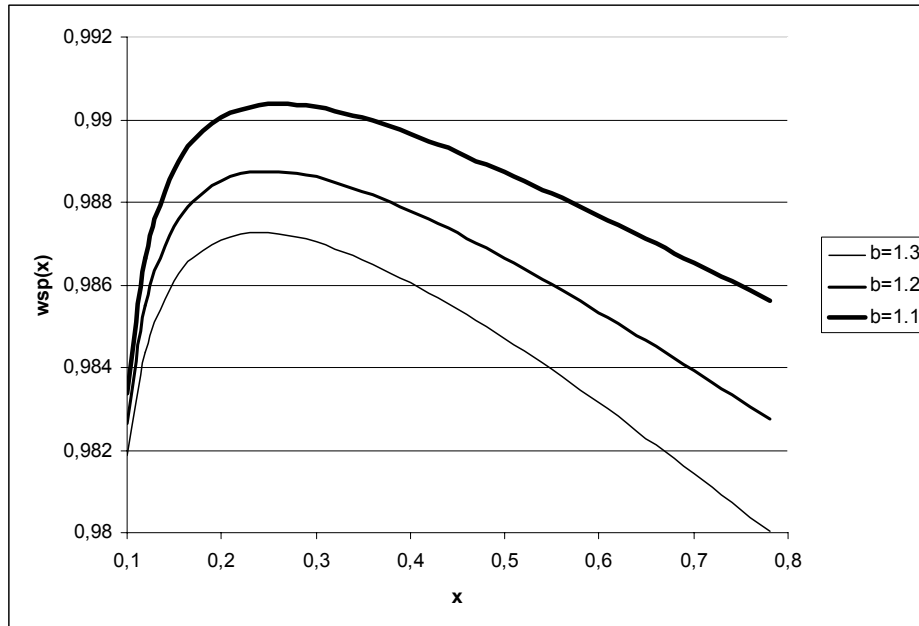
Rys. 3.6. Realizacje funkcji  $d(x)$  dla rozkładu gammaRys. 3.7. Realizacje współczynnika gotowości ( $x$ ) dla rozkładu gamma

**Przykład 3.5.** Zakłada się, że zmienna losowa  $T$  ma rozkład Weibulla. Obliczenia numeryczne wykonano dla następujących wartości parametrów modelu Grabskiego:  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0.5$ ,  $p_{12} = 0.5$ ,  $p_{13} = 0.5$ . Dla rozkładu zmiennej losowej  $T$  przyjęto:  $a_1 = 0.1$ ,  $b_1 \in \{1.1, 1.2, 1.3\}$ . Na rysunku 3.8 przedstawiono wykresy funkcji kryterialnej  $z(t)$  oznaczającej zysk na jednostkę czasu.



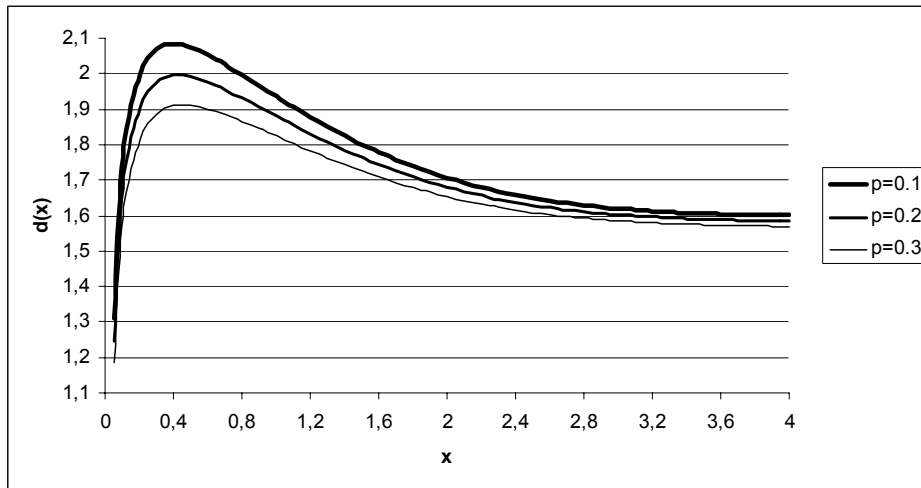
Rys. 3.8. Wykresy zależności zysku na jednostkę czasu  $d(x)$  dla rozkładu Weibulla

Na rysunku 3.9 przedstawiono wykresy zależności współczynnika gotowości od długości przedziału inspekcji.



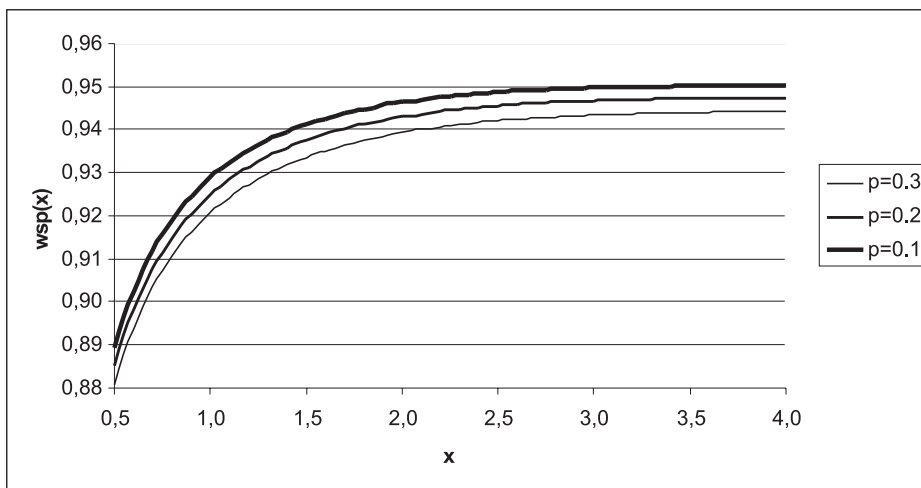
Rys. 3.9. Wykresy współczynnika gotowości ( $x$ ) dla rozkładu Weibulla

**Przykład 3.6.** Zakłada się, że zmienna losowa  $T$  ma rozkład będący mieszaniną rozkładu wykładniczego z rozkładem posiadającym rosnącą i liniową funkcję intensywności uszkodzeń. Obliczenia numeryczne wykonano dla następujących wartości parametrów modelu Grabskiego:  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0.5$ ,  $p_{12} = 0.5$ ,  $p_{13} = 0.5$ . Dla rozkładu zmiennej losowej  $T$  przyjęto  $a_1 = 0.2$ ,  $b_1 = 0.2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $p \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$ . Na rysunku 3.10 przedstawiono wykresy funkcji kryterialnej  $z(t)$  oznaczającej zysk na jednostkę czasu.



Rys. 3.10. Wykresy zależności zysku na jednostkę czasu  $d(x)$  dla rozkładu mieszaniny

Na rysunku 3.11 przedstawiono wykresy zależności współczynnika gotowości od długości przedziału inspekcji dla rozkładu będącego mieszaniną rozkładu wykładniczego z rozkładem posiadającym liniową i rosnącą funkcję intensywności uszkodzeń.



Rys. 3.11. Wykresy współczynnika gotowości ( $x$ ) dla mieszaniny

### 3.4. Model wymian profilaktycznych z gwarancją

W podrozdziale omówione będą wymiany według wieku elementów (obiektów) posiadających gwarancję producenta. Jako pierwsi pracę dotyczącą wymiany elementów według wieku opublikowali Barlow i Proshan [10, 11]. W następnych latach temat ten był rozwijany dla wielu przypadków szczególnych. Otrzymano wiele rozwiązań analitycznych (Berg [15], Berg i Epstein [16], Ingram i Schaeffer [57], Osaki i Nakagawa [92], Ross [99]). Na współczesnym rynku dużo produktów sprzedaje się z gwarancją producenta. Zadaniem gwarancji na produkt jest oferta dla kupującego co robić, gdy produkt ulegnie uszkodzeniu w okresie gwarancji. Gwarancja udzielona na produkt buduje także zachętę dla sprzedających do podnoszenia zobowiązań wobec klientów (kupujących), podnosi reputację producenta, może podnieść zyski i udział w rynku. Szeroką analizę zagadnień związanych z praktyką odnow prewencyjnych dla produktów (obiektów) z gwarancją przedstawiono w pracach Blischke i in. [21–23]. Dla produktów nienaprawialnych najczęściej stosuje się praktykę gwarancyjną polegającą na odnowie realizowanej przez wymianę na nowy element z gwarancją, zwaną wolną wymianą [21]. Rozważana polityka gwarancyjna polega na tym, że produkt uszkodzony w okresie gwarancji zostaje wymieniony na nowy posiadający pełną gwarancję. Modele matematyczne pozwalające na analizę kosztów polityki gwarancyjnej z wolną wymianą były badane przez Balcera i Sahina [8], Blischkego i Scheuera [23], Ritchkena i Fuha [98]. Ponadto Mi [84, 85], Ritchken i Fuh [98] analizowali różne praktyki utrzymania systemów eksploatacji uwzględniając różne czynniki w stosunku do obiektów z gwarancją. W podrozdziale 3.4 pracy skoncentrowano się na analizie odnawiania prewencyjnego produktu z gwarancją za pomocą wolnej wymiany według wieku. Rozważane w tym rozdziale obiekty mają rosnącą funkcję intensywności uszkodzeń, tzn. dystrybuanty czasów życia należą do klasy IFR. Jako funkcję kryterialną przyjmuje się oczekiwany koszt użytkowania obiektu w długim okresie czasu przypadający na jednostkę czasu. Udowodniono, że przy pewnych założeniach istnieje jednoznaczne minimum kosztu na jednostkę czasu. W dalszej części tego podrozdziału omówione zostaną szczegółowo wyniki pracy [109], zaś w rozdziale 6 tej pracy podane zostanie uogólnienie wyników publikacji [109].

#### 3.4.1. Model wymian bez gwarancji

W celu analizy wpływu gwarancji producenta na optymalny przedział użytkowania przedstawiono klasyczny model wymian według wieku. Przez  $t_0(x)$  oznaczono długość cyklu czasowego, gdy wiek wymiany jest równy  $x$  i produkt nie ma gwarancji ( $w = 0$ ). Jeśli  $T$  oznacza losowy czas życia, to:

$$t_0(x) = \begin{cases} T & \text{gdy } T \leq x \\ x & \text{gdy } T > x \end{cases}$$

gdzie  $x$  oznacza czas do wymiany. Przez  $c_0(x)$  oznaczono koszt cyklu,  $c_d$  koszt zlikwidowania skutków uszkodzenia,  $c_p$  koszt zakupu nowego elementu. Można zapisać:

$$c_0(x) = \begin{cases} c_d & \text{gdy } T \leq x \\ c_d + c_p & \text{gdy } T > x \end{cases}$$

Dla kosztu przypadającego na jednostkę czasu [99] oznaczanego przez  $k_0(x)$  zachodzi

$$k_0(x) = \frac{Ec_0(x)}{Et_0(x)} = \frac{c_p + c_d F(x)}{\int_0^x R(u) du}$$

Bazując na powyższej funkcji kryterialnej  $k_0(x)$  można wyznaczyć (jeśli istnieje) takie  $x^*$ , że  $k_0(x^*)$  jest minimalne.

### 3.4.2. Model wymian z gwarancją

W tym podrozdziale podaje się wzory analogiczne do ostatnich z uwzględnieniem gwarancji. Długość przedziału gwarancji oznaczono przez  $w$ . Jeśli zakupiony element posiada gwarancję, to czas do uszkodzenia lub wymiany prewencyjnej zależy od  $w$ . W związku z tym model wymian wg wieku dla elementów z gwarancją warto rozpatrywać dla dwóch przypadków:  $x \geq w$  i  $x < w$ .

*Przypadek 1:*  $x \geq w$ , czas wymiany jest równy okresowi gwarancji lub od niego większy  $w$ . Możliwe są wówczas trzy przypadki szczególne. Pierwszy, gdy element uszkodzi się przed upływem gwarancji ( $T \leq w$ ) i koszt tego jest równy  $c_d$ . Drugi, gdy uszkodzenie nastąpi po okresie gwarancyjnym przed wymianą prewencyjną ( $w < T < x$ ), wtedy pojawia się dodatkowy koszt zakupu  $c_p$ . Trzeci przypadek zachodzi, gdy  $T \geq x$ , wtedy koszt jest równy  $c_p$ . Stosując wymianę prewencyjną według wieku czas jednego cyklu można zapisać jako:

$$t_1(x) = \begin{cases} T & \text{gdy } T \leq w \\ T & \text{gdy } w < T < x \\ x & \text{gdy } T \geq x \end{cases}$$

Natomiast dla kosztów  $c_1(x)$  cyklu:

$$c_1(x) = \begin{cases} c_d & \text{gdy } T \leq w \\ c_d + c_p & \text{gdy } w < T < x \\ c_p & \text{gdy } T \geq x \end{cases}$$

Stąd oczekiwany koszt na jednostkę czasu wyraża się wzorem:

$$k_1(x) = \frac{Ec_1(x)}{Et_1(x)} = \frac{c_p R(w) + c_d F(x)}{\int_0^x R(u) du} \quad (8)$$

*Przypadek 2:*  $x < w$ , czas wymiany  $x$  jest mniejszy niż długość okresu gwarancji. Oznacza to, że wszystkie wymiany są prowadzone w okresie gwarancyjnym. Jeśli  $T \leq x$ , to przeprowadza się wymianę korekcyjną z kosztem  $c_d$ , natomiast jeśli  $T > x$ , to wykonuje się wymianę prewencyjną z kosztem  $c_p$ . Wówczas dla długości cyklu czasowego:

$$t_2(x) = \begin{cases} T & \text{gdy } T \leq x \\ x & \text{gdy } T > x \end{cases}$$

i dla kosztu cyklu:

$$c_2(x) = \begin{cases} c_d & \text{gdy } T \leq x \\ c_p & \text{gdy } T > x \end{cases}$$

Oczekiwany koszt na jednostkę czasu określa wzór:

$$k_2(x) = \frac{c_p R(x) + c_d F(x)}{\int_0^x R(u) du} \quad (9)$$

Z zależności (8) i (9) wynika, że:

$$k_1(w) = k_2(w) = \frac{c_p + (c_d - c_p)F(w)}{\int_0^T R(u) du}$$

Niech

$$k(x) = \begin{cases} k_1(x) & \text{gdy } x \geq w \\ k_2(x) & \text{gdy } x < w \end{cases}$$

Funkcja  $k(x)$  jest ciągła dla każdego  $x > 0$ . Jeśli zmienna losowa  $T$  oznaczająca czas do uszkodzenia posiada gęstość prawdopodobieństwa, to funkcja  $k(x)$  dla  $x \neq w$  jest różniczkowalna.

### 3.4.3. Optymalne strategie

W celu opracowania optymalnej strategii wyznaczono pierwszą pochodną funkcji  $k_0(x)$  i przyrównano ją do zera. Dla produktu bez gwarancji otrzymano:

$$k_0'(x) = \frac{c_d f(x) \int_0^x R(u) du - R(x) [c_p + c_d F(x)]}{\left[ \int_0^x R(u) du \right]^2} = \frac{c_d R(x) [\lambda(x) \int_0^x R(u) du - F(x) - \frac{c_p}{c_d}]}{\left[ \int_0^x R(u) du \right]^2}$$

Niech

$$H(x) = \lambda(x) \int_0^x R(u) du - F(x).$$

Funkcja  $H(x)$  odgrywa bardzo ważną rolę w zadaniach dotyczących wymian według wieku oraz w profilaktyce obiektów technicznych. Własności tej funkcji będą badane w rozdziałach 4 i 5. Podstawową własność funkcji  $H(x)$  ujmuje lemat 2.

**Lemat 2.** Jeśli  $\lambda(t)$  jest funkcją rosnącą ( $F \in \text{IFR}$ ) i  $F(0) = 0$ , to  $H(x)$  jest także funkcją rosnącą oraz

$$H(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = H(\infty) = r(\infty)ET - 1,$$

gdzie  $r(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} r(x)$ ,  $ET = \int_0^{\infty} R(u)du$  jest wartością średnią dla czasu życia  $T$ .

Dowód tego lematu przeprowadzono w pracy [109]. Opiera się on na założeniu, że funkcja  $\lambda(t)$  jest różniczkowalna dla każdego  $t \geq 0$ . W rozdziale 4 niniejszej pracy przeprowadzono ten dowód bez założenia o różniczkowalności funkcji  $\lambda(t)$ . Warunki istnienia minimum funkcji (8) ujmują poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 3.** Założono, że  $F \in \text{IFR}$ . Oznacza to, że funkcja  $\lambda(t)$  jest niemalejąca. Jeśli  $r(\infty) > \frac{1}{EX} \left(1 + \frac{c_p}{c_d}\right)$ , to istnieje jedna skończona wartość  $t^*$  dla produktu bez gwarancji minimalizująca oczekiwany koszt na jednostkę czasu i  $\min_{t \geq 0} k_0(t) = c_d \lambda(t^*)$ .

W przeciwnym przypadku  $t^* = \infty$  i  $k_0(\infty) = (c_p + c_d) / ET$ .

Dowód powyższego twierdzenia wynika z lematu 1. Podobną do powyższej analizę istnienia optymalnego wieku  $t^*$  wymiany elementu przy uwzględnieniu gwarancji przeprowadzono osobno dla dwóch przypadków:  $t < w$  i  $t \geq w$ . Dla  $t \geq w$  pierwsza pochodna  $k_1(t)$  ma postać:

$$k_1'(t) = \frac{c_d R(t) \left[ H(t) - R(w) \frac{c_p}{c_d} \right]}{\left[ \int_0^t R(u)du \right]^2} \quad (10)$$

Niech  $t_1^*$  będzie optymalną wartością  $t$  minimalizującą  $k_1(t)$  dane wzorem (8) w przedziale  $(w, \infty)$ . Na podstawie (10) można udowodnić poniższy lemat.

**Lemat 3.** Dla wolnej wymiany z gwarancją,  $T \in \text{IFR}$  i dla  $t \in (w, \infty)$  zachodzi:

- jeśli  $r(\infty) \leq \left(1 + \frac{R(w)c_p}{c_d}\right) \frac{1}{EX}$ , to  $t_1^* = \infty$  i  $k_1(t_1^*) = R(w)(c_p + c_d) / EX$
- jeśli  $H(w) \leq R(w) c_p / c_d < H(\infty)$ , to istnieje jedyne i skończone  $t_1^* > w$  takie, że  $H(t_1^*) = R(w) c_p / c_d$  oraz  $k_1(t_1^*) = c_d \lambda(t_1^*)$
- jeśli  $H(w) \geq R(w) c_p / c_d$ , to  $t_1^* = w$  oraz:

$$k_1(t_1^*) = k_1(w) = \frac{c_p + (c_d - c_p)R(w)}{\int_0^w R(u)du}$$

Jeżeli  $t < w$ , wówczas pochodna  $k_2'(t)$  ma postać:

$$k_2'(t) = \frac{R(t)}{\left[ \int_0^t R(u)du \right]^2} [(c_d - c_p)H(t) - c_p]$$



Niech  $t_2^*$  będzie optymalną wartością  $k_2(t)$  w przedziale  $(0, w)$ . Analogicznie do lematu 3 można sformułować lemat 4.

**Lemat 4.** Dla wolnej wymiany z gwarancją,  $T \in \text{IFR}$  i dla  $t \in (0, w)$  zachodzi

- jeśli  $c_d < c_p$  lub  $c_d \geq c_p$  i  $H(w) \leq c_p / (c_d - c_p)$ , to optymalna wartość  $t_2^* = w$  i  $k_2(t_2^*) = k_2(w)$ ,
- jeśli  $c_d > c_p$  i  $H(w) > c_p / (c_d - c_p)$ , to istnieje jedyne i skończone  $t_2^* < w$  takie, że  $H(t_2^*) > c_p / (c_d - c_p)$  i  $k_2(t_2^*) = (c_d - c_p) \lambda(t_2^*)$ .

Sformułowane wyżej warunki istnienia minimum kosztów na jednostkę czasu przy wymianie elementów z gwarancją przeprowadzono dla dwóch wariantów  $t \geq w$  i  $t < w$ . Lematy 3 i 4 dają rozwiązania optymalne dla każdego z przypadków osobno. Na podstawie lematów 3 i 4 można sformułować twierdzenie zawierające warunki istnienia optymalnego czasu wymiany.

**Twierdzenie 4.** Jeśli czas życia elementu ma dystrybuantę  $F \in \text{IFR}$  i rozpatrywana jest wolna wymiana elementów z gwarancją o okresie  $w$ , to dla  $t \in (0, w)$  zachodzi:

- dla  $c_d \leq c_p$ , jeśli  $H(w) < R(w) c_p / c_d$ , to  $t_w^* = t_1^* > w$ , w przeciwnym przypadku  $t^*(w) = w$ ,
- dla  $c_d > c_p$ 
  - jeśli  $H(w) < R(w) c_p / c_d$ , to  $t^*(w) = t_1^* > w$ ,
  - jeśli  $R(w) c_p / c_d \leq H(w) \leq c_p / (c_d - c_p)$ , to  $t_w^* = w$ ,
  - jeśli  $H(w) > c_p / (c_d - c_p)$  to  $t^*(w) = t_2^* < w$ .

Na podstawie twierdzenia 4 możliwe jest wyznaczenie optymalnego wieku wymiany  $t^*(w)$  dla obiektu z gwarancją. Jeśli koszt usunięcia uszkodzenia  $c_d$  jest mniejszy od kosztu zakupu  $c_p$ , wówczas optymalny wiek wymiany powinien być większy od okresu gwarancyjnego. Jeśli koszt usunięcia uszkodzenia  $c_d$  jest relatywnie duży, to obiekt może być wymieniony przed upływem gwarancji. Warunek na to, aby wymiana prewencyjna rozpoczęła się podczas okresu gwarancyjnego, jest następujący:

$$H(w) > c_p / (c_d - c_p) > 0$$

Podobnie można analizować przypadek, gdy optymalny czas wymiany  $t^*(w)$  przekracza  $w$ . Ponieważ przy założeniach pracy ( $T \in \text{IFR}$ ) funkcja  $H(w)$  rośnie, to istnieje funkcja odwrotna  $H^{-1}$ .

Z twierdzenia 4 wiadomo, że okres gwarancji spełnia warunek:

$$w < H^{-1}(R(w) c_p / c_d)$$

wówczas optymalny wiek wymiany jest większy niż okres gwarancji ( $t^* > w$ ).

Jeśli

$$H^{-1}(R(w) c_p / c_d) \leq w < H^{-1}(c_p / (c_d - c_p)), \text{ gdy } c_d > c_p$$

lub

$$w \geq H^{-1}(R(w) c_p / c_d), \text{ gdy } c_d \leq c_p$$

to optymalny wiek wymiany  $t^*(w)$  jest zawsze równy okresowi gwarancji  $w$ .

Jeśli

$$w > H^{-1}(c_p / (c_d - c_p))$$

dla przypadku  $c_d > c_p$ , to optymalny wiek wymiany  $t^*(w)$  jest mniejszy od okresu gwarancji  $w$  ( $t^*(w) < w$ ).

### 3.4.4. Porównanie wymian elementów z gwarancją i bez gwarancji

W tym podrozdziale porównano minimalne koszty wymian według wieku dla elementów z gwarancją z elementami bez gwarancji. Dla  $0 < w \leq t$  otrzymano:

$$k_0(t) - k_1(t) = \frac{c_p F(w)}{\int_0^t R(u) du}$$

natomiast dla  $0 < t < w$  zachodzi:

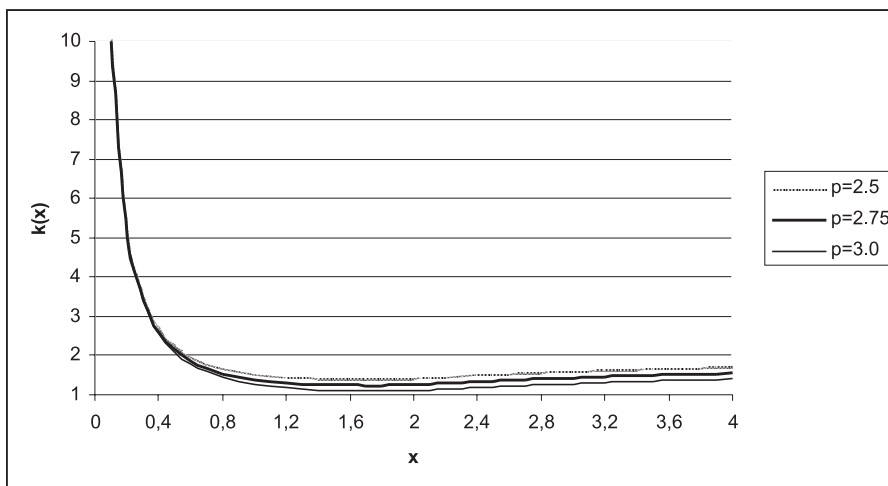
$$k_0(t) - k_2(t) = \frac{c_p F(t)}{\int_0^t R(u) du}$$

Z powyższego wynika, że dla każdego czasu wymiany  $t$  koszt na jednostkę czasu dla obiektu bez gwarancji jest zawsze większy od kosztu dla elementów z gwarancją.

### 3.4.5. Przykłady numeryczne

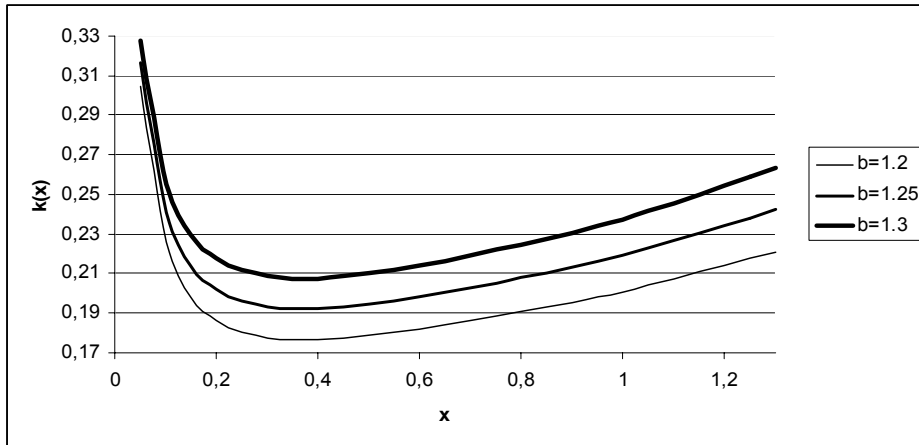
W podrozdziale przedstawiono możliwości zastosowania modelu wymian z gwarancją. Jako dane do modelu trzeba przyjąć wartości dla parametrów  $c_d$ ,  $c_p$  i  $w$  oraz założyć typ rozkładu prawdopodobieństwa dla zmiennej  $T$  oznaczającej czas do uszkodzenia obiektu technicznego.

**Przykład 3.7.** Analogicznie do poprzednich dwóch modeli przyjęto, że zmienna losowa  $T$  ma rozkład gamma z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń. Założono, że  $c_d = 4$ ,  $c_p = 1$ ,  $w = 2$ . Przyjęto następujące parametry rozkładu gamma:  $a \in \{2.5, 2.75, 3\}$ ,  $b = 1$ . Na rysunku 3.12 przedstawiono wykres strat  $k(x)$  na jednostkę czasu w zależności od czasu wymiany  $x$ . Parametry modelu dobrano tak, aby trzy realizowane w tym przykładzie funkcje strat osiągały wartość minimalną.



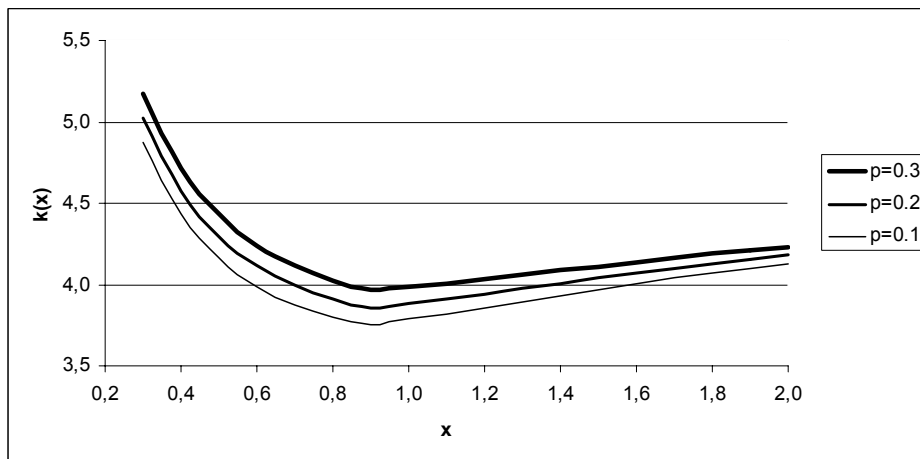
Rys. 3.12. Realizacja funkcji strat  $k(x)$  rozkładu gamma w modelu Yeha

**Przykład 3.8.** Przyjęto, że zmienna losowa  $T$  ma rozkład Weibulla z parametrami  $a = 0.1$ ,  $b \in \{1.2, 1.25, 1.3\}$ . Wartości parametrów modelu Yecha wynoszą:  $c_d = 4$ ,  $c_p = 1$ ,  $w = 2$ . Wykresy funkcji strat na jednostkę czasu przedstawiono na rysunku 3.13.



Rys. 3.13. Realizacja funkcji strat  $k(x)$  rozkładu Weibulla w modelu Yecha

**Przykład 3.9.** Założono, że zmienna losowa  $T$  ma rozkład prawdopodobieństwa będący mieszaniną rozkładu wykładniczego i rozkładu z liniową i rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń. W analizowanym przykładzie przyjęto dla modelu Yecha:  $c_d = 4$ ,  $c_p = 1$ ,  $w = 2$ , natomiast dla rozkładu czasu  $T$ :  $\lambda_1 = 1$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 0.5$ ,  $p \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$ . Na rysunku 3.14 przedstawiono wykresy strat na jednostkę czasu dla wybranych wartości parametrów.



Rys. 3.14. Realizacje funkcji strat na jednostkę czasu  $k(x)$  dla mieszaniny w modelu Yecha

## 4. Model wymiany prewencyjnej

### 4.1. Wstęp

Znane systemy eksploatacji modeluje się za pomocą procesu semi-markowskiego. Wynika to z faktu, że założenie wykładniczości rozkładów czasów przebywania obiektu technicznego w stanach eksploatacyjnych systemu, jest mało realistyczne. Proces semi-markowski  $\{X(t): t \geq 0\}$  jest procesem stochastycznym, w którym czasy między dwiema kolejnymi zmianami stanów są zmiennymi losowymi, których rozkład zależy od stanu z którego obiekt wychodzi.

W rozdziale przeprowadzono analizę efektywności wprowadzania dodatkowych obsłóg profilaktycznych po upływie  $x$  jednostek czasowych pracy obiektu technicznego. Sformułowano kryteria istnienia maksimum zysku na jednostkę czasu i współczynnika gotowości dla różnych klas rozkładów opisujących proces starzenia się obiektów technicznych. Wartości funkcji celu zależą od wartości średniej czasu trwania odnowy prewencyjnej, czasu naprawy, macierzy prawdopodobieństw przejścia włożonego w proces semi-markowski łańcucha Markowa. Problem wyznaczania optymalnego czasu odnowy profilaktycznej obiektu technicznego jest uogólnieniem zagadnienia badanego przez Grabskiego w pracy [45] i opisanego w rozdziale 3. Początkowe wyniki są zawarte w pracach [67, 70].

