

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA  
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH  
W BYDGOSZCZY

Jacek Gieras

Pr. 1436  
ELEMENTY TEORII ELEKTROMECHANICZNYCH  
PRZETWORNIKÓW INDUKCYJNYCH  
W UJĘCIU POLOWYM

Zeszyty Naukowe 70

ELEKTROTECHNIKA 2

BYDGOSZCZ - 1979

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA  
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH  
W BYDGOSZCZY

Jacek Gieras



**ELEMENTY TEORII ELEKTROMECHANICZNYCH  
PRZETWORNIKÓW INDUKCYJNYCH  
W UJĘCIU POLOWYM**

Zeszyty Naukowe 70

**ELEKTROTECHNIKA 2**

BYDGOSZCZ – 1979

**REDAKTOR NACZELNY**

doc. dr hab. Juliusz Skonieczny

**REDAKTOR NAUKOWY**

doc. dr hab. inż. Lech J. Weiss

**OPINIODAWCY**

Prof. zw. dr hab. inż. Mirosław Dąbrowski

Prof. zw. dr hab. Janusz Turowski

**OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE**

mgr Halina Koziółkiewicz, Alfons Grzenkiewicz

Wydano za zgodą Rektora

Akademii Techniczno-Rolniczej

w Bydgoszczy

**WYDAWNICTWA UCZELNIANE AKADEMII TECHNICZNO-ROLNICZEJ  
W BYDGOSZCZY**

*Mi 000 P 501/89*

Wyd. I. Nakład 150+25 egz. Ark. wyd. 10. Ark. druk. 13. Papier kl.V. 70 g.

Oddano do druku 16.VII.79 r. Druk ukończono w sierpniu 1979 r. Zam. 835/79 Cena zł 40,- TR-8  
WSiP Zakłady Graficzne w Bydgoszczy.

## SPIS TREŚCI

strona

Wykaz oznaczeń . . . . .	5
1. Wstęp . . . . .	9
1.1. Przedmiot i cel pracy . . . . .	9
1.2. Zakres pracy . . . . .	10
1.3. Stan zagadnienia . . . . .	12
2. Środowisko wielowarstwowe w polu jednowymia- rowym . . . . .	22
2.1. Wyznaczenie rozkładu jednowymiarowego pola elektromagnetycznego . . . . .	22
2.2. Impedancją i straty mocy elektromagnetycznej	33
2.3. Uwzględnienie zmiennej przenikalności magne- tycznej oraz strat histerezowych w warstwach ferromagnetycznych o grubości skończonej . .	34
2.3.1. Sformułowanie problemu . . . . .	34
2.3.2. Wnikanie fali płaskiej o natężeniu $H_{si} > H_{cr}$ do płyty ferromagnetycznej o grubości $d_i \leq z_{mi}$ . . . . .	44
2.3.3. Wnikanie fali płaskiej o natężeniu $H_{si} > H_{cr}$ do płyty ferromagnetycznej o grubości $d_i$ zawartej w przedziale $z_{mi} + z_{pimax} \geq d_i > z_{mi}$ . . . . .	50
2.3.4. Wnikanie fali płaskiej o natę- żeniu $H_{si} \leq H_{cr}$ do płyty ferromagne- tycznej o grubości $d_i \leq z_{pi}$ . . . . .	51
3. Wielowarstwowa część wtórna w polu dwuwymia- rowym . . . . .	52
3.1. Wybór układu współrzędnych . . . . .	52
3.2. Zależności podstawowe . . . . .	55
3.3. Założenia . . . . .	57
3.4. Równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przypadku części pierwotnej o biegunach utajonych . . . . .	58
3.5. Równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przypadku części pierwotnej o biegunach jawnych . . . . .	70
3.6. Impedancja . . . . .	77
3.7. Moc elektromagnetyczna . . . . .	81
3.8. Siły wzajemnego oddziaływania między częścią pierwotną a częścią wtórną . . . . .	82
3.9. Uwzględnienie anizotropii warstw . . . . .	83
4. Wielowarstwowa część wtórna w polu trójwymia- rowym . . . . .	93
4.1. Zależności podstawowe . . . . .	93

4.2. Założenia . . . . .	95
4.3. Całki ogólne równań polowych i warunki brzegowe . . . . .	96
4.4. Równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przypadku części pierwotnej o biegunach utajonych . . . . .	101
4.5. Równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przypadku części pierwotnej o biegunach jawnych . . . . .	110
4.6. Impedancja . . . . .	117
4.7. Moc elektromagnetyczna . . . . .	120
4.8. Siły wzajemnego oddziaływania między częścią pierwotną a częścią wtórną . . . . .	122
5. Ogólny algorytm obliczeń przetworników . . . . .	123
6. Przykłady analizy polowej przetworników . . . . .	133
6.1. Silnik indukcyjny o wirniku cylindrycznym i rdzeniu wewnętrznym łożyskowanym . . . . .	133
6.2. Unoszenie płyty nieferromagnetycznej w polu elektromagnetycznym . . . . .	157
7. Wnioski . . . . .	193
Literatura . . . . .	195

## WYKAZ OZNACZEŃ

$A$	-	amplituda obciążenia liniowego
$\vec{A}$	-	magnetyczny potencjał wektorowy
$a$	-	wartość chwilowa obciążenia liniowego
$a_R$	-	współczynnik rezystancji i strat mocy czynnej uwzględniający zmienną przenikalność magnetyczną i straty histerezy
$a_X$	-	współczynnik reaktancji i strat mocy biernej uwzględniający zmienną przenikalność magnetyczną i straty histerezy
$B$	-	amplituda indukcji magnetycznej
$b$	-	wartość chwilowa indukcji magnetycznej; szerokość żłobka
$D$	-	średnica rdzenia przetwornika wirującego
$d$	-	grubość warstwy
$E$	-	natężenie pola elektrycznego
$F$	-	siła
$f$	-	siła na jednostkę powierzchni; częstotliwość
$H$	-	natężenie pola magnetycznego
$h_{ov}$	-	wysięg połączeń czołowych uzwojeń części pierwotnej
$I$	-	prąd
$i$	-	prąd w pojedynczej warstwie części wtórnej
$j$	-	jednostka urojona
$k$	-	współczynnik tłumienia pola elektromagnetycznego; przekładnia między uzwojeniami części pierwotnej przetwornika dwufazowego
$k_C$	-	współczynnik Cartera
$k_{Fe}$	-	współczynnik izolacji blach rdzenia ferromagnetycznego
$k^n$	-	współczynnik nasycenia obwodu magnetycznego
$L$	-	długość rdzenia części pierwotnej
$L_i$	-	długość części wtórnej
$M$	-	moment elektromagnetyczny
$M_{mech}$	-	moment mechaniczny
$m$	-	liczba faz części pierwotnej
$m_1, m_2$	-	współczynniki w równaniach aproksymujących charakterystykę magnesowania
$N$	-	liczba zwojów szeregowych
$n$	-	harmoniczna przestrzenna rozkładu pola wzdłuż rdzenia przetwornika, współczynnik w równaniu aproksymującym charakterystykę magnesowania
$P$	-	moc czynna
$P_{mech}$	-	moc mechaniczna
$p$	-	moc czynna na jednostkę powierzchni
$Q$	-	moc bierna
$q$	-	moc bierna na jednostkę powierzchni
$R$	-	rezystancja

- $r$  - promień  
 $r_{1i}, r_{2i}$  - pierwiastki równań charakterystycznych  
 $S$  - moc pozorna  
 $s$  - poślizg  
 $T$  - macierz transferowa  
 $t$  - czas; podziałka żłobkowa  
 $U$  - napięcie elektryczne  
 $v$  - prędkość  
 $X$  - reaktancja  
 $x, y, z$  - współrzędne prostokątne  
 $Z$  - impedancja  
 $z$  - impedancja jednostkowa  
 $z_{mi}$  - głębokość, na której natężenie pola magnetycznego osiąga wartość krytyczną  $H_{cr}$  w środowisku ferromagnetycznym  
 $z_{pimax}$  - przedział głębokości, w którym natężenie pola magnetycznego maleje od wartości krytycznej do zera  
 $z_{pi}$  - głębokość, na której natężenie pola magnetycznego maleje od wartości powierzchniowej do zera  
 $z$  - liczba żłobków  
 $\alpha$  - stała propagacji  
 $\alpha_e$  - współczynnik sygnału napięciowego w teorii silników indukcyjnych wykonawczych  
 $\alpha_K$  - kąt między osiami magnetycznymi uzwojeń fazowych części pierwotnej  
 $\beta_v$  - stała rzeczywista zależna od podziałki biegunowej  
 $\beta_K$  - kąt między wskazami napięć zasilających uzwojenia fazowe części pierwotnej  
 $\Gamma$  - konduktywność zespolona  
 $\gamma$  - konduktywność  
 $\epsilon$  - przenikalność elektryczna; współczynnik zależny od stanu izolacji blach oraz powierzchni zewnętrznej rdzenia ferromagnetycznego  
 $\epsilon_0$  - przenikalność elektryczna próżni  
 $\epsilon_{ri}$  - przenikalność elektryczna względna  
 $\xi_{ri}$  - współczynnik uzwojenia  
 $\eta$  - sprawność przetwornika  
 $\eta_{elm}$  - sprawność elektromagnetyczna przetwornika  
 $\eta_n$  - stała propagacji uwzględniająca rozkład przestrzenny pola  
 $\chi$  - przenikalność magnetyczna  
 $\mu$  - przenikalność magnetyczna  
 $\mu_0$  - przenikalność magnetyczna próżni  
 $\mu_{ri}$  - przenikalność magnetyczna względna  
 $\mu_{rmaxi}$  - przenikalność magnetyczna względna odpowiadająca natężeniu pola magnetycznego o wartości krytycznej  $H_{cr}$   
 $\mu_{rpi}$  - przenikalność magnetyczna względna początkowa odpowiadająca zerowemu natężeniu pola magnetycznego na charakterystyce magnesowania  
 $\nu$  - harmoniczna przestrzenna rozkładu pola wzdłuż podziałki biegunowej  
 $\vec{\Pi}$  - zespolony wektor Poyntinga  
 $\Pi$  - składowa normalna zespolonego wektora Poyntinga  
 $\tau^z$  - podziałka biegunowa

- $\varphi$  - współrzędna w układzie cylindrycznym; kąt przesunięcia fazowego między prądem a napięciem  
 $\psi$  - kąt wyrażający straty mocy czynnej na histerezę magnetyczną  
 $\psi_{\max i}$  - kąt strat histerezowych odpowiadający natężeniu krytycznemu  
 $\psi_{p i}$  - kąt strat histerezowych odpowiadający zerowemu natężeniu pola magnetycznego  
 $\omega$  - pulsacja

#### Indeksy dolne:

- $i = 1, \dots, k-1, k$  - numer warstwy  
 $n$  -  $n$ -ta harmoniczna rozkładu przestrzennego pola wzdłuż rdzenia przetwornika  
 $\text{prim}$  - część pierwotna  
 $\text{sec}$  - część wtórna  
 $s$  - wartość powierzchniowa  
 $x, y, z$  - składowe wektora wzdłuż współrzędnych  $x, y, z$   
 $\nu$  -  $\nu$  - ta harmoniczna rozkładu przestrzennego pola wzdłuż podziałki biegunowej

#### Indeksy górne:

- $(k)$  - ilość warstw, z których składa się rozważany obiekt  
 $"+"$  - pole współbieżne  
 $"-"$  - pole przeciwbieżne

Uwaga: Wielkości zmienne w czasie, wyrażone za pomocą liczb zespolonych (wskazy) zapisano bez żadnych wyróżnień; wielkości wektorowe oznaczono strzałką u góry.





Jacek Gieras

## ELEMENTY TEORII ELEKTROMECHANICZNYCH PRZETWORNIKÓW INDUKCYJNYCH W UJĘCIU POLOWYM

Rozprawa zawiera analizę oraz algorytm obliczeń na podstawie teorii pola elektromagnetycznego elektromechanicznych przetworników indukcyjnych w stanach ustalonych. Wychodząc z równań elektrodynamiki, wykazano istnienie cech wspólnych różnorodnych przetworników, sprowadzono ich strukturę do układu warstwowego, wykazano możliwości analizy ogólnej oraz budowy ogólnych algorytmów obliczeń. Rozpatrzono trzy przypadki rozkładu pola: jednowymiarowego, dwuwymiarowego oraz trójwymiarowego. Oprócz właściwości nieliniowych, dla pola dwuwymiarowego uwzględniono ponadto właściwości anizotropowe środowiska, dzięki czemu jest możliwa analiza polowa na przykład silnika indukcyjnego klatkowego. Uzyskano zależności rekurencyjne na rozkład pola, impedancję części wtórnej przetwornika, moc elektromagnetyczną przekazywaną z części pierwotnej do części wtórnej, straty mocy w części wtórnej oraz sily. Zależności te są słuszne dla wszystkich rodzajów przetworników o zwartym uzwojeniu części wtórnej co jest podstawową zaletą opracowanej metody analizy polowej. Wyniki rozważań teoretycznych zweryfikowano doświadczalnie.

### 1. WSTĘP

#### 1.1. Przedmiot i cel pracy

Przedmiotem tej pracy są zjawiska w przetwornikach elektromechanicznych o działaniu indukcyjnym - w szczególności w przetwornikach, w których pole elektromagnetyczne wnika jednostronnie do części wtórnej.

Celem pracy jest natomiast sformułowanie na podstawie teorii pola elektromagnetycznego związków między parametrami

materiałowymi, tzn. konduktywnościami i przenikalnościami magnetycznymi oraz parametrami struktury, tzn. wymiarami geometrycznymi, a właściwościami funkcjonalnymi przetwornika poddanego określonym wymuszeniom. Istotny element pracy stanowi metoda wyznaczenia dwu- oraz trójwymiarowego rozkładu quasistacjonarnego pola elektromagnetycznego w strukturach wielowarstwowych.

Teżą naukową przedłożonej rozprawy jest wykazanie, że istnieje możliwość ogólnej analizy oraz budowy ogólnych algorytmów obliczeń przetworników indukcyjnych na podstawie teorii pola elektromagnetycznego. Zaproponowany model warstwowy - w odróżnieniu od dotychczas istniejących, uwzględnia m.in. skończone wymiary, nieliniowość i częściowo anizotropię oraz pozwala z wystarczającą dokładnością uzyskać opis matematyczny dowolnego przetwornika.

## 1.2. Zakres pracy

Spęcyfiką obecnego etapu rozwoju nauk technicznych jest poszukiwanie syntetycznych teorii uogólniających, które pozwalałyby w sposób pełniejszy wykorzystać możliwości elektronicznej techniki obliczeniowej. W dziedzinie elektromechanicznego przetwarzania energii rozróżnia się dwa podstawowe modele matematyczne przetworników: polowy oraz obwodowy. Teoria pola elektromagnetycznego dotyczy głównie zagadnień konstruowania, teoria obwodów zaś - zagadnień eksploatacji przetworników w układach elektromechanicznych. Obydwie teorie wzajemnie uzupełniają się, przy czym teoria polowa jest przydatna szczególnie w badaniu przetworników elektromechanicznych o parametrach rozłożonych.

Rozważania przedstawione w pracy dotyczą przede wszystkim:

- silników liniowych,
- transporterów liniowych do cieczy przewodzących, np. ciekłych metali,
- silników o wirniku masywnym,
- silników oraz prądnic tachometrycznych o wirniku cylindrycznym,

- hamulców oraz sprzęgieł wiroprowadowych,
- przetworników repulsyjnych (podnośników) działających na zasadzie zjawiska lewitacji elektromagnetycznej.

Rozważania są słuszne dla każdej innej maszyny indukcyjnej o zwartym uzwojeniu części wtórnej, np. dla silników indukcyjnych klatkowych, jeżeli tylko obwody o parametrach skupionych zastąpić obwodami o parametrach rozłożonych.

W najprostszym przypadku część wtórna może być jednowarstwowa, np. w maszynie o walcowym wirniku ferromagnetycznym, w bardziej skomplikowanych przypadkach zaś - kilkwarstwowa, np. w silniku indukcyjnym o wirniku ekranowanym. Dlatego też opracowana metoda analizy przetworników jest ogólna i dotyczy struktur zawierających dowolną liczbę warstw przewodzących, nieprzewodzących, ferromagnetycznych lub nieferromagnetycznych. Powierzchnie graniczne poszczególnych warstw są względem siebie równoległe. Jeżeli konduktywność warstwy jednorodnej jest większa od zera, to stanowi ona obwód elektryczny o parametrach rozłożonych. Część wtórną o parametrach skupionych, np. wirnik klatkowy silnika indukcyjnego, można sprowadzić do części wtórnej o parametrach rozłożonych przez zastąpienie określonego elementu obwodu elektrycznego warstwą o równoważnej rezystancji, obwodu magnetycznego zaś - warstwą o równoważnej reluktancji.

Do rozważań opartych na prawach elektrodynamiki zakłada się quasistacjonarne pole elektromagnetyczne wnikające jednostronnie do struktury wielowarstwowej. Elementem wzbudzającym pole jest część pierwotna bądź o biegunach utajonych, bądź o biegunach jawnych. Jeżeli bieguny są utajone, wymuszeniem jest obciążenie liniowe części pierwotnej, jeżeli bieguny są jawne - składowa normalna indukcji na powierzchni części wtórnej. Taki wybór zadanych warunków brzegowych uwarunkowany zamierzeniem osłabnięcia jak największej dokładności wyników końcowych jest najbardziej celowy. Pole elektromagnetyczne analizowane jest w układzie współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$ . Współrzędną  $x$  przyjęto równoległe do

podziałki biegunowej, współrzędną  $y$  - równoległe do długości rdzenia przetwornika, współrzędną  $z$  - w kierunku normalnym do powierzchni aktywnych części pierwotnej oraz wtórnej. Należy zaznaczyć, że pod pojęciem długości przetwornika rozumie się wymiar prostopadły do kierunku ruchu pola magnetycznego, znajdujący się w płaszczyźnie powierzchni aktywnych. Do wyznaczenia rozkładu pola elektromagnetycznego zastosowano klasyczną metodę rozdzielania zmiennych. Zastosowanie metod bezpośrednich analizy funkcjonalnej np. metod wariacyjnych nie uprościłoby bowiem wywodów matematycznych w rozpatrywanym problemie. Należy zaznaczyć, że wykorzystanie metod wariacyjnych ułatwia niekiedy analizę np. procesów elektromagnetycznych nieustalonych w maszynach elektrycznych [1.38] oraz zapewnia prostą postać otrzymanych zależności końcowych określających np. pojemność kabla koncentrycznego, indukcyjność rozproszenia transformatora czy też żłobka maszyny elektrycznej, strat mocy w jednorodnych płytach przewodzących, itp. [1.36], przy czym niemal analogiczne wzory jak w pracy [1.36, rozdz. 5.3] można uzyskać również na podstawie metod klasycznych.

### 1.3. Stan zagadnienia

Równania Maxwella po raz pierwszy - jak się wydaje - do analizy maszyn elektrycznych zastosował Creedy [1.11] w 1917 r., chociaż już wcześniejsze prace, np. Cartera [1.8] Douglasa [1.14], Hellmunda [1.23] oraz Hirda [1.24] przypisują dużą wagę znaczeniu koncepcji polowej. Następny ważny przyczynek zawarty jest w artykułach Hague'go opublikowanych w latach 1917-26 i później wznowionych edycją książkową [1.2]. Wszyscy wymienieni autorzy wskazują, że rozwiązanie dowolnego problemu dla obwodów magnetycznych i elektrycznych przetworników elektromechanicznych można uzyskać na podstawie rozkładu pola elektromagnetycznego. W ostatnich latach teoria elektromagnetyczna maszyn elektrycznych, zwłaszcza indukcyjnych została znacznie poszerzona, głównie przez Mishkina - 1954 [1.30], Cullena i Bartona - 1958 [1.12], Mukherji'ego - 1961 [1.32], Nasara - 1964 [1.33]

oraz Turowskiego - 1968 [1.6] .

W Polsce intensywne badania w dziedzinie elektrodynamiki transformatorów i maszyn elektrycznych prowadzone są w Politechnice Łódzkiej. I tak np. pod kątem badania zjawisk elektromagnetycznych wywołanych polem rozproszenia w transformatorach, została opracowana przez prof. J. Turowskiego metoda falowa analizy układów warstwowych - 1957 [1.40], rozwinięta następnie w pracach [1.6, 1.41, 1.42, 1.43, 1.44] oraz przez innych autorów [1.45, 1.46] .

Spośród literatury światowej na uwagę zasługują również prace Wiszniewskiego, Głuchanowa i Kowaliewa - 1960 [1.5], Stolla i Hammonda - 1965 [1.39], Postnikowa, Niżnika, Bieriezowskiego i Krawczienki - 1965 [1.35], Lawrensona, Reece'go i Ralpa - 1966 [1.28], Jonesa i Gibsona - 1969 [1.25], a także [1.9, 1.15, 1.22, 1.29, 1.31, 1.37] .

Wymienieni autorzy (za wyjątkiem [1.45]) nie podają jednak rozwiązania uogólnionego równań polowych dla dowolnej liczby warstw; ograniczają się do ich liczby skończonej. Jeżeli obiekt badań zmienia się, powtarzane są te same przekształcenia podstawowych równań elektrodynamiki pociągające za sobą - w zależności od stopnia skomplikowania struktury, np. liczby warstw - mniej lub bardziej uwikłane operacje matematyczne związane z wyznaczeniem stałych całkowych występujących w równaniach różniczkowych. Przy dużej liczbie warstw - większej od trzech - procedura polegająca na rozwiązaniu równań Maxwella dla każdej warstwy, a następnie "zszywaniu" rozwiązań na podstawie warunków brzegowych, prowadzi do bardzo pracochłonnych przekształceń. Takie podejście uniemożliwia sporządzenie ogólnego algorytmu obliczeń rozkładu pola na maszynie cyfrowej, gdyż zazwyczaj zmiana struktury obiektu wiąże się ze zmianą algorytmu. Rozważając różne odmiany przetworników indukcyjnych dostrzega się potrzebę uogólnienia rozwiązania zagadnienia Dirichleta na środowisko składające się z dowolnej liczby warstw.

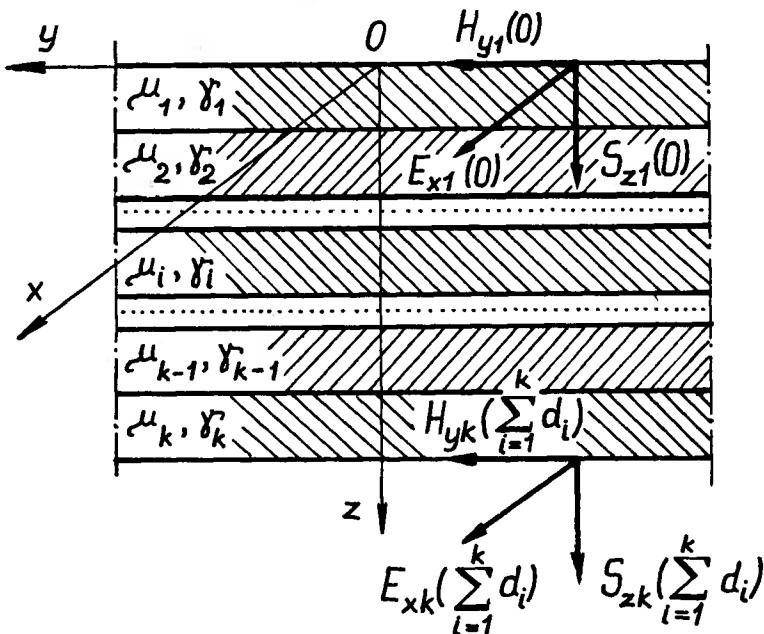
Wydaje się, że analiza quasistacjonarnego jednowymiarowego pola elektromagnetycznego w środowisku składającym się z dowolnej ilości płyt przewodzących została zapoczątkowana

przez Pipesa [1.34]. Pipes zakłada, że środowisko składa się z  $k$  warstw o skończonych grubościach  $d_1, d_2, \dots, d_k$  i że natężenia zarówno pola magnetycznego jak i elektrycznego na powierzchni zewnętrznej warstwy pierwszej są znane - rys. 1.1. Natężenia pól na powierzchni przeciwległej  $k$ -tej warstwy są określone równaniem

$$\begin{bmatrix} H_{yk} \left( \sum_{i=1}^k d_i \right) \\ E_{xk} \left( \sum_{i=1}^k d_i \right) \end{bmatrix} = T_k \cdot T_{k-1} \cdot \dots \cdot T_i \cdot \dots \cdot T_1 \cdot \begin{bmatrix} H_{y1}(0) \\ E_{x1}(0) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

w którym macierz dla  $i$ -tej warstwy

$$T_i = \begin{bmatrix} \cosh \alpha_i d_i & - \frac{\gamma_i}{\alpha_i} \sinh \alpha_i d_i \\ \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \sinh \alpha_i d_i & \cosh \alpha_i d_i \end{bmatrix} \quad (1.2)$$



Rys. 1.1. Układ wielowarstwowy płaskich płyt przewodzących w polu jednowymiarowym [1.34]

Pipes nazywa "macierzą transferową" (ang. transfer matrix) i-tej warstwy. Powyższa wygodna postać macierzowa równań pola pozwala wyznaczyć w prosty i szybki sposób impedancję pakietu płyt przewodzących. Jednakże niedogodnością metody Pipesa jest niemożliwość znalezienia rozkładu pola wewnątrz środowiska wielowarstwowego. Również konieczność znajomości zarówno natężenia pola magnetycznego  $H_{y1}(0)$  jak i elektrycznego  $E_{x1}(0)$  stwarza dodatkową niedogodność.

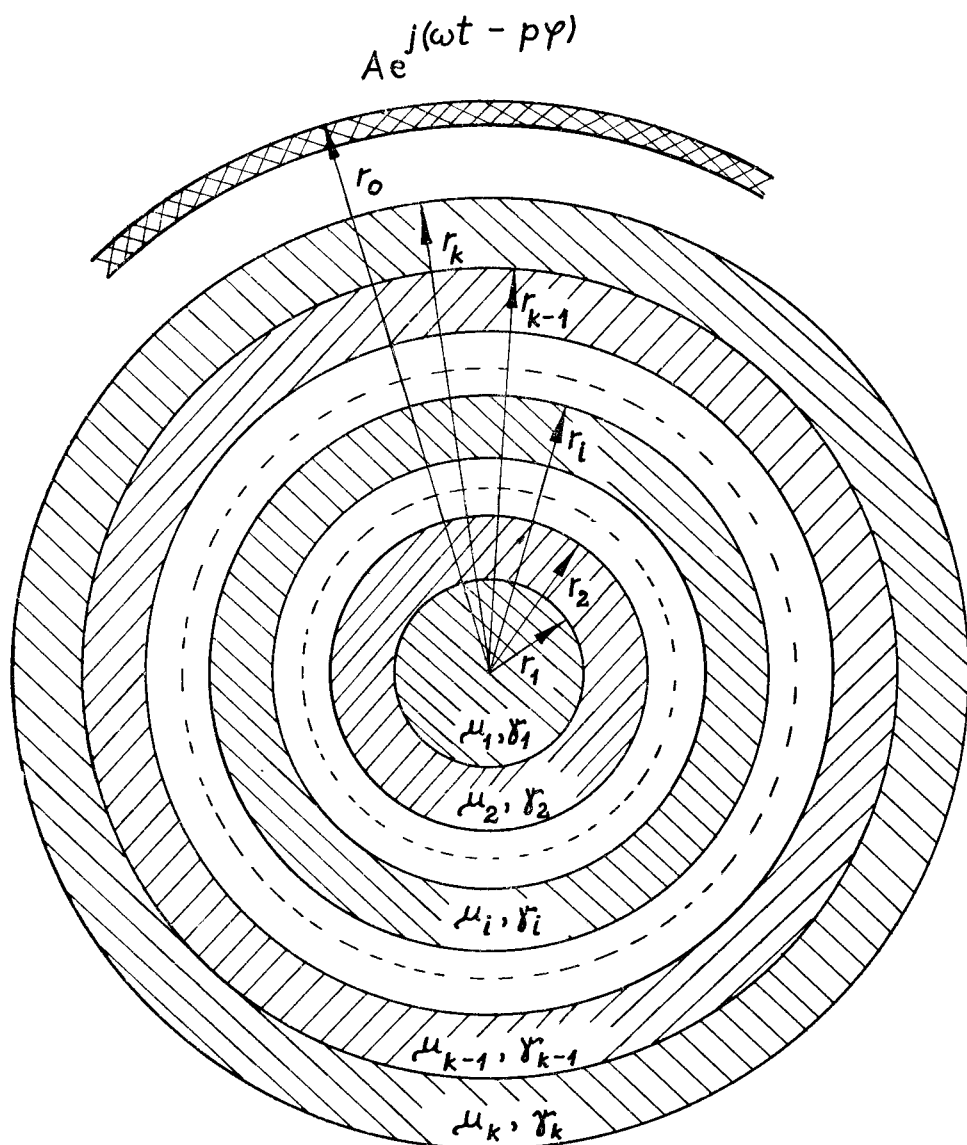
Metoda Pipesa w rozwiniętej i uzupełnionej formie została przystosowana do analizy pola elektromagnetycznego (jednowymiarowego) w maszynach indukcyjnych przez Greiga i Freemana [1.21, 1.16]. Wymienieni autorzy opierają się również na pracach Mishkina [1.30], Cullena i Bartona [1.12] oraz Waita [1.4]. Greig i Freeman rozpatrują zagadnienie fal elektromagnetycznych wędrujących w maszynie indukcyjnej o części wtórnej z uzwojeniem klatkowym. Zarówno część wtórna jak i pierwotna są podzielone na dowolną liczbę warstw o skończonych grubościach i nieskończenie rozległych w płaszczyźnie przemieszczania się fal. Fale wędrujące są wytwarzane przez warstwę prądową umieszczoną pośrodku strefy żłobkowo-zębowej części pierwotnej. Do wyznaczenia parametrów maszyny wykorzystywane są "macierze transferowe" (1.2). Nie są jednak uwzględnione efekty krańcowe oraz nasycenie warstw ferromagnetycznych. Rozważania Greiga i Freemana, chociaż interpretują zjawiska w przetwornikach indukcyjnych w sposób bardzo przybliżony, mają jednak dużą przydatność praktyczną, głównie z powodu bardzo prostego algorytmu budowy równań rozkładu pola - analogicznie jak (1.1) i tworzenia macierzy transferowych (1.2).

Freeman również opracował metodę wyznaczenia rozkładu pola oraz impedancji nieskończenie długich wielowarstwowych struktur cylindrycznych występujących w silownikach, pompach do ciekłych metali oraz generatorach magnetohydrodynamicznych [1.17, 1.18, 1.19].



Zjawiska zachodzące w różnorodnych przetwornikach indukcyjnych należy rozpatrywać koniecznie w oparciu o dwu- lub trójwymiarową analizę pola elektromagnetycznego. Uwzględnia się wtedy wpływ skończonych wymiarów przetwornika na rozkład pola, wyższe harmoniczne przestrzenne oraz efekty krańcowe. Czynniki te mają bardzo duży wpływ na parametry przetwornika. Zastosowanie "macierzy transferowych" do analizy wielowymiarowej pola w przetwornikach o strukturze wielowarstwowej byłoby zagadnieniem bardzo skomplikowanym, a ponadto stwarzałoby trudności dodatkowe polegające przede wszystkim na konieczności posiadania informacji o rozkładzie wszystkich składowych pola na powierzchni części wtórnej. O wiele bardziej odpowiednie są metody rekurencyjne budowy równań opisujących pole wielowymiarowe, gdzie do wyznaczenia jego rozkładu w strukturze wielowarstwowej wystarcza tylko znajomość rozkładu gęstości liniowej warstwy prądowej wzbudzającej pole lub rozkładu składowej normalnej indukcji magnetycznej na powierzchni części wtórnej. W układzie współrzędnych prostokątnych związki rekurencyjne dla fali płaskiej na rozkład pola i impedancję układów warstwowych przy częstotliwościach radiowych podano w pracach Briechowskiego [1.1] oraz Waita [1.4], dla częstotliwości technicznych natomiast - w pracy autora [1.20]. Wzór rekurencyjny na impedancję według Briechowskiego oraz Waita zawiera również praca [1.3].

Krawczienko i Chimiuk [1.10, 1.27], podobnie jak Freeman [1.17, 1.18, 1.19], rozważają współśrodkowe cylindry przewodzące będące modelem maszyn elektrycznych z ekranami elektromagnetycznymi stosowanymi w różnych urządzeniach magneto hydrodynamicznych. W pracy [1.27] wyprowadzono związki rekurencyjne na impedancje przy różnych lokalizacjach (na zewnątrz lub wewnątrz struktury cylindrycznej) warstwy prądowej wzbudzającej pole, w pracy [1.10] natomiast podano algorytm obliczeń rozkładu pola elektromagnetycznego. Ujmując syntetycznie rozważania przedstawione w pracach [1.10, 1.17, 1.18, 1.19, 1.27], w celu rozwiązania



Rys. 1.2. Układ wielowarstwowy cylindrów przewodzących w polu wirującym [1.10, 1.27]

zagadnienia Dirichleta dla układu cylindrów współśrodkowych, wychodzi się z następującego równania dla pola elektrycznego :

$$r \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dE^{(i)}}{dr} \right] - (\alpha_i^2 r^2 + p^2) E^{(i)} = 0 \quad (1.3)$$

w którym  $\alpha_i$  - stała propagacji dla  $i$ -tej warstwy,  $p$  - liczba par biegunów warstwy prądowej. Wielkością wymuszającą pole jest obciążenie liniowe  $A \exp j(\omega t - p\varphi)$  warstwy prądowej np. otaczającej układ cylindrów - rys. 1.2. Wektor natężenia pola elektrycznego jest równoległy do osi układu  $z$ . Jeżeli wektory pola  $\vec{E}(r, \varphi, z, t) = \vec{E}(r) \exp j(\omega t - p\varphi)$ ,  $\vec{H}(r, \varphi, z, t) = \vec{H}(r) \exp j(\omega t - p\varphi)$  i wektor  $\vec{E}(r)$  posiada jedną składową  $E(r) = \{0, 0, E_z(r)\}$ , to na podstawie róż-

$$\text{wnań Maxwella} \quad \vec{H}(r) = \left\{ \frac{p}{r \omega \mu} E, \frac{1}{j \omega \mu} \frac{d}{dr} E, 0 \right\}.$$

Rozwiązując równanie (1.3) kolejno dla  $1, 2, \dots, i, \dots, k-1, k$ -tej warstwy otrzymuje się następującą zależność na wypadkową impedancję jednostkową układu cylindrów:

$$Z_k^{(k)} = Z_k \frac{I_p(\alpha_k r_k) + \eta_k K_p(\alpha_k r_k)}{I_p'(\alpha_k r_k) + \eta_k K_p'(\alpha_k r_k)} \quad (1.4)$$

w której

$$\eta_k = \frac{Z_k^{(k-1)} I_p'(\alpha_k r_{k-1}) - Z_{k-1} I_p(\alpha_k r_{k-1})}{Z_k K_p(\alpha_k r_{k-1}) - Z_{k-1}^{(k-1)} K_p(\alpha_k r_{k-1})}$$

$$Z_k = \alpha_k / \eta_k$$

$$I_p'(\alpha_i r_i) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{d}{dr} I_p(\alpha_i r_i)$$

$$K_p'(\alpha_i r_i) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{d}{dr} K_p(\alpha_i r_i)$$

przy czym  $I_p(\alpha_i r_i)$ ,  $K_p(\alpha_i r_i)$  - zmodyfikowane funkcje Bessela  $p$ -tego rzędu.

W oparciu o wyrażenie (1.4) na impedancję, uzyskuje się również zależności na składowe  $E_z(r, \varphi, t)$ ,  $H_r(r, \varphi, t)$ ,

$H_\varphi(r, \varphi, t)$  w cylindrycznej strukturze wielowarstwowej [1.10, 1.17, 1.27]:

- dla  $r_1 \leq r \leq r_k$

$$E_{z_k}^{(k)} = E_z^{(k)}(r_k) [K I_p(\alpha_k r) - I K_p(\alpha_k r)] \frac{1}{M_k} e^{j(\omega t - p\varphi)} \quad (1.5)$$

$$H_r^{(k)} = E_z^{(k)}(r_k) \frac{p}{r \omega \mu_k} [K I_p(\alpha_k r) - I K_p(\alpha_k r)] \frac{1}{M_k} \times e^{j(\omega t - p\varphi - \frac{\pi}{2})} \quad (1.6)$$

$$H_\varphi^{(k)} = E_z^{(k)}(r_k) \frac{\alpha_k}{\omega \mu_k} [K I'_p(\alpha_k r) - I K'_p(\alpha_k r)] \frac{1}{M_k} \times e^{j(\omega t - p\varphi - \frac{\pi}{2})} \quad (1.7)$$

$$M_k = K I_p(\alpha_k r_k) - I K_p(\alpha_k r_k)$$

$$K = K_p(\alpha_k r_{k-1}) - Z_{k-1}^{(k-1)} Z_k^{-1} K'_p(\alpha_k r_{k-1})$$

$$I = I_p(\alpha_k r_{k-1}) - Z_{k-1}^{(k-1)} Z_k^{-1} I'_p(\alpha_k r_{k-1})$$

- dla  $0 \leq r \leq r_1$

$$E_z^{(1)} = E_z^{(1)}(r_1) I_p(\alpha_1 r) \frac{1}{M_1} e^{j(\omega t - p\varphi)} \quad (1.8)$$

$$H_r^{(1)} = E_z^{(1)}(r_1) \frac{p}{r \omega \mu_1} I_p(\alpha_1 r) \frac{1}{M_1} e^{j(\omega t - p\varphi - \frac{\pi}{2})} \quad (1.9)$$

$$H_\varphi^{(1)} = E_z^{(1)}(r_1) \frac{1}{\omega \mu_1} I'_p(\alpha_1 r) \frac{1}{M_1} e^{j(\omega t - p\varphi - \frac{\pi}{2})} \quad (1.10)$$

$$M_1 = I_p(\alpha_1 r_1)$$

Składowa elektryczna na powierzchni układu cylindrów wynosi :

$$E_z^{(k)}(r_k) = A \frac{Z_k^{(k)} Z_k^0}{Z_k^{(k)} + Z_k^0} \left( \frac{r_0}{r_k} \right)^{p+1} \quad (1.11)$$

przy czym  $Z_k^0 = j \omega \mu_0 r_k / p$ , wymiary promieniowe  $r_0$ ,  $r_k$  według rys. 1.2.

Metoda Krawczyenki i Chimiuka jest słuszna tylko dla środowisk przewodzących oraz dla fali płaskiej padającej prostopadle na powierzchnie graniczne [1.10, 1.27], a więc ma ograniczony zakres zastosowań w analizie przetworników indukcyjnych.

W pracy [1.45] na bazie metody falowej [1.6, 1.40, 1.41, 1.42, 1.43] rozwinęto rozważania Freemana oraz Krawczyenki i Chimiuka przedstawiając opis zjawisk elektromagnetycznych w ekranach cylindrycznych wielowarstwowych stosowanych w generatorach synchronicznych z nadprzewodzącym uzwojeniem wzbudzenia za pomocą tzw. funkcji własnych ekranu ujmujących wpływ uwarstwienia na rozkład pola. Wyprowadzone wzory rekurencyjne dla fali płaskiej są słuszne zarówno dla środowisk przewodzących jak i nieprzewodzących.

W pracy autora [1.20] wyprowadzono proste związki rekurencyjne na rozkład pola jednowymiarowego oraz dwuwymiarowego w przetwornikach indukcyjnych o strukturze wielowarstwowej (układ płaski). Uwzględniono nieliniowe właściwości warstw ferromagnetycznych oraz dwie składowe pola magnetycznego w szczelinie powietrznej: przemieszczającą się zgodnie z ruchem części wtórnej oraz przeciwnie.

Boldea i Babescu [1.7] analizują liniowy hamulec wiroprowodowy o części pierwotnej zasilanej prądem stałym i o masywnej ferromagnetycznej części wtórnej, którą może być np. szyna kolejowa. Część wtórna o konduktywności  $\gamma$  jest podzielona na cienkie warstwy, których liczba może być dowolnie duża. Przenikalność magnetyczna zmienia się w sposób dyskretny w głąb części wtórnej, przy czym w każdej warstwie jej wartość jest stała. Pole elektromagnetyczne jest opisane rów-

nianiami :

- w szczelinie powietrznej

$$\nabla^2 A_x = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0 \quad (1.13)$$

- w  $i$ -tej warstwie części wtórnej

$$\nabla^2 A_{xi} = \delta \mu_i \frac{\partial A_{xi}}{\partial t} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial A_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yi}}{\partial y} = 0 \quad (1.15)$$

Punktem wyjścia jest rozkład przepływu części pierwotnej, na podstawie którego wyznaczono składową  $A_x$  wzdłuż podziałki biegunowej oraz składową  $A_y$  - wzdłuż rdzenia przetwornika potencjału magnetycznego wektorowego. Poprzestano na całkach ogólnych równań pola, które są następnie na podstawie warunków brzegowych obliczane numerycznie. Opracowano specjalny program obliczeń na maszynę cyfrową, który uwzględni nieliniowość przenikalności magnetycznej w głąb części wtórnej w ten sposób, że przenikalności kolejnych warstw - po przeprowadzeniu procesu iteracyjnego - odpowiadają przenikalnościom według krzywej magnesowania. Uwzględniono również harmoniczne przestrzenne rozkładu pola w kierunku współrzędnych  $x$  oraz  $y$ . Obliczona siła hamująca  $F_x$  dla różnych prędkości liniowych dobrze zgadza się z siłą zmierzoną na modelu.

Dalsze rozdziały zawierają oryginalną koncepcję autora ogólnej analizy polowej przetworników indukcyjnych w stanach ustalonych, przy założeniu wielowarstwowości ich struktury.

## 2. ŚRODOWISKO WIELOWARSTWOWE W POLU JEDNOWYMIAROWYM

### 2.1. Wyznaczenie rozkładu jednowymiarowego pola elektromagnetycznego

Niech w jednowymiarowym polu elektromagnetycznym znajduje się obiekt złożony z dowolnej liczby warstw ferromagnetycznych lub nieferromagnetycznych - rys. 2.1. Pole elektromagnetyczne przenika kolejne warstwy o grubościach skończonych i warstwa ostatnia, w której amplitudy fal zanikają do zera jest rozpatrywana jako półprzeźroczysta. Rozkład pola na powierzchni zewnętrznej obiektu jest znany, przy czym istnieje tylko składowa magnetyczna pola  $H_y$  w kierunku współrzędnej  $y$  oraz składowa elektryczna  $E_x$  w kierunku współrzędnej  $x$  (fala płaska spolaryzowana liniowo [1.6]). Zatem prądy w poszczególnych warstwach mogą płynąć tylko w kierunku współrzędnej  $x$ . Do wyznaczenia rozkładu pola przyjmuje się następujące założenia:

- obiekt składa się z dowolnej liczby  $i = k$  warstw, przy czym warstwą pierwszą jest półprzeźroczysta, następne kolejne liczby  $i > 1$  zaś - odpowiadają kolejnym warstwom o grubościach skończonych, w kierunku powierzchni zewnętrznej - rys. 2. 1 ;
- promień krzywizny obiektu jest duży w porównaniu z grubościami poszczególnych warstw oraz równoważną głębokością wnicania pola tak, że rozważania mogą być przeprowadzone w układzie współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$ , przy czym zwrot wektora Poyntinga  $\vec{\Pi}$  jest zgodny ze współrzędną  $z$  - rys. 2.1 ;
- zmiennosc wszystkich wielkości w czasie jest sinusoidalna;
- poszczególne warstwy są izotropowe.

Stała propagacji fal elektromagnetycznych w  $i$ -tej warstwie ujmuje nieliniową przenikalność magnetyczną i wynosi :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= [j\omega\mu_i(\gamma_i + j\omega\varepsilon_i)]^{\frac{1}{2}} = (j\omega\mu_0\mu_{ri}\Gamma_i)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (a_{Ri} + j a_{Xi}) k_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie współczynnik tłumienia

$$\begin{aligned} k_i &= (0,5\omega\mu_0\mu_{rsi})^{\frac{1}{2}} (\gamma_i + j\omega\varepsilon_i)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (w_i' + j w_i'')(0,5\omega\mu_0\mu_{rsi})^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

W ogólnym przypadku rozważana warstwa może być półprzewodnikiem, zatem trzeba posługiwać się "konduktywnością zespoloną" :

$$\Gamma_i = \gamma_i + j\omega\varepsilon_i = (w_i' + j w_i'')^2 \quad (2.3)$$

przy czym

$$w_i' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\gamma_i^2 + \omega^2\varepsilon_i^2)^{\frac{1}{2}} + \gamma_i \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$w_i'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\gamma_i^2 + \omega^2\varepsilon_i^2)^{\frac{1}{2}} - \gamma_i \right]^{\frac{1}{2}}$$

Dla warstw przewodzących  $w_i' \cong \gamma_i^{\frac{1}{2}}$ ,  $w_i'' \cong 0$ , dla warstw dielektrycznych natomiast  $w_i' \cong w_i'' = (0,5\omega\varepsilon_i)^{\frac{1}{2}}$ , gdyż  $\omega\varepsilon_i \ll \gamma_i$ .

Dla warstw ferromagnetycznych względna przenikalność magnetyczna jest wielkością zespoloną, tzn.:

$$\mu_{ri} = \mu_{rsi}(\mu_i' - j\mu_i'') \quad (2.4)$$

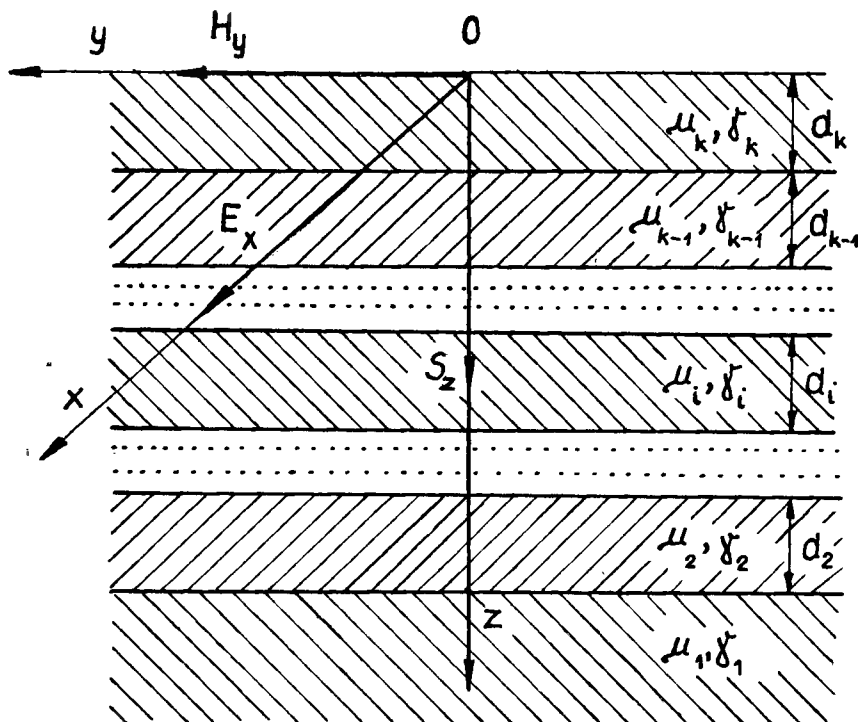
przy czym  $\mu_{rsi}$  - przenikalność względna modułowa na powierzchni warstwy od strony wnikania pola. Między współczynnikami  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$ ,  $\mu_i'$ ,  $\mu_i''$  uwzględniającymi właściwości nieliniowe oraz straty histerezy w warstwie ferromagnetycznej istnieją związki :

$$\mu_i' = a_{Ri} a_{Xi} \quad (2.4a)$$



$$\mu'' = 0,5 (a_{Ri}^2 - a_{Xi}^2) \quad (2.4b)$$

Dla warstwy paramagnetycznej lub diamagnetycznej  $a_{Ri} = a_{Xi} = 1$ , tzn. że  $\mu' = 1$ ,  $\mu'' = 0$ .



Rys. 2.1. Obiekt wielowarstwowy ograniczony jednostronnie w polu jednowymiarowym

Zgodnie z założeniami a), b), c), d) pole elektromagnetyczne jednowymiarowe jest opisane w poszczególnych warstwach następującymi ogólnymi równaniami falowymi :

$$\frac{\partial^2 H_{yi}^{(k)}}{\partial z^2} = \alpha_i^2 H_{yi}^{(k)} \quad (2.5)$$

$$E_{xi}^{(k)} = - \frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H_{yi}^{(k)}}{\partial z} \quad (2.6)$$

w którym indeksy  $i = 1, \dots, k-1, k$  oznaczają numer warstwy, indeksy  $(k)$  natomiast - ilość warstw, z których składa się obiekt. Równania (2.5), (2.6) opisują zatem pole w  $i$ -tej war-

stwie obiektu składającego się z  $k$  warstw. Rozwiązania ogólne równań (2.5) mają postać :

$$H_{yi}^{(k)}(z) = C_{1i}^{(k)} e^{-\alpha_i z} + C_{2i}^{(k)} e^{\alpha_i z} \quad (2.7)$$

$$E_{xi}^{(k)}(z) = \frac{\alpha_i}{\Gamma_i} [C_{1i}^{(k)} e^{-\alpha_i z} - C_{2i}^{(k)} e^{\alpha_i z}] \quad (2.8)$$

Wszystkie stałe  $C_{1i}^{(k)}$ ,  $C_{2i}^{(k)}$  mogą być wyznaczone na podstawie znanej wartości jednej ze składowych natężenia pola, np. magnetycznej na powierzchni zewnętrznej, tzn.:

- dla  $z = 0$

$$H_{ys} = H_y(0) = C_{1k}^{(k)} + C_{2k}^{(k)} \quad (2.9)$$

oraz warunków brzegowych:

- dla  $z = d_k$

$$C_{1k}^{(k)} e^{-\alpha_k d_k} + C_{2k}^{(k)} e^{\alpha_k d_k} = C_{1k-1}^{(k)} e^{-\alpha_{k-1} d_k} + C_{2k-1}^{(k)} e^{\alpha_{k-1} d_k} \quad (2.10.k)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} [C_{1k}^{(k)} e^{-\alpha_k d_k} - C_{2k}^{(k)} e^{\alpha_k d_k}] = \\ & = \frac{\alpha_{k-1}}{\Gamma_{k-1}} [C_{1k-1}^{(k)} e^{-\alpha_{k-1} d_k} - C_{2k-1}^{(k)} e^{\alpha_{k-1} d_k}] \quad (2.11.k) \end{aligned}$$

- dla  $z = \sum_{i=k-1}^k d_i$

$$\begin{aligned} & C_{1k-1}^{(k)} e^{-\alpha_{k-1} \sum_{i=k-1}^k d_i} + C_{2k-1}^{(k)} e^{\alpha_{k-1} \sum_{i=k-1}^k d_i} = \\ & = C_{1k-2}^{(k)} e^{-\alpha_{k-2} \sum_{i=k-1}^k d_i} + C_{2k-2}^{(k)} e^{\alpha_{k-2} \sum_{i=k-1}^k d_i} \quad (2.10.k-1) \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\Gamma_{k-1}} [C_{1k-1}^{(k)} e^{-\alpha_{k-1} \sum_{i=k-1}^k d_i} - C_{2k-1}^{(k)} e^{\alpha_{k-1} \sum_{i=k-1}^k d_i}] =$$

$$= \frac{\alpha_{k-2}}{\Gamma_{k-2}} \left[ C_{1k-2}^{(k)} e^{-\alpha_{k-2} \sum_{i=k-1}^k d_i} - C_{2k-2}^{(k)} e^{\alpha_{k-2} \sum_{i=k-1}^k d_i} \right] \quad (2.11.k-1)$$

.....

- dla  $z = \sum_{i=2}^k d_i$

$$C_{12}^{(k)} e^{-\alpha_2 \sum_{i=2}^k d_i} + C_{22}^{(k)} e^{\alpha_2 \sum_{i=2}^k d_i} =$$

$$= C_{11}^{(k)} e^{-\alpha_1 \sum_{i=2}^k d_i} + C_{21}^{(k)} e^{\alpha_1 \sum_{i=2}^k d_i} \quad (2.10.2)$$

$$\frac{\alpha_2}{\Gamma_2} \left[ C_{12}^{(k)} e^{-\alpha_2 \sum_{i=2}^k d_i} - C_{22}^{(k)} e^{\alpha_2 \sum_{i=2}^k d_i} \right] =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\Gamma_1} \left[ C_{11}^{(k)} e^{-\alpha_1 \sum_{i=2}^k d_i} - C_{21}^{(k)} e^{\alpha_1 \sum_{i=2}^k d_i} \right] \quad (2.11.2)$$

- dla  $z \rightarrow \infty$

$$C_{21}^{(k)} = 0 \quad (2.12)$$

Jeżeli rozpatrywane środowisko jest jednowarstwowe ( $i=1$ ), to stałe  $C_{11}^{(1)}$ ,  $C_{21}^{(1)}$  zgodnie z warunkami brzegowymi (2.9),

(2.12) są równe :

$$C_{11}^{(1)} = H_y^{(1)}(0) = H_y(0) \quad (2.13)$$

$$C_{21}^{(1)} = 0 \quad (2.14)$$

Dla środowiska wielowarstwowego ( $i > 1$ ) natomiast, zgodnie z warunkami (2.9), (2.10.k) ÷ (2.11.2), (2.12), stałe określone są przez następujące wyrażenia:

- jeżeli  $i = 2$

$$C_{12}^{(2)} = \frac{1}{2 M_2(2)} \left\{ \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} [C_{11}^{(1)} + C_{21}^{(1)}] + \frac{\alpha_1}{\Gamma_1} [C_{11}^{(1)} + \right.$$

$$- C_{21}^{(1)} \Big] \Big\} H_y(0) e^{\alpha_2 d_2} ,$$

$$C_{22}^{(2)} = \frac{1}{2 M_2^{(2)}} \left\{ \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} [C_{11}^{(1)} + C_{21}^{(1)}] - \frac{\alpha_1}{\Gamma_1} [C_{11}^{(1)} + C_{21}^{(1)}] \right\} H_y(0) e^{-\alpha_2 d_2}$$

$$C_{11}^{(2)} = \frac{1}{M_2^{(2)}} \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} C_{11}^{(1)} H_y(0) e^{\alpha_2 d_2}$$

$$C_{21}^{(2)} = 0$$

gdzie

$$M_2^{(2)} = \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} [C_{11}^{(1)} + C_{21}^{(1)}] \cosh \alpha_2 d_2 + \frac{\alpha_1}{\Gamma_1} [C_{11}^{(1)} + C_{21}^{(1)}] - C_{21}^{(1)} \sinh \alpha_2 d_2$$

- jeżeli  $i = 3$

$$C_{13}^{(3)} = \frac{1}{2 M_3^{(3)}} \left\{ \frac{\alpha_3}{\Gamma_3} [C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}] + \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} [C_{12}^{(2)} - C_{22}^{(2)}] \right\} \times H_y(0) e^{\alpha_3 d_3}$$

$$C_{23}^{(3)} = \frac{1}{2 M_3^{(3)}} \left\{ \frac{\alpha_3}{\Gamma_3} [C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}] - \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} [C_{12}^{(2)} - C_{22}^{(2)}] \right\} \times H_y(0) e^{-\alpha_3 d_3}$$

$$C_{12}^{(3)} = \frac{1}{M_3^{(3)}} \frac{\alpha_3}{\Gamma_3} C_{12}^{(2)} H_y(0) e^{\alpha_3 d_3}$$

$$C_{22}^{(3)} = \frac{1}{M_3^{(3)}} \frac{\alpha_3}{\Gamma_3} C_{22}^{(2)} H_y(0) e^{-\alpha_3 d_3}$$

$$C_{11}^{(3)} = \frac{1}{M_3^{(3)}} \frac{\alpha_3}{\Gamma_3} C_{11}^{(2)} H_y(0) e^{\alpha_1 d_3}$$

$$C_{21}^{(3)} = 0$$

gdzie

$$M_3^{(3)} = \frac{\alpha_3}{\Gamma_3} [C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}] \cosh \alpha_3 d_3 + \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} [C_{12}^{(2)} - C_{22}^{(2)}] \times \sinh \alpha_3 d_3$$

.....