W rozprawie formułuje się kryteria istnienia maksimum zysku jednostkowego dla znacznie ogólniejszych założeń. Przedstawione w pracy [45] kryteria odnoszą się do klasy IFR rozkładów prawdopodobieństwa, natomiast kryteria sformułowane w tym rozdziale odnoszą się do klasy szerszej zwanej MTFR (Mean Time to Failure or Repair), zawartej między klasami IFRA a NBUE. Klasa MTFR zawiera niektóre rozkłady prawdopodobieństwa z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. W ostatnim punkcie rozdziału analizuje się przykłady zastosowania przedstawionej metody.

### 4.2. Oznaczenia i założenia

Założono, że proces semi-markowski  $X(t)$  ma przestrzeń stanów w postaci  $S = \{1, 2, 3\}$ . Jeśli  $X(t) = i$ , to obiekt techniczny znajduje się w stanie  $S_i$ . Stan  $S_1$  jest stanem poprawnej pracy (użytkowania obiektu),  $S_2$  stanem naprawy (odnowy) i  $S_3$  stanem obsługi profilaktycznej. Przez  $z_i$  oznaczono zysk na jednostkę czasu wynikający z przebywania obiektu w stanie  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Przyjęto, że  $z_1 > 0$ ,  $z_2 < 0$ ,  $z_3 < 0$ . Założono, że chwile czasowe:

$$\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots$$

są chwilami zmian stanów, natomiast  $v_n = \tau_n - \tau_{n-1}$  dla  $n \geq 1$ ,  $v_0 = 0$  są czasami przebywania obiektu technicznego w stanach.

Proces semi-markowski zadaje się za pomocą rozkładu początkowego w postaci:

$$P\{X(0) = i\} = p_i^{(0)}, i = 1, 2, 3$$

i jądra definiowanego jako macierz:

$$Q(t) = [Q_{ij}(t)], \text{ gdzie } i, j = 1, 2, 3$$

gdzie:

$$Q_{ij}(t) = P\{X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n < t \mid X(\tau_n) = i\}, i, j = 1, 2, 3$$

Macierz:

$$P = [p_{ij} = Q_{ij}(\infty)], \text{ gdzie } i, j = 1, 2, 3$$

jest macierzą włożonego łańcucha Markowa.

Jeśli zmienne losowe  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  oznaczają czas przebywania obiektu w stanie  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , to mają dystrybuanty:

$$F_i(t) = P\{T_i < t\} = P\{\tau_{n+1} - \tau_n < t \mid X(\tau_n) = j\}$$

wówczas:

$$F_i(t) = \sum_{j=1}^3 Q_{ij}(t), i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Niech  $T_{ij}$  oznacza czas przebywania obiektu w stanie  $S_i$  pod warunkiem, że następnym stanem będzie  $S_j$ . Dystrybuantę zmiennej losowej  $T_{ij}$  definiuje się następująco:

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}} & \text{dla } p_{ij} > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (2)$$

Wiadomo, że:

$$F_{ij}(t) = P\{\tau_{n+1} - \tau_n < t \mid X(\tau_{n+1}) = j, X(\tau_n) = i\}.$$

Ponadto przyjęto, że wartości średnie  $ET_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  są skończone, dodatnie i łańcuch Markowa  $X(\tau_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  posiada jedną ergodyczną klasę. Na podstawie tych założeń i pracy [56] wywnioskowano, że istnieją prawdopodobieństwa graniczne:

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j \mid X(0) = i\} \text{ dla } i = 1, 2, 3$$

w postaci:

$$P_j = \frac{p_j^* ET_j}{\sum_{k=1}^3 p_k^* ET_k}, \quad (3)$$

gdzie  $p_j^*$ ,  $j = 1, 2, 3$  są prawdopodobieństwami granicznymi włożonego łańcucha Markowa  $X(\tau_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  z macierzą prawdopodobieństwa przejść  $P = [p_{ij}]$ , gdzie  $p_{ij} = Q_{ij}(\infty)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Prawdopodobieństwa  $p_j^*$ ,  $j = 1, 2, 3$  są rozwiązaniami układu równań liniowych:

$$\sum_{i=1}^3 p_i^* p_{ij} = p_j^*, i, j = 1, 2, 3$$

z warunkiem:

$$\sum_{i=1}^3 p_i^* = 1$$

### 4.3. Funkcja kryterialna w przypadku ogólnym

Założono, że jądro  $Q(t)$  jest złożone z funkcji ciągłych. Zdefiniowano proces:

$$K_j(t) = \int_0^t I\{X(u) = j\} du, \quad j = 1, 2, 3$$

gdzie:

$$I\{X(u) = j\} = \begin{cases} 1 & \text{dla } X(u) = j \\ 0 & \text{dla } X(u) \neq j \end{cases}$$

oznacza całkowity czas przebywania procesu  $X(t)$  w stanie  $S_j$  w przedziale czasowym  $\langle 0, t \rangle$ .

Wartość:

$$L(t) = \sum_{i=1}^3 z_i EK_i(t)$$

oznacza oczekiwany zysk z pracy obiektu technicznego w przedziale czasowym  $\langle 0, t \rangle$ .

Granica:

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(t)}{t}$$

jest wartością średnią zysku przypadającego na jednostkę czasu w nieskończonym przedziale czasowym. Wartość  $L$  jest podstawą do konstrukcji funkcji celu. Na podstawie definicji procesu  $K_j(t)$   $j = 1, 2, 3$  otrzymano:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{EK_j(t)}{t} = P_j, \quad j = 1, 2, 3$$

Stąd:

$$L = \sum_{i=1}^3 z_i P_i$$

Zgodnie z (3) uzyskano:

$$L = \frac{\sum_{i=1}^3 z_i p_i^* ET_i}{\sum_{i=1}^3 p_i^* ET_i} \quad (4)$$

Konstrukcja funkcji (4) jest podobna do konstrukcji funkcji celu przedstawionej w pracy [45].

Zmienną losową  $T_1(x)$ ,  $x \geq 0$  zdefiniowano następująco:

$$T_1(x) = \begin{cases} T_1, & \text{jeśli } T_1 < x \\ x, & \text{jeśli } T_1 \geq x \end{cases} \quad (5)$$

Jeśli czas pobytu  $T_1$  w stanie 1 jest mniejszy niż  $x$ , to obiekt techniczny przechodzi ze stanu 1 do stanu 2 lub 3. Jeśli  $T_1 \geq x$ , to obiekt zmienia stan z 1 na 3. Dalej rozważa się proces

semi-markowski z macierzą przejścia  $P_x = [p_{ij}(x)]$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  włożonego łańcucha Markowa. Elementy pierwszego wiersza macierzy  $P_x$  zależą od  $x$ . Dla  $p_{13}(x)$  otrzymano:

$$\begin{aligned} p_{13}(x) &= P\{X(\tau_{n+1}) = 3 \mid X(\tau_n) = 1\} \\ &= P\{X(\tau_{n+1}) = 3 \mid X(\tau_n) = 1, T_1 < x\} P\{T_1 < x \mid X(\tau_n) = 1\} \\ &+ P\{X(\tau_{n+1}) = 3 \mid X(\tau_n) = 1, T_1 \geq x\} P\{T_1 \geq x \mid X(\tau_n) = 1\} \end{aligned}$$

Na podstawie (5) uzyskano:

$$P\{X(\tau_{n+1}) = 3 \mid X(\tau_n) = 1, T_1 \geq x\} = 1$$

Wykorzystując własności prawdopodobieństwa warunkowego otrzymano:

$$\begin{aligned} P\{X(\tau_{n+1}) = 3 \mid X(\tau_n) = 1, T_1 < x\} \\ = P\{X(\tau_{n+1}) = 3, T_1 < x \mid X(\tau_n) = 1\} / P\{T_1 < x \mid X(\tau_n) = 1\} = Q_{13}(x) / F_1(x) \end{aligned}$$

stąd

$$p_{13}(x) = Q_{13}(x) + R_1(x), \text{ gdzie } R_1(x) = 1 - F_1(x)$$

Wykorzystując (2):

$$p_{13}(x) = p_{13} F_{13}(x) + R_1(x)$$

Podobnie, dla prawdopodobieństwa  $p_{12}(x)$ , otrzymano:

$$\begin{aligned} p_{12}(x) &= P\{X(\tau_{n+1}) = 2 \mid X(\tau_n) = 1\} \\ &= P\{X(\tau_{n+1}) = 2 \mid X(\tau_n) = 1, T_1 < x\} P\{T_1 < x \mid X(\tau_n) = 1\} \\ &+ P\{X(\tau_{n+1}) = 2 \mid X(\tau_n) = 1, T_1 \geq x\} P\{T_1 \geq x \mid X(\tau_n) = 1\} \end{aligned}$$

Na podstawie definicji (5) wywnioskowano, że:

$$P\{X(\tau_{n+1}) = 2 \mid X(\tau_n) = 1, T_1 \geq x\} = 0$$

stąd:

$$P\{X(\tau_{n+1}) = 2 \mid X(\tau_n) = 1, T_1 < x\} = Q_{12}(x) / F_1(x)$$

i:

$$p_{12}(x) = Q_{12}(x) = p_{12} F_{12}(x)$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia  $P_x$  jest następująca:

$$P_x = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} F_{12}(x) & p_{13} F_{13}(x) + R_1(x) \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Funkcję kryterialną można zapisać w postaci:

$$g(x) = \frac{ET_1(x)z_1 p_1^*(x) + ET_2 z_2 p_2^*(x) + ET_3 z_3 p_3^*(x)}{ET_1(x)p_1^*(x) + ET_2 p_2^*(x) + ET_3 p_3^*(x)} \quad (6)$$

gdzie  $p_i^*(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  są prawdopodobieństwami granicznymi łańcucha Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejścia  $P_x$ ,  $ET_1(x)$  jest wartością średnią zmiennej losowej  $T_1(x)$ . Dla wartości średniej  $ET_1(x)$  można zauważyć, że:

$$ET_1(x) = \int_0^x dF_1(t) + xP\{T_1 \geq x\}$$

Całkując przez części otrzymano:

$$ET_1(x) = \int_0^x R_1(t) dt \quad (7)$$

Prawdopodobieństwa graniczne  $p_i^*(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  spełniają układ równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} -1 & p_{21} & p_{31} \\ p_{12}F_{12}(x) & -1 & p_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^*(x) \\ p_2^*(x) \\ p_3^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Wykorzystując twierdzenie Cramera, wyznaczono rozwiązanie układu równań:

$$\begin{aligned} p_1^*(x) &= (p_{21} p_{32} + p_{31}) / W(x) \\ p_2^*(x) &= (p_{32} + p_{12} p_{31} F_{12}(x)) / W(x) \\ p_3^*(x) &= (1 - p_{21} p_{12} F_{12}(x)) / W(x) \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie  $W(x)$  jest wyznacznikiem głównym układu równań liniowych (8). Wykorzystując (9) funkcję kryterialną można zapisać jako:

$$g(x) = \frac{Az_1 ET_1(x) + B_1 F_{12}(x) + C_1}{A ET_1(x) + B F_{12}(x) + C} \quad (10)$$

gdzie współczynniki  $A, B, B_1, C, C_1$  można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} A &= p_{21} p_{32} + p_{31} \\ B_1 &= p_{12} (z_2 ET_2 p_{31} - z_3 ET_3 p_{21}) \\ B &= p_{12} (ET_2 p_{31} - ET_3 p_{21}) \\ C_1 &= z_2 ET_2 p_{32} + z_3 ET_3 \\ C &= ET_2 p_{32} + ET_3 \end{aligned}$$

Pochodną pierwszego rzędu funkcji kryterialnej (10) względem  $x$  zapisano w postaci:

$$g'(x) = \frac{1}{M^2(x)} \{ \alpha (f_{12}(x) ET_1(x) - F_{12}(x) R_1(x)) + \beta R_1(x) + \gamma f_{12}(x) \} \quad (11)$$

gdzie  $F_1(x)$ ,  $F_{12}(x)$  są dystrybuantami zmiennych losowych  $T_1$  i  $T_{12}$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_{12}(x)$  są gęstościami prawdopodobieństwa zmiennych losowych  $T_1$  i  $T_{12}$ ,  $M(x)$  jest mianownikiem wyrażenia (10). Współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  zdefiniowano następująco:

$$\begin{aligned} \alpha &= A p_{12} [ET_2 p_{31} (z_2 - z_1) + ET_3 p_{21} (z_1 - z_3)] \\ \beta &= A [ET_2 p_{32} (z_1 - z_2) + ET_2 (z_1 - z_3)] \\ \gamma &= A ET_2 ET_3 (z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (12)$$

Jeśli  $ET_2 p_{31} \geq ET_3 p_{32}$ , to dla pochodnej pierwszego rzędu funkcji  $M(x)$  otrzymano:

$$M'(x) = A R_1(x) + B f_{12}(x) \geq 0 \text{ dla } x \geq 0$$

Z powyższego wynika, że  $M(x)$  jest niemalejąca i:

$$M(x) \geq M(0) = C > 0$$



stąd:

$$M(x) > 0 \text{ dla } x \geq 0$$

W dalszych rozważaniach założono, że:

$$\begin{aligned} z_1 > 0, z_2 < 0, z_3 < 0 \\ z_2 < z_3 \\ ET_2 p_{31} \geq ET_3 p_{32} \end{aligned} \quad (13)$$

Z założeń tych wywnioskowano, że:

$$\alpha < 0, \beta > 0, \gamma < 0 \quad (14)$$

#### 4.4. Warunki istnienia maksimum funkcji kryterialnej

W celu sformułowania warunków istnienia maksimum funkcji kryterialnej  $g(x)$  zdefiniowano funkcję:

$$r_{12}(x) = f_{12}(x) ET_1(x) - F_{12}(x)R_1(x)$$

##### Lemat 1.

Warunek  $r_{12}(x) = 0$  dla  $x \geq 0$  jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$F_{12}(x) = ET_1(x) / ET_1$$

Zmienna losowa  $T_{12}$  ma taki sam rozkład jak zmienna losowa z dystrybuantą:

$$ET_1(x) / ET_1$$

Dowód. Warunek

$$r_{12}(x) = 0 \text{ dla } x \geq 0$$

jest równoważny warunkowi:

$$\frac{f_{12}(x)}{F_{12}(x)} = \frac{R_1(x)}{ET_1(x)} \text{ dla } x \text{ takich, że } F_{12}(x) > 0 \text{ i } ET_1(x) > 0.$$

Całkując obustronnie otrzymano:

$$F_{12}(x) = C_2 ET_1(x),$$

gdzie  $C_2$  jest stałą.

Z powyższej równości i z tego, że:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ET_1(x) = ET_1$$

uzyskano  $C_2 = 1 / ET_1$ , co kończy dowód lematu 1.  $\square$

Rozkład z dystrybuantą  $ET_1(x) / ET_1$  nazywa się rozkładem równoważnym [35, 41]. Odgrywa on bardzo ważną rolę w teorii odnowy.

**Lemat 2.**

Jeśli spełniony jest warunek:

$$r_{12}(x) = 0 \text{ dla } x \geq 0$$

to pierwsza pochodna  $g'(x)$  nie zmienia znaku dla  $x \geq 0$ .

Dowód. Jeśli:

$$r_{12}(x) = 0$$

to z (11) otrzymuje się:

$$g'(x) = \frac{R_1(x)}{M^2(x)} \left\{ \beta + \frac{\gamma f_{12}(x)}{R_1(x)} \right\}$$

Na podstawie Lematu 1 otrzymano:

$$g'(x) = \frac{R_1(x)}{M^2(x)} \left\{ \beta + \frac{\gamma}{ET_1} \right\}$$

Z ostatniego wzoru wywnioskowano, że pochodna  $g'(x)$  nie zmienia znaku.  $\square$

Z lematu 2 wynika, że jeśli spełniony jest warunek  $r_{12}(x) = 0$ , to funkcja kryterialna  $g(x)$  nie osiąga maksimum.

W dalszej analizie warunków istnienia maksimum funkcji  $g(x)$  badano funkcję:

$$h_{12}(x) = \alpha s_{12}(x) + \beta + \gamma \lambda_{12}(x)$$

gdzie:

$$s_{12}(x) = ET_1(x) \lambda_{12}(x) - F_{12}(x)$$

$$\lambda_{12}(x) = \frac{f_{12}(x)}{R_1(x)}$$

**Lemat 3.**

Jeśli  $\lambda_{12}(x)$  jest niemalejąca, to  $s_{12}(x)$  jest niemalejąca. Jeśli  $\lambda_{12}(x)$  jest nierosnąca, to  $s_{12}(x)$  jest nierosnąca.

Dowód. Rozważając różnicę:

$$s_{12}(x+y) - s_{12}(x) \text{ dla } x, y \geq 0$$

otrzymano:

$$\begin{aligned} s_{12}(x+y) - s_{12}(x) &= ET_1(x) [\lambda_{12}(x+y) - \lambda_{12}(x)] + \lambda_{12}(x+y)ET_1(x+y) - F_{12}(x+y) + \\ &\quad - [\lambda_{12}(x+y)ET_1(x) - F_{12}(x)] \end{aligned} \quad (15)$$

Przyjmując oznaczenia:

$$s(t) = \lambda_{12}(x+y)ET_1(x+t) - F_{12}(x+t), \text{ gdzie } 0 \leq t \leq y$$

dla pierwszej pochodnej otrzymano:

$$\begin{aligned} s'(t) &= \lambda_{12}(x+y)R_1(x+t) - f_{12}(x+t) = \lambda_{12}(x+y)R_1(x+t) - \lambda_{12}(x+t)R_1(x+t) = \\ &= [\lambda_{12}(x+y) - \lambda_{12}(x+t)]R_1(x+t) \end{aligned}$$

Jeśli  $0 \leq t \leq y$ , to dla  $\lambda_{12}(x)$  niemalejącej mamy:

$$s'(t) \geq 0 \text{ i } s(t) \geq s(0)$$

Jeśli  $\lambda_{12}(x)$  jest niemalejąca, to z powyższego i z (15) otrzymano:

$$s_{12}(x+y) - s_{12}(x) \geq 0.$$

Jeśli  $\lambda_{12}(x)$  jest nierosnąca, to dowód jest analogiczny.  $\square$

**Lemat 4.**

Jeśli  $\lambda_{12}(x)$  jest nierosnąca, to  $h_{12}(x)$  jest niemalejąca i jeśli  $\lambda_{12}(x)$  jest niemalejąca, to  $h_{12}(x)$  jest nierosnąca.

Dowód. Rozważając różnicę:

$$h_{12}(x+y) - h_{12}(x) \text{ for } (x, y \geq 0)$$

otrzymano:

$$h_{12}(x+y) - h_{12}(x) = \alpha [s_{12}(x+y) - s_{12}(x)] + \gamma [\lambda_{12}(x+y) - \lambda_{12}(x)]$$

Z nierówności (14) i z lematu 3 można wnioskować, że:

$$\alpha [s_{12}(x+y) - s_{12}(x)] \leq 0 \text{ and } \gamma [\lambda_{12}(x+y) - \lambda_{12}(x)] \leq 0$$

stąd:

$$h_{12}(x+y) - h_{12}(x) \leq 0$$

Dowód przypadku, gdy  $\lambda_{12}(x)$  jest niemalejąca, jest analogiczny.  $\square$

W naszych dalszych rozważaniach, zostaną rozpatrzone trzy przypadki dla funkcji  $\lambda_{12}(x)$ , mianowicie:

- a) funkcja  $\lambda_{12}(x)$  jest niemalejąca do  $+\infty$ ,
- b) funkcja  $\lambda_{12}(x)$  jest niemalejąca i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{12}(x) = \lambda_{12}$ ,
- c) funkcja  $\lambda_{12}(x)$  jest jednomodalna i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{12}(x) = \lambda_{12}$ .

Poniżej formułuje się warunki, przy których spełnieniu funkcja kryterialna  $g(x)$  osiąga maksimum.

**Twierdzenie 1.**

Jeśli funkcja  $\lambda_{12}(x)$  jest ciągła i niemalejąca do  $+\infty$  oraz spełnione są założenia (13) i  $\beta + \gamma f_{12}(0^+) > 0$ , to istnieje punkt  $x_0$  taki, że  $g(x_0)$  jest maksymalną wartością  $g(x)$ .

Dowód. Na podstawie lematu 4 funkcja  $h_{12}(x)$  jest nierosnąca i z określenia  $h_{12}(x)$  otrzymano:

$$h_{12}(0^+) = \beta + \gamma f_{12}(0^+) > 0, h_{12}(\infty) = -\infty,$$

co kończy dowód.  $\square$

**Twierdzenie 2.**

Jeśli funkcja  $\lambda_{12}(x)$  jest ciągła i niemalejąca do  $\lambda_{12}$ , założenia (13) są spełnione i  $\beta + \gamma f_{12}(0^+) > 0$  oraz:

$$\lambda_{12} > \frac{\alpha - \beta}{\alpha E T_1 + \gamma}$$

to istnieje dokładnie jeden punkt  $x_0$  taki, że  $g(x_0)$  jest maksymalną wartością  $g(x)$ .

Dowód. Na podstawie Lematu 4 funkcja  $h_{12}(x)$  jest nierosnąca, stąd:

$$h(0^+) = \beta + \gamma f_{12}(0^+) > 0, h(\infty) = \alpha (ET_1\lambda_{12} - 1) + \beta + \gamma\lambda_{12} < 0$$

co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

### Definicja 1.

Funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(x)$  jest jednomodalna, jeśli istnieje punkt  $x_0$  taki, że  $\lambda(x)$  jest rosnąca dla  $x < x_0$  i malejąca dla  $x > x_0$ .

### Twierdzenie 3.

Jeśli funkcja  $\lambda_{12}(x)$  jest ciągła i unimodalna z punktem  $x_1$ , w którym osiąga maksimum,  $\beta + \gamma f(0^+) > 0$  i  $h_{12}(x_1) < 0$ , to istnieje lokalne maksimum funkcji celu  $g(x)$ . Jeśli założyć się dodatkowo, że:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h_{12}(x) = \alpha(ET_1\lambda_{12} - 1) + \beta + \gamma\lambda_{12} < 0$$

gdzie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_{12}(x) = \lambda_{12}$$

to istnieje globalne maksimum funkcji  $g(x)$ .

Dowód. Jeśli  $\lambda_{12}(x)$  jest ciągła i jednomodalna, to  $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_{12}(x)$  istnieje. Na podstawie lematu 4 wywnioskowano, że funkcja  $h_{12}(x)$  jest nierosnąca. Z tego, że:

$$h_{12}(0) = \beta + \gamma f_{12}(0^+) > 0 \text{ to } h_{12}(x_1) < 0$$

wynika, że istnieje  $x_2$  takie, że  $h_{12}(x_2) = 0$  i w punkcie  $x_2$  funkcja  $h_{12}(x)$  osiąga lokalne maksimum. Jeśli  $h_{12}(\infty) > 0$ , to na podstawie lematu 4 dla  $x > x_1$  funkcja  $h_{12}(x)$  jest niemalejąca. Wynika stąd, że w przypadku, gdy  $h_{12}(\infty) > 0$  istnieje lokalne maksimum i lokalne minimum funkcji  $g(x)$ . Jeśli  $h_{12}(\infty) \leq 0$ , to  $g(x)$  osiąga dokładnie jedno maksimum.  $\square$

## 4.5. Przypadek szczególny funkcji kryterialnej

W tym podrozdziale rozważa się szczególny przypadek procesu semi-markowskiego  $X(t)$  zakładając, że:

$$F_{12}(x) = F_1(x) \tag{16}$$

Z (1) i (2) wynika, że:

$$F_1(x) = p_{12} F_1(x) + p_{13} F_{13}(x)$$

oraz

$$F_{13}(x) = F_1(x) \tag{17}$$

Pierwszą pochodną funkcji kryterialnej  $g(x)$  można zapisać w postaci:

$$g'(x) = \frac{1}{M^2(x)} \{ \alpha r(x) + \beta R_1(x) + \gamma f_1(x) \} \tag{18}$$

gdzie:

$$r(x) = f_1(x)ET_1(x) - F_1(x)R_1(x)$$

Jeśli:

$$z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 0,$$

to  $g(x)$  jest granicznym współczynnikiem gotowości. Wiadomo, że  $r(x) = 0$  dla  $x \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład wykładniczy [67]. Na podstawie (18) wywnioskowano, że klasa dystrybuant, dla których  $r(x) \geq 0$ , jest bardzo ważna podczas formułowania warunków istnienia maksimum funkcji kryterialnej. Jeśli  $r'(x) \leq 0$  dla  $x \geq 0$ , to współczynnik gotowości  $g(x)$  jest funkcją niemalejącą dla  $x \geq 0$  i nie istnieje maksimum  $g(x)$ . Jeśli  $r'(x) \geq 0$  dla  $x \geq 0$ , to znak pochodnej  $g'(x)$  może się zmieniać z dodatniego na ujemny. Z powyższego wynika, że warunek  $r(x) \geq 0$  dla  $x \geq 0$  jest warunkiem koniecznym istnienia maksimum dla współczynnika gotowości w szczególnym przypadku określonym przez równość (16).

Niech MTFR (Mean Time to Failure or Repair) będzie zbiorem absolutnie ciągłych zmiennych losowych takich, że  $r(x) \geq 0$  dla  $x \geq 0$ . Klasa MTFR będzie badana w rozdziale 7 pracy. Do klasy MTFR należą niektóre czasy życia posiadające jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń. Kryterium przynależności do klasy MTFR zmiennej losowej  $T_1$  z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń ujemuje poniższy wniosek.

#### Wniosek 1.

Jeśli:

$$\lambda(x) = f(x) / R(x)$$

jest jednomodalna, to  $T_1 \in \text{MTFR}$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lambda \text{ET}_1 - 1 \geq 0, \text{ gdzie } \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = \lambda$$

Dowód. Podstawiając w lemacie 3:

$$s_1(x) = \lambda_1(x) \text{ET}_1(x) - F_1(x)$$

otrzymano  $s_1(0) = 0$  i:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s_1(x) = \lambda \text{ET}_1 - 1$$

Na podstawie lematu 1 wywnioskowano, że jeśli  $\lambda(x)$  jest unimodalna, to  $s_1(x)$  jest także unimodalna. Stąd  $s_1(x) \geq 0$  dla  $x \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lambda \text{ET}_1 - 1 \geq 0$ .  $\square$

#### 4.6. Porównanie przypadków ogólnego i szczególnego

W przypadku ogólnym warunek  $r(x) \geq 0$  dla  $x \geq 0$  nie jest warunkiem koniecznym na to, aby współczynnik gotowości osiągał wartość maksymalną.

Założono, że zmienne losowe  $T_{12}$  i  $T_{13}$  mają różne rozkłady wykładnicze z parametrami  $\lambda_{12}$  i  $\lambda_{13}$ , gdzie  $\lambda_{12} \neq \lambda_{13}$ . Na podstawie (1) i (2) otrzymano:

$$R_1(x) = p_{12}R_{12}(x) + p_{13}R_{13}(x) \quad (19)$$

gdzie:

$$R_{12}(x) = e^{-\lambda_{12}x}, R_{13}(x) = e^{-\lambda_{13}x}$$

Dla  $\lambda_{12}(x)$  uzyskano:

$$\lambda_{12}(x) = \frac{f_{12}(x)}{R_1(x)} = \frac{\lambda_{12}e^{-\lambda_{12}x}}{p_{12}e^{-\lambda_{12}x} + p_{13}e^{-\lambda_{13}x}} \quad (20)$$

Ze wzoru (20) wynika, że jeśli  $\lambda_{12} > \lambda_{13}$ , to  $\lambda_{12}(x)$  jest malejąca. W przeciwnym przypadku, jeśli  $\lambda_{12} < \lambda_{13}$ , to  $\lambda_{12}(x)$  jest rosnąca od  $\lambda_{12}(0) = \lambda_{12}$  do  $\lambda_{12}(\infty) = \lambda_{12} / p_{12}$ . Dla  $h_{12}(x)$  otrzymano  $h_{12}(0) = \beta + \gamma \lambda_{12}$  oraz:

$$h_{12}(\infty) = \alpha (ET_1 \lambda_{12} / p_{12} - 1) + \beta + \gamma \lambda_{12} / p_{12}$$

Ze wzoru (19) wynika, że:

$$ET_1 = \frac{p_{12}}{\lambda_{12}} + \frac{p_{13}}{\lambda_{13}}$$

stąd:

$$h_{12}(\infty) = \alpha \frac{p_{13}}{p_{12}} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}} + \beta + \gamma \frac{\lambda_{12}}{p_{12}}$$

Jeśli  $h_{12}(0) = \beta + \gamma \lambda_{12} > 0$  i  $h_{12}(\infty) < 0$ , to funkcja kryterialna  $g(x)$  ma dokładnie jedno maksimum. Zmienna losowa  $T_1$  jest mieszaniną zmiennych  $T_{12}$  i  $T_{13}$ . Wiadomo, że  $\lambda_1(t) = f_1(t)/R_1(t)$  jest malejąca dla mieszaniny dwóch różnych rozkładów wykładniczych [12]. Na podstawie prac [9, 65, 67] wiadomo, że dla klasy dystrybuant z rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń (IFR) spełniona jest relacja:

$$IFR \subset MTR$$

Zatem można wnioskować, że  $T_1 \notin MTR$ . Ostatnia relacja przeczy temu, że  $T_1 \in MTR$  i jest warunkiem koniecznym istnienia maksimum granicznego współczynnika gotowości dla ogólnego przypadku funkcji kryterialnej.

#### 4.7. Przykłady numeryczne

W rozważanych niżej przykładach przyjęto macierz  $P$  prawdopodobieństw przejścia dla włożonego łańcucha Markowa w postaci:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartości średnie zmiennych losowych  $T_2$  i  $T_3$  są następujące:  $ET_2 = 0.2$  i  $ET_3 = 0.05$ , natomiast zyski na jednostkę czasu  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = -0.02$ .

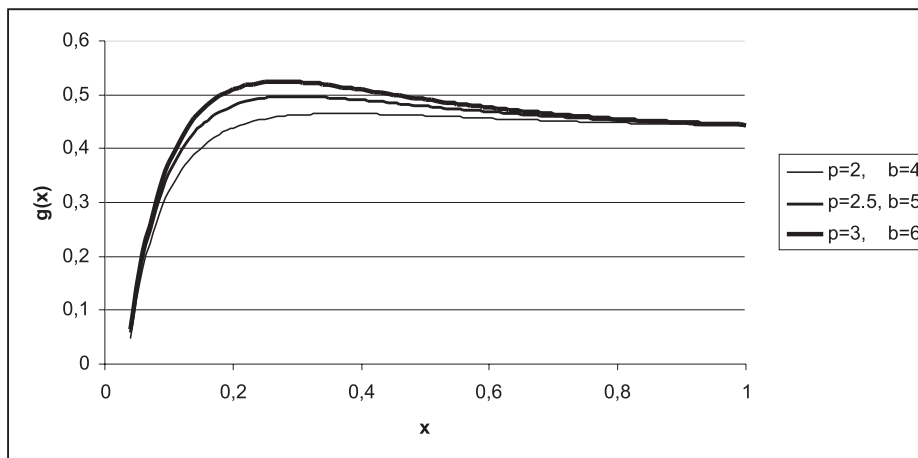
**Przykład 4.1.** Założono, że zmienne losowe  $T_{12}$  i  $T_{13}$  mają taki sam rozkład gamma z parametrami  $a$  i  $b$ . Zmienna losowa  $T_1 = p_{12}T_{12} + p_{13}T_{13}$  ma identyczny rozkład jak  $T_{12}$  i  $T_{13}$ . Przyjęto, że dla parametru kształtu (formy) zachodzi  $a > 1$ . Wiadomo, że w tym przypadku funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda_1(t)$  jest rosnąca do  $b$ . Na podstawie wniosku 4 stwierdzono, że warunek istnienia maksimum funkcji zysku na jednostkę czasu ma postać:

$$a(a-1) + \beta + \gamma b > 0$$

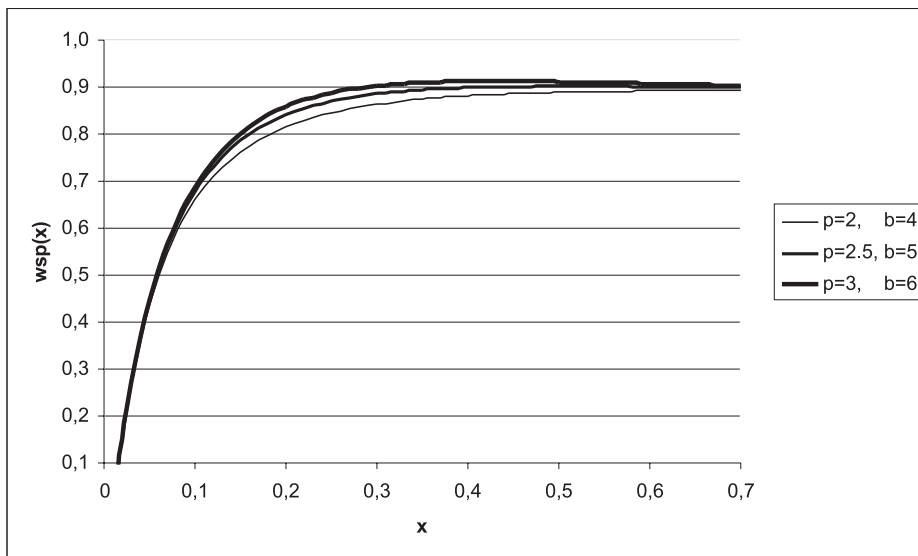
Dla granicznego współczynnika gotowości warunek ten można zapisać:

$$\alpha(a-1) + \beta > 0.$$

Z powyższych nierówności wynika, że jeśli współczynnik gotowości osiąga maksimum, to zysk na jednostkę czasu także osiąga wartość maksymalną. Na rysunku 4.1 przedstawiono wykresy funkcji zysku na jednostkę czasu w zależności od długości przedziału wymian profilaktycznych. Każda z analizowanych realizacji funkcji kryterialnych osiąga jednoznaczne maksimum. Podstawiając  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 0$  otrzymano graniczny współczynnik gotowości dla  $b = 4$ ,  $p \in \{8, 10, 12\}$ . Wykresy funkcji współczynnika gotowości w zależności od długości przedziału do wymiany przedstawiono na rysunku 4.2.



Rys. 4.1. Wykres funkcji zysku na jednostkę czasu  $g(x)$  dla rozkładu gamma



Rys. 4.2. Wykres współczynnika gotowości  $wsp(x)$  dla przykładu 4.1

W przykładzie 4.2 wykorzystany będzie odwrócony rozkład normalny (inverse-Gaussian). Niech  $IG(m, a)$  oznacza odwrócony rozkład normalny z parametrami  $m > 0$ ,  $a > 0$ , z gęstością prawdopodobieństwa w postaci:

$$f(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{a(x-m)^2}{2m^2x}\right) \text{ dla } x > 0$$

Funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  rośnie od 0 w chwili  $t = 0$  i maleje do niezerowej wartości  $a/(2m^2)$  [30, 31]. Na podstawie wniosku 6, dla zmiennej losowej o rozkładzie  $IG(m, a)$  otrzymano poniższy wniosek.

**Wniosek 7.**

$T \in \text{MTFR}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a \geq 2m$ .

**Przykład 4.2.** Założono, że zmienne losowe  $T_{12}$  i  $T_{13}$  mają dystrybuanty:

$$F_{12}(x) = Q_{12}(x)/p_{12}, F_{13}(x) = Q_{13}(x)/p_{13}$$

Z elementarnych własności procesu semi-markowskiego wiadomo, że:

$$F_1(x) = p_{12}F_{12}(x) + p_{13}F_{13}(x)$$

W przykładzie 4.2 przyjęto, że zmienna losowa  $T_{12}$  ma odwrócony rozkład normalny i zmienna losowa  $T_{13}$  ma rozkład wykładniczy z funkcją niezawodności  $R_{13}(x) = \exp(-\lambda_{13}x)$  dla  $x \geq 0$ . Wniosek 5 zawiera założenie, że funkcja  $u_{12}(x) = f_{12}(x)/R_{12}(x)$  jest unimodalna. Pochodną pierwszego rzędu  $u'_{12}(x)$  można zapisać w postaci:

$$u'_{12}(x) = \frac{1}{R_{12}^2(x)} \{ [f'_{12}(x)R_{12}(x) + f_{12}^2(x)]p_{12} + [f'_{12}(x)R_{13}(x) + f_{12}(x)f_{13}(x)]p_{13} \}$$

Jeśli funkcja  $u'_{12}(x)$  osiąga maksimum w punkcie  $x = x_0$ , to:

$$f'_{12}(x_0)R_{12}(x_0) + f_{12}^2(x_0) = 0 \quad (21)$$

Parametr  $\lambda_{13}$  dobiera się tak, aby:

$$f'_{12}(x_0)R_{13}(x_0) + f_{12}(x_0)f_{13}(x_0) = 0 \quad (22)$$

Porównując (21) i (22) otrzymano:

$$\lambda_{12}(x_0) = \frac{f'_{12}(x_0)}{R_{12}(x_0)} = \lambda_{13} \quad (23)$$

Funkcja  $u_{12}(x)$  przy założeniu (23) jest jednomodalna. Na rysunku 4.3 przedstawiono wykres funkcji  $g(x)$  dla parametrów:

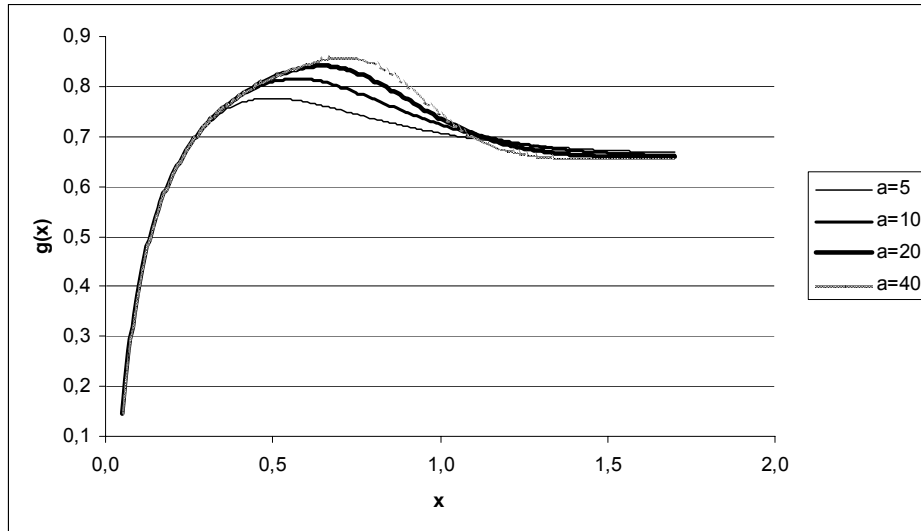
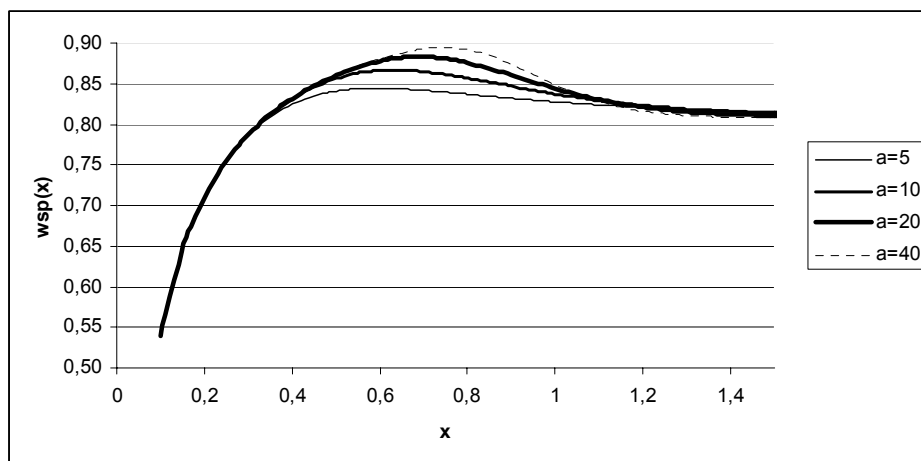
$$m = 0, a \in \{5, 10, 20, 40\},$$

$$ET_2 = 0.2, ET_3 = 0.05,$$

$$z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = -0.02,$$

natomiast na rysunku 4.4 – współczynnik gotowości dla tych samych parametrów.



Rys. 4.3. Wykres funkcji zysku na jednostkę czasu  $g(x)$  dla przykładu 4.2Rys. 4.4. Wykres współczynnika gotowości  $wsp(x)$  dla przykładu 4.2

**Przykład 4.3.** Założono, że zmienna losowa  $T_{12}$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda_{12}$  i zmienna losowa  $T_{13}$  ma rozkład z liniową i rosnącą funkcją intensywności uszkodzeń w postaci:

$$\lambda_2(t) = a t + b$$

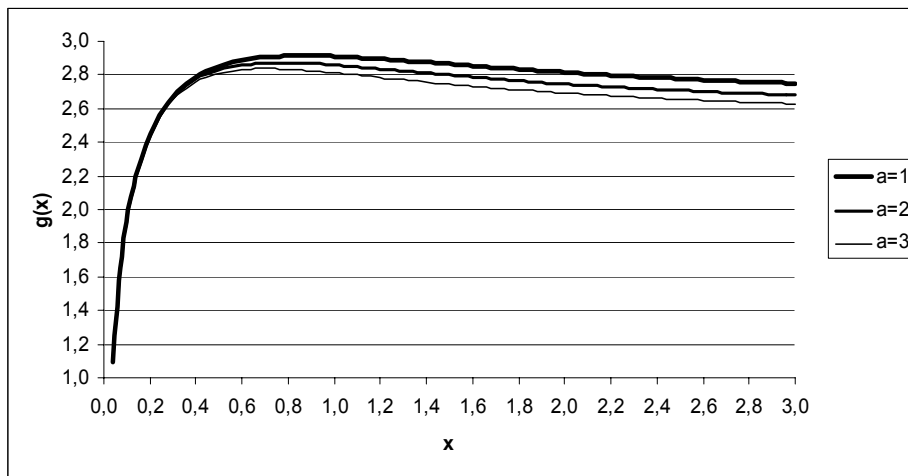
gdzie  $a > 0$  i  $b \geq 0$ . Funkcja niezawodności odpowiadająca funkcji  $\lambda_2(t)$  ma postać:

$$R_2(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}at^2 - bt\right) \text{ dla } t \geq 0$$

Jest to szczególny przypadek zmiennej losowej o rozkładzie Gurwicza [52, 91]. Wiadomo, że przy pewnych założeniach dotyczących  $\lambda_{12}$ ,  $p$ ,  $a$  i  $b$ , zmienna losowa

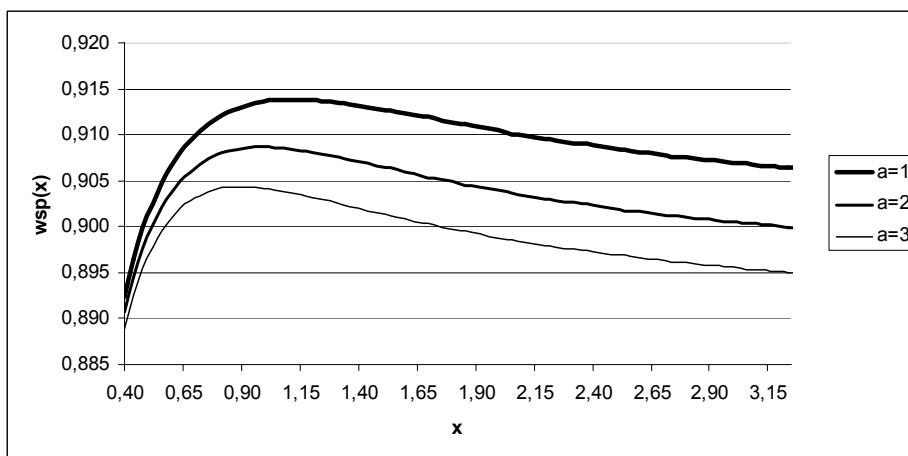
$T_1 = p_{12}T_{12} + p_{13}T_{13}$  ma rozkład z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Na rysunku 4.5 przedstawiono wykresy zysku na jednostkę czasu dla parametrów:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.5, \\ p &= 0.1, \\ b &= 1.0, \\ a &\in \{1, 2, 3\}, \\ ET_2 &= 0.2, ET_3 = 0.05, \\ z_1 &= 4, z_2 = -1, z_3 = -0.02. \end{aligned}$$



Rys. 4.5. Zysk na jednostkę czasu  $g(x)$  dla przykładu 4.3

Analizowane realizacje zysku na jednostkę czasu posiadają jednoznaczne maksimum. Na rysunku 4.6 przedstawiono wykresy przebiegu współczynnika gotowości dla tych samych parametrów.



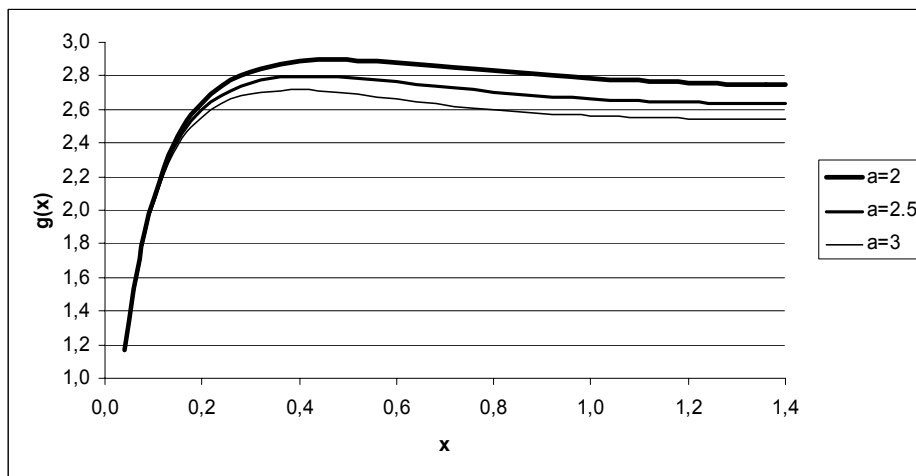
Rys. 4.6. Współczynnik gotowości  $wsp(x)$  dla przykładu 4.3

**Przykład 4.4.** Założono, że zmienne losowe  $T_{12}$  i  $T_{13}$  mają taki sam rozkład Weibulla z funkcją niezawodności  $R(x) = \exp(-ax^b)$  dla  $x \geq 0$ . Zmienna losowa  $T_1$  ma taki sam rozkład jak zmienne losowe  $T_{12}$  i  $T_{13}$ . Na rysunku 4.7 pokazano przebieg wartości zysku jednostkowego dla wartości parametrów:

$$ET_2 = 0.2, ET_3 = 0.05,$$

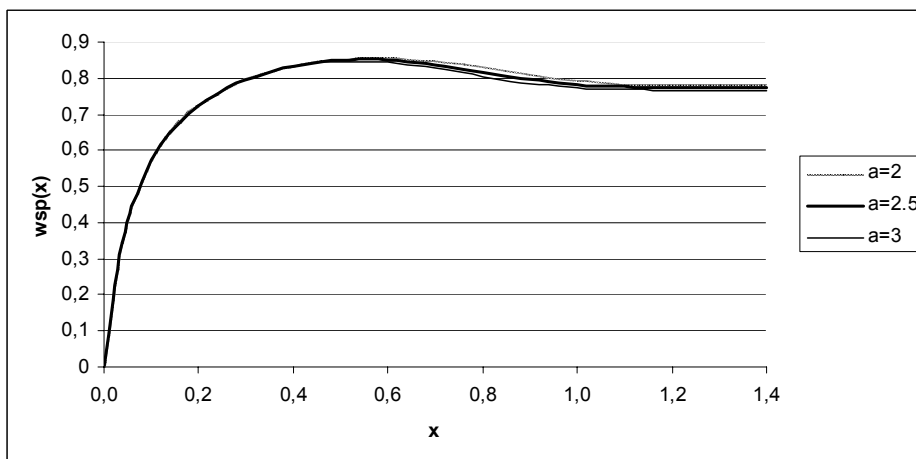
$$z_1 = 4, z_2 = -1, z_3 = -0.02,$$

$$b = 1, a \in \{2, 2.5, 3\}.$$



Rys. 4.7. Zysk na jednostkę czasu dla rozkładu Weibulla

Dla współczynnika gotowości przyjęto  $b = 5$ . Na rysunku 4.8 przedstawiono przebieg zmienności dla współczynnika gotowości przy  $a \in \{2, 2.5, 3\}$ .



Rys. 4.8. Współczynnik gotowości  $wsp(x)$  dla rozkładu Weibulla

**Przykład 4.5.** W tym przykładzie pokażemy pewną modyfikację funkcji intensywności uszkodzeń zaproponowaną przez Dhillon [38] i ponownie opublikowaną w pracy Avindav [5]. Funkcja  $\lambda(t)$  zaproponowana w wyżej cytowanych pracach posiada następującą własność:

$$\lambda(\infty) = 0.$$

Wiadomo, że jeśli  $\lambda(\infty) = 0$ , to funkcja kryterialna  $g(x)$  nie osiąga maksimum. W tym przykładzie proponuje się modyfikację funkcji z prac [5, 38] w postaci:

$$\lambda(x) = d - \frac{db \ln(x+b)}{(x+b) \ln(b)}, \text{ gdzie } b, d > 0 \quad (24)$$

Dla tej funkcji łatwo sprawdzić, że:

$$\lambda(0) = 0, \lambda(\infty) = d$$

oraz

$$\max_{x \geq 0} \lambda(x) = \lambda(e-b) = d \left(1 - \frac{b}{a \ln b}\right) \text{ dla } 0 < b < 1$$

Dla funkcji niezawodności  $R(x) = \exp(-\Lambda(x))$ ,

gdzie:

$$\Lambda(x) = dx - \frac{db}{2 \ln b} (\ln^2(x+b) - \ln^2(b))$$

Niech:

$$\omega(x) = \frac{db}{2 \ln b} (\ln^2(x+b) - \ln^2(b)) \text{ dla } b \in (0, 1)$$

Funkcja  $\omega(x)$  posiada minimum w punkcie  $x = 1 - b$  i:

$$\omega(1-b) = db \ln(b)/2 < 0.$$

Można sprawdzić, że:

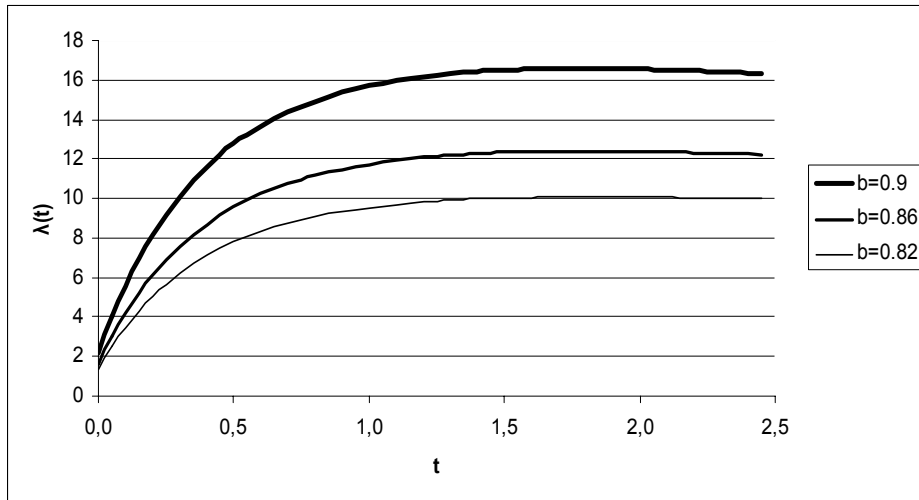
$$\frac{\Lambda(x)}{x} = d \text{ dla } x = \frac{1}{b} - b$$

oraz

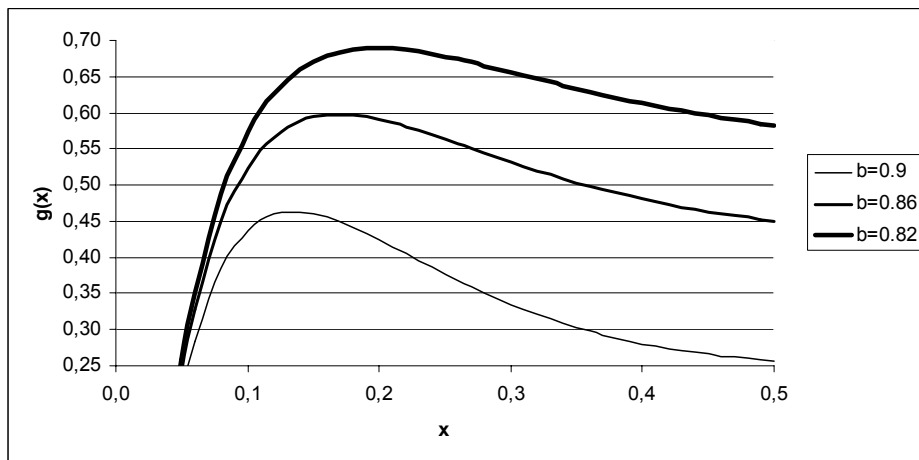
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{x} = d.$$

Na podstawie powyższego wnioskuje się, że  $T \notin \text{IFRA}$ , ponieważ funkcja  $\Lambda(x)/x$  nie jest niemalejąca. Można zatem znaleźć takie wartości parametrów  $b$  i  $d$ , że  $T \in \text{MTFR}$ . W tym przykładzie założono, że  $d = 4$ . Inny przykład zmiennej losowej  $T$  spełniającej warunki  $T \notin \text{IFRA}$  i  $T \in \text{MTFR}$  podano w [65]. Zmienna analizowana w pracy [65] jest typu skokowego, natomiast zmienna omawiana w tym przykładzie jest zmienną absolutnie ciągłą. W przykładzie założono, że zmienne losowe  $T_{12}$  i  $T_{13}$  mają taki sam rozkład z funkcją intensywności uszkodzeń daną wzorem (24). Na rysunku 4.9 pokazano trzy funkcje intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  przy  $d = 4$  i  $b \in \{0.82, 0.86, 0.90\}$ . Dla  $b = 0.82$  otrzymano  $ET d > 1$ , stąd  $T \in \text{MTFR}$ , natomiast dla  $b = 0.86$  i  $b = 0.90$  zach-

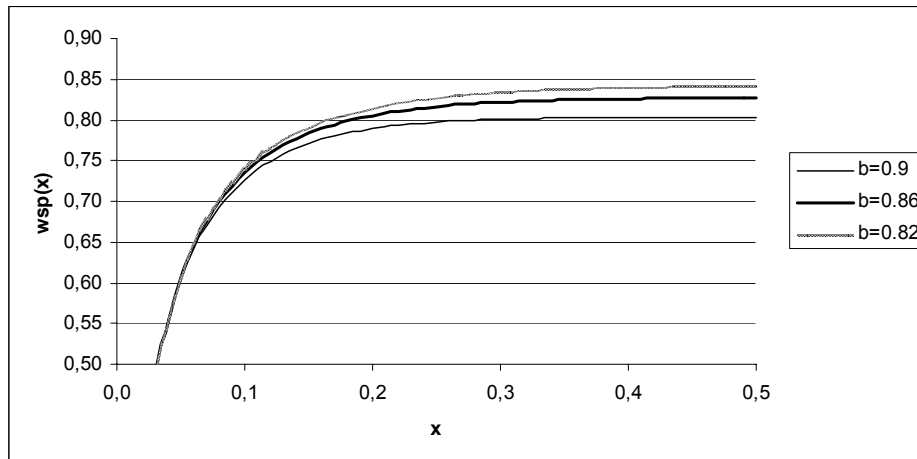
dzi  $ET < 1$ , stąd  $T \notin MTR$ . Na rysunku 4.10 przedstawiono odpowiednie wykresy funkcji  $g(x)$  zysku na jednostkę czasu, a na rysunku 4.11 współczynniki zmienności.



Rys. 4.9. Funkcje intensywności uszkodzeń wyrażone wzorem (24)



Rys. 4.10. Zysk na jednostkę czasu  $g(x)$  dla przykładu 4.5



Rys. 4.11. Współczynnik gotowości  $wsp(x)$  dla przykładu 4.5

## 5. Model n-stanowy

### 5.1. Oznaczenia i założenia

Wiele systemów eksploatacji wymaga modelowania procesu eksploatacji za pomocą procesu stochastycznego o więcej niż trzech stanach. W rozdziale tym przeanalizowano możliwości uogólnień modelu 3-stanowego na przypadek modelu n-stanowego. Pierwsze takie próby podjęto w pracy [70]. Założono, że modelem procesu eksploatacji obiektów technicznych jest proces stochastyczny  $X(t)$  o przestrzeni stanów  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ . Jeśli  $X(t) = i$ , gdzie  $1 \leq i \leq k$ , to oznacza, że w chwili  $t$  analizowany obiekt techniczny znajduje się w stanie  $S_i$ . Podobnie jak w rozdziale 4 założono, że  $S_1$  jest stanem użytkowania obiektu technicznego,  $S_2$  stanem odnowy (naprawy),  $S_k$  oznacza odnowę uprzedzającą,  $S_3, S_4, \dots, S_{k-1}$  są pozostałymi stanami przestrzeni stanów  $S$ . Przez  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  oznaczono zyski (straty) przypadające na jednostkę czasu, wynikające z przebywania obiektu technicznego w stanie  $S_i$ . Przyjęto się, że  $z_1 > 0$ ,  $z_i \leq 0$ , dla  $i = 2, 3, \dots, k$ . Czasy przebywania w stanach oznaczane są przez  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  i mają dystrybuanty  $F_i(x)$ . Dodatkowo założono, że zmienna losowa  $T_1$  ma gęstość prawdopodobieństwa  $f_1(x)$ . Podobnie jak poprzednio funkcja kryterialna wyznacza zysk przypadający na jednostkę czasu analizowany w dostatecznie długim przedziale czasowym. Funkcja kryterialna zależy od elementów macierzy przejścia  $P$  włożonego łańcucha Markowa, rozkładu zmiennej losowej  $T_1$  oraz wartości średnich  $ET_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$ . W dalszej analizie używa się zmiennej losowej  $T_1(x)$  określonej wzorem (7) w podrozdziale 4.3. Wprowadzenie do modelu skracania pracy elementu (obiekту) czasu przebywania w stanie  $S_1$  prowadzi, tak jak poprzednio, do zmiany pierwszego wiersza macierzy  $P$ . Jeśli obiekt techniczny przebywał w stanie  $S_1$  i czas przebywania przekroczył  $x$ , to obiekt przechodzi do stanu obsługi profilaktycznej  $S_k$ . W przypadku, gdy  $T_1 < x$ , to obiekt techniczny przechodzi do jednego ze stanów  $S_2, S_3, \dots, S_{k-1}$  zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa reprezentowanym przez elementy pierwszego wiersza macierzy  $P_x$ . Podobnie jak poprzednio elementy pierwszego wiersza macierzy  $P_x$  oznaczono przez  $p_{1j}(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Na podstawie rozważań z podrozdziału 4.3 można zapisać:

$$p_{1k}(x) = p_{1k}F_{1k} + R_1(x) \quad (1)$$

oraz:

$$p_{1i}(x) = p_{1i}F_{1i}(x) \text{ dla } i = 2, 3, \dots, k-1 \quad (2)$$

Można sprawdzić, że dla prawdopodobieństw  $p_{1i}(x)$  prawdziwe są następujące wnioski:

$$\sum_{i=1}^k p_{1i}(x) = 1$$

$$p_{1k}(x) \geq p_{1k}$$

$$p_{1i}(x) \leq p_{1i} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, k-1$$

W celu wyznaczenia prawdopodobieństw granicznych  $p_i^*(x)$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$  tworzy się układ równań liniowych w postaci:

$$\begin{bmatrix} -1 & p_{21} & p_{31} & \dots & p_{k-1,1} & p_{k1} \\ p_{12}(x) & -1 & p_{32} & \dots & p_{k-1,2} & p_{k2} \\ p_{13}(x) & p_{23} & -1 & \dots & p_{k-1,3} & p_{k3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1,k-1}(x) & p_{2,k-1} & p_{3,k-1} & \dots & -1 & p_{k,k-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^*(x) \\ p_2^*(x) \\ p_3^*(x) \\ \dots \\ p_{k-1}^*(x) \\ p_k^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Przyjęto oznaczenia:

- $A$  – macierz układu równań (3),  
 $p^*$  – kolumna prawdopodobieństw granicznych,  
 $u$  – kolumna wyrazów wolnych.

Układ równań liniowych (3) można zapisać następująco:

$$Ap^* = u.$$

Funkcję kryterialną  $g(x)$  wyrażającą zysk na jednostkę czasu można zapisać w postaci:

$$g(x) = \frac{p_1^*(x)z_1ET_1(x) + \sum_{j=2}^k p_j^*(x)z_jET_j}{p_1^*(x)ET_1(x) + \sum_{j=2}^k p_j^*(x)ET_j} \quad (4)$$

gdzie  $ET_1(x)$  wyraża się wzorem (7) z podrozdziału 4.3.

Podstawowym celem rozważań zawartych w rozdziale 5 jest zbadanie własności funkcji kryterialnej (4) i sformułowanie warunków istnienia maksimum funkcji  $g(x)$  dla różnych rozkładów zmiennej losowej  $T_1$ .

## 5.2. Własności funkcji kryterialnej

W celu wyznaczenia prawdopodobieństw granicznych  $p_j^*(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  analizuje się rozwinięcie wyznacznika macierzy  $A$  według elementów  $k$ -tego wiersza

$$\det(A) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} |A_{kj}| \quad (5)$$

gdzie  $|A_{kj}|$  jest minorem powstałym w wyniku skreślenia  $k$ -tego wiersza i  $j$ -tej kolumny w wyznaczniku  $\det(A)$ . Na podstawie analizy rozwinięcia (5) możliwe jest sformułowanie następujących wniosków:

**Wniosek 1.** Rozwiązanie układu równań liniowych (3) można zapisać w postaci:

$$p_j^*(x) = \frac{(-1)^{k+j} |A_{kj}|}{\det(A)}, \text{ gdzie } j = 1, 2, \dots, k \quad (6)$$



**Wniosek 2.** Wszystkie dopełnienia algebraiczne  $(-1)^{k+j}|A_{kj}|$  dla  $j = 1, 2, \dots, k$  mają taki sam znak.

**Wniosek 3.** Dopełnienie algebraiczne  $(-1)^{k+1}|A_{k1}|$  nie zależy od  $x$ .

**Wniosek 4.** Rozwiązanie  $p_j^*(x)$  dane wzorem (6) jest dla  $j = 2, 3, \dots, k$  ilorazem funkcji liniowych w zależności od  $F_{i1}(x)$ , gdzie  $i = 2, 3, \dots, k$ .