- jeżeli  $i = k$

$$C_{1k}^{(k)} = \frac{1}{2 M_k^{(k)}} \left\{ \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} [C_{1k-1}^{(k-1)} + C_{2k-1}^{(k-1)}] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_{k-1}}{\Gamma_{k-1}} [C_{1k-1}^{(k-1)} - C_{2k-1}^{(k-1)}] \right\} H_y(0) e^{\alpha_k d_k} \quad (2.15.k)$$

$$C_{2k}^{(k)} = \frac{1}{2 M_k^{(k)}} \left\{ \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} [C_{1k-1}^{(k-1)} + C_{2k-1}^{(k-1)}] + \right. \\ \left. - \frac{\alpha_{k-1}}{\Gamma_{k-1}} [C_{1k-1}^{(k-1)} - C_{2k-1}^{(k-1)}] \right\} H_y(0) e^{-\alpha_k d_k} \quad (2.16.k)$$

$$C_{1k-1}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} C_{1k-1}^{(k-1)} H_y(0) e^{\alpha_{k-1} d_k} \quad (2.15.k-1)$$

$$C_{2k-1}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} C_{2k-1}^{(k-1)} H_y(0) e^{-\alpha_{k-1} d_k} \quad (2.16.k-1)$$

$$C_{1k-2}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} C_{1k-2}^{(k-1)}(0) e^{\alpha_{k-2} d_k} \quad (2.15.k-2)$$

$$C_{2k-2}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} C_{2k-2}^{(k-1)} H_y(0) e^{-\alpha_{k-2} d_k} \quad (2.16.k-2)$$

.....

$$C_{11}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} C_{11}^{(k-1)} H_y(0) e^{\alpha_1 d_k} \quad (2.15.1)$$

$$C_{21}^{(k)} = 0$$

gdzie

$$M_k^{(k)} = \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} [C_{1k-1}^{(k-1)} + C_{2k-1}^{(k-1)}] \cosh \alpha_k d_k + \\ + \frac{\alpha_{k-1}}{\Gamma_{k-1}} [C_{1k-1}^{(k-1)} - C_{2k-1}^{(k-1)}] \sinh \alpha_k d_k \quad (2.17)$$

W powyższych zależnościach rekurencyjnych (2.15.k) ÷ (2.17) liczba naturalna  $k \neq 1$ .

Sumy i różnice stałych  $C_{1i}^{(k-1)}$ ,  $C_{2i}^{(k-1)}$  dla środowiska składającego się z  $k-1$  warstw, zgodnie z równaniami (2.7),

(2.8) wynoszą:

$$C_{1i}^{(k-1)} e^{-\alpha_i z} + C_{2i}^{(k-1)} e^{\alpha_i z} = H_{yi}^{(k-1)}(z) \quad (2.18)$$

$$\frac{\alpha_i}{\Gamma_i} [C_{1i}^{(k-1)} e^{-\alpha_i z} - C_{2i}^{(k-1)} e^{\alpha_i z}] = E_{xi}^{(k-1)}(z) \quad (2.19)$$

Po podstawieniu stałych (2.15.k) ÷ (2.16.1) do równań (2.7), (2.8) i uwzględnieniu zależności (2.18), (2.19), rozwiązania równań rozkładu pola jednowymiarowego mają postać:

- dla  $0 \leq z \leq d_k$

$$H_{yk}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \left[ \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} H_{yk-1}^{(k-1)}(0) \cosh \alpha_k (z - d_k) + E_{xk-1}^{(k-1)}(0) \sinh \alpha_k (z - d_k) \right] H_y(0) \quad (2.20.k)$$

$$E_{xk}^{(k)} = \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} \frac{1}{M_k^{(k)}} \left[ E_{xk-1}^{(k-1)}(0) \cosh \alpha_k (z - d_k) + H_{yk-1}^{(k-1)}(0) \sinh \alpha_k (z - d_k) \right] H_y(0) \quad (2.21.k)$$

- dla  $d_k \leq z \leq \sum_{i=k-1}^k d_i$

$$H_{yk-1}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} H_{yk-1}^{(k-1)} \left( z - \sum_{i=k-1}^k d_i \right) H_y(0) \quad (2.20.k-1)$$

$$E_{xk-1}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} E_{xk-1}^{(k-1)} \left( z - \sum_{i=k-1}^k d_i \right) H_y(0) \quad (2.21.k-1)$$

- dla  $\sum_{i=k-1}^k d_i \leq z \leq \sum_{i=k-2}^k d_i$

$$H_{yk-2}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} H_{yk-2}^{(k-1)} \left( z - \sum_{i=k-2}^k d_i \right) H_y(0) \quad (2.20.k-2)$$

$$E_{x_{k-2}}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} E_{y_{k-2}}^{(k-1)} (z - \sum_{i=k-2}^k d_i) H_y(0) \quad (2.21.k-2)$$

.....

- dla  $z \geq \sum_{i=2}^k d_i$

$$H_{y1}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} H_{y1}^{(k-1)} (z - \sum_{i=2}^k d_i) H_y(0) \quad (2.20.1)$$

$$E_{x1}^{(k)} = \frac{1}{M_k^{(k)}} \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} E_{y1}^{(k-1)} (z - \sum_{i=2}^k d_i) H_y(0) \quad (2.21.1)$$

w których

$$M_k^{(k)} = \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} H_{y_{k-1}}^{(k-1)}(0) \cosh \alpha_k d_k + E_{x_{k-1}}^{(k-1)}(0) \sinh \alpha_k d_k \quad (2.22)$$

Zależności rekurencyjne (2.20.k) ÷ (2.21.1) łatwo jest udowodnić stosując zasadę indukcji:

Dowód indukcyjny

1° Dla środowiska jednowarstwowego ( $i=1$ ) przyjmując  $\sum_{i=2}^k d_i = 0$ , z równań (2.20.1), (2.21.1) otrzymuje się

$$H_{y1}^{(1)} = H_y^{(1)}(0) e^{-\alpha_1 z} \quad (2.23)$$

$$E_{x1}^{(1)} = E_{x1}^{(1)}(0) e^{-\alpha_1 z} = \frac{\alpha_1}{\Gamma_1} H_{y1}^{(1)}(0) e^{-\alpha_1 z} \quad (2.24)$$

co jest prawdziwe i ogólnie znane.

2° Jeżeli dla dowolnej liczby naturalnej  $i$  równania (2.20.k) ÷ (2.21.1) są spełnione, to są spełnione dla  $i+1$  jak i dla każdej liczby naturalnej.

Tak więc niech np. równania (2.20.k) i (2.21.k) będą spełnione dla dowolnej liczby naturalnej  $i$ , tzn.:

$$H_{yi}^{(i)} = \frac{1}{M_i^{(i)}} \left[ \frac{\alpha_i}{\Gamma_i} H_{yi-1}^{(i-1)}(0) \cosh \alpha_i (z - d_i) - E_{xi-1}^{(i-1)}(0) \times \right. \\ \left. \times \sinh \alpha_i (z - d_i) \right] H_y(0) \quad (2.25)$$

$$E_{xi}^{(i)} = \frac{\alpha_i}{\Gamma_i} \frac{1}{M_i^{(i)}} \left[ E_{xi-1}^{(i-1)}(0) \cosh \alpha_i (z - d_i) - \frac{\alpha_i}{\Gamma_i} H_{yi-1}^{(i-1)}(0) \times \right. \\ \left. \times \sinh \alpha_i (z - d_i) \right] H_y(0) \quad (2.26)$$

Dla  $i+1$  otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 H_{y_i}^{(i+1)} &= \frac{1}{M_i^{(i)}} \left[ \frac{\alpha_i}{\Gamma_i} H_{y_{i-1}}^{(i-1)}(0) \cosh \alpha_i \left( z - \sum_i^{i+1} d_i \right) \right. \\
 &\quad \left. - E_{x_{i-1}}^{(i-1)}(0) \sinh \alpha_i \left( z - \sum_i^{i+1} d_i \right) \right] H_y(0) = \\
 &= H_{y_i}^{(i+1)} \left( z - \sum_i^{i+1} d_i \right) = \frac{1}{M_{i+1}^{(i+1)}} \frac{\alpha_{i+1}}{\Gamma_{i+1}} H_{y_i}^{(i)} \left( z - \sum_i^{i+1} d_i \right) \times \\
 &\quad \times H_y(0) \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

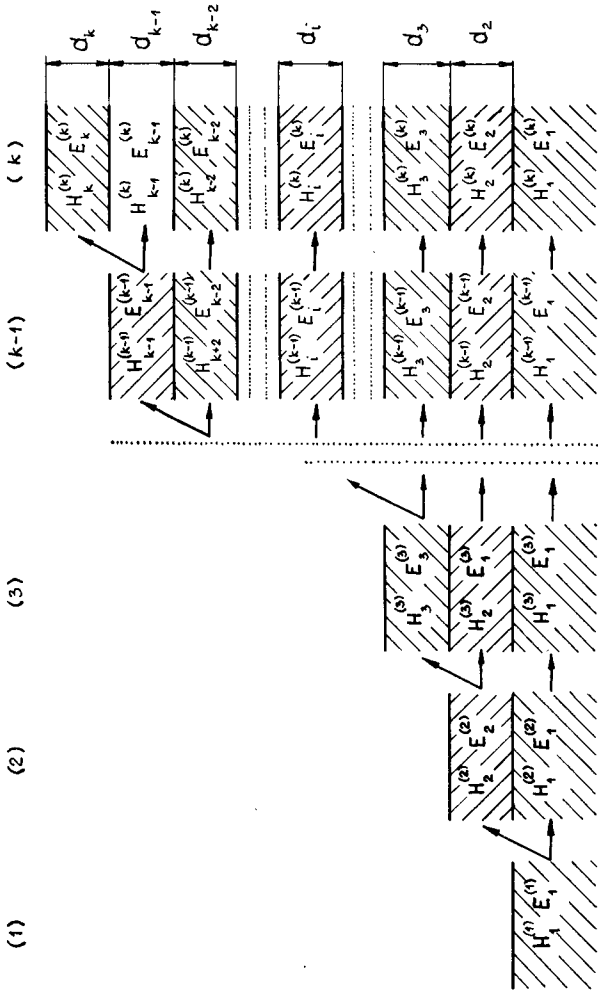
$$\begin{aligned}
 E_{x_i}^{(i+1)} &= \frac{\alpha_i}{\Gamma_i} \frac{1}{M_i^{(i)}} \left[ E_{x_{i-1}}^{(i-1)}(0) \cosh \alpha_i \left( z - \sum_i^{i+1} d_i \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha_i}{\Gamma_i} H_{y_{i-1}}^{(i-1)}(0) \sinh \alpha_i \left( z - \sum_i^{i+1} d_i \right) \right] H_y(0) = \\
 &= E_{x_i}^{(i+1)} \left( z - \sum_i^{i+1} d_i \right) = \frac{1}{M_{i+1}^{(i+1)}} \frac{\alpha_{i+1}}{\Gamma_{i+1}} E_{x_i}^{(i)} \left( z - \sum_i^{i+1} d_i \right) \times \\
 &\quad \times H_y(0) \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

W środowisku złożonym z  $i+1$  warstw, równania (2.27), (2.28) opisują rozkład pola w  $i$ -tej warstwie leżącej pod warstwą  $i+1$ , c.n.u.

Analogicznie można udowodnić słuszność pozostałych równań (2.20.k-1) ÷ (2.21.1) opisujących rozkład pola dla współrzędnej  $z \geq d_k$ .

Algorytm budowy równań rekurencyjnych rozkładu pola w środowisku wielowarstwowym jest przedstawiony graficznie na rys.2.2. Punktem wyjścia są równania (2.23), (2.24) opisujące rozkład pola w półprzestrzeni jednorodnej. Kolejno buduje się równania dla obiektu składającego się z coraz to większej liczby warstw, aż do  $i = k$ . Pole elektromagnetyczne jak również impedancja i straty mocy w środowisku dwuwarstwowym są szczegółowo rozpatrywane w szeregu pracach.np.: [ 1.6, 2.5, 2.8, 2.18 ] .





Rys. 2.2. Algorytm budowy równań rekurencyjnych rozkładu pola w środowisku wielowarstwowym

## 2.2. Impedancja i straty mocy elektromagnetycznej

Na podstawie równań (2.20.k), (2.21.k) impedancja jednostkowa widziana z powierzchni zewnętrznej wynosi:

$$z_k^{(k)} = \frac{E_{xk}^{(k)}(0)}{H_{yk}^{(k)}(0)} = \frac{\alpha_k z_{k-1}^{(k-1)} \cosh \alpha_k d_k + \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} \sinh \alpha_k d_k}{\frac{\alpha_k}{\Gamma_k} \cosh \alpha_k d_k + z_{k-1}^{(k-1)} \sinh \alpha_k d_k} \quad (2.29)$$

W celu przystosowania do obliczeń praktycznych lepiej jest zapisać zależność (2.29) w postaci następującego iloczynu:

$$z_k^{(k)} = z_1^{(1)} \left[ \frac{z_2^{(2)}}{z_1^{(1)}} \right] \left[ \frac{z_3^{(3)}}{z_2^{(2)}} \right] \cdot \dots \cdot \left[ \frac{z_{k-1}^{(k-1)}}{z_{k-2}^{(k-2)}} \right] \left[ \frac{z_k^{(k)}}{z_{k-1}^{(k-1)}} \right] \quad (2.30)$$

w którym

$$z_1^{(1)} = \frac{\alpha_1}{\Gamma_1} \quad (2.31.1)$$

$$\frac{z_2^{(2)}}{z_1^{(1)}} = \frac{c \cosh \alpha_2 d_2 + \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} \frac{\Gamma_1}{\alpha_1} \sinh \alpha_2 d_2}{\cosh \alpha_2 d_2 + \frac{\alpha_2}{\Gamma_2} \frac{\Gamma_1}{\alpha_1} \sinh \alpha_2 d_2} \quad (2.31.2)$$

$$\frac{z_3^{(3)}}{z_2^{(2)}} = \frac{\cosh \alpha_3 d_3 + \frac{\alpha_3}{\Gamma_3} \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} \sinh \alpha_3 d_3}{\cosh \alpha_3 d_3 + \frac{\alpha_3}{\Gamma_3} \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} \sinh \alpha_3 d_3} \quad (2.31.3)$$

.....

$$\frac{z_k^{(k)}}{z_{k-1}^{(k-1)}} = \frac{\cosh \alpha_k d_k + \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} \frac{\Gamma_{k-1}}{\alpha_{k-1}} \sinh \alpha_k d_k}{\cosh \alpha_k d_k + \frac{\alpha_k}{\Gamma_k} \frac{\Gamma_{k-1}}{\alpha_{k-1}} \sinh \alpha_k d_k} \quad (2.31.k)$$

Stosunek  $\alpha_i / \Gamma_i$  jest równy

$$\frac{\alpha_i}{\Gamma_i} = (a_{Ri} + j a_{Xi}) \frac{1}{w_i' + j w_i''} (0,5 \omega \mu_0 \mu_{rsi})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[ (a_{Ri} w_i' + a_{Xi} w_i'') + j(a_{Xi} w_i' - a_{Ri} w_i'') \right] (0,5 \omega \mu_0 \mu_{rsi})^{\frac{1}{2}} \times \left[ (w_i')^2 + (w_i'')^2 \right]^{-1} \quad (2.32)$$

przy czym:

- dla przewodników

$$\frac{\alpha_i}{\Gamma_i} \cong \frac{\alpha_i}{\gamma_i} = (a_{Ri} + j a_{Xi}) (0,5 \omega \mu_0 \mu_{rsi} / \gamma_i)^{\frac{1}{2}}$$

- dla dielektryków

$$\frac{\alpha_i}{\Gamma_i} \cong (\mu_0 / \epsilon_0 \epsilon_{ri})^{\frac{1}{2}}$$

Straty mocy na jednostkę powierzchni  $x, y$  w środowisku złożonym z  $k$  warstw, obliczone za pomocą wektora Poyntinga wynoszą:

$$\begin{aligned} \Pi_{zk}^{(k)} &= p_k^{(k)} + j q_k^{(k)} = 0,5 E_{xk}^{(k)}(0) H_{yk}^{*(k)}(0) = \\ &= z_1^{(1)} \left[ \frac{z_2^{(2)}}{z_1^{(1)}} \right] \left[ \frac{z_3^{(3)}}{z_2^{(2)}} \right] \cdot \dots \cdot \left[ \frac{z_{k-1}^{(k-1)}}{z_{k-2}^{(k-2)}} \right] \left[ \frac{z_k^{(k)}}{z_{k-1}^{(k-1)}} \right] \times \\ &\quad \times \frac{|H_{ys}|^2}{2} \quad (2.33) \end{aligned}$$

### 2.3. Uwzględnienie zmiennej przenikalności magnetycznej oraz strat histerezowych w warstwach ferromagnetycznych o grubości skończonej

#### 2.3.1. Sformułowanie problemu

Jeżeli środowisko jest liniowe oraz nie występują w nim straty histerezowe, to zespolona przenikalność magnetyczna (2.4) jest stała. Współczynniki  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  w wyrażeniach (2.1), (2.4a), (2.4b) są natomiast równe jedności. Uwzględnienie zmiennej przenikalności magnetycznej oraz strat histerezowych w środowisku ferromagnetycznym nawet dla pola jednowymiarowego jest zagadnieniem trudnym. Z pomocą przychodzą tu metody numeryczne, np. prace Gillota i Calverta [2.21], Za-

krzewskiego [2.42, 2.43, 2.44, 2.45] , Lima i Hammonda [2.33], Liese'ego [2.32] oraz modelowanie za pomocą obwodów siatkowych [2.1, 2.11, 2.16, 2.35] . Spośród współczesnych metod numerycznych najbardziej efektywnymi okazują się metoda elementów skończonych [2.2, 2.12] oraz metoda siatek [2.7, 2.30, 2.32, 2.43] . Jednak w rozwiązywaniu problemów technicznych - mimo nieuniknionych uproszczeń natury fizycznej - nadal szeroko stosowane są metody analityczne ujęcia nieliniowości ferromagnetyków. Uwarunkowane jest to wynikami końcowymi i ich aplikacją : uzyskane współczynniki poprawkowe pozwalają na bezpośrednie oszacowanie wpływu nieliniowości na wartość np. strat mocy.

Już do dobrych wyników [2.6] w obliczeniach impedancji i strat mocy dochodzi się przyjmując w wyrażeniu (2.4) , że

$$\mu_i' = \cos \psi_{si} \quad , \quad \mu_i'' = \sin \psi_{si} \quad (2.34)$$

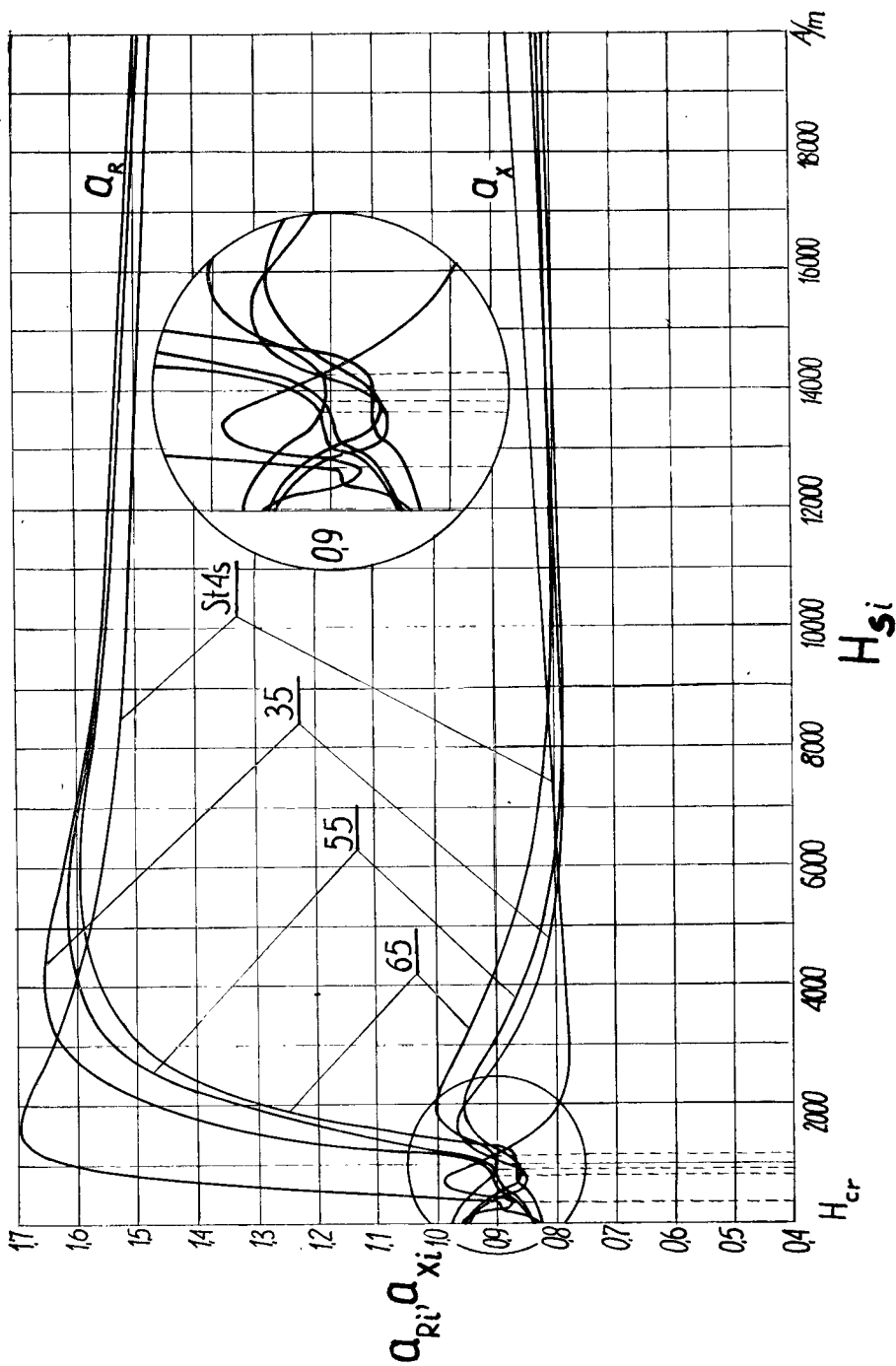
przy czym  $\psi_{si}$  - kąt wyrażający straty histerezowe przy eliptycznej pętli przemagnesowywania [2.5] dla powierzchniowego natężenia pola magnetycznego

Jeżeli uwzględnić zmienność  $\mu_{r si}$  oraz  $\psi_{si}$  w głąb środowiska ferromagnetycznego, to

$$\mu' - j\mu'' \neq \exp(-j\psi_{si}) \quad (2.35)$$

Przenikalności  $\mu_i'$  ,  $\mu_i''$  dla danego rodzaju ferromagnetyka najprościej jest wyznaczyć doświadczalnie [2.25] .

Istnieje wiele różnych metod analitycznych uwzględniających nieliniowość masywnych ciał ferromagnetycznych [1.6, 2.4, 2.5, 2.6, 2.13, 2.14, 2.15, 2.17, 2.19, 2.20, 2.22, 2.23, 2.24, 2.26, 2.27, 2.28, 2.30, 2.31, 2.37] . W odniesieniu do półprzestrzeni ferromagnetycznej, na którą pada fala płaska stosunkowo najlepiej uzasadniona teoretycznie jest metoda Nejmana [2.5], wg której z wystarczającą do celów praktycznych dokładnością, zmienną przenikalność magnetyczną i straty histerezowe można uwzględnić przyjmując  $a_{Ri} = 1,4 \div 1,5$  ,  $a_{Xi} = 0,8 \div 0,9$  , tzn.  $\mu_i' = 1,12 \div 1,35$  ,  $\mu_i'' = 0,57 \div 0,81$  . Metoda Nejmana jest słuszna tylko dla powierzchniowych natężeń pól magnetycznych dużo większych od natężenia krytycznego  $H_s \gg H_{cr}$  lub nie



Rys. 2.3. Współczynniki linearyzujące  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  dla różnych gatunków stali konstrukcyjnych produkcji krajowej (St 45 - stal węglowa zwykłej jakości, gatunki 35, 55, 65 - wyższej jakości)

większych od natężenia krytycznego  $H_s \leq H_{cr}$ , przy czym pod pojęciem natężenia krytycznego  $H_{cr}$  rozumie się natężenie odpowiadające przenikalności magnetycznej maksymalnej. Zakres stosowalności tej metody jest jednak ograniczony m.in. w obliczeniach charakterystyk obciążenia przetworników indukcyjnych, kiedy natężenie pola magnetycznego na powierzchni ciała ferromagnetycznego (rdzenia części wtórnej) zmienia się w przedziale obejmującym wartość krytyczną [2.19].

Metoda autora [2.19, 2.20], słuszna również dla półprzestrzeni w polu jednowymiarowym jest bardziej dokładna.

Według [2.19, 2.20] współczynniki  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  nie są stałe, lecz zależą od natężenia pola magnetycznego na powierzchni półprzestrzeni. Wartości tych współczynników dla kilku gatunków stali konstrukcyjnych produkcji krajowej przedstawiają wykresy na rys. 2.3. Znając współczynniki  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  oraz charakterystykę magnesowania  $\mu_{rsi}(H_{si})$  można wyznaczyć zespoloną przenikalność magnetyczną (2.4) linearyzującą środowisko w głąb. Zależności względnej przenikalności  $\mu_{rs}$  oraz przenikalności  $\mu'$ ,  $\mu''$  od natężenia pola  $H_s$  są podane na rys. 2.4a, rys. 2.4b, rys. 2.4c, rys. 2.4d.

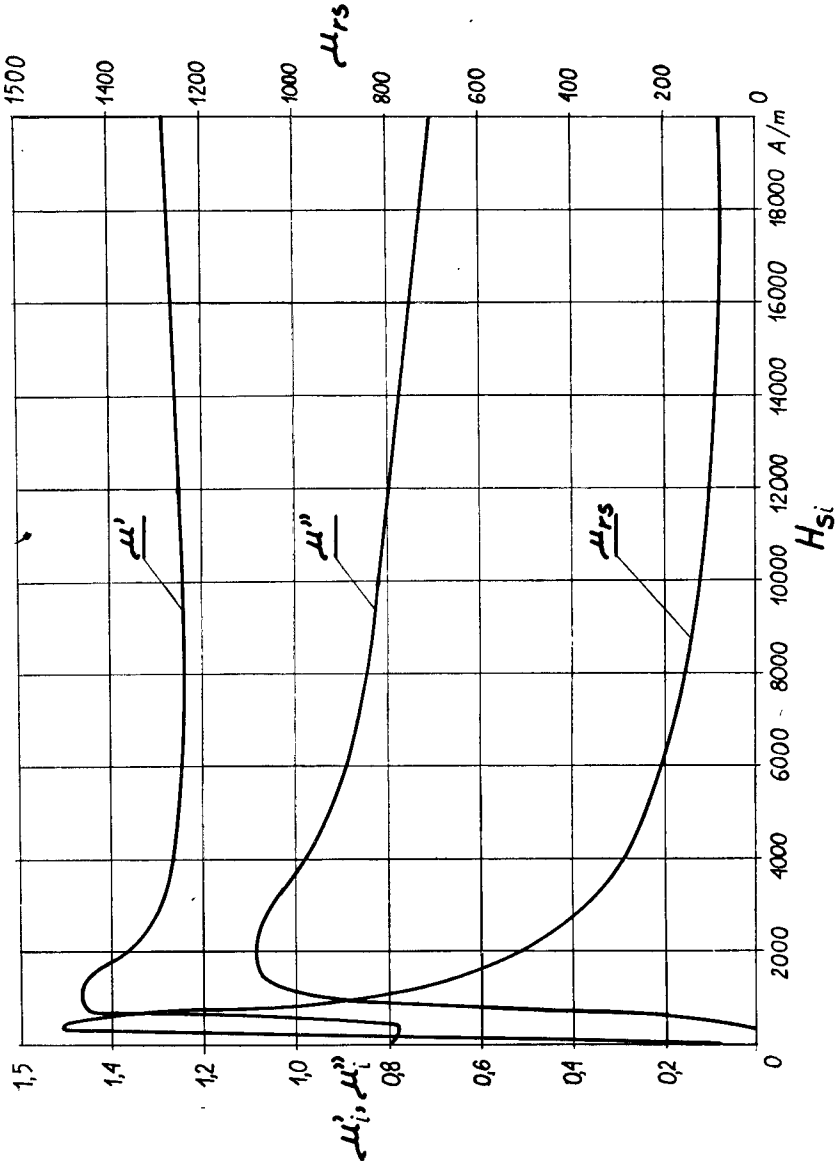
W odniesieniu do obiektu o strukturze wielowarstwowej, zespolony współczynnik  $\alpha_i$  - zależność (2.1) oraz zespoloną przenikalność  $\mu_{ri}$  - zależność (2.4) można wyznaczyć według metody [2.19, 2.20] tylko dla warstwy pierwszej, tzn. półprzestrzeni ( $i = 1$ ). W celu uwzględnienia zmienności  $\mu_{ri}$  oraz  $\psi_i$  w warstwach o grubościach skończonych ( $l_i > 1$ ) zostanie rozpatrzona płyta ferromagnetyczna o grubości  $d_i$  tworząca powierzchnię graniczną z półprzestrzenią nieferromagnetyczną, na którą od strony powierzchni zewnętrznej pada fala płaska - rys. 2.5.

W pracach autora [2.19, 2.20] wyprowadzono następujące zależności na głębokości wnikania pola elektromagnetycznego do przewodzącej półprzestrzeni ferromagnetycznej:

- głębokość, na której natężenie pola magnetycznego osiąga

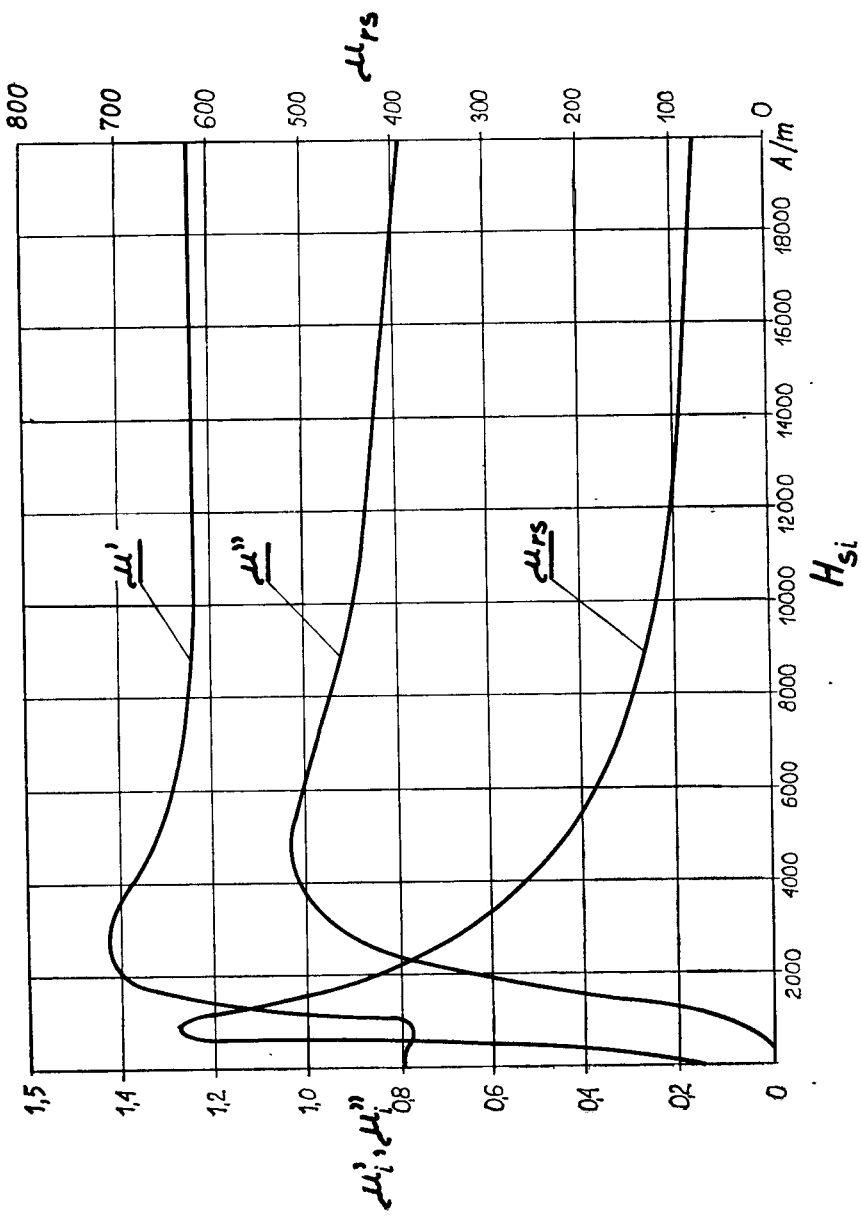
wartość krytyczną  $H_{cr}$  ( $H_{si} > H_{cr}$ )

$$z_{mi} = (t_1/k_i) \left[ (4 - m_1) / 2m_1 \cos \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right]^x$$



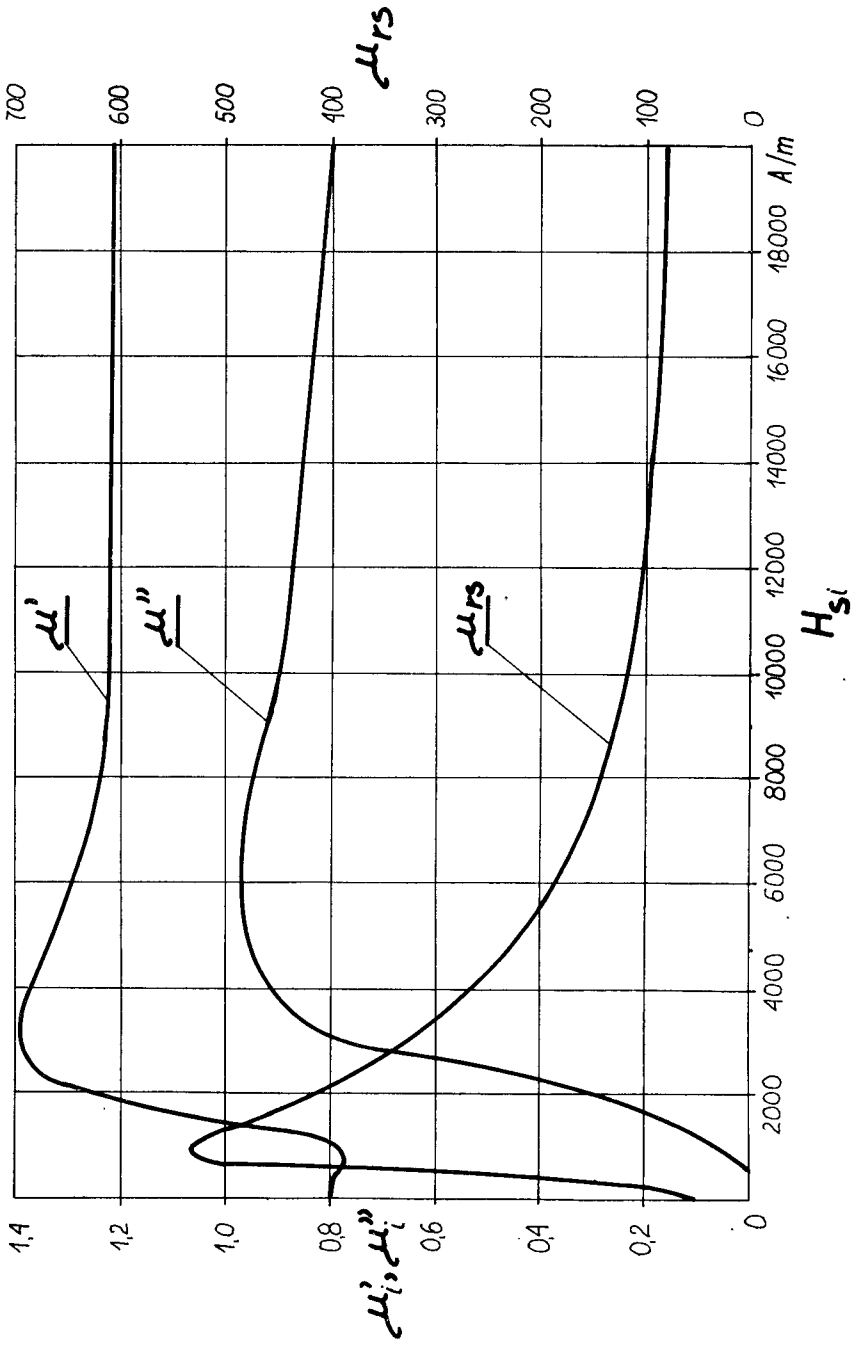
Rys. 2.4a. Przenikalności zastępcze  $\mu$ ,  $\mu''$  oraz przenikalność względną stali konstrukcyjnej St 4s produkcji krajowej

4a)

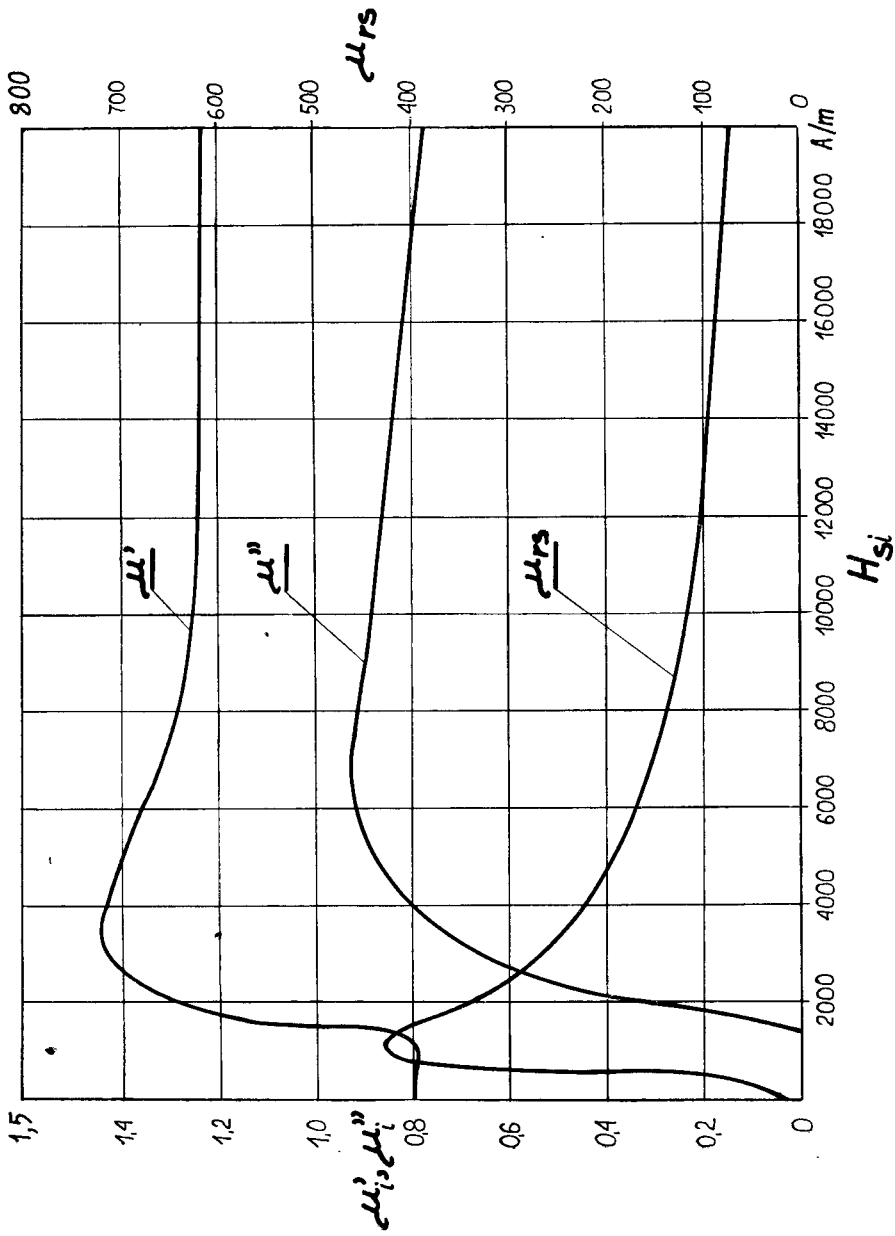


Rys. 2.4b. Przenikalności zastępcze  $\mu'$ ,  $\mu''$  oraz przenikalność względna stali konstrukcyjnej gatunku 35 produkcji krajowej

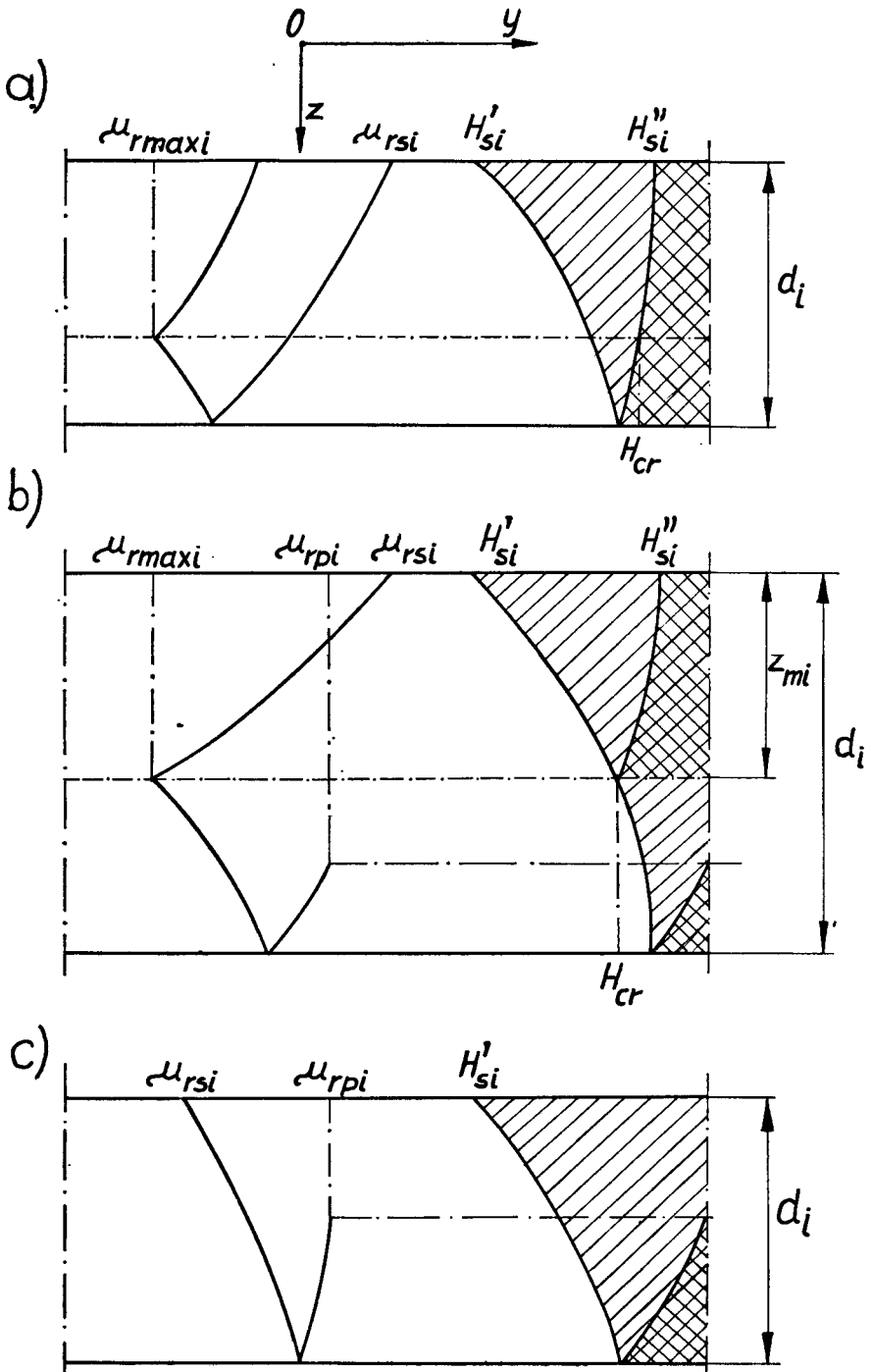




Rys. 2.4c. Przenikalności zastępcze  $\mu'$ ,  $\mu''$  oraz przenikalność względna  $\mu_{RS}$  dla stali konstrukcyjnej gatunku 55 produkcyjnej krajowej.



Rys. 2.4d. Przenikalności zastępcze  $\mu'$ ,  $\mu''$  oraz przenikalność względna  $\mu_{rs}$  stali konstrukcyjnej gatunku 65 produkcji krajowej



Rys. 2.5. Płyta ferromagnetyczna o grubości skończonej w polu jednowymiarowym; a)  $d_i \leq z_{mi}$ ; b)  $z_{mi} + z_{pi\max} \geq d_i > z_{mi}$ ; c)  $d_i \leq z_{pi}$

$$x \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{m_1}{4 - m_1} \right)^2 \cos \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.36)$$

- przedział głębokości, w którym natężenie pola magnetycznego maleje od wartości krytycznej do zera ( $H_{si} > H_{cr}$ )

$$z_{pmaxi} = \frac{t_{2max}}{k_{maxi}} \frac{4 - n}{2 n \cos \frac{\psi_{maxi}}{1 - t_{2max}}} x \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{n}{4 - n} \right)^2 \cos \frac{\psi_{maxi}}{1 - t_{2max}} \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \frac{\psi_{maxi}}{1 - t_{2max}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

- głębokość, na której natężenie pola magnetycznego maleje od wartości powierzchniowej do zera ( $H_{si} \leq H_{cr}$ )

$$z_{pi} = \frac{t_2}{k_i} \frac{4 - n}{2 n \cos \frac{\psi_{si}}{1 - t_{2max}}} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{n}{4 - n} \right)^2 \cos \frac{\psi_{si}}{1 - t_2} \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

gdzie:

$$k_i = (0,5 \omega \mu_o \mu_{rsi} \gamma_i)^{\frac{1}{2}} \quad (2.39a)$$

$$k_{maxi} = (0,5 \omega \mu_o \mu_{rmaxi} \gamma_i)^{\frac{1}{2}} \quad (2.39b)$$

$$t_1 = 1 - (\mu_{rsi} / \mu_{rmaxi})^{\frac{1}{2}} \cong 1 - (\psi_{si} / \psi_{maxi})^{\frac{1}{2}} \quad (2.40a)$$

$$t_{2max} = 1 - (\mu_{rmaxi} / \mu_{rpi})^{\frac{1}{2}} \cong 1 - (\psi_{maxi} / \psi_{pi})^{\frac{1}{2}} \quad (2.40b)$$

$$t_2 = 1 - (\mu_{rsi} / \mu_{rpi})^{\frac{1}{2}} \cong 1 - (\psi_{si} / \psi_{pi})^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

Charakterystyki magnesowania ciał ferromagnetycznych

$\mu_r(H)$  oraz  $\psi(H)$  wyrażono analitycznie równaniem paraboli. Np. dla przenikalności magnetycznej otrzymuje się:

- w zakresie pól silnych ( $H_s > H_{cr}$ )

$$\mu_r = a_{\mu} H^{-m_1} \quad (2.42)$$

- w zakresie pól słabych ( $H_s \leq H_{cr}$ )

$$\mu_r = b_{\mu} H^{-m_2} \quad (2.43)$$

gdzie  $m_1 > 0$ ,  $m_2 < 0$ ,  $a_{\mu}$ ,  $b_{\mu}$  - stałe.

Ponadto ze względu na punkt przegięcia charakterystyki magnesowania  $\mu_r(H)$  w zakresie pól słabych, bardziej celowe jest przyjęcie aproksymacji prostoliniowej :

$$\mu_r = c_{\mu} H^{-n} \quad (2.44)$$

gdzie  $n = -1$  dla wszystkich materiałów ferromagnetycznych,  $c_{\mu}$  - stała. Wartości parametrów  $m_1, m_2, n$  oraz stałych  $a_{\mu}, b_{\mu}, c_{\mu}$  dla kilku gatunków stali konstrukcyjnych produkcji krajowej podano w pracach [2.19, 2.20] .

Należy rozpatrzyć oddzielnie następujące przypadki wnikania pola elektromagnetycznego, kiedy grubość płyty ferromagnetycznej przyjmuje następujące wartości :

I)  $d_i \leq z_{mi}$  (rys. 2.5a),  $z_{mi} + z_{pmaxi} \geq d_i > z_{mi}$  (rys. 2.5b),  
 $d_i > z_{mi} + z_{pmaxi}$  dla  $H_{si} > H_{cr}$  :

II)  $d_i \leq z_{pi}$  (rys. 2.5c) ,  $d_i > z_{pi}$  dla  $H_{si} \leq H_{cr}$  .

Przypadek  $d_i > z_{mi} + z_{pmaxi}$  dla  $H_{si} > H_{cr}$  oraz  $d_i > z_{pi}$  dla  $H_{si} \leq H_{cr}$  dotyczy półprzeźrzeni i został szczegółowo rozpatrzony w pracach [2.19, 2.20] .

### 2.3.2. Wnikanie fali płaskiej o natężeniu $H_{si} > H_{cr}$ do płyty ferromagnetycznej o grubości $d_i \leq z_{mi}$

Jeżeli natężenie pola magnetycznego na powierzchni płyty spełnia nierówność  $H_{si} > H_{cr}$  oraz grubość płyty  $d_i \leq z_{mi}$  - rys. 2.5a, rozkład pola elektromagnetycznego w płycie oraz ośrodku liniowym znajdującym się pod płytą, opisują równania :

- dla  $0 \leq z \leq d_i$

$$\frac{\partial^2 H_{yi}}{\partial z^2} = j\omega \mu_0 \gamma_i \frac{\mu_{rsi}}{(1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}})^2} \left( \cos \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} - j \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right) \times H_y \quad (2.45)$$

$$E_{xi} = - \frac{1}{\gamma_i} \frac{\partial H_{yi}}{\partial z} \quad (2.46)$$

- dla  $z \geq d_i$

$$\frac{\partial^2 H_{yi-1}}{\partial z^2} = \alpha_{i-1}^2 H_{yi-1} \quad (2.47)$$

$$E_{xi-1} = - \frac{1}{\Gamma_{i-1}} \frac{\partial H_{yi-1}}{\partial z} \quad (2.48)$$

przy czym  $\alpha_{i-1}$ ,  $\Gamma_{i-1}$  są określone wyrażeniami (2.1), (2.3), przenikalność zespolona  $\mu_{ri}(z) = \mu_{rsi}(z) \exp[-j\psi_i(z)]$ .

Przyjęto, że przenikalność magnetyczna oraz kąt strat histerezowych zmieniają się w głąb płyty według zależności :

$$\mu_{ri} = \mu_{rsi} \left(1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}}\right)^{-2} \quad (2.49)$$

$$\psi_i = \psi_{si} \left(1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}}\right)^{-2} \quad (2.50)$$

Ażeby równanie (2.45) było rozwiązalne analitycznie, bez konieczności korzystania z elektronicznych maszyn cyfrowych, przyjęto średnią wartość kąta  $\psi_i$  w przedziale  $\langle 0, z_{mi} \rangle$ , która wynosi  $\psi_{si}/(1-t_1)$ . Przedział, w którym uśredniono kąt  $\psi_i$  jest taki sam, jak dla półprzestrzeni ferromagnetycznej [2.19, 2.20]. Stosując podstawienie

$$1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}} = e^{\xi_1} \quad (2.51)$$

równanie (2.45) można doprowadzić do równania różniczkowego liniowego niepełnego stopnia drugiego o stałych współczynnikach. Rozwiązania ogólne równań (2.45) ÷ (2.48) mają postać :

- dla  $0 \leq z \leq d_i$

$$H_{yi} = H'_{yi} + H''_{yi} = C_{1i} e^{r_{1i} \xi_1} + C_{2i} e^{r_{2i} \xi_1} = \\ = C_{1i} \exp\left[r_{1i} \ln\left(1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}}\right)\right] + C_{2i} \exp\left[r_{2i} \ln\left(1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}}\right)\right] \quad (2.52)$$

$$E_{xi} = \frac{t_1}{\delta_i z_{mi}} \left[ r_{1i} C_{1i} e^{(r_{1i}-1) \xi_1} + r_{2i} C_{2i} e^{(r_{2i}-1) \xi_1} \right] \quad (2.53)$$

- dla  $z \geq d_i$

$$H_{yi-1} = C_{1i-1} e^{-\alpha_{i-1} z} + C_{2i-1} e^{\alpha_{i-1} z} \quad (2.54)$$

$$H_{xi-1} = \frac{\alpha_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} (C_{1i-1} e^{\alpha_{i-1} z} - C_{2i-1} e^{-\alpha_{i-1} z}) \quad (2.55)$$

gdzie:

- obwiednia amplitud fal wnikających do wnętrza płyty

$$H_{yi} = H_{ysi} \left(1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}}\right)^{r_{1i}} \quad (2.56)$$

- obwiednia amplitud fal odbitych we wnętrzu płyty o powierzchnię graniczną  $z = d_i$

$$H_{yi} = H_{ysi} \left(1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}}\right)^{r_{2i}} \quad (2.57)$$

- pierwiastki równania charakterystycznego odpowiadającego równaniu (2.45) po zastosowaniu podstawienia (2.51)

$$r_{1i} = r'_{1i} + j r''_{1i} \quad (2.58)$$

$$r_{2i} = r'_{2i} + j r''_{2i} \quad (2.59)$$

przy czym

$$r'_{1i} = 0,5 \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{K_i} + 1 + 8 \left( k_i \frac{z_{mi}}{t_1} \right)^2 \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.60)$$

$$r'_{2i} = 0,5 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{K_i} + 1 + 8 \left( k_i \frac{z_{mi}}{t_1} \right)^2 \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.61)$$

$$r''_{1i} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \sqrt{K_i} - 1 - 8 \left( k_i \frac{z_{mi}}{t_1} \right)^2 \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right] \quad (2.62)$$

$$r''_{2i} = - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \sqrt{K_i} - 1 - 8 \left( k_i \frac{z_{mi}}{t_1} \right)^2 \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right] \quad (2.63)$$

$$K_i = 1 + 16 \left( k_i \frac{z_{mi}}{t_1} \right)^2 \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} + 64 \left( k_i \frac{z_{mi}}{t_1} \right)^4$$

Z drugiej strony, na podstawie równań (2.42), (2.43), (2.49) równania obwiedni fal wnikających i odbitych we wnętrzu płyty mają postać

$$|H'_{yi}| = |H'_{ysi}| \left(1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}}\right)^{\frac{2}{m_1}} \quad (2.64)$$

$$|H'_{yi}| = |H''_{ysi}| \left(1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}}\right)^{\frac{2}{m_2}} \quad (2.65)$$

Na podstawie równań (2.56), (2.64), (2.57), (2.65), a także (2.60) ÷ (2.63) otrzymuje się pierwiastki równania charakterystycznego w zależności wyłącznie od parametrów materiałowych płyty:

$$r'_{1i} = \frac{2}{m_1} \quad (2.66)$$

$$r''_{2i} = \frac{2}{m_2} \quad (2.67)$$

$$r'_{1i} = \frac{4 - m_1}{2m_1} \left\{ 1 - \left(\frac{m_1}{4 - m_1}\right)^2 \left[ 1 + 8 \left(k_1 \frac{z_{mi}}{t_1}\right)^2 \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.68)$$

$$r''_{2i} = \frac{4 - m_2}{2m_2} \left\{ 1 - \left(\frac{m_2}{4 - m_2}\right)^2 \left[ 1 + 8 \left(k_1 \frac{z_{mi}}{t_1}\right)^2 \sin \frac{\psi_{si}}{1 - t_1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.69)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku  $d_i < z_{mi}$  przebiegi przenikalności magnetycznej i kąta strat histerezo- wych w płycie dla fal odbitych - równania (2.57), (2.65) są częściowo niezgodne z równaniami (2.49), (2.50) - rys. 2.5a. Występuje bowiem w rzeczywistości najpierw wzrost przenikalności do wartości maksymalnej, następnie zaś - przenikalność monotonicznie maleje. Ta niezgodność nie wprowadza jednak istotnych niedokładności w obliczeniach impedancji i strat mocy elektromagnetycznej w płycie, gdyż podstawowe znaczenie mają nie fale odbite, lecz fale wnikające, dla których przebiegi aproksymowane przenikalności magnetycznej i kąta strat histerezo- wych są zgodne z rzeczywistymi (monotoniczny wzrost).

Stałe całkowe w równaniach (2.52) ÷ (2.55) można wyznaczyć na podstawie warunków brzegowych dla  $z = 0$  oraz  $z = d_i$  ( $C_{2i-1} = 0$ ). Całki szczególne równań rozkładu pola w płycie ferromagnetycznej ( $0 \leq z \leq d_i$ ) wynoszą

$$H_{yi} = \frac{1}{M_i} (A_i e^{r_{1i} \zeta_1} + B_i e^{r_{2i} \zeta_1}) H_{ysi} \quad (2.70)$$



$$E_{xi} = \frac{t_1}{\gamma_i z_{mi}} \frac{1}{M_i} \left[ r_{1i} A_i e^{(r_{1i} - 1) \zeta_1} + r_{2i} B_i e^{(r_{2i} - 1) \zeta_1} \right] H_{ysi} \quad (2.71)$$

gdzie

$$M_i = A_i + B_i$$

$$A_i = \left( \frac{\alpha_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} - \frac{t_1}{\gamma_i} \frac{r_{2i}}{z_{mi}} e^{-\varphi} \right) e^{r_{2i} \varphi}$$

$$B_i = \left( \frac{t_1}{\gamma_i} \frac{r_{1i}}{z_{mi}} e^{-\varphi} - \frac{\alpha_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \right) e^{r_{1i} \varphi}$$

$$\varphi = \ln \left( 1 - t_1 \frac{d_i}{z_{mi}} \right)$$

Impedancja jednostkowa płyty wyraża się zależnością

$$z_i = \frac{E_{xi}(0)}{H_{yi}(0)} = (a_{Ri} + j a_{Xi}) \frac{k_i}{\gamma_i} \quad (2.72)$$

gdzie

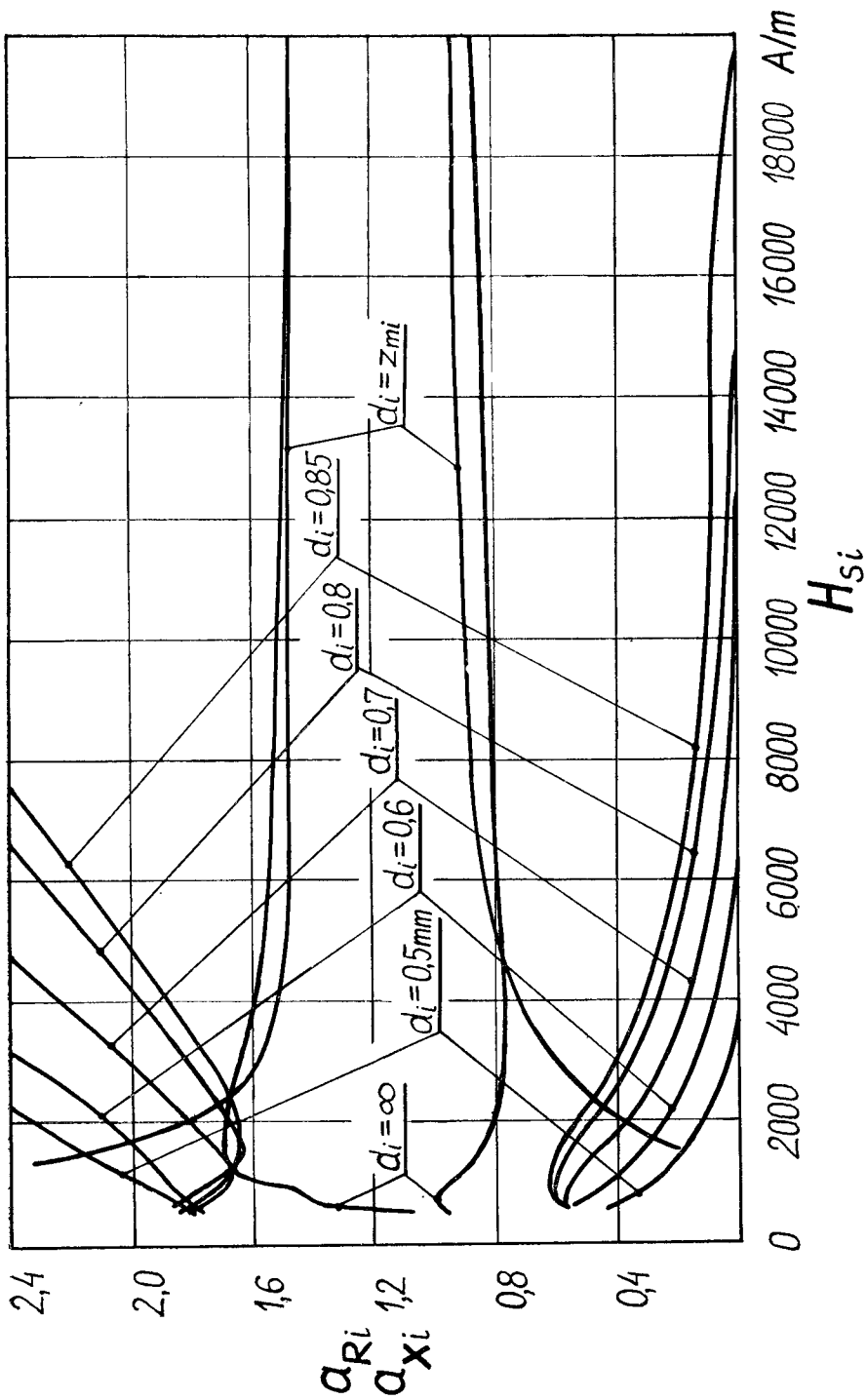
$$a_{Ri} = \operatorname{Re} \left[ \frac{t_1}{z_{mi} k_i} \frac{r_{1i} A_i + r_{2i} B_i}{M_i} \right] \quad (2.73)$$

$$a_{Xi} = \operatorname{Im} \left[ \frac{t_1}{z_{mi} k_i} \frac{r_{1i} A_i + r_{2i} B_i}{M_i} \right] \quad (2.74)$$

Podobnie można wyznaczyć jednostkowe straty mocy elektromagnetycznej w płycie

$$\Pi_{zi} = 0,5 E_{xi}(0) H_{yi}^*(0) = (a_{Ri} + j a_{Xi}) \frac{k_i}{\gamma_i} \frac{|H_{yi}|^2}{2} \quad (2.75)$$

Współczynniki  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi} = f(H_{si})$  przy  $d_i = \text{const.}$  przedstawiono na rys. 2.6. Z przeprowadzonych rozważań teoretycznych wynika, że przy natężeniach pola magnetycznego większych od wartości krytycznej, płyty cienkie ulegają silnemu nasyceniu które wywołuje znaczne zwiększenie rezystancji dla prądów wirrowych oraz zmniejszenie reaktancji ( $d_i \searrow a_{Ri} \nearrow a_{Xi} \searrow$ ). Autor nie był jednak w stanie potwierdzić tego zjawiska eksperymentalnie. W miarę wzrostu grubości płyty, współczynniki  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  dążą do wartości jak na rys. 2.3.



Rys. 2.6. Współczynniki linearyzujące  $\alpha_{Ri}$  i  $\alpha_{Xi}$  dla płyt o różnej grubości ze stali St 4s

2.3.3. Wnikanie fali płaskiej o natężeniu  $H_{si} > H_{cr}$  do płyty ferromagnetycznej o grubości  $d_i$  zawartej w przedziale  $z_{mi} + z_{pmaxi} \geq d_i > z_{mi}$

Dla płyty ferromagnetycznej o grubości  $z_{mi} + z_{pmaxi} \geq d_i > z_{mi}$ , na którą pada fala płaska o natężeniu  $H_{si} > H_{cr}$  - rys. 2.5b można napisać równania

- dla  $0 \leq z \leq z_{mi}$

$$\frac{\partial^2 H_{yIII}}{\partial z^2} = j\omega \mu_0 \gamma_i \frac{\mu_{rsi}}{z^2} \left( \cos \frac{\psi_{si}}{1-t_1} - j \sin \frac{\psi_{si}}{1-t_1} \right) \times H_{yIII} \quad (2.76)$$

$$E_{xIII} = - \frac{1}{\gamma_i} \frac{\partial H_{yIII}}{\partial z}, \quad (2.77)$$

- dla  $z_{mi} \leq z \leq d_i$

$$\frac{\partial^2 H_{yII}}{\partial z^2} = j\omega \mu_0 \gamma_i \frac{\mu_{rsi}}{\left( z - \frac{z_{mi}}{z_{pmaxi}} \right)^2} \times \left( \cos \frac{\psi_{maxi}}{1-t_{2max}} - j \sin \frac{\psi_{maxi}}{1-t_{2max}} \right) H_{yII} \quad (2.78)$$

$$E_{xII} = - \frac{1}{\gamma_i} \frac{\partial H_{yII}}{\partial z} \quad (2.79)$$

Zmienność przenikalności magnetycznej oraz kąta strat histerezowych w płycie wyrażono następującymi zależnościami:

- dla  $0 \leq z \leq z_{mi}$

$$\mu_{rIII} = \mu_{rsi} \left( 1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}} \right)^{-2} \quad (2.80)$$

$$\psi_{III} = \psi_{si} \left( 1 - t_1 \frac{z}{z_{mi}} \right)^{-2} \quad (2.81)$$

- dla  $z_{mi} \leq z \leq d_i$

$$\mu_{rII} = \mu_{rmaxi} \left( 1 - t_{2max} \frac{z - z_{mi}}{z_{pmaxi}} \right)^{-2} \quad (2.82)$$

$$\psi_{II} = \psi_{maxi} \left( 1 - t_{2max} \frac{z - z_{mi}}{z_{pmaxi}} \right)^{-2} \quad (2.83)$$

W zakresie współrzędnej  $z_{mi} \leq z \leq d_i$  (rys. 2.5b) przenikalność magnetyczna maleje monotonicznie od wartości maksymalnej  $\mu_{rmaxi}$ . W związku z tym należy przyjąć, że w przedziale tym nie występują fale odbite, gdyż dla fal odbitych zmienność przenikalności magnetycznej oraz kąta strat histerezowych byłaby niezgodna z rzeczywistością (wraz z zanikaniem natężenia pola magnetycznego wielkości te powinny maleć - rys. 2.5b). Taka metoda ujęcia analitycznego nieliniowości ciał ferromagnetycznych narzuca zatem konieczność rozpatrywania płyty o grubości  $z_{mi} + z_{pmaxi} \geq d_i > z_{mi}$  jako półprzestrzeni. Z wielu badań, np. [1.6, 2.6, 2.14, 2.25, 2.26], a także badań własnych autora wynika, że takie podejście jest uzasadnione i pozwala uzyskać wyniki obliczeń impedancji oraz strat mocy zgodne z eksperymentem. Współczynniki  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  nie zależą zatem od grubości płyty; ich wartości są takie same jak na rys. 2.3. Wzory do obliczeń współczynników  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  są podane w pracach [2.19, 2.20].

#### 2.3.4. Wnikanie fali płaskiej o natężeniu $H_{si} \leq H_{cr}$ do płyty ferromagnetycznej o grubości $d_i \leq z_{pi}$

Na podstawie rys. 2.5c oraz rozważań przedstawionych w rozdz. 2.3.3 dochodzi się do wniosku, że płytę ferromagnetyczną o grubości  $d_i \leq z_{pi}$ , na którą pada fala płaska o natężeniu  $H_{si} \leq H_{cr}$  można utożsamić z półprzestrzenią ferromagnetyczną. Zależności do obliczeń współczynników  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  będą takie same jak w pracach [2.19, 2.20], wartości liczbowe tych współczynników podaje rys. 2.3.

Zagadnienia quasistacjonarnego pola elektromagnetycznego oraz strat mocy w cienkich płytach ferromagnetycznych przy dwustronnym wnikaniu fali omawiają np. prace [1.6, 2.1, 2.4, 2.15, 2.29, 2.34, 2.36, 2.38, 2.39, 2.40, 2.41].

### 3. WIELOWARSTWOWA CZĘŚĆ WTÓRNA W POLU DWUWYMIAROWYM

#### 3.1. Wybór układu współrzędnych

Na rys. 3.1 przedstawiono elektromechaniczny przetwornik indukcyjny o wielowarstwowej części wtórnej składającej się z  $k$  warstw. Pulsacja prądu w uzwojeniach części pierwotnej wynosi  $\omega = \pi v / \tau$ , gdzie  $v$  - prędkość liniowa harmonicznej podstawowej fali przepływu, obciążenia liniowego lub indukcji magnetycznej części pierwotnej. Jeżeli początek układu współrzędnych  $x_0, y_0, z_0$  znajduje się w osi symetrii fazy pierwszej części pierwotnej, to obciążenie liniowe oraz indukcja magnetyczna zmieniają się w czasie oraz wzdłuż podziałki biegunowej według funkcji

$$\exp j(\omega t \mp \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} x_0) = \exp j(\omega t \mp \beta_\gamma x_0) \quad (3.1)$$

przy czym stała rzeczywista zależna od długości fali wymuszającej (obciążenia liniowego lub indukcji magnetycznej) przemieszczającej się wzdłuż podziałki biegunowej wynosi

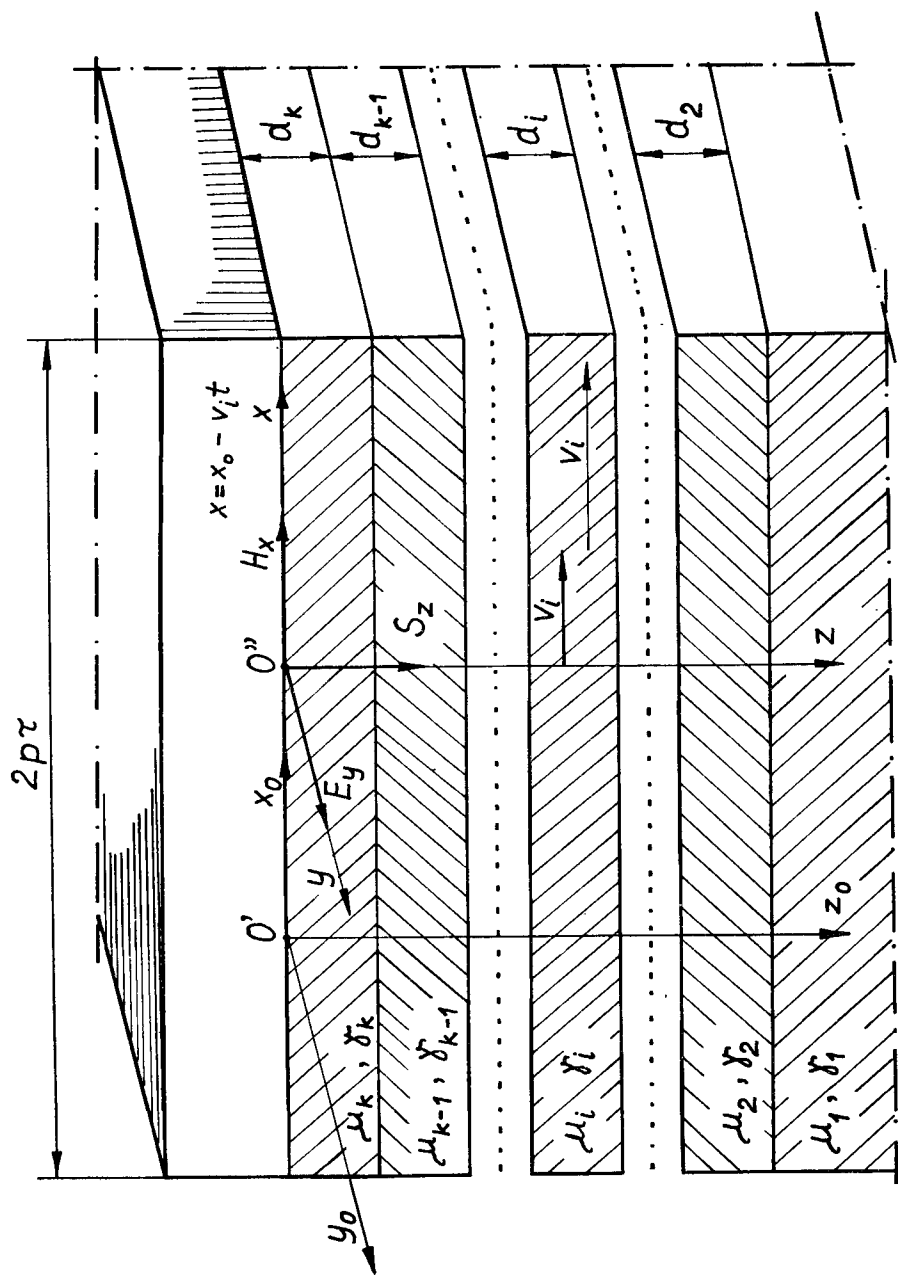
$$\beta_\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \quad (3.2)$$

W układzie współrzędnych prostokątnych  $x_0, y_0, z_0$  związanym z częścią pierwotną, rozkład pola magnetycznego w  $i$ -tej warstwie części wtórnej opisuje równanie:

$$\nabla^2 \vec{H}_i^{(k)} = j\omega \gamma_i \mathcal{L}_i \mu_i \vec{H}_i^{(k)} - \gamma_i \mathcal{L}_i \text{rot}[\vec{v}_i \times \vec{H}_i^{(k)}] \quad (3.3)$$

Dla stanu ustalonego, tzn. kiedy prędkość części wtórnej  $v_i = \text{const}$ , równanie (3.3) przybiera postać

$$\nabla^2 \vec{H}_i^{(k)} = j\omega \gamma_i \mathcal{L}_i \mu_i \vec{H}_i^{(k)} + \gamma_i \mathcal{L}_i (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{H}_i^{(k)} \quad (3.4)$$



Rys. 3.1. Wielowarstwowa część wtórna elektromechanicznego przetwornika indukcyjnego w nieruchomym oraz ruchomym układzie współrzędnych prostokątnych

Rozwiązanie równań (3.3) lub (3.4) - nawet dla pola dwu-wymiarowego jest trudne. Jedną z metod rozwiązania równań (3.3), (3.4) polega na zastosowaniu przekształcenia Fouriera, a następnie - po znalezieniu rozwiązań szczególnych dla równań transformowanych - przekształcenia odwrotnego [3.7, 3.12, 3.14]. Stała propagacji w równaniach transformowanych wynosi:

$$\kappa_{\gamma i} = \beta_{\gamma}^2 + j\omega \mu_i \gamma_i + jv_i \mu_i \gamma_i \beta_{\gamma} \quad (3.5)$$

Prościej jest analizować przetworniki indukcyjne w układzie współrzędnych przemieszczającym się z prędkością liniową części wtórnej, tzn.  $v_i = v(1-s)$ . Przechodząc do układu współrzędnych  $x, y, z$  związanego z częścią wtórną - rys. 3.1 należy dokonać zmiany zmiennych przyjmując [3.13]:

$$x = x_0 - v_i t = x_0 - \frac{v}{\gamma}(1-s_{\gamma})t = x_0 - \frac{\omega \tau}{\gamma \pi}(1-s_{\gamma})t \quad (3.6)$$

oraz  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ , przy czym:

- dla pola magnetycznego współbieżnego

$$s_{\gamma}^+ = s_{\gamma} = 1 - \gamma(1-s) \quad (3.7a)$$

- dla pola magnetycznego przeciwbieżnego

$$s_{\gamma}^- = 2 - s = 1 + \gamma(1-s) \quad (3.7b)$$

gdzie  $s$  - poślizg części wtórnej względem harmonicznej podstawowej pola magnetycznego części pierwotnej.

Podstawiając  $x_0$  z równania (3.6) do równania (3.1) otrzymuje się:

- dla pola współbieżnego

$$\begin{aligned} \exp j(\omega t - \beta_{\gamma} x_0) &= \exp j(\omega s_{\gamma} t - \beta_{\gamma} x) = \\ &= \exp j\beta_{\gamma} \left( \frac{\omega}{\beta_{\gamma}} t - v_i t - x \right) \end{aligned} \quad (3.8a)$$

- dla pola przeciwbieżnego

$$\begin{aligned} \exp j(\omega t + \beta_{\gamma} x_0) &= \exp j \left[ \omega (2 - s_{\gamma}) t + \beta_{\gamma} x \right] = \\ &= \exp j\beta_{\gamma} \left( \frac{\omega}{\beta_{\gamma}} t + v_i t + x \right) \end{aligned} \quad (3.8b)$$

W nowym układzie współrzędnych  $x, y, 0$  oraz w dowolnej  $i$ -tej warstwie części wtórnej zmiany wszystkich przebiegów elektrycznych i magnetycznych w czasie oraz wzdłuż podziałki biegunowej są proporcjonalne do wyrażenia:

$$\exp j(\omega_{\gamma i} t \mp \beta_{\gamma} x) \quad (3.9)$$

w którym:

- dla pola współbieżnego

$$\omega_{\nu i}^+ = \omega s_{\nu}^+ = \beta_{\nu} \left( \frac{\omega}{\beta_{\nu}} - v_i \right) \quad (3.10a)$$

- dla pola przeciwbieżnego

$$\omega_{\nu i}^- = \omega s_{\nu}^- = \beta_{\nu} \left( \frac{\omega}{\beta_{\nu}} + v_i \right) \quad (3.10b)$$

Zastosowanie układu współrzędnych  $x, y, z$  przemieszczającego się z prędkością liniową  $v_i$  jest więc równoznaczne z umieszczeniem nieruchomej części wtórnej w polu o częstotliwości  $\omega_{\nu i}/2\pi$ . W równaniach (3.2), (3.3) znikają składniki sum zależne od prędkości  $v_i$ , gdyż w części wtórnej nie będą indukowane prądy wirowe rotacji od pola o fali indukcji nieruchomej względem części wtórnej. Równania (3.3), (3.4) przyjmują postać:

$$\nabla^2 \vec{H}_i(k) = j \omega_{\nu i} \mu_i \gamma_i \vec{H}_i(k) \quad (3.11)$$

### 3.2. Zależności podstawowe

Dwuwymiarowy rozkład pola elektromagnetycznego w  $i$ -tej warstwie izotropowej opisuje równanie

$$\frac{\partial^2 F_i(k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i(k)}{\partial z^2} = \alpha_{\nu i}^2 F_i(k) \quad (3.12)$$

przy czym przez  $F_i(k)$  oznaczono ogólnie składowe natężenia pola magnetycznego, elektrycznego lub gęstości prądu.

Stała propagacji  $\alpha_{\nu i}$  zależy od poślizgu i wynosi

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu i} &= \alpha_{\nu i}^+ = (j \omega_{\nu i}^+ \mu_i \gamma_i)^{\frac{1}{2}} = (a_{Ri} + j a_{Xi}) k_{\nu i}^+ = \\ &= (a_{Ri} + j a_{Xi}) \left[ 1 - \nu(1-s) \right]^{\frac{1}{2}} k_i \end{aligned} \quad (3.13a)$$

- dla pola magnetycznego przeciwbieżnego

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu i} &= \alpha_{\nu i}^- = (j \omega_{\nu i}^- \mu_i \gamma_i)^{\frac{1}{2}} = (a_{Ri} + j a_{Xi}) k_{\nu i}^- = \\ &= (a_{Ri} + j a_{Xi}) \left[ 1 + \nu(1-s) \right]^{\frac{1}{2}} k_i \end{aligned} \quad (3.13b)$$

Prądy w części wtórnej nie mogą płynąć w kierunku normalnym, a zatem



$$E_{zi}^{(k)} = 0 \quad (3.14)$$

$$H_{yi}^{(k)} = 0 \quad (3.15)$$

Eliminując czynnik czasowy  $\exp(j\omega_{\nu i}t)$  rozwiązanie ogólne równania (3.12) ma postać :

- dla pola magnetycznego współbieżnego

$$F_i^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{1\nu i}^{(k)} e^{-j\beta_{\nu}x} (C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^+ z} + C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^+ z}) \quad (3.16a)$$

- dla pola magnetycznego przeciwbieżnego

$$F_i^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{2\nu i}^{(k)} e^{j\beta_{\nu}x} (C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^- z} + C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^- z}) \quad (3.16b)$$

Między współczynnikami  $\alpha_{\nu i}$ ,  $\chi_{\nu i}$ ,  $\beta_{\nu}$  istnieje zależność :

$$\chi_{\nu i} = (\alpha_{\nu i}^2 + \beta_{\nu}^2)^{\frac{1}{2}} = (a_{R\nu i} + j a_{X\nu i}) k_{\nu i} \quad (3.17)$$

w której

$$a_{R\nu i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 4a_{Ri}^2 a_{Xi}^2 + (a_{Ri}^2 - a_{Xi}^2 + \frac{\beta_{\nu}^2}{k_{\nu i}^2})^2 \right]^{\frac{1}{2}} + a_{Ri}^2 - a_{Xi}^2 + \frac{\beta_{\nu}^2}{k_{\nu i}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

$$a_{X\nu i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 4a_{Ri}^2 a_{Xi}^2 + (a_{Ri}^2 - a_{Xi}^2 + \frac{\beta_{\nu}^2}{k_{\nu i}^2})^2 \right]^{\frac{1}{2}} - a_{Ri}^2 + a_{Xi}^2 - \frac{\beta_{\nu}^2}{k_{\nu i}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

$$k_{\nu i} = (0,5 \omega_{\nu i} \mu_0 \mu_{r si} \gamma_i)^{\frac{1}{2}}$$

Dla pola magnetycznego współbieżnego  $\chi_{\nu i} = \chi_{\nu i}^+$ ,  $\alpha_{\nu i} = \alpha_{\nu i}^+$ ,  $k_{\nu i} = k_{\nu i}^+$ , dla przeciwbieżnego natomiast  $\chi_{\nu i} = \chi_{\nu i}^-$ ,  $\alpha_{\nu i} = \alpha_{\nu i}^-$ ,  $k_{\nu i} = k_{\nu i}^-$ . W przypadku środowisk nieferromagnetycznych  $a_{Ri} = a_{Xi} = 1$ . Dla środowisk ferr omagnetycznych zmienność przenikalności magnetycznej uwzględniana jest tylko w kierunku normalnym. W ogólnym przypadku pole magnetyczne w przetworni-

ku indukcyjnym zawiera składową współbieżną  $H_{xi}^{(k)+}$  jak i przeciwbieżną  $H_{xi}^{(k)-}$ . Ażeby zasada superpozycji pozostała słuszna, zarówno przenikalność magnetyczną  $\mu_{rsi}$  jak i współczynniki  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  określonej warstwy ferromagnetycznej należy wyznaczyć dla chwili czasowej, w której moduł wektora pola osiąga wartość maksymalną, tzn. należy przyjąć natężenie pola magnetycznego na powierzchni równe sumie arytmetycznej

$$|H_{xsi}^{(k)+}| + |H_{xsi}^{(k)-}|.$$

Dla warstwy pierwszej współczynniki  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  wyznacza się na podstawie rys. 2.3 [2.19,2.20], dla warstw o grubościach skończonych według metody przedstawionej w rozdz. 2.3

### 3.3. Założenia

Analiza dwuwymiarowa pola elektromagnetycznego w wielowarstwowej części wtórnej zostanie przeprowadzona przy założeniach a), b), c) podanych w rozdz. 2.1 oraz następujących:

- e) rdzeń części pierwotnej jest wykonany z materiału o nieskończenie wielkiej przenikalności magnetycznej oraz konduktywności równej zeru;
- f) poszczególne warstwy części wtórnej są równoległe do powierzchni przyszczelinowej części pierwotnej i posiadają przenikalność magnetyczną  $\mu_{xi}$  - w kierunku współrzędnej  $x$ ,  $\mu_{zi}$  - w kierunku współrzędnej  $z$  oraz konduktywność  $\gamma_{xi}$  - w kierunku współrzędnej  $x$ ,  $\gamma_{yi}$  - w kierunku współrzędnej  $y$ ;
- g) rozkład pola elektromagnetycznego jest okresowy wzdłuż podziałki biegunowej o okresie  $2\tau$  i składowej stałej równej zeru.

Założenie b) - rozdz. 2.1 jest w pełni słuszne dla przypadku, kiedy promień krzywizny jest co najmniej kilkakrotnie większy od grubości poszczególnych warstw. Nasuwa się zatem wątpliwość, czy jest ono możliwe do przyjęcia w małych maszynach wirujących. We współczesnych maszynach wirujących stosowanych w automatyce, a więc w bardzo małych maszynach, szczelina powietrzna przeciętnie wynosi 5% średnicy wirnika

$D_w$ . Równoważna głębokość wnikania pola w małych maszynach o wirniku masywnym, nawet na biegu jałowym przy pracy silnikowej (głębokie wnikanie fali) jest również dużo mniejsza od średnicy wirnika. Np. mikrosilniki indukcyjne wykonawcze o wirniku masywnym stalowym, zbudowane na częstotliwość znamionową 50 Hz posiadają średnicę wirnika  $D_w \geq 16$  mm, równoważna głębokość wnikania pola do wirnika nie przekracza 3 mm, przy częstotliwości 400 Hz natomiast  $D_w \geq 10$  mm, głębokość wnikania nie przekracza 1,1 mm (duży poślizg na biegu jałowym, przy średnicach  $D_w \leq 20$  mm wynoszący nawet 0,5). Optymalna grubość zewnętrznej warstwy dobrze przewodzącej prąd dla tych przetworników jest zawarta w przedziale od 0,05 do 0,15 mm (badania własne autora). Tak więc posłużenie się prostokątnym układem współrzędnych jest uzasadnione.

Na wstępie rozważań przyjmuje się, że wszystkie warstwy są izotropowe, tzn.  $\mu_{xi} = \mu_{zi} = \mu_i$  oraz  $\gamma_{xi} = \gamma_{yi} = \gamma_i$ . Metoda uwzględnienia właściwości anizotropowych warstw - założenie f) jest podana w rozdz. 3.9.

### 3.4. Równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przypadku części pierwotnej o biegunach utajonych

W przetworniku, w którym część pierwotna posiada bieguny utajone, najlepiej jest przyjąć - jako punkt wyjścia w analizie pola - rozkład gęstości liniowej prądu wzdłuż podziałki biegunowej uzwojeń części pierwotnej. Powszechnie czyni się założenie upraszczające, że uzwojenie części pierwotnej ma postać nieskończenie cienkiej przyszczelinowej warstwy prądowej. W analizie dwuwymiarowej pole nie zmienia się wzdłuż osi  $y$  maszyny, zatem rozkład przestrzennoczasowy obciążenia liniowego wzdłuż podziałki biegunowej można ostatecznie zapisać w postaci :

$$a(x,t) = \sum_{\nu=1,2,3}^{\infty} \left[ A_{\nu}^{+} e^{j(\omega s_{\nu}^{+} t - \beta_{\nu} x)} + A_{\nu}^{-} e^{j(\omega s_{\nu}^{-} t + \beta_{\nu} x)} \right] \quad (3.20)$$

W dalszych rozważaniach czynniki czasowe  $\exp(j\omega s_{\nu}^{+} t)$  oraz  $\exp(j\omega s_{\nu}^{-} t)$  zostaną pominięte.

W pracy autora [3.6] wykazano, że każde uzwojenie umieszczone w żłobkach można sprowadzić do nieskończonej cienkiej warstwy prądowej rozłożonej równomiernie na powierzchni przyszczelinowej rdzenia i opisanej równaniem (3.20). Dla przejrzystości rozważań, zostanie rozpatrzone uzwojenie jednowarstwowe wykonane z cewek średnicowych. Obciążenie liniowe żłobka o szerokości  $b$  zawierającego  $z_K$  przewodów fazy  $K$  wynosi:

$$A_{slK} = \frac{z_K \sqrt{2}}{b} I_K e^{-j\beta_K x}$$

przy czym:  $I_K$  - prąd  $K$ -tej fazy, w wykładniku potęgi liczby  $e$  czynnik czasowy pominięto,  $\beta_K$  jest natomiast kątem między wskazami napięć zasilających uzwojenia fazowe części pierwiotnej.

Rozpatrując pojedyncze uzwojenie fazowe dostrzega się, że krzywa obciążenia liniowego jest funkcją o odwrotnej zgodności półokresów, którą w przedziale  $0 \leq x \leq \tau$  można rozłożyć na szereg Fouriera:

$$a_K = A_{slK} \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \beta_{\nu} x + c_{\nu} \sin \beta_{\nu} x)$$

gdzie  $a_K$  - wartość chwilowa obciążenia liniowego  $K$ -tej fazy.

Współczynniki powyższego szeregu Fouriera wynoszą:

$$a_{\nu} = \frac{4 q_K}{\nu \pi} \frac{\sin \beta_{\nu} \frac{q_K t}{2}}{\frac{q_K \sin \beta_{\nu} \frac{t}{2}}{2}} \sin \beta_{\nu} \frac{b}{2} \cos \beta_{\nu} \frac{q_K t}{2}$$

$$c_{\nu} = \frac{4 q_K}{\nu \pi} \frac{\sin \beta_{\nu} \frac{q_K t}{2}}{\frac{q_K \sin \beta_{\nu} \frac{t}{2}}{2}} \sin \beta_{\nu} \frac{b}{2} \sin \beta_{\nu} \frac{q_K t}{2}$$

przy czym:  $q_K$  - liczba żłobków na biegun i fazę  $K$ -tej fazy,  $t$  - podziałka żłobkowa. Ponieważ  $m q_K t = \tau$ , więc

$$\frac{\sin \beta_{\nu} \frac{q_K t}{2}}{q_K \sin \beta_{\nu} \frac{t}{2}} = \frac{\sin \nu \frac{\pi}{2 m}}{q_K \sin \nu \frac{\pi}{2 m q_K}} = \sum q_{\nu K}$$

gdzie :  $m$  - liczba faz ,  $\zeta_{q\nu K}$  - współczynnik grupowy uzwojenia  $K$ -tej fazy dla  $\nu$ -tej harmonicznej. Szereg Fouriera jest celowo zapisać w postaci :

$$a_K = A_{slK} \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \cos(\beta_{\nu} x + \phi_{\nu} - \frac{\pi}{2})$$

gdzie:

$$C_{\nu} = (a_{\nu}^2 + c_{\nu}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi_{\nu} = \text{arc tg } \frac{a_{\nu}}{c_{\nu}}$$

Ostatecznie otrzymuje się krzywą obciążenia liniowego części pierwotnej przez pojedyncze uzwojenie fazowe w postaci :

$$a_K = \sum_{\nu=1}^{\infty} [A_{\nu K}^+ e^{-j(\beta_{\nu} x + \beta_K)} + A_{\nu K}^- e^{j(\beta_{\nu} x - \beta_K)}]$$

gdzie:

$$A_{\nu K}^+ = A_{\nu K} e^{-j\phi_{\nu}} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$A_{\nu K}^- = A_{\nu K} e^{j\phi_{\nu}} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

przy czym

$$A_{\nu K} = \frac{2\sqrt{2} N_K \zeta_{q\nu K} \zeta_{b\nu K}}{\tau p} I_{\nu K}$$

$$z_{KqK} = \frac{N_K}{p}$$

Współczynnik zespolony

$$\zeta_{b\nu K} = |\zeta_{b\nu K}| e^{\mp j\phi_{\nu}} = \frac{\sin\beta_{\nu} \frac{b}{2}}{\beta_{\nu} \frac{b}{2}} e^{\mp j\phi_{\nu}}$$

uwzględnia rozkład uzwojenia w żłobkach. Dla uzwojenia idealnego, tzn. w którym  $b \rightarrow 0$  oraz  $q_K t \rightarrow m q_K t = \tau$ , wartość bezwzględna  $|\zeta_{b\nu K}| \rightarrow 1$  oraz argument  $\phi_{\nu} \rightarrow 0$ .

Oddziaływanie pola prądów wirowych indukowanych w części wtórnej na pole części pierwotnej można uwzględnić przyjmując w amplitudach  $A_{\nu}^+$ ,  $A_{\nu}^-$  obciążenia liniowego wartości prądów fazowych, które odpowiadają sumie geometrycznej prą-

du magnesującego i prądu wywołanego stratami histerezowymi oraz sprowadzonego prądu części wtórnej do strony pierwotnej. Sposób postępowania ujmuje algorytm obliczeń w rozdz. 5.

Przetwornik o biegunach utajonych jest przedstawiony na rys. 3.2. Ostatnią k-tą warstwą sąsiadującą z warstwą prądową jest dielektryk o grubości  $d_k$  równej grubości szczeliny powietrznej (powietrze). Pozostałe warstwy mogą być zarówno przewodnikami jak i dielektrykami.

Rozwiązanie ogólne równania (3.12) dla składowej magnetycznej stycznej  $H_{xi}^{(k)}$  ma postać :

$$H_{xi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \cdot^{-j\beta_{\nu}x} \left[ C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} \cdot^{-\chi_{\nu i}^{+}z} + C_{1\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} \cdot^{\chi_{\nu i}^{+}z} \right] \quad (3.21a)$$

$$H_{xi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \cdot^{j\beta_{\nu}x} \left[ C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} \cdot^{-\chi_{\nu i}^{-}z} + C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} \cdot^{\chi_{\nu i}^{-}z} \right] \quad (3.21b)$$

Z warunków  $\text{div } \vec{E}_i(k) = 0$  oraz  $\text{rot } \vec{E}_i(k) = -j\omega_{\nu i} \mu_i \vec{H}_i(k)$  otrzymuje się rozwiązania dla pozostałych składowych :

$$H_{zi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( -j \frac{\beta_{\nu}}{\chi_{\nu i}^{+}} \right) \cdot^{-j\beta_{\nu}x} \left[ C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} \cdot^{-\chi_{\nu i}^{+}z} + C_{1\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} \cdot^{\chi_{\nu i}^{+}z} \right] \quad (3.22a)$$

$$H_{zi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} j \frac{\beta_{\nu}}{\chi_{\nu i}^{-}} \cdot^{j\beta_{\nu}x} \left[ C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} \cdot^{-\chi_{\nu i}^{-}z} + C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} \cdot^{\chi_{\nu i}^{-}z} \right] \quad (3.22b)$$

$$E_{yi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( - \frac{j\omega_{\nu i} \mu_i}{\chi_{\nu i}^{+}} \right) \cdot^{-j\beta_{\nu}x} \left[ C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} \cdot^{-\chi_{\nu i}^{+}z} + C_{1\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} \cdot^{\chi_{\nu i}^{+}z} \right] \quad (3.23a)$$

$$E_{yi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( - \frac{j\omega_{\nu i} \mu_i}{\chi_{\nu i}^{-}} \right) \cdot^{j\beta_{\nu}x} \left[ C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} \cdot^{-\chi_{\nu i}^{-}z} + C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} \cdot^{\chi_{\nu i}^{-}z} \right] \quad (3.23b)$$

Do wyznaczenia natężenia pola magnetycznego na powierzchni granicznej  $z = 0$  wykorzystuje się założenie e), wyra-

żenie (3.20), prawo przepływu oraz definicję różnicy potencjałów magnetycznych [2.1]. Otrzymuje się, że :

$$H_{zk}^{(k)+}(x,0) = \sum_{\nu=1,2,3}^{\infty} (-A_{\nu}^{+}) e^{-j\beta_{\nu}x} \quad (3.24a)$$

$$H_{zk}^{(k)-}(x,0) = \sum_{\nu=1,2,3}^{\infty} (-A_{\nu}^{-}) e^{j\beta_{\nu}x} \quad (3.24b)$$

Wszystkie stałe  $C_{1\nu}^{(k)}$ ,  $C_{2\nu}^{(k)}$ ,  $C_{3\nu}^{(k)}$ ,  $C_{4\nu}^{(k)}$  można wyznaczyć z powyższych zależności (3.24a), (3.24b) oraz następujących warunków brzegowych:

- dla  $z = d_k$

$$H_{zk}^{(k)}(x, d_k) = H_{zk-1}^{(k)}(x, d_k) \quad (3.25k)$$

$$\mu_k H_{zk}^{(k)}(x, d_k) = \mu_{k-1} H_{zk-1}^{(k)}(x, d_k) \quad (3.26k)$$

- dla  $z = \sum_{i=k-1}^k d_i$

$$H_{zk-1}^{(k)}(x, \sum_{i=k-1}^k d_i) = H_{zk-2}^{(k)}(x, \sum_{i=k-1}^k d_i) \quad (3.25.k-1)$$

$$\mu_{k-1} H_{zk-1}^{(k)}(x, \sum_{i=k-1}^k d_i) = \mu_{k-2} H_{zk-2}^{(k)}(x, \sum_{i=k-1}^k d_i) \quad (3.26.k-1)$$

.....

- dla  $z = \sum_{i=2}^k d_i$

$$H_{x2}^{(k)}(x, \sum_{i=2}^k d_i) = H_{x1}^{(k)}(x, \sum_{i=2}^k d_i) \quad (3.25.2)$$

$$\mu_2 H_{x2}^{(k)}(x, \sum_{i=2}^k d_i) = \mu_1 H_{x1}^{(k)}(x, \sum_{i=2}^k d_i) \quad (3.26.2)$$

Ponadto, przy  $z \rightarrow \infty$  pole elektromagnetyczne musi zanikać, tzn.:

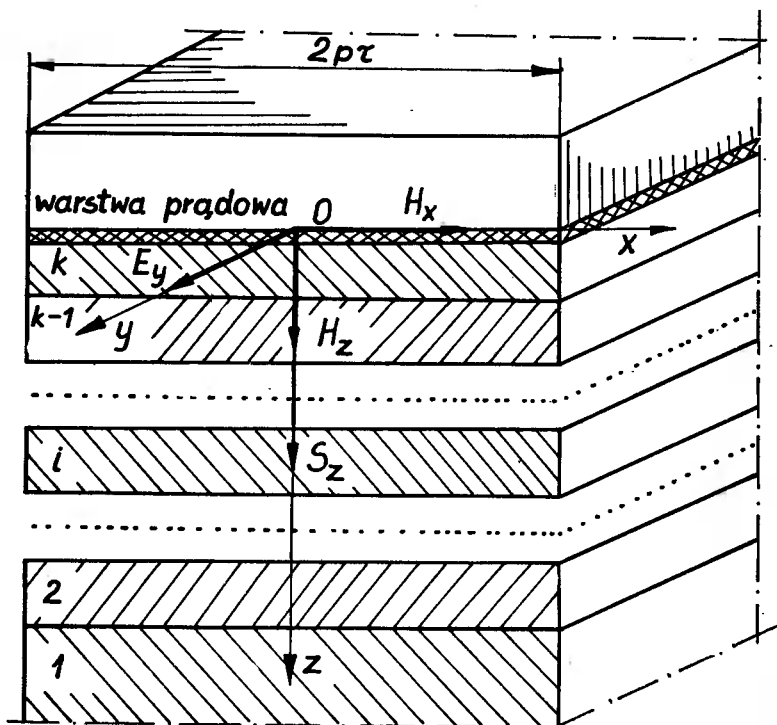
$$C_{1\nu}^{(k)} C_{4\nu}^{(k)} = C_{2\nu}^{(k)} C_{4\nu}^{(k)} = 0 \quad (3.27)$$

Jeżeli poniżej warstwy prądowej znajduje się półprzeźroczliwa jednorodna ( $i=1$ ), np. przetwornik bez części wtórnej, wtedy zgodnie z warunkami brzegowymi (3.24a) ÷ (3.27) stałe są równe:

$$C_{1\nu 1}^{(1)} C_{3\nu 1}^{(1)} = -A_{\nu}^{+} \quad (3.28a)$$

$$C_{2\nu 1}^{(1)} C_{3\nu 1}^{(1)} = -A_{\nu}^{-} \quad (3.28b)$$

$$C_{1\nu 1}^{(1)} C_{4\nu 1}^{(1)} = C_{2\nu 1}^{(1)} C_{4\nu 1}^{(1)} = 0 \quad (3.29)$$



Rys. 3.2. Elektromechaniczny przetwornik indukcyjny o biegunach utajonych w polu dwuwymiarowym

Jeżeli natomiast poniżej warstwy prądowej znajduje się środowisko wielowarstwowe ( $i=k$ ), to stałe zgodnie z warunkami brzegowymi (3.24a) ÷ (3.27) - podobnie jak w analizie jednowymiarowej - można wyrazić następująco:

$$C_{1\nu k}^{(k)} C_{3\nu k}^{(k)} = \frac{1}{2 M_{\nu k}^{(k)+}} \left\{ \frac{\chi_{\nu k-1}^{+}}{\chi_{\nu k}^{+}} \left[ C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} \right] + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{4\nu k-1}^{(k-1)} \Big] + \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \left[ C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} + \right. \\
 & \left. - C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{4\nu k-1}^{(k-1)} \right] \Big\} (-A_{\nu}^+) e^{\chi_{\nu k}^+ d_k} \quad (3.30a.k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{2\nu k}^{(k)} C_{3\nu k}^{(k)} &= \frac{1}{2 M_{\nu k}^{(k)}} \left\{ \frac{\chi_{\nu k-1}^-}{\chi_{\nu k}^-} \left[ C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} + \right. \right. \\
 & + C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{4\nu k-1}^{(k-1)} \Big] + \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \left[ C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} + \right. \\
 & \left. \left. - C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{4\nu k-1}^{(k-1)} \right] \right\} (-A_{\nu}^-) e^{\chi_{\nu k}^- d_k} \quad (3.30b.k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1\nu k}^{(k)} C_{4\nu k}^{(k)} &= \frac{1}{2 M_{\nu k}^{(k)+}} \left\{ \frac{\chi_{\nu k-1}^+}{\chi_{\nu k}^+} \left[ C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} + \right. \right. \\
 & + C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{4\nu k-1}^{(k-1)} \Big] - \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \left[ C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} + \right. \\
 & \left. \left. - C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{4\nu k-1}^{(k-1)} \right] \right\} (-A_{\nu}^+) e^{-\chi_{\nu k}^+ d_k} \quad (3.31a.k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{2\nu k}^{(k)} C_{4\nu k}^{(k)} &= \frac{1}{2 M_{\nu k}^{(k)-}} \left\{ \frac{\chi_{\nu k-1}^-}{\chi_{\nu k}^-} \left[ C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} + \right. \right. \\
 & + C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{4\nu k-1}^{(k-1)} \Big] - \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \left[ C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} + \right. \\
 & \left. \left. - C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{4\nu k-1}^{(k-1)} \right] \right\} (-A_{\nu}^-) e^{-\chi_{\nu k}^- d_k} \quad (3.31b.k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1\nu k-1}^{(k)} C_{3\nu k-1}^{(k)} &= \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)+}} \frac{\chi_{\nu k-1}^+}{\chi_{\nu k}^+} C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} \times \\
 & \times (-A_{\nu}^+) e^{\chi_{\nu k-1}^+ d_k} \quad (3.30a.k-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{2\nu k-1}^{(k)} C_{3\nu k-1}^{(k)} &= \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)-}} \frac{\chi_{\nu k-1}^-}{\chi_{\nu k}^-} C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{3\nu k-1}^{(k-1)} \times \\
 & \times (-A_{\nu}^-) e^{\chi_{\nu k-1}^- d_k} \quad (3.30b.k-1)
 \end{aligned}$$

$$C_{1\sqrt{k-1}}^{(k)} C_{4\sqrt{k-1}}^{(k)} = \frac{1}{M_{\sqrt{k}}^{(k)+}} \frac{\chi_{\sqrt{k-1}}^+}{\chi_{\sqrt{k}}^+} C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{k-1}}^{(k-1)} \times (-A_{\sqrt{k}}^+) e^{-\chi_{\sqrt{k-1}}^+ d_k} \quad (3.31a.k-1)$$

$$C_{2\sqrt{k-1}}^{(k)} C_{4\sqrt{k-1}}^{(k)} = \frac{1}{M_{\sqrt{k}}^{(k)-}} \frac{\chi_{\sqrt{k-1}}^-}{\chi_{\sqrt{k}}^-} C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{k-1}}^{(k-1)} \times (-A_{\sqrt{k}}^-) e^{-\chi_{\sqrt{k-1}}^- d_k} \quad (3.31b.k-1)$$

$$C_{1\sqrt{k-2}}^{(k)} C_{3\sqrt{k-2}}^{(k)} = \frac{1}{M_{\sqrt{k}}^{(k)+}} \frac{\chi_{\sqrt{k-1}}^+}{\chi_{\sqrt{k}}^+} C_{1\sqrt{k-2}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{k-2}}^{(k-1)} \times (-A_{\sqrt{k}}^+) e^{\chi_{\sqrt{k-2}}^+ d_k} \quad (3.30a.k-2)$$

$$C_{2\sqrt{k-2}}^{(k)} C_{3\sqrt{k-2}}^{(k)} = \frac{1}{M_{\sqrt{k}}^{(k)-}} \frac{\chi_{\sqrt{k-1}}^-}{\chi_{\sqrt{k}}^-} C_{2\sqrt{k-2}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{k-2}}^{(k-1)} \times (-A_{\sqrt{k}}^-) e^{\chi_{\sqrt{k-2}}^- d_k} \quad (3.30b.k-2)$$

$$C_{1\sqrt{k-2}}^{(k)} C_{4\sqrt{k-2}}^{(k)} = \frac{1}{M_{\sqrt{k}}^{(k)+}} \frac{\chi_{\sqrt{k-1}}^+}{\chi_{\sqrt{k}}^+} C_{1\sqrt{k-2}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{k-2}}^{(k-1)} \times (-A_{\sqrt{k}}^+) e^{-\chi_{\sqrt{k-2}}^+ d_k} \quad (3.31a.k-2)$$

$$C_{2\sqrt{k-2}}^{(k)} C_{4\sqrt{k-2}}^{(k)} = \frac{1}{M_{\sqrt{k}}^{(k)-}} \frac{\chi_{\sqrt{k-1}}^-}{\chi_{\sqrt{k}}^-} C_{2\sqrt{k-2}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{k-2}}^{(k-1)} \times (-A_{\sqrt{k}}^-) e^{-\chi_{\sqrt{k-2}}^- d_k} \quad (3.31b.k-2)$$

.....

$$C_{1\sqrt{1}}^{(k)} C_{3\sqrt{1}}^{(k)} = \frac{1}{M_{\sqrt{k}}^{(k)+}} \frac{\chi_{\sqrt{k-1}}^+}{\chi_{\sqrt{k}}^+} C_{1\sqrt{1}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{1}}^{(k-1)} (-A_{\sqrt{k}}^+) e^{\chi_{\sqrt{1}}^+ d_k} \quad (3.30a.1)$$

$$C_{2\sqrt{1}}^{(k)} C_{3\sqrt{1}}^{(k)} = \frac{1}{M_{\sqrt{k}}^{(k)-}} \frac{\chi_{\sqrt{k-1}}^-}{\chi_{\sqrt{k}}^-} C_{2\sqrt{1}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{1}}^{(k-1)} (-A_{\sqrt{k}}^-) e^{\chi_{\sqrt{1}}^- d_k} \quad (3.30b.1)$$

$$C_{1\sqrt{1}}^{(k)} C_{4\sqrt{1}}^{(k)} = C_{2\sqrt{1}}^{(k)} C_{4\sqrt{1}}^{(k)} = 0 \quad (3.31.1)$$

gdzie

$$M_{\sqrt{k}}^{(k)+} = \frac{\chi_{\sqrt{k}-1}^{+}}{\chi_{\sqrt{k}}^{+}} \left[ C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{k-1}}^{(k-1)} + C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{k-1}}^{(k-1)} \right] \cosh \chi_{\sqrt{k}}^{+} d_k + \\ + \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \left[ C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{k-1}}^{(k-1)} - C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{k-1}}^{(k-1)} \right] \sinh \chi_{\sqrt{k}}^{+} d_k \quad (3.32a)$$

$$M_{\sqrt{k}}^{(k)-} = \frac{\chi_{\sqrt{k}-1}^{-}}{\chi_{\sqrt{k}}^{-}} \left[ C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{k-1}}^{(k-1)} + C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{k-1}}^{(k-1)} \right] \cosh \chi_{\sqrt{k}}^{-} d_k + \\ + \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \left[ C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{k-1}}^{(k-1)} - C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{k-1}}^{(k-1)} \right] \sinh \chi_{\sqrt{k}}^{-} d_k \quad (3.32b)$$

Z rozwiązań ogólnych (3.21a), (3.21b), (3.23a), (3.23b) wynika, że sumy i różnice stałych dla środowiska składającego się z  $k-1$  warstw wynoszą

$$C_{1\sqrt{i}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{i}}^{(k-1)} e^{-\chi_{\sqrt{i}}^{+} z} + C_{1\sqrt{i}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{i}}^{(k-1)} e^{\chi_{\sqrt{i}}^{+} z} = \\ = H_{x\sqrt{i}}^{(k-1)+}(x,z) e^{j\beta_{\sqrt{i}} x} \quad (3.33a)$$

$$C_{2\sqrt{i}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{i}}^{(k-1)} e^{-\chi_{\sqrt{i}}^{-} z} + C_{2\sqrt{i}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{i}}^{(k-1)} e^{\chi_{\sqrt{i}}^{-} z} = \\ = H_{x\sqrt{i}}^{(k-1)-}(x,z) e^{-j\beta_{\sqrt{i}} x} \quad (3.33b)$$

$$C_{1\sqrt{i}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{i}}^{(k-1)} e^{-\chi_{\sqrt{i}}^{-} z} - C_{1\sqrt{i}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{i}}^{(k-1)} e^{\chi_{\sqrt{i}}^{+} z} = \\ = \frac{\chi_{\sqrt{i}}^{+}}{(-j\omega_{\sqrt{i}}^{+} \mu_i)} E_{y\sqrt{i}}^{(k-1)+}(x,z) e^{j\beta_{\sqrt{i}} x} \quad (3.34a)$$

$$C_{2\sqrt{i}}^{(k-1)} C_{3\sqrt{i}}^{(k-1)} e^{-\chi_{\sqrt{i}}^{-} z} - C_{2\sqrt{i}}^{(k-1)} C_{4\sqrt{i}}^{(k-1)} e^{\chi_{\sqrt{i}}^{-} z} =$$

$$= \frac{\chi_{\nu 1}}{(-j\omega_{\nu 1} \mu_1)} E_{y\nu 1}^{(k-1)}(x, z) e^{-j\beta_{\nu} x} \quad (3.34b)$$

Podstawiając stałe (3.30a.k) ÷ (3.31.1) do rozwiązań ogólnych (3.21a) ÷ (3.23b) oraz uwzględniając zależności (3.33a) ÷ (3.34b) dochodzi się do równań rozkładu pola w postaci:

- dla  $0 \leq z \leq d_k$

$$H_{xk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left[ \frac{1}{\chi_{\nu k}} H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \cosh \chi_{\nu k} (z - d_k) + \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \sinh \chi_{\nu k} (z - d_k) \right] H_{x\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.35k)$$

$$H_{zk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\chi_{\nu k}} \left[ -H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \right] \sinh \chi_{\nu k} (z - d_k) + \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} \left[ -E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \right] \cosh \chi_{\nu k} (z - d_k) \right\} \times \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} H_{z\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.36k)$$

$$E_{yk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\chi_{\nu k}} \left[ -H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \right] \sinh \chi_{\nu k} (z - d_k) + \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} \left[ -E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \right] \cosh \chi_{\nu k} (z - d_k) \right\} \times \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} \frac{\omega_{\nu k} \mu_k}{\omega_{\nu 1} \mu_1} E_{y\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.37k)$$

- dla  $d_k \leq z \leq \sum_{i=k-1}^k d_i$

$$H_{xk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{\chi_{\nu k}} H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \times$$

$$H_{zk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{\nu k-1}^{\mu_{k-1}}} \left[ -E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \right] \times$$

$$\times H_{x\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.35.k-1)$$

$$\times \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} H_{z\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.36.k-1)$$

$$E_{yk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{\nu k-1}^{\mu_{k-1}}} \left[ -E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \right] \times$$

$$\times \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} \frac{\omega_{\nu k-1} \zeta_{\nu k-1}^{\mu_{k-1}}}{\omega_{\nu 1} \zeta_{\nu 1}^{\mu_1}} E_{y\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.37.k-1)$$

$$- \text{ dla } \sum_{i=k-1}^k d_i \leq z \leq \sum_{i=k-2}^k d_i$$

$$H_{xk-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{\chi_{\nu k}} H_{x\nu k-2}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) \times$$

$$\times H_{x\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.35.k-2)$$

$$H_{zk-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-2} \zeta_{\nu k-2}^{\mu_{k-2}}} \left[ -E_{y\nu k-2}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \times$$

$$\times \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} H_{z\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.36.k-2)$$

$$E_{yk-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-2} \zeta_{\nu k-2}^{\mu_{k-2}}} \left[ -E_{y\nu k-2}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \times$$

$$\times \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} \frac{\omega_{\nu k-2} \zeta_{\nu k-2}^{\mu_{k-2}}}{\omega_{\nu 1} \zeta_{\nu 1}^{\mu_1}} E_{y\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.37.k-2)$$

.....

$$- \text{ dla } z \geq \sum_{i=2}^k d_i$$

$$H_{x1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{\chi_{\nu k}} H_{x\nu 1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) H_{x\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.35.1)$$

$$H_{z1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu 1} \epsilon^{\mu_1}} \left[ - E_{y\nu 1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \times \\ \times \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} H_{z\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.36.1)$$

$$E_{y1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu 1} \epsilon^{\mu_1}} \left[ - E_{y\nu 1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \times \\ \times \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} E_{y\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.37.1)$$

w których

$$M_{\nu k}^{(k)} = \frac{1}{\chi_{\nu k}} H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \cosh \chi_{\nu k} d_k - \frac{\mu_{k-1}}{\epsilon^{\mu_k}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \epsilon^{\mu_{k-1}}} \times \\ \times E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \sinh \chi_{\nu k} d_k \quad (3.38)$$

oraz

$$H_{x\nu 1}^{(1)+}(x, 0) = - A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x} \quad (3.39a)$$

$$H_{x\nu 1}^{(1)-}(x, 0) = - A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x} \quad (3.39b)$$

$$H_{z\nu 1}^{(1)+}(x, 0) = j \frac{\beta_{\nu}}{\chi_{\nu 1}^{+}} A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x} \quad (3.40a)$$

$$H_{z\nu 1}^{(1)-}(x, 0) = -j \frac{\beta_{\nu}}{\chi_{\nu 1}^{-}} A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x} \quad (3.40b)$$

$$E_{y\nu 1}^{(1)+}(x, 0) = \frac{j \omega_{\nu 1}^{+} \epsilon^{\mu_1}}{\chi_{\nu 1}^{+}} A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x} \quad (3.41a)$$

$$E_{y\nu 1}^{(1)-}(x, 0) = \frac{j \omega_{\nu 1}^{-} \epsilon^{\mu_1}}{\chi_{\nu 1}^{-}} A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x} \quad (3.41b)$$

Równania (3.35k) ÷ (3.38) są słuszne zarówno dla pola współbieżnego jak i przeciwbieżnego. Należy tylko pamiętać, że w przypadku fali obciążenia liniowego  $A_{\nu}^{+} \exp(-j\beta_{\nu} x)$  dla wielkości  $\omega_{\nu 1}$ ,  $\chi_{\nu 1}$ ,  $M_{\nu i}^{(k)}$  obowiązuje indeks "+", dla  $A_{\nu}^{-} \exp(j\beta_{\nu} x)$  natomiast - indeks "-".