**Wniosek 5.** Znak wyznacznika  $|A_{kk}|$  jest taki sam jak znak wyrażenia  $(-1)^{k-1}$ , co można zapisać:

$$\text{sign}(|A_{kk}|) = (-1)^{k-1}$$

Jako uzasadnienie tego wniosku trzeba zauważyć, że przekątna wyznacznika  $|A_{kk}|$  jest złożona z liczb  $-1$ , natomiast pozostałe elementy są z przedziału  $<0,1>$  [13].

**Wniosek 6.** Dla wyznacznika  $\det(A)$  prawdziwa jest równość:

$$\text{sign}(\det(A)) = (-1)^{k-1}$$

Powyższa teza wynika z wniosku 5 i z wniosku 1 przy  $j = k$ .

Podobnie dowodzi się, że

**Wniosek 7.**

$$\text{sign}(|A_{kj}|) = (-1)^{j-1}, \text{ dla } j = 1, 2, \dots, k-1.$$

**Wniosek 8.** Wartości funkcji kryterialnej  $g(x)$  danej wzorem (4) nie zmieniają się, jeśli zamiast prawdopodobieństw granicznych  $p_j^*(x)$  do funkcji kryterialnej zostaną wstawione funkcje  $u_j(x)$  określone następująco:

$$u_j(x) = (-1)^{k+j} |A_{kj}| \text{sign}(|A|) \text{ dla } j = 1, 2, \dots, k \quad (7)$$

Na podstawie wniosków 6 i 7 można napisać:

$$u_j(x) = (-1)^{j-1} |A_{kj}| \quad (8)$$

$$\text{sign}(u_j(x)) = 1 \text{ dla } j = 1, 2, \dots, k.$$

Dla funkcji  $u_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  można sformułować wniosek:

**Wniosek 9.** Funkcja  $u_1(x)$  nie zależy od  $x$ . Funkcje  $u_j(x)$  dla  $j = 2, 3, \dots, k$  zależą liniowo od dystrybuant  $F_{i1}(x)$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ .

W dalszych rozważaniach wykorzystano możliwość przedstawienia funkcji  $u_j(x)$  jako funkcji liniowej dystrybuant  $F_{i1}(x)$ , gdzie  $i = 2, 3, \dots, k$ . Można to uzyskać przez rozwinięcie minora  $|A_{kj}|$  według elementów pierwszej kolumny. Minor otrzymany z wyznacznika  $|A_{kj}|$  przez skreślenie  $i$ -tego wiersza oraz pierwszej kolumny oznacza się przez  $|A_{(k,j)(i,1)}|$ . Rozwijając minor  $|A_{kj}|$  według elementów pierwszego wiersza i uwzględniając (8) otrzymano:

$$u_j(x) = (-1)^j |A_{(k,j)(1,1)}| + (-1)^{j-1} \sum_{i=2}^{k-1} F_{i1}(x) p_{i1} (-1)^{i+1} |A_{(k,j)(i,1)}| \quad (9)$$

gdzie  $j = 2, 3, \dots, k$ .

Dla  $j = 1$  uzyskano:

$$u_1(x) = |A_{k1}| \quad (10)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\beta_{ij} = (-1)^{i+j} p_{1i} |A_{(k,j)(i,1)}|, \text{ dla } i = 2, 3, \dots, k, j = 2, 3, \dots, k \quad (11)$$

$$\beta_{1j} = (-1)^j |A_{(k,j)(1,1)}|, \text{ dla } j = 2, 3, \dots, k$$

Funkcję  $u_j(x)$  dla  $j = 2, 3, \dots, k$  można przedstawić następująco:

$$u_j(x) = \beta_{1j} + \sum_{i=2}^{k-1} F_{1i}(x) \beta_{ij} \quad (12)$$

Przez  $L(x)$  i  $M(x)$  oznaczono licznik i mianownik funkcji kryterialnej (4). Uwzględniając równości (11) i (12) dla licznika funkcji kryterialnej otrzymano:

$$L(x) = u_1(x) z_1 ET_1(x) + \sum_{j=2}^k z_j ET_j \{ \beta_{1j} + \sum_{i=2}^{k-1} \beta_{ij} F_{1i}(x) \} = \quad (13)$$

$$= u_1(x) z_1 ET_1(x) + \sum_{j=2}^k z_j ET_j \sum_{i=2}^{k-1} \beta_{ij} F_{1i}(x) + \sum_{j=2}^k ET_j z_j \beta_{1j}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$A_1 = u_1(x)$$

$$D_j(x) = \sum_{i=2}^{k-1} \beta_{ij} F_{1i}(x), \text{ dla } j = 2, 3, \dots, k \quad (14)$$

$$C_1 = \sum_{j=2}^k z_j ET_j \beta_{1j}$$

funkcję  $L(x)$  można zapisać następująco:

$$L(x) = A_1 z_1 ET_1(x) + \sum_{j=2}^k z_j ET_j D_j(x) + C_1 \quad (15)$$

Analogicznie dla mianownika  $M(x)$  funkcji kryterialnej  $g(x)$  uzyskano:

$$M(x) = u_1(x) ET_1(x) + \sum_{j=2}^k ET_j \sum_{i=2}^{k-1} F_{1i}(x) \beta_{ij} + \sum_{j=2}^k ET_j \beta_{1j}. \quad (16)$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$C = \sum_{j=2}^k ET_j \beta_{1j} \quad (17)$$

funkcja  $M(x)$  ma postać:

$$M(x) = A_1 ET_1(x) + \sum_{j=2}^k ET_j D_j(x) + C \quad (18)$$

Uwzględniając (13) i (15) funkcję kryterialną  $g(x)$  można zapisać w postaci:

$$g(x) = \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{A_1 z_1 E T_1(x) + \sum_{j=2}^k z_j E T_j D_j(x) + C_1}{A_1 E T_1(x) + \sum_{j=2}^k E T_j D_j(x) + C} \quad (19)$$

Postać funkcji kryterialnej wyrażona wzorem (19) jest podobna do postaci funkcji kryterialnej dla modelu 3-stanowego opisanej wzorem (10) w rozdziale 4.

### 5.3. Przypadek szczególny

W podrozdziale rozważa się szczególny przypadek funkcji kryterialnej  $g(x)$ , gdy zachodzi:

$$F_{ii}(x) = F_1(x) \text{ dla } i = 2, 3, \dots, k \quad (20)$$

Przy założeniu (20) zachodzi:

$$L(x) = A_1 z_1 E T_1(x) + F_1(x) B_1 + C_1$$

$$M(x) = A_1 E T_1(x) + F_1(x) B + C$$

gdzie:

$$B_1 = \sum_{j=2}^k z_j E T_j \sum_{i=2}^{k-1} \beta_{ij} \quad (21)$$

$$B = \sum_{j=2}^k E T_j \sum_{i=2}^{k-2} \beta_{ij}$$

Funkcja kryterialna dla przypadku szczególnego ma postać:

$$g(x) = \frac{A_1 z_1 E T_1(x) + B_1 F_1(x) + C_1}{A_1 E T_1(x) + B F_1(x) + C} \quad (22)$$

Funkcja kryterialna  $g(x)$  dana wzorem (22) jest identyczna z funkcją kryterialną  $g(x)$  opisaną wzorem (10) w rozdziale 4 przy założeniu, że  $F_{12}(x) = F_1(x)$ .

Podstawą do sformułowania kryteriów istnienia maksimum funkcji kryterialnej  $g(x)$  jest pochodna  $g'(x)$ . W celu wyznaczenia pochodnej  $g'(x)$  kolejno wyznaczono: pochodną licznika  $L(x)$ , mianownika  $M(x)$  i funkcji  $g(x)$ .

Dla pochodnej licznika i mianownika otrzymano:

$$L'(x) = A_1 z_1 R_1(x) + B_1 f_1(x)$$

$$M'(x) = A_1 R_1(x) + B f_1(x)$$

$$L'(x)M(x) = A_1^2 z_1 E T_1(x) F_1(x) + A_1 B_1 z_1 F_1(x) R_1(x) + A_1 C z_1 R_1(x) + A_1 B_1 E T_1(x) f_1(x) + B B_1 f_1(x) F_1(x) + B_1 C f_1(x)$$

$$L(x)M'(x) = A_1^2 z E T_1(x) F_1(x) + A_1 B_1 F_1(x) R_1(x) + A_1 C R_1(x) + A_1 B z_1 E T_1(x) f_1(x) + B B_1 f_1(x) F_1(x) + B C f_1(x)$$

Licznik pochodnej wyraża się wzorem:

$$L'(x)M(x) - L(x)M'(x) = F_1(x)R_1(x)\{A_1Bz_1 - A_1B_1\} + R_1(x)\{A_1(z - A_1C_1)\} + \\ + f_1(x)F_1(x)\{A_1B_1 - A_1Bz_1\} + f_1(x)\{B_1C - BC_1\}$$

Analogicznie do odpowiednich wzorów z rozdziału 4 dla modelu 3-stanowego wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned} \alpha &= A_1(-Bz_1 + B_1) \\ \beta &= A_1(Cz_1 - C_1) \\ \gamma &= C B_1 - B C_1 \end{aligned} \quad (23)$$

Pochodna funkcji kryterialnej ma postać:

$$g'(x) = \frac{1}{M^2(x)} \{\alpha[f_1(x)ET_1(x) - F_1(x)R_1(x)] + \beta R_1(x) + \gamma f_1(x)\}$$

Pochodna funkcji kryterialnej  $g(x)$  dla modelu  $k$ -stanowego ma taką samą postać jak pochodna dla modelu 3-stanowego określona wzorem (11) w rozdziale 4.

W przeciwieństwie do modelu 3-stanowego wydaje się trudnym sformułowanie warunków wyrażonych przez elementy macierzy  $P$ , wartości średnie  $ET_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  i zyski jednostkowe  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  na to, aby prawdziwe były nierówności:

$$\alpha < 0, \beta > 0, \gamma < 0 \quad (24)$$

Podstawą do formułowania warunków na to, aby prawdziwe były powyższe nierówności mogą być wzory wyrażające współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  za pomocą macierzy  $P$ , wartości średnich  $ET_i$  i zysków jednostkowych  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ :

$$\alpha = A_1 \sum_{j=2}^k ET_j (z_j - z_1) \sum_{i=2}^{k-1} \beta_{ij} \quad (25)$$

$$\beta = A_1 \sum_{j=2}^k ET_j (z_1 - z_j) \beta_{1j} \quad (26)$$

$$\gamma = \sum_{j=2}^k ET_j \beta_{1j} \sum_{r=2}^k ET_r (z_r - z_j) \sum_{i=2}^{k-1} \beta_{ir} \quad (27)$$

Na podstawie ostatnich wzorów sformułowano odpowiednie wnioski.

**Wniosek 10.** Jeśli zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład wykładniczy, to pochodna  $g'(x)$  wyraża się wzorem:

$$g'(x) = \frac{(\beta + \lambda\gamma)\exp(-\lambda_1 x)}{M^2(x)}$$

gdzie  $R_1(x) = \exp(-\lambda_1 x)$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $x \geq 0$ . Z powyższego wzoru wynika, że funkcja kryterialna  $g(x)$  nie osiąga wartości maksymalnej.

**Wniosek 11.** Jeśli  $z_1 > 0$ ,  $z_i < 0$  dla  $i = 2, 3, \dots, k$ , to  $\beta > 0$ .

Dowód. Podstawiając we wzorze (9)  $x = 0$  otrzymano:

$$u_j(0) = \beta_{1j} \text{ dla } j = 2, 3, \dots, k.$$

Wartości  $\beta_{1j}$  dla  $j = 2, 3, \dots, k$  są proporcjonalne do prawdopodobieństw granicznych  $p_j^*(0)$ .

Stąd wynika, że istnieje przynajmniej jedno  $p_j^*(0) > 0$ , zatem ze wzoru (26) otrzymuje się

$$\beta > 0. \quad \square$$

W dalszej części tego rozdziału bada się współczynnik gotowości. W tym celu założono, że

$$z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 0, \dots, z_k = 0.$$

**Wniosek 12.** Jeśli  $z_1 = 1, z_i = 0$  dla  $i = 2, 3, \dots, k$  to  $\gamma = 0$  i pochodna  $g'(x)$  funkcji kryterialnej  $g(x)$  ma postać:

$$g'(x) = \frac{R_1(x)}{M^2(x)} [\alpha r_1(x) + \beta]$$

gdzie  $r_1(x) = ET_1(x)\lambda_1(x) - F_1(x)$ .

Wiadomo, że jeśli  $r_1(x) \geq 0$ , to zmienna losowa  $T_1$  należy do klasy MTFR. Gdyby prawdziwa była nierówność  $\alpha > 0$ , to  $g'(x) \geq 0$  dla  $T_1 \in \text{MTFR}$ . Oznacza to, że przy  $\alpha > 0$ , funkcja  $g(x)$  jest niemalejąca i nie osiąga maksimum.

#### 5.4. Przykłady numeryczne rzeczywistych systemów eksploatacji

**Przykład 5.1.** W przykładzie przedstawiono sposób maksymalizacji współczynnika gotowości dla pewnego systemu eksploatacji. Założono, że  $k = 6, z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 0, \dots, z_k = 0, ET_2 = 1, ET_i = 0.1$  dla  $i = 3, 4, \dots, k-1, ET_k = 0.5$ .

Przyjęto, że macierz  $P$  prawdopodobieństw przejścia dla włożonego łańcucha Markowa ma postać:

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 \\ 0.7 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.7 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Układ równań liniowych do wyznaczania prawdopodobieństw granicznych  $p_j^*(x)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.8 \\ p_{12}(x) & -1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{13}(x) & 0 & -1 & 0.1 & 0 & 0 \\ p_{14}(x) & 0.1 & 0 & -1 & 0.2 & 0 \\ p_{15}(x) & 0 & 0 & 0.2 & -1 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^*(x) \\ p_2^*(x) \\ p_3^*(x) \\ p_4^*(x) \\ p_5^*(x) \\ p_6^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lub w skrócie macierzowo

$$Ap^*(x) = b$$

gdzie  $A$  jest macierzą układu równań,  $p^*(x)$  kolumną szukanych prawdopodobieństw granicznych i  $b$  kolumną wyrazów wolnych. Omówiono przypadek szczególny modelu, w którym  $p_{1i}(x) = p_{1i}F_1(x)$  dla  $i = 2, 3, 4, 5, 6$ .

Wykorzystując wzór (14) obliczono  $A_1 = 0.95816$ .

Wzory na współczynniki  $B, B_1, C, C_1$  zawierają wielkości

$$s_j = \sum_{i=2}^k \beta_{ij} \quad i \beta_{ij} \quad j = 2, 3, \dots, k. \quad (28)$$

Wartości współczynników  $s_j, \beta_{1j}$  dla  $j = 2, 3, \dots, k$  przedstawiono w poniższej tabeli.

Tabela 5.1. Wartości współczynników  $s_j, \beta_{1j}$

j	$s_j$	$\beta_{1j}$
2	0.49048	0.0004
3	0.11400	0.0040
4	0.18184	0.0400
5	0.26348	0.1998
6	0.26348	0.9590

Dla współczynnika gotowości przyjmuje się  $z_1 = 1, z_i = 0$  dla  $i = 2, 3, 4, 5, 6$ . Wartości współczynników  $B, B_1, C$  i  $C_1$  są następujące:

$$B_1 = 0, C_1 = 0, B = 0.18828, C = 0.06026.$$

Współczynniki  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  występujące w warunkach istnienia maksimum rozważanych funkcji kryterialnych są następujące:

$$\alpha = -0.1804, \beta = 0.05774, \gamma = 0.$$

Do analizy przebiegu funkcji określającej zysk na jednostkę czasu przyjmuje się:

$$z_1 = 2, z_2 = -0.4, z_3 = -0.1, z_4 = -0.1, z_5 = -0.1, z_6 = -0.1.$$

Dla tych wartości obliczono:

$$B_1 = 0.062972, C_1 = 0.006062, B = 0.18828, C = 0.06026.$$

Współczynniki  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  są w tym przypadku następujące:

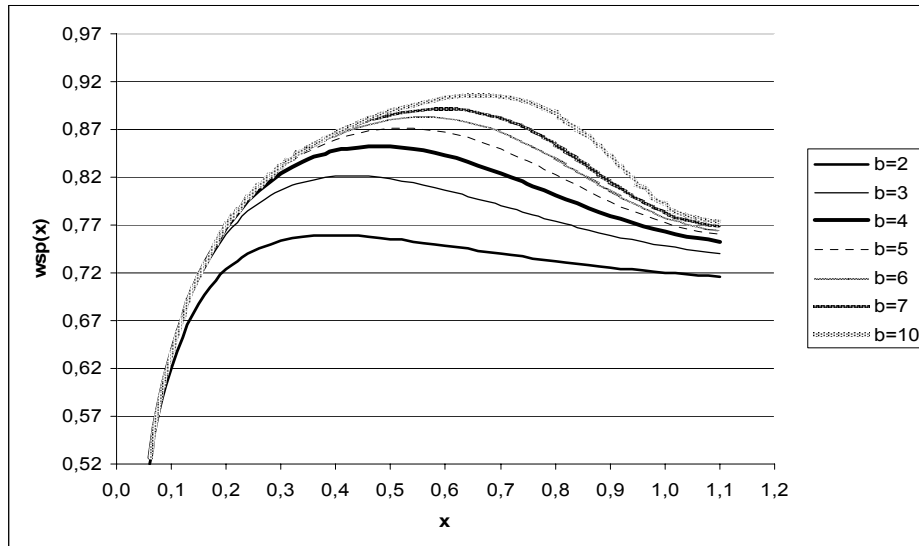
$$\alpha = -0.30048, \beta = 0.109669, \gamma = 0.0026533.$$

Zgodnie z wnioskiem 11 zachodzi  $\beta > 0$ , ale w przeciwieństwie do modelu 3-stanowego  $\gamma > 0$ . Poniżej wyznaczono wartości współczynnika gotowości dla trzech rozkładów prawdopodobieństwa czasu do uszkodzenia:

- rozkładu Weibulla,
- rozkładu gamma,
- rozkładu odwróconego normalnego.

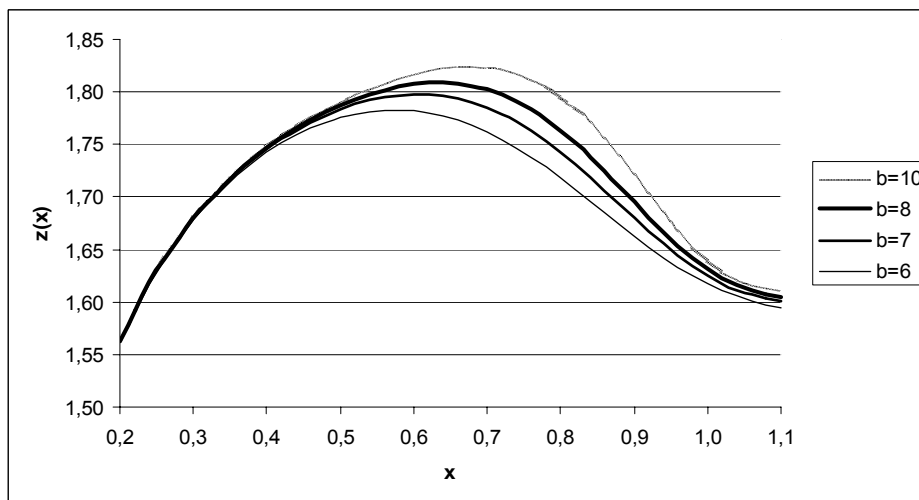
W pierwszym przypadku funkcja intensywności uszkodzeń rośnie do  $\infty$ , w drugim rośnie do pewnej stałej, a w trzecim przypadku jest jednomodalna.

**Przykład 5.1.A.** Założono, że funkcja niezawodności dla zmiennej losowej  $T_1$  ma postać  $R_1(x) = \exp(-ax^b)$  dla  $x \geq 0$ . Na rysunku 5.1 przedstawiono przebieg współczynnika gotowości w funkcji czasu wymiany profilaktycznej dla  $a = 2$  i  $b \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$ . Parametry rozkładu Weibulla dobrano tak, aby dla każdego przebiegu współczynnika gotowości istniało maksimum globalne.



Rys. 5.1. Przebieg współczynnika gotowości  $wsp(x)$  dla rozkładu Weibulla

Na rysunku 5.2 przedstawiono przebieg zysku na jednostkę czasu dla  $a = 2$ ,  $b \in \{6, 7, 8, 10\}$ . Dla wszystkich rozważanych wariantów funkcja zysku na jednostkę czasu przyjmuje wartość maksymalną.



Rys. 5.2. Zysk na jednostkę czasu  $z(x)$  dla rozkładu Weibulla

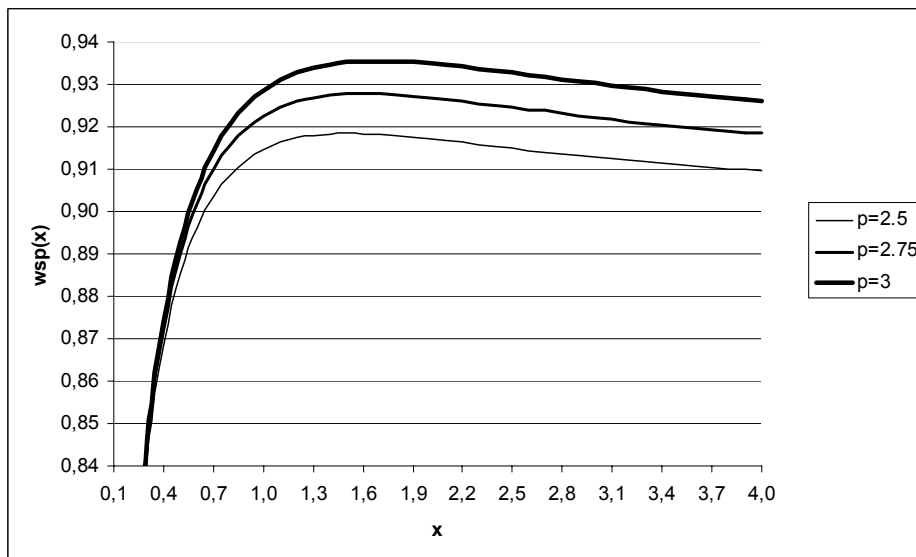
**Przykład 5.1.B.** Założono, że zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład gamma z funkcją gęstości prawdopodobieństwa w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Dla funkcji intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  zachodzi:

$$\lambda(\infty) = 1 / b$$

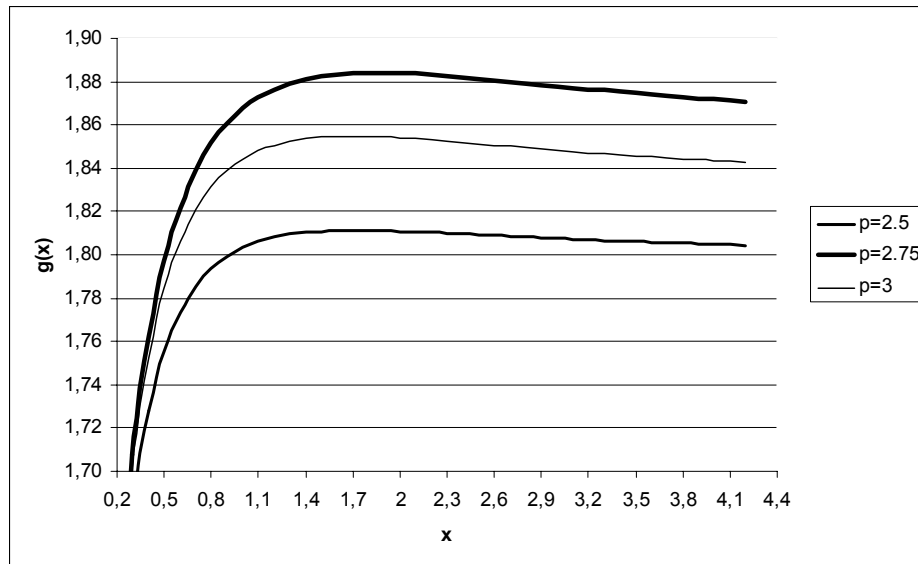
Dla  $p > 1$  funkcja  $\lambda(x)$  jest rosnąca, tzn.  $T_1 \in \text{IFR}$ . Dystrybuanta rozkładu gamma w przypadku ogólnym wyraża się całką nieelementarną z funkcji gęstości. Całka ta nosi w literaturze nazwę niepełnej funkcji gamma. Sposób obliczenia wartości funkcji  $ET(x)$  przedstawiono w podrozdziale 3.1. Na rysunku 5.3 przedstawiono przebieg współczynnika gotowości dla parametrów  $b = 1$ ,  $p \in \{2.5, 2.75, 3.0\}$ . Parametry  $p$  i  $b$  rozkładu gamma dobrano tak, aby każdy z przebiegów współczynnika gotowości osiągał maksimum.



Rys. 5.3. Przebieg współczynnika gotowości  $wsp(x)$  dla rozkładu gamma

Na rysunku 5.4 przedstawiono przebieg zysku na jednostkę czasu dla parametrów:  $b = 1$ ,  $p \in \{2.5, 2.75, 3.0\}$ .





Rys. 5.4. Zysk na jednostkę czasu  $g(x)$  dla rozkładu gamma

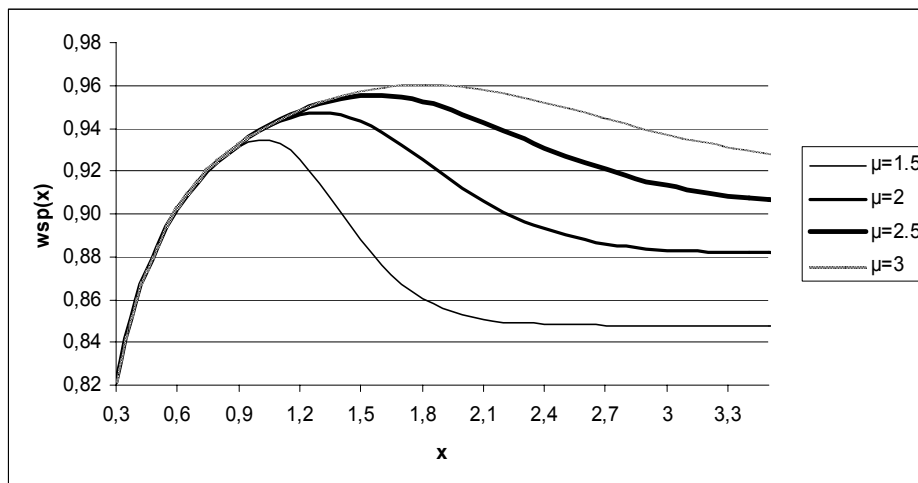
**Przykład 5.1.C.** Założono, że zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład odwrócony normalny (invert-Gaussian) z gęstością prawdopodobieństwa w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

W punkcie 2.6.4 przytoczono prace, w których udowodniono, że analizowana zmienna losowa posiada jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń. Funkcja intensywności uszkodzeń spełnia warunek:

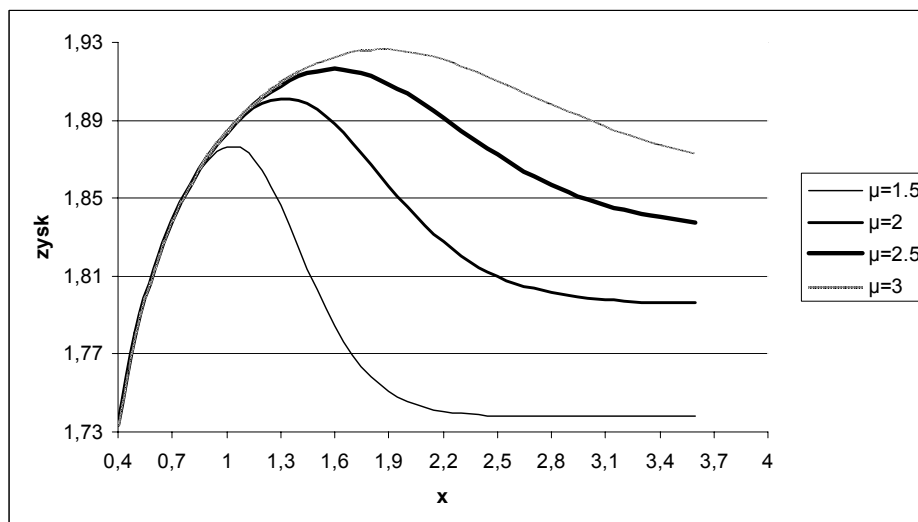
$$\lambda(\infty) = \lambda / (2\mu^2).$$

W tym przykładzie pokazano, że jeśli wartość  $\lambda(\infty)$  jest dostatecznie duża, to współczynnik gotowości i zysk na jednostkę czasu są funkcjami osiągającymi maksimum. Na rysunku 5.5 przedstawiono przebieg współczynnika gotowości dla rozkładu odwróconego normalnego z parametrami  $\lambda = 40$ ,  $\mu \in \{1.5, 2.0, 2.5, 3\}$ .



Rys. 5.5. Współczynnik gotowości dla rozkładu odwróconego normalnego

Analiza przebiegu współczynnika gotowości pokazuje, że parametry rozkładu odwróconego normalnego dobrano tak, aby każda z funkcji osiągała maksimum. Na rysunku 5.6 pokazano przebieg funkcji zysku na jednostkę czasu dla  $\lambda = 40$ ,  $\mu \in \{1.5, 2.0, 2.5, 3\}$ .



Rys. 5.6. Zysk na jednostkę czasu dla rozkładu odwróconego normalnego

Trzy rozkłady rozważane w przykładzie 5.1 pokazują, że celowe jest działanie profilaktyczne, ponieważ funkcja zysku na jednostkę czasu i współczynnik gotowości zawsze osiągają wartość maksymalną. Przebieg wykresu funkcji kryterialnych silnie zależy od typu rozkładu prawdopodobieństwa czasu  $T_1$  do uszkodzenia obiektu technicznego.

**Przykład 5.2.** W tym przykładzie zostanie przeanalizowany rzeczywisty system eksploatacji autobusów komunikacji miejskiej. System ten jest złożony z  $n = 11$  stanów eksploatacyjnych:

- $S_1$  – realizacja zadania przewozowego na trasie,
- $S_2$  – oczekiwanie na realizację zadania przewozowego na placu zajezdni autobusowej,
- $S_3$  – uszkodzenie na trasie,
- $S_4$  – diagnozowanie przez jednostkę pogotowia technicznego,
- $S_5$  – naprawa przez jednostkę pogotowia technicznego,
- $S_6$  – zjazd awaryjny,
- $S_7$  – uzupełnienie paliwa,
- $S_8$  – realizacja obsługi codziennej,
- $S_9$  – realizacja obsługi technicznej,
- $S_{10}$  – diagnozowanie na stanowisku diagnostycznym zajezdni autobusowej (przed naprawą lub po naprawie),
- $S_{11}$  – naprawa na stanowiskach zajezdni autobusowej.

Na podstawie danych zebranych z procesu eksploatacji oceniono macierz  $P$  prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.184 & 0 & 0 & 0 & 0.816 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0.982 & 0 & 0.018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.976 & 0.024 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.955 & 0 & 0.045 & 0 \\
 0.883 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.014 & 0 & 0.103 \\
 0.835 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.165 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.416 & 0 & 0 & 0.584 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.773 & 0 & 0.227 & 0
 \end{bmatrix}$$

Na podstawie danych z eksploatacji rzeczywistego systemu wyznaczono przybliżone wartości średnie czasów przebywania w stanach modelu eksploatacji.

$ET_1 = 7.842$  h,  $ET_2 = 5.834$  h,  $ET_3 = 0.106$  h,  $ET_4 = 0.260$  h,  $ET_5 = 0.353$  h,  $ET_6 = 0.506$  h,  $ET_7 = 0.097$  h,  $ET_8 = 0.124$  h,  $ET_9 = 3.928$  h,  $ET_{10} = 0.405$  h,  $ET_{11} = 5.216$  h.

W przykładzie rozważa się przypadek szczególny modelu  $k$ -stanowego przedstawionego w tym rozdziale pracy. Na podstawie wyżej przedstawionej macierzy  $P$  prawdopodobieństw przejścia i wektora wartości średnich  $ET_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 11$  obliczono wartości współczynników:

$$s_j = \sum_{i=2}^k \beta_{ij} \quad \text{i} \quad \beta_{ij} \quad \text{dla} \quad j = 2, 3, \dots, 11$$

Wartości współczynników  $s_j$  i  $\beta_{ij}$  dla  $j = 2, 3, \dots, 11$  przedstawiono w poniższej tabeli.

Tabela 5.2. Współczynniki  $s_j$  i  $\beta_{ij}$  dla modelu z przykładu 5.2

j	$s_j$	$\beta_{ij}$
2	0.64	0.78
3	0.14	0.00
4	0.14	0.00
5	0.14	0.00
6	0.01	6.00
7	0.64	0.00
8	0.71	0.87
9	0.01	0.01
10	0.05	0.23
11	0.10	1.00

Występujące w wyrażeniu (22) współczynniki  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $B_1$ ,  $B$  i  $C$  są równe:

$$A_1 = 0.78, C_1 = -11.09, B_1 = -1.13, B = 4.15, C = 12.55.$$

Wartości współczynników  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  określone wzorami (25), (26) i (27) są następujące:

$$\alpha = -65.23, \beta = 203.43, \gamma = 31.76.$$

Należy podkreślić, że  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ . Jednak w przypadku, gdy analizuje się współczynnik gotowości, to  $\gamma = 0$ , podobnie jak w modelu 3-stanowym.

Dla wyżej przedstawionych parametrów modelu 11-stanowego jako czas do uszkodzenia przeanalizowano następujące rozkłady:

- rozkład Weibulla,
- rozkład mieszaniny rozkładu wykładniczego z rozkładem Rayleigha,
- rozkład Weibulla potęgowy.

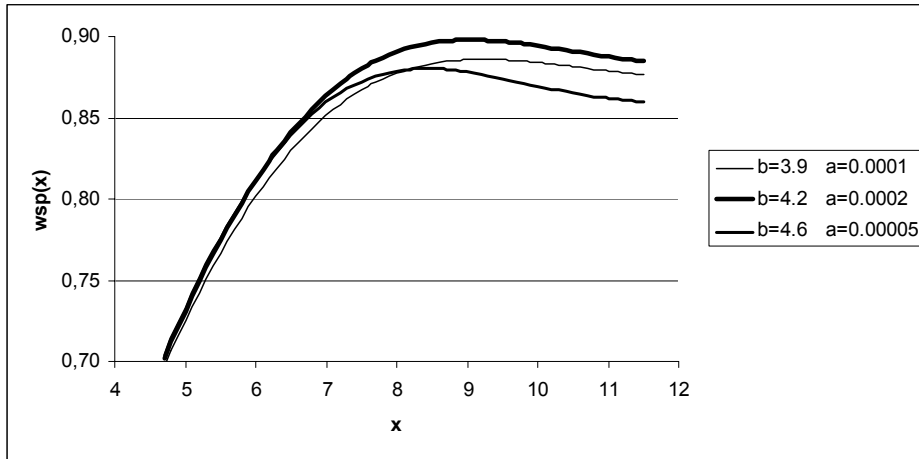
**Przykład 5.2.A.** Założono, że zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład Weibulla. Parametry rozkładu Weibulla dobiera się tak, aby wartość średnia zmiennej losowej  $T_1$  była równa średniej empirycznej wyznaczonej na podstawie badań eksploatacyjnych:

$$a = 0.0001, b = 3.9,$$

$$a = 0.0002, b = 4.2,$$

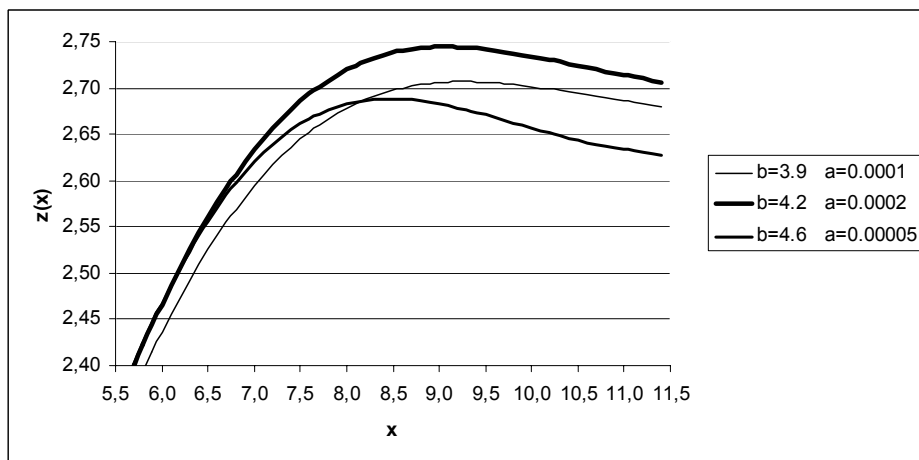
$$a = 0.00005, b = 4.6.$$

Wykresy realizacji współczynnika gotowości dla wymienionych wyżej par parametrów  $a$  i  $b$  rozkładu zmiennej losowej  $T_1$  przedstawiono na rysunku 5.7. W analizowanym zakresie czasów do uszkodzenia tylko dla trzeciej pary parametrów  $a$  i  $b$  współczynnik gotowości osiąga maksimum wartości.



Rys. 5.7. Współczynnik gotowości dla przykładu 5.2.A

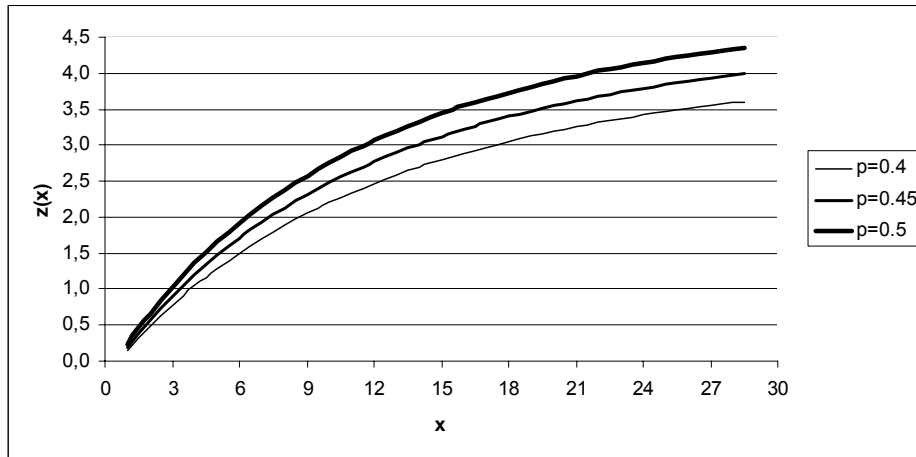
Dla tych samych wartości parametrów  $a$  i  $b$  i dla wcześniej ustalonych wartości zysków  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 11$  na jednostkę czasu wyznaczono trzy realizacje funkcji zysku na jednostkę czasu. Wykresy tych funkcji przedstawiono na rysunku 5.8. Wszystkie realizacje funkcji zysku osiągają w analizowanym zakresie wartość maksymalną.

Rys. 5.8. Zysk na jednostkę czasu  $z(x)$  dla przykładu 5.2.A

**Przykład 5.2.B.** Założono, że zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład będący mieszaniną rozkładu Rayleigha i rozkładu wykładniczego. W rozdziale 7 tej pracy sformułowano warunki, aby funkcja intensywności mieszaniny była jednomodalna. Funkcja niezawodności dla tej mieszaniny ma postać:

$$R(t; p, \lambda, \alpha) = p \exp(-\lambda t) + (1 - p) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} t^2\right) \text{ dla } t \geq 0$$

Rozkład zmiennej losowej  $T_1$  zależy od parametrów  $p$ ,  $\lambda$  i  $\alpha$ . Dla tego przykładu ustalono, że  $\alpha = 5$ ,  $\lambda = 0.064$ . Zmieniono natomiast współczynnik  $p$ ,  $p \in \{0.4, 0.45, 0.5\}$ . Na rysunku 5.9 przedstawiono trzy realizacje funkcji zysku na jednostkę czasu. Żadna z tych realizacji nie osiąga w analizowanym przedziale czasu maksimum. Wynika to z przyjętego modelu dla zmiennej losowej  $T_1$ .

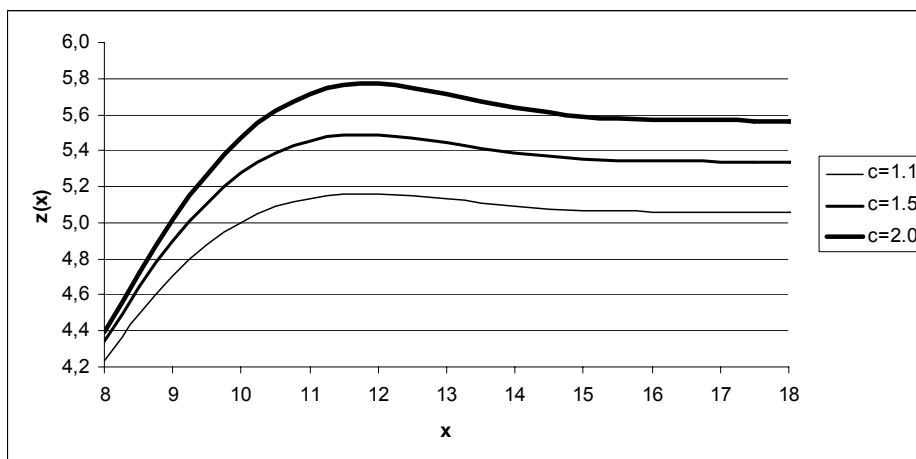


Rys. 5.9. Zysk na jednostkę czasu  $z(x)$  dla przykładu 5.2.B

**Przykład 5.2.C.** Założono, że zmienna losowa  $T_1$  ma potęgowy rozkład Weibulla opisany w podrozdziale 2.4. Dystrybuanta zmiennej losowej  $T_1$  ma postać:

$$F(t) = \left(1 - \exp(-at^b)\right)^c.$$

W przykładzie przyjęto  $a = 0.0001$ ,  $b = 4.2$ ,  $c \in \{1.1, 1.5, 2.0\}$ . Wykresy trzech realizacji funkcji zysku na jednostkę czasu przedstawiono na rysunku 5.10. Analizowane realizacje w każdym z przypadków osiągają maksimum.



Rys. 5.10. Zysk na jednostkę czasu dla przykładu 5.2.C

Na podstawie analizy modelu  $n = 11$  stanowego można stwierdzić, że w dwóch przypadkach (5.2.A i 5.2.C) zysk na jednostkę czasu osiąga wartość maksymalną. W przykładzie 5.2.B zysk nie osiąga wartości maksymalnej. Fakt istnienia wartości maksymalnej silnie zależy od typu rozkładu zmiennej  $T_1$ . Powyższe podkreśla ważność identyfikacji parametrów niezawodnościowych systemów eksploatacji w praktyce obsługiwanie systemów eksploatacji.

## 6. Model wymiany prewencyjnej dla obiektów technicznych z gwarancją

### 6.1. Sformułowanie problemu i podstawowe oznaczenia

W punkcie 2.5.4 przedstawiono różne wyniki dotyczące wymian elementów (obiektów) posiadających gwarancję producenta. Gwarancja jest podstawowym elementem współczesnego rynku. Podstawową rolą gwarancji jest wskazanie mówiące jakie czynności powinien podjąć kupujący, gdy produkt ulegnie uszkodzeniu podczas trwania gwarancji. Gwarancja producenta na produkt tworzy zachętę dla kupującego do różnych zobowiązań, podnosi reputację producenta, ma wpływ na udział w rynku i potencjalne zyski [73].

Rozważania przedstawione w tym rozdziale są próbą uogólnienia wyników z pracy [109]. Cytowana praca zawiera analizę prostego modelu wymian według wieku dla obiektów z gwarancją. Zakłada się, że czas do uszkodzenia ma niemalejącą funkcję intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$ . Oprócz rozkładu zmiennej losowej  $T$ , oznaczającej czas do uszkodzenia, w modelu tym dane są:  $c_p$  – koszt zakupu nowego elementu,  $c_d$  – koszt usunięcia uszkodzenia. Czasy napraw są pomijane. W rozdziale tym wprowadza się 4-stanowy model wymian elementów posiadających gwarancję. Odrzuca się założenie, że czasy wymian i napraw są pomijalne. Wszystkie wyniki prezentowane w tym rozdziale są wynikami uzyskanymi przez autora.

Dla dalszych rozważań przyjęto następujące oznaczenia:

$T$	– losowy czas życia elementu (obiektu technicznego),
$f(t)$	– gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $T$ ,
$F(t), R(t)$	– dystrybuanta i funkcja niezawodności zmiennej losowej $T$ ,
$\lambda(t)$	– funkcja intensywności uszkodzeń,
$x$	– wiek wymiany elementu,
$w$	– długość okresu gwarancji,
$z$	– zysk przypadający na jednostkę czasu wynikający z bezawaryjnej pracy,
$z_2$	– koszt jednostkowy wymiany uszkodzonego elementu (podczas gwarancji),
$z_3$	– koszt jednostkowy zakupu elementu (wymiana prewencyjna),
$z_4$	– koszt jednostkowy wymiany uszkodzonego elementu w okresie po gwarancji,
$ET_2$	– średni czas wymiany uszkodzonego elementu podczas gwarancji,
$ET_3$	– średni czas zakupu elementu (wymiana prewencyjna),
$ET_4$	– średni czas wymiany uszkodzonego elementu w okresie po gwarancji,
$g(x, w)$	– zysk na jednostkę czasu dla czasu wymiany $x$ i długości okresu gwarancji $w$ ,
IFR	– klasa rozkładów dla czasów życia z niemalejącą funkcją intensywności uszkodzeń $\lambda(x)$ ,
MTFR	– klasa rozkładów czasów życia z niemalejącą w zależności od $x$ wartością średnią czasu życia między wymianami.

W pracy [109] koszt przypadający na jednostkę czasu, pod warunkiem przeprowadzenia wymiany prewencyjnej po czasie  $x$ , wyraża się wzorem:



$$g(x, w) = \begin{cases} \frac{c_p R(x) + c_d F(x)}{ET(x)}, & \text{dla } x \leq w \\ \frac{c_p R(w) + c_d F(x)}{ET(x)}, & \text{dla } x > w \end{cases}$$

gdzie  $c_p$  oznacza koszt zakupu nowego elementu,  $c_d$  koszt wymiany uszkodzonego elementu,

$$ET(x) = \int_0^x R(t) dt$$

Funkcja  $g(x, w)$  jest ciągła dla  $x \geq 0$  i różniczkowalna dla  $x \neq w$  przy założeniu, że zmienna losowa  $T$  posiada gęstość. W cytowanej wyżej pracy podano warunki, przy spełnieniu których funkcja  $g(x, w)$  osiąga minimum. Powyższy model nie uwzględnia zysków wynikających z poprawnej pracy elementu oraz faktu, że czasy napraw i czasy zakupu są często wielkościami losowymi.

## 6.2. Model wymian dla obiektu z gwarancją

Jako model matematyczny procesu wymian elementów według wieku dla elementów z gwarancją przyjmuje się 4-stanowy proces semi-markowski  $X(t)$ . Przyjęto, że proces  $X(t)$  posiada przestrzeń stanów  $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ , gdzie:

- $s_1$  – stan poprawnej pracy obiektu technicznego, zysk na jednostkę czasu jest równy  $z$  ( $z > 0$ ),
- $s_2$  – wymiana w okresie gwarancji i po uszkodzeniu, zysk jednostkowy wynikający z przebywania w stanie  $s_2$  jest równy  $z_2$  ( $z_2 \leq 0$ ),
- $s_3$  – wymiana prewencyjna elementu po okresie gwarancji, ale przed uszkodzeniem lub wymiana prewencyjna przed upływem gwarancji z zyskiem jednostkowym równym  $z_3$  ( $z_3 \leq 0$ ),
- $s_4$  – wymiana uszkodzonego elementu po okresie gwarancji i przed planowaną odnową, jednostkowy koszt tej wymiany jest równy  $z_4$  ( $z_4 \leq 0$ ).

Po to, aby wyznaczyć podstawowe charakterystyki włożonego w proces semi-markowski łańcucha Markowa, konieczne jest wyznaczenie macierzy prawdopodobieństw przejścia. Dla prawdopodobieństwa  $p_{12}(x)$  otrzymano:

$$p_{12}(x) = P\{X(t+x) = 2 \mid X(t) = 1\} = \begin{cases} F(x) & \text{dla } x \leq w \\ F(w) & \text{dla } x > w \end{cases}$$

W celu wyznaczenia prawdopodobieństwa  $p_{13}(x)$  wystarczy zauważyć, że obiekt techniczny znajdzie się w stanie  $s_3$ , jeśli  $T_1 \geq x$ , stąd  $p_{13}(x) = R_1(x)$ . Dla prawdopodobieństwa  $p_{14}(x)$  otrzymano:

$$p_{14}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq w \\ F(x) - F(w) & \text{dla } x > w \end{cases}$$

Zakłada się, że dla analizowanego procesu semi-markowskiego  $X(t)$  macierz przejścia włożonego łańcucha Markowa ma postać:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12}(x) & p_{13}(x) & p_{14}(x) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prawdopodobieństwa graniczne  $p_j^*(x)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  dla włożonego łańcucha Markowa dla  $x \leq w$  wyrażają się wzorami:

$$p_1^*(x) = \frac{1}{2}$$

$$p_2^*(x) = \frac{1}{2} F(x) \quad (1)$$

$$p_3^*(x) = \frac{1}{2} R(x)$$

$$p_4^*(x) = 0$$

natomiast dla  $x > w$ :

$$p_1^*(x) = \frac{1}{2}$$

$$p_2^*(x) = \frac{1}{2} F(w) \quad (2)$$

$$p_3^*(x) = \frac{1}{2} R(x)$$

$$p_4^*(x) = \frac{1}{2} (F(x) - F(w))$$

Na podstawie rozważań z rozdziału 4 wiadomo, że funkcja kryterialna  $g(x, w)$  wyrażająca zysk przypadający na jednostkę czasu w modelu semi-markowskim wyraża się wzorem:

$$g(x, w) = \frac{zET(x)p_1^*(x) + z_2ET_2p_2^*(x) + z_3ET_3p_3^*(x) + z_4ET_4p_4^*(x)}{ET(x)p_1^*(x) + ET_2p_2^*(x) + ET_3p_3^*(x) + ET_4p_4^*(x)} \quad (3)$$

Uwzględniając wzory na prawdopodobieństwa graniczne (1) i (2) dla  $x \leq w$  otrzymano:

$$g(x, w) = \frac{zET(x) + z_2F(x)ET_2 + z_3R(x)ET_3}{ET(x) + F(x)ET_2 + R(x)ET_3} \quad (4)$$

Po prostych przekształceniach wzór (4) przyjmuje postać:

$$g(x, w) = \frac{zET(x) + B_1F(x) + C_1}{ET(x) + BF(x) + C} \quad (5)$$

gdzie współczynniki  $B$ ,  $B_1$ ,  $C$  i  $C_1$  wyrażają się wzorami:

$$B_1 = z_2ET_2 - z_3ET_3$$

$$\begin{aligned}
B &= ET_2 - ET_3 \\
C_1 &= z_3 ET_3 \\
C &= ET_3
\end{aligned} \tag{6}$$

Dla  $x > w$  funkcja kryterialna  $g(x, w)$  ma postać:

$$g(x, w) = \frac{zET(x) + z_2ET_2F(w) + z_3ET_3R(x) + z_4ET_4(F(x) - F(w))}{ET(x) + ET_2F(w) + ET_3R(x) + ET_4(F(x) - F(w))} \tag{7}$$

Po przekształceniach otrzymano:

$$g(x, w) = \frac{zET(x) + (z_4ET_4 - z_3ET_3)F(x) - F(w)z_4ET_4 + z_2ET_2F(w) + z_3ET_3}{ET(x) + (ET_4 - ET_3)F(x) - F(w)ET_4 + ET_2F(w) + ET_3} \tag{8}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\begin{aligned}
D_1 &= z_4ET_4 - z_3ET_3 \\
D &= ET_4 - ET_3 \\
E_1 &= (z_2ET_2 - z_4ET_4)F(w) + z_3ET_3 \\
E &= (ET_2 - ET_4)F(w) + ET_3
\end{aligned} \tag{9}$$

funkcję kryterialną (8) można zapisać w postaci:

$$g(x, w) = \frac{zET(x) + D_1F(x) + E_1}{ET(x) + DF(x) + E} \tag{10}$$

Porównując funkcję kryterialną daną wzorem (5) z funkcją kryterialną (10) można stwierdzić, że funkcja  $g(x, w)$  w obu przypadkach ma taką samą postać. Pochodna pierwszego rzędu funkcji kryterialnej  $g(x, w)$  względem zmiennej  $x$  ma postać:

$$g'(x, w) = \frac{R(x)}{M^2(x)} \{ \alpha(\lambda(x)ET(x) - F(x)) + \beta + \gamma\lambda(x) \} \tag{11}$$

gdzie, jeśli  $x \leq w$ :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= B_1 - zB \\
\beta_1 &= zC - C_1 \\
\gamma_1 &= B_1C - BC_1
\end{aligned} \tag{12}$$

$M(x)$  oznacza mianownik funkcji kryterialnej (5), natomiast dla  $x > w$ :

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= D_1 - zD \\
\beta_2 &= zE - E_1 \\
\gamma_2 &= D_1E - DE_1
\end{aligned} \tag{13}$$

$M(x)$  oznacza mianownik funkcji kryterialnej (10).

Jeśli  $x \leq w$ , to:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= ET_2(z_2 - z) + ET_3(z - z_3) \\
\beta_1 &= ET_3(z - z_3) \\
\gamma_1 &= ET_2 ET_3(z_2 - z_3)
\end{aligned} \tag{14}$$

natomiast dla  $x > w$ :

$$\alpha_2 = ET_3(z - z_3) + ET_4(z_4 - z)$$

$$\beta_2 = F(w)(ET_4(z_4 - z) + ET_2(z - z_2)) + ET_3(z - z_3) \quad (15)$$

$$\gamma_2 = F(w)[z_4 ET_4(ET_2 - ET_3) + z_2 ET_2(ET_3 - ET_4) + z_3 ET_3(ET_4 - ET_2)] + ET_3 ET_4(z_3 - z_4)$$

W celu sformułowania odpowiednich warunków istnienia maksimum funkcji  $g(x, w)$  ze względu na zmienną  $x$  przyjęto następujące założenia:

- a)  $z > 0, z_1 \leq 0, z_3 \leq 0, z_4 \leq 0,$
- b)  $z_4 \leq z_2, z_4 \leq z_3,$
- c)  $z_4 = z_2 + z_3,$
- d)  $ET_4 \geq ET_3, ET_4 \geq ET_2.$

Na podstawie powyższych założeń łatwo można udowodnić następujące tezy:

**Wniosek 1.**  $\alpha_2 < 0.$

**Wniosek 2.**  $\alpha_1 - \alpha_2 \geq 0.$

**Wniosek 3.**  $\beta_1 > 0.$

**Wniosek 4.**  $\beta_1 - \beta_2 = F(w)(\alpha_1 - \alpha_2).$

**Wniosek 5.** Funkcja  $g(x, w)$  jest określona dla  $x = 0$ , ponieważ  $g(0, w) = z_3 < 0.$

**Wniosek 6.** Pochodna pierwszego rzędu  $g'(x, w)$  funkcji  $g(x, w)$  względem zmiennej  $x$  dla  $x = 0$  jest równa

$$g'(0, w) = \frac{\beta_1 + \gamma_1 f(0^+)}{ET_3}$$

**Wniosek 7.** Funkcja kryterialna  $g(x, w)$  jest ciągła w punkcie  $x = w$ , ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

Definiuje się funkcję  $h(x)$

$$h(x) = \alpha_1 H(x) + \beta_1 + \gamma_1 \lambda(x), \text{ jeśli } x \leq w$$

$$h(x) = \alpha_2 H(x) + \beta_2 + \gamma_2 \lambda(x), \text{ jeśli } x > w$$

gdzie  $H(x) = \lambda(x)ET(x) - F(x).$

Ze wzorów (14) i (15) wynika, że współczynniki  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  i  $\gamma_1$  nie zależą od długości przedziału gwarancji  $w$ . Z powyższego wynika, że celowe jest badanie różnicy  $h(w) - h(w^+)$ , gdzie  $h(w^+)$  oznacza granicę prawostronną funkcji  $g(x, w)$  w punkcie  $x = w$ . Różnicę  $h(w) - h(w^+)$  na podstawie wzorów (14), (15) oraz wniosku 4 można zapisać jako:

$$h(w) - h(w^+) = \lambda(w)((\alpha_1 - \alpha_2)ET(w) + \gamma_1 - \gamma_2)$$

Niech  $u(x) = (\alpha_1 - \alpha_2)ET(x) + \gamma_1 - \gamma_2.$

Dla  $u = 0$  jest  $u(0) = \gamma_1 - \gamma_2$ , stąd:

$$u(0) = ET_3(ET_2(z_2 - z_3) + ET_4(z_3 - z_4))$$

Uwzględniając założenie c), po prostych przekształceniach otrzymano:

$$u(0) = ET_3(z_2(ET_2 - ET_4) - z_3 ET_4) \geq 0$$

Z postaci  $\gamma_1$  i  $\gamma_2 = \gamma_2(w)$  wynika, że funkcja  $u_1(x) = \gamma_1 - \gamma_2(w)$  ma postać

$$u_1(x) = A + F(w)B$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= ET_2 ET_3 (z_2 - z_3) + ET_3 ET_4 (z_4 - z_3), \\ B &= z_4 ET_4 (ET_3 - ET_2) + z_2 ET_2 (ET_4 - ET_3) + z_3 ET_3 (ET_2 - ET_4). \end{aligned}$$

Jeśli  $B \geq 0$ , to funkcja  $u_1(w)$  jest niemalejąca dla  $w \geq 0$ , stąd:

$$u(w) = (\alpha_1 - \alpha_2) ET(w) + u_1(w) \geq 0$$

Jeśli  $B < 0$ , to funkcja  $u_1(w)$  jest nierosnąca dla  $w \geq 0$ . Po to, aby  $u_1(w) \geq 0$  wystarczy udowodnić, że:

$$u_1(\infty) = A + B \geq 0$$

Po wykonaniu prostych obliczeń otrzymano:

$$A + B = -z_4 ET_2 ET_4 + z_2 ET_2 ET_4 \geq 0$$

Ostatnia nierówność pozwala na sformułowanie poniższego wniosku.

**Wniosek 8.** Jeśli spełnione są założenia a), b) i c), to dla  $w \geq 0$  prawdziwa jest nierówność:

$$h(w) - h(w^+) \geq 0$$

Niech  $h(x) = \alpha H(x) + \beta + \gamma \lambda(x)$ .

**Lemat 1.**

Jeśli  $\alpha ET(x) + \gamma \geq 0$ , to z tego, że  $\lambda'(x) \geq 0$  wynika, że  $h'_1(x) \geq 0$  i odwrotnie, z tego, że  $\lambda'(x) \leq 0$  wynika, że  $h'_1(x) \leq 0$ .

Jeśli  $\alpha ET(x) + \gamma \leq 0$ , to z tego, że  $\lambda'(x) \geq 0$  wynika, że  $h'_1(x) \leq 0$  i odwrotnie, z tego, że  $\lambda'(x) \leq 0$  wynika, że  $h'_1(x) \geq 0$ .

Jeśli  $\alpha ET(x) + \gamma$  zmienia znak z „-” na „+”,  $T \in \text{IFR}$ , to funkcja  $h(t)$  jest nierosnąca dla  $w \in (0, w_1)$  i niemalejąca dla  $w \in (w_1, +\infty)$ .

Jeśli  $\alpha ET(x) + \gamma$  zmienia znak z „-” na „+”,  $T \in \text{IFR}$ , to funkcja  $h(t)$  jest niemalejąca dla  $w \in (0, w_2)$  i nierosnąca dla  $w \in (w_2, +\infty)$ .

Jeśli  $\alpha ET(x) + \gamma \geq 0$ , to znak pochodnej  $h'_1(x)$  jest taki sam jak znak pochodnej  $\lambda'_1(x)$  i odwrotnie, jeśli  $\alpha ET(x) + \gamma < 0$ , to znak pochodnej  $h'_1(x)$  jest inny niż znak pochodnej  $\lambda'_1(x)$ .

Dowód. Wystarczy pokazać, że  $h'_1(x) = \lambda'(x)(\alpha ET(x) + \gamma)$ .  $\square$

W celu sformułowania warunków istnienia jednoznacznego maksimum funkcji kryterialnej  $g(x, w)$  rozważono cztery przypadki.

*Przypadek 1:*  $\alpha_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0$ , wtedy  $\alpha_1 ET(x) + \gamma_1 \geq 0$ , stąd wnioskuje się, że  $h_1(x) \geq 0$  dla  $x \in (0, w)$ . Z powyższego wynika, że funkcja kryterialna  $g(x, w)$  dla  $x \in (0, w)$  jest niemalejąca i dla  $x \in (w, +\infty)$  jest nierosnąca ( $\alpha_2 < 0$ ). Jeśli  $h(\infty) < 0$ , to funkcja  $g(x, w)$  osiąga jednoznaczne maksimum w pewnym punkcie  $x_0 \geq w$ .

*Przypadek 2:*  $\alpha_1 \leq 0, \gamma_1 \leq 0$ , wtedy  $\alpha_1 ET(x) + \gamma_1 \leq 0$ , stąd  $h_1(x) \leq 0$  dla  $x \in (0, w)$ . Funkcja  $h(x)$  jest nierosnąca dla  $w \geq 0$ . Jeśli  $h(\infty) < 0$ , to istnieje tylko jeden punkt  $x_0$ , dla którego funkcja kryterialna  $g(x, w)$  osiąga maksimum.