W celu uzyskania równań rozkładu pola elektromagnetycznego w przetworniku o części wtórnej składającej się z dowolnej liczby  $k$  warstw na podstawie zależności rekurencyjnych (3.35.k) ÷ (3.38), wystarczy znać wyrażenia na poszczególne składowe pola w przetworniku o jednorodnej części wtórnej. Modelem fizycznym takiego przetwornika może być jednostronny silnik indukcyjny liniowy płaski, bez części wtórnej ( $\kappa_{\gamma 1}^+ = \kappa_{\gamma 1}^- = \beta_{\gamma}$ ). Pełne równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przetworniku o jednorodnej części wtórnej można otrzymać na podstawie równań (3.39a) ÷ (3.41b), uzupełniając ich prawe strony o czynnik  $\exp(-\kappa_{\gamma 1}^+ z)$  lub  $\exp(-\kappa_{\gamma 1}^- z)$ .

### 3.5. Równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przypadku części pierwotnej o biegunach jawnych

W przetworniku, którego część pierwotna posiada bieguny jawne przyjęto, że znany jest rozkład indukcji magnetycznej na powierzchni części wtórnej. Rozkład indukcji wzdłuż podziałki biegunowej, niezmienny względem długości maszyny opisuje równanie :

$$b(x,t) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[ B_{\gamma}^+ e^{j(\omega s_{\gamma}^+ t - \beta_{\gamma} x)} + B_{\gamma}^- e^{j(\omega s_{\gamma}^- t + \beta_{\gamma} x)} \right] b_{\gamma} \quad (3.42)$$

w którym:

$B_{\gamma}^+, B_{\gamma}^-$  - amplitudy fal indukcji magnetycznej przemieszczających się w kierunku zgodnym oraz przeciwnym do współrzędnej  $x$  ;

$b_{\gamma}$  - współczynnik zależny od rozkładu indukcji wzdłuż podziałki biegunowej (współrzędnej  $x$ ) [3.6] .

Podobnie jak w przypadku części pierwotnej o biegunach utajonych, czynnik czasowy  $\exp(j\omega s_{\gamma}^+ t)$  oraz  $\exp(j\omega s_{\gamma}^- t)$  zostanie pominięty.

Oddziaływanie pola magnetycznego prądów wirowych części wtórnej na pole magnetyczne części pierwotnej można uwzględnić wprowadzając do równania (3.42) amplitudy  $B_{\gamma}^+, B_{\gamma}^-$  indukcji wypadkowej w szczelinie powietrznej, np. zmierzonej teslo - mierzem lub uzyskanej z obliczeń w wyniku procesu iteracyjnego.

Model przetwornika o biegunach jawnych przedstawiono na

rys. 3.3. Układ współrzędnych przemieszcza się z prędkością liniową  $v_1$  części wtórnej. Ostatnią  $k$ -tą warstwą jest szcze-  
lina powietrzna, pozostałe warstwy  $1 \leq i \leq k-1$  mogą być za-  
równo przewodnikami jak i dielektrykami.

Rozwiązanie ogólne równania (3.12) dla składowej magnetycznej normalnej  $H_{zi}^{(k)}$  ma postać:

$$H_{zi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-j\beta_{\nu}x} \left[ C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^{+}z} + C_{1\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^{+}z} \right] \quad (3.43a)$$

$$H_{zi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{j\beta_{\nu}x} \left[ C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^{-}z} + C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^{-}z} \right] \quad (3.43b)$$

Na podstawie warunków  $\text{div } \vec{B}_i^{(k)} = 0$  oraz  $\text{rot } \vec{E}_i^{(k)} = -j\omega_{\nu i} \mu_i \vec{H}_i^{(k)}$  otrzymuje się wyrażenia na pozostałe składowe:

$$H_{xi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} j \frac{\chi_{\nu i}^{+}}{\beta_{\nu}} e^{-j\beta_{\nu}x} \left[ C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^{+}z} - C_{1\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^{+}z} \right] \quad (3.44a)$$

$$H_{xi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-j \frac{\chi_{\nu i}^{-}}{\beta_{\nu}}) e^{j\beta_{\nu}x} \left[ C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^{-}z} - C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^{-}z} \right] \quad (3.44b)$$

$$E_{yi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} j\omega_{\nu i} \mu_i (-j \frac{1}{\beta_{\nu}}) e^{-j\beta_{\nu}x} \left[ C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^{+}z} + C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^{+}z} \right] \quad (3.45a)$$

$$E_{yi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} j\omega_{\nu i} \mu_i (j \frac{1}{\beta_{\nu}}) e^{j\beta_{\nu}x} \left[ C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^{-}z} + C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^{-}z} \right] \quad (3.45b)$$

Wszystkie stałe  $C_{1\nu i}^{(k)}$ ,  $C_{2\nu i}^{(k)}$ ,  $C_{3\nu i}^{(k)}$ ,  $C_{4\nu i}^{(k)}$  można wyznaczyć na podstawie równości składowych normalnych indukcji na powierzchni granicznej  $z=0$ , wykorzystując równania (3.42) oraz (3.43a), (3.43b), tzn.:





$$B_{\nu}^{+} b_{\nu} e^{-j\beta_{\nu} x} = e^{-j\beta_{\nu} x} [C_{1\nu k}^{(k)} C_{3\nu k}^{(k)} + C_{1\nu k}^{(k)} C_{4\nu k}^{(k)}] \quad (3.46a)$$

$$B_{\nu}^{-} b_{\nu} e^{j\beta_{\nu} x} = e^{j\beta_{\nu} x} [C_{2\nu k}^{(k)} C_{3\nu k}^{(k)} + C_{2\nu k}^{(k)} C_{4\nu k}^{(k)}] \quad (3.46b)$$

oraz z dalszych warunków brzegowych (3.25,k) ÷ (3.26.2). Ponadto dla  $z \rightarrow \infty$  znikają stałe  $C_{1\nu 1}^{(k)} C_{4\nu 1}^{(k)}$  oraz  $C_{2\nu 1}^{(k)} C_{4\nu 1}^{(k)}$  (3.27).

Dla części wtórnej składającej się z  $k-1$  warstw sumy i różnice stałych można wyznaczyć na podstawie rozwiązań ogólnych (3.44a) ÷ (3.45b):

$$\begin{aligned} & C_{1\nu i}^{(k-1)} C_{3\nu i}^{(k-1)} e^{-\chi_{\nu i}^{+} z} + C_{1\nu i}^{(k-1)} C_{4\nu i}^{(k-1)} e^{\chi_{\nu i}^{+} z} = \\ & = \frac{1}{j\omega_{\nu i}^{+} \mu_i (-j/\beta_{\nu}) e^{-j\beta_{\nu} x}} E_{y\nu i}^{(k-1)+}(x,z) \end{aligned} \quad (3.47a)$$

$$\begin{aligned} & C_{2\nu i}^{(k-1)} C_{3\nu i}^{(k-1)} e^{-\chi_{\nu i}^{-} z} + C_{2\nu i}^{(k-1)} C_{4\nu i}^{(k-1)} e^{\chi_{\nu i}^{-} z} = \\ & = \frac{1}{j\omega_{\nu i}^{-} \mu_i (j/\beta_{\nu}) e^{j\beta_{\nu} x}} E_{y\nu i}^{(k-1)-}(x,z) \end{aligned} \quad (3.47b)$$

$$\begin{aligned} & C_{1\nu i}^{(k-1)} C_{3\nu i}^{(k-1)} e^{-\chi_{\nu i}^{+} z} - C_{1\nu i}^{(k-1)} C_{4\nu i}^{(k-1)} e^{\chi_{\nu i}^{+} z} = \\ & = \frac{1}{(j\chi_{\nu i}^{+} / \beta_{\nu}) e^{-j\beta_{\nu} x}} H_{x\nu i}^{(k-1)+}(x,z) \end{aligned} \quad (3.48a)$$

$$\begin{aligned} & C_{2\nu i}^{(k-1)} C_{3\nu i}^{(k-1)} e^{-\chi_{\nu i}^{-} z} - C_{2\nu i}^{(k-1)} C_{4\nu i}^{(k-1)} e^{\chi_{\nu i}^{-} z} = \\ & = \frac{1}{(-j\chi_{\nu i}^{-} / \beta_{\nu}) e^{j\beta_{\nu} x}} H_{x\nu i}^{(k-1)-}(x,z) \end{aligned} \quad (3.48b)$$

Po wyznaczeniu stałych  $C_{1\nu i}^{(k)}$ ,  $C_{2\nu i}^{(k)}$ ,  $C_{3\nu i}^{(k)}$ ,  $C_{4\nu i}^{(k)}$  na podstawie warunków (3.46a), (3.46b), (3.25.k) ÷ (3.27), podstawieniu ich do rozwiązań ogólnych (3.43a) ÷ (3.45b) oraz uwzględnieniu zależności (3.47a) ÷ (3.48b) otrzymuje się równania rozkładu pola:

- dla  $0 \leq z \leq d_k$

$$\begin{aligned}
 H_{xk}^{(k)} = & \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left[ \frac{1}{\gamma_{\nu k}} H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x,0) \cosh \gamma_{\nu k} (z-d_k) + \right. \\
 & + \left. \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x,0) \sinh \gamma_{\nu k} (z-d_k) \right] \times \\
 & \times \frac{\gamma_{\nu k}}{\gamma_{\nu 1}} \frac{\zeta_1^{\mu_1}}{\zeta_k^{\mu_k}} H_{x\nu 1}^{(1)}(x,0) \quad (3.49.k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{zk}^{(k)} = & \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\gamma_{\nu k}} \left[ -H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x,0) \right] \sinh \gamma_{\nu k} (z-d_k) + \right. \\
 & + \left. \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} \left[ -E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x,0) \right] \cosh \gamma_{\nu k} (z-d_k) \right\} \times \\
 & \times \frac{\zeta_1^{\mu_1}}{\zeta_k^{\mu_k}} H_{z\nu 1}^{(1)}(x,0) \quad (3.50.k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{yk}^{(k)} = & \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\gamma_{\nu k}} \left[ -H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x,0) \right] \sinh \gamma_{\nu k} (z-d_k) + \right. \\
 & + \left. \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} \left[ -E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x,0) \right] \cosh \gamma_{\nu k} (z-d_k) \right\} \times \\
 & \times \frac{\omega_{\nu k}}{\omega_{\nu 1}} E_{y\nu 1}^{(1)}(x,0) \quad (3.51.k)
 \end{aligned}$$

$$- \text{ dla } d_k \leq z \leq \sum_{i=k-1}^k d_i$$

$$H_{xk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{\gamma_{\nu k-1}} H_{x\nu k-1}^{(k-1)} \left( x, z - \sum_{i=k-1}^k d_i \right) \frac{\gamma_{\nu k-1}}{\gamma_{\nu 1}} \times \\ \times \frac{\mu_1}{\mu_k} H_{z\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.49.k-1)$$

$$H_{zk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{\nu k-1}^{\mu_{k-1}}} \left[ - E_{y\nu k-1}^{(k-1)} \left( x, z - \sum_{i=k-1}^k d_i \right) \right] \times \\ \times \frac{\mu_1}{\mu_k} H_{z\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.50.k-1)$$

$$E_{yk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{\nu k-1}^{\mu_{k-1}}} \left[ - E_{y\nu k-1}^{(k-1)} \left( x, z - \sum_{i=k-1}^k d_i \right) \right] \times \\ \times \frac{\omega_{\nu k-1}}{\omega_{\nu 1}} \frac{\zeta_{\nu k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_{\nu 1}} E_{y\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.51.k-1)$$

$$- \text{ dla } \sum_{i=k-1}^k d_i \leq z \leq \sum_{i=k-2}^k d_i$$

$$H_{xk-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{\gamma_{\nu k-2}} H_{x\nu k-2}^{(k-1)} \left( x, z - \sum_{i=k-2}^k d_i \right) \times \\ \times \frac{\gamma_{\nu k-2}}{\gamma_{\nu 1}} \frac{\mu_1}{\mu_k} H_{x\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.49.k-2)$$

$$H_{zk-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-2} \zeta_{\nu k-2}^{\mu_{k-2}}} \left[ - E_{y\nu k-2}^{(k-1)} \left( x, z - \sum_{i=k-2}^k d_i \right) \right] \times \\ \times \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{z\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.50.k-2)$$

$$E_{y k-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-2} \zeta_{\nu k-2}^{\mu_{k-2}}} \left[ - E_{y\nu k-2}^{(k-1)} \left( x, z - \sum_{i=k-2}^k d_i \right) \right] \times$$

$$\times \frac{\omega_{\nu k-2}}{\omega_{\nu 1}} \frac{z^{\mu_{k-2}}}{z^{\mu_k}} E_{y\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.51.k-2)$$

.....

- dla  $z = \sum_{i=2}^k d_i$

$$H_{x\nu 1}^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{\kappa_{\nu 1}} H_{x\nu 1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) \frac{z^{\mu_1}}{z^{\mu_k}} H_{x\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.49.1)$$

$$H_{z\nu 1}^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j\omega_{\nu 1} z^{\mu_1}} \left[ - E_{y\nu 1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right]^x$$

$$\times \frac{z^{\mu_1}}{z^{\mu_k}} H_{z\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.50.1)$$

$$E_{y\nu 1}^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j\omega_{\nu 1} z^{\mu_1}} \left[ - E_{y\nu 1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right]^x \times \frac{z^{\mu_1}}{z^{\mu_k}} E_{y\nu 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.51.1)$$

w których

$$M_{\nu k}^{(k)} = \frac{1}{\kappa_{\nu k}} H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \sinh \kappa_{\nu k} d_k - \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} z^{\mu_{k-1}}} \times \times \frac{z^{\mu_{k-1}}}{z^{\mu_k}} E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \cosh \kappa_{\nu k} d_k \quad (3.52)$$

oraz

$$H_{x\nu 1}^{(1)+}(x, 0) = j \frac{\kappa_{\nu 1}^+}{\beta_{\nu}} \frac{1}{z^{\mu_1}} B_{\nu}^+ b_{\nu} e^{-j\beta_{\nu} x} \quad (3.53a)$$

$$H_{x\nu 1}^{(1)-}(x, 0) = -j \frac{\kappa_{\nu 1}^-}{\beta_{\nu}} \frac{1}{z^{\mu_1}} B_{\nu}^- b_{\nu} e^{j\beta_{\nu} x} \quad (3.53b)$$

$$H_{z\nu 1}^{(1)+}(x, 0) = \frac{1}{z^{\mu_1}} B_{\nu}^+ b_{\nu} e^{-j\beta_{\nu} x} \quad (3.54a)$$

$$H_{z \nu 1}^{(1)-}(x,0) = \frac{1}{\epsilon_{\nu 1}} E_{\nu}^{-} b_{\nu} e^{j \beta_{\nu} x} \quad (3.54b)$$

$$E_{y \nu 1}^{(1)+}(x,0) = j \omega_{\nu 1}^{+} \epsilon_{\nu 1} \left(-j \frac{1}{\beta_{\nu}}\right) \frac{1}{\epsilon_{\nu 1}} E_{\nu}^{+} b_{\nu} e^{-j \beta_{\nu} x} \quad (3.55a)$$

$$E_{y \nu 1}^{(1)-}(x,0) = j \omega_{\nu 1}^{-} \epsilon_{\nu 1} \left(j \frac{1}{\beta_{\nu}}\right) \frac{1}{\epsilon_{\nu 1}} E_{\nu}^{-} b_{\nu} e^{j \beta_{\nu} x} \quad (3.55b)$$

W równaniach (3.49.k) ÷ (3.52) dla pola współbieżnego wielkości  $\omega_{\nu 1}$ ,  $\chi_{\nu 1}$ ,  $M_{\nu 1}^{(k)}$  są z indeksem „+”, dla przeciwbieżnego zaś - z indeksem „-”. Po uzupełnieniu prawych stron równań (3.53a) ÷ (3.55b) o czynnik  $\exp(-\chi_{\nu 1}^{+} z)$  lub  $\exp(-\chi_{\nu 1}^{-} z)$  otrzymuje się pełne równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przetworniku o jednorodnej części wtórnej.

### 3.6. Impedancja

Wyrażenia na impedancje dla  $\nu$ -tych harmonicznych są takie same w przypadku przetwornika o biegunach utajonych jak i o biegunach jawnych. Impedancję jednostkową w kierunku współrzędnej  $y$  części wtórnej jednorodnej (półprzestrzeni) wyznacza się na podstawie równań (3.39a), (3.39b), (3.41a), (3.41b) lub (3.53a), (3.53b), (3.55a), (3.55b)

$$z_{y \nu 1}^{(1)} = \frac{E_{y \nu 1}^{(1)}(x,0)}{H_{x \nu 1}^{(1)}(x,0)} = -j \frac{\omega_{\nu 1} \epsilon_{\nu 1}}{\chi_{\nu 1}} \quad (3.56)$$

Dla części wtórnej składającej się z  $k$  warstw impedancję jednostkową określają natomiast równania (3.35.k), (3.37.k) lub (3.49.k), (3.51.k)

$$z_{y \nu k}^{(k)} = \left[ \frac{E_{y \nu k}^{(k)}}{H_{x \nu k}^{(k)}} \right]_{z=0} = -j \frac{\omega_{\nu k} \epsilon_{\nu k}}{\chi_{\nu k}} x$$

$$\frac{1}{\chi_{\nu k}} \sinh \chi_{\nu k} d_k - \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \epsilon_{\nu k-1}} \frac{\epsilon_{\nu k-1}}{\epsilon_{\nu k}} z_{y \nu k-1}^{(k-1)} \cosh \chi_{\nu k} d_k$$


---


$$\frac{1}{\chi_{\nu k}} \cosh \chi_{\nu k} d_k - \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \epsilon_{\nu k-1}} \frac{\epsilon_{\nu k-1}}{\epsilon_{\nu k}} z_{y \nu k-1}^{(k-1)} \sinh \chi_{\nu k} d_k \quad (3.57)$$

Podobnie jak w przypadku pola jednowymiarowego, wyrażenie (3.57) jest celowo przedstawić w postaci następującego iloczynu (indeks  $y^n$  pominięto):

$$z_{\sqrt{k}}^{(k)} = z_{\sqrt{1}}^{(1)} \underbrace{\left[ \frac{z_{\sqrt{2}}^{(2)}}{z_{\sqrt{1}}^{(1)}} \right] \left[ \frac{z_{\sqrt{3}}^{(3)}}{z_{\sqrt{2}}^{(2)}} \right] \cdots \left[ \frac{z_{\sqrt{k-1}}^{(k-1)}}{z_{\sqrt{k-2}}^{(k-2)}} \right]}_{z_{\sqrt{k-1}}^{(k-1)}} \left[ \frac{z_{\sqrt{k}}^{(k)}}{z_{\sqrt{k-1}}^{(k-1)}} \right] \quad (3.58)$$

w którym

$$z_{\sqrt{1}}^{(1)} = -j \frac{\omega_{\sqrt{1}} \mu_1}{\kappa_{\sqrt{1}}} \quad (3.59.1)$$

$$\frac{z_{\sqrt{2}}^{(2)}}{z_{\sqrt{1}}^{(1)}} = \frac{-\frac{1}{z_{\sqrt{1}}^{(1)}} \frac{j \omega_{\sqrt{2}} \mu_2}{\kappa_{\sqrt{2}}} \sinh \kappa_{\sqrt{2}} d_2 + \frac{\omega_{\sqrt{2}}}{\omega_{\sqrt{1}}} \cosh \kappa_{\sqrt{2}} d_2}{\cosh \kappa_{\sqrt{2}} d_2 - \frac{\omega_{\sqrt{2}}}{\omega_{\sqrt{1}}} \frac{\kappa_{\sqrt{2}}}{j \omega_{\sqrt{2}} \mu_2} z_{\sqrt{1}}^{(1)} \sinh \kappa_{\sqrt{2}} d_2} \quad (3.59.2)$$

$$\frac{z_{\sqrt{3}}^{(3)}}{z_{\sqrt{2}}^{(2)}} = \frac{-\frac{1}{z_{\sqrt{2}}^{(2)}} \frac{j \omega_{\sqrt{3}} \mu_3}{\kappa_{\sqrt{3}}} \sinh \kappa_{\sqrt{3}} d_3 + \frac{\omega_{\sqrt{3}}}{\omega_{\sqrt{2}}} \cosh \kappa_{\sqrt{3}} d_3}{\cosh \kappa_{\sqrt{3}} d_3 - \frac{\omega_{\sqrt{3}}}{\omega_{\sqrt{2}}} \frac{\kappa_{\sqrt{3}}}{j \omega_{\sqrt{3}} \mu_3} z_{\sqrt{2}}^{(2)} \sinh \kappa_{\sqrt{3}} d_3} \quad (3.59.3)$$

.....

$$\frac{z_{\sqrt{k}}^{(k)}}{z_{\sqrt{k-1}}^{(k-1)}} = \frac{-\frac{1}{z_{\sqrt{k-1}}^{(k-1)}} \frac{j \omega_{\sqrt{k}} \mu_k}{\kappa_{\sqrt{k}}} \sinh \kappa_{\sqrt{k}} d_k + \frac{\omega_{\sqrt{k}}}{\omega_{\sqrt{k-1}}} \cosh \kappa_{\sqrt{k}} d_k}{\cosh \kappa_{\sqrt{k}} d_k - \frac{\omega_{\sqrt{k}}}{\omega_{\sqrt{k-1}}} \frac{\kappa_{\sqrt{k}}}{j \omega_{\sqrt{k}} \mu_k} z_{\sqrt{k-1}}^{(k-1)} \sinh \kappa_{\sqrt{k}} d_k} \quad (3.59.k)$$

Dla  $i$ -tej warstwy przewodzącej wyrażenie  $j \omega_{\sqrt{i}} \mu_i / \kappa_{\sqrt{i}}$  wynosi:

$$\frac{j \omega_{\sqrt{i}} \mu_i}{\kappa_{\sqrt{i}}} = (c_{R\sqrt{i}} + j c_{X\sqrt{i}}) \frac{k_{\sqrt{i}}}{\gamma_i} \quad (3.60)$$

gdzie

$$c_{R\gamma l} = \frac{2 a_{Rl} a_{Xl} a_{X\gamma l} + (a_{Rl}^2 - a_{Xl}^2) a_{R\gamma l}}{a_{R\gamma l}^2 + a_{X\gamma l}^2} \quad (3.61)$$

$$c_{X\gamma l} = \frac{2 a_{Rl} a_{Xl} a_{R\gamma l} - (a_{Rl}^2 - a_{Xl}^2) a_{X\gamma l}}{a_{R\gamma l}^2 + a_{X\gamma l}^2} \quad (3.62)$$

dla l-tej warstwy nieprzewodzącej natomiast:

$$\frac{j\omega_{\gamma l} \mu_l}{\chi_{\gamma l}} = \frac{j\omega_{\gamma l} \mu_l}{\beta_{\gamma}} \quad (3.63)$$

Impedancję jednostkową części wtórnej wyznacza się na podstawie równań (3.35.k), (3.37.k), lub (3.49.k), (3.51.k) dla współrzędnej  $z = d_k$ :

$$z_{y\gamma k-1}^{(k)} = \left[ \begin{array}{c} E_{y\gamma k}^{(k)} \\ H_{x\gamma k}^{(k)} \end{array} \right]_{z=d_k} = \frac{\omega_{\gamma k}}{\omega_{\gamma k-1}} z_{y\gamma k-1}^{(k-1)} \quad (3.64)$$

Jeżeli rozpatrywać przetwornik indukcyjny w układzie współrzędnych związanym z częścią wtórną, to  $\omega_{\gamma k} = \omega_{\gamma k-1}$ , przy czym  $\omega_{\gamma k}$  - pulsacja pola w szczelinie powietrznej, jeżeli w układzie współrzędnych związanym z częścią pierwotną to  $\omega_{\gamma k} = \omega$ ,  $\omega_{\gamma k-1} = \omega s_{\gamma}$ , zatem (pomijając indeks „y”):

$$z_{\gamma k-1}^{(k)} = \frac{1}{s_{\gamma}} z_{\gamma k-1}^{(k-1)} \quad (3.65)$$

Taką impedancję w obwodzie części wtórnej powinien zawierać schemat zastępczy, gdyż w teorii obwodowej przetworników indukcyjnych zjawiska elektromagnetyczne w części wtórnej rozpatruje się względem części pierwotnej.

Różnica impedancji (3.58) półprzestrzeni znajdującej się poza częścią pierwotną oraz impedancji (3.65) części wtórnej wynosi:

$$z_{\gamma k}^{(k)} - z_{\gamma k-1}^{(k)} = z_{\gamma k-1}^{(k-1)} \left[ \frac{z_{\gamma k}^{(k)}}{z_{\gamma k-1}^{(k-1)}} - \frac{1}{s_{\gamma}} \right] \quad (3.66)$$

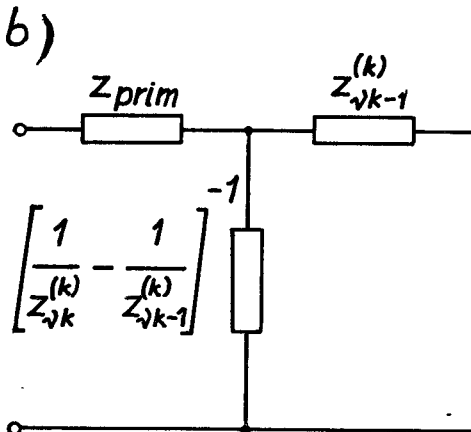
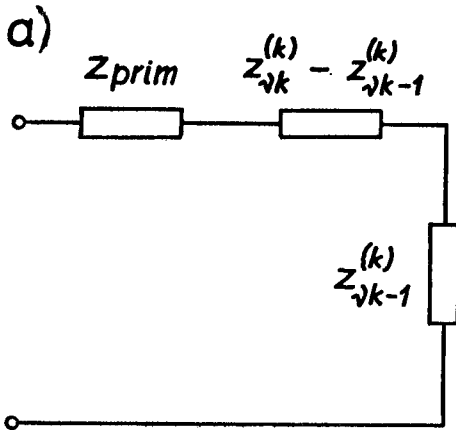
Jest to impedancja dla strat mocy elektromagnetycznej w szczelinie powietrznej włączona w szereg w schemacie zas-



tępczym - rys. 3.4a wraz z impedancją części wtórnej (3.65). Celowo operuje się tutaj pojęciem „straty mocy w szczelinie powietrznej”, gdyż już obecnie opracowuje się konstrukcje maszyn indukcyjnych specjalnych o szczelinach wypełnionych proszkiem lub cieczą ferromagnetyczną. Impedancji szeregowej odpowiada impedancja:

$$\left[ \frac{1}{z_{\sqrt{k}}^{(k)}} - \frac{1}{z_{\sqrt{k-1}}^{(k)}} \right]^{-1} = z_{\sqrt{k}}^{(k)} \left[ \frac{1}{s_{\sqrt{k}}} \frac{z_{\sqrt{k-1}}^{(k-1)}}{z_{\sqrt{k}}^{(k)}} - 1 \right]^{-1} \quad (3.67)$$

wiączona równolegle z impedancją (3.65), którą zawiera gałąź poprzeczna schematu zastępczego typu T przedstawionego na rys. 3.4b.



Rys. 3.4. Schemat zastępczy przetwornika indukcyjnego o wielowarstwowej części wtórnej dla  $\sqrt{k}$ -tej harmonicznej pola;

a) połączenie szeregowe impedancji  $z_{\sqrt{k}}^{(k)} - z_{\sqrt{k-1}}^{(k)}$  oraz  $z_{\sqrt{k-1}}^{(k)}$ ;

b) połączenie równoległe impedancji  $\left[ \frac{1}{z_{\sqrt{k}}^{(k)}} - \frac{1}{z_{\sqrt{k-1}}^{(k)}} \right]^{-1}$  oraz  $z_{\sqrt{k-1}}^{(k)}$

Wprowadzony przez Laithwaite'a dla przetworników o ruchu postępowym współczynnik dobroci [3.1, 3.2] można wyrazić wzorem ogólnym :

$$G = \frac{\operatorname{Im} \left\{ z_{\gamma k}^{(k)} \left[ \frac{1}{s_{\gamma}} \frac{z_{\gamma k-1}^{(k-1)}}{z_{\gamma k}^{(k)}} - 1 \right]^{-1} \right\}}{\operatorname{Re} \left[ z_{\gamma k-1}^{(k-1)} \right]} \frac{\omega_{\gamma k-1}}{\omega_{\gamma k}} \quad (3.68)$$

### 3.7. Moc elektromagnetyczna

Moc elektromagnetyczna wyraża się takimi samymi zależnościami zarówno dla przetworników o biegunach utajonych jak i o biegunach jawnych.

Moc elektromagnetyczną jednostkową przekazywaną z części pierwotnej do części wtórnej wyraża składowa normalna wektora Poyntinga:

$$\begin{aligned} \pi_{zk}^{(k)} &= p_k^{(k)} + j q_k^{(k)} = -0,5 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[ E_{y\gamma k}^{(k)} H_{x\gamma k}^{*(k)} \right]_{z=0} \\ &= -0,5 \sum_{\gamma=1}^{\infty} z_{y\gamma k}^{(k)} |H_{x\gamma k}^{(k)}|_{z=0}^2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

gdzie

$$E_{y\gamma k}^{(k)} H_{x\gamma k}^{*(k)} = z_{y\gamma k}^{(k)} |H_{x\gamma k}^{(k)}|_{z=0}^2 \quad (3.70)$$

Ponadto dla części pierwotnej o biegunach utajonych

$$|H_{x\gamma k}^{(k)}|_{z=0} = |H_{x\gamma 1}^{(1)}(x,0)| = |A_{\gamma}| \quad (3.71)$$

Analogicznie oblicza się jednostkowe straty mocy w części wtórnej :

$$\begin{aligned} \pi_{zk-1}^{(k)} &= \Delta p_{k-1}^{(k)} + j \Delta q_{k-1}^{(k)} = -0,5 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[ E_{y\gamma k}^{(k)} H_{x\gamma k}^{*(k)} \right]_{z=d_k} = \\ &= -0,5 \sum_{\gamma=1}^{\infty} z_{y\gamma k}^{(k)} |H_{x\gamma k}^{(k)}|_{z=d_k}^2 = \\ &= -0,5 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\omega_{\gamma k}}{\omega_{\gamma k-1}} z_{y\gamma k-1}^{(k-1)} |H_{x\gamma k}^{(k)}|_{z=d_k}^2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

W układzie współrzędnych związanym z częścią pierwotną wyrażenie (3.72) przybiera postać :

$$\Pi_{zk-1}^{(k)} = -0,5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{s_{\nu}} z_{y\nu k-1}^{(k)} \left| H_{x\nu k}^{(k)} \right|_{z=d_k}^2 \quad (3.73)$$

Rozpatrując przetwornik indukcyjny według teorii obwodowej, jest to moc tracona na impedancji w obwodzie części wtórnej schematu zastępczego - rys. 3.4 (moc mechaniczna oraz straty mocy w części wtórnej).

Moc elektromagnetyczna tracona w szczelinie powietrznej wynosi (pominięto indeks „y” przy impedancjach):

$$\begin{aligned} \Pi_{zk}^{(k)} - \Pi_{zk-1}^{(k)} = & -0,5 \sum_{\nu=1}^{\infty} z_{y\nu k-1}^{(k-1)} \left[ \frac{z_{y\nu k}^{(k)}}{z_{y\nu k-1}^{(k-1)}} \left| H_{x\nu k}^{(k)} \right|_{z=0}^2 + \right. \\ & \left. - \frac{1}{s_{\nu}} \left| H_{x\nu k}^{(k)} \right|_{z=d_k}^2 \right] \quad (3.74) \end{aligned}$$

### 3.8. Siły wzajemnego oddziaływania między częścią pierwotną a częścią wtórną

Siły od  $\nu$ -tych harmonicznych pola magnetycznego części pierwotnej na jednostkę powierzchni  $i$ -tej warstwy części wtórnej można obliczyć na podstawie równania Lorentza. Poszczególne składowe sił jednostkowych wynoszą:

- w kierunku współrzędnej  $x$

$$f_{x\nu i}^{(k)} = 0,5 \gamma_i \operatorname{Re} \left[ \mathcal{U}_i^* \int_{\sum_{i+1}^k d_i}^{\sum_1^k d_i} E_{y\nu i}^{(k)} H_{z\nu i}^{*(k)} dz \right] \quad (3.75)$$

- w kierunku współrzędnej  $z$

$$f_{z\nu i}^{(k)} = -0,5 \gamma_i \operatorname{Re} \left[ \mathcal{U}_i^* \int_{\sum_{i+1}^k d_i}^{\sum_1^k d_i} E_{y\nu i}^{(k)} H_{x\nu i}^{*(k)} dz \right] \quad (3.76)$$

Jeżeli przenikalność magnetyczna  $\mu_{ri} \cong 1$  (warstwa paramagnetyczna lub diamagnetyczna), to siła  $f_{zi}^{(k)}$  ma zawsze zwrot zgodny ze zwrotem współrzędnej  $z$  i występuje odpychanie części wtórnej przez część pierwotną. Jeżeli  $\mu_{ri} \gg 1$ , to oprócz siły oddziaływania prądów wirowych w części wtórnej na pole magnetyczne części pierwotnej występuje siła naciągu magnetycznego i zależnie od wartości przenikalności  $\mu_{ri}$  oraz gęstości prądu w części wtórnej - część pierwotna może przyciągać lub odpychać część wtórna.

Inne metody obliczeń sił na gruncie teorii pola są przedmiotem pracy [3.4].

### 3.9. Uwzględnienie anizotropii warstw

Rozważania przedstawione w tym rozdziale są słuszne dla podziałki żłobkowej części wtórnej dużo mniejszej od podziałki biegunowej.

Część wtórna, która posiada żłobki lub otwory w rdzeniu wypełnione np. materiałem przewodowym, bądź też rdzeń ferromagnetyczny w postaci pakietu blach elektrotechnicznych lub wypraski z materiałów proszkowych, charakteryzuje się właściwościami anizotropowymi. Zakłada się, że układ współrzędnych  $x, y, z$  pokrywa się z osiami anizotropii, tzn. występuje układ anizotropii normalnej (w maszynach elektrycznych można wyodrębnić odcinki obwodu magnetycznego, w których linie pola pokrywają się z osiami anizotropii oraz osiami  $x, y, z$ , np. strefa żłobkowo zębowa). Przenikalność magnetyczna rozważanej warstwy anizotropowej w kierunku współrzędnej  $x$  jest inna niż w kierunku współrzędnej  $z$  oraz konduktywność w kierunku współrzędnych  $x$  i  $y$  jest różna [1.12, 3.3, 3.8, 3.10, 3.11]. Ponieważ  $H_{yi}^{(k)} = 0$  oraz  $E_{xi}^{(k)} = E_{zi}^{(k)} = 0$ , więc równania opisujące pole dwuwymiarowe przyjmują postać:

$$\frac{\partial H_{xi}^{(k)}}{\partial z} - \frac{\partial H_{zi}^{(k)}}{\partial x} = \gamma_{yi} E_{yi}^{(k)} \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial E_{yi}^{(k)}}{\partial z} = j\omega_{\nu i} \mu_{xi} H_{xi}^{(k)} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial E_{yi}^{(k)}}{\partial x} = -j \omega_{\nu i} \mu_{zi} H_{zi}^{(k)} \quad (3.79)$$

Wprowadzając operatory  $\frac{\partial}{\partial x} = -j\beta_{\nu}$  - dla pola współbieżnego oraz  $\frac{\partial}{\partial x} = j\beta_{\nu}$  dla pola przeciwbieżnego, zostaje zmieniony zapis równań (3.77) i (3.79) :

$$\frac{\partial H_{xi}^{(k)}}{\partial z} \pm j\beta_{\nu} H_{zi}^{(k)} = \gamma_{yi} E_{yi}^{(k)} \quad (3.80)$$

$$\pm j\beta_{\nu} E_{yi}^{(k)} = j\omega_{\nu i} \mu_{zi} H_{zi}^{(k)} \quad (3.81)$$

Wyznaczając  $H_{zi}^{(k)}$  z równania (3.81) oraz podstawiając do (3.80) otrzymuje się :

$$\frac{\partial H_{xi}^{(k)}}{\partial z^2} + j \frac{\beta_{\nu}^2}{\omega_{\nu i} \mu_{zi}} E_{yi}^{(k)} = \gamma_{yi} E_{yi}^{(k)} \quad (3.82)$$

Po zróżniczkowaniu powyższego równania (3.82) względem  $z$  i podstawieniu równania (3.78), ogólne równanie falowe ma postać :

$$\frac{\partial^2 H_{xi}^{(k)}}{\partial z^2} = \kappa_{\nu i}^2 \frac{\mu_{xi}}{\mu_{zi}} H_{xi}^{(k)} \quad (3.83)$$

gdzie  $\kappa_{\nu i}$  jest wyrażone zależnością (3.17), przy czym :

$$\alpha_{\nu i} = (j \omega_{\nu i} \mu_{zi} \gamma_{yi})^{\frac{1}{2}} \quad (3.84)$$

oraz

$$k_{\nu i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega_{\nu i} \mu_{zi} \gamma_{yi})^{\frac{1}{2}} \quad (3.85)$$

Całką ogólną równania (3.83) jest suma szeregu

$$H_{xi}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ A_{\nu i}^{(k)}(x) e^{-\kappa_{\nu i} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} + B_{\nu i}^{(k)}(x) e^{\kappa_{\nu i} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} \right] \quad (3.86)$$

w której - analogicznie jak w równaniach (3.21a), (3.21b)

- dla pola współbieżnego

$$A_{\nu i}^{(k)}(x) = C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-j\beta_{\nu} x}$$

$$B_{\nu i}^{(k)}(x) = C_{1\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{-j\beta_{\nu} x}$$

- dla pola przeciwbieżnego

$$A_{\nu i}^{(k)}(x) = C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{j\beta_{\nu} x}$$

$$B_{\nu i}^{(k)}(x) = C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{j\beta_{\nu} x}$$

Na podstawie równania (3.78) otrzymuje się rozwiązanie ogólne dla składowej  $E_{yi}^{(k)}$ , natomiast na podstawie (3.77) lub (3.79) - rozwiązania ogólne dla składowej  $H_{zi}^{(k)}$ . Ostatecznie :

$$H_{xi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-j\beta_{\nu} x} \left[ C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\kappa_{\nu i}^{+} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} + C_{1\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\kappa_{\nu i}^{+} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} \right] \quad (3.87a)$$

$$H_{xi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{j\beta_{\nu} x} \left[ C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\kappa_{\nu i}^{+} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} + C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\kappa_{\nu i}^{-} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} \right] \quad (3.87b)$$

$$H_{zi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( -j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu i}^{+}} \sqrt{\frac{\mu_{xi}}{\mu_{zi}}} \right) e^{-j\beta_{\nu} x} \left[ C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\kappa_{\nu i}^{+} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} - C_{1\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\kappa_{\nu i}^{+} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} \right] \quad (3.88a)$$

$$H_{zi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu i}^{-}} \sqrt{\frac{\mu_{xi}}{\mu_{zi}}} e^{j\beta_{\nu} x} \left[ C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\kappa_{\nu i}^{-} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} - C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\kappa_{\nu i}^{-} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} \right] \quad (3.88b)$$

$$E_{yi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( - \frac{j \omega_{\nu i}^{+} \mu_{zi}}{\chi_{\nu i}^{+}} \right) \sqrt{\frac{\mu_{xi}}{\mu_{zi}}} e^{-j \beta_{\nu} x} \left[ C_{1\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^{+} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} - C_{1\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^{-} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} \right] \quad (3.89a)$$

$$E_{yi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( - \frac{j \omega_{\nu i}^{-} \mu_{zi}}{\chi_{\nu i}^{-}} \right) \sqrt{\frac{\mu_{xi}}{\mu_{zi}}} e^{j \beta_{\nu} x} \left[ C_{2\nu i}^{(k)} C_{3\nu i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu i}^{-} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} - C_{2\nu i}^{(k)} C_{4\nu i}^{(k)} e^{\chi_{\nu i}^{-} \sqrt{\mu_{xi}/\mu_{zi}} z} \right] \quad (3.89b)$$

W rozważanym przypadku prądy w części wtórnej płyną tylko w kierunku współrzędnej  $y$  - rozdz. 3.2, dlatego we wszystkich równaniach występuje jedynie konduktywność  $\gamma_y$ . Ponieważ znika konduktywność  $\gamma_x$ , problem znacznie upraszcza się; w przypadku przeciwnym należałoby odpowiednio zmienić wymiary części wtórnej oraz zastosować zmianę układu współrzędnych [3.5].

Uwzględniając anizotropię warstw, równania np. (3.35.k) ÷ (3.38) mają nieco zmienioną postać:

- dla  $0 \leq z \leq d_k$

$$H_{xk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left[ \frac{1}{\chi_{\nu k}} H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x,0) \cosh \chi_{\nu k} \sqrt{\frac{\mu_{xk}}{\mu_{zk}}} (z-d_k) + \frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{zk}} \frac{\sqrt{\mu_{xk-1}/\mu_{zk-1}}}{\sqrt{\mu_{xk}/\mu_{zk}}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \mu_{zk-1}} \sqrt{\frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{xk-1}}} x \right. \\ \left. \times E_{y\nu k-1}^{(k-1)}(x,0) \sinh \chi_{\nu k} \sqrt{\frac{\mu_{xk}}{\mu_{zk}}} (z-d_k) \right] H_{x\nu 1}^{(1)} \quad (3.90.k)$$

$$H_{zk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\chi_{\nu k}} \left[ -H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x,0) \right] x \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sinh \chi_{\nu k} \sqrt{\frac{\mu_{xk}}{\mu_{zk}}} (z - d_k) + \frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{zk}} \frac{\sqrt{\mu_{xk-1}/\mu_{zk-1}}}{\sqrt{\mu_{xk}/\mu_{zk}}} \times \\
 & \times \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \mu_{zk-1}} \sqrt{\frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{xk-1}}} \left[ - E^{(k-1)}(x, 0) \right] \times \\
 & \times \cosh \chi_{\nu k} \sqrt{\frac{\mu_{xk}}{\mu_{zk}}} (z - d_k) \left. \right\} \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} \frac{\sqrt{\mu_{xk}/\mu_{zk}}}{\sqrt{\mu_{x1}/\mu_{z1}}} H_{z\nu 1}^{(1)}(x, 0)
 \end{aligned} \tag{3.91.k}$$

$$\begin{aligned}
 E_{yk}^{(k)} &= \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\chi_{\nu k}} \left[ - H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x, 0) \right] \times \right. \\
 & \times \sinh \chi_{\nu k} \sqrt{\frac{\mu_{xk}}{\mu_{zk}}} (z - d_k) + \frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{zk}} \frac{\sqrt{\mu_{xk-1}/\mu_{zk-1}}}{\sqrt{\mu_{xk}/\mu_{zk}}} \times \\
 & \times \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \mu_{zk-1}} \sqrt{\frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{xk-1}}} \left[ - E^{(k-1)}(x, 0) \right] \times \\
 & \left. \times \cosh \chi_{\nu k} \sqrt{\frac{\mu_{xk}}{\mu_{zk}}} (z - d_k) \right\} \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu k}} \frac{\sqrt{\mu_{xk}/\mu_{zk}}}{\sqrt{\mu_{x1}/\mu_{z1}}} \frac{\omega_{\nu k} \mu_{zk}}{\omega_{\nu 1} \mu_{z1}} \times \\
 & \times E_{y\nu 1}^{(1)}(x, 0)
 \end{aligned} \tag{3.92.k}$$

$$- \text{ dla } d_k \leq z \leq \sum_{i=k-1}^k d_i$$

$$H_{xk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{\chi_{\nu k}} H_{x\nu k-1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) H_{x\nu 1}^{(1)}(x, 0) \tag{3.90.k-1}$$

$$H_{zk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \mu_{zk-1}} \sqrt{\frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{xk-1}}} \times$$



$$\times \left[ - E_{y \setminus k-1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \right] \frac{\kappa_{\setminus 1}}{\kappa_{\setminus k}} \frac{\sqrt{\zeta^{\mu_{xk-1}} / \mu_{zk-1}}}{\sqrt{\zeta^{\mu_{x1}} / \mu_{z1}}} \times$$

$$\times H_{z \setminus 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.91.k-1)$$

$$E_{y \setminus k-1}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jk}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\setminus jk-1} \zeta^{\mu_{zk-1}}} \sqrt{\frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{xk-1}}} \times$$

$$\times \left[ - E_{y \setminus k-1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \right] \frac{\kappa_{\setminus 1}}{\kappa_{\setminus k}} \frac{\omega_{\setminus jk-1} \zeta^{\mu_{zk-1}}}{\omega_{\setminus 1} \zeta^{\mu_{z1}}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\mu_{xk-1} / \mu_{zk-1}}}{\sqrt{\zeta^{\mu_{x1}} / \zeta^{\mu_{z1}}}} E_{y \setminus 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.92.k-1)$$

$$- \text{ dla } \sum_{i=k-1}^k d_i \leq z \leq \sum_{i=k-2}^k d_i$$

$$H_{xk-2}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jk}^{(k)}} \frac{1}{\kappa_{\setminus jk}} H_{x \setminus k-2}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \times$$

$$\times H_{x \setminus 1}^{(1)}(x, 0) \quad (3.90.k-2)$$

$$H_{zk-2}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jk}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\setminus jk-2} \zeta^{\mu_{zk-2}}} \sqrt{\frac{\mu_{zk-2}}{\mu_{xk-2}}} \times$$

$$\times \left[ - E_{y \setminus k-2}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \frac{\kappa_{\setminus 1}}{\kappa_{\setminus k}} \frac{\sqrt{\mu_{xk-2} / \mu_{zk-2}}}{\sqrt{\zeta^{\mu_{x1}} / \zeta^{\mu_{z1}}}} H_{z \setminus 1}^{(1)}(x, 0)$$

$$(3.91.k-2)$$

$$E_{y \setminus k-2}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jk}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\setminus jk-2} \zeta^{\mu_{zk-2}}} \sqrt{\frac{\mu_{zk-2}}{\mu_{xk-2}}} \times$$

$$\times \left[ - E_{y \setminus k-2}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \frac{\kappa_{\setminus 1}}{\kappa_{\setminus k}} \frac{\omega_{\setminus jk-2} \zeta^{\mu_{zk-2}}}{\omega_{\setminus 1} \zeta^{\mu_{z1}}} \times$$

$$\frac{\sqrt{\mu_{xk-2}/\mu_{zk-2}}}{\sqrt{\mu_{x1}/\mu_{z1}}} E_{y\gamma 1}^{(1)}(x,0) \quad (3.92.k-2)$$

.....

- dla  $z \geq \sum_{i=2}^k d_i$

$$H_{x1}^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\gamma k}^{(k)}} \frac{1}{\chi_{\gamma k}} H_{x\gamma 1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) H_{x\gamma 1}^{(1)}(x,0) \quad (3.90.1)$$

$$H_{z1}^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\gamma k}^{(k)}} \frac{1}{j\omega_{\gamma 1} \mu_{z1}} \sqrt{\frac{\mu_{z1}}{\mu_{x1}}} \times$$

$$\times \left[ - E_{y\gamma 1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \frac{\chi_{\gamma 1}}{\chi_{\gamma k}} \frac{\sqrt{\mu_{x1}/\mu_{z1}}}{\sqrt{\mu_{x1}/\mu_{z1}}} H_{z\gamma 1}^{(1)}(x,0) \quad (3.91.1)$$

$$E_{y1}^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\gamma k}^{(k)}} \frac{1}{j\omega_{\gamma 1} \mu_{z1}} \sqrt{\frac{\mu_{z1}}{\mu_{x1}}} \times$$

$$\times \left[ - E_{y\gamma 1}^{(k-1)}(x, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \frac{\chi_{\gamma 1}}{\chi_{\gamma k}} E_{y\gamma 1}^{(1)}(x,0) \quad (3.92.1)$$

gdzie

$$M_{\gamma k}^{(k)} = \frac{1}{\chi_{\gamma k}} H_{x\gamma k-1}^{(k-1)}(x,0) \cosh \chi_{\gamma k} \sqrt{\frac{\mu_{xk}}{\mu_{zk}}} d_k +$$

$$- \frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{zk}} \frac{\sqrt{\mu_{xk-1}/\mu_{zk-1}}}{\sqrt{\mu_{xk}/\mu_{zk}}} \frac{1}{j\omega_{\gamma k-1} \mu_{zk-1}} \sqrt{\frac{\mu_{zk-1}}{\mu_{xk-1}}} \times$$

$$\times E_{y\gamma k-1}^{(k-1)}(x,0) \sinh \chi_{\gamma k} \sqrt{\frac{\mu_{xk}}{\mu_{zk}}} d_k \quad (3.93)$$

oraz

$$H_{x\gamma 1}^{(1)+}(x,0) = - A_{\gamma}^{+} e^{-j\beta_{\gamma} x} \quad (3.94a)$$

$$H_{x\gamma 1}^{(1)-}(x,0) = -A_{\gamma}^{-} e^{j\beta_{\gamma}x} \quad (3.94b)$$

$$H_{z\gamma 1}^{(1)+}(x,0) = j \frac{\beta_{\gamma}}{\kappa_{\gamma 1}^{+}} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} A_{\gamma}^{+} e^{-j\beta_{\gamma}x} \quad (3.95a)$$

$$H_{z\gamma 1}^{(1)-}(x,0) = -j \frac{\beta_{\gamma}}{\kappa_{\gamma 1}^{-}} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} A_{\gamma}^{-} e^{j\beta_{\gamma}x} \quad (3.95b)$$

$$E_{y\gamma 1}^{(1)+}(x,0) = \frac{j\omega_{\gamma 1} \mu_{z1}}{\kappa_{\gamma 1}^{+}} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} A_{\gamma}^{+} e^{-j\beta_{\gamma}x} \quad (3.96a)$$

$$E_{y\gamma 1}^{(1)-}(x,0) = \frac{j\omega_{\gamma 1} \mu_{z1}}{\kappa_{\gamma 1}^{-}} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} A_{\gamma}^{-} e^{j\beta_{\gamma}x} \quad (3.96b)$$

W przypadku rdzenia pakietowanego z blach elektrotechnicznych o teksturze Gossa  $\mu_{zi} \neq \mu_{xi}$ , z blach gorącowaconych izotropowych natomiast  $\mu_{zi} = \mu_{xi}$ . Dla obydwu rodzajów blach konduktywności rdzenia pakietowanego wynoszą:

$$\gamma_{yi} = \varepsilon_i \gamma_i \quad (3.97)$$

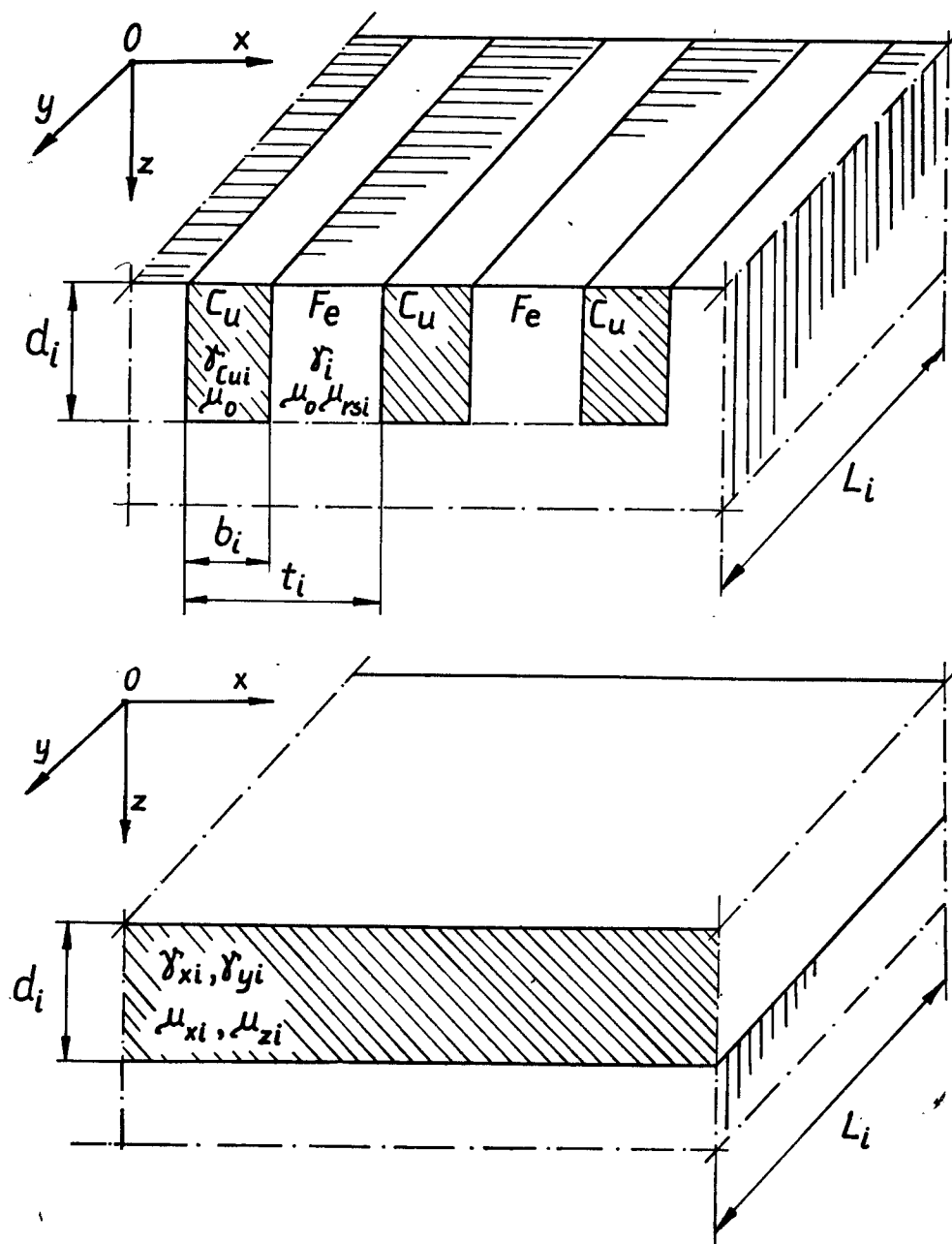
$$\gamma_{xi} = \gamma_i \quad (3.98)$$

przy czym  $\gamma_i$  - konduktywność skrośna blachy,  $\varepsilon_i$  - współczynnik zależny od stanu izolacji blach oraz powierzchni zewnętrznej rdzenia ( $\varepsilon_i \leq 1$ ). Jeżeli bowiem powierzchnia zewnętrzna rdzenia jest obrabiana wiórowo, należy liczyć się ze zwarciami sąsiednich blach. Dla rdzenia litego  $\varepsilon_i = 1$  oraz

$$\gamma_{yi} = \gamma_{xi} = \gamma_i$$

Uzwojenie klatkowe ułożone w żłobkach wykonanych w rdzeniu ferromagnetycznym - rys. 3.5 można zastąpić równoważną warstwą przewodzącą o parametrach rozłożonych, której przenikalności magnetyczne w kierunku współrzędnej  $x$  oraz  $z$  - za Ollendorffem [3.3] są równe:

$$\mu_{xi} = \frac{\mu_0 \mu_{ri} k_{Fei} t_i}{t_i - b_i (1 - \mu_{ri} k_{Fei})} \quad (3.99)$$



Rys. 3.5. Zastąpienie uzwojenia klatkowego umieszczonego w żłobkach warstwą równoważną ciągłą o właściwościach anizotropowych

$$\mu_{zi} = \mu_0 \mu_{ri} k_{Fei} + \frac{b_i}{t_i} \mu_0 (1 - \mu_{ri} k_{Fei}) \quad (3.100)$$

gdzie :  $b_i$  - szerokość zębka,  $t_i$  - podziałka zębka i-tej warstwy.

Konduktywności w kierunku współrzędnych  $x$  oraz  $y$  można natomiast wyznaczyć z następujących związków :

$$\frac{t_i}{\gamma_{xi} d_i L_i} = \frac{b_i}{\gamma_{Cui} d_i L_i} + \frac{t_i - b_i}{\gamma_i d_i L_i} \quad (3.101)$$

$$\frac{L_i}{\gamma_{yi} d_i t_i} = \frac{(L_i / \gamma_{Cui} d_i b_i) [L_i / \epsilon_i \gamma_i d_i (t_i - b_i)]}{\frac{L_i}{\gamma_{Cui} d_i b_i} + \frac{L_i}{\epsilon_i \gamma_i d_i (t_i - b_i)}} \quad (3.102)$$

przy czym  $\gamma_{Cui}$  - konduktywność materiału przewodowego.

Na podstawie (3.101), (3.102) otrzymuje się, że

$$\gamma_{xi} = \frac{\gamma_{Cui} \gamma_i t_i}{\gamma_{Cui} t_i - b_i (\gamma_{Cui} - \gamma_i)} \quad (3.103)$$

$$\gamma_{yi} = \epsilon_i \gamma_i + \frac{b_i}{t_i} (\gamma_{Cui} - \epsilon_i \gamma_i) \quad (3.104)$$

Jeżeli  $b_i = t_i$  to  $\mu_{xi} = \mu_i$ ,  $\mu_{zi} = \mu_0$ ,  $\gamma_{xi} = \gamma_{Cui}$ ,  $\gamma_{yi} = \gamma_{Cui}$ , jeżeli natomiast  $b_i = 0$  (powierzchnia bezzębkowa) to  $\mu_{xi} = \mu_0 \mu_{ri} k_{Fei}$ ,  $\mu_{zi} = \mu_0 \mu_{ri} k_{Fei}$ ,  $\gamma_{xi} = \gamma_i$ ,  $\gamma_{yi} = \epsilon_i \gamma_i$ .

Należy zaznaczyć, że do wyznaczania rozkładu pola w przetwornikach indukcyjnych z uwzględnieniem anizotropii doskonale nadają się również metody numeryczne [3.9].

## 4. WIELOWARSTWOWA CZĘŚĆ WTÓRNA W POLU TRÓJWYMIAROWYM

### 4.1. Zależności podstawowe

Wyznaczenie rozkładu trójwymiarowego pola elektromagnetycznego w przetworniku indukcyjnym pozwala w ściśle z fizycznego punktu widzenia sposób uwzględnić przede wszystkim jego długość skończoną [4.1, 4.8, 4.9, 4.12, 4.14, 4.19]. Różne metody analizy trójwymiarowej pola quasistacjonarnego w przetwornikach o prostych strukturach zawierają m.in. prace [4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18]. Do analizy trójwymiarowej przetworników o wielowarstwowej części wtórnej zostanie wykorzystana metoda potencjału wektorowego. W układzie współrzędnych prostokątnych  $x_0, y_0, z_0$  związanym z częścią pierwotną - rys. 3.1, rozkład potencjału wektorowego w  $i$ -tej warstwie opisuje równanie :

$$\nabla^2 \vec{A}_i(k) = j\omega \mu_i \gamma_i \vec{A}_i(k) - \mu_i \gamma_i \vec{v}_i \times [\nabla \times \vec{A}_i(k)] \quad (4.1)$$

gdzie  $\vec{A}_i(k)$  - potencjał wektorowy pola magnetycznego prądów zdefiniowany za pomocą równania:

$$\vec{B}_i(k) = \text{rot } \vec{A}_i(k) \quad (4.2)$$

Rozwiązanie analityczne równania (4.1) dla pola trójwymiarowego jest z pełną dokładnością niewykonalne. W związku z tym - podobnie jak w przypadku pola dwuwymiarowego - analiza przetwornika zostanie przeprowadzona w układzie współrzędnych  $x, y, z$  przemieszczającym się z prędkością części wtórnej - rys. 3.1. Dokonując zmiany układu współrzę-

dnych jak w rozdz. 3.1, równanie (4.1) przyjmuje postać:

$$\nabla^2 \vec{A}_i(k) = j \omega_{\nu i} \mu_i \vec{y}_i \vec{A}_i(k) \quad (4.3)$$

Równania skalarne opisujące rozkład trójwymiarowy pola elektromagnetycznego w  $i$ -tej warstwie izotropowej mają natomiast postać:

$$\frac{\partial^2 A_{xi}(k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{xi}(k)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_{xi}(k)}{\partial z^2} = \alpha_{\nu i}^2 A_{xi}(k) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 A_{yi}(k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{yi}(k)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_{yi}(k)}{\partial z^2} = \alpha_{\nu i}^2 A_{yi}(k) \quad (4.5)$$

gdzie  $A_{xi}(k)$ ,  $A_{yi}(k)$  - składowe potencjału wektorowego  $A_i(k)$  pola magnetycznego prądów w części wtórnej. Prądy w części wtórnej płyną tylko w kierunku współrzędnej  $x$  oraz  $y$ , zatem  $E_{zi}(k) = 0$  oraz

$$A_{zi}(k) = 0 \quad (4.6)$$

Stałą propagacji  $\alpha_{\nu i}$  określają równania (3.13a), (3.13b).

Rozwiązania ogólne np. równania (4.5) dla pola magnetycznego współbieżnego oraz przeciwbieżnego mają postać:

$$A_{yi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{1\nu i}^{(k)} e^{j(\omega_{\nu i}^+ t - \beta_{\nu} x)} \left[ C_{3n i}^{(k)} \cos \eta_{n y} + C_{4 n i}^{(k)} \sin \eta_{n y} \right] \left[ C_{5\nu n i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu n i}^+ z} + C_{6\nu n i}^{(k)} e^{\chi_{\nu n i}^+ z} \right] \quad (4.7a)$$

$$A_{yi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2\nu i}^{(k)} e^{j(\omega_{\nu i}^- t + \beta_{\nu} x)} \left[ C_{3n i}^{(k)} \cos \eta_{n y} + C_{4 n i}^{(k)} \sin \eta_{n y} \right] \left[ C_{5\nu n i}^{(k)} e^{-\chi_{\nu n i}^- z} + C_{6\nu n i}^{(k)} e^{\chi_{\nu n i}^- z} \right] \quad (4.7b)$$

przy czym między współczynnikami  $\chi_{\nu n i}$ ,  $\beta_{\nu}$ ,  $\eta_n$  oraz stałą propagacji  $\alpha_{\nu i}$  istnieje zależność

$$\chi_{\nu n i} = (\alpha_{\nu i}^2 + \beta_{\nu}^2 + \eta_n^2)^{\frac{1}{2}} = (\alpha_{\nu i}^2 + \alpha_{p\nu n}^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (a_{R\setminus ni} + j a_{X\setminus ni}) k_{\setminus i} \quad (4.8)$$

gdzie

$$\alpha_{p\setminus n} = (\beta_{\setminus}^2 + \gamma_n^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

$$a_{R\setminus ni} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 4a_R^2 a_X^2 + \left( a_R^2 - a_X^2 + \frac{\alpha_{p\setminus n}^2}{2 k_{\setminus i}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + a_R^2 - a_X^2 + \frac{\alpha_{p\setminus n}^2}{2 k_{\setminus i}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

$$a_{X\setminus ni} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ 4a_R^2 a_X^2 + \left( a_R^2 - a_X^2 + \frac{\alpha_{p\setminus n}^2}{2 k_{\setminus i}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. - a_R^2 + a_X^2 - \frac{\alpha_{p\setminus n}^2}{2 k_{\setminus i}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

Podobnie jak w analizie dwuwymiarowej, zmienność przenikalności magnetycznej jest uwzględniana tylko w kierunku normalnym. Stała  $\beta_{\setminus}$  jest określona zależnością (3.2), stała  $\gamma_n$  zależy natomiast od wymiarów przetwornika w kierunku współrzędnej  $y$ . Stała  $C_{4ni}^{(k)}$  w równaniach (4.7a), (4.7b), jest równa zero, gdyż rozkład gęstości prądu w części wtórnej jest cosinusoidalny względem współrzędnej  $y$ , tzn.:

$$C_{4ni}^{(k)} = 0 \quad (4.12)$$

#### 4.2. Założenia

W analizie trójwymiarowej przetwornika indukcyjnego o wielowarstwowej części wtórnej obowiązują założenia a), b), c), d) podane w rozdz. 2,1, założenia e), g) podane w rozdz.

3.3 oraz następujące założenie:

h) rozkład pola elektromagnetycznego jest okresowy wzdłuż osi  $y$  o okresie  $2(L + 2 h_{OV})$  i nie zawiera składowej stałej.



Zgodnie z założeniem h) stała  $\eta_n$  wynosi [3.6, 4.1] :

$$\eta_n = n \frac{\pi}{L + 2h_{ov}} \quad (4.13)$$

gdzie  $n = 1, 3, 5, \dots$  harmoniczne przestrzenne rozkładu pola elektromagnetycznego w kierunku współrzędnej  $y$ ,  $h_{ov}$  - wysięg połączeń czołowych uzwojeń części pierwotnej.

Przyjmuje się, że wszystkie warstwy są izotropowe, tzn.  $\mu_{xi} = \mu_{yi} = \mu_{zi} = \mu_i$  oraz  $\gamma_{xi} = \gamma_{yi} = \gamma_{zi} = \gamma_i$ . Anizotropię warstw w polu trójwymiarowym można uwzględnić podobnie jak w rozdz. 3.9, np. dla przetwornika o strukturze szczelina powietrzna - rdzeń anizotropowy elementy postępowania zbliżonego zawiera praca [4.5] .

#### 4.3. Całki ogólne równań połowych i warunki brzegowe

Z warunku

$$\operatorname{div} \vec{A}_i(k) = 0 \quad (4.14)$$

oraz równania (4.7a), (4.7b) otrzymuje się

$$A_{xi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j \frac{\eta_n}{\beta_{\nu}} C_{1\nu i}^{(k)} e^{j(\omega_{\nu i}^{+} t - \beta_{\nu} x)_x} \times C_{3ni}^{(k)} \sin \eta_n y \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^{+} z} + C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^{+} z} \right] \quad (4.15a)$$

$$A_{xi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-j \frac{\eta_n}{\beta_{\nu}}) C_{2\nu i}^{(k)} e^{j(\omega_{\nu i}^{-} t + \beta_{\nu} x)_x} \times C_{3ni}^{(k)} \sin \eta_n y \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^{-} z} + C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^{-} z} \right] \quad (4.15b)$$

Wykorzystując zależności

$$\left. \begin{aligned} H_{xi}^{(k)} &= - \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial A_{yi}^{(k)}}{\partial z} \\ H_{yi}^{(k)} &= \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial A_{xi}^{(k)}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

$$\mu_{zi} H_{zi}^{(k)} = \frac{\partial A_{yi}^{(k)}}{\partial y} - \frac{\partial A_{xi}^{(k)}}{\partial y}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{xi}^{(k)} &= - \frac{\partial A_{yi}^{(k)}}{\partial t} \\ E_{yi}^{(k)} &= - \frac{\partial A_{xi}^{(k)}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

wynikające z drugiego prawa Maxwella, warunków (4.2), (4.14) otrzymuje się rozwiązania ogólne równań rozkładu pola elektromagnetycznego w  $i$ -tej warstwie części wtórnej :

$$\begin{aligned} H_{xi}^{(k)+} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} \chi_{\nu ni}^{+} C_{1\nu i}^{(k)} e^{-j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \cos \varphi_n y \times \\ &\times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^{+} z} - C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^{+} z} \right] \end{aligned} \quad (4.18a)$$

$$\begin{aligned} H_{xi}^{(k)-} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} \chi_{\nu ni}^{-} C_{2\nu i}^{(k)} e^{j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \cos \varphi_n y \times \\ &\times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^{-} z} - C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^{-} z} \right] \end{aligned} \quad (4.18b)$$

$$\begin{aligned} H_{yi}^{(k)+} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-j \frac{\varphi_n}{\beta_{\nu}}) \frac{1}{\mu_i} \chi_{\nu ni}^{+} C_{1\nu i}^{(k)} e^{-j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \sin \varphi_n y \times \\ &\times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^{+} z} - C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^{+} z} \right] \end{aligned} \quad (4.19a)$$

$$\begin{aligned} H_{yi}^{(k)-} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j \frac{\varphi_n}{\beta_{\nu}} \frac{1}{\mu_i} \chi_{\nu ni}^{-} C_{2\nu i}^{(k)} e^{j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \sin \varphi_n y \times \\ &\times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^{-} z} - C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^{-} z} \right] \end{aligned} \quad (4.19b)$$

$$\begin{aligned} H_{zi}^{(k)+} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-j \frac{\alpha^2 p_{\nu n}}{\beta_{\nu}}) \frac{1}{\mu_i} C_{1\nu i}^{(k)} e^{-j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \cos \varphi_n y \times \\ &\times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^{+} z} + C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^{+} z} \right] \end{aligned} \quad (4.20a)$$

$$H_{zi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j \frac{\alpha^2 p \nu n}{\beta \nu} \frac{1}{c_{\nu i}} C_{2\nu i}^{(k)} e^{j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \cos \varphi_n^y x \times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^- z} + C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^- z} \right] \quad (4.20b)$$

$$E_{xi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j \omega_{\nu i}^+ (-j \frac{\nu n}{\beta \nu}) C_{1\nu i}^{(k)} e^{-j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \sin \varphi_n^y x \times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^+ z} + C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^+ z} \right] \quad (4.21a)$$

$$E_{xi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-j \omega_{\nu i}^-) j \frac{\nu n}{\beta \nu} C_{2\nu i}^{(k)} e^{j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \sin \varphi_n^y x \times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^- z} + C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^- z} \right] \quad (4.21b)$$

$$E_{yi}^{(k)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-j \omega_{\nu i}^+) C_{1\nu i}^{(k)} e^{-j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \cos \varphi_n^y x \times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^+ z} + C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^+ z} \right] \quad (4.22a)$$

$$E_{yi}^{(k)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-j \omega_{\nu i}^-) C_{2\nu i}^{(k)} e^{j\beta_{\nu} x} C_{3ni}^{(k)} \cos \varphi_n^y x \times \left[ C_{5\nu ni}^{(k)} e^{-\chi_{\nu ni}^- z} + C_{6\nu ni}^{(k)} e^{\chi_{\nu ni}^- z} \right] \quad (4.22b)$$

Czynniki czasowe  $\exp(j\omega_{\nu i}^+ t)$  oraz  $\exp(j\omega_{\nu i}^- t)$  po obydwu stronach równań (4.18a) ÷ (4.22b) zostały wyeliminowane.

Dla części wtórnej składającej się z  $k-1$  warstw rozwiązania ogólne mają analogiczną postać, np. w odniesieniu do składowych stycznych  $H_{x\nu ni}^{(k-1)}$ ,  $E_{y\nu ni}^{(k-1)}$ ;

$$H_{x\gamma ni}^{(k-1)} = \frac{1}{\mu_i} \gamma_{\gamma ni}^+ C_{1\gamma i}^{(k-1)} e^{-j\beta_{\gamma} x} C_{3ni}^{(k-1)} \cos \varphi_n y \times \\ \times \left[ C_{5\gamma ni}^{(k-1)} e^{-\gamma_{\gamma ni}^+ z} - C_{6\gamma ni}^{(k-1)} e^{\gamma_{\gamma ni}^+ z} \right] \quad (4.23a)$$

$$H_{x\gamma ni}^{(k-1)-} = \frac{1}{\mu_i} \gamma_{\gamma ni}^- C_{2\gamma i}^{(k-1)} e^{j\beta_{\gamma} x} C_{3ni}^{(k-1)} \cos \varphi_n y \times \\ \times \left[ C_{5\gamma ni}^{(k-1)} e^{-\gamma_{\gamma ni}^- z} - C_{6\gamma ni}^{(k-1)} e^{\gamma_{\gamma ni}^- z} \right] \quad (4.23b)$$

$$E_{y\gamma ni}^{(k-1)+} = (-j\omega_{\gamma i}^+) C_{1\gamma i}^{(k-1)} e^{-j\beta_{\gamma} x} C_{3ni}^{(k-1)} \cos \varphi_n y \times \\ \times \left[ C_{5\gamma ni}^{(k-1)} e^{-\gamma_{\gamma ni}^+ z} + C_{6\gamma ni}^{(k-1)} e^{\gamma_{\gamma ni}^+ z} \right] \quad (4.24a)$$

$$E_{y\gamma ni}^{(k-1)-} = (-j\omega_{\gamma i}^-) C_{2\gamma i}^{(k-1)} e^{j\beta_{\gamma} x} C_{3ni}^{(k-1)} \cos \varphi_n y \times \\ \times \left[ C_{5\gamma ni}^{(k-1)} e^{-\gamma_{\gamma ni}^- z} + C_{6\gamma ni}^{(k-1)} e^{\gamma_{\gamma ni}^- z} \right] \quad (4.24b)$$

Powyższe równania (4.23a) ÷ (4.24b) są konieczne do wyprowadzenia wzorów rekurencyjnych na rozkład pola elektromagnetycznego. Stałe całkowe  $C_{1\gamma i}^{(k)}$ ,  $C_{2\gamma i}^{(k)}$ ,  $C_{3ni}^{(k)}$ ,  $C_{5\gamma ni}^{(k)}$ ,  $C_{6\gamma ni}^{(k)}$  w rozwiązaniach ogólnych (4.18a) ÷ (4.22b) wyznacza się na podstawie następujących warunków brzegowych na powierzchniach granicznych kolejnych warstw części wtórnej:

- dla  $z = d_k$

$$H_{zk}^{(k)}(x, y, d_k) = H_{zk-1}^{(k)}(x, y, d_k) \quad (4.25.k)$$

$$\mu_k H_{zk}^{(k)}(x, y, d_k) = \mu_{k-1} H_{zk-1}^{(k)}(x, y, d_k) \quad (4.26.k)$$

- dla  $z = \sum_{i=k-1}^k d_i$

$$H_{zk-1}^{(k)}(x, y, \sum_{i=k-1}^k d_i) = H_{zk-2}^{(k)}(x, y, \sum_{i=k-1}^k d_i) \quad (4.25.k-1)$$

$$\mu_{k-1} H_{zk-1}^{(k)}(x, y, \sum_{i=k-1}^k d_i) = \mu_{k-2} H_{zk-2}^{(k)}(x, y, \sum_{i=k-1}^k d_i) \quad (4.26.k-1)$$

.....

- dla  $z = \sum_{i=2}^k d_i$

$$H_{x2}^{(k)}(x, y, \sum_{i=2}^k d_i) = H_{x1}^{(k)}(x, y, \sum_{i=2}^k d_i) \quad (4.25.2)$$

$$\mu_2 H_{z2}^{(k)}(x, y, \sum_{i=2}^k d_i) = \mu_1 H_{z1}^{(k)}(x, y, \sum_{i=2}^k d_i) \quad (4.26.2)$$

oraz warunków brzegowych na powierzchni przyszczelinowej części pierwotnej. Warunki te będą inne dla części pierwotnej o biegunach utajonych oraz o biegunach jawnych. Jeżeli część pierwotna posiada bieguny utajone, to jako wielkość wymuszającą należy przyjąć obciążenie liniowe i wtedy

$$H_{xk}^{(k)}(x, y, 0) = -a(x, y) \quad (4.27)$$

przy czym

$$a(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x} + A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x}) a_n \cos \eta_n y \quad (4.28)$$

gdzie  $a_n$  - współczynnik zależny od rozkładu obciążenia liniowego w kierunku współrzędnej  $y$  [3.6, 4.1, 4.8, 4.9, 4.11].

Jeżeli część pierwotna posiada bieguny jawne, to jako wielkość wymuszającą należy przyjąć indukcję magnetyczną, co oznacza, że

$$\mu_k H_{zk}^{(k)}(x, y, 0) = b(x, y) \quad (4.29)$$

przy czym

$$b(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x} + B_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x}) b_{\nu n} \cos \eta_n y \quad (4.30)$$

gdzie  $b_{\nu n}$  - współczynnik zależny od rozkładu indukcji magnetycznej w kierunku współrzędnych  $x$  oraz  $y$  [3.6].

Ponadto, przy  $z \rightarrow \infty$  pole elektromagnetyczne musi zanikać, tzn.:

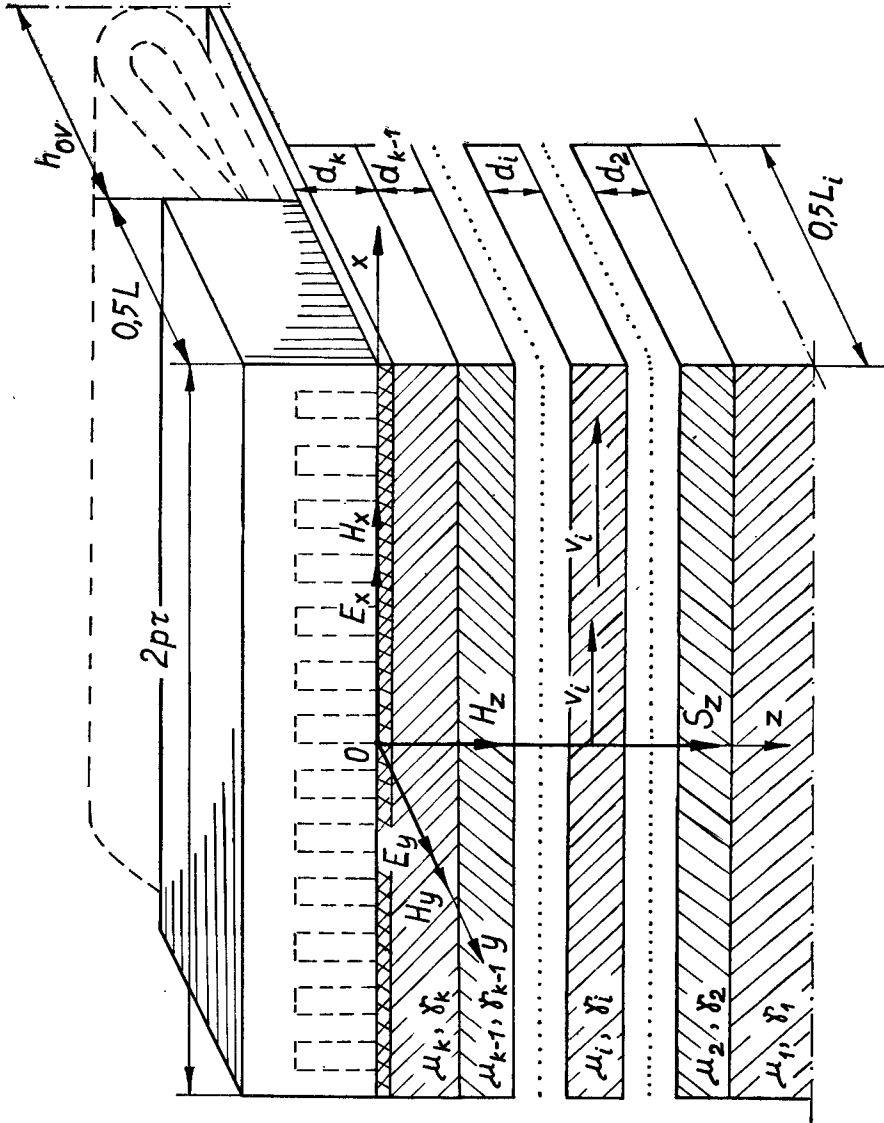
$$C_{1\nu 1}^{(k)} C_{3n 1}^{(k)} C_{6\nu n 1}^{(k)} = C_{2\nu 1}^{(k)} C_{3n 1}^{(k)} C_{6\nu n 1}^{(k)} = 0 \quad (4.31)$$

#### 4.4. Równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przypadku części pierwotnej o biegunach utajonych

Model przetwornika o biegunach utajonych przyjęty do analizy trójwymiarowej jest przedstawiony na rys. 4.1. Dla wielowarstwowej części wtórnej stałe całkowe w rozwiązaniach ogólnych (4.18a) ÷ (4.22b) wyznaczone na podstawie warunków (4.25,k) ÷ (4.26.2), (4.27) oraz równań (4.23a) ÷ (4.24b), (4.28) wynoszą :

$$\begin{aligned} C_{1\nu k}^{(k)} C_{3nk}^{(k)} C_{5\nu nk}^{(k)} &= \zeta_k^+ \frac{1}{\chi_{\nu nk}^+} \frac{1}{2 M_{\nu nk}^{(k)+}} \left\{ \frac{\mu_{k-1}}{\zeta_k^+} x \right. \\ &\times \left[ C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\nu nk-1}^{(k-1)} + C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\nu nk-1}^{(k-1)} \right] + \\ &+ \left. \frac{\chi_{\nu nk-1}^+}{\chi_{\nu nk}^+} \left[ C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\nu nk-1}^{(k-1)} - C_{1\nu k-1}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\nu nk-1}^{(k-1)} \right] \right\} x \\ &\times (-A_{\nu}^+) a_n e^{\chi_{\nu nk}^+ d_k} \end{aligned} \quad (4.32a.k)$$

$$\begin{aligned} C_{2\nu k}^{(k)} C_{3nk}^{(k)} C_{5\nu nk}^{(k)} &= \zeta_k^- \frac{1}{\chi_{\nu nk}^-} \frac{1}{2 M_{\nu nk}^{(k)-}} \left\{ \frac{\mu_{k-1}}{\zeta_k^-} x \right. \\ &\times \left[ C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\nu nk-1}^{(k-1)} + C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\nu nk-1}^{(k-1)} \right] + \\ &+ \left. \frac{\chi_{\nu nk-1}^-}{\chi_{\nu nk}^-} \left[ C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\nu nk-1}^{(k-1)} - C_{2\nu k-1}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\nu nk-1}^{(k-1)} \right] \right\} x \\ &\times (-A_{\nu}^-) a_n e^{\chi_{\nu nk}^- d_k} \end{aligned} \quad (4.32b.k)$$



Rys. 4.1. Elektromechaniczny przetwornik indukcyjny o biegunach utajonych w polu trójwymiarowym

$$\begin{aligned}
C_{1\sqrt{k}}^{(k)} C_{3nk}^{(k)} C_{6\sqrt{nk}}^{(k)} &= \zeta_k^{\mu} \frac{1}{\gamma_{\sqrt{nk}}^+} \frac{1}{2 M_{\sqrt{nk}}^{(k)+}} \left\{ \frac{\zeta_{k-1}^{\mu} x}{\zeta_k^{\mu}} \right. \\
&\times \left[ C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} + C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} \right] + \\
&- \frac{\gamma_{\sqrt{nk}}^+}{\gamma_{\sqrt{nk}}^+} \left[ C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} - C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} \right] \Big\} \times \\
&\times (-A_{\sqrt{}}^+) a_n e^{-\gamma_{\sqrt{nk}}^+ d_k} \quad (4.33a.k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2\sqrt{k}}^{(k)} C_{3nk}^{(k)} C_{6\sqrt{nk}}^{(k)} &= \zeta_k^{\mu} \frac{1}{\gamma_{\sqrt{nk}}^-} \frac{1}{2 M_{\sqrt{nk}}^{(k)-}} \left\{ \frac{\zeta_{k-1}^{\mu} x}{\zeta_k^{\mu}} \right. \\
&\times \left[ C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} + C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} \right] + \\
&- \frac{\gamma_{\sqrt{nk}}^-}{\gamma_{\sqrt{nk}}^-} \left[ C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} - C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} \right] \Big\} \times \\
&\times (-A_{\sqrt{}}^-) a_n e^{-\gamma_{\sqrt{nk}}^- d_k} \quad (4.33b.k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} &= \zeta_{k-1}^{\mu} \frac{1}{\gamma_{\sqrt{nk}}^+} \frac{1}{M_{\sqrt{nk}}^{(k)+}} \times \\
&\times C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} (-A_{\sqrt{}}^+) a_n e^{\gamma_{\sqrt{nk-1}}^+ d_k} \quad (4.32a.k-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} &= \zeta_{k-1}^{\mu} \frac{1}{\gamma_{\sqrt{nk}}^-} \frac{1}{M_{\sqrt{nk}}^{(k)-}} \times \\
&\times C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} (-A_{\sqrt{}}^-) a_n e^{\gamma_{\sqrt{nk-1}}^- d_k} \quad (4.32b.k-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} &= \zeta_{k-1}^{\mu} \frac{1}{\gamma_{\sqrt{nk}}^+} \frac{1}{M_{\sqrt{nk}}^{(k)+}} \times \\
&\times C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} (-A_{\sqrt{}}^+) a_n e^{-\gamma_{\sqrt{nk-1}}^- d_k} \\
&\quad (4.33a.k-1)
\end{aligned}$$



$$C_{2\sqrt{k-1}}^{(k)} C_{3nk-1}^{(k)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k)} = \mu_{k-1} \frac{1}{\chi_{\sqrt{nk}}^-} \frac{1}{M_{\sqrt{nk}}^{(k)-}} \times$$

$$\times C_{2\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} (-A_{\sqrt{j}}^-) a_n e^{-\chi_{\sqrt{nk-1}}^- d_k}$$

(4.33b.k-1)

.....

$$C_{1\sqrt{1}}^{(k)} C_{3n1}^{(k)} C_{5\sqrt{n1}}^{(k)} = \mu_{k-1} \frac{1}{\chi_{\sqrt{nk}}^+} \frac{1}{M_{\sqrt{nk}}^{(k)+}} \times$$

$$\times C_{1\sqrt{1}}^{(k-1)} C_{3n1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{n1}}^{(k-1)} (-A_{\sqrt{j}}^+) a_n e^{\chi_{\sqrt{n1}}^+ d_k}$$

(4.32a.1)

$$C_{2\sqrt{1}}^{(k)} C_{3n1}^{(k)} C_{5\sqrt{n1}}^{(k)} = \mu_{k-1} \frac{1}{\chi_{\sqrt{nk}}^-} \frac{1}{M_{\sqrt{nk}}^{(k)-}} \times$$

$$\times C_{2\sqrt{1}}^{(k-1)} C_{3n1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{n1}}^{(k-1)} (-A_{\sqrt{j}}^-) a_n e^{\chi_{\sqrt{n1}}^- d_k}$$

(4.32b.1)

$$C_{1\sqrt{1}}^{(k)} C_{3n1}^{(k)} C_{6\sqrt{n1}}^{(k)} = C_{2\sqrt{1}}^{(k)} C_{3n1}^{(k)} C_{6\sqrt{n1}}^{(k)} = 0 \quad (4.33.1)$$

gdzie

$$M_{\sqrt{nk}}^{(k)} = \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \left[ C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} + \right.$$

$$\left. + C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} \right] \sinh \chi_{\sqrt{nk}} d_k +$$

$$+ \frac{\chi_{\sqrt{nk-1}}}{\chi_{\sqrt{nk}}} \left[ C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{5\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} + \right.$$

$$\left. - C_{1\sqrt{k-1}}^{(k-1)} C_{3nk-1}^{(k-1)} C_{6\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} \right] \cosh \chi_{\sqrt{nk}} d_k \quad (4.34)$$

Stałe (4.34a.k) ÷ (4.33.1), rozwiązania ogólne (4.18a) ÷ ÷ (4.22b) oraz (4.23a) ÷ (4.24b) dają zależności rekurencyjne na rozkład pola elektromagnetycznego:

- dla  $0 \leq z \leq d_k$

$$H_{xk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \left[ \frac{1}{\chi_{\nu nk}} H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \times \right. \\ \left. \cosh \chi_{\nu nk}(z - d_k) + \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \times \right. \\ \left. \times \sinh \chi_{\nu nk}(z - d_k) \right] \times H_{x\nu n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.35.k)$$

$$H_{yk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \left[ \frac{1}{\chi_{\nu nk}} H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \times \right. \\ \left. \times \cosh \chi_{\nu nk}(z - d_k) + \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \times \right. \\ \left. \times \sinh \chi_{\nu nk}(z - d_k) \right] H_{y\nu n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.36.k)$$

$$H_{zk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \times \right. \\ \left. \times \left[ - E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \right] \cosh \chi_{\nu nk}(z - d_k) + \frac{1}{\chi_{\nu nk}} \times \right. \\ \left. \times \left[ - H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \right] \sinh \chi_{\nu nk}(z - d_k) \right\} \frac{\chi_{\nu n1}}{\chi_{\nu nk}} H_{z\nu n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.37.k)$$

$$E_{xk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \times \right. \\ \left. \times \left[ - E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \right] \cosh \chi_{\nu nk}(z - d_k) + \frac{1}{\chi_{\nu nk}} \times \right. \\ \left. \left[ - H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \right] \sinh \chi_{\nu nk}(z - d_k) \right\} \frac{\chi_{\nu n1}}{\chi_{\nu nk}} \frac{\omega_{\nu k} \mu_k}{\omega_{\nu 1} \mu_1} E_{x\nu n1}(x, y, 0) \quad (4.38.k)$$

$$E_{yk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu k}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} \times \right. \\ \left. \left[ - E_{y\nu nk-1}^{(k)}(x,y,0) \right] \cosh \chi_{\nu nk}(z-d_k) + \frac{1}{\chi_{\nu nk}} \times \right. \\ \left. \times \left[ - H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \right] \sinh \chi_{\nu nk}(z-d_k) \right\} \frac{\chi_{\nu n1}}{\chi_{\nu nk}} \frac{\omega_{\nu k} \zeta_k^{\mu_k}}{\omega_{\nu 1} \zeta_1^{\mu_1}} E_{y\nu n1}^{(1)}(x,y,0) \quad (4.39.k)$$

$$- \text{ dla } d_k \leq z \leq \sum_{i=k-1}^k d_i$$

$$H_{xk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \frac{1}{\chi_{\nu nk}} H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \times \\ \times H_{x\nu n1}^{(1)}(x,y,0) \quad (4.35.k-1)$$

$$H_{yk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \frac{1}{\chi_{\nu nk}} H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \times \\ \times H_{y\nu n1}^{(k)}(x,y,0) \quad (4.36.k-1)$$

$$H_{zk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \times$$

$$\times \left[ - E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \right] \frac{\chi_{\nu n1}}{\chi_{\nu nk}} H_{z\nu n1}^{(1)}(x,y,0) \quad (4.37.k-1)$$

$$E_{xk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \times$$

$$\left[ - E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \right] \frac{\chi_{\nu n1}}{\chi_{\nu nk}} \frac{\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\omega_{\nu 1} \zeta_1^{\mu_1}} \times$$

$$\times E_{y \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.39.k-1)$$

$$- \text{ dla } \sum_{i=k-1}^k d_i \leq z \leq \sum_{i=k-2}^k d_i$$

$$H_{xk-2}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{\gamma_{\setminus jnk}} H_{x \setminus nk-2}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i)^x \times H_{x \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.35.k-2)$$

$$H_{yk-2}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{\gamma_{\setminus jnk}} H_{x \setminus nk-2}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i)^x \times H_{y \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.36.k-2)$$

$$H_{zk-2}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\setminus jk-2} \zeta_{k-2}^{\mu_{k-2}}} \times \left[ - E_{y \setminus nk-2}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \frac{\gamma_{\setminus n1}}{\gamma_{\setminus jnk}} H_{z \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.37.k-2)$$

$$E_{xk-2}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\setminus jk-2} \zeta_{k-2}^{\mu_{k-2}}} \times \left[ - E_{y \setminus nk-2}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \frac{\gamma_{\setminus n1}}{\gamma_{\setminus jnk}} \frac{\omega_{\setminus jk-2} \zeta_{k-2}^{\mu_{k-2}}}{\omega_{\setminus j1} \zeta_1^{\mu_1}} \times E_{x \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.38.k-2)$$

$$E_{yk-2}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\setminus jk-2} \zeta_{k-2}^{\mu_{k-2}}} \times$$

$$\times \left[ - E_{y \setminus nk-2}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \frac{\chi_{\setminus n1}}{\chi_{\setminus nk}} \frac{\omega_{\setminus k-2} \mu_{k-2}}{\omega_{\setminus 1} \mu_1} \times$$

$$\times E_{y \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.39.k-2)$$

.....

$$- \text{ dla } z \geq \sum_{i=2}^k d_i$$

$$H_{x1}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{\chi_{\setminus jnk}} H_{x \setminus n1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \times$$

$$\times H_{x \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.35.1)$$

$$H_{y1}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{\chi_{\setminus jnk}} H_{x \setminus n1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \times$$

$$\times H_{y \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.36.1)$$

$$H_{z1}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\setminus j1} \mu_1} \left[ - E_{y \setminus n1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \times$$

$$\times \frac{\chi_{\setminus n1}}{\chi_{\setminus jnk}} H_{z \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.37.1)$$

$$E_{x1}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\setminus j1} \mu_1} \left[ - E_{y \setminus n1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \times$$

$$\times \frac{\chi_{\setminus n1}}{\chi_{\setminus jnk}} E_{x \setminus n1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.38.1)$$

$$E_{y1}^{(k)} = \sum_{\setminus j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\setminus jnk}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\setminus j1} \mu_1} \left[ - E_{y \setminus n1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \times$$

$$\times \frac{\chi_{\nu n 1}}{\chi_{\nu n k}} E_{y \nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.39.1)$$

gdzie

$$M_{\nu n k}^{(k)} = \frac{1}{\chi_{\nu n k}} H_{x \nu n k-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \cosh \chi_{\nu n k} d_k - \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \times \\ \times \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} E_{y \nu n k-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \sinh \chi_{\nu n k} d_k \quad (4.40)$$

oraz

$$H_{x \nu n 1}^{(1)+}(x, y, 0) = - A_{\nu n}^+ a_n e^{-j \beta_{\nu} x} \cos \varphi_n y \quad (4.41a)$$

$$H_{x \nu n 1}^{(1)-}(x, y, 0) = - A_{\nu n}^- a_n e^{j \beta_{\nu} x} \cos \varphi_n y \quad (4.41b)$$

$$H_{y \nu n 1}^{(1)+}(x, y, 0) = j \frac{\varphi_n}{\beta_{\nu}} A_{\nu n}^+ a_n e^{-j \beta_{\nu} x} \sin \varphi_n y \quad (4.42a)$$

$$H_{y \nu n 1}^{(1)-}(x, y, 0) = -j \frac{\varphi_n}{\beta_{\nu}} A_{\nu n}^- a_n e^{j \beta_{\nu} x} \sin \varphi_n y \quad (4.42b)$$

$$H_{z \nu n 1}^{(1)+}(x, y, 0) = j \frac{\alpha_{\nu n}^2}{\beta_{\nu}} \frac{1}{\chi_{\nu n 1}^+} A_{\nu n}^+ a_n e^{-j \beta_{\nu} x} \cos \varphi_n y \quad (4.43a)$$

$$H_{z \nu n 1}^{(1)-}(x, y, 0) = -j \frac{\alpha_{\nu n}^2}{\beta_{\nu}} \frac{1}{\chi_{\nu n 1}^-} A_{\nu n}^- a_n e^{j \beta_{\nu} x} \cos \varphi_n y \quad (4.43b)$$

$$E_{x \nu n 1}^{(1)+}(x, y, 0) = \frac{j \omega_{\nu 1}^+ \mu_1}{\chi_{\nu n 1}^+} j \frac{\varphi_n}{\beta_{\nu}} A_{\nu n}^+ a_n e^{-j \beta_{\nu} x} \sin \varphi_n y \quad (4.44a)$$

$$E_{x \nu n 1}^{(1)-}(x, y, 0) = \frac{j \omega_{\nu 1}^- \mu_1}{\chi_{\nu n 1}^-} (-j \frac{\varphi_n}{\beta_{\nu}}) A_{\nu n}^- a_n e^{j \beta_{\nu} x} \sin \varphi_n y \quad (4.44b)$$

$$E_{y \nu n 1}^{(1)+}(x, y, 0) = \frac{j \omega_{\nu 1}^+ \mu_1}{\chi_{\nu n 1}^+} A_{\nu n}^+ a_n e^{-j \beta_{\nu} x} \cos \varphi_n y \quad (4.45a)$$

$$E_{y \nu n 1}^{(1)-}(x, y, 0) = \frac{j \omega_{\nu 1}^- \mu_1}{\chi_{\nu n 1}^-} A_{\nu n}^- a_n e^{j \beta_{\nu} x} \cos \varphi_n y \quad (4.45b)$$

W celu znalezienia równań rozkładu pola elektromagnetycznego w przetworniku indukcyjnym o części wtórnej złożonej z dowolnej liczby  $k$  warstw na podstawie zależności reku -

recencyjnych (4.35.k) ÷ (4.40) wystarczy znajomość składowych pola w przetworniku o jednorodnej części wtórnej. Pełne równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przetworniku o jednorodnej części wtórnej można uzyskać na podstawie równań (4.41a) ÷ (4.45b) uzupełniając ich prawe strony o czynnik  $\exp(-\chi_{\sqrt{n1}^+} z)$  lub  $\exp(-\chi_{\sqrt{n1}^-} z)$ .

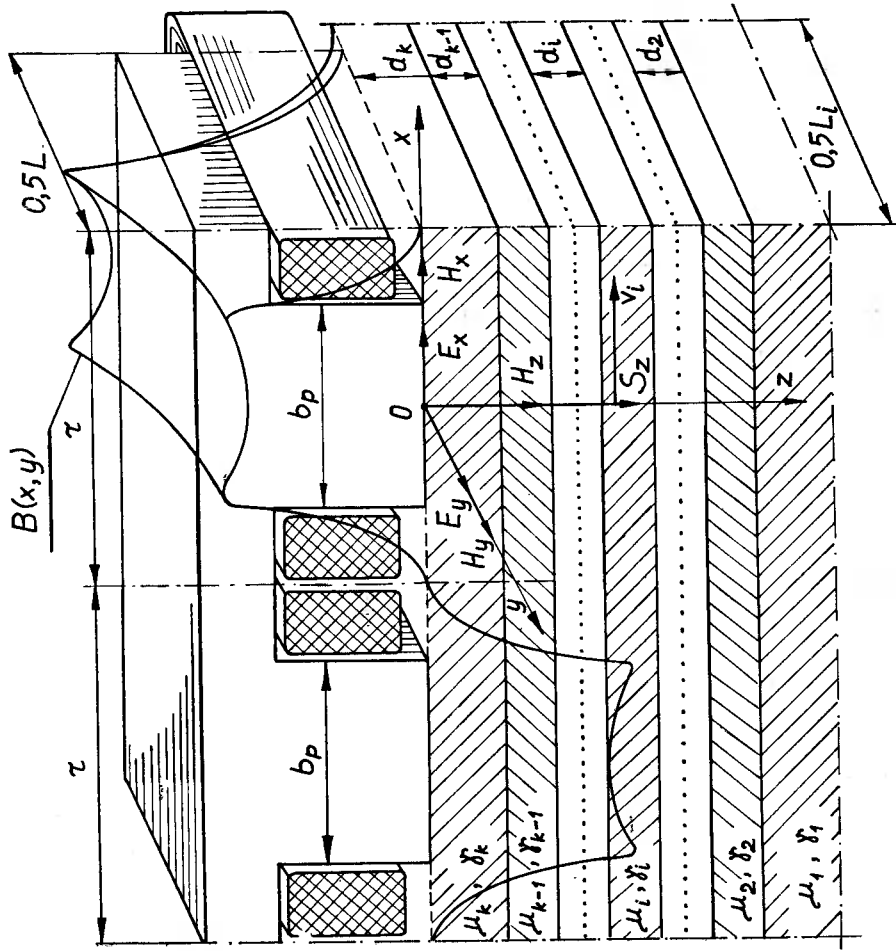
#### 4.5. Równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przypadku części pierwotnej o biegunach jawnych

Wykorzystując warunki (4.25.k) ÷ (4.26.2), (4.29), rozwiązania ogólne (4.18a) ÷ (4.22b) oraz równania (4.23a) ÷ (4.24b), (4.30), dla przetwornika o biegunach jawnych - rys. 4.2 otrzymuje się następujące zależności rekurencyjne na rozkład pola elektromagnetycznego:

- dla  $0 \leq z \leq d_k$

$$H_{xk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \left[ \frac{1}{\chi_{\nu nk}} H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \times \right. \\ \left. \times \cosh \chi_{\nu nk}(z-d_k) + \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} \times \right. \\ \left. \times E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \sinh \chi_{\nu nk}(z-d_k) \right] \frac{\zeta_1^{\mu_1}}{\zeta_k^{\mu_k}} \frac{\chi_{\nu nk}}{\chi_{\nu n1}} H_{x\nu n1}^{(1)}(x,y,0) \quad (4.46.k)$$

$$H_{yk}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \left[ \frac{1}{\chi_{\nu nk}} H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \times \right. \\ \left. \times \cosh \chi_{\nu nk}(z-d_k) + \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} \times \right. \\ \left. \times E_{y\nu n1}^{(k-1)}(x,y,0) \sinh \chi_{\nu nk}(z-d_k) \right] \frac{\zeta_1^{\mu_1}}{\zeta_k^{\mu_k}} \frac{\chi_{\nu nk}}{\chi_{\nu n1}} H_{y\nu n1}^{(1)}(x,y,0) \quad (4.47.k)$$



Rys. 4.2. Elektromechaniczny przetwornik indukcyjny o biegunach jawnych w polu trójwymiarowym



$$\begin{aligned}
 H_{zk}^{(k)} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\chi_{\nu nk}} \left[ -H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \right] \times \right. \\
 &\times \sinh \chi_{\nu nk}(z-d_k) + \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} \times \\
 &\times \left. \left[ -E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \right] \cosh \chi_{\nu nk}(z-d_k) \right\} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} H_{z\nu n1}^{(1)}(x,y,0) \quad (4.48.k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{xk}^{(k)} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\chi_{\nu nk}} \left[ -H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \right] \times \right. \\
 &\times \sinh \chi_{\nu nk}(z-d_k) + \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} \times \\
 &\times \left. \left[ -E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \right] \cosh \chi_{\nu nk}(z-d_k) \right\} \frac{\omega_{\nu k}}{\omega_{\nu 1}} E_{x\nu n1}^{(1)}(x,y,0) \quad (4.49.k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{yk}^{(k)} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} \left\{ \frac{1}{\chi_{\nu nk}} \left[ -H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \right] \times \right. \\
 &\times \sinh \chi_{\nu nk}(z-d_k) + \frac{1}{j\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \frac{\zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\zeta_k^{\mu_k}} \times \\
 &\times \left. \left[ -E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0) \right] \cosh \chi_{\nu nk}(z-d_k) \right\} \frac{\omega_{\nu k}}{\omega_{\nu 1}} E_{y\nu n1}^{(1)}(x,y,0) \quad (4.50.k)
 \end{aligned}$$

$$- \text{ dla } d_k \leq z \leq \sum_{i=k-1}^k d_i$$

$$H_{xk-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu nk}^{(k)}} H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \times$$

$$\times \frac{\mu_1}{\zeta_k} \frac{1}{\chi_{\nu n 1}} H_{x\nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.46.k-1)$$

$$H_{y k-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} H_{x\nu n k-1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \times \\ \times \frac{\mu_1}{\zeta_k} \frac{1}{\chi_{\nu n 1}} H_{y\nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.47.k-1)$$

$$H_{z k-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \times \\ \times \left[ - E_{y\nu n k-1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \right] \frac{\mu_1}{\zeta_k} H_{z\nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.48.k-1)$$

$$E_{x k-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \times \\ \times \left[ - E_{y\nu n k-1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \right] \frac{\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\omega_{\nu 1} \zeta_k^{\mu_k}} E_{x\nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.49.k-1)$$

$$E_{y k-1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}} \times \\ \times \left[ - E_{y\nu n k-1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-1}^k d_i) \right] \frac{\omega_{\nu k-1} \zeta_{k-1}^{\mu_{k-1}}}{\omega_{\nu 1} \zeta_k^{\mu_k}} E_{y\nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.50.k-1)$$

- dla  $\sum_{i=k-1}^k \leq z \leq \sum_{i=k-2}^k d_i$

$$H_{x k-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} H_{x\nu n k-2}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \times$$

$$\times \frac{\mu_1}{\mu_k} \frac{1}{\kappa_{\nu n 1}} H_{x \nu n 1}^{(k)}(x, y, 0) \quad (4.46.k-2)$$

$$H_{y k-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} H_{x \nu n k-2}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \times \\ \times \frac{\mu_1}{\mu_k} \frac{1}{\kappa_{\nu n 1}} H_{y \nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.47.k-2)$$

$$H_{z k-2}^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\lambda n k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\lambda k-2} \mu_{k-2}} \times \\ \times \left[ - E_{y \lambda n k-2}^{(k-2)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \frac{\mu_1}{\mu_k} H_{z \lambda n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.48.k-2)$$

$$E_{x k-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-2} \mu_{k-2}} \times \\ \times \left[ - E_{y \nu n k-2}^{(k)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \frac{\omega_{\nu k-2} \mu_{k-2}}{\omega_{\nu 1} \mu_k} E_{x \nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.49.k-2)$$

$$E_{y k-2}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu k-2} \mu_{k-2}} \times \\ \times \left[ - E_{y \nu n k-2}^{(k)}(x, y, z - \sum_{i=k-2}^k d_i) \right] \frac{\omega_{\nu k-2} \mu_{k-2}}{\omega_{\nu 1} \mu_k} E_{y \nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.50.k-2)$$

.....  
- dla  $z \geq \sum_{i=2}^k d_i$

$$H_{x 1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} H_{x \nu n 1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \times$$

$$\times \frac{\mu_1}{\mu_k} \frac{1}{\chi_{\nu n 1}} H_{x \nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.46.1)$$

$$H_{y 1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} H_{x \nu n 1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \times \\ \times \frac{\mu_1}{\mu_k} \frac{1}{\chi_{\nu n 1}} H_{y \nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.47.1)$$

$$H_{z 1}^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu 1} \mu_1} \times$$

$$\left[ -E_{y \nu n 1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \frac{\mu_1}{\mu_k} H_{z \nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.48.1)$$

$$E_{x 1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu 1} \mu_1} \times$$

$$\times \left[ -E_{y \nu n 1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \frac{\mu_1}{\mu_k} E_{x \nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.49.1)$$

$$E_{y 1}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu n k}^{(k)}} \frac{1}{j \omega_{\nu 1} \mu_1} \times$$

$$\times \left[ -E_{y \nu n 1}^{(k-1)}(x, y, z - \sum_{i=2}^k d_i) \right] \frac{\mu_1}{\mu_k} E_{y \nu n 1}^{(1)}(x, y, 0) \quad (4.50.1)$$

gdzie

$$M_{\nu n k}^{(k)} = \frac{1}{\chi_{\nu n k}} H_{x \nu n k-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \sinh \chi_{\nu n k} d_k + \\ - \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} E_{y \nu n k-1}^{(k-1)}(x, y, 0) \cosh \chi_{\nu n k} d_k \quad (4.51)$$

oraz

$$H_{x\nu n1}^{(1)+}(x,y,0) = j \frac{\beta_{\nu}}{\alpha^2 p\nu n} \frac{1}{\mu_1} \kappa_{\nu n1}^+ B_{\nu}^+ b_{\nu n} e^{-j\beta_{\nu}x} \cos \varrho_n y \quad (4.52a)$$

$$H_{x\nu n1}^{(1)-}(x,y,0) = -j \frac{\beta_{\nu}}{\alpha^2 p\nu n} \frac{1}{\mu_1} \kappa_{\nu n1}^- B_{\nu}^- b_{\nu n} e^{j\beta_{\nu}x} \cos \varrho_n y \quad (4.52b)$$

$$H_{y\nu n1}^{(1)+}(x,y,0) = \frac{\varrho_n}{\alpha^2 p\nu n} \frac{1}{\mu_1} \kappa_{\nu n1}^+ B_{\nu}^+ b_{\nu n} e^{-j\beta_{\nu}x} \sin \varrho_n y \quad (4.53a)$$

$$H_{y\nu n1}^{(1)-}(x,y,0) = \frac{\varrho_n}{\alpha^2 p\nu n} \frac{1}{\mu_1} \kappa_{\nu n1}^- B_{\nu}^- b_{\nu n} e^{j\beta_{\nu}x} \sin \varrho_n y \quad (4.53b)$$

$$H_{z\nu n1}^{(1)+}(x,y,0) = \frac{1}{\mu_1} B_{\nu}^+ b_{\nu n} e^{-j\beta_{\nu}x} \cos \varrho_n y \quad (4.54a)$$

$$H_{z\nu n1}^{(1)-}(x,y,0) = \frac{1}{\mu_1} B_{\nu}^- b_{\nu n} e^{j\beta_{\nu}x} \cos \varrho_n y \quad (4.54b)$$

$$E_{x\nu n1}^{(1)+}(x,y,0) = j\omega_{\nu 1}^+ \frac{\varrho_n}{\alpha} \frac{1}{p\nu n} B_{\nu}^+ b_{\nu n} e^{-j\beta_{\nu}x} \sin \varrho_n y \quad (4.55a)$$

$$E_{x\nu n1}^{(1)-}(x,y,0) = j\omega_{\nu 1}^- \frac{\varrho_n}{\alpha} \frac{1}{p\nu n} B_{\nu}^- b_{\nu n} e^{j\beta_{\nu}x} \sin \varrho_n y \quad (4.55b)$$

$$E_{y\nu n1}^{(1)}(x,y,0) = (-j\omega_{\nu 1}^+) j \frac{\beta_{\nu}}{\alpha^2 p\nu n} B_{\nu}^+ b_{\nu n} e^{-j\beta_{\nu}x} \cos \varrho_n y \quad (4.56a)$$

$$E_{y\nu n1}^{(1)}(x,y,0) = (j\omega_{\nu 1}^-) j \frac{\beta_{\nu}}{\alpha^2 p\nu n} B_{\nu}^- b_{\nu n} e^{j\beta_{\nu}x} \cos \varrho_n y \quad (4.56b)$$

Uzupełniając prawe strony równań (4.52a) ÷ (4.56b) o czynnik  $\exp(-\kappa_{\nu n1}^+ z)$  lub  $\exp(-\kappa_{\nu n1}^- z)$  otrzymuje się pełne równania rozkładu pola elektromagnetycznego w przetworniku o jednorodnej części wtórnej.