*Przypadek 3:*  $\alpha_1 < 0, \gamma_1 > 0$ . Jeśli  $\alpha_1 ET(x) + \gamma_1 > 0$ , to  $h(x) \geq 0$  dla  $x \in (0, w)$ . Jeżeli  $\alpha_2 < 0$  i  $h(\infty) < 0$  to  $h(x)$  dokładnie raz zmienia znak z „+” na „-”. Wynika stąd, że istnieje  $x_0 \geq w$  takie, że funkcja kryterialna  $g(x, w)$  osiąga dokładnie jedno maksimum. Jeśli  $\alpha_1 ET(x) + \gamma_1$  zmienia znak z „+” na „-”, to istnieje takie  $x_1$ , że funkcja  $h_1(x)$  jest rosnąca dla  $x \in (0, x_1)$  i malejąca dla  $x \in (x_1, w)$ . Jeśli  $h(w) \leq 0$ , to istnieje punkt ekstremalny  $x_0 \leq w$ . Jeśli  $h(w) > 0$ , to z tego, że  $\alpha_2 < 0$  i  $h(\infty) < 0$  wynika, że istnieje  $x_0 \geq w$ .

*Przypadek 4:*  $\alpha_1 > 0, \gamma_1 < 0$ . Jeśli  $\alpha_1 ET(x) + \gamma_1 \leq 0$ , to  $h(x)$  jest malejąca dla  $x \in (0, w)$ . W tym przypadku, jeśli  $\alpha_2 < 0, h(\infty) < 0$ , to istnieje jednoznaczne maksimum. Jeśli  $\alpha_1 ET(x) + \gamma_1$  zmienia w punkcie  $x_1$  znak z „-” na „+”, to dowodzi się, że  $h_1(x) \geq 0$ . Dalej wyznacza się wartość  $h(x_1)$   
 $h(x_1) = \alpha_1 H(x_1) + \beta_1 + \gamma_1 \lambda(x_1) = \lambda(x_1) (\alpha_1 ET(x_1) + \gamma) + \beta_1 - \alpha_1 F(x_1)$ .  
 Na podstawie wzorów (14) otrzymuje się:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \frac{ET_2(z_2 - z)}{\alpha_1}$$

Stąd:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} \geq 1$$

zatem

$$h(x_1) \geq 0$$

Z tego, że  $h(x_1) \geq 0$  wynika, że  $h(x) \geq 0$  dla  $x \in (0, w)$ . Stąd wynika, że funkcja kryterialna  $g(x, w)$  jest niemalejąca w przedziale  $(0, w)$ . Z nierówności  $\alpha_2 < 0$  i  $h(\infty) < 0$  wynika, że istnieje jednoznaczne maksimum funkcji  $g(x, w)$  w punkcie  $x_0 \geq w$ .  $\square$

Rozważane wyżej przypadki pozwalają na sformułowanie poniższego twierdzenia:

**Twierdzenie 1.** Jeśli zmienna losowa  $T \in \text{IFR}$  i spełnione są założenia a), b), d) i:

$$\beta_1 + \gamma_1 f(0^+) > 0$$

$$\lambda(\infty) > \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2 ET + \gamma_2}$$

to istnieje dokładnie jedno maksimum funkcji kryterialnej  $g(x, w)$ .

### 6.3. Współczynnik gotowości

Funkcja  $g(x, w)$ , jest w szczególnym przypadku współczynnikiem gotowości dla dużego czasu obserwacji. W tym celu przyjmuje się:

$$z = 1, z_2 = z_3 = z_4 = 0.$$

Dla  $x \leq w$  zachodzi:

$$\alpha_1 = ET_3 - ET_2$$

$$\beta_1 = ET_3$$

$$\gamma_1 = 0$$

natomiast dla  $x > w$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= ET_3 - ET_4 \\ \beta_2 &= F(w)(ET_2 - ET_4) + ET_3 \\ \gamma_2 &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

Niech:

$$\begin{aligned}H(x) &= \lambda(x)ET(x) - F(x) \\ h(x) &= \alpha H(x) + \beta.\end{aligned}$$

Pochodna funkcji kryterialnej  $g(x, w)$  względem  $x$  na podstawie (11) wyraża się wzorem:

$$g'(x, w) = \frac{R(x)}{M^2(x)} h(x)\tag{17}$$

Zmiana znaku pochodnej  $g'(x, w)$  zależy tylko od zmiany znaku funkcji  $h(x)$ . Wiadomo, że:

$$h(0) = \beta_1 = ET_3 > 0\tag{18}$$

W rozdziale 3 pokazano, że jeśli funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(x)$  jest nierosnąca, to także funkcja  $H(x)$  jest nierosnąca i odwrotnie, jeśli funkcja  $\lambda(x)$  jest niemalejąca, to  $H(x)$  jest również niemalejąca.

**Wniosek 9.** Warunkiem koniecznym istnienia maksimum współczynnika gotowości  $g(x, w)$  jest warunek  $h(\infty) < 0$ .

Przy pewnych ogólnych założeniach można sformułować warunki konieczne na istnienie maksimum współczynnika gotowości, które ujmuje poniższy wniosek.

**Wniosek 10.** Jeśli  $H(x) \geq 0$  dla  $x \geq 0$ ,  $ET_3 \geq ET_2$ ,  $ET_4 \geq ET_3$ ,  $T \in IFR$ ,  $h(\infty) < 0$ , to współczynnik gotowości  $g(x, w)$  osiąga wartość maksymalną w pewnym punkcie  $x_0$  takim, że  $x_0 \geq w$ .

Dowód. Jeśli  $\alpha_1 = ET_3 - ET_2 \geq 0$ ,  $H(x) \geq 0$ ,  $\beta_1 = ET_3 > 0$ , to funkcja  $h(x)$  rośnie dla  $x \leq w$ . Natomiast dla  $x > w$  funkcja  $h(x)$  maleje, ponieważ  $\alpha_2 = ET_3 - ET_4 \leq 0$ . Z tego, że  $h(\infty) < 0$  wynika zmiana znaku pochodnej  $g'(x, w)$  dla  $x \geq w$ . Zatem istnieje dokładnie jedno maksimum funkcji  $g(x, w)$  w punkcie  $x_0 \geq w$ .  $\square$

W przypadku współczynnika gotowości funkcja  $h(x)$  w punkcie  $x = w$  jest nieciągła i zachodzi:

$$\begin{aligned}h(w) &= (ET_3 - ET_2)H(w) + ET_3 \\ h(w^+) &= (ET_3 - ET_2)H(w) + ET_3 + F(w)(ET_2 - ET_4)\end{aligned}$$

Można zatem sformułować wniosek 11 będący szczególnym przypadkiem wniosku 8.

**Wniosek 11.** Warunek  $ET_4 \geq ET_2$  jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby:

$$h(w) - h(w^+) \geq 0.$$

Nierówność  $h(\infty) < 0$  jest równoważna nierówności:

$$(ET_3 - ET_4) ET \lambda(\infty) + F(w)(ET_2 - ET_4) + ET_3 < 0\tag{19}$$

Na podstawie wniosków 10, 11 i nierówności (19) można sformułować poniższy wniosek.

**Wniosek 12.** Jeśli  $T \in \text{IFR}$ ,  $ET_4 \geq ET_2$ ,  $ET_4 > ET_3$  i:

$$ET \lambda(\infty) + 1 \geq \frac{F(w)ET_2 + R(w)ET_4}{ET_4 - ET_3} \quad (20)$$

to współczynnik gotowości  $g(x, w)$  osiąga jednoznaczne maksimum.

Niektóre rozkłady prawdopodobieństwa z klasy IFR, na przykład rozkład Weibulla, spełniają warunek  $\lambda(\infty) = \infty$ . Dla takich rozkładów nierówność (20) zawsze jest prawdziwa. Wyżej sformułowano różne kryteria istnienia zysku jednostkowego i współczynnika gotowości dla zmiennych losowych (czasów życia) z niemalejącą funkcją intensywności uszkodzeń, to znaczy dla zmiennych  $T$  ( $T \in \text{IFR}$ ). W dalszych rozważaniach podjęto próbę uogólnienia wyników dla współczynnika gotowości dla rozkładów prawdopodobieństwa z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Podobnie jak dla zysku na jednostkę czasu w klasie IFR, rozważono kilka przypadków szczególnych.

*Przypadek 1:*  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $x_M \geq w$ , gdzie  $x_M$  jest punktem, w którym funkcja  $\lambda(x)$  osiąga wartość maksymalną,  $h(\infty) < 0$ .

Założenie  $\alpha_1 \geq 0$  jest równoważne nierówności  $ET_3 \geq ET_2$ . W analizowanym przypadku funkcja  $h(x) = \alpha_1 ET(x) + \beta_1$  jest niemalejąca dla  $x \in \langle 0, w \rangle$ . Z wniosku 11 wynika, że  $h(w) \geq h(w^+)$ . Z tego, że  $\alpha_2 = ET_3 - ET_4 < 0$  wynika, że funkcja  $h(x)$  dla  $x \in (w, \infty)$  maleje do  $h(\infty) < 0$ . Z powyższego wynika, że istnieje dokładnie jeden punkt  $x_0 \geq w$  taki, że  $h(x_0) = 0$ .

*Przypadek 2:*  $\alpha_1 > 0$ ,  $x_M < w$ ,  $h(\infty) < 0$ . W tym przypadku funkcja  $h(x) = \alpha_1 ET(x) + \beta_1$  osiąga dokładnie jedno maksimum w punkcie  $x_M < w$ . Dla  $x \in (x_M, w)$  funkcja  $h(x)$  maleje.

Możliwe są dwa przypadki:

- istnieje  $x_0 \leq w$  takie, że  $h(x_0) = 0$ , wtedy funkcja  $g(x, w)$  osiąga maksimum w punkcie  $x_0 < w$ ,
- $h(w) > 0$ , w tym przypadku na podstawie  $\alpha_2 < 0$  istnieje  $x_0 \geq w$ , w którym funkcja  $g(x, w)$  osiąga maksimum.

*Przypadek 3:*  $\alpha_1 < 0$ ,  $x_M \geq w$ ,  $h(\infty) < \infty$ . Funkcja  $h(x)$  jest malejąca dla  $x \in \langle 0, w \rangle$  i jeśli  $h(w) < 0$ , to istnieje  $x_0 < w$  takie, że  $h(x_0) < 0$ . Jeśli  $h(w) \geq 0$ , to istnieje  $x_0 \geq w$  takie, że funkcja  $g(x, w)$  osiąga maksimum lokalne.

*Przypadek 4:*  $\alpha_1 < 0$ ,  $x_M < w$ ,  $h(\infty) < \infty$ . Przypadek ten jest najbardziej złożony z dotychczas rozważanych. Warunki istnienia maksimum współczynnika gotowości zależą od liczby rozwiązań równania:

$$H(x) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \quad \text{dla } x \in (0, w) \quad (21)$$

Z faktu, że funkcja  $\lambda(x)$  jest jednomodalna wynika, że równanie (21) może posiadać najwyżej dwa rozwiązania. Jeśli równanie (21) posiada dokładnie jedno rozwiązanie, to  $h(w) < 0$  i istnieje dokładnie jeden punkt  $x_0 < w$ , w którym współczynnik gotowości przyjmuje wartość maksymalną. Jeśli równanie (21) ma dwa rozwiązania  $x_{01}$  i  $x_{02}$  takie, że  $x_{01} < x_{02} < w$ , to  $h(w) > 0$ . Możliwe są dwa przypadki szczególne: pierwszy  $h(w^+) \leq 0$  i drugi  $h(w^+) > 0$ .



W pierwszym przypadku współczynnik gotowości osiąga wartość maksymalną w punkcie  $x_0 = w$ , w drugim w punkcie  $x_0 > w$ . Zatem w przypadku istnienia dwóch rozwiązań równania (21) współczynnik gotowości osiąga dwa maksima lokalne w punktach  $x_{01}$  i  $x_0$ , minimum lokalne w punkcie  $x_{02}$ . Jeśli  $g(x_{01}, w) \neq g(x_0, w)$ , to jedno z tych maksimów lokalnych jest maksimum globalnym. Jeżeli  $g(x_{01}, w) = g(x_0, w)$ , wówczas są dwa maksima lokalne będące maksimum globalnym.

**Twierdzenie 2.**

Jeśli  $\alpha_1 = ET_3 - ET_2 \geq 0$ ,  $ET_3 < ET_4$ ,  $h(\infty) < 0$ ,  $\lambda(t)$  jest jednomodalna, to istnieje dokładnie jeden moment czasowy  $x_0$ , w którym współczynnik gotowości  $g(x, w)$  osiąga wartość maksymalną.

Jeśli  $ET_3 < ET_2$ ,  $ET_3 < ET_4$ ,  $h(\infty) < 0$ ,  $\lambda(t)$  jest jednomodalna i równanie (21) posiada najwyżej jedno rozwiązanie, to istnieje dokładnie jeden moment czasowy  $x_0$ , dla którego współczynnik  $g(x, w)$  osiąga wartość maksymalną.

Jeśli  $ET_3 < ET_2$ ,  $ET_3 < ET_4$ ,  $h(\infty) < 0$ ,  $\lambda(t)$  jest jednomodalna i równanie (21) posiada dokładnie dwa rozwiązania  $x_{01}$  i  $x_{02}$  ( $x_{01} < x_{02} < w$ ), to współczynnik gotowości  $g(x, w)$  osiąga dwa maksima lokalne w punktach  $x_{01}$  i  $x_0 \geq w$ .

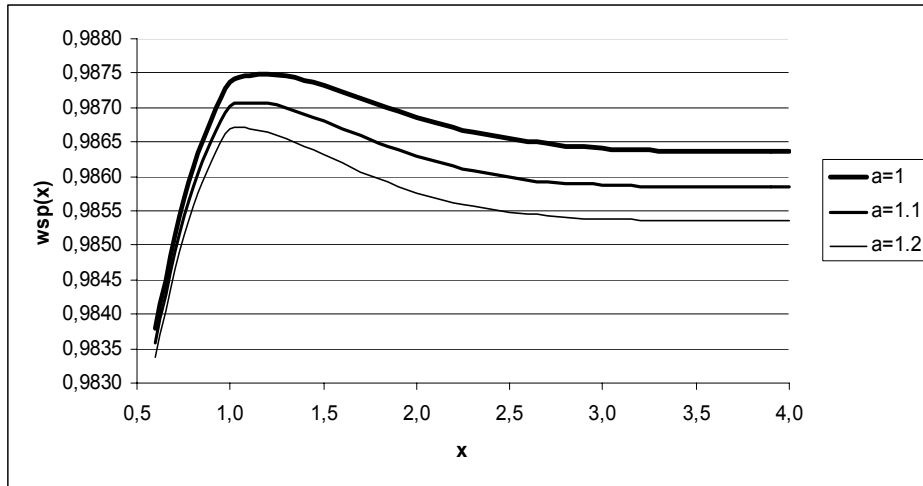
#### 6.4. Przykłady numeryczne

W podrozdziale przeanalizowano cztery przykłady wyznaczania współczynnika gotowości i zysku na jednostkę czasu dla różnych rozkładów prawdopodobieństwa czasu do uszkodzenia. W szczególności omówiono rozkłady:

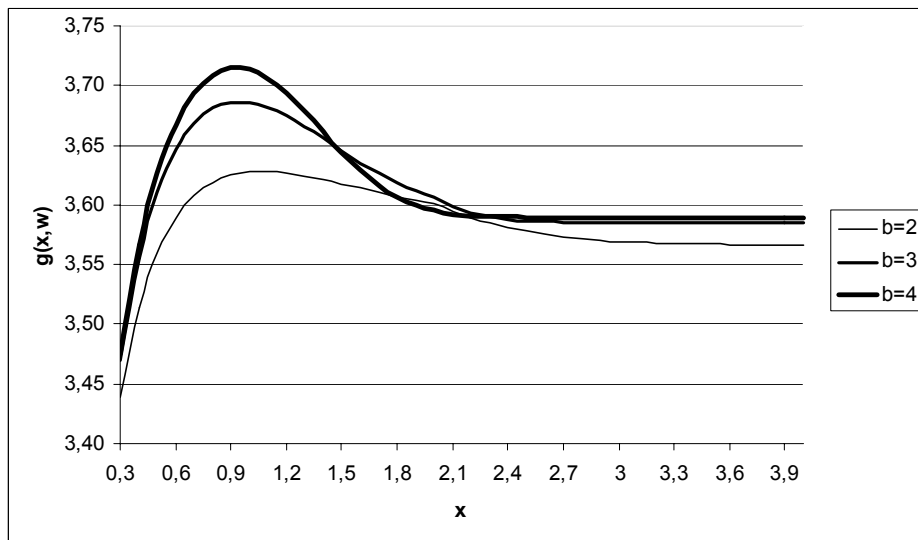
- Weibulla,
- odwrócony normalny,
- Birnbauma-Saundersa z uogólnieniem Owena [93],
- modyfikację rozkładu Dhillon.

**Przykład 6.1.** W przykładzie rozważa się rozkład Weibulla z funkcją intensywności uszkodzeń w postaci  $\lambda(t) = a t^b$ . Założono, że parametry modelu wymian są następujące:  $z = 4$ ,  $z_2 = -0.03$ ,  $z_3 = -0.01$ ,  $z_4 = -0.08$ ,  $ET_2 = 0.15$ ,  $ET_3 = 0.06$ ,  $ET_4 = 0.2$ . Długość przedziału gwarancji  $w = 2$ .

Na rysunku 6.1 przedstawiono wykresy współczynnika gotowości  $b = 2$  i  $a \in \{1, 1.1, 1.2\}$ .

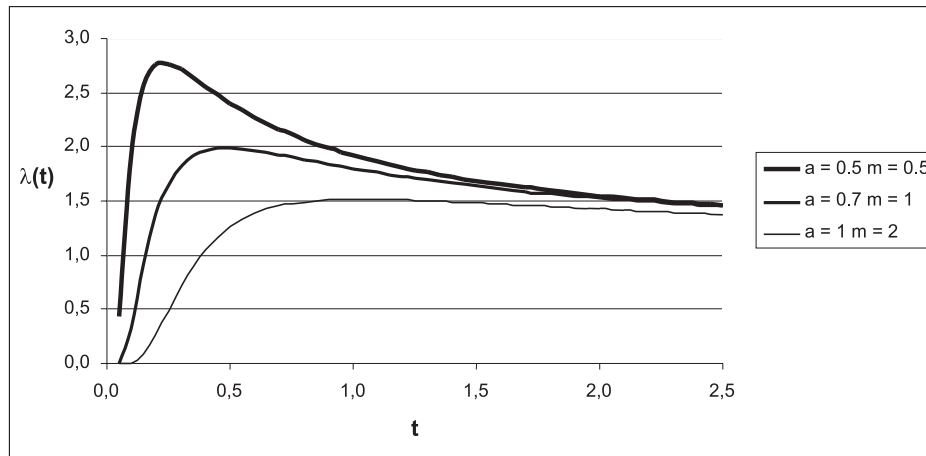
Rys. 6.1. Współczynnik gotowości  $wsp(x)$  dla  $a \in \{1, 1.1, 1.2\}$ 

Na rysunku 6.2 pokazano wykresy funkcji zysku na jednostkę czasu dla  $b \in \{2, 3, 4\}$ .

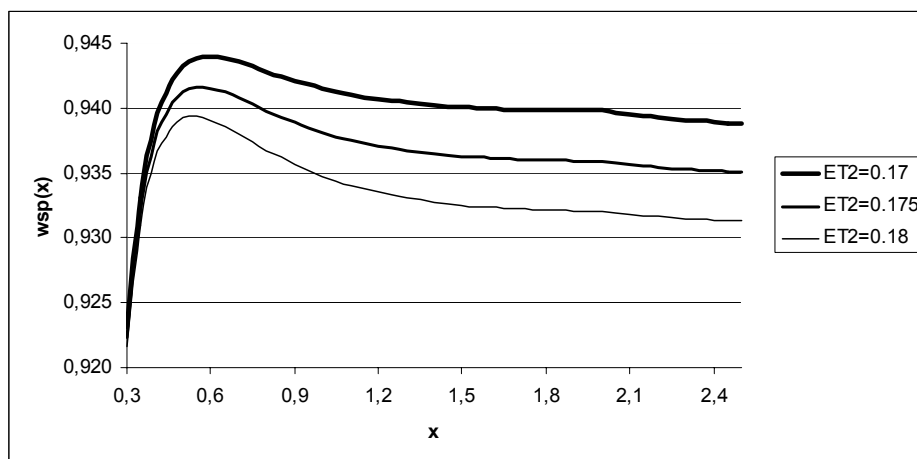
Rys. 6.2. Zysk na jednostkę czasu  $g(x, w)$  dla  $b \in \{2, 3, 4\}$ 

**Przykład 6.2.** Zakłada się, że czas do uszkodzenia ma rozkład odwrócony normalny, opisany w podrozdziale 2.6. Na rysunku 6.3 pokazano przykładowe przebiegi funkcji intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla par parametrów  $(a, m) \in \{(1, 2), (0.5, 0.5), (0.7, 1)\}$ . Jako parametry modelu przyjęto:  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$ ,  $ET_3 = 0.05$ ,  $ET_4 = 0.2$ . Na rysunku 6.4 przedstawiono trzy wykresy współczynnika gotowości dla  $ET_2 \in \{0.17, 0.175, 0.18\}$ . Dla zysku na jednostkę czasu założono, że  $z = 2$ ,  $z_2 = -0.05$ ,  $z_3 = -0.05$ ,  $z_4 = -0.1$ . Na rysunku 6.5 pokazano trzy realizacje zależności zysku na jednostkę czasu od długości

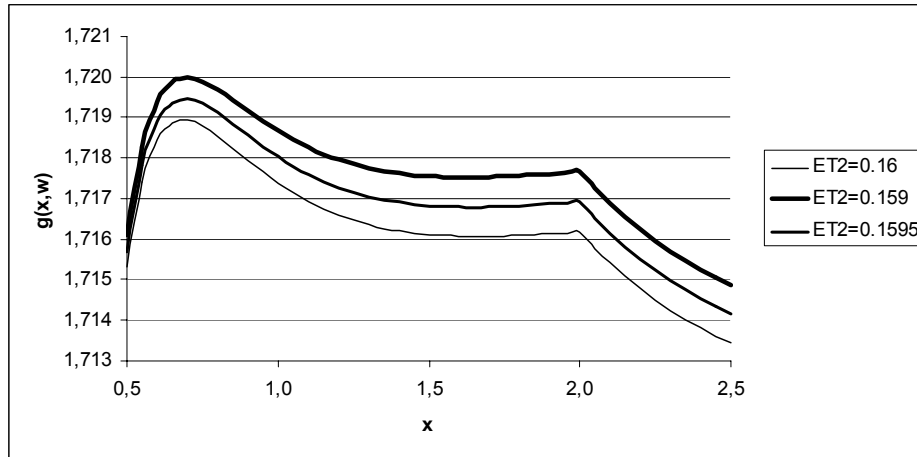
przedziału wymiany dla  $ET_2 \in \{0.159, 0.1595, 0.16\}$ . Analiza wykresów tej funkcji pozwala na stwierdzenie, że mamy do czynienia z przypadkiem, gdy funkcja kryterialna ma dwa maksima lokalne. W drugim z tych maksimów funkcja nie jest różniczkowalna.



Rys. 6.3. Funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla wybranych parametrów



Rys. 6.4. Współczynniki gotowości  $wsp(x)$  dla rozkładu odwróconego normalnego



Rys. 6.5. Zysk na jednostkę czasu  $g(x,w)$  dla rozkładu odwróconego-normalnego

**Przykład 6.3.** Przyjęto, że zmienna losowa oznaczająca czas do uszkodzenia ma rozkład z funkcją intensywności uszkodzeń w postaci:

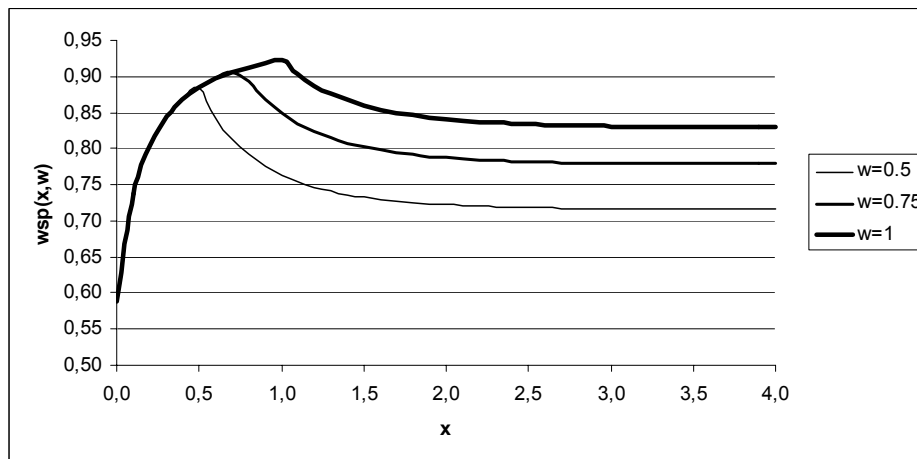
$$\lambda(t) = d + a \ln(x + b)/(x + b)$$

Funkcja ta jest pewną modyfikacją funkcji Dhilon z pracy [38] oraz funkcji z przykładu 4.5. Parametry  $a$ ,  $b$  i  $c$  dobiera się tak, aby  $\lambda(0) > 0$ . Wiadomo, że  $\lambda(\infty) = d$ . Funkcja  $\lambda(t)$  jest jednomodalna.

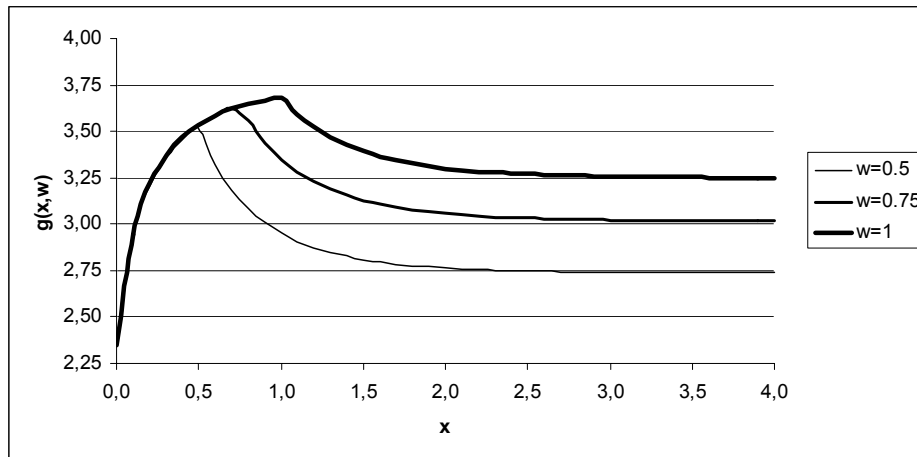
Jako parametry modelu przyjęto:  $a = 5$ ,  $b = 0.85$ ,  $d = 1$ ,  $ET_2 = 0.05$ ,  $ET_3 = 0.07$ ,  $ET_4 = 0.5$ .

Na rysunku 6.6 przedstawiono trzy wykresy współczynnika gotowości dla  $w \in \{0.5, 0.75, 1\}$ . Dla zysku na jednostkę czasu założono, że  $z = 4$ ,  $z_2 = -0.4$ ,  $z_3 = -0.01$ ,  $z_4 = -0.5$ .

Na rysunku 6.7 przedstawiono trzy realizacje zależności zysku na jednostkę czasu od długości przedziału wymiany dla  $w \in \{0.5, 0.75, 1\}$ .

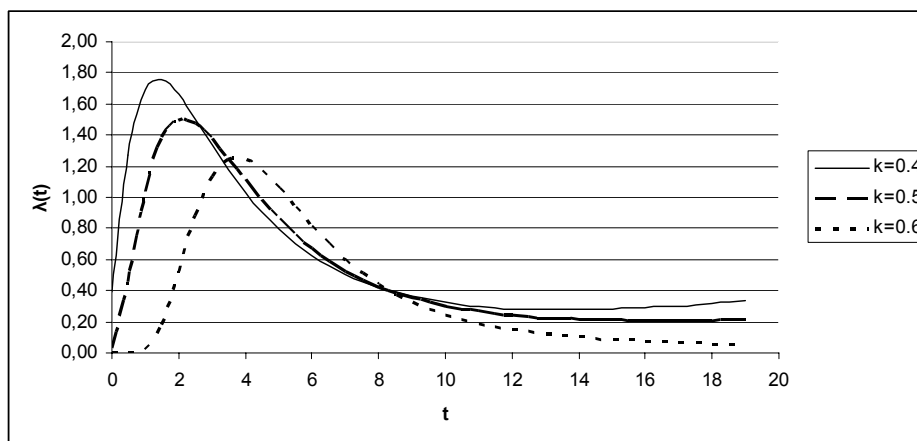


Rys. 6.6. Współczynnik gotowości  $wsp(x,w)$  dla rozkładu z funkcją intensywności uszkodzeń  $\lambda(t) = d + a \ln(x + b)/(x + b)$



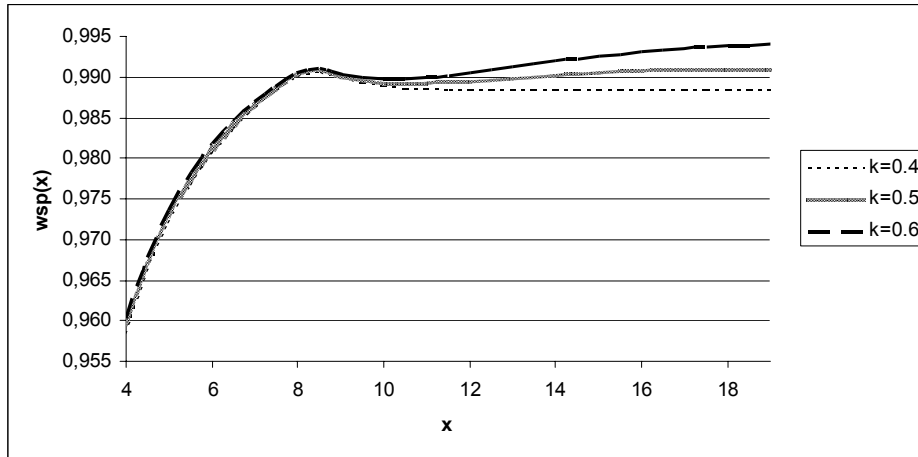
Rys. 6.7. Zysk na jednostkę czasu  $g(x, w)$  dla rozkładu z funkcją intensywności uszkodzeń  $\lambda(t) = d + a \ln(x + b)/(x + b)$

**Przykład 6.4.** Przedstawiono przykłady obliczeń dla rozkładu Birnbauma-Saundersa z modyfikacją Owena, opisanego w podrozdziale 2.7. Dla rozkładu Birnbauma-Saundersa z modyfikacją Owena wyznaczono trzy przykładowe przebiegi funkcji intensywności uszkodzeń, przyjmując  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $k \in \{0.4, 0.5, 0.6\}$ . Wykresy funkcji  $\lambda(t)$  przedstawiono na rysunku 6.8. W przykładzie tym jako parametry modelu przyjęto:  $ET_2 = 0.05$ ,  $ET_3 = 0.07$ ,  $ET_4 = 0.5$ . Ze wzoru (17) punktu 2.7 wynika, że dla  $k = 0.5$  mamy zwykły rozkład Birnbauma-Saundersa, natomiast dla pozostałych wartości parametru  $k$  rozkład ten nie jest rozkładem Birnbauma-Saundersa. Analiza wartości funkcji intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  pokazuje, że dla  $k = 0.4$  funkcja ta rośnie dla dostatecznie dużych  $t$ .