## 4.6. Impedancja

Zależności na impedancje dla  $\nu$ -tych oraz  $n$ -tych harmonicznych rozkładu pola są takie same w przypadku przetwornika o biegunach utajonych jak i o biegunach jawnych. Impedancja jednostkowa części wtórnej jednorodnej (półprzestrzeni) na podstawie równań (4.41a) ÷ (4.42b), (4.44a) ÷ (4.45b) lub (4.52a) ÷ (4.53b) (4.55a) ÷ (4.56b) wynosi:

- w kierunku współrzędnej  $y$

$$z_{y\nu n1}^{(1)} = \frac{E_{y\nu n1}^{(1)}(x,y,0)}{H_{x\nu n1}^{(1)}(x,y,0)} = - \frac{j \omega_{\nu 1} \mu_1}{\chi_{\nu n1}} \quad (4.57)$$

- w kierunku współrzędnej  $x$

$$z_{x\nu n1}^{(1)} = \frac{E_{x\nu n1}^{(1)}(x,y,0)}{H_{y\nu n1}^{(1)}(x,y,0)} = \frac{j \omega_{\nu 1} \mu_1}{\chi_{\nu n1}} \quad (4.58)$$

Impedancję jednostkową  $k$ -warstwowej części wtórnej wyznacza się natomiast na podstawie równań (4.35.k), (4.36.k), (4.38.k), (4.39.k) lub (4.46.k), (4.47.k), (4.49.k), (4.50.k):

- w kierunku współrzędnej  $y$

$$z_{y\nu nk}^{(k)} = \left[ \frac{E_{y\nu nk}^{(k)}}{H_{x\nu nk}^{(k)}} \right]_{z=0} = - \frac{j \omega_{\nu k} \mu_k}{\chi_{\nu nk}} x \quad (4.59)$$

$$\frac{\frac{1}{\chi_{\nu nk}} \sinh \chi_{\nu nk} d_k - \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} z_{y\nu nk-1}^{(k-1)} \cosh \chi_{\nu nk} d_k}{\frac{1}{\chi_{\nu nk}} \cosh \chi_{\nu nk} d_k - \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \frac{1}{j \omega_{\nu k-1} \mu_{k-1}} z_{y\nu nk-1}^{(k-1)} \sinh \chi_{\nu nk} d_k}$$

- w kierunku współrzędnej  $x$

$$z_{x\nu nk}^{(k)} = \left[ \frac{E_{x\nu nk}^{(k)}}{H_{y\nu nk}^{(k)}} \right]_{z=0} = \frac{j \omega_{\nu k} \mu_k}{\chi_{\nu nk}} x$$

$$\frac{1}{\chi_{\downarrow nk}} \sinh \chi_{\downarrow nk} d_k - \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \frac{1}{j\omega_{\downarrow k-1} \mu_{k-1}} z_{y\downarrow nk-1}^{(k-1)} \cosh \chi_{\downarrow nk} d_k$$


---


$$\frac{1}{\chi_{\downarrow nk}} \cosh \chi_{\downarrow nk} d_k - \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} \frac{1}{j\omega_{\downarrow k-1} \mu_{k-1}} z_{y\downarrow nk-1}^{(k-1)} \sinh \chi_{\downarrow nk} d_k \quad (4.60)$$

Jak widać, wyrażenia (4.57), (4.58) oraz (4.59), (4.60) różnią się tylko znakami [1.6, s.85], można więc przyjmować jednakową impedancję we wszystkich kierunkach w płaszczyźnie x,y poszczególnych warstw izotropowych:

$$z_{\downarrow n1}^{(1)} = z_{y\downarrow n1}^{(1)} = - z_{x\downarrow n1}^{(1)} \quad (4.61.1)$$

$$z_{\downarrow n2}^{(2)} = z_{y\downarrow n2}^{(2)} = - z_{x\downarrow n2}^{(2)} \quad (4.61.2)$$

.....

$$z_{\downarrow nk}^{(k)} = z_{y\downarrow nk}^{(k)} = - z_{x\downarrow nk}^{(k)} \quad (4.61.k)$$

Wyrażenia (4.59), (4.60) po rozwinięciu przyjmują postać:

$$z_{\downarrow nk}^{(k)} = z_{\downarrow n1}^{(1)} \left[ \frac{z_{\downarrow n2}^{(2)}}{z_{\downarrow n1}^{(1)}} \right] \cdot \dots \cdot \left[ \frac{z_{\downarrow nk-1}^{(k-1)}}{z_{\downarrow nk-2}^{(k-2)}} \right] \left[ \frac{z_{\downarrow nk}^{(k)}}{z_{\downarrow nk-1}^{(k-1)}} \right] \quad (4.62)$$

gdzie

$$z_{\downarrow n1}^{(1)} = \mp \frac{j\omega_{\downarrow 1} \mu_1}{\chi_{\downarrow n1}} \quad (4.63.1)$$

$$\frac{z_{\downarrow n2}^{(2)}}{z_{\downarrow n1}^{(1)}} = \frac{- \frac{1}{z_{\downarrow n1}^{(1)}} \frac{\chi_{\downarrow n1}}{j\omega_{\downarrow 2} \mu_2} \sinh \chi_{\downarrow n2} d_2 + \frac{\omega_{\downarrow 2}}{\omega_{\downarrow 1}} \cosh \chi_{\downarrow n2} d_2}{\cosh \chi_{\downarrow n2} d_2 \mp \frac{\omega_{\downarrow 2}}{\omega_{\downarrow 1}} \frac{\chi_{\downarrow n2}}{j\omega_{\downarrow 2} \mu_2} z_{\downarrow n1}^{(1)} \sinh \chi_{\downarrow n2} d_2} \quad (4.63.2)$$

$$\frac{z_{\downarrow n3}^{(3)}}{z_{\downarrow n2}^{(2)}} = \frac{\mp \frac{1}{z_{\downarrow n2}^{(2)}} \frac{j\omega_{\downarrow 3} \mu_3}{\chi_{\downarrow n3}} \sinh \chi_{\downarrow n3} d_3 + \frac{\omega_{\downarrow 3}}{\omega_{\downarrow 2}} \cosh \chi_{\downarrow n2} d_2}{\cosh \chi_{\downarrow n3} d_3 \mp \frac{\omega_{\downarrow 3}}{\omega_{\downarrow 2}} \frac{\chi_{\downarrow n3}}{j\omega_{\downarrow 3} \mu_3} z_{\downarrow n2}^{(2)} \sinh \chi_{\downarrow n3} d_3} \quad (4.63.3)$$

.....

$$\frac{z_{\nu nk}^{(k)}}{z_{\nu nk-1}^{(k-1)}} = \frac{\frac{1}{z_{\nu nk-1}^{(k-1)}} \frac{j \omega_{\nu k} \mu_k}{\chi_{\nu nk}} \sinh \chi_{\nu nk} d_k + \frac{\omega_{\nu k}}{\omega_{\nu k-1}} \cosh \chi_{\nu nk} d_k}{\cosh \chi_{\nu nk} d_k + \frac{\omega_{\nu k}}{\omega_{\nu k-1}} \frac{\chi_{\nu nk}}{j \omega_{\nu k} \mu_k} z_{\nu nk-1}^{(k-1)} \sinh \chi_{\nu nk} d_k} \quad (4.63.k)$$

Dla  $i$ -tej warstwy przewodzącej wyrażenie  $j \omega_{\nu i} \mu_i / \chi_{\nu ni}$  wynosi:

$$\frac{j \omega_{\nu i} \mu_i}{\chi_{\nu ni}} = (c_{R\nu ni} + j c_{X\nu ni}) \frac{k_{\nu i}}{\gamma_i} \quad (4.64)$$

$$c_{R\nu ni} = \frac{2 a_{Ri} a_{Xi} a_{X\nu ni} + (a_{Ri}^2 - a_{Xi}^2) a_{R\nu ni}}{a_{R\nu ni}^2 + a_{X\nu ni}^2} \quad (4.65)$$

$$c_{X\nu ni} = \frac{2 a_{Ri} a_{Xi} a_{X\nu ni} - (a_{Ri}^2 - a_{Xi}^2) a_{X\nu ni}}{a_{R\nu ni}^2 + a_{X\nu ni}^2} \quad (4.66)$$

Dla  $i$ -tej warstwy nieprzewodzącej natomiast

$$\frac{j \omega_{\nu i} \mu_i}{\chi_{\nu ni}} = \frac{j \omega_{\nu i} \mu_i}{\alpha_{p\nu n}} \quad (4.67)$$

Impedancja części wtórnej „widziana” z części pierwotnej, zgodnie z równaniami (4.35.k), (4.36.k), (4.38.k), (4.39.k) oraz (4.46.k), (4.47.k), (4.49.k), (4.50.k) jest równa:

- w kierunku współrzędnej  $y$

$$z_{y\nu nk-1}^{(k)} = \left[ \frac{E_{y\nu nk}^{(k)}}{H_{x\nu nk}^{(k)}} \right]_{z=d_k} = \frac{\omega_{\nu k}}{\omega_{\nu k-1}} \frac{E_{y\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0)}{H_{x\nu nk-1}^{(k-1)}(x,y,0)} = \frac{1}{\epsilon_{\nu}} z_{y\nu nk-1}^{(k-1)} \quad (4.68)$$



- w kierunku współrzędnej  $x$

$$z_{x\sqrt{nk-1}}^{(k)} = \left[ \frac{E_{x\sqrt{nk}}^{(k)}}{H_{y\sqrt{nk}}^{(k)}} \right]_{z=d_k} = \frac{\omega\sqrt{k} E_{y\sqrt{nk-1}}^{(k-1)}(x,y,0)}{\omega\sqrt{k-1} H_{x\sqrt{nk-1}}^{(k-1)}(x,y,0)} =$$

$$= -\frac{1}{s_{\sqrt{k}}} z_{y\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} = \frac{1}{s_{\sqrt{k}}} z_{\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} \quad (4.69)$$

Impedancja dla strat mocy elektromagnetycznej w szczelinie powietrznej wynosi:

$$z_{\sqrt{nk}}^{(k)} - z_{\sqrt{nk-1}}^{(k)} = z_{\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} \left\{ \left[ \frac{z_{\sqrt{nk}}^{(k)}}{z_{\sqrt{nk-1}}^{(k-1)}} \right] - \frac{1}{s_{\sqrt{k}}} \right\} \quad (4.70)$$

Na podstawie powyższego wyrażenia (4.70) wyznacza się impedancję w gałęzi pionowej schematu zastępczego typu T - rys. 3.4 :

$$\left[ \frac{1}{z_{\sqrt{nk}}^{(k)}} - \frac{1}{z_{\sqrt{nk-1}}^{(k)}} \right]^{-1} = z_{\sqrt{nk-1}}^{(k-1)} \left[ \frac{1}{s_{\sqrt{k}}} \frac{z_{\sqrt{nk-1}}^{(k-1)}}{z_{\sqrt{nk}}^{(k)}} - 1 \right]^{-1} \quad (4.71)$$

#### 4.7. Moc elektromagnetyczna

Zależności na moc elektromagnetyczną są takie same zarówno dla przetwornika o biegunach utajonych jak i o biegunach jawnych.

Składowa normalna wektora Poyntinga wyrażająca moc elektromagnetyczną na jednostkę powierzchni przekazywaną z części pierwotnej do części wtórnej, w przypadku pola trójwymiarowego wynosi:

$$\Pi_{zk}^{(k)} = p_k^{(k)} + j q_k^{(k)} = 0,5 \sum_{\sqrt{n}=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E_{x\sqrt{nk}}^{(k)} H_{y\sqrt{nk}}^{*(k)} + \right.$$

$$\left. - E_{y\sqrt{nk}}^{(k)} H_{x\sqrt{nk}}^{*(k)} \right]_{z=0} = 0,5 \sum_{\sqrt{n}=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ z_{x\sqrt{nk}}^{(k)} \left| H_{y\sqrt{nk}}^{(k)} \right|_{z=0}^2 + \right.$$

$$\left. - z_{y\sqrt{nk}}^{(k)} \left| H_{x\sqrt{nk}}^{(k)} \right|_{z=0}^2 \right] = -0,5 \sum_{\sqrt{n}=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} z_{y\sqrt{nk}}^{(k)} \left| H_{\sqrt{nk}}^{(k)} \right|_{z=0}^2 \quad (4.72)$$

gdzie

$$|H_{\nu nk}^{(k)}|_{z=0} = \left[ |H_{x\nu nk}^{(k)}|_{z=0}^2 + |H_{y\nu nk}^{(k)}|_{z=0}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.73)$$

$$\left[ E_{x\nu nk}^{(k)} H_{y\nu nk}^{*(k)} \right]_{z=0} = z_{x\nu nk}^{(k)} |H_{y\nu nk}^{(k)}|_{z=0}^2 = -z_{y\nu nk}^{(k)} |H_{x\nu nk}^{(k)}|_{z=0}^2 \quad (4.74)$$

$$\left[ E_{y\nu nk}^{(k)} H_{x\nu nk}^{*(k)} \right]_{z=0} = z_{y\nu nk}^{(k)} |H_{x\nu nk}^{(k)}|_{z=0}^2 \quad (4.75)$$

Ponadto dla części wtórnej o biegunach utajonych

$$|H_{x\nu nk}^{(k)}|_{z=0} = |H_{x\nu n1}^{(1)}(x,y,0)| \quad (4.76)$$

$$|H_{y\nu nk}^{(k)}|_{z=0} = |H_{y\nu n1}^{(1)}(x,y,0)| \quad (4.77)$$

Jednostkowe straty mocy elektromagnetycznej w części wtórnej są równe:

$$\begin{aligned} \Pi_{zk-1}^{(k)} = \Delta p_{k-1}^{(k)} + j \Delta q_{k-1}^{(k)} &= 0,5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ E_{x\nu nk}^{(k)} H_{y\nu nk}^{*(k)} + \right. \\ &- \left. E_{y\nu nk}^{(k)} H_{x\nu nk}^{*(k)} \right]_{z=d_k} = 0,5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ z_{x\nu nk}^{(k)} |H_{y\nu nk}^{(k)}|_{z=d_k}^2 + \right. \\ &- \left. z_{y\nu nk}^{(k)} |H_{x\nu nk}^{(k)}|_{z=d_k}^2 \right] = -0,5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{s_\nu} \sum_{n=1}^{\infty} z_{y\nu nk-1}^{(k-1)} |H_{\nu nk}^{(k)}|_{z=d_k}^2 \end{aligned} \quad (4.78)$$

gdzie

$$|H_{\nu nk}^{(k)}|_{z=d_k} = \left[ |H_{x\nu nk}^{(k)}|_{z=d_k}^2 + |H_{y\nu nk}^{(k)}|_{z=d_k}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.79)$$

$$\left[ E_{x\nu nk}^{(k)} H_{y\nu nk}^{*(k)} \right]_{z=d_k} = -\frac{1}{s_\nu} z_{y\nu nk-1}^{(k-1)} |H_{y\nu nk}^{(k)}|_{z=d_k}^2 \quad (4.80)$$

$$\left[ E_{y\nu nk}^{(k)} H_{x\nu nk}^{*(k)} \right]_{z=d_k} = \frac{1}{s_\nu} z_{y\nu nk-1}^{(k-1)} |H_{x\nu nk}^{(k)}|_{z=d_k}^2 \quad (4.81)$$

Po przejściu przez szczelinę powietrzną, moc elektromagnetyczna jednostkowa maleje o

$$\begin{aligned}
 \Delta \Pi_{zk}^{(k)} &= \Pi_{zk}^{(k)} - \Pi_{zk-1}^{(k)} = \\
 &= -0,5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} z_{y\nu nk-1}^{(k-1)} \left\{ \left[ \frac{z^{(k)}}{y_{\nu nk}} \right] \left| H_{\nu nk}^{(k)} \right|_{z=0}^2 + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{s_{\nu}} \left| H_{\nu nk}^{(k)} \right|_{z=d_k}^2 \right\} \quad (4.82)
 \end{aligned}$$

#### 4.8. Siły wzajemnego oddziaływania między częścią pierwotną a częścią wtórną

Na jednostkę powierzchni  $i$ -tej warstwy części wtórnej działają następujące siły wywołane  $\nu$ -tymi oraz  $n$ -tymi harmonicznymi pola elektromagnetycznego części pierwotnej :

- w kierunku współrzędnej  $x$

$$f_{x\nu ni}^{(k)} = 0,5 \gamma_i \operatorname{Re} \left[ \mu_i^* \int_{\sum_{i=1}^k d_i}^{\sum_{i=1}^k d_i} E_{y\nu ni}^{(k)} H_{z\nu ni}^{*(k)} dz \right] \quad (4.83)$$

- w kierunku współrzędnej  $y$

$$f_{y\nu ni}^{(k)} = -0,5 \gamma_i \operatorname{Re} \left[ \mu_i^* \int_{\sum_{i=1}^k d_i}^{\sum_{i=1}^k d_i} E_{x\nu ni}^{(k)} H_{z\nu ni}^{*(k)} dz \right] \quad (4.84)$$

- w kierunku współrzędnej  $z$

$$f_{z\nu ni}^{(k)} = 0,5 \gamma_i \operatorname{Re} \left\{ \mu_i^* \int_{\sum_{i=1}^k d_i}^{\sum_{i=1}^k d_i} \left[ E_{x\nu ni}^{(k)} H_{y\nu ni}^{*(k)} - E_{y\nu ni}^{(k)} H_{x\nu ni}^{*(k)} \right] dz \right\} \quad (4.85)$$

Siła działająca w kierunku pokrywającym się ze współrzędną  $y$  (długością przetwornika) występuje tylko przy niesymetrycznym usytuowaniu części wtórnej względem części pierwotnej.

## 5. OGÓLNY ALGORYTM OBLICZEŃ PRZETWORNIKÓW

Na podstawie rozważań przedstawionych w poprzednich rozdziałach opracowano ogólny algorytm obliczeń na maszynie cyfrową elektromechanicznych przetworników indukcyjnych, który ujmuje :

- anizotropię części wtórnej,
- zmienną przenikalność magnetyczną oraz zjawisko histerezy w warstwach ferromagnetycznych części wtórnej,
- harmoniczne przestrzenne rozkładu pola wzdłuż podziałki biegunowej,
- niesymetrię zasilania oraz niesymetrię uzwojeń części pierwotnej.

Istnieje możliwość wykonywania obliczeń przetworników obiegunach utajonych ( $P=0$ ) oraz o biegunach jawnych ( $P=1$ ), wirujących ( $W=0$ ) oraz liniowych ( $W=1$ ), w których część wtórna może posiadać dowolnie skomplikowaną strukturę.

Struktura logiczna algorytmu pozwala na obliczanie charakterystyk pracy przetwornika na podstawie zadanych wymiarów obwodu magnetycznego, parametrów uzwojeń oraz właściwości materiałów konstrukcyjnych. Algorytm jest przeznaczony przede wszystkim do celów badawczych, tzn. mając np. wykonany model przetwornika, oblicza się jego charakterystyki pracy i porównuje z wynikami pomiarów. Efektem finalnym dalszego doskonalenia może być natomiast algorytm projektowania optymalnego przetworników na gruncie teorii pola, będący częścią składową systemu konstruującego [5.2], wykorzystujący m.in. do zagadnień optymalizacji metody programowania nieliniowego oraz dynamicznego [5.1, 5.4], jak również metodę planowania eksperymentu w aproksymacji funkcji wielu zmiennych [5.1, 5.3]. Określenie optymalnych funkcji przejścia, tzn. znalezienie wymiarów geometrycznych, zaprojektowanie uzwo-

jeń części pierwotnej, części wtórnej, przyjęcie obciążeń elektromagnetycznych, itp. według zadanej funkcji wejściowej oraz żądanej funkcji wyjściowej - przy obecnych doświadczeniach w dziedzinie projektowania maszyn i urządzeń elektrycznych na podstawie teorii pola - byłoby bowiem jeszcze niemożliwe.

Na rys. 5.1 przedstawiono podstawową strukturę logiczną algorytmu.

Dane do obliczeń dzielą się na:

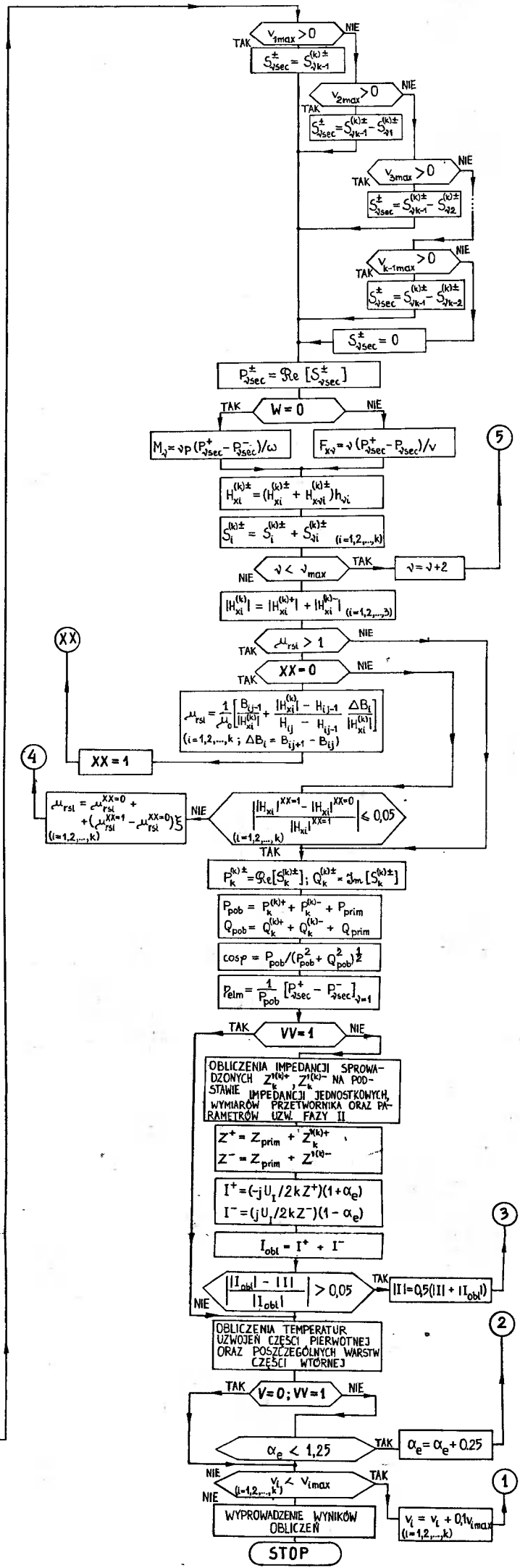
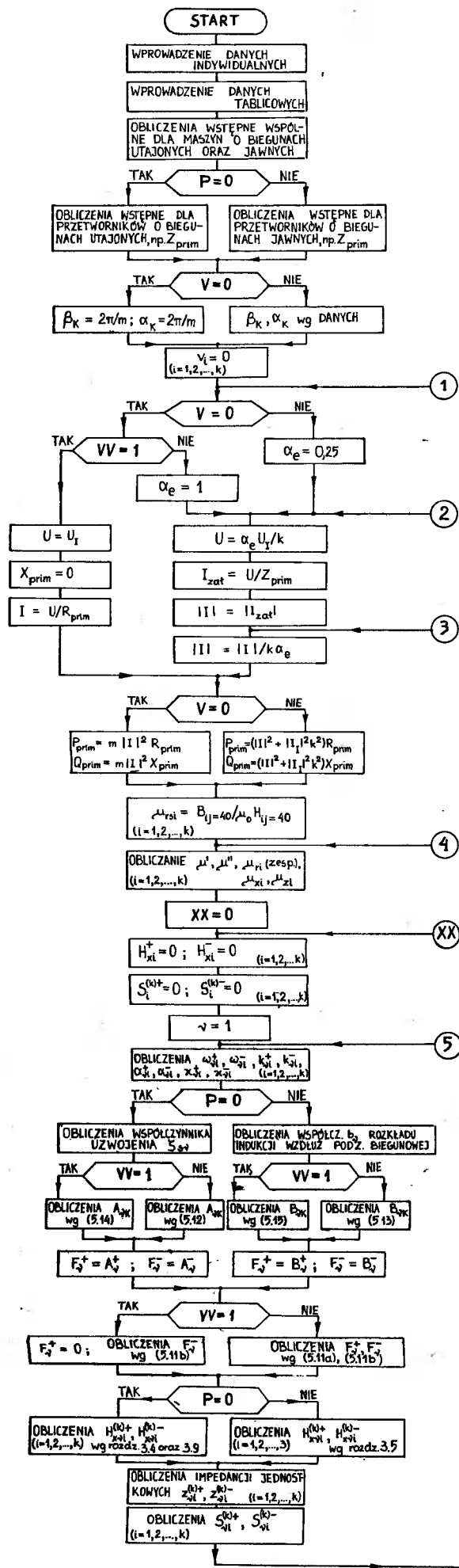
- dane indywidualne, tzn. napięcie i częstotliwość zasilania, prędkość liniowa synchroniczna, liczba żłobków rdzenia części pierwotnej, parametry uzwojeń części pierwotnej, wymiary obwodu magnetycznego części pierwotnej oraz wtórnej, grubości warstw części wtórnej oraz ich konduktywności i prędkości przemieszczania się względem części pierwotnej;
- dane tablicowe, tzn. charakterystyki magnesowania  $B_i(H_i)$  oraz zależności  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}(H_i)$  poszczególnych warstw  $i = k$  części wtórnej.

Tablica  $H_i$ ,  $B_i$ ,  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  dla  $i$ -tej warstwy przedstawiona na rys. 5.2 zawiera  $j = 40$  kolumn, przy czym zakres zmian indukcji magnetycznej obejmuje przedział od zera aż do nasycenia, krokiem co  $\Delta B_i = 0,05$  T. Wartościom  $B_{ij}$  przyporządkowane są wartości  $H_{ij}$  oraz współczynników  $a_{Rij}$ ,  $a_{Xij}$  uwzględniających nieliniowość - rozdz. 2. Jeżeli  $i$ -ta warstwa jest nieferromagnetyczna, to  $H_{ij} = B_{ij} / \mu_0$ ,  $a_{Rij} = a_{Xij} = 1$  const.

Kolejność zmiennych w algorytmie jest następująca:

- prędkości liniowe  $v_i$  poszczególnych warstw ( $i = k$ ),
- współczynnik sygnału napięciowego  $\alpha_e$ ,
- prąd  $I$  części pierwotnej,
- przenikalności magnetyczne względne  $\mu_{rsi}$  poszczególnych warstw,
- rząd  $\nu$  harmonicznych przestrzennych rozkładu pola wzdłuż podziałki biegunowej.

Po wprowadzeniu danych dokonywane są obliczenia wstępne, tzn. wielkości niezależnych od poszczególnych zmiennych. Wielkości takie jak np. rezystancja  $R_{prim}$  uzwojenia fazy  $I$ -ej części pierwotnej, czy też konduktywności  $\gamma_{xi}$ ,  $\gamma_{yi}$



Rys. 5.1. Algorytm obliczeń elektromechanicznych przetworników indukcyjnych na podstawie teorii pola elektromagnetycznego

warstw części wtórnej dla przetworników o biegunach utajonych oraz o biegunach jawnych wyrażają się takimi samymi zależnościami. Zależności, np. na reaktancję rozproszenia  $X_{prim}$  części pierwotnej dla przetworników o biegunach utajonych ( $P = 0$ ) oraz jawnych ( $P = 1$ ) są inne.

$j$	-	1	2	3	4	5	6	...	36	37	38	39	40
$H_i$	$\frac{A}{m}$							...					
$B_i$	$T$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	...	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
$a_{Ri}$	-							...					
$a_{Xi}$	-							...					

Rys. 5.2. Tablica wielkości  $H_i$ ,  $B_i$ ,  $a_{Ri}$ ,  $a_{Xi}$  określających właściwości magnetyczne  $i$ -tej warstwy części wtórnej

Dalsze obliczenia rozpoczynają się od prędkości  $v_i = 0$  poszczególnych warstw części wtórnej, tzn. dla nieruchomej części wtórnej. Prędkości  $v_i$  zmieniane są krokiem co 0,1  $v_{imax}$ , przy czym  $v_{imax}$  - prędkość maksymalna  $i$ -tej warstwy wprowadzana jako jedna z danych indywidualnych (dla szczelin powietrznych lub np. rdzenia wewnętrznego w silniku Ferrarisa  $v_{imax} = 0$ ). Kolejną zmienną powinna być wielkość charakteryzująca niesymetrię amplitudową napięć zasilających. Ponieważ w praktyce zasilane są niesymetrycznie prawie wyłącznie przetworniki dwufazowe lub jednofazowe, przyjęto więc tutaj współczynnik sygnału napięciowego definiowany w teorii silników dwufazowych jako

$$\alpha_e = k \frac{U_{II}}{U_I} \quad (5.1)$$

przy czym:  $U_{II}$  oznaczane dalej krótko  $U$  - napięcie zasilające uzwojenie sterowania (faza II),  $U_I$  - napięcie zasilające uzwojenie wzbudzenia (faza I), przekładnia między uzwo-

jeniami

$$k = \frac{\sum_I N_I}{\sum_{II} N_{II}} \quad (5,2)$$

gdzie  $\sum_I N_I$ ,  $\sum_{II} N_{II}$  - efektywne liczby zwojów szeregowych poszczególnych uzwojeń fazowych.

Dla przetworników zasilanych symetrycznie ( $V = 0$ ) przyjmuje się  $\alpha_e = 1 = \text{const}$ , przy czym jeżeli  $V = 0$ , to przyjmuje się również, że uzwojenia poszczególnych faz są symetryczne.

Algorytm jest również dostosowany do obliczeń hamulców indukcyjnych wiroprowadowych zasilanych prądem stałym ( $VV = 1$ ). Pulsacja prądu w uzwojeniach części pierwotnej  $\omega = 0$  oraz w szczelinie powietrznej istnieje tylko pole przeciwbieżne, zatem równanie (3.8b) przejmuje postać:

$$\exp j(\omega t + \beta_{\gamma} x_0) = \exp j\beta_{\gamma}(v_1 t + x) \quad (5,3)$$

Wstępnie zakłada się wartość maksymalną prądu w uzwojeniach (w silnikach dwufazowych i jednofazowych w uzwojeniu fazy II) części pierwotnej, która wynosi:

$$I_{\text{zał}} = \frac{U}{Z_{\text{prim}}} \quad (5.4)$$

gdzie

$$Z_{\text{prim}} = R_{\text{prim}} + j X_{\text{prim}}$$

Prąd ten potrzebny jest do obliczenia natężeń pól magnetycznego i elektrycznego na powierzchniach poszczególnych warstw części wtórnej. Po wykonaniu całości obliczeń, prąd wstępnie założony korygowany jest z prądem obliczonym. Straty mocy czynnej oraz biernej w uzwojeniach części pierwotnej obliczane są na podstawie prądów w uzwojeniach oraz rezystancji i reaktancji tych uzwojeń.

Powyższe obliczenia dotyczyły przede wszystkim części pierwotnej. Obliczenia elektromagnetyczne części wtórnej oraz charakterystyk pracy silnika (ogólnie przetwornika) rozpoczynają się od wstępnego założenia względnych przenikalności magnetycznych na powierzchni poszczególnych warstw, w początku układu współrzędnych. Wstępnie dla  $i$ -tej warstwy przy-



jmuje się, że :

$$|\mu_{rsi}| = \frac{B_{ij} = 40}{\mu_0 H_{ij} = 40} \quad (5.5)$$

Następnie oblicza się przenikalności  $\mu'$ ,  $\mu''$  według (2.4a), (2.4b), przenikalność zespoloną  $\mu_{ri}$  według (2.4) oraz przenikalności  $\mu_{xi}$ ,  $\mu_{zi}$  według (3.99), (3.100). W celu uwzględnienia wpływu wyższych harmonicznych  $\nu > 1$  rozkładu pola wzdłuż podziałki biegunowej na charakterystyki pracy przetwornika, należy m.in. przenikalność magnetyczną wyznaczać dla wypadkowego rozkładu pola magnetycznego - od wszystkich harmonicznych, jak również jako straty mocy w części wtórnej przyjąć straty od harmonicznej podstawowej oraz od wyższych harmonicznych (straty dodatkowe). W tym celu sumowane są harmoniczne od  $\nu = 1$  do  $\nu = \nu_{max}$ , przy czym  $\nu_{max}$  - liczba harmonicznych wzięta do rozważań (jedna z danych indywidualnych). W trakcie sumowania oblicza się pulsacje  $\omega_{\nu i}^+$ ,  $\omega_{\nu i}^-$ , współczynniki tłumienia pola  $k_{\nu i}^+$ ,  $k_{\nu i}^-$ , stałe propagacji  $\alpha_{\nu i}^+$ ,  $\alpha_{\nu i}^-$  według (3.13a), (3.13b) oraz  $\chi_{\nu i}^+$ ,  $\chi_{\nu i}^-$  według (3.17), składowe styczne natężenia pól magnetycznych  $H_{x\nu i}^+$ ,  $H_{x\nu i}^-$  od wyższych harmonicznych w początku układu współrzędnych według (3.90.k), (3.90.k-1), ..., (3.90.1), impedancje jednostkowe  $z_{y\nu i}^{(k)+}$ ,  $z_{y\nu i}^{(k)-}$  według (3.58), (3.59.1), (3.59.2), ..., (3.59.k), straty mocy  $S_{\nu i}^{(k)+}$ ,  $S_{\nu i}^{(k)-}$  w części wtórnej na podstawie zależności (3.69), (3.72), (3.73) oraz twierdzenia Poyntinga, tzn.:

$$S_{\nu i}^{(k)} = P_{\nu i}^{(k)} + j Q_{\nu i}^{(k)} = \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-L/2}^{L/2} \Pi_{z\nu i}^{(k)} dx dy \quad (5.6)$$

moment elektromagnetyczny (dla  $W = 0$ )

$$M = \frac{\nu p}{\omega} = \text{Re} \left[ S_{\nu sec}^+ \right] - \text{Re} \left[ S_{\nu sec}^- \right] \quad (5.7)$$

lub siłę w kierunku współrzędnej  $x$  działającą na część wtórną (dla  $W = 1$ ) :

$$F_{x\nu} = \frac{\nu}{v} \left\{ \text{Re} \left[ S_{\nu sec}^+ \right] - \text{Re} \left[ S_{\nu sec}^- \right] \right\} \quad (5.8)$$

Dla  $\nu = 1$  moment  $M_\nu$  oraz siła  $F_{x\nu}$  są wielkościami użytecznymi. Dla hamulca wirowego ( $V = 1$ ) moment  $M_\nu$  oraz siła  $F_{x\nu}$  są ujemne ( $S_{\nu sec}^+ = 0$ ).

W przetworniku w wykonaniu typowym, w którym wszystkie warstwy za wyjątkiem  $k$ -tej (szczeliny powietrznej) przemieszczają się z jednakową prędkością, straty mocy w części wtórnej wynoszą :

$$S_{\nu sec} = S_{\nu k-1}^{(k)} \quad (5.9)$$

Istnieją jednak przetworniki, w których warstwy wewnętrzne części wtórnej są nieruchome, np. w silniku Ferrarisa o nieruchomym rdzeniu wewnętrznym i wirującym cylindrze nieferromagnetycznym. W takich przetwornikach straty mocy w części wtórnej wynoszą :

$$S_{\nu sec} = S_{\nu k-1}^{(k)} - S_{\nu i}^{(k)}, \quad (5.10)$$

przy czym  $S_{\nu i}^{(k)}$  - straty mocy w warstwach nieruchomych leżących poniżej warstw ruchomych.

W myśl wcześniejszych założeń, w przetwornikach o biegunach utajonych ( $U = 0$ ) wymuszeniem są fale obciążenia liniowego części pierwotnej o amplitudach  $A_\nu^+$ ,  $A_\nu^-$ , w maszynach o biegunach jawnych ( $U = 1$ ) - fale indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej o amplitudach  $B_\nu^+$ ,  $B_\nu^-$ . Na podstawie tych wielkości wyznacza się składowe  $H_{x\nu i}^{(k)+}$ ,  $H_{x\nu i}^{(k)-}$  natężenia pola magnetycznego.

Amplitudy zespolone  $\nu$ -tych harmonicznych fal obciążenia liniowego lub indukcji magnetycznej wirujących w kierunku zgodnym ze zwrotem współrzędnej  $x$  oraz przeciwnym - równania (3.20), (3.42), (4.28), (4.30), zostaną oznaczone ogólnie  $F_\nu^+$ ,  $F_\nu^-$ . Dla przetworników wielofazowych zasilanych niesymetrycznie można napisać, że :

$$F_\nu^+ = 0,5 \left\{ F_{\nu I} + \sum_{K=II}^m F_{\nu K} e^{-j[\beta_K - (K-1)\nu\alpha_K]} \right\} \quad (5.11a)$$

$$F_\nu^- = 0,5 \left\{ F_{\nu I} + \sum_{K=II}^m F_{\nu K} e^{-j[\beta_K + (K-1)\nu\alpha_K]} \right\} \quad (5.11b)$$

przy czym:  $\beta_K$  - kąt między wskazami napięć zasilających

jących uzwojenia fazowe części pierwotnej,  $\alpha_K$  - kąt między osiami magnetycznymi uzwojeń fazowych. Dla przetworników o uzwojeniach symetrycznych zasilanych układem napięć symetrycznych  $\beta_K = 2\pi/m$  oraz  $\alpha_K = 2\pi/m$ . Dla przetworników o uzwojeniach niesymetrycznych zasilanych układem napięć niesymetrycznych wielkości  $\beta_K$  oraz  $\alpha_K$  są wprowadzane jako dane.

Przy zasilaniu części pierwotnej prądem przemiennym (silniki indukcyjne), amplitudy obciążeń liniowych oraz indukcji  $K$ -tego uzwojenia wynoszą:

$$A_{\nu K} = \frac{2\sqrt{2} I_K N_K \zeta_{s\nu K} \zeta_{q\nu K}}{\tau p} \quad (5.12)$$

$$B_K = \mu_0 \frac{\sqrt{2} I_{\nu K} N_K}{2 \sum_{i=k}^1 d_i k_c k_n} \quad (5.13)$$

przy czym:  $N_K$  - liczba zwojów szeregowych pojedynczego uzwojenia fazowego,  $\zeta_{s\nu K} \cdot \zeta_{q\nu K}$  - wypadkowy współczynnik uzwojenia dla  $\nu$ -tej harmonicznej,  $\sum d_i$  - łączna grubość warstw nieferromagnetycznych części wtórnej,  $k_c$  - współczynnik Cartera,  $k_n$  - współczynnik nasycenia obwodu magnetycznego, w przypadku indukcji magnetycznej  $B_{\nu K} = b_{\nu} B_K$ .

Jeżeli uzwojenie części pierwotnej jest zasilane prądem stałym (hamulec indukcyjny wiroprądowy lub elektromagnes ze zworą ferromagnetyczną), te same wielkości wynoszą:

$$A_{\nu K} = \frac{2 I_K N_K \zeta_{s\nu K} \zeta_{q\nu K}}{\tau p} \quad (5.14)$$

$$B_K = \mu_0 \frac{I_K N_K}{2 \sum_{i=k}^1 d_i k_c k_n} \quad (5.15)$$

Zależności (5.13), (5.15) są słuszne w przypadku części wtórnej zawierającej warstwy ferromagnetyczne.

Amplituda składowej stycznej wypadkowej (po zsumowaniu

harmonicznych  $\nu$ ) natężenia pola magnetycznego wynosi

$$H_{xi}^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_{\max}} h_{\nu i} \left[ |H_{x\nu i}^{(k)+}| + |H_{x\nu i}^{(k)-}| \right] \quad (5.16)$$

przy czym  $h_{\nu i}$  - współczynnik szeregu Fouriera zależny od kształtu krzywej natężenia pola magnetycznego. W mniej dokładnych obliczeniach można przyjąć

$$H_{xi}^{(k)} = |H_{x\nu i}^{(k)+}|_{\nu=1} + |H_{x\nu i}^{(k)-}|_{\nu=1}$$

Jeżeli rozważana warstwa jest ferromagnetyczna ( $\mu_{rsi} > 1$ ), należy dla natężenia pola magnetycznego określonego zależnością (5.16) wyznaczyć przenikalność  $\mu_{rsi}$  na podstawie tablicy  $B_i(H_i)$ . Dla natężenia  $|H_{xi}^{(k)}|$  z przedziału  $\langle H_{ij-1}, H_{ij} \rangle$  spełnione jest równanie:

$$\frac{H_{ij} - H_{ij-1}}{|H_{xi}^{(k)}| - H_{ij-1}} = \frac{\Delta B_i}{B_i - B_{ij-1}} \quad (5.17)$$

Stąd

$$\mu_{rsi} = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{B_{ij-1}}{|H_{xi}^{(k)}|} + \frac{|H_{xi}^{(k)}| - H_{ij-1}}{H_{ij} - H_{ij-1}} \cdot \frac{\Delta B_i}{|H_{xi}^{(k)}|} \right] \quad (5.18)$$

przy czym  $B_i = \mu_0 \mu_{rsi} |H_{xi}^{(k)}|$ ,  $XX = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Następnie dla tej przenikalności ( $XX = 1$ ) ponownie wykonuje się te same obliczenia jak dla przenikalności (5.5), założonej wstępnie. Jeżeli

$$\left| \frac{|H_{xi}^{(k)}|_{XX=1} - |H_{xi}^{(k)}|_{XX=0}}{|H_{xi}^{(k)}|_{XX=1}} \right| > 0,05 \quad (5.19)$$

to przyjmuje się nową wartość przenikalności magnetycznej

$$\mu_{rsi} = \mu_{rsi}^{XX=0} + (\mu_{rsi}^{XX=1} - \mu_{rsi}^{XX=0}) \xi \quad (5.20)$$

przy czym  $\xi$  - współczynnik podrelaksacji. Stwierdzono, że najszybciej osiąga się zbieżność procesu iteracyjnego, jeżeli  $\xi = 0,9 \dots 1,0$ . Po przeprowadzeniu procesu iteracyjnego, tzn. spełnieniu nierówności (5.19), przeprowadza się dalsze

obliczenia elektromagnetyczne oraz ciepłe.

Moc czynna oraz bierna pobierana przez przetwornik jest równa:

$$P_{\text{pob}} = P_k^{(k)+} + P_k^{(k)-} + P_{\text{prim}} \quad (5.21)$$

$$Q_{\text{pob}} = Q_k^{(k)+} + Q_k^{(k)-} + Q_{\text{prim}} \quad (5.22)$$

przy czym  $P_k^{(k)+} = \text{Re} [S_k^{(k)+}]$ ,  $P_k^{(k)-} = \text{Re} [S_k^{(k)-}]$ ,  $Q_k^{(k)+} = \text{Im} [S_k^{(k)+}]$ ,  $Q_k^{(k)-} = \text{Im} [S_k^{(k)-}]$  - moc czynna i bierna przekazywana z części pierwotnej do części wtórnej. Znając moc czynną i bierną pobieraną z sieci zasilającej, można obliczyć współczynnik mocy  $\cos \varphi$  przetwornika. Do obliczenia sprawności przetwornika potrzebna jest znajomość strat mechanicznych. Ponieważ przy obliczaniu strat mechanicznych w różnych odmianach przetworników zachodzi konieczność posługiwania się różnymi wzorami empirycznymi, dlatego też wprowadzono tzw. "sprawność elektromagnetyczną":

$$\eta_{\text{elm}} = \frac{\text{Re} [S_{\nu \text{sec}}^+]_{\nu=1} - \text{Re} [S_{\nu \text{sec}}^-]_{\nu=1}}{P_{\text{pob}}} \quad (5.23)$$

Prądy kolejności zgodnej oraz przeciwnej wynoszą:

$$I^+ = -j \frac{U_I}{2 k Z^+} (1 + \alpha_e) \quad (5.24a)$$

$$I^- = j \frac{U_I}{2 k Z^-} (1 - \alpha_e) \quad (5.24b)$$

przy czym

$$Z^+ = Z_{\text{prim}} + Z_k^{(k)+} \quad (5.25a)$$

$$Z^- = Z_{\text{prim}} + Z_k^{(k)-} \quad (5.25b)$$

Impedancje  $Z_k^{(k)+}$ ,  $Z_k^{(k)-}$  są impedancjami części wtórnej (wszystkich warstw  $1 \leq i \leq k$ ) sprowadzonymi do uzwojenia fazy II części pierwotnej.

Całkowity prąd obliczony wynosi

$$I_{\text{obl}} = I^+ + I^- \quad (5.26)$$

Przy zasilaniu części pierwotnej układem napięć symetrycznych, współczynnik  $\alpha_e = 1$ , zatem prąd kolejności prze-

ciwnej  $I^- = 0$ , w hamulcu wiroprowadowym natomiast należy przyjąć  $\alpha_e = -1$ , gdyż  $I^+ = 0$ . Prąd założony wstępnie zostaje następnie zmniejszany przez przyjęcie nowej wartości

$$|I| = 0,5 (|I| + |I_{obl}|)$$

tak długo, aż zostanie spełniona nierówność:

$$\left| \frac{|I_{obl}| - |I|}{|I_{obl}|} \right| \leq 0,5 \quad (5.27)$$

Po obliczeniu prądu wykonuje się obliczenia przyrostów temperatur (lub temperatur) uzwojeń oraz poszczególnych warstw części wtórnej.

Parametry przetwornika, jak np.  $I$ ,  $M_\nu$  lub  $F_{x\nu}$ ,  $P_{pob}$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\eta_{elm}$  otrzymuje się dla zasilania symetrycznego w funkcji prędkości liniowej  $v_i$  części wtórnej, a dla zasilania niesymetrycznego (w przypadku przetworników dwufazowych lub jednofazowych) - również w funkcji współczynnika sygnału  $\alpha_e$ .

Według przedstawionego algorytmu można również wykonywać obliczenia przetworników w oparciu o trójwymiarowy rozkład pola elektromagnetycznego - rozdz. 4; należy wówczas przeprowadzić m.in. sumowanie zarówno harmonicznych  $\nu$  jak i  $n$  rozkładu przestrzennego pola.

## 6. PRZYKŁADY ANALIZY POŁOWEJ PRZETWORNIKÓW

### 6.1. Silnik indukcyjny o wirniku cylindrycznym i rdzeniu wewnętrznym łożyskowanym

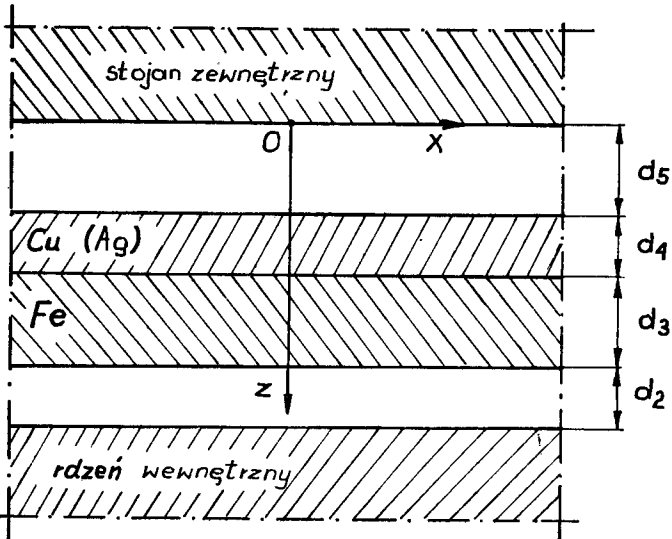
Jednym ze sposobów zmniejszenia stałej czasowej elektro-mechanicznej silnika indukcyjnego jest zastosowanie wirnika cylindrycznego zamocowanego sztywno na wale oraz wewnętrznego rdzenia ferromagnetycznego łożyskowanego na tym samym wale. Wirnik cylindryczny na ogół składa się z dwóch warstw, przy czym stosowane są dwa rozwiązania konstrukcyjne:

- cylinder ferromagnetyczny pokryty warstwą miedzi lub srebra [6.18] - rys. 6.1a ;
- cylinder aluminiowy z wyfrezowanymi żłobkami osiowymi, w których znajdują się pręty ferromagnetyczne [6.2, 6.6] - rys. 6.1b.

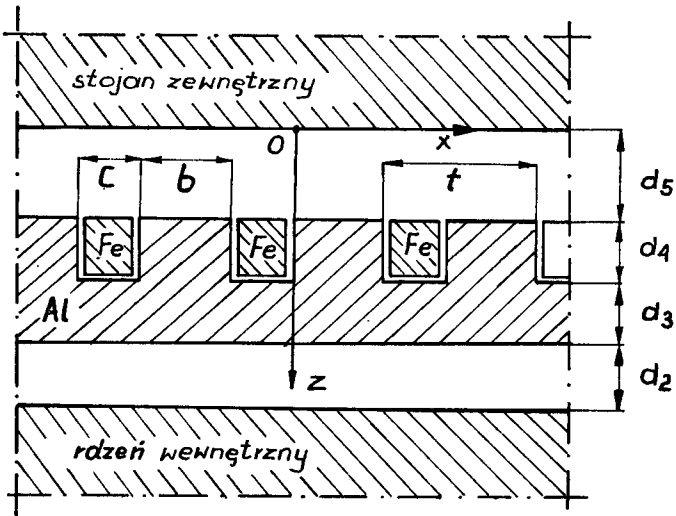
Silnik taki należy do najbardziej skomplikowanych przetworników indukcyjnych pod względem złożoności struktury. Rozwiązanie równań rozkładu pola dla struktury pięciowarstwowej z uwzględnieniem anizotropii i nieliniowości poszczególnych środowisk jest bardzo trudne i bez daleko idących uproszczeń - jak dotąd - nie wykonane. Na przykład w pracy Jawawanta [6.18] odrzucono dwie kolejne pierwsze warstwy, tzn. rdzeń wewnętrzny i szczelinę powietrzną wyznaczając rozkład pola oraz parametry silnika dla struktury trójwarstwowej, przyjmując jednocześnie założenie, że wszystkie warstwy są liniowe i izotropowe.