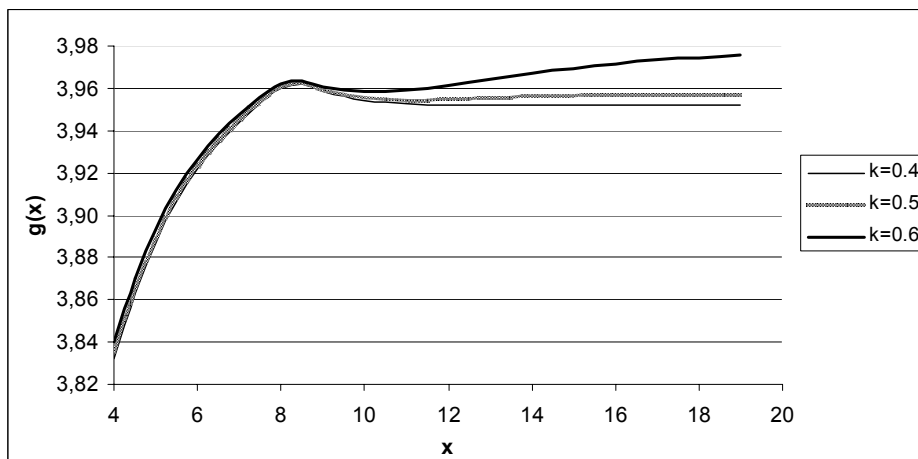
Rys. 6.8. Funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla rozkładu Birnbauma-Saundersa z modyfikacją Owena

Na rysunku 6.9 pokazano wykresy współczynnika gotowości dla takich samych parametrów jak poprzednio dla funkcji  $\lambda(t)$ .



Rys. 6.9. Współczynnik gotowości  $wsp(x)$  dla rozkładu Birnbauma-Saundersa z modyfikacją Owena

Dla zysku na jednostkę czasu założono, że  $z = 4$ ,  $z_2 = -0.02$ ,  $z_3 = -0.02$ ,  $z_4 = -0.1$ . Na rysunku 6.10 przedstawiono wykresy funkcji zysku na jednostkę czasu dla  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $k \in \{0.4, 0.5, 0.6\}$ . Analizując wykresy można stwierdzić, że dla  $k = 0.6$  funkcja kryterialna nie osiąga maksimum.



Rys. 6.10. Zysk na jednostkę czasu  $g(x)$  dla rozkładu Birnbauma-Saundersa z modyfikacją Owena

## 7. Wybrane własności modeli czasów do uszkodzenia dla obiektów technicznych

### 7.1. Klasa MTFR

W rozdziale 4 zauważono, że w zadaniu maksymalizacji współczynnika gotowości szczególnie przydatne są rozkłady prawdopodobieństwa, dla których zachodzi:

$$r(x) = f(x)ET(x) - F(x)R(x) \geq 0 \text{ dla } x \geq 0 \quad (1)$$

Znak pochodnej współczynnika gotowości zależy od znaku wyrażenia  $\alpha r(x) + \beta$ , gdzie  $r(x)$  zależy tylko od rozkładu zmiennej losowej  $T_1$  oznaczającej czas do uszkodzenia. Współczynniki  $\alpha$  i  $\beta$  zależą od wartości średnich  $ET_2$  i  $ET_3$  oraz macierzy prawdopodobieństw przejścia  $P = [p_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  włożonego łańcucha Markowa. Dla rzeczywistych systemów eksploatacji zachodzi  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ . Zatem, aby analizowany w rozdziale 4 model współczynnika gotowości miał dla różnych  $\alpha$  i  $\beta$  osiągać wartość maksymalną potrzeba, aby  $r(x) \geq 0$ , dla  $x \geq 0$ .

Jeśli element (obiekt techniczny) jest wymieniany po czasie  $x$  lub po uszkodzeniu, to średni czas do obsługi można zapisać następująco:

$$M(x) = \frac{ET(x)}{F(x)} \text{ dla } x \in \{x: F(x) > 0\}$$

Przypadek, gdy funkcja  $M(x)$  jest monotoniczna analizowano w pracach [9, 65, 82]. W rozdziale 4 zauważono, że gdy stosunek  $F(x)/ET(x)$  jest funkcją niemalejącą, to zachodzi (1). Funkcja  $r(x)$  określona wzorem (1) jest użyteczna podczas formułowania kryteriów istnienia maksimum zysku na jednostkę czasu i maksimum współczynnika gotowości. Poniżej podaje się definicję klasy MTFR.

**Definicja 1.** Zmienna losowa  $T$  (czas do uszkodzenia) należy do klasy MTFR (Mean Time to Failure or Repair), jeśli funkcja  $M(x)$  jest nierosnąca dla  $x \in \{x: F(x) > 0\}$ . Jeśli  $T$  posiada gęstość prawdopodobieństwa, to  $T \in \text{MTFR}$  i:

$$r(x) = f(x)ET(x) - F(x)R(x) \geq 0 \text{ dla } x \geq 0.$$

Własności funkcji  $r(x)$  badano w pracach [65, 67, 68, 69, 70, 75]. Na podstawie [9, 65] prawdziwa jest inkluzja:

$$\text{IFR} \subset \text{MTFR} \subset \text{NBUE}$$

W pracy [9] udowodniono, że jeśli zmienna losowa  $T$  ma rozkład z gęstością prawdopodobieństwa  $f(x)$ , to prawdziwa jest inkluzja:

$$\text{IFRA} \subset \text{MTFR}$$

W pracy [72] stwierdzono, że inkluzja ta jest prawdziwa dla dowolnych zmiennych losowych. Klasa MTFR posiada cały szereg bardzo ważnych własności, udowodnionych w pracach [71, 72]. Poniższa własność 1 dotyczy tworzenia systemów równoległych złożonych elementów (obiektów technicznych), których czasy do uszkodzenia należą do MTFR.

**Własność 1.** Jeśli czasy  $T_1, T_2, \dots, T_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi posiadającymi gęstość prawdopodobieństwa  $f(x)$ ,  $T_i \in \text{MTFR}$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , to dla czasu uszkodzenia systemu równoległego zachodzi:

$$Y_n = \max(T_1, T_2, \dots, T_n) \in \text{MTFR}$$

Następna własność dotyczy tworzenia systemów szeregowych złożonych z elementów (obiektów technicznych), których czasy do uszkodzenia są zmiennymi losowymi należącymi do MTFR.

**Własność 2.** Jeśli zmienne losowe  $T_1, T_2, \dots, T_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie posiadającym gęstość prawdopodobieństwa  $f(x)$ , to dla czasu uszkodzenia systemu szeregowego zachodzi:

$$Z_n = \min(T_1, T_2, \dots, T_n) \in \text{MTFR}$$

Klasa MTFR jest zamknięta ze względu na dodawanie zmiennych losowych [68].

**Własność 3.** Jeśli zmienne losowe  $T_1$  i  $T_2$  są niezależne,  $T_1, T_2 \in \text{MTFR}$ , to zmienna losowa  $T = T_1 + T_2 \in \text{MTFR}$ .

Inne własności udowodnione w pracy [72] nie będą w rozprawie analizowane. Dotyczą one zbieżności ciągu dystrybuant i mieszanin rozkładów.

Analizowana klasa MTFR zawiera niektóre rozkłady z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń analizowane w podrozdziale 4.5. Z drugiej strony analiza danych pochodzących z rzeczywistych systemów eksploatacji pokazuje, że własność jednomodalności jest dosyć często spotykana w praktyce [39, 75, 89]. W podrozdziale 2.2 rozprawy podano różne zastosowania rozkładów z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Powyższe wskazuje na celowość wysiłków zmierzających do budowania modeli czasów do uszkodzenia posiadających jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń. Niektóre znane rozkłady, takie jak uogólniony rozkład gamma, potęgowy rozkład Weibulla, rozkład Birnbauma-Saundersa, dla pewnych wartości parametrów posiadają jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń. Rozkład odwrócony normalny ma dla dowolnych parametrów jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń. Oprócz wymienionych wyżej rozkładów, istnieje możliwość tworzenia rozkładów z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń za pomocą mieszanin rozkładów. Z wykonanego w podrozdziale 2.8 przeglądu literatury wynika, że problem tworzenia mieszanin z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń jest stosunkowo słabo zbadany.

## 7.2. Tworzenie mieszanin rozkładu prawdopodobieństwa z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń

Możliwe jest budowanie mieszanin rozkładów dających w wyniku rozkład z jednomodalną funkcją intensywności rozkładów. Poniżej rozważa się mieszaninę dwóch rozkładów czasów życia  $T_1$  i  $T_2$  z gęstościami  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ , funkcjami niezawodności  $R_1(t)$  i  $R_2(t)$  i funkcjami intensywności uszkodzeń  $\lambda_1(t)$  i  $\lambda_2(t)$ . Gęstość prawdopodobieństwa mieszaniny wyraża się wzorem:

$$f(t) = pf_1(t) + (1 - p)f_2(t)$$

gdzie  $p$  jest wagą,  $0 < p < 1$ .



Dla funkcji niezawodności mieszaniny zachodzi:

$$R(t) = p R_1(t) + (1 - p) R_2(t)$$

Funkcja intensywności uszkodzeń mieszaniny wyraża się wzorem:

$$\lambda(t) = w(t) \lambda_1(t) + [1 - w(t)] \lambda_2(t)$$

gdzie  $w(t) = p R_1(t) / R(t)$ . Na podstawie powyższych równości można udowodnić cały szereg wniosków dotyczących własności funkcji  $\lambda(t)$ .

**Wniosek 1.** Pochodna pierwszego rzędu  $w'(t)$  funkcji  $w(t)$  wyraża się wzorem:

$$w'(t) = w(t) (1 - w(t)) (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))$$

**Wniosek 2.** Pochodna pierwszego rzędu  $\lambda'(t)$  wyraża się wzorem:

$$\lambda'(t) = (1 - w(t)) (-w(t)(\lambda_2(t) - \lambda_1(t))^2 + \lambda_2'(t)) + w(t) \lambda_1'(t)$$

Ostatnie wyrażenie można uprościć, gdy wprowadzi się dodatkowe założenie, że zmienna losowa  $T_1$  ma rozkład wykładniczy. Fakt ten ujmuje następny wniosek.

**Wniosek 3.** Jeśli  $R_1(t) = \exp(-\lambda_1 t)$ , to:

$$\lambda'(t) = (1 - w(t)) (-w(t)(\lambda_2(t) - \lambda_1)^2 + \lambda_2'(t))$$

Mieszanina posiadająca jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń musi spełniać warunek  $\lambda'(0) \geq 0$ .

**Wniosek 4.** Jeśli  $R_1(t) = \exp(-\lambda_1 t)$ , to  $\lambda'(0) \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lambda_2'(0) \geq p(\lambda_2(0) - \lambda_1)^2$$

Dalsze rozważania prowadzono przy założeniu, że:

$$\lambda_2(t) = \gamma t + (\alpha / \beta)(t / \beta)^{\alpha-1}$$

gdzie  $\alpha \geq 1$ . Funkcja niezawodności dla zmiennej losowej  $T_2$  ma postać:

$$R_2(t) = \exp(-\frac{1}{2} \gamma t^2 - (t / \beta)^\alpha) \text{ dla } t \geq 0 \quad (2)$$

Funkcja (2) jest szczególnym przypadkiem funkcji niezawodności wykorzystywanym do modelowania losowych sił niszczących (kruszących) materiały [52].

Bez zmniejszania ogólności rozważań można założyć, że  $\beta = 1$ . Jest oczywistym, że:

$$\lambda_2(t) = 0, \lambda_2'(t) = \gamma \text{ dla } \alpha \geq 1.$$

Niech  $h_1(t) = w(t) (\lambda_2(t) - \lambda_1)^2$ ,  $h_2(t) = \lambda_2'(t) = \gamma + \alpha(\alpha - 1) t^{\alpha-2}$ . Funkcja  $\lambda_2(t)$  rośnie od 0 do  $\infty$ . Wynika stąd, że istnieje  $t_1$  takie, że  $h_1(t_1) = 0$  i  $h_2(t_1) > 0$ . Z określenia funkcji  $h_1(t)$  i  $h_2(t)$  otrzymuje się:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \infty$$

Z powyższego wynika, że równanie:

$$h(t) = h_1(t) - h_2(t) = 0$$

posiada przynajmniej jedno rozwiązanie, co na podstawie wniosku 3 pozwala stwierdzić, że funkcja  $\lambda(t)$  osiąga przynajmniej jedno maksimum lokalne.

### 7.2.1. Przypadki szczególne

W tym punkcie rozważa się przypadki szczególne funkcji  $\lambda_2(t)$  tak dobranej, aby funkcja intensywności  $\lambda(t)$  mieszaniny była jednomodalna.

**Wniosek 5.** Jeśli  $2 \leq \alpha \leq 6$  i  $p\lambda_1^2 \leq \gamma$ , to  $\lambda(t)$  jest jednomodalna.

Dowód. Wiadomo, że równanie  $h(t) = 0$  ma dla  $t > t_1$  przynajmniej jedno rozwiązanie. Bada się ułamek:

$$u(t) = \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_1)^2}{\lambda_2'(t)}$$

Wiadomo, że  $u(t_1) = 0$  i  $u(\infty) = \infty$ . Pierwsza pochodna  $u'(t)$  ma postać:

$$u'(t) = \frac{\lambda_2(t) - \lambda_1}{[\lambda_2'(t)]^2} \{2[\lambda_2'(t)]^2 - \lambda_2''(t)(\lambda_2(t) - \lambda_1)\}$$

Niech  $u_1(t) = 2[\lambda_2'(t)]^2 - \lambda_2''(t)(\lambda_2(t) - \lambda_1)$ . Podstawiając odpowiednie wyrażenie za  $\lambda_2(t)$ ,  $\lambda_2'(t)$  i  $\lambda_2''(t)$  otrzymano:

$$u_1(t) = 2\gamma^2 + \gamma\alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}(6 - \alpha) + \alpha^3(\alpha - 1)t^{2\alpha-4} + \lambda_1\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)t^{\alpha-3}$$

Jeśli  $2 \leq \alpha \leq 6$ , to  $u_1(t) > 0$  i  $u'(t) > 0$  dla  $t \geq t_1$ . Z wniosku 7.1 wynika, że  $w'(t) > 0$ , zatem  $w(t)$  rośnie dla  $t \geq t_1$ . Stąd  $u_1(t)w(t) = u(t)$  rośnie od  $u(t_1) = 0$  do  $u(\infty) = \infty$ . Równanie  $h(t) = 0$  ma dokładnie jedno rozwiązanie i  $\lambda(t)$  jest jednomodalna.  $\square$

**Wniosek 6.** Jeśli  $\alpha > 6$  i  $p\lambda_1^2 \leq \gamma \leq \min\{\alpha^2, \lambda_1(\alpha - 2)\} / (\alpha - 6)$ , to funkcja  $\lambda(t)$  jest jednomodalna.

Dowód: Jeśli  $t \geq 1$ , to:

$$u_1(t) \geq 2\gamma^2 + \alpha(\alpha - 1)[\gamma(6 - \alpha) + \alpha^2]t^{\alpha-2} + \lambda_1\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)t^{\alpha-3} \quad (3)$$

i jeśli  $\gamma \leq \alpha^2(\alpha - 6)$ , to  $u_1(t) > 0$ .

Jeśli  $t < 1$ , to:

$$u_1(t) \geq 2\gamma^2 + \alpha(\alpha - 1)[\gamma(6 - \alpha) + \lambda_1(\alpha - 2)]t^{\alpha-3} + \alpha^3(\alpha - 1)t^{2\alpha-4} \quad (4)$$

i jeśli  $\gamma \leq \lambda_1(\alpha - 2) / (\alpha - 6)$ , to otrzymuje się  $u_1(t) > 0$  dla  $t > t_1$ .

Z (3) i (4) dla

$$\gamma \leq \min\{\alpha^2, \lambda_1(\alpha - 2)\} / (\alpha - 6)$$

otrzymano  $u_1(t) > 0$  dla  $t > t_1$ .

Z powyższego wynika, że  $u_1(t)$  jest rosnąca i  $w(t)u_1(t)$  jest rosnąca od 0 do  $\infty$ . Równanie  $h(t) = 0$  ma tylko jeden pierwiastek i  $\lambda(t)$  jest unimodalna.  $\square$

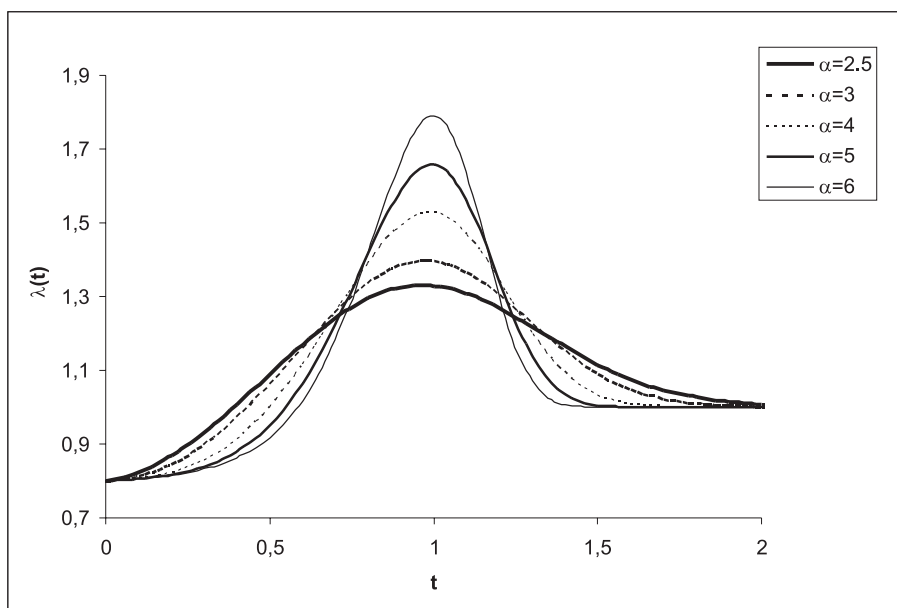
**Wniosek 7.** Jeśli  $1 < \alpha < 2$  i  $p\lambda_1^2 \leq \gamma$ , to  $\lambda(t)$  jest jednomodalna.

Dowód: Jeśli  $1 < \alpha < 2$ , to  $\lambda_2'(t)$  jest malejąca od  $\infty$  do  $\gamma$  i  $w(t)(\lambda_2(t) - \lambda_1)^2 \leq \gamma$  dla  $t < t_1$  i dla  $t > t_1$   $w(t)(\lambda_2(t) - \lambda_1)^2$  rośnie od 0 do  $\infty$ . Wynika stąd, że równanie  $h(t) = 0$  ma dokładnie jedno rozwiązanie i  $\lambda(t)$  jest jednomodalna.  $\square$

### 7.2.2. Przykłady numeryczne

Wyznaczono przykłady mieszaniny rozkładów analizowanych we wnioskach 5, 6 i 7.

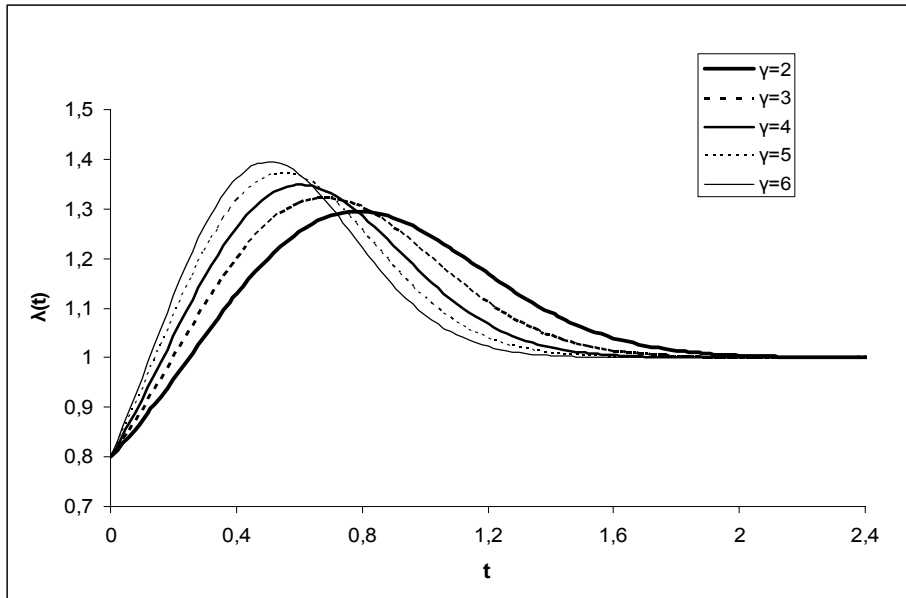
**Przykład 7.1.** Założono  $\lambda_1(t) = 1$ , zmienna losowa  $T_2$  ma rozkład z funkcją niezawodności daną wzorem (2) z parametrami  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\alpha \in \{2.5, 3, 4, 5, 6\}$ . Współczynnik wagowy jest  $p = 0.8$ . Funkcja intensywności uszkodzeń dla tej mieszaniny jest jedno-modalna. Na rysunku 7.1 przedstawiono wykresy funkcji  $\lambda(t)$  dla różnych wartości parametru  $\alpha$ .



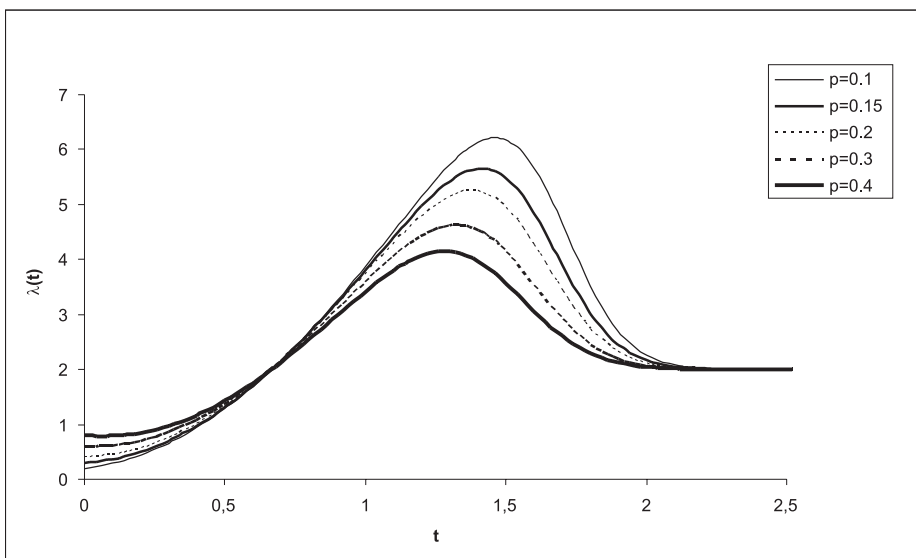
Rys. 7.1. Funkcje intensywności  $\lambda(t)$  uszkodzeń dla przykładu 7.1

**Przykład 7.2.** Przyjęto, że  $\lambda_1 = 1$  i dla zmiennej losowej  $T_2$ :  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Współczynnik wagowy  $p = 0.8$ .

Na rysunku 7.2 przedstawiono wykresy funkcji intensywności dla różnych wartości parametru  $\gamma$ .

Rys 7.2. Funkcje intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla przykładu 7.2

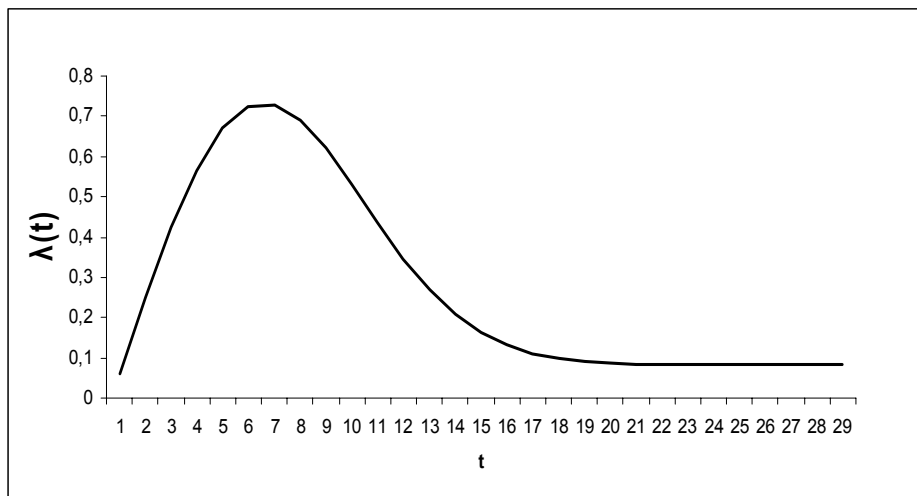
**Przykład 7.3.** Założono, że  $\lambda_1 = 2$  i dla zmiennej losowej  $T_2$ :  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ . Współczynnik wagowy  $p \in \{0.4, 0.3, 0.2, 0.15, 0.1\}$ . Na rysunku 7.3 przedstawiono wykresy funkcji intensywności uszkodzeń.

Rys. 7.3. Funkcje intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla przykładu 7.3

**Przykład 7.4.** Przeanalizowano dane pochodzące z eksploatacji autobusów komunikacji miejskiej. Zbiór danych zawiera  $n = 4020$  czasów między kolejnymi uszkodzeniami układu elektrycznego autobusów komunikacji miejskiej. Założono, że funkcja niezawodności ma postać mieszaniny:

$$R(t) = p \exp(-\lambda t) + (1 - p) \exp(-0.5 \gamma t^2 - (t/\beta)^\alpha) \quad (5)$$

Wykorzystując metodę największej wiarygodności dla danych pogrupowanych w klasy, obliczono:  $p = 0.76$ ,  $\alpha = 15.56$ ,  $\beta = 99.03$ ,  $\lambda = 0.082$ . Wykres funkcji intensywności uszkodzeń przedstawiono na rysunku 7.4.



Rys. 7.4. Wykres funkcji intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  dla systemu elektrycznego autobusu

Dla wyznaczonych wartości parametrów mieszaniny wykonano klasyczny test zgodności  $\chi^2$  Pearsona i obliczono odpowiadający tej wartości poziom istotności  $\alpha = 0.46$ . Wartość ta świadczy o wysokiej zgodności danych empirycznych z przyjętym modelem. Jest to argumentem do wykorzystania mieszanin rozkładów do tworzenia złożonych modeli probabilistycznych dla czasów życia obiektów technicznych.

### 7.3. Mieszanina rozkładu wykładniczego z rozkładem Rayleigha

Rozważana w podrozdziale 7.2 mieszanina (5) zależy od pięciu parametrów:

$$R(t; p, \lambda, \alpha, \beta, \gamma).$$

W praktyce zdarzają się kłopoty z oceną tych parametrów, dlatego w tym podrozdziale rozważa się mieszaninę rozkładu wykładniczego z rozkładem Rayleigha posiadającą funkcję niezawodności w postaci:

$$R_2(t) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) \text{ dla } t \geq 0$$

Funkcja niezawodności dla mieszaniny ma postać:

$$R(t; p, \lambda, \alpha) = p \exp(-\lambda t) + (1 - p) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} t^2\right) \quad \text{dla } t \geq 0 \quad (6)$$

Stosowanie tego modelu wymaga oceny trzech parametrów:  $p$ ,  $\lambda$  i  $\alpha$  w przeciwieństwie do pięciu parametrów poprzedniego modelu. Poniżej udowodniono dwa wnioski dla tej mieszaniny.

**Wniosek 8.** Jeśli  $p\lambda^2 \leq \alpha$ , to funkcja intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$  jest jednomodalna.

Dowód. Na podstawie wniosku 1 można stwierdzić, że funkcja  $w(t)$  jest malejąca dla  $t \in (0, t_1)$ , gdzie  $t_1 = \lambda / \alpha$  i jest rosnąca dla  $t \in (t_1, \infty)$ . Z powyższego wynika, że jeśli  $t < t_1$ , to  $w(t)(\lambda_2(t) - \lambda_1)^2$  maleje od  $p\lambda^2 \leq \alpha$  do 0 i dla  $t > t_1$  funkcja  $w(t)(\lambda_2(t) - \lambda_1)^2$  rośnie od 0 do  $\infty$ . Równanie  $w(t)(\lambda_2(t) - \lambda)^2 = \alpha$  posiada dokładnie jedno rozwiązanie  $t_2$  takie, że:

$$t_2 > t_1, \lambda(t) \text{ rośnie dla } t \in (0, t_2) \text{ i maleje dla } t \in (t_2, \infty). \quad \square$$

**Wniosek 9.** Jeśli  $p\lambda^2 > \alpha$ , to istnieją  $t_3$  i  $t_4$  takie, że  $t_3 < t_1 < t_4$  i  $\lambda(t)$  maleje w przedziale  $(0, t_3)$ , rośnie w przedziale  $(t_3, t_4)$  i maleje w przedziale  $(t_4, \infty)$ .

Dowód. Jeśli  $h(t) = \alpha - w(t)(\lambda_2(t) - \lambda)^2$ , to  $h(0) = \alpha - p\lambda^2 < 0$ ,  $h(t_1) = \alpha > 0$ ,  $h(\infty) = -\infty$ . Funkcja  $h(t)$  rośnie od  $h(0) = \alpha - p\lambda^2 < 0$  do  $h(t_1) = \alpha > 0$  i maleje do  $h(\infty) = -\infty$ . Stąd wynika, że istnieją  $t_3$  i  $t_4$  takie, że  $0 < t_3 < t_1 < t_4$ ,  $\lambda(t)$  maleje w przedziale  $(0, t_3)$ , rośnie w  $(t_3, t_4)$  i maleje w  $(t_4, \infty)$ .  $\square$

**Przykład 7.5.** W pracy [89] analizowano dane dotyczące uszkodzeń silników autobusowych. W cytowanej pracy stosuje się opisany w rozdziale 2 rozprawy potęgowy rozkład Weibulla, posiadający dla pewnych wartości parametrów jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń  $\lambda(t)$ . Estymacja parametrów potęgowego rozkładu Weibulla wykonana w pracy [89] pokazuje, że dla analizowanych danych istnieje przypadek z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Wykorzystując dane empiryczne przedstawione w pracy [89], za pomocą metody największej wiarygodności dla danych pogrupowanych w klasy obliczono:

$$p = 0.6433, \alpha = 0.001284, \lambda = 0.0288$$

Dla tych wartości parametrów  $p$ ,  $\alpha$  i  $\lambda$  wykonano test zgodności  $\chi^2$  Pearsona i obliczono  $\chi^2 = 0.68$ . Wyznaczona wartość  $\chi^2$  pokazuje wysoką zgodność rozkładu z danymi empirycznymi. Na podstawie wniosku 8 można stwierdzić, że  $\lambda(t)$  jest jednomodalna.

#### 7.4. Kryterium przynależności do klasy MTR

W podrozdziałach 7.2 i 7.3 rozważano mieszaninę rozkładu wykładniczego z funkcją niezawodności  $R_1(x) = \exp(-\lambda x)$  i innym rozkładem z funkcją niezawodności  $R_2(x)$ . Funkcja niezawodności mieszaniny ma postać:

$$R(x) = p \exp(-\lambda x) + (1 - p) R_2(x)$$

Wartość średnią zmiennej losowej T można zapisać jako:

$$ET = p / \lambda + (1 - p) ET_2$$

W podrozdziale 4.5 podano następujący warunek należenia zmiennej losowej T z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń do klasy MTFR:

$$ET \lambda(\infty) - 1 \geq 0$$

W rozważanym wyżej przypadku warunek ten można zapisać w postaci:

$$ET_1 \geq ET_2 \quad (7)$$

Okazuje się, że warunek ten w przypadku mieszaniny rozkładu wykładniczego z rozkładem Rayleigha ma postać:

$$\alpha \geq \lambda^2 \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

ponieważ

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha t^2\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

Z wniosku 8 wynika, że analizowana mieszanina jest jednomodalna, gdy:

$$\alpha \geq p\lambda^2 \quad (9)$$

Dla mieszaniny rozważanej w podrozdziale 7.2 warunek (7) ma postać:

$$\lambda \int_0^{\infty} \exp\left(-t^2 \frac{\gamma}{2} - \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right) dt \geq 1 \quad (10)$$

Ciekawym wydaje się spostrzeżenie, że warunki (8) i (10) nie zależą od p.

## 7.5. Uwagi dotyczące średniego czasu między uszkodzeniami

Wspólną miarą niezawodnościową charakteryzującą systemy naprawialne jest średni czas między uszkodzeniami (Mean Tim Between Failure) oznaczany przez MTBF [4, 86].

W podrozdziale 7.1 tego rozdziału podano, że

$$MTBF = \frac{1}{F(t)} \int_0^t R(s) ds$$

W tym podrozdziale omówiono oceny dla MTBF. W pracy [4] udowodniono, że:

$$\frac{tR(t)}{F(t)} \leq MTBF \leq \frac{t}{F(t)}$$

Dla  $T \in IFRA$  pokazano, że:

$$-\frac{t}{\ln R(t)} \leq MTBF \leq \frac{1}{F(t)}$$

Dla klasy MTFR szerszej od IFRA ( $IFRA \subset MTFR$ ) zachodzi poniższy wniosek.

**Wniosek 10.** Jeśli  $T \in \text{MFR}$ , to:

$$\frac{1}{\lambda(t)} \leq \text{MTBF} \leq \frac{1}{F(t)} \min\{t, ET\}$$

Dowód. Niech:

$$h(t) = \frac{1}{\text{MTBF}}$$

Pochodna pierwszego rzędu dla  $h(t)$  ma postać:

$$h'(t) = \frac{f(t)ET(t) - F(t)R(t)}{(ET(t))^2}$$

Wiadomo, że jeśli  $T \in \text{MFR}$ , to  $h'(t) \geq 0$ , stąd:

$$\text{MTBF} \geq \text{MTBF}_L = \frac{1}{\lambda(t)} \text{ dla } t \in \{t: \lambda(t) < 0\}$$

Następująca oczywista nierówność:

$$\int_0^t R(s) ds \leq \min\{t, ET\}$$

jest podstawą do budowy oceny z góry dla MTBF. Ocena z góry ma postać:

$$\text{MTBF}_U = \frac{1}{F(t)} \min\{t, ET\}. \quad \square$$

W pracy [4] zaproponowano ocenę:

$$\text{MTBF}_A = \frac{t}{2} \frac{1 + R(t)}{F(t)}$$

Jednak z cytowanej pracy nie wynika, czy  $\text{MTBF}_A$  jest oceną z dołu czy z góry dla MTBF. Problem ten częściowo rozwiązuje następujący wniosek.

**Wniosek 11.** Jeśli zmienna losowa  $T$  ma malejącą gęstość prawdopodobieństwa  $f(t)$ , to  $\text{MTBF}_A$  jest oceną z góry dla MTBF.

Jeśli gęstość prawdopodobieństwa  $f(t)$  jest funkcją jednomodalną z modą w punkcie  $t_m$ , to istnieje  $t_1 \geq t_m$  takie, że  $\text{MTBF}_A$  jest ograniczeniem dolnym dla MTBF dla  $t \in (0, t_1)$  i  $\text{MTBF}_A$  jest ograniczeniem górnym dla MTBF dla  $t \in (t_1, \infty)$ .

Dowód. Analizując różnicę:

$$g(t) = \frac{ET(t)}{F(t)} - \frac{t}{2} \frac{R(t) + 1}{F(t)}$$

oraz

$$g_1(t) = ET(t) - \frac{t}{2} (R(t) + 1)$$



można przekonać się, że  $g_1(0) = 0$ ,  $g_1(+\infty) = -\infty$ . Pochodna pierwszego rzędu funkcji  $g_1(t)$  ma postać:

$$g'_1(t) = \frac{1}{2}(tf(t) - F(t))$$

Jeśli  $f(t)$  jest funkcją malejącą, to  $g'_1(t) < 0$  i  $MTBF_A$  jest oceną z góry dla MTBF. Jeśli  $f(t)$  posiada modę w punkcie  $t_m$ , to istnieje  $t_1$  takie, że  $t_m < t_1$ ,  $g'_1(t) \geq 0$  dla

$$t \in (0, t_1) \text{ oraz } g'_1(t) \leq 0 \text{ dla } t \in (t_1, \infty). \quad \square$$

**Przykład 7.6.** Dla mieszaniny z przykładu 7.5 w tabeli 7.1 umieszczono kolejno: wartości funkcji niezawodności  $R(t)$ , czas  $t$ , dokładną wartość MTBF, ocenę z góry  $MTBF_U$ , ocenę z dołu  $MTBF_L = 1/\lambda(t)$  i ocenę  $MTBF_A$ .

Tabela 7.1. Dokładne i przybliżone wartości dla MTBF

R(t)	t	MTBF	MTBF <sub>U</sub>	MTBF <sub>L</sub>	MTBF <sub>A</sub>
0.99999	0.00054	53.97	53.97	53.97	53.97
0.9999	0.0054	53.97	53.97	53.97	53.97
0.999	0.05398	53.95	53.98	53.93	53.95
0.99	0.54031	53.76	54.03	53.55	53.76
0.9	5.43971	51.67	54.40	49.22	51.68
0.8	10.9261	49.15	54.63	44.05	49.17
0.7	16.4696	46.62	54.90	39.17	46.66
0.6	22.1619	44.21	55.40	34.90	44.32
0.5	29.1751	41.98	56.35	34.81	42.26
0.4	34.8007	39.94	58.00	34.81	40.60
0.3	42.5854	38.11	49.73	34.81	39.54
0.2	52.8174	36.50	43.51	34.81	39.61
0.1	70.2655	35.23	38.68	34.81	42.94

Analiza obliczeń zamieszczonych w tabeli pokazuje, że dla funkcji niezawodności  $R(t)$  bliskiej 1 wszystkie wymienione oceny są bardzo dokładne. Dla  $R(t) < 0.5$  najlepszą oceną z góry jest  $MTBF_A$ .

## 8. Podsumowanie

1. Na podstawie wyników badań własnych oraz dostępnej literatury zaproponowano modele wyznaczania optymalnych okresów obsługi profilaktycznych, które są adekwatne do rzeczywistych systemów eksploatacji.
2. Na podstawie danych pochodzących z rzeczywistych systemów eksploatacji wykazano, że czasy do uszkodzenia dla wybranych układów autobusu mogą mieć rozkłady prawdopodobieństwa z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Udowodniono zatem, że niektóre uszkodzenia nie zostały skutecznie usunięte i pojawiają się ponownie w procesie eksploatacji. Wykazano, że dobrymi modelami czasów do uszkodzenia są rozkłady będące mieszaninami rozkładów prawdopodobieństwa.
3. W opracowanym semi-markowskim 3-stanowym modelu wymian profilaktycznych uwzględniono fakt, że naprawa i obsługa profilaktyczna nie zawsze prowadzą do pełnej zdadności obiektu technicznego. W modelu wymian uwzględniono także czasy do uszkodzenia z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń.
4. Model n-stanowy jest uogólnieniem modelu 3-stanowego i jest dobrym narzędziem do modelowania pracy złożonych systemów eksploatacji. Dane uzyskane w procesie identyfikacji rzeczywistego systemu eksploatacji umożliwiły ocenę parametrów dla  $n = 11$  stanowego modelu wymian profilaktycznych. Na podstawie analizy modelu, w którym wykorzystano rzeczywiste dane, wykazano, że możliwe jest podnoszenie efektywności funkcjonowania systemu eksploatacji.
5. Zbudowany ogólny model wyznaczania obsługi profilaktycznych dla systemów eksploatacji z obiektami posiadającymi gwarancje producenta nadaje się do wyznaczenia optymalnych okresów wymian profilaktycznych. Jest to model bardziej złożony w stosunku do tych znanych w literaturze i znacznie dokładniej opisuje system eksploatacji. W przeciwieństwie do przedstawionych w innych pracach przyjmuje się, że czasy napraw przed i po gwarancji, czas wymian są zmiennymi losowymi. Możliwe jest także badanie istnienia maksimum funkcji kryterialnych dla przypadku, gdy czas do uszkodzenia ma rozkład z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń.
6. W pracy zdefiniowano też klasę rozkładów niezawodnościowych MTRF, która zawiera rozkłady z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń. Klasa MTRF w sposób naturalny została zdefiniowana podczas formułowania warunków istnienia maksimum współczynnika gotowości dla systemu 3-stanowego.
7. Za pomocą zbudowanych w tej pracy modeli wymian profilaktycznych można uzasadnić konieczność szczegółowej identyfikacji rozkładu czasu do uszkodzenia dla elementów (obiektów technicznych). Udowodniono, że funkcje kryterialne: zysk przypadający na jednostkę czasu i współczynnik gotowości silnie zależą od typu rozkładu prawdopodobieństwa czasu do uszkodzenia.
8. Z przeprowadzonych badań własnych wynika potrzeba dalszej analizy własności modelu n-stanowego, zwłaszcza dla budowania kryterium istnienia maksimum współczynnika gotowości.
9. Na podstawie analizy rzeczywistych systemów eksploatacyjnych można wykazać konieczność dalszych badań nad budową modeli wymian profilaktycznych, co stwarza w efekcie możliwość racjonalnego sterowania zyskiem przypadającym na jednostkę czasu i współczynnikiem gotowości.

## LITERATURA

- [1] Aallen O.O., Gjessing H.K., 2001. Understanding the shape of the hazard rate: process point view. *Statistical Science* 16(1), 1-22.
- [2] Akman H.O., Gupta R.C., 1992. A comparison of various estimators of an inverse Gaussian distribution. *J. Statistical Computer Simulation* 40, 71-81.
- [3] Alison P.D., 1984. *Event History Analysis*. Sage New York.
- [4] Amari S.V., 2006. Bounds on MTBF of systems subjected to periodic maintenance. *IEEE Transactions on Reliability* 55(3), 469-475.
- [5] Avindav T., Raz T., 2008. A new invert U – shape hazard function. *IEEE Transactions on Reliability* 57(1), 32-40.
- [6] Baker M.C.J., 1990. How often should a machine be inspected? *International J. of Quality Reliability Management* 7, 14-18.
- [7] Balakrishanan N., Cohen A.C., 1991. *Order Statistics and Interference: Estimation Methods*. Academic Press, San Diego.
- [8] Balcer Y., Sahin L., 1986. Replacement costs under warranty: cost moments and time variability. *Operations Res.* 34, 554-559.
- [9] Barlow R.E., Campo R., 1975. Total time on test processes and application to failure data analysis. [In:] *Reliability and fault tree analysis*. Barlow R.E, Fussel J., Singpurwalla N., (eds.), SIAM Philadelphia, 451-481.
- [10] Barlow R.E., Hunter L.C., 1960. Optimum preventive maintenance policies. *Operations Res.* 8, 90-100.
- [11] Barlow R.E., Proschan F., 1966. *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley New York.
- [12] Barlow R.E., Proschan F., 1981. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Probability models*. Silver Spring, New York.
- [13] Bellman R., 1960. *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw – Hill New York.
- [14] Belzuanca F., Ortega E.M., Ruiz J.M., 2006. Comparison of Expected Failure Times for Several Replacement Policies. *IEEE Transactions on Reliability* 55(3), 490-495.
- [15] Berg M., 1976. A proof of optimality for age replacement policies. *J. Applications Probability* 13, 751-759.
- [16] Berg M., Epstein B., 1978. Comparison of age block and failure replacement policies. *IEEE Transactions on Reliability* 27, 25-29.
- [17] Bhattacharjee A., Sen Gupta D., 1996. On the coefficient of variation of the  $\alpha$  and  $\alpha -$  class. *Statistical Probability Letters* 27, 117-180.
- [18] Bhattarhonga G.K., Frey A., 1980. Fatigue failure models Birnbaum-Saudenrs vs. inverse Gaussian. *IEEE Transactions on Reliability* 31, 439-440.
- [19] Birnbaum Z.W., Saunders S.C., 1969. A new family of life distribution. *J. Applications Probability* 6, 319-327.

- [20] Birnbaum Z.W., Saunders S.C., 1969. Estimation for a family distribution with applications to fatigue. *J. Applications Probability* 6, 328-347.
- [21] Blischke W.R., Murthy D.N.P., 1992. Product warranty management. I. A taxonomy for warranty policies. *European J. Operations Res.* 62, 127-148.
- [22] Blischke W.R., Murthy D.N.P., 1992. Product warranty management. III. A review of mathematical models. *European J. Operations. Res.* 63, 1-34.
- [23] Blischke W.R., Scheuer E.M., 1981. Applications of renewal theory in analysis of the free-replacement warranty. *Naval Research Logistics Quartley* 28, 193-205.
- [24] Block H.W., Jong Y., Savits T.H., 1999. Bathtub functions and burn-in. *Probability Eng. and Information Sci.* 13, 497-507.
- [25] Block H.W., Mi J., Savits T.H., 1993. Burn-in and mixed populations. *J. Applications Probability* 30, 692-702.
- [26] Block H.W., Savits T.H., Wondmagegnehu E.T., 2003. Mixtures of distributions with increasing linear failure rates. *J. Applications Probability* 40, 485-504.
- [27] Chan M.Y., Cohen A.C., Whitten B.J., 1984. Modified maximum likelihood and modified moments estimators for the three parameter inverse Gaussian distribution. *Communications Statistics, Theory and Methods* 13(1), 47-68.
- [28] Chang D.S., 2000. Optimal burn-in decision for products with a unimodal failure rate function. *European J. Operations Res.* 126, 584-640.
- [29] Cheng R.C., Amin N.A.K., 1981. Maximum likelihood estimation of parameters in the inverse Gaussian distribution with unknown origin. *Technometrics* 23(3), 257-263.
- [30] Chhikara R.S., Folks J.L., 1977. The Inverse Gaussian Distributions a Life time model. *Technometrics* 19(4), 461-468.
- [31] Chhikara R.S., Folks J.L., 1980. *The Inverse Gaussian Distributions*. Marcel Decker New York.
- [32] Chung K.J., 1993. A note on the inspection interval of a machine. *International J. Quality Reliability Management* 10, 71-73.
- [33] Cohen A.C., Whitten B.J., 1985. Modified moment estimation for the three – parameter inverse Gaussian distribution. *J. Quality Technology* 17(3), 147-154.
- [34] Cohen A.C., Whitten B.J., 1988. *Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models*. Marcel Decker New York.
- [35] Deshapande J.V., Kochar S.C., Singh H., 1986. Aspects of positive ageing. *J. Application Probability* 23, 748-758.
- [36] Desmond A.F., 1986. On the relationship between two fatigue-life models. *IEEE Transactions on Reliability* 35, 167-169.
- [37] Desmond A.F., Yang Z., 1998. A comparison of likelihood and Bayesian inference for the threshold parameterization inverse Gaussian distribution. *Communications Statistics, Theory and Methodology* 27(9), 2173-2183.
- [38] Dhilon B.S., 1981. Life distributions. *IEEE Transactions on Reliability* 30, 457-459.
- [39] Dimitrakopoulou T., Adamidis K., Loukas S., 2007. A lifetime distribution with an upside-down bathtub-shape hazard function. *IEEE Transactions on Reliability* 56(2), 308-311.

- [40] Drapella A., 1993. The complementary Weibull distribution unknown or forgotten. *Quality Reliability Eng. Int.* 1(2), 383-385.
- [41] Feller W., 1978. *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. T. II.* PWN Warszawa.
- [42] Firkowicz Sz., 1970. *Statystyczne badanie wyrobów.* WNT Warszawa.
- [43] Ghai G.L., Mi J., 1995. Mean residual life and its association with failure rate. *IEEE Transactions on Reliability* 48(3), 262-263.
- [44] Glaser R.E., 1980. Bathtub and related failure rate characterizations. *J. of the American Statistical Association* 75(371), 667-672.
- [45] Grabski F., 2002. *Semi-markowskie modele niezawodności.* Inst. Badań Systemowych PAN Warszawa.
- [46] Guess F., Proschan F., 1988. Mean residual life: theory and applications. [In:] *Handbook of Statistics 7.* P.R. Krishnaiah, G.R. Rao (eds.), Elsevier New York, 215-224.
- [47] Gupta R.C., Akman H.O., 1995. On the reliability studies of a weighted inverse Gaussian model. *J. of Statistical Planning and Inference* 48, 69-83.
- [48] Gupta R.C., Akman H.O., 1995. Statistical Inference based on the length-biased data for the inverse Gaussian distribution. *Communication Statistics* 15(5), 1125-1141.
- [49] Gupta G.L., Gupta R.C., 1996. Aging characteristics of the Weibull mixtures. *Probability Eng. Information Sci.* 10, 591-600.
- [50] Gupta R.C., Kirmani S., 1999. The role of weighted distributions in stochastic modeling. *Communications Statistics, Theory and Methods* 19(9), 3147-3161.
- [51] Gurland J., Sethuraman J., 1994. How pooling failure data may reverse increasing failure rates when pooling failure data. *Technometrics* 36, 416-418.
- [52] Gurwicz M.P., Dibenedetto A.T., Range S.V., 1997. A new statistical distribution for characterizing the random strength of brittle materials. *J. of Material Sci.* 32, 2559-2564.
- [53] Hall W.J., Welner J.A., 1981. Mean residual life. [In:] *Statistics and Related Topics.* M. Csörgö, D.A. Dawson, J.N.K. Rao, A.K.M.E. Salech (eds.), North Holland, 161-184.
- [54] Harkness W.L., Shantaram R., 1969. Convergence of a sequence transformations of distribution functions. *Pacific J. of Mathematics* 31(2), 403-415.
- [55] Harriaga M.A., 1996. A maintenance inspection model for a single machine with general failure distributions. *Microelectronics and Reliability* 36(3), 353-358.
- [56] Howard R., 1971. *Dynamic Probabilistic System. Vol. II, Semi-Markov and decision process.* John Wiley New York.
- [57] Ingram C.R., Schaeffer R.L., 1976. On consistent estimation of age replacement intervals. *Technometrics* 18, 213-219.
- [58] Jiang R., Murthy D.N.P., 1991. The exponential Weibull family: a graphical approach. *IEEE Transactions on Reliability* 48(1), 68-72.
- [59] Jiang R., Murthy D.N.P., 1998. Mixture of Weibull distributions – parametric characterization of failure rate function. *Applications Stochastic Models, Data Analysis* 14, 47-65.

- [60] Jiang R., Murthy D.N.P., Ji P., 2001. Models involving two inverse Weibull distributions. *Reliability Eng. and System Safety* 73, 73-81.
- [61] Jones G., Chang R.C.H., 1984. On the asymptotic efficiency of moment and maximum likelihood estimators in the three parameter inverse Gaussian distribution. *Communications Statistics, Theory and Methods* 13(18), 2307-2314.
- [62] Jorgensen B., Shedari V., Whitmore G.A., 1991. On the mixture of the inverse Gaussian distribution with a complementary reciprocal. *Scandinavian J. of Statistics* 18, 77-79.
- [63] Karpiński J., Firkowicz Sz., 1981. *Zasady profilaktyki obiektów technicznych*. PWN Warszawa.
- [64] Keller A.Z., Giblin M.T., Franworth N.R., 1985. Reliability analysis of commercial vehicle engines. *Reliability Eng.* 10, 15-25.
- [65] Klefsjö B., 1982. On ageing properties and total time on test transforms. *Scandinavian J. of Statistics* 9, 37-41.
- [66] Klutke G.A., Kiesler P.C., Wortman M.A., 2003. A critical look at the bathtub curve. *IEEE Transactions on Reliability* 52(1), 125-129.
- [67] Knopik L., Styp-Rekowski M., 2002. Optymalizacja procesu eksploatacji. *Zesz. Nauk. Wydziału Mechanicznego Politechniki Koszalińskiej* 31, 89-96.
- [68] Knopik L., 2003. Maksymalizacja zysku w diagnostycznym systemie eksploatacji pojazdów z wykorzystaniem procesów semi-Markowa. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn* 133(1), 153-169.
- [69] Knopik L., Klimaszewski S., 2003. Stabilność pewnej charakterystyki rozkładu wykładniczego. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn* 134(2), 151-161.
- [70] Knopik L., 2004. Optymalizacja wskaźników efektywności dla modelu procesu eksploatacji. *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn* 137(1), 111-130.
- [71] Knopik L., 2005. Some results on the ageing classes. *Control and Cybernetics* 34(1), 1-8.
- [72] Knopik L., 2006. Characterization of a class of lifetime distributions. *Control and Cybernetics* 35(2), 407-414.
- [73] Knopik L., 2006. Optymalne polityki wymiany według wieku dla obiektów nie-naprawialnych z gwarancją. *Rozwój i zastosowania metod ilościowych i technik informatycznych wspomagających procesy decyzyjne*. Inst. Badań Systemowych. PAN Warszawa, 49.
- [74] Knopik L., 2007. Some remarks on mean time between failures of repairable systems. *Summer Safety and Reliability Seminars*. Maritime University Gdańsk 2, 207-211.
- [75] Knopik L., 2008. Maksymalizacja współczynnika gotowości obiektu technicznego z gwarancją. *Metody utrzymania gotowości systemów*. XXXVI Zimowa Szkoła Niezawodności, Szczyrk, 171-182.
- [76] Knopik L., 2008. Some remarks on mean time between failures of repairable systems. *Int. of Materials and Structural Reliability* 6(1), 91-96.
- [77] Kontrouvelis I.A., Canavas G.C., Meintains S.G., 2005. Estimation in three parameter inverse Gaussian distribution. *Computational Statistics and Data Analysis* 49, 1132-1147.

- [78] Kopociński B., 1984. Klasy funkcji niezawodności. *Matematyka Stosowana* XXIII, 37-54.
- [79] Krohn C.A., 1969. Hazard versus renewal rate of electronic items. *IEEE Transactions on Reliability* 18, 64-73.
- [80] Lai C.D., Xie M., Murthy D.N.P., 2005. A modified Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability* 52(4), 33-37.
- [81] Lillo R.E., 2001. Note on relations between criteria for ageing. *Reliability Eng. and System Safety* 67, 129-133.
- [82] Marshall A.W., Proschan F., 1972. Classes of distributions applicable in replacement with renewal theory implications. [In:] *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Le Cam (ed.) 11, 395-415.
- [83] Meeker W.Q., Escobar L.A., 1998. *Statistical methods for lifetime data*. J. Wiley and Sons New York.
- [84] Mi J., 1995. Bathtub failure rate and upside-down bathtub mean residual life. *IEEE Transactions on Reliability* 44(3), 388-391.
- [85] Mi J., 1999. Comparison of renewable warranties. *Naval Research Logistics Quartley* 43, 91-106.
- [86] Mondro M.J., 2002. Approximation of mean time between failures when system has periodic maintenance. *IEEE Transactions on Reliability* 51(2), 166-167.
- [87] Mudholkar G.S., Hutson A.D., 1996. The exponential Weibull family: some properties and a flood data application. *Communications Statistics, Theory and Methods* 25(12), 3059-3083.
- [88] Mudholkar G.S., Sirvastava D.K., 1993. Exponential Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability* 42(2), 299-302.
- [89] Mudholkar G.S., Sirvastava D.K., Treimer M., 1995. The exponential Weibull family. A reanalysis of the bus-motor failure data. *Technometrics* 37(4), 436-445.
- [90] Nadarajah S., 2005. On the moments of the modified Weibull distribution. *Reliability Eng. and System Safety* 90, 114-117.
- [91] Nadarajah S., Kotz S., 2005. On some recent modifications of Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability* 54(4), 561-563.
- [92] Osaki S.S., Nakagawa T., 1975. A note on age replacement. *IEEE Transactions on Reliability* 24, 92-94.
- [93] Owen W.J., 2006. A new three-parameter extension to the Birnbaum-Saunders distribution. *IEEE Transactions on Reliability* 55, 475-479.
- [94] Owen W.J., Padgett W.J., 1999. Acceleration models for system strength based on Birnbaum-Saunders distributions. *Life Time Data Analysis* 5, 133-147.
- [95] Padgett W.J., Wei L.J., 1979. Estimation for three parameter inverse Gaussian distribution. *Communications Statistics, Theory and Methods* 8(2), 129-137.
- [96] Proschan F., 1963. Theoretical explanation of observed decreasing failure rate. *Technometrics* 5, 375-383.
- [97] Rajarshi S., Rajarshi M.B., 1988. Bathtub distributions: a review. *Communications Statistics, Theory and Methods* 17, 2597-2621.

- [98] Ritchken R.H., Fuh D., 1986. Optimal replacement policies for irreparable warranted items. *IEEE Transactions on Reliability* 35, 621-623.
- [99] Ross S., 1970. *Applied probability models with optimization application*. Holden Day New York.
- [100] Saunders S.C., 1974. A family of random variables closed under reciprocation. *J. Amer. Statistical Association* 69, 539-553.
- [101] Swartz G.B., 1973. The mean residual life function. *IEEE Transactions on Reliability* 22, 108-109.
- [102] Tweedie M.C.K., 1957. Statistical properties of inverse Gaussian distributions. *J. Applications Math. Statistics* 28, 362-377.
- [103] Vaupel J.W., Yashin A.I., 1985. Some surprising effects of selection on population dynamics. *American Statistics* 39, 176-184.
- [104] Wang J., Muller H., Capra W.B., 1998. Analysis of oldest-old morality: life time revisited. *Annals Statistics* 26, 126-133.
- [105] Wondmagegnehu E.T., 2004. On the behavior and shape of mixture failure rates from of IER Weibull distributions. *Naval Research Logistics* 51, 491-500.
- [106] Wondmagegnehu E.T., Navarro J., Hernandez P.J., 2005. Bathtub shape failure rates from mixtures: a practical point of view. *IEEE Transactions on Reliability* 54(2), 270-275.
- [107] Xie M., Tang Y., Goh T.N., 2002. A modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. *Reliability Eng. and System Safety* 76, 279-285.
- [108] Xie M., Tang Y., Goh T.N., 2004. On changing points of mean residual life and failure rate function for some generalized Weibull distributions. *Reliability Eng. and System Safety* 84, 293-299.
- [109] Yech R.H., Chen G.Ch., Chen M.Y., 2005. Optimal age replacement policy for non-repairable products under renewing free-replacement warranty. *IEEE Transactions on Reliability* 54, 92-97.



## METODA WYBORU EFEKTYWNEJ STRATEGII EKSPLOATACJI OBIEKTÓW TECHNICZNYCH

### Streszczenie

Praca dotyczy zastosowań wymian według wieku obiektów technicznych oraz problemów związanych z rozkładem czasu życia obiektu technicznego. Główny nacisk położono na optymalizację zysku na jednostkę czasu i współczynnik gotowości systemu eksploatacji.

Cel i zakres pracy przedstawiono we wstępie.

Po wstępie następuje rozdział 2, w którym wprowadzone zostały niezbędne w dalszych rozważaniach oznaczenia i pojęcia. Zdefiniowano rozkłady czasów życia stosowane do wymian według wieku i klasy rozkładów niezawodności. W szczególności rozważane są rozkłady z jednomodalną funkcją intensywności uszkodzeń.

Trzy modele: Harriagi, Grabskiego i Yecha są prezentowane w rozdziale 3. Ten rozdział zawiera także przykłady różnych rozkładów czasów życia w modelach wymian według wieku.

Rozdział 4 jest związany z uogólnieniem 3-stanowego modelu wymian według wieku obiektów technicznych. Ten model wykorzystuje procesy semi-markowskie. Założono, że wymiana i naprawa nie prowadzą do pełnej efektywności obiektu technicznego.

W rozdziale 5 wprowadzono uogólnienia wyników 3-stanowego modelu wymian. Ten rozdział zawiera także wyniki badań zysku na jednostkę czasu i gotowości wielo-stanowego systemu eksploatacji. Przykłady numeryczne rzeczywistych systemów eksploatacji pokazują stosowalność tego uogólnienia 3-stanowego modelu wymian.

W rozdziale 6 badano uogólnienie modelu Yecha wymian według wieku obiektów z gwarancją. W tym modelu zakłada się, że niepomijalne są czasy wymiany i naprawy.

W rozdziale 7 zaprezentowano wyniki z klas rozkładów starzejących, mieszanin rozkładów i ograniczeń dla średniego czasu między naprawami. W szczególności wyznaczono mieszaninę rozkładów mających jednomodalną funkcję intensywności uszkodzeń. Wyniki z mieszanin rozkładów wykorzystane do estymacji funkcji niezawodności i funkcji intensywności uszkodzeń zastosowano do systemu elektrycznego autobusu.

Ponadto dołączono szeroką bibliografię tematu.

## THE METHOD OF CHOICE THE EFFICIENCY STRATEGY OF THE MAINTENANCE OF TECHNICAL OBJECTS

### Summary

The book deals with application of the age replacement of the technical object and problems connected with the distribution of lifetime of the technical object. The main emphasis is put on optimization of the profit per unit time and the availability of the technical maintenance system.

The aim and the scope of the work are presented in Introduction.

In Chapter 2, that follows the Introduction, some basic notions necessary to further considerations are introduced. The lifetime distributions applicable to the age replacement investigation and the reliability classes of distributions are defined. The lifetime distributions with the unimodal failure rate function are particularly considered.

Three models: Harriaga, Grabski and Yech are presented in Chapter 3. This chapter also contains the examples of various lifetime distributions in the age replacement models.

Chapter 4 is connected with the generalization of the 3-state model of the age replacement of technical object. This model utilizes the semi-Markov process. It has been assumed that the replacement and the repair do not lead to full efficiency of the technical object.

The generalization of the results 3-state replacement model is introduced in Chapter 5. This chapter also contains the results of investigations of the profit per unit time and the availability of multi state technical systems. Numerical examples of the real maintenance system show applicability this generalization of the 3-state age replacement model.

In Chapter 6 the generalization of Yech model age replacement technical object with warranty are considered. In this model, it has been assumed that the time of replacement and the time of repair are not negligible.

The results on ageing distributions classes, the mixture of distributions and the bounds for mean time between repairs are presented in Chapter 7. In particular of the mixture of the standard distributions having unimodal failure rate function are determined. The results on the mixture distributions used for the reliability function and the failure rate function estimation are applied to electrical circuit of a bus.

Moreover, wide bibliography of topic is enclosed.