Opracowana metoda rekurencyjna pozwala w szybki sposób wyznaczyć rozkład pola bez konieczności upraszczania struktury przetwornika, a także uwzględnić zjawisko anizotropii, histerezy magnetycznej oraz nieliniową przenikalność mag-

a)



b)



Rys. 6.1. Budowa silnika indukcyjnego o wirniku cylindrycznym i ułożyskowanym rdzeniu wewnętrznym: a) wirnik ferromagnetyczny pokryty warstwą miedzi; b) wirnik aluminiowy z prętami ferromagnetycznymi w żłobkach



netyczną warstw ferromagnetycznych. Dla przetworników indukcyjnych o strukturach przedstawionych na rys. 6.1, na podstawie zależności rekurencyjnych (3.90k) ÷ (3.93) oraz równań (3.94a) ÷ (3.96b) otrzymuje się następujące równania rozkładu dwuwymiarowego pola elektromagnetycznego:

dla  $0 \leq z \leq d_5$

$$H_{x5}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} (-A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x}) \left[ \frac{\kappa_{\nu 4}^{+}}{\kappa_{\nu 5}^{+}} T_{\nu 4}^{+} \cosh \kappa_{\nu 5}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (z-d_5) + \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} W_{\nu 4}^{+} \sinh \kappa_{\nu 5}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (z-d_5) \right] \quad (6.1a)$$

$$H_{x5}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} (-A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x}) \left[ \frac{\kappa_{\nu 4}^{-}}{\kappa_{\nu 5}^{-}} T_{\nu 4}^{-} \cosh \kappa_{\nu 5}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (z-d_5) + \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} W_{\nu 4}^{-} \sinh \kappa_{\nu 5}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (z-d_5) \right] \quad (6.1b)$$

$$H_{z5}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} (-j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu 5}^{+}}) \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (-A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x}) \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} x \times W_{\nu 4}^{+} \cosh \kappa_{\nu 5}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (z-d_5) - \frac{\kappa_{\nu 4}^{+}}{\kappa_{\nu 5}^{-}} T_{\nu 4}^{+} \sinh \kappa_{\nu 5}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (z-d_5) \right] \quad (6.2a)$$

$$H_{z5}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu 5}^{-}} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (-A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x}) \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} x \times W_{\nu 4}^{-} \cosh \kappa_{\nu 5}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (z-d_5) - \frac{\kappa_{\nu 4}^{-}}{\kappa_{\nu 5}^{-}} T_{\nu 4}^{-} \sinh \kappa_{\nu 5}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (z-d_5) \right] \quad (6.2b)$$

$$E_{y5}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} (-j \frac{\omega_{\nu 5}^{+} \mu_{z5}}{\kappa_{\nu 5}^{+}}) \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (-A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x}) \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} W_{\nu 4}^{+} \cosh \kappa_{\nu 5}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} (z-d_5) + \right.$$

$$- \frac{\kappa_{\nu 4}^+}{\kappa_{\nu 5}^+} T_{\nu 4}^+ \sinh \kappa_{\nu 5}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}} (z-d_5)} \quad (6.3a)$$

$$E_{y5}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} \left( -\frac{j\omega_{\nu 5}^- \mu_{z5}}{\kappa_{\nu 5}^-} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} \left( -A_{\nu}^- e^{j\beta_{\nu} x} \right) \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} \times \right. \\ \left. \times W_{\nu 4}^- \cosh \kappa_{\nu 5}^- \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}} (z-d_5)} - \frac{\kappa_{\nu 4}^-}{\kappa_{\nu 5}^-} T_{\nu 4}^- \sinh \kappa_{\nu 5}^- \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}} (z-d_5)} \right] \quad (6.3b)$$

$$- \text{ dla } d_5 \leq z \leq \sum_{i=4}^5 d_i$$

$$H_{x4}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} \left( -A_{\nu}^+ e^{-j\beta_{\nu} x} \right) \frac{\kappa_{\nu 4}^+}{\kappa_{\nu 5}^+} \left[ \frac{\kappa_{\nu 3}^+}{\kappa_{\nu 4}^+} T_{\nu 3}^+ \times \right. \\ \left. \times \cosh \kappa_{\nu 4}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right)} - \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\nu 3}^+ \times \right. \\ \left. \times \sinh \kappa_{\nu 4}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right)} \right] \quad (6.4a)$$

$$H_{x4}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} \left( -A_{\nu}^- e^{j\beta_{\nu} x} \right) \frac{\kappa_{\nu 4}^-}{\kappa_{\nu 5}^-} \left[ \frac{\kappa_{\nu 3}^-}{\kappa_{\nu 4}^-} T_{\nu 3}^- \times \right. \\ \left. \times \cosh \kappa_{\nu 4}^- \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right)} - \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\nu 3}^- \times \right. \\ \left. \times \sinh \kappa_{\nu 4}^- \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right)} \right] \quad (6.4b)$$

$$H_{z4}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} \left( -j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu 5}^+} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} \left( -A_{\nu}^+ e^{-j\beta_{\nu} x} \right) \times \\ \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\nu 3}^+ \cosh \kappa_{\nu 4}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right)} + \right.$$

$$- \frac{\kappa_{\nu 3}^+}{\kappa_{\nu 4}^+} T_{\nu 3}^+ \sinh \kappa_{\nu 4}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right) \quad (6.5a)$$

$$H_{z4}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu 5}^-} \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} (-A_{\nu}^- e^{j\beta_{\nu} x})_x \\ \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\nu 3}^- \cosh \kappa_{\nu 4}^- \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right) + \right. \\ \left. - \frac{\kappa_{\nu 3}^-}{\kappa_{\nu 4}^-} T_{\nu 3}^- \sinh \kappa_{\nu 4}^- \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right) \right] \quad (6.5b)$$

$$E_{y4}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} \left( -\frac{j\omega_{\nu 4}^+ \mu_{z4}}{\kappa_{\nu 5}^-} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} (-A_{\nu}^+ e^{-j\beta_{\nu} x})_x \\ \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\nu 3}^+ \cosh \kappa_{\nu 4}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right) + \right. \\ \left. - \frac{\kappa_{\nu 3}^+}{\kappa_{\nu 4}^+} T_{\nu 3}^+ \sinh \kappa_{\nu 4}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right) \right] \quad (6.6a)$$

$$E_{y4}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} \left( -\frac{j\omega_{\nu 4}^- \mu_{z4}}{\kappa_{\nu 5}^-} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} (-A_{\nu}^- e^{j\beta_{\nu} x})_x \\ \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\nu 3}^- \cosh \kappa_{\nu 4}^- \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right) + \right. \\ \left. - \frac{\kappa_{\nu 3}^-}{\kappa_{\nu 4}^-} T_{\nu 3}^- \sinh \kappa_{\nu 4}^- \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} \left( z - \sum_{i=4}^5 d_i \right) \right] \quad (6.6b)$$

$$- \text{ dla } \sum_{i=4}^5 d_i \leq z \leq \sum_{i=3}^5 d_i$$

$$H_{x3}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} (-A_{\nu}^+ e^{-j\beta_{\nu} x}) \frac{\kappa_{\nu 3}^+}{\kappa_{\nu 5}^-} x$$

$$\times \left[ \frac{\kappa_{\nu 2}^+}{\kappa_{\nu 3}^+} T_{\nu 2}^+ \cosh \kappa_{\nu 3}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) + \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\nu 2}^+ \sinh \kappa_{\nu 3}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) \right] \quad (6.7a)$$

$$H_{x3}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} \left( -A_{\nu}^- e^{j\beta_{\nu} x} \right) \frac{\kappa_{\nu 3}^-}{\kappa_{\nu 5}^-} \\ \times \left[ \frac{\kappa_{\nu 2}^-}{\kappa_{\nu 3}^-} T_{\nu 2}^- \cosh \kappa_{\nu 3}^- \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) + \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\nu 2}^- \cosh \kappa_{\nu 3}^- \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) \right] \quad (6.7b)$$

$$H_{z3}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} \left( -j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu 5}^+} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( -A_{\nu}^+ e^{-j\beta_{\nu} x} \right) \times$$

$$\times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\nu 2}^+ \cosh \kappa_{\nu 3}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) + \right. \\ \left. - \frac{\kappa_{\nu 2}^+}{\kappa_{\nu 3}^+} T_{\nu 2}^+ \sinh \kappa_{\nu 3}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) \right] \quad (6.8a)$$

$$H_{z3}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu 5}^-} \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( -A_{\nu}^- e^{j\beta_{\nu} x} \right) \times$$

$$\times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\nu 2}^- \cosh \kappa_{\nu 3}^- \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) + \right. \\ \left. - \frac{\kappa_{\nu 2}^-}{\kappa_{\nu 3}^-} T_{\nu 2}^- \sinh \kappa_{\nu 3}^- \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) \right] \quad (6.8b)$$

$$E_{y3}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} \left( -j \frac{\omega_{\nu 3}^+ \mu_{z3}}{\kappa_{\nu 3}^+} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( -A_{\nu}^+ e^{-j\beta_{\nu} x} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\sqrt{2}}^+ \cosh \kappa_{\sqrt{3}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) + \right. \\
 & \left. - \frac{\kappa_{\sqrt{2}}^+}{\kappa_{\sqrt{3}}^+} T_{\sqrt{2}}^+ \sinh \kappa_{\sqrt{3}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) \right] \quad (6.9a)
 \end{aligned}$$

$$E_{y3}^{(5)-} = \sum_{\sqrt{1}}^{\infty} \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \left( -\frac{j \omega_{\sqrt{3}}^- \mu_{z3}}{\kappa_{\sqrt{5}}^-} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( -A_{\sqrt{1}}^- e^{j\beta_{\sqrt{1}} x} \right) x$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\sqrt{2}}^- \cosh \kappa_{\sqrt{3}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) + \right. \\
 & \left. - \frac{\kappa_{\sqrt{2}}^-}{\kappa_{\sqrt{3}}^-} T_{\sqrt{2}}^- \sinh \kappa_{\sqrt{3}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} \left( z - \sum_{i=3}^5 d_i \right) \right] \quad (6.9b)
 \end{aligned}$$

$$- \text{ dla } \sum_{i=3}^5 d_i \leq z \leq \sum_{i=2}^5 d_i$$

$$H_{x2}^{(5)+} = \sum_{\sqrt{1}}^{\infty} \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} \left( -A_{\sqrt{1}}^+ e^{-j\beta_{\sqrt{1}} x} \right) \frac{\kappa_{\sqrt{2}}^+}{\kappa_{\sqrt{5}}^+} x$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \frac{\kappa_{\sqrt{1}}^+}{\kappa_{\sqrt{2}}^+} \cosh \kappa_{\sqrt{2}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) + \right. \\
 & \left. - \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} \sinh \kappa_{\sqrt{2}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) \right] \quad (6.10a)
 \end{aligned}$$

$$H_{x2}^{(5)-} = \sum_{\sqrt{1}}^{\infty} \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \left( -A_{\sqrt{1}}^- e^{j\beta_{\sqrt{1}} x} \right) \frac{\kappa_{\sqrt{2}}^-}{\kappa_{\sqrt{5}}^-} x$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \frac{\kappa_{\sqrt{1}}^-}{\kappa_{\sqrt{2}}^-} \cosh \kappa_{\sqrt{2}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) + \right. \\
 & \left. - \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} \sinh \kappa_{\sqrt{2}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) \right] \quad (6.10b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{z2}^{(5)+} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} (-j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu 5}^{+}}) \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (-A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu}x})_x \\
 &\times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} \cosh \kappa_{\nu 2}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (z - \sum_{i=2}^5 d_i) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\kappa_{\nu 1}^{+}}{\kappa_{\nu 2}^{+}} \sinh \kappa_{\nu 2}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (z - \sum_{i=2}^5 d_i) \right] \quad (6.11a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{z2}^{(5)-} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} j \frac{\beta_{\nu}}{\kappa_{\nu 5}^{-}} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (-A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu}x})_x \\
 &\times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} \cosh \kappa_{\nu 2}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (z - \sum_{i=2}^5 d_i) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\kappa_{\nu 1}^{-}}{\kappa_{\nu 2}^{-}} \sinh \kappa_{\nu 2}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (z - \sum_{i=2}^5 d_i) \right] \quad (6.11b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{y2}^{(5)+} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} (-\frac{j\omega_{\nu 2}^{+} \mu_{z2}}{\kappa_{\nu 5}^{+}}) \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (-A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu}x})_x \\
 &\times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} \cosh \kappa_{\nu 2}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (z - \sum_{i=2}^5 d_i) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\kappa_{\nu 1}^{+}}{\kappa_{\nu 2}^{+}} \sinh \kappa_{\nu 2}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (z - \sum_{i=2}^5 d_i) \right] \quad (6.12a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{y2}^{(5)-} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} (-\frac{j\kappa_{\nu 2}^{-} \mu_{z2}}{\kappa_{\nu 5}^{-}}) \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (-A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu}x})_x \\
 &\times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} \cosh \kappa_{\nu 2}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (z - \sum_{i=2}^5 d_i) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\kappa_{\nu 1}^{-}}{\kappa_{\nu 2}^{-}} \sinh \kappa_{\nu 2}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} (z - \sum_{i=2}^5 d_i) \right] \quad (6.12b)
 \end{aligned}$$

$$- \text{ dla } z \geq \sum_{i=2}^5 d_i$$

$$H_{x1}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} (-A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x}) \frac{\chi_{\nu 1}^{+}}{\chi_{\nu 5}^{+}} \times \exp \left[ -\chi_{\nu 1}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) \right] \quad (6.13a)$$

$$H_{x1}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} (-A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x}) \frac{\chi_{\nu 1}^{-}}{\chi_{\nu 5}^{-}} \times \exp \left[ -\chi_{\nu 1}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) \right] \quad (6.13b)$$

$$H_{z1}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} \left( j \frac{\beta_{\nu}}{\chi_{\nu 5}^{+}} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} (-A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x}) \times \exp \left[ -\chi_{\nu 1}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) \right] \quad (6.14a)$$

$$H_{z1}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} j \frac{\beta_{\nu}}{\chi_{\nu 5}^{-}} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} (-A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x}) \times \exp \left[ -\chi_{\nu 1}^{-} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) \right] \quad (6.14b)$$

$$E_{y1}^{(5)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} \left( -\frac{j\omega_{\nu 1}^{+} \mu_{z1}}{\chi_{\nu 5}^{+}} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} (-A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x}) \times \exp \left[ -\chi_{\nu 1}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) \right] \quad (6.15a)$$

$$E_{y1}^{(5)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} \left( -\frac{j\omega_{\nu 1}^{-} \mu_{z1}}{\chi_{\nu 5}^{-}} \right) \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} (-A_{\nu}^{-} e^{j\beta_{\nu} x}) \times \exp \left[ -\chi_{\nu 1}^{+} \sqrt{\frac{\mu_{x1}}{\mu_{z1}}} \left( z - \sum_{i=2}^5 d_i \right) \right] \quad (6.15b)$$

gdzie

$$T_{\sqrt{2}} = \frac{\kappa_{\sqrt{1}}}{\kappa_{\sqrt{2}}} \cosh \kappa_{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} d_2 +$$

$$+ \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} \sinh \kappa_{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} d_2$$

$$W_{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} \cosh \kappa_{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} d_2 +$$

$$+ \frac{\kappa_{\sqrt{1}}}{\kappa_{\sqrt{2}}} \sinh \kappa_{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} d_2$$

$$T_{\sqrt{3}} = \frac{\kappa_{\sqrt{2}}}{\kappa_{\sqrt{3}}} T_{\sqrt{2}} \cosh \kappa_{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} d_3 +$$

$$+ \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\sqrt{2}} \sinh \kappa_{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} d_3$$

$$W_{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\sqrt{2}} \cosh \kappa_{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} d_3 +$$

$$+ \frac{\kappa_{\sqrt{2}}}{\kappa_{\sqrt{3}}} T_{\sqrt{2}} \sinh \kappa_{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} d_3$$

$$T_{\sqrt{4}} = \frac{\kappa_{\sqrt{3}}}{\kappa_{\sqrt{4}}} T_{\sqrt{3}} \cosh \kappa_{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} d_4 + \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\sqrt{3}} \sinh \kappa_{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} d_4$$

$$W_{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\sqrt{3}} \cosh \kappa_{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} d_4 + \frac{\kappa_{\sqrt{3}}}{\kappa_{\sqrt{4}}} T_{\sqrt{3}} \sinh \kappa_{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} d_4$$

$$M_{\sqrt{5}} = \frac{\kappa_{\sqrt{4}}}{\kappa_{\sqrt{5}}} \cosh \kappa_{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 +$$

$$+ \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} W_{\sqrt{4}} \sinh \kappa_{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 \quad (6.16)$$

Przenikalności magnetyczne oraz konduktywności poszczególnych warstw części wtórnej wynoszą :



- dla struktury przedstawionej na rys. 6.1a

$$\begin{aligned} \mu_{z5} = \mu_{x5} = \mu_5 = \mu_0, & \quad \gamma_{y5} = \gamma_{x5} = 0 \\ \mu_{z4} = \mu_{x4} = \mu_4 = \mu_0, & \quad \gamma_{y4} = \gamma_{x4} = \gamma_{Cu4} \\ \mu_{z3} = \mu_{x3} = \mu_3 = \mu_0 \mu_{r3} & \quad \gamma_{y3} = \gamma_{x3} = \gamma_3 \\ \mu_{z2} = \mu_{x2} = \mu_2 = \mu_0 & \quad \gamma_{y2} = \gamma_{x2} = 0 \\ \mu_{z1} \neq \mu_{x1} \text{ (blachy anizotropowe),} & \quad \gamma_{y1} = \epsilon_1 \gamma_1 \\ \mu_{z1} = \mu_{x1} \text{ (blachy izotropowe)} & \quad \gamma_{x1} = \gamma_1 \end{aligned}$$

- dla struktury przedstawionej na rys. 6.1b

$$\begin{aligned} \mu_{x5} = \mu_{z5} = \mu_5 = \mu_0, & \quad \gamma_{y5} = \gamma_{x5} = 0 \\ \mu_{x4} = \frac{\mu_0 \mu_{r4} t_4}{t_4 - b_4(1 - \mu_{r4})}, & \quad \gamma_{x4} = \frac{\gamma_{Al4} \gamma_4 t_4}{\gamma_{Al4} t_4 - b_4(\gamma_{Al4} - \gamma_4)} \\ \mu_{z4} = \mu_0 \mu_{r4} + \frac{b_4}{t_4} \mu_0 (1 - \mu_{r4}), & \quad \gamma_{y4} = \epsilon_4 \gamma_4 + \\ & \quad + \frac{b_4}{t_4} (\gamma_{Al4} - \epsilon_4 \gamma_4) \\ \mu_{x3} = \mu_{z3} = \mu_3 = \mu_0, & \quad \gamma_{y3} = \gamma_{x3} = \gamma_{Al3} \\ \mu_{x2} = \mu_{z2} = \mu_2 = \mu_0, & \quad \gamma_{y2} = \gamma_{x2} = 0 \\ \mu_{x1} \neq \mu_{z1} \text{ (blachy anizotropowe),} & \quad \gamma_{y1} = \epsilon_1 \gamma_1 \\ \mu_{x1} = \mu_{z1} \text{ (blachy izotropowe),} & \quad \gamma_{x1} = \gamma_1 \end{aligned}$$

W dalszych rozważaniach częścią wtórną nazywany jest wirnik cylindryczny wraz ze stojanem wewnętrznym.

Na podstawie wyrażeń (3.57), (3.58), (3.59.1),..., (3.59.k) można wyznaczyć impedancję jednostkową półprzestrzeni znajdującej się pod częścią pierwotną (stojanem) :

$$z_{\sqrt{5}}^{(5)} = \left[ \begin{array}{c} E_{y\sqrt{5}}^{(5)} \\ H_{x\sqrt{5}}^{(5)} \end{array} \right]_{z=0} = - \frac{j \omega_{\sqrt{5}} \sqrt{\mu_{x5} \mu_{z5}}}{\kappa_{\sqrt{5}}} \times$$



$$= \frac{\omega_{\sqrt{5}}}{\omega_{\sqrt{4}}} z_{\sqrt{4}}^{(4)}$$

W układzie współrzędnych związanym z częścią pierwotną  $\omega_{\sqrt{4}} = \omega_{\sqrt{5}} s_{\sqrt{4}}$ , zatem

$$z_{\sqrt{4}}^{(5)} = \frac{1}{s_{\sqrt{4}}} z_{\sqrt{4}}^{(4)} \quad (6.19)$$

Napięcie średnie wzdłuż podziatki biegunowej, na odcinku  $-0,5L \leq y \leq 0,5L$  powierzchni rozgraniczającej część pierwotną od części wtórnej można obliczyć następująco:

$$\begin{aligned} U_{y\sqrt{5}}^{(5)+} &= \frac{\sqrt{2}}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} \int_{-0,5L}^{0,5L} [E_{y\sqrt{5}}^{(5)+}]_{z=0} dx dy = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} \int_{-0,5L}^{0,5L} \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} \left( - \frac{j \omega_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\mu_{x5} \mu_{z5}}}{\chi_{\sqrt{5}}^+} \right) (-A_{\sqrt{5}}^+ e^{-j\beta_{\sqrt{5}} x}) \\ &\times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} W_{\sqrt{4}}^+ \cosh \chi_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 + \right. \\ &\left. + \frac{\chi_{\sqrt{4}}^+}{\chi_{\sqrt{5}}^+} T_{\sqrt{4}}^+ \sinh \chi_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 \right] dx dy = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\tau} L \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} \left( - \frac{j \omega_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\mu_{x5} \mu_{z5}}}{\chi_{\sqrt{5}}^+} \right) \frac{2}{j \beta_{\sqrt{5}}} (-A_{\sqrt{5}}^+) \times \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} \times \right. \\ &\left. \times W_{\sqrt{4}}^+ \cosh \chi_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 + \frac{\chi_{\sqrt{4}}^+}{\chi_{\sqrt{5}}^+} T_{\sqrt{4}}^+ \sinh \chi_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 \right] \quad (6.20a) \\ U_{y\sqrt{5}}^{(5)-} &= \frac{\sqrt{2}}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} \int_{-0,5L}^{0,5L} [E_{y\sqrt{5}}^{(5)-}]_{z=0} dx dy = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\tau} L \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \left( - \frac{j \omega_{\sqrt{5}}^- \sqrt{\mu_{x5} \mu_{z5}}}{\chi_{\sqrt{5}}^-} \right) A_{\sqrt{5}}^- \frac{2}{j \beta_{\sqrt{5}}} \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times W_{\sqrt{4}}^- \cosh \chi_{\sqrt{5}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 + \frac{\chi_{\sqrt{4}}^-}{\chi_{\sqrt{5}}^-} T_{\sqrt{4}}^- \sinh \chi_{\sqrt{5}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 \quad (6.20b)$$

Prąd całkowity transformowany z części pierwotnej do części wtórnej wynosi:

$$\begin{aligned} I_{y\sqrt{5}}^{(5)+} &= \int_0^{\tau/\sqrt{5}} [H_{x\sqrt{5}}^{(5)+}]_{z=0} dx = \\ &= \int_0^{\tau/\sqrt{5}} \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} (-A_{\sqrt{5}}^+) e^{-j\beta_{\sqrt{5}}x} \left[ \frac{\chi_{\sqrt{4}}^+}{\chi_{\sqrt{5}}^+} T_{\sqrt{4}}^+ \cosh \chi_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} W_{\sqrt{4}}^+ \sinh \chi_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 \right] dx = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} \frac{2}{j\beta_{\sqrt{5}}} (-A_{\sqrt{5}}^+) \times \\ &\times \left[ \frac{\chi_{\sqrt{4}}^+}{\chi_{\sqrt{5}}^+} T_{\sqrt{4}}^+ \cosh \chi_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 + \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} W_{\sqrt{4}}^+ \sinh \chi_{\sqrt{5}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 \right] \quad (6.21a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y\sqrt{5}}^{(5)-} &= \int_0^{\tau/\sqrt{5}} [H_{x\sqrt{5}}^{(5)-}]_{z=0} dx = \\ &= \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \frac{2}{j\beta_{\sqrt{5}}} A_{\sqrt{5}}^- \left[ \frac{\chi_{\sqrt{4}}^-}{\chi_{\sqrt{5}}^-} T_{\sqrt{4}}^- \cosh \chi_{\sqrt{5}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{\mu_{x4} \mu_{z4}}{\mu_{x5} \mu_{z5}}} W_{\sqrt{4}}^- \sinh \chi_{\sqrt{5}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x5}}{\mu_{z5}}} d_5 \right] \quad (6.21b) \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenia (6.21a), (6.21b) ujmują prądy wirowe w warstwach przewodzących, prądy wynikające ze zjawiska histerezy magnetycznej, jak również prądy pobierane na magnesowanie warstw nieferromagnetycznych oraz ferromagnetycznych części wtórnej (w tym szczelin powietrznych).

Impedancję półprzestrzeni znajdującej się pod stojanem określają napięcia (6.20a), (6.20b) oraz prądy (6.21a), (6.21b) tzn.:

$$Z_{\sqrt{5}}^{(5)+} = R_{\sqrt{5}}^{(5)+} + j X_{\sqrt{5}}^{(5)+} = \frac{U_{y\sqrt{5}}^{(5)+}}{I_{y\sqrt{5}}^{(5)+}} = z_{\sqrt{5}}^{(5)+} \frac{L}{\tau} \quad (6.22a)$$

$$z_{\sqrt{5}}^{(5)-} = R_{\sqrt{5}}^{(5)-} + j X_{\sqrt{5}}^{(5)-} = \frac{U_{y\sqrt{5}}^{(5)-}}{I_{y\sqrt{5}}^{(5)-}} = z_{\sqrt{5}}^{(5)-} \sqrt{\frac{L}{\tau}} \quad (6.22b)$$

przy czym impedancje jednostkowe  $z_{\sqrt{5}}^{(5)+}$ ,  $z_{\sqrt{5}}^{(5)-}$  według (6.17).

Napięcie średnie na powierzchni wirnika wynosi:

$$\begin{aligned} U_{y\sqrt{4}}^{(5)+} &= \frac{\sqrt{2}}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} \int_{-0,5L}^{0,5L} [E_{y\sqrt{5}}^{(5)+}]_{z=d_5} dx dy = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\tau} L \frac{2}{j\beta_{\sqrt{2}}} \frac{\omega_{\sqrt{5}}^+}{\omega_{\sqrt{4}}^+} \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} \left( - \frac{j\omega_{\sqrt{4}}^+ \sqrt{\mu_{x4} \mu_{z4}}}{\kappa_{\sqrt{5}}^+} (-A_{\sqrt{2}}^+) W_{\sqrt{4}}^+ \right) \quad (6.23a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{y\sqrt{4}}^{(5)-} &= \frac{\sqrt{2}}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} \int_{-0,5L}^{0,5L} [E_{y\sqrt{5}}^{(5)-}]_{z=d_5} dx dy = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\tau} L \frac{2}{j\beta_{\sqrt{2}}} \frac{\omega_{\sqrt{5}}^-}{\omega_{\sqrt{4}}^-} \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \left( - \frac{j\omega_{\sqrt{4}}^- \sqrt{\mu_{x4} \mu_{z4}}}{\kappa_{\sqrt{5}}^-} A_{\sqrt{2}}^- W_{\sqrt{4}}^- \right) \quad (6.23b) \end{aligned}$$

Prądy w części wtórnej (w warstwach od 1 do 4) oblicza się podobnie jak prąd przekazwany z części pierwotnej do części wtórnej, tzn.:

$$I_{y\sqrt{4}}^{(5)+} = \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} [I_{x\sqrt{5}}^{(5)+}]_{z=d_5} dx = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} \frac{2}{j\beta_{\sqrt{2}}} (-A_{\sqrt{2}}^+) \frac{\kappa_{\sqrt{4}}^+}{\kappa_{\sqrt{5}}^+} T_{\sqrt{4}}^+ \quad (6.24a)$$

$$I_{y\sqrt{4}}^{(5)-} = \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} [I_{x\sqrt{5}}^{(5)-}]_{z=d_5} dx = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \frac{2}{j\beta_{\sqrt{2}}} A_{\sqrt{2}}^- \frac{\kappa_{\sqrt{4}}^-}{\kappa_{\sqrt{5}}^-} T_{\sqrt{4}}^- \quad (6.24b)$$

Impedancja części wtórnej, tzn. warstw od 1 do 4 jest stosunkiem napięć (6.23a), (6.23b) do prądów (6.24a), (6.24b):

$$\begin{aligned}
 z_{\sqrt{4}}^{(5)+} &= R_{\sqrt{4}}^{(5)+} + j X_{\sqrt{4}}^{(5)+} = \frac{U_{\sqrt{4}}^{(5)+}}{I_{\sqrt{4}}^{(5)+}} = \frac{\omega_{\sqrt{5}}^+ z_{\sqrt{4}}^{(4)+} L}{\omega_{\sqrt{4}}^+} = \\
 &= \frac{1}{s_{\sqrt{4}}^+} z_{\sqrt{4}}^{(4)+} \frac{L}{\tau} \quad (6.25a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_{\sqrt{4}}^{(5)-} &= R_{\sqrt{4}}^{(5)-} + j X_{\sqrt{4}}^{(5)-} = \frac{U_{\sqrt{4}}^{(5)-}}{I_{\sqrt{4}}^{(5)-}} = \frac{\omega_{\sqrt{5}}^- z_{\sqrt{4}}^{(4)-} L}{\omega_{\sqrt{4}}^-} = \\
 &= \frac{1}{s_{\sqrt{4}}^-} z_{\sqrt{4}}^{(4)-} \frac{L}{\tau} \quad (6.25b)
 \end{aligned}$$

Prądy w poszczególnych warstwach od 1 do 4 oblicza się całkując gęstość prądu w granicach od 0 do  $\tau/\sqrt{4}$  względem współrzędnej  $x$  oraz w granicach od  $\sum_{i=1}^k d_i$  do  $\sum_{i=1}^k d_i$  względem współrzędnej  $z$  :

- dla warstwy czwartej

$$i_{y\sqrt{4}}^{(5)+} = \gamma_{y\sqrt{4}} \int_0^{\tau/\sqrt{4}} \int_{d_5}^{\sum_{i=1}^5 d_i} E_{y\sqrt{4}}^{(5)+} dx dz = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} \times$$

$$\left( - \frac{j \omega_{\sqrt{4}}^+ \gamma_{y\sqrt{4}} \mu_{z4}}{\chi_{\sqrt{4}}^+} \right) \frac{2}{j \beta_{\sqrt{4}} \chi_{\sqrt{5}}^+} (-A_{\sqrt{4}}^+) \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\sqrt{3}}^+ \times$$

$$\times \sinh \chi_{\sqrt{4}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} d_4 + \frac{\chi_{\sqrt{3}}^+}{\chi_{\sqrt{4}}^+} T_{\sqrt{3}}^+ (\cosh \chi_{\sqrt{4}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} d_4 - 1) \right] \quad (6.26a)$$

$$i_{y\sqrt{4}}^{(5)-} = \gamma_{y\sqrt{4}} \int_0^{\tau/\sqrt{4}} \int_{d_5}^{\sum_{i=1}^5 d_i} E_{y\sqrt{4}}^{(5)-} dx dz = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \times$$

$$\left( - \frac{j \omega_{\sqrt{4}}^- \gamma_{y\sqrt{4}} \mu_{z4}}{\chi_{\sqrt{4}}^-} \right) \frac{2}{j \beta_{\sqrt{4}} \chi_{\sqrt{5}}^-} A_{\sqrt{4}}^- \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x3} \mu_{z3}}{\mu_{x4} \mu_{z4}}} W_{\sqrt{3}}^- \times$$

$$\times \sinh \chi_{\sqrt{4}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} d_4 + \frac{\chi_{\sqrt{3}}^-}{\chi_{\sqrt{4}}^-} T_{\sqrt{3}}^- (\cosh \chi_{\sqrt{4}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x4}}{\mu_{z4}}} d_4 - 1) \right] \quad (6.26b)$$

- dla warstwy trzeciej

$$i_{y\sqrt{3}}^{(5)+} = \gamma_{y3} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \int_{\sum_{i=4}^5 d_i}^{\sum_{i=3}^5 d_i} E_{y\sqrt{3}}^{(5)+} dx dz = \frac{1}{M_{\sqrt{3}}^{(5)+}} x$$

$$\times \left( - \frac{j\omega_{\sqrt{3}}^+ \gamma_{y3} \mu_{z3}}{\kappa_{\sqrt{3}}^+} \right) \frac{2}{j\beta_{\sqrt{3}} \kappa_{\sqrt{3}}^+} (-A_{\sqrt{3}}^+) \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\sqrt{2}}^+ x \right. \\ \left. \times \sinh \kappa_{\sqrt{3}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} d_3 + \frac{\kappa_{\sqrt{2}}^+}{\kappa_{\sqrt{3}}^+} T_{\sqrt{2}}^+ (\cosh \kappa_{\sqrt{3}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} d_3 - 1) \right] \quad (6.27a)$$

$$i_{y\sqrt{3}}^{(5)-} = \gamma_{y3} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \int_{\sum_{i=4}^5 d_i}^{\sum_{i=3}^5 d_i} E_{y\sqrt{3}}^{(5)-} dx dz = \frac{1}{M_{\sqrt{3}}^{(5)-}} x$$

$$\times \left( - \frac{j\omega_{\sqrt{3}}^- \gamma_{y3} \mu_{z3}}{\kappa_{\sqrt{3}}^-} \right) \frac{2}{j\beta_{\sqrt{3}} \kappa_{\sqrt{3}}^-} A_{\sqrt{3}}^- \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x2} \mu_{z2}}{\mu_{x3} \mu_{z3}}} W_{\sqrt{2}}^- x \right. \\ \left. \times \sinh \kappa_{\sqrt{3}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} d_3 + \frac{\kappa_{\sqrt{2}}^-}{\kappa_{\sqrt{3}}^-} T_{\sqrt{2}}^- (\cosh \kappa_{\sqrt{3}}^- \sqrt{\frac{\mu_{x3}}{\mu_{z3}}} d_3 - 1) \right] \quad (6.27b)$$

- dla warstwy drugiej

$$i_{y\sqrt{2}}^{(5)+} = \gamma_{y2} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \int_{\sum_{i=3}^5 d_i}^{\sum_{i=2}^5 d_i} E_{y\sqrt{2}}^{(5)-} dx dz = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} x$$

$$\times \left( - \frac{j\omega_{\sqrt{2}}^+ \gamma_{y2} \mu_{z2}}{\kappa_{\sqrt{2}}^+} \right) \frac{2}{j\beta_{\sqrt{2}} \kappa_{\sqrt{2}}^+} (-A_{\sqrt{2}}^+) \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} x \right. \\ \left. \times \sinh \kappa_{\sqrt{2}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} d_2 + \frac{\kappa_{\sqrt{1}}^+}{\kappa_{\sqrt{2}}^+} (\cosh \kappa_{\sqrt{2}}^+ \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} d_2 - 1) \right] \quad (6.28a)$$

$$i_{y\sqrt{2}}^{(5)-} = \gamma_{y2} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \int_{\sum_{i=3}^5 d_i}^{\sum_{i=2}^5 d_i} E_{y\sqrt{2}}^{(5)-} dx dz = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} x$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( - \frac{j \omega_{\nu 2}^- \gamma_{y2} \mu_{z2}}{\kappa_{\nu 2}^-} \right) \frac{2}{j \beta_{\nu} \kappa_{\nu 5}^-} A_{\nu}^- \left[ \sqrt{\frac{\mu_{x1} \mu_{z1}}{\mu_{x2} \mu_{z2}}} \times \right. \\
 & \left. \times \sinh \kappa_{\nu 2}^- \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} d_2 + \frac{\kappa_{\nu 1}^-}{\kappa_{\nu 2}^-} \left( \cosh \kappa_{\nu 2}^- \sqrt{\frac{\mu_{x2}}{\mu_{z2}}} d_2 - 1 \right) \right] \quad (6.28b)
 \end{aligned}$$

- dla warstwy pierwszej

$$\begin{aligned}
 i_{y\nu 1}^{(5)+} &= \gamma_{y1} \int_0^{\frac{\tau}{\nu}} \int_{\sum_{i=2}^5 d_i}^{\infty} E_{y\nu 1}^{(5)+} dx dz = \\
 &= \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} \left( - \frac{j \omega_{\nu 1}^+ \gamma_{y1} \mu_{z1}}{\kappa_{\nu 1}^+} \right) \frac{2}{j \beta_{\nu} \kappa_{\nu 5}^+} (-A_{\nu}^+) \quad (6.29a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_{y\nu 2}^{(5)-} &= \gamma_{y1} \int_0^{\frac{\tau}{\nu}} \int_{\sum_{i=2}^5 d_i}^{\infty} E_{y\nu 1}^{(5)-} dx dz = \\
 &= \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)-}} \left( - \frac{j \omega_{\nu 1}^- \gamma_{y1} \mu_{z1}}{\kappa_{\nu 1}^-} \right) \frac{2}{j \beta_{\nu} \kappa_{\nu 5}^-} A_{\nu}^- \quad (6.29b)
 \end{aligned}$$

Prądy (6.26a) - (6.29b) są prądami wirowymi w elementach masywnych przewodzących. Ponieważ  $\gamma_{y2} = 0$ , więc prądy  $i_{y\nu 2}^{(5)+}$ ,  $i_{y\nu 2}^{(5)-}$  są równe zero - zależności (6.28a), (6.28b).

Przyjmując  $\beta_{\nu} \ll \alpha_{\nu i}$ , co dla harmonicznycy  $\nu \leq 5$  przy częstotliwościach technicznych i przy podziale biegunowej większej od kilku centymetrów jest spełnione, suma prądów wirowych w warstwach  $1 \leq i \leq 4$  wynosi:

$$\begin{aligned}
 i_{y\nu 4}^{(5)+} + i_{y\nu 3}^{(5)+} + i_{y\nu 2}^{(5)+} + i_{y\nu 1}^{(5)+} &= \frac{1}{M_{\nu 5}^{(5)+}} \frac{1}{j \beta_{\nu}} A_{\nu}^+ \times \\
 \times \frac{\kappa_{\nu 4}^+}{\kappa_{\nu 5}^+} T_{\nu 4}^+ &= - \int_0^{\frac{\tau}{\nu}} \left[ H_{x\nu 5}^{(5)+} \right]_{z=d_5} dx = i_{y\nu 4}^{(5)+} \quad (6.30a)
 \end{aligned}$$



$$i_{y\sqrt{4}}^{(5)-} + i_{y\sqrt{3}}^{(5)-} + i_{y\sqrt{2}}^{(5)-} + i_{y\sqrt{1}}^{(5)-} = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \frac{1}{j\beta_{\sqrt{4}}} \times$$

$$\times (-A_{\sqrt{4}}^{-}) \frac{\chi_{\sqrt{4}}^{-}}{\chi_{\sqrt{5}}^{-}} T_{\sqrt{4}}^{-} = - \int_0^r \frac{r}{\sqrt{v}} \left[ H_{x\sqrt{5}}^{(5)-} \right] z = d_5 dx = I_{y\sqrt{4}}^{(5)-} \quad (6.30b)$$

Prądy wirowe w wirniku cylindrycznym są sumą prądów (6.26) oraz (6.27), tzn.:

$$i_{y\sqrt{4}}^{(5)+} + i_{y\sqrt{3}}^{(5)+} = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} \frac{2}{j\beta_{\sqrt{4}}\chi_{\sqrt{5}}^{+}} A_{\sqrt{4}}^{+} \left\{ \frac{(\alpha_{\sqrt{4}}^{+})^2}{\chi_{\sqrt{4}}^{+}} T_{\sqrt{4}}^{+} + \right.$$

$$\left. - T_{\sqrt{3}}^{+} \left[ \frac{(\alpha_{\sqrt{4}}^{+})^2}{(\chi_{\sqrt{4}}^{+})^2} \chi_{\sqrt{3}}^{+} - \frac{(\alpha_{\sqrt{3}}^{+})^2}{\chi_{\sqrt{3}}^{+}} \right] - \frac{(\alpha_{\sqrt{3}}^{+})^2}{(\chi_{\sqrt{3}}^{+})^2} \chi_{\sqrt{2}}^{+} T_{\sqrt{2}}^{+} \right\} \quad (6.31a)$$

$$i_{y\sqrt{4}}^{(5)-} + i_{y\sqrt{3}}^{(5)-} = \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \frac{2}{j\beta_{\sqrt{4}}\chi_{\sqrt{5}}^{-}} (-A_{\sqrt{4}}^{-}) \left\{ \frac{(\alpha_{\sqrt{4}}^{-})^2}{\chi_{\sqrt{4}}^{-}} T_{\sqrt{4}}^{-} + \right.$$

$$\left. - T_{\sqrt{3}}^{-} \left[ \frac{(\alpha_{\sqrt{4}}^{-})^2}{(\chi_{\sqrt{4}}^{-})^2} \chi_{\sqrt{3}}^{-} - \frac{(\alpha_{\sqrt{3}}^{-})^2}{\chi_{\sqrt{3}}^{-}} \right] - \frac{(\alpha_{\sqrt{3}}^{-})^2}{(\chi_{\sqrt{3}}^{-})^2} \chi_{\sqrt{2}}^{-} T_{\sqrt{2}}^{-} \right\} \quad (6.31b)$$

Zakładając  $\beta_{\sqrt{4}} \ll \alpha_{\sqrt{4}}$  otrzymuje się

$$i_{y\sqrt{4}}^{(5)+} + i_{y\sqrt{3}}^{(5)+} \cong \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)+}} \frac{2}{j\beta_{\sqrt{4}}\chi_{\sqrt{5}}^{+}} A_{\sqrt{4}}^{+} (\chi_{\sqrt{4}}^{+} T_{\sqrt{4}}^{+} - \chi_{\sqrt{2}}^{+} T_{\sqrt{2}}^{+}) \quad (6.32a)$$

$$i_{y\sqrt{4}}^{(5)-} + i_{y\sqrt{3}}^{(5)-} \cong \frac{1}{M_{\sqrt{5}}^{(5)-}} \frac{2}{j\beta_{\sqrt{4}}\chi_{\sqrt{5}}^{-}} (-A_{\sqrt{4}}^{-}) (\chi_{\sqrt{4}}^{-} T_{\sqrt{4}}^{-} - \chi_{\sqrt{2}}^{-} T_{\sqrt{2}}^{-}) \quad (6.32b)$$

Impedancję wirnika cylindrycznego oblicza się na podstawie wyrażeń (6.23a), (6.31a) lub (6.23b), (6.31b) :

$$Z_{\sqrt{4}sec}^{+} = R_{\sqrt{4}sec}^{+} + j X_{\sqrt{4}sec}^{+} = \frac{U_{y\sqrt{4}}^{(5)+}}{-[i_{y\sqrt{4}}^{(5)+} + i_{y\sqrt{4}}^{(5)+}]} =$$

$$= \frac{1}{s_{\sqrt{4}}^{+}} \left( - \frac{j \omega_{\sqrt{4}}^{+} \sqrt{\mu_{x4} \mu_{z4}}}{\chi_{\sqrt{4}}^{+}} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\kappa_{\nu 4}^+ W_{\nu 4}^+}{\frac{(\alpha_{\nu 4}^+)^2}{\kappa_{\nu 4}^+} T_{\nu 4}^+ - \left[ \frac{(\alpha_{\nu 4}^+)^2}{(\kappa_{\nu 4}^+)^2} \kappa_{\nu 3}^+ - \frac{(\alpha_{\nu 3}^+)^2}{\kappa_{\nu 3}^+} \right] T_{\nu 3}^+ - \frac{(\alpha_{\nu 3}^+)^2}{(\kappa_{\nu 3}^+)^2} \kappa_{\nu 2}^+ T_{\nu 2}^+} \\
 & \times \nu \frac{L}{\tau} \approx \frac{1}{s_{\nu}^+} \left( - \frac{j \omega_{\nu 4}^+ \sqrt{\mu_{x4} \mu_{z4}}}{\kappa_{\nu 4}^+} \right) \frac{\kappa_{\nu 4}^+ W_{\nu 4}^+}{\kappa_{\nu 4}^+ T_{\nu 4}^+ - \kappa_{\nu 2}^+ T_{\nu 2}^+} \nu \frac{L}{\tau} \\
 & \qquad \qquad \qquad (6.33a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{\nu \text{sec}}^- &= R_{\nu \text{sec}}^- + j X_{\nu \text{sec}}^- = \frac{U_{\nu 4}^{(5)-}}{-[i_{y\nu 4}^{(5)-} + i_{y\nu 3}^{(5)-}]} = \\
 &= \frac{1}{s_{\nu}^-} \left( - \frac{j \omega_{\nu 4}^- \sqrt{\mu_{x4} \mu_{z4}}}{\kappa_{\nu 4}^-} \right) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\kappa_{\nu 4}^- W_{\nu 4}^-}{\frac{(\alpha_{\nu 4}^-)^2}{\kappa_{\nu 4}^-} T_{\nu 4}^- - \left[ \frac{(\alpha_{\nu 4}^-)^2}{(\kappa_{\nu 4}^-)^2} \kappa_{\nu 3}^- - \frac{(\alpha_{\nu 3}^-)^2}{\kappa_{\nu 3}^-} \right] T_{\nu 3}^- - \frac{(\alpha_{\nu 3}^-)^2}{(\kappa_{\nu 3}^-)^2} \kappa_{\nu 2}^- T_{\nu 2}^-} \\
 & \times \nu \frac{L}{\tau} = \frac{1}{s_{\nu}^-} \left( - \frac{j \omega_{\nu 4}^- \sqrt{\mu_{x4} \mu_{z4}}}{\kappa_{\nu 4}^-} \right) \frac{\kappa_{\nu 4}^- W_{\nu 4}^-}{\kappa_{\nu 4}^- T_{\nu 4}^- - \kappa_{\nu 2}^- T_{\nu 2}^-} \nu \frac{L}{\tau} \\
 & \qquad \qquad \qquad (6.33b)
 \end{aligned}$$

Ponieważ dla warstwy drugiej stała propagacji  $\kappa_{\nu 2} = \beta_{\nu}$  (powietrze), więc dla harmonicznych  $\nu \leq 5$  będzie spełniony warunek  $\kappa_{\nu 4} T_{\nu 4} \gg \kappa_{\nu 2} T_{\nu 2}$ , zatem można przyjąć, że:

$$Z_{\nu \text{sec}}^+ = Z_{\nu 4}^{(5)+} = R_{\nu 4}^{(5)+} + j X_{\nu 4}^{(5)+} \quad (6.34a)$$

$$Z_{\nu \text{sec}}^- = Z_{\nu 4}^{(5)-} = R_{\nu 4}^{(5)-} + j X_{\nu 4}^{(5)-} \quad (6.34b)$$

Ponadto należy pamiętać, że w układzie przewodnik ferromagnetyczny masywny - szczelina powietrzna - rdzeń ferromagnetyczny dla częstotliwości technicznych pole elektromagnetyczne np. w przewodniku stałym już przy jego grubości

2...3 mm jest niemal całkowicie w nim wytłumione, co jeszcze bardziej uzasadnia słuszność zależności przybliżonych (6.34a), (6.34b).

Wyrażenia na impedancję wirnika (6.33a), (6.33b) oraz (6.34a), (6.34b) nie uwzględniają impedancji dla prądów wzdłuż podziałki biegunowej, tzn. wzdłuż współrzędnej  $x$ . Wpływ tej impedancji na impedancję wirnika można uwzględnić mnożąc wyrażenia (6.33a), (6.33b) lub (6.34a), (6.34b) przez tzw. współczynnik efektu krańcowego. We współczynniku tym wystąpią konduktywności  $\gamma_{xi}$ ; można go wyznaczyć w sposób podany np. w pracach [4.1, 4.8]. Impedancja wirnika sprowadzona do stojana wynosi:

$$Z'_{\nu sec} = \frac{4 m (N \zeta_{\nu})^2}{2 p} Z_{\nu sec} \quad (6.35)$$

gdzie:  $m$  - liczba faz uzwojenia stojana,  $N \zeta_{\nu}$  - efektywna liczba zwojów szeregowych pojedynczego uzwojenia fazowego stojana,  $p$  - liczba par biegunów stojana.

Moc przekazywana z części pierwotnej do części wtórnej, zgodnie z zależnością (3.69) oraz (5.6) jest równa:

$$\begin{aligned} S_5^{(5)} &= P_5^{(5)} + j Q_5^{(5)} = \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} \Pi_{z5}^{(5)} dx dy = \\ &= -0,5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} [E_{y\nu5}^{(5)} H_{x\nu5}^{*(5)}]_{z=0} dx dy = \\ &= -p\tau L \sum_{\nu=1}^{\infty} z_{\nu5}^{(5)} |H_{x\nu5}^{(5)}|_{z=0}^2 = -p\tau L \sum_{\nu=1}^{\infty} z_{\nu5}^{(5)} |A_{\nu}|^2 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Moc przekazywana do warstw  $1 \leq i \leq 4$  natomiast wynosi:

$$S_4^{(5)} = P_4^{(5)} + j Q_4^{(5)} = \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} \Pi_{z4}^{(5)} dx dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= -0,5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} \left[ E_{y\nu 5}^{(5)} H_{x\nu 5}^{*(5)} \right]_{z=d_5} dx dy = \\
 &= -p\tau L \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{s_\nu} z_{\nu 4}^{(4)} \left[ H_{x\nu 5}^{(5)} \right]_{z=d_5}^2 \quad (6.37)
 \end{aligned}$$

Podobnie oblicza się moc przekazywaną do warstw 1 oraz 2:

$$\begin{aligned}
 S_2^{(5)} &= P_2^{(5)} + j Q_2^{(5)} = \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} \Pi_{z2}^{(5)} dx dy = \\
 &= -0,5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} \left[ E_{y\nu 3}^{(5)} H_{x\nu 3}^{*(5)} \right]_{z=\sum_{i=3}^5 d_i} dx dy = \\
 &= -p\tau L \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega_{\nu 3}}{\omega_{\nu 2}} \left( -\frac{j\omega_{\nu 2} \sqrt{\epsilon_{x2} \mu_{z2}}}{\chi_{\nu 2}} \right) \frac{W_{\nu 2}}{T_{\nu 2}} \left| H_{x\nu 3}^{(5)} \right|_{z=\sum_{i=3}^5 d_i}^2 = \\
 &= -p\tau L \sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu z_{\nu 2}^{(2)} \left| H_{x\nu 3}^{(5)} \right|_{z=\sum_{i=3}^5 d_i}^2 \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

gdź  $\omega_{\nu 3}/\omega_{\nu 2} = \omega_{\nu 3}/\omega = s_\nu$ .

Moc tracona w wirniku cylindrycznym jest różnicą mocy traconej w warstwach  $1 \leq i \leq 4$  - wyrażenie (6.37) oraz w warstwach  $1 \leq i \leq 2$  - wyrażenie (6.38), tzn.:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{sec}} &= P_{\text{sec}} + j Q_{\text{sec}} = S_4^{(5)} - S_2^{(5)} = \\
 &= -p\tau L \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{s_\nu} z_{\nu 4}^{(4)} \left| H_{x\nu 5}^{(5)} \right|_{z=d_5}^2 + \right. \\
 &\quad \left. - s_\nu z_{\nu 2}^{(2)} \left| H_{x\nu 3}^{(5)} \right|_{z=\sum_{i=3}^5 d_i}^2 \right] \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

Moment elektromagnetyczny jest różnicą momentu od pola współbieżnego oraz momentu od pola przeciwbieżnego; można

go wyznaczyć na podstawie wyrażeń (5.7) oraz (6.39) :

$$M = M_{\dot{\gamma}}^+ - M_{\dot{\gamma}}^- = \frac{\dot{\gamma} P}{\omega} (P_{\dot{\gamma} \text{sec}}^+ - P_{\dot{\gamma} \text{sec}}^-) \quad (6.40)$$

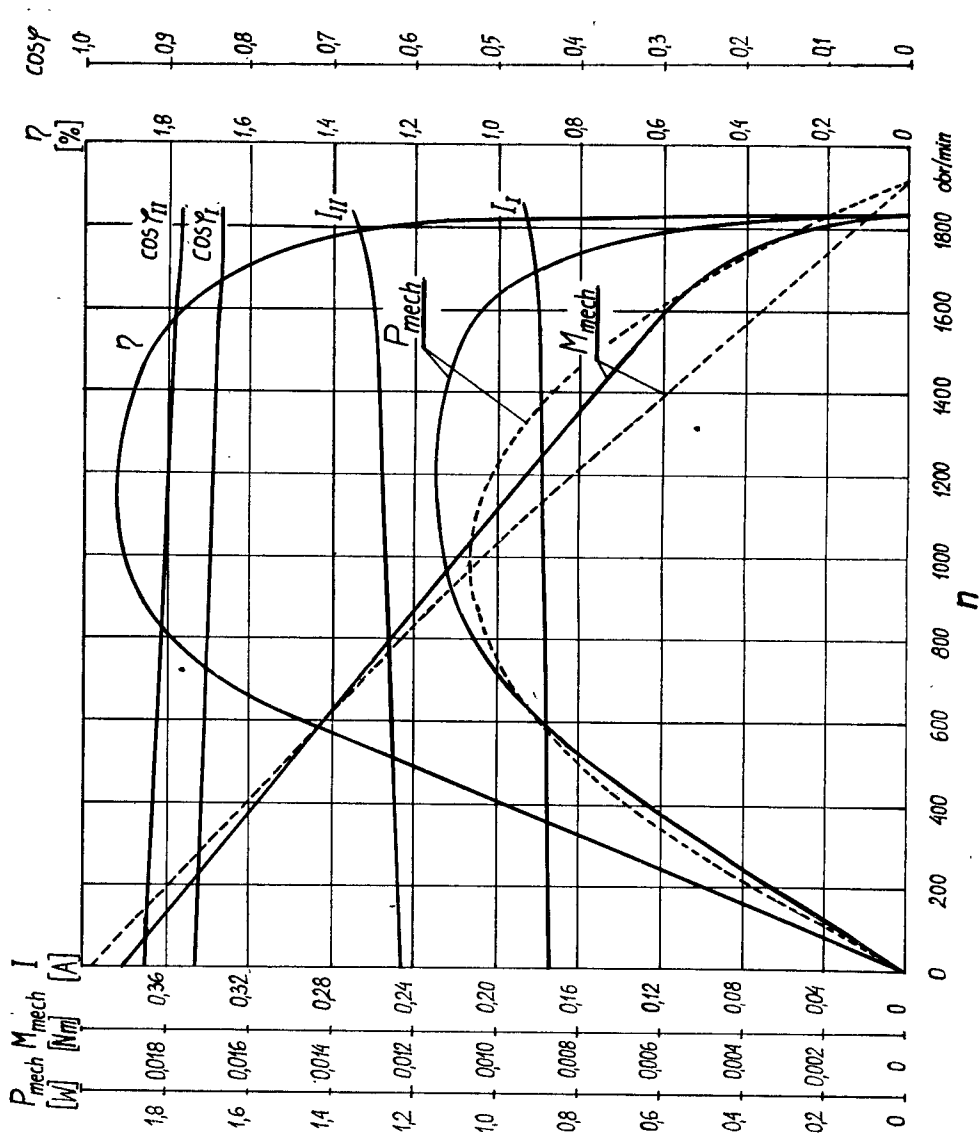
przy czym  $\omega$  - pulsacja prądu w uzwojeniach części pierwotnej,  $p$  - liczba par biegunów części pierwotnej. Przy obliczeniach momentu użytecznego na wale można wyznaczyć moment strat mechanicznych np. w oparciu o pracę autora [6.12].

Na rys. 6.2 przedstawiono charakterystyki obciążenia  $P_{\text{mech}}(n)$ ,  $M_{\text{mech}}(n)$ ,  $I(n)$ ,  $\eta(n)$ ,  $\cos \varphi(n)$  uzyskane z obliczeń oraz pomiarów silnika indukcyjnego o strukturze przedstawionej na rys. 6.1b i o następujących danych:

częstotliwość znamionowa	$f = 50 \text{ Hz}$
liczba par biegunów	$p = 1$
liczba faz stojana	$m = 2$
napięcia zasilające	$U_I = 220 \text{ V}$
	$U_{II} = 117,3 \text{ V}$
liczby zwojów szeregowych	$N_I = 2700$
	$N_{II} = 1140$
średnica przewodu nawojowego	$\phi = 0,14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
uzwojenia fazy I oraz II	$D = 80,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
średnica zewnętrzna rdzenia stojana	$D^z = 44,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
średnica wewnętrzna rdzenia stojana	$L^w = 16,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
długość rdzenia stojana	$\dot{z}^{\text{prim}} = 16$
liczba żłobków stojana	$\dot{z}^{\text{sec}} = 31$
liczba żłobków wirnika	$D^{\text{sec}} = 43,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
średnica wirnika	$d_5 = d_2 = 0,35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
grubości warstw	$d_4 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
	$d_3 = 1,15 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
długość pręta wirnika	$L_4 = 30,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
długość cylindra aluminiowego	$L_3 = 28,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
długość rdzenia wewnętrznego	$L_1 = 20,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

W silniku modelowym rdzeń stojana został wykonany z blachy zimnowalcowanej H9 firmy japońskiej Nippon Steel Corporation, wirnik cylindryczny z aluminium, rdzeń wewnętrzny ułożyskowany ze stali gatunku 45, pręty ferromagnetyczne w żłobkach wirnika ze stali St 3, pierścienie zwierające pręty z brązu.

Algorytm obliczeń silnika indukcyjnego o strukturze pięciowarstwowej opracowano w myśl rozważań zamieszczonych w rozdz. 5. Charakterystyki obliczone (linia kreskowa) praktycznie pokrywają się z charakterystykami otrzymanymi z pomiarów (linia ciągła) - rys. 6.2.



Rys. 6.2. Charakterystyki obciążenia  $P_{mech}(n)$ ,  $M_{mech}(n)$ ,  $I(n)$ ,  $\varphi(n)$ ,  $\cos \varphi(n)$  silnika indukcyjnego o wirniku cylindrycznym i ułożyskowanym rdzeniu wewnętrznym

## 6. 2. Unoszenie płyty nieferromagnetycznej w polu elektromagnetycznym

Zjawisko polegające na unoszeniu i zawieszaniu w powietrzu ciał materialnych wbrew prawu powszechnego ciężenia nazywano w okultyzmie lewitacją (łac. levitas, - atis - lekkość). Z naukowego punktu widzenia - np. według Boerdijka [6.7, 6.19] - ciało jest poddane zjawisku lewitacji, jeżeli znajduje się w stanie równowagi trwałej lub obojętnej, przy czym jakikolwiek wizualny styk materialny między ciałem a jego otoczeniem jest wyeliminowany. Boerdijk wymienia pięć możliwych mechanizmów unoszenia ciał stałych - jednym z nich jest działanie prądów wirowych transformacji lub rotacji na wytwarzające je pole stacjonarne lub quasistacjonarne. Wykorzystanie prądów wirowych do lewitacji elektromagnetycznej ciał przewodzących ma miejsce w urządzeniach, które ze względu na sposób działania zalicza się do grupy przetworników repulsyjnych [6.23, 6.24, 6.25] .

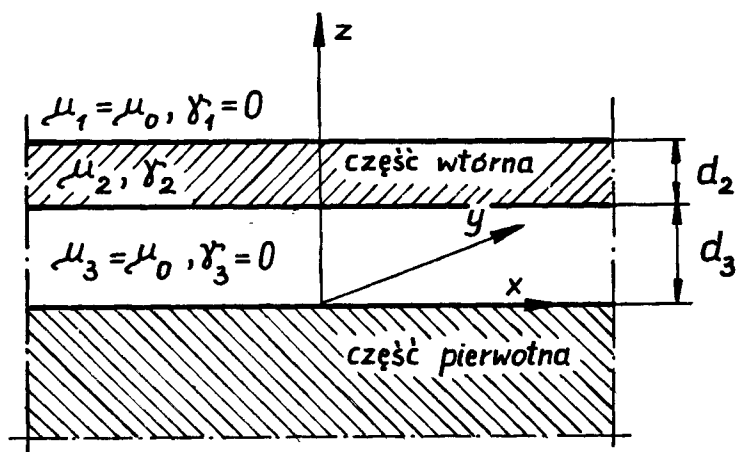
Jeżeli płaską część pierwotną, np. silnika linowego zasilic napięciem jednofazowym, to przewodząca płyta paramagnetyczna lub diamagnetyczna umieszczona nad rdzeniem zostanie zawieszona w powietrzu. Bez stabilizacji , np. za pomocą uzwojeń dodatkowych, płyta będzie znajdować się oczywiście w stanie równowagi chwiejnej [6.1, 6.3, 6.4, 6.19] . Przy zasilaniu wielofazowym uzwojenia części pierwotnej, kiedy zostanie wytworzone pole magnetyczne wędrujące, płyta nieferromagnetyczna będzie przemieszczać się wzdłuż podziałki biegunowej pokonując jedynie opory tarcia o powietrze [6.11] . W polu wędrującym siła normalna do powierzchni płyty będzie większa niż w polu pulsującym, gdyż oprócz prądów wirowych transformacji, będą również oddziaływać na pole magnetyczne części pierwotnej prądy wirowe rotacji indukowane w płycie - części wtórnej. Kształtując odpowiednio część wtórną, można uzyskać jej stabilizację w płaszczyźnie powierzchni aktywnej rdzenia części pierwotnej bez umieszczania w nim uzwojenia stabilizującego [6.13, 6.14, 6.15, 6.16, 6.17] . Można np. zbudować "pojazd", którym jest część wtórna przetwornika induk-

cyjnego liniowego, unoszony i napędzany energią pola elektromagnetycznego oraz utrzymujący stabilne położenie w obrębie rdzenia części pierwotnej, w kształcie katamaranu [6.15, 6.16] .

W podobny sposób można unosić nad płytą przewodzącą nieferromagnetyczną magnes trwały lub elektromagnes zasilany prądem stałym, albo odwrotnie - płytę wprawioną w ruch nad szeregiem magnesów lub elektromagnesów [6.8, 6.10, 6.20, 6.21, 6.22, 6.23, 6.24, 6.25, 6.26, 6.27] . Siła lewitacji powstaje tutaj w wyniku oddziaływania prądów wirowych rotacji na pole magnetyczne, które wzbudza te prądy.

Postęp w dziedzinie kriogeniki umożliwia zastosowanie uzwojeń nadprzewodzących do elektromagnesów, dzięki czemu uzyskiwane siły unoszenia są tak duże, że mogą być praktycznie wykorzystane w dużych pojazdach napędzanych silnikami liniowymi [6.5, 6.9, 6.28, 6.29, 6.30] .

Z przesłanek teoretycznych i doświadczalnych wynika, że wykonując część wtórną jako wielowarstwową, np. z miedzi i aluminium, można uzyskać pewien wzrost siły lewitacji w stosunku do części wtórnej jednowarstwowej.



Rys. 6.3. Struktura przetwornika repulsyjnego działającego na zasadzie zjawiska lewitacji elektromagnetycznej



Analiza polowa przetworników repulsyjnych jest prosta, jeśli zastosować wzory rekurencyjne (3.35.k) ÷ (3.41b), (3.49.k) ÷ (3.55b), (3.90.k) ÷ (3.96b), (4.35.k) ÷ (4.45b), czy też (4.46.k) ÷ (4.56b). Np. dla płaskiej części wtórnej w postaci płyty jednorodnej - rys. 6.3, na podstawie wzorów (3.35.k) ÷ (3.41b) oraz (3.49.k) ÷ (3.35b) otrzymuje się następujące równania rozkładu dwuwymiarowego pola elektromagnetycznego w obszarze  $d_3 \leq z \leq d_2 + d_3$ :

- w przypadku części pierwotnej o biegunach utajonych

$$H_{x2}^{(3)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)+}} (-A_{\nu}^{+}) e^{-j\beta_{\nu} x} \frac{\chi_{\nu 2}^{+}}{\chi_{\nu 3}^{+}} \left[ \frac{\chi_{\nu 1}^{+}}{\chi_{\nu 2}^{+}} x \right. \\ \left. \times \cosh \chi_{\nu 2}^{+} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sinh \chi_{\nu 2}^{-} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.41a)$$

$$H_{x2}^{(3)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)-}} (-A_{\nu}^{-}) e^{j\beta_{\nu} x} \frac{\chi_{\nu 2}^{-}}{\chi_{\nu 3}^{-}} \left[ \frac{\chi_{\nu 1}^{-}}{\chi_{\nu 2}^{-}} x \right. \\ \left. \times \cosh \chi_{\nu 2}^{-} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sinh \chi_{\nu 2}^{-} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.41b)$$

$$H_{z2}^{(3)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)+}} j \frac{\beta_{\nu}}{\chi_{\nu 3}^{+}} A_{\nu}^{+} e^{-j\beta_{\nu} x} \left[ \frac{\mu_1 x}{\mu_2} \right. \\ \left. \times \cosh \chi_{\nu 2}^{+} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\chi_{\nu 1}^{+}}{\chi_{\nu 2}^{+}} \sinh \chi_{\nu 2}^{+} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.42a)$$

$$H_{z2}^{(3)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)-}} j \frac{\beta_{\nu}}{\chi_{\nu 3}^{-}} (-A_{\nu}^{-}) e^{j\beta_{\nu} x} \left[ \frac{\mu_1 x}{\mu_2} \right. \\ \left. \times \cosh \chi_{\nu 2}^{-} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\chi_{\nu 1}^{-}}{\chi_{\nu 2}^{-}} \sinh \chi_{\nu 2}^{-} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.42b)$$

$$E_{y2}^{(3)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)+}} \left( -\frac{j\omega_{\nu 2} \mu_2}{\chi_{\nu 2}^{+}} \right) (-A_{\nu}^{+}) e^{-j\beta_{\nu} x} \frac{\chi_{\nu 2}^{+}}{\chi_{\nu 3}^{+}}$$

$$\times \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \cosh \chi_{\nu 2}^+ (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\chi_{\nu 1}^+}{\chi_{\nu 2}^+} \sinh \chi_{\nu 2}^+ (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.43a)$$

$$E_{y2}^{(3)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)-}} \left( -\frac{j \omega_{\nu 2}^- \mu_2}{\chi_{\nu 2}^-} \right) (-A_{\nu}^-) e^{j \beta_{\nu} x} \frac{\chi_{\nu 2}^-}{\chi_{\nu 3}^-} \times$$

$$\left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \cosh \bar{\chi}_{\nu 2} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\bar{\chi}_{\nu 1}}{\bar{\chi}_{\nu 2}} \sinh \bar{\chi}_{\nu 2} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.43b)$$

gdzie

$$M_{\nu 3}^{(3)} = \frac{\chi_{\nu 2}}{\chi_{\nu 3}} \left( \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu 2}} \cosh \chi_{\nu 2} d_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sinh \chi_{\nu 2} d_2 \right) \cosh \chi_{\nu 3} d_3 + \\ + \frac{\mu_2}{\mu_3} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \cosh \chi_{\nu 2} d_2 + \frac{\chi_{\nu 1}}{\chi_{\nu 2}} \sinh \chi_{\nu 2} d_2 \right) \cosh \chi_{\nu 3} d_3 \quad (6.44)$$

- w przypadku części pierwotnej o biegunach jawnych

$$H_{x2}^{(3)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)+}} j \frac{1}{\beta_{\nu}} \chi_{\nu 2}^+ \frac{1}{\mu_3} B_{\nu}^+ b_{\nu} e^{-j \beta_{\nu} x} \\ \times \left[ \frac{\chi_{\nu 1}^+}{\chi_{\nu 2}^+} \cosh \chi_{\nu 2}^+ (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sinh \chi_{\nu 2}^+ (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.45a)$$

$$H_{x2}^{(3)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)-}} j \frac{1}{\beta_{\nu}} \bar{\chi}_{\nu 2} \frac{1}{\mu_3} (-B_{\nu}^- b_{\nu}) e^{j \beta_{\nu} x} \times \\ \times \left[ \frac{\bar{\chi}_{\nu 1}}{\bar{\chi}_{\nu 2}} \cosh \bar{\chi}_{\nu 2} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sinh \bar{\chi}_{\nu 2} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.45b)$$

$$H_{z2}^{(3)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)+}} \frac{1}{\mu_3} B_{\nu}^+ b_{\nu} e^{-j \beta_{\nu} x} \times \\ \times \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \cosh \chi_{\nu 2}^+ (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\chi_{\nu 1}^+}{\chi_{\nu 2}^+} \sinh \chi_{\nu 2}^+ (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.46a)$$

$$H_{z2}^{(3)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)-}} \frac{1}{\mu_3} B_{\nu}^{-} b_{\nu} e^{j\beta_{\nu} x} \times \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \cosh \bar{\kappa}_{\nu 2} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\bar{\kappa}_{\nu 1}}{\bar{\kappa}_{\nu 2}} \sinh \bar{\kappa}_{\nu 2} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.46b)$$

$$E_{y2}^{(3)+} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)+}} j \omega_{\nu 2} \mu_2 \left(-j \frac{1}{\beta_{\nu}}\right) \frac{1}{\mu_3} B_{\nu}^{+} b_{\nu} e^{-j\beta_{\nu} x} \times \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \cosh \kappa_{\nu 2}^{+} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\kappa_{\nu 1}^{+}}{\kappa_{\nu 2}^{+}} \sinh \kappa_{\nu 2}^{+} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.47a)$$

$$E_{y2}^{(3)-} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\nu 3}^{(3)-}} j \omega_{\nu 2} \mu_2 \left(-j \frac{1}{\beta_{\nu}}\right) \frac{1}{\mu_3} (-B_{\nu}^{-}) b_{\nu} e^{j\beta_{\nu} x} \times \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \cosh \bar{\kappa}_{\nu 2} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) - \frac{\bar{\kappa}_{\nu 1}}{\bar{\kappa}_{\nu 2}} \sinh \bar{\kappa}_{\nu 2} (z - \sum_{i=2}^3 d_i) \right] \quad (6.47b)$$

gdzie

$$M_{\nu 3}^{(3)} = \frac{\kappa_{\nu 2}}{\kappa_{\nu 3}} \left( \frac{\kappa_{\nu 1}}{\kappa_{\nu 2}} \cosh \kappa_{\nu 2} d_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sinh \kappa_{\nu 2} d_2 \right) \sinh \kappa_{\nu 3} d_3 + \frac{\mu_2}{\mu_3} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \cosh \kappa_{\nu 2} d_2 + \frac{\kappa_{\nu 1}}{\kappa_{\nu 2}} \sinh \kappa_{\nu 2} d_2 \right) \cosh \kappa_{\nu 3} d_3 \quad (6.48)$$

W powyższych równaniach (6.41a) ÷ (6.48) należy przyjąć  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  oraz  $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ .

Siłę w kierunku współrzędnej  $x$  można obliczyć na podstawie wyrażenia (3.75), tzn.:

- dla przetwornika o biegunach utajonych

$$F_{x\nu 2}^{(3)} = \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} f_{x\nu 2}^{(3)} dx dy = \pm p\tau L \frac{\omega_{\nu 2} \gamma_2 |\mu_2|^2}{|\kappa_{\nu 3}|^2} \times \beta_{\nu} (|A_{\nu}| / |M_{\nu 3}|) \sum_{x\nu} \quad (6.49)$$

- dla przetwornika o biegunach jawnych

$$F_{x\downarrow 2}^{(3)} = \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} f_{x\downarrow 2}^{(3)} dx dy =$$

$$= + p\tau L \frac{\omega_{\downarrow 2} \gamma_2 |\mu_2|^2}{\beta_{\downarrow}} \frac{|B_{\downarrow}|^2 b_{\downarrow}^2}{|M_{\downarrow 3}|^2 |\mu_3|^2} \frac{1}{\sum x} \quad (6.50)$$

gdzie

$$\sum_{x\downarrow} = \left( \frac{|\mu_1|^2}{|\mu_2|^2} + \frac{|\kappa_{\downarrow 1}|^2}{|\kappa_{\downarrow 2}|^2} \right) \frac{\sinh 2a_{R\downarrow 2} k_{\downarrow 2} d_2}{4 a_{R\downarrow 2} k_{\downarrow 2}} +$$

$$+ \left( \frac{|\mu_1|^2}{|\mu_2|^2} - \frac{|\kappa_{\downarrow 1}|^2}{|\kappa_{\downarrow 2}|^2} \right) \frac{\sinh 2a_{X\downarrow 2} k_{\downarrow 2} d_2}{4 a_{X\downarrow 2} k_{\downarrow 2}} +$$

$$- \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\beta_{\downarrow}}{k_{\downarrow 2} \mu_{rs2}} \frac{1 - \cosh 2a_{R\downarrow 2} k_{\downarrow 2} d_2}{4 a_{R\downarrow 2} k_{\downarrow 2}} +$$

$$- \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\beta_{\downarrow}}{k_{\downarrow 2} \mu_{rs2}} \frac{1 - \cosh 2a_{X\downarrow 2} k_{\downarrow 2} d_2}{4 a_{X\downarrow 2} k_{\downarrow 2}} \quad (6.51)$$

przy czym

$$\alpha = a_{R\downarrow 2} \mu_2' - a_{X\downarrow 2} \mu_2'' \quad (6.52)$$

$$\beta = a_{X\downarrow 2} \mu_2' + a_{R\downarrow 2} \mu_2'' \quad (6.53)$$

oraz  $a_{R\downarrow 2}$  według (3.18),  $a_{X\downarrow 2}$  według (3.19),  $\mu_2'$ ,  $\mu_2''$  według (2.4). Znak „+” przed wyrażeniami (6.49), (6.50) dotyczy pola współbieżnego (zwrot siły zgodny ze zwrotem współrzędnej  $x$ ), znak „-” natomiast - pola przeciwbieżnego (zwrot siły przeciwny do zwrotu współrzędnej  $x$ ).

Podobnie można obliczyć siłę unoszenia w kierunku współrzędnej  $z$ , która na podstawie wyrażenia (3.76) wynosi:

- dla przetwornika o biegunach utajonych

$$F_{z\downarrow 2}^{(3)} = \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} f_{z\downarrow 2}^{(3)} dx dy =$$

$$= p \tau L \frac{\omega_{\nu 2} \gamma_2 |\mu_2|^2}{|\kappa_{\nu 3}|^2} \frac{|A_{\nu}|^2}{|M_{\nu 3}|^2} \zeta_{z\nu} \quad (6.54)$$

- dla przetwornika o biegunach jawnych

$$F_{z\nu 2}^{(3)} = \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{-0,5L}^{0,5L} f_{z\nu 2}^{(3)} dx dy =$$

$$= p \tau L \frac{\omega_{\nu 2} \gamma_2 |\mu_2|^2}{\beta_{\nu}^2} \frac{|B_{\nu}|^2 b_{\nu}^2}{|M_{\nu 3}|^2} \frac{1}{|\mu_3|^2} \zeta_{z\nu} \quad (6.55)$$

gdzie

$$\zeta_{z\nu} = \frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{\beta_{\nu}}{k_{\nu 2} \mu_{rs2}} \frac{a_{X\nu 2}}{a_{R\nu 2}} \sinh 2a_{R\nu 2} k_{\nu 2} d_2 +$$

$$- \frac{\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{\beta_{\nu}}{k_{\nu 2} \mu_{rs2}} \frac{a_{R\nu 2}}{a_{X\nu 2}} \sinh 2a_{X\nu 2} k_{\nu 2} d_2 +$$

$$- \left( \frac{|\kappa_{\nu 1}|^2}{|\kappa_{\nu 2}|^2} + \frac{|\mu_1|^2}{|\mu_2|^2} \right) \frac{a_{X\nu 2}}{4 a_{R\nu 2}} (1 - \cosh 2a_{R\nu 2} k_{\nu 2} d_2) +$$

$$- \left( \frac{|\mu_1|^2}{|\mu_2|^2} - \frac{|\kappa_{\nu 1}|^2}{|\kappa_{\nu 2}|^2} \right) \frac{a_{R\nu 2}}{4 a_{X\nu 2}} (1 - \cosh 2a_{X\nu 2} k_{\nu 2} d_2) \quad (6.56)$$

Zarówno dla pola współbieżnego jak i przeciwbieżnego siła  $F_{z\nu 2}^{(3)}$  jest dodatnia, tzn. jej zwrot jest zgodny ze zwrotem współrzędnej  $z$  (siła lewitacji elektromagnetycznej).

Pulsacja przebiegów elektrycznych i magnetycznych w części wtórnej w ogólnym przypadku wyraża się zależnością:

$$\omega_{\nu 2} = \omega \pm \beta_{\nu} v_2 \quad (6.57)$$

Zależność (6.57) dotyczy wszystkich możliwych rodzajów konstrukcji przetworników repulsyjnych, a więc zasilanych prądem stałym ( $\omega = 0$ ,  $v_2 \neq 0$ , znak "+"), prądem przemiennym ( $\omega \neq 0$ ), w których występuje pole pulsujące ( $\omega \neq 0$ ,  $v_2 = 0$ ), współbieżne ( $\omega \neq 0$ ,  $v_2 \neq 0$ , znak "-"),

czy też przeciwbieżne ( $\omega \neq 0, v_2 \neq 0$ , znak "+").

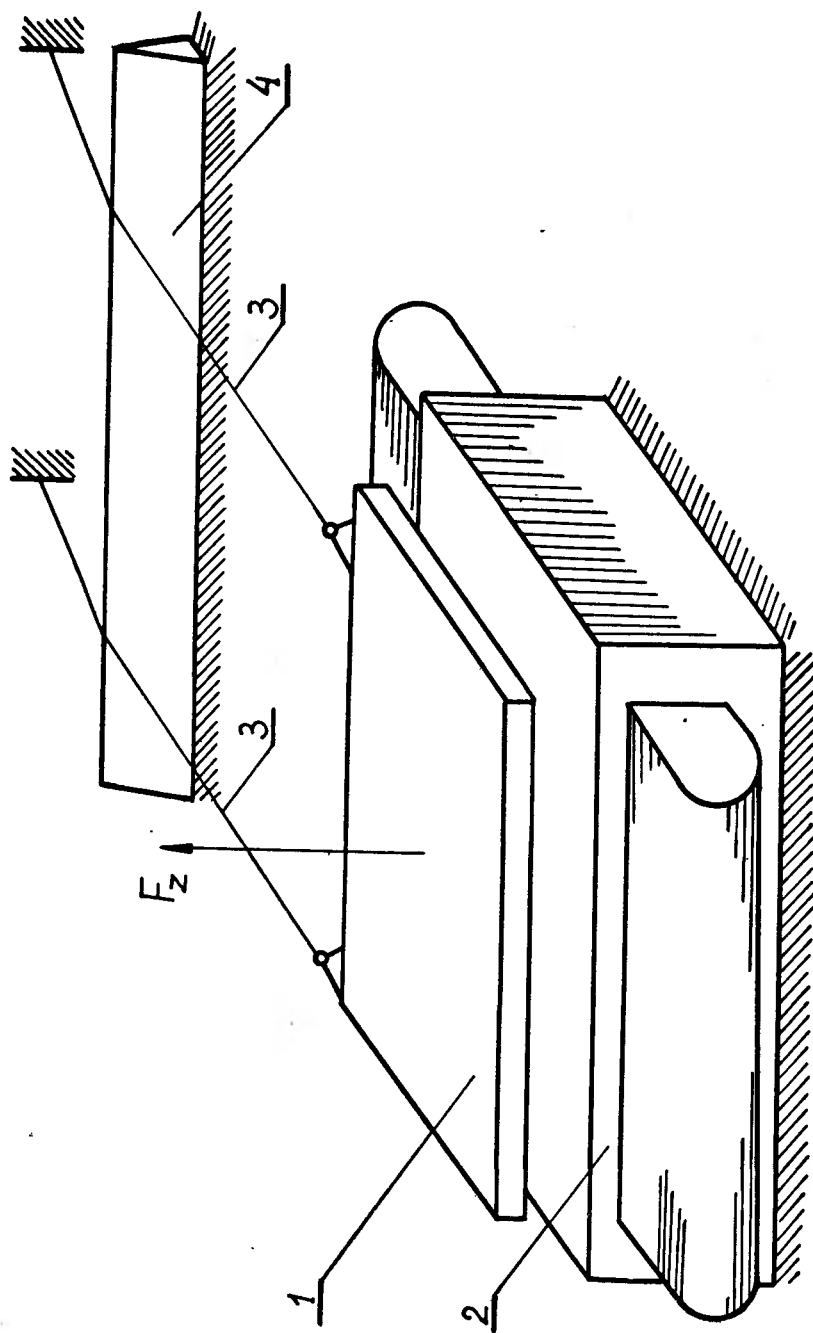
Stosunek siły normalnej do siły stycznej jest jednakowy zarówno dla przetworników o biegunach utajonych jak i jawnych:

$$\frac{F_{z \rightarrow 2}^{(3)}}{F_{x \rightarrow 2}^{(3)}} = \frac{\sum_{z \rightarrow 2} \xi}{\beta_{z \rightarrow 2} \sum_{x \rightarrow 2} \xi} \quad (6.58)$$

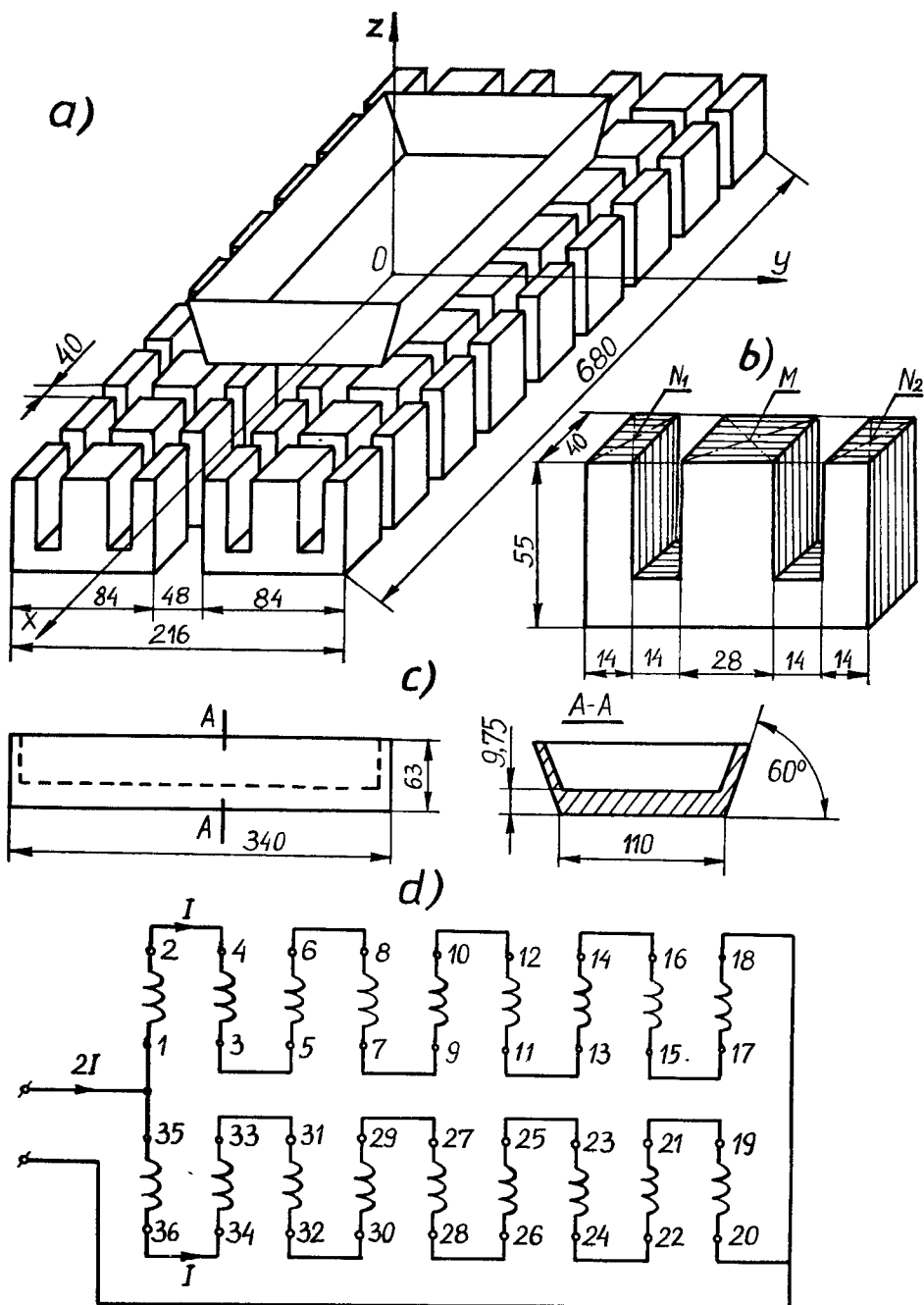
Zależności (6.49), (6.50), (6.54), (6.55) zostały zastosowane do obliczenia sił  $F_{x \rightarrow 2}^{(3)}$ ,  $F_{z \rightarrow 2}^{(3)}$  w trzech różnych modach przetworników do unoszenia ciał przewodzących nieferromagnetycznych:

- o biegunach utajonych i nieruchomej części wtórnej w postaci płyty - rys. 6.4;
- o biegunach jawnych i specjalnie ukształtowanej, dla zapewnienia stabilizacji w osi  $y$ , części wtórnej - rys. 6.5, rys. 6.6;
- o biegunach jawnych i wirującej tarczowej części wtórnej - rys. 6.8.

W przetworniku o biegunach utajonych jako wzbudnik wykorzystano część pierwotną płaskiego indukcyjnego silnika liniowego, zasilając tylko jedno uzwojenie fazowe prądem przemiennym. Część wtórną stanowi natomiast płyta aluminiowa unoszona w wyniku oddziaływania pola magnetycznego pulsującego na prądy wirowe transformacji ( $\omega \neq 0, v_2 = 0$ ). Przetwornik taki jest po prostu podnośnikiem elektromagnetycznym wykorzystującym zjawisko lewitacji elektromagnetycznej. Wbrew utartym poglądom, np. [6.4], autorowi nie udało się uzyskać w praktyce stabilizacji elektromagnetycznej płyty aluminiowej za pomocą uzwojeń dodatkowych zasilanych prądem przemiennym odpowiednio przesuniętym w fazie względem prądu pierwotnego. Dlatego też zastosowano stabilizację mechaniczną polegającą na kilkumilimetrowym przesunięciu płyty względem osi symetrii  $y$ , a następnie przytrzymaniu od strony wysuniętej za pomocą dwóch cięgien elastycznych ułożonych w płaszczyźnie  $x,y$ , jak na rys. 6.4.

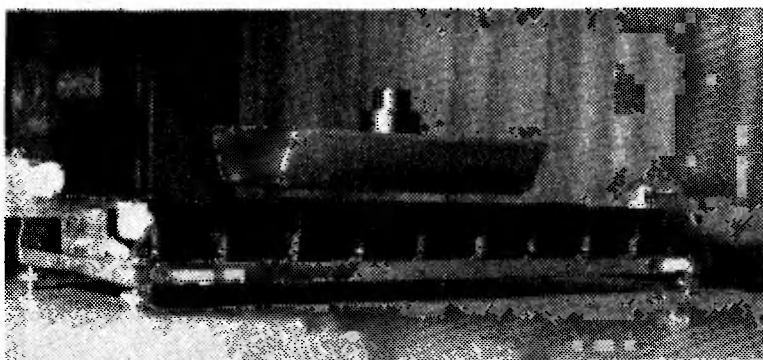


Rys. 6.4. Unieszenie przewodzącej płyty nieferromagnetycznej w polu magnetycznym wzbudzonym przez część pierwotną płaskiego indukcyjnego silnika liniowego; 1 - płyta nieferromagnetyczna; 2 - część pierwotna indukcyjnego silnika liniowego; 3 - cięgna stabilizujące; 4 - podpora cięgien

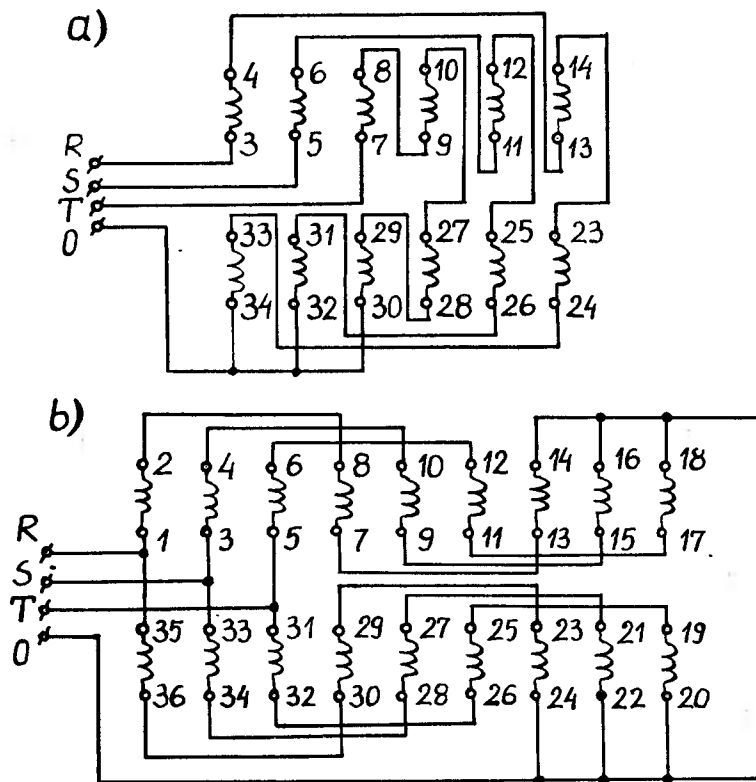


Rys. 6.5. Przetwornik repulsyjny o specjalnie ukształtowanej części wtórnej unoszonej w polu elektromagnetycznym wytwarzanym przez ciąg elektromagnesów :  
 a) - budowa ; b) - pojedynczy rdzeń elektromagnesu ;  
 c) - część wtórna ; d) schemat ideowy połączeń uzwojeń części pierwotnej przy zasilaniu jednofazowym

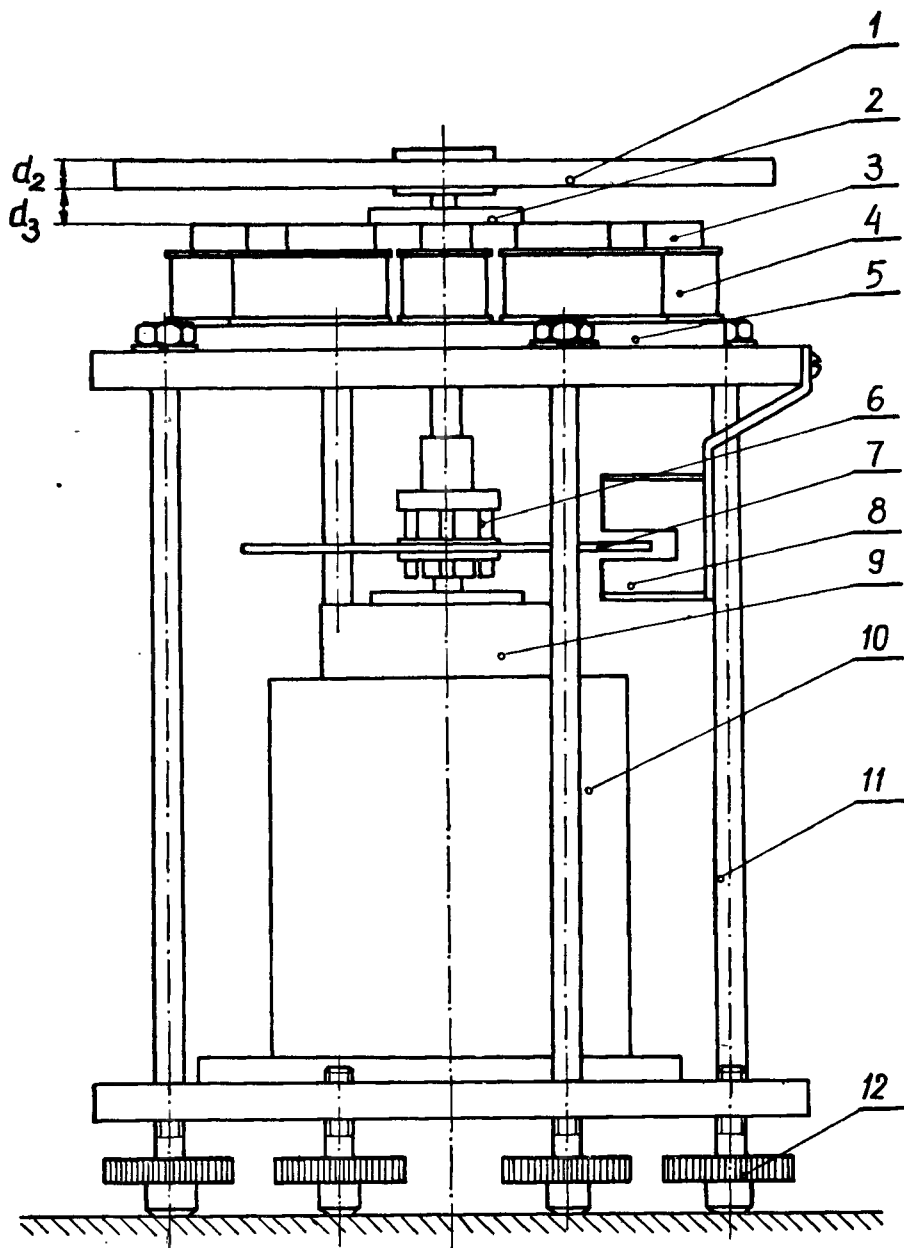




Rys. 6.6. Unoszenie specjalnie ukształtowanej części wtórnej w polu elektromagnetycznym wytwarzanym przez ciąg elektromagnesów (część pierwotną silnika liniowego o biegunach jawnych)



Rys.6.7. Schematy połączeń uzwojeń elektromagnesów w przetworniku repulsyjnym z rys. 6.5 oraz rys. 6.6 zasilanym trójfazowo : a) wytwarzane są dwa pola wędrujące skierowane przeciwnie, zapewniające równowagę trwałą części wtórnej, b) przetwornik pracuje jako silnik indukcyjny liniowy na poduszce magnetycznej



Rys. 6.8. Przetwornik repulsyjny o unoszonej tarczy wirującej i o biegunach jawnych zasilanych prądem stałym: 1) - tarcza wirująca (część wtórna); 2) - sprzęgło umożliwiające swobodne unoszenie tarczy 1 pod wpływem sił lewitacji elektromagnetycznej; 3) - rdzeń bieguna elektromagnesu; 4) - cewka elektromagnesu; 5) - jarzmo elektromagnesów; 6) - sprzęgło; 7) - tarcza z otworami; 8) - czujnik fotoelektryczny do pomiaru prędkości obrotowej; 9) - silnik prądu stałego; 10) - uchwyt silnika; 11) - konstrukcja nośna; 12) - wspornik regulacyjny

Koncepcję budowy modelu przetwornika o biegunach jawnych i o części wtórnej w kształcie koryta aluminiowego - rys. 6.5 częściowo zaczerpnięto z prac [6.13 ÷ 6.17]. Należy zaznaczyć, że wymienione prace [6.13 ÷ 6.17] zawierają jedynie wyniki badań eksperymentalnych podobnych przetworników, brak jest w nich natomiast teorii tych przetworników, jak również obliczeń sił lewitacji elektromagnetycznej na podstawie zależności analitycznych. Rdzenie elektromagnesów pakietowane z kształtek typu E są ułożone w dwóch rzędach, jak na rys. 6.5a, po 9 rdzeni w każdym rzędzie. Wymiary pojedynczego rdzenia elektromagnesu są podane na rys. 6.5b. Tak zbudowany wzbudnik można rozpatrywać jako część pierwotną silnika liniowego dwustronnego o strumieniu poprzecznym [6.4], o biegunach jawnych, rozwiniętego względem osi równoległej do ruchu pola w ten sposób, że powierzchnie aktywne leżą w jednej płaszczyźnie. Część wtórna - rys. 6.5c, wykonana z lekkiego stopu aluminiowego w kształcie koryta (grubość "dna"  $d_2 = 9,75$  mm, masa 2,465 kg) posiada boki nachylone do powierzchni aktywnej pod kątem  $60^\circ$ . Przy takim kształcie, siły o przeciwnych zwrotach działające na przeciwległe boki zapewniają stabilizację względem osi  $y$ . Zasilając część pierwotną w układzie połączeń np. jak na rys. 6.5d, uzyska się zawieszenie części wtórnej ponad częścią pierwotną - rys. 6.6. Część wtórna będzie w stanie równowagi obrotowej tylko względem współrzędnej  $x$ , względem pozostałych współrzędnych będzie w stanie równowagi trwałej. Równowagę trwałą względem wszystkich osi można uzyskać przy zasilaniu trójfazowym, wytwarzając pola wędrujące skierowane przeciwnie, w układzie połączeń np. jak na rys. 6.7a. W układzie połączeń uzwojeń części pierwotnej przedstawionym na rys. 6.7b przetwornik pracuje jako silnik liniowy wytwarzający poduszkę magnetyczną, przy czym możliwa jest zmiana kierunku ruchu za pomocą wyłączników krańcowych. Przy zasilaniu jednofazowym, siły unoszenia powstają analogicznie jak w poprzednim modelu - poprzez oddziaływanie pola magnetycznego pulsującego na prądy wirowe transformacji ( $\omega \neq 0, v_2 = 0$ ), przy zasilaniu trójfazowym zaś - poprzez oddziaływanie pola

magnetycznego wędrującego na prądy wirowe rotacji i transformacji ( $\omega \neq 0, v_2 \neq 0$ ).

Część pierwotną przetwornika wirującego tarczowego o biegunach jawnych ze stali St 3 zasilano prądem stałym ( $\omega = 0, v_2 \neq 0$ , znak "+" w wyrażeniu (6.57)). Część wtórną w postaci tarczy aluminiowej ułożyskowano tak, ażeby mogła unosić się swobodnie do góry pod działaniem siły normalnej  $F_z^{(3)}$ . Tarczę aluminiową napędzano silnikiem prądu stałego o szerokim zakresie regulacji prędkości obrotowej. Konstrukcja przetwornika jest przedstawiona na rys. 6.8.

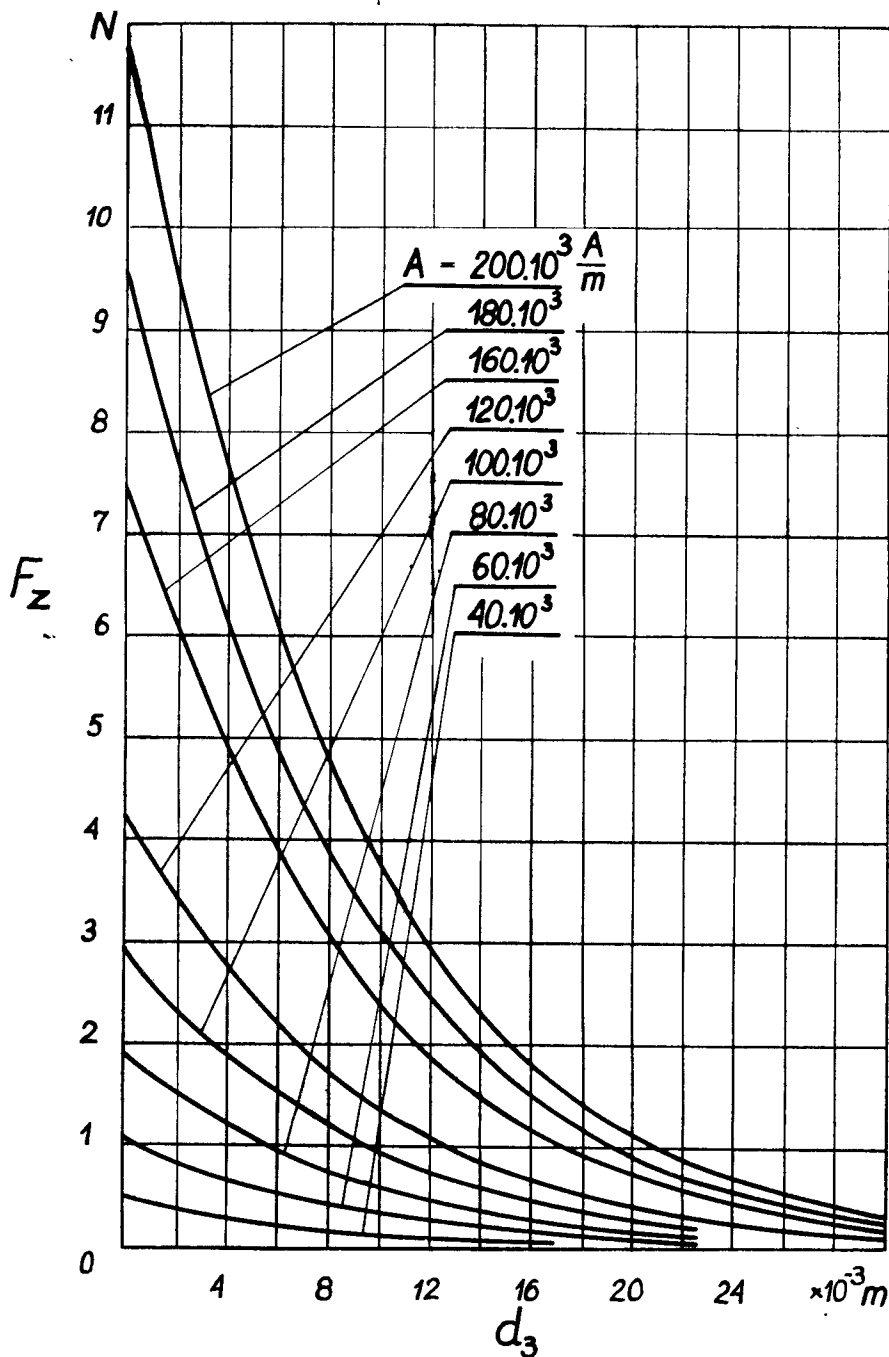
Dane wszystkich trzech przetworników zestawione są w tablicy I.

Charakterystyki pracy przetwornika o biegunach utajonych przedstawiono na rys. 6.9, rys. 6.10, rys. 6.11, rys. 6.12. Obliczenia wykonano dla harmonicznej podstawowej  $\nu = 1$  rozkładu pola wzdłuż podziałki biegunowej. Siłę unoszenia  $F_z$  wywołuje wyłącznie reakcja prądów wirowych transformacji w części wtórnej na zmienne w czasie pole magnetyczne części pierwotnej. Siła  $F_z$  maleje monotonicznie wraz ze wzrostem wysokości unoszenia  $d_3$  (szczeliny powietrznej), przy czym spadek siły  $F_z$  jest nieznaczny przy małych szczelinach, tzn. w przedziale  $0 \leq d_3 \leq 1,5$  mm - rys. 6.9. Wzrost szczeliny powietrznej  $d_3$  wywołuje wzrost prądu pobieranego z sieci, a zatem i obciążenia liniowego części pierwotnej tym silniejszy, im większa jest siła  $F_z$  oraz wymiar  $d_{0,5}$  - rys. 6.10. Charakterystyki  $A(d_3)$  przy  $F_z = \text{const}$  uzyskane z obliczeń dobrze zgadzają się z charakterystykami zmierzonymi - rys. 6.11, tzn. tej samej wysokości unoszenia  $d_3$  odpowiada prawie jednakowy prąd  $I$  pobierany z sieci obliczony oraz zmierzony. Należy pamiętać, że w przetworniku jednofazowym, zgodnie z zależnościami (5.11a), (5.11b)  $A_\nu = 0,5 A_{\nu I}$ , co dla  $\nu = 1$  można krótko zapisać  $A_{\nu=1} = 0,5 A$ ; to samo dotyczy indukcji magnetycznej. Pomiaru wykonano przy takiej temperaturze płyty, w której jej konduktywność wynosi  $30 \cdot 10^6$  S/m. Otrzymano jedynie pewną rozbieżność w wartości siły unoszenia obliczonej oraz zmierzonej, tzn.  $F_z = 1,3682$  N według obliczeń,  $F_z = 2,3544$  N - według pomiarów, spowodowa-

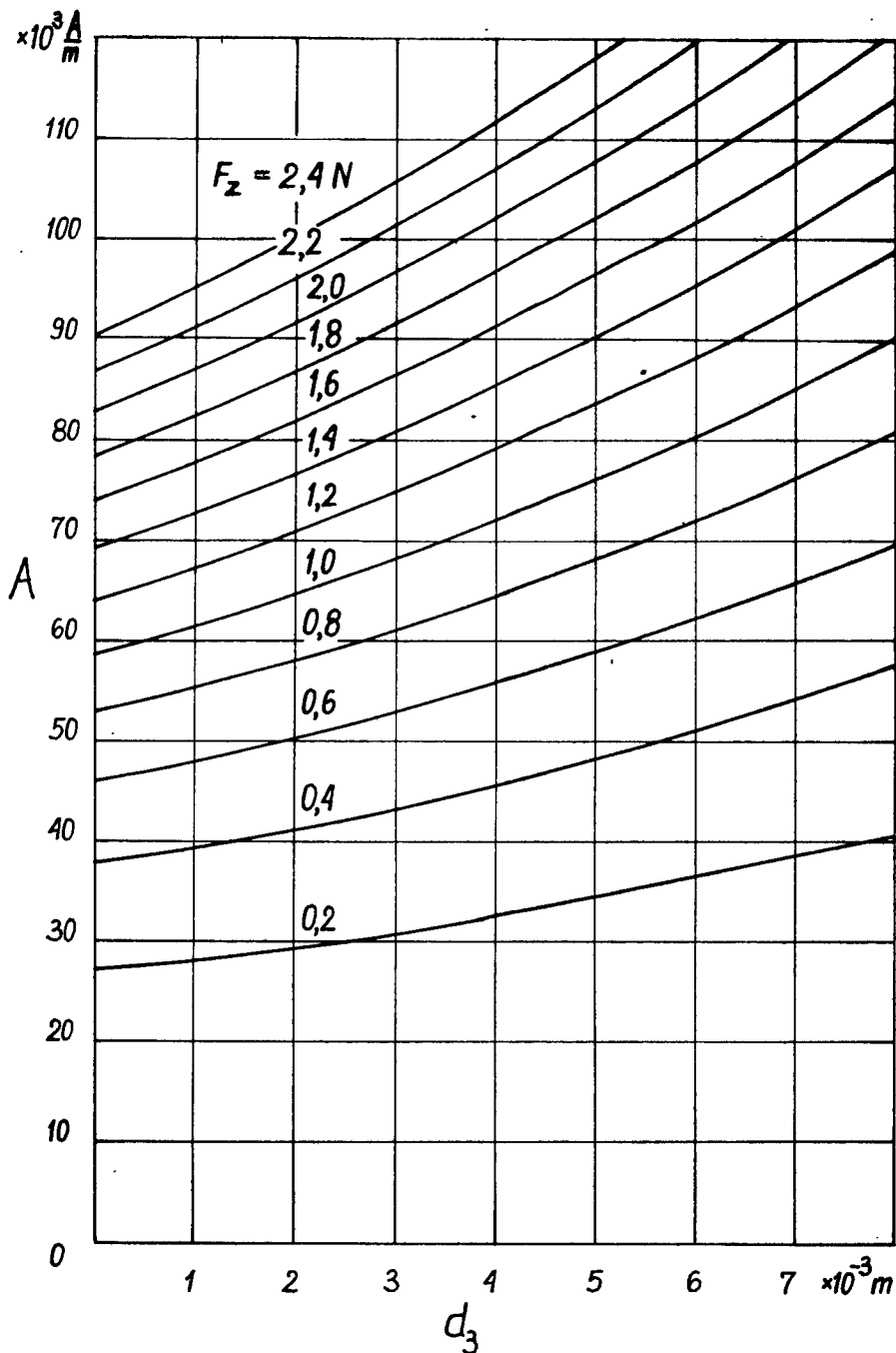
Dane przetworników do unoszenia ciał przewodzących nieferromagnetycznych

Tablica I

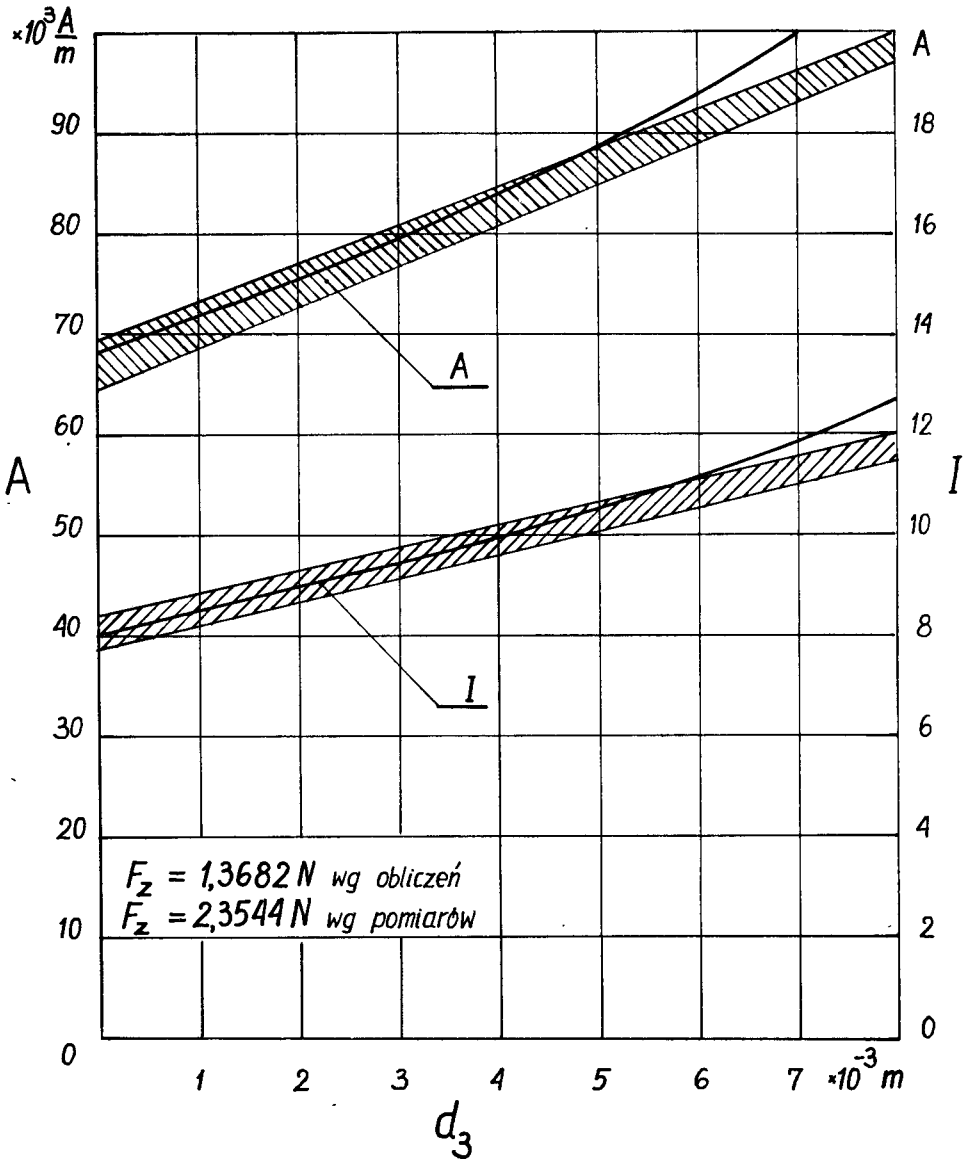
W i e l k o ś ć	Jednostka	B u d o w a		Część pierwotna o biegunach utajomych, część wtórna nieruchoma w postaci płyty - rys. 6.4	Część pierwotna o biegunach jawnych, część wtórna nieruchoma w kształcie koryta - rys. 6,5, rys. 6,6	Część pierwotna o biegunach wtórnych, część wtórna wirująca w kształcie tarczy - rys. 6,6, 8
		Przetwornik	Przetwornik			
Częstość prądu zasilającego	f	Hz	50	50	50	0
Liczba par biegunów	p	-	2			4
Podziałka biegunowa	τ	m	0,0501		0,08	0,0503
Długość rdzenia części pierwotnej	L	m	0,1		0,042 (tylko pod powierzchnią aktywną części wtórnej)	0,035
Szerokość bieguna	b	m	-		0,042	0,016
Liczba faz części pierwotnej	m	-	1		1	1
Liczba zwojów szeregowych	N	-	420		1350	1600
Wymiary części wtórnej w płaszczyźnie xy	xy	m <sup>2</sup>	0,237 x 0,130		0,34 x 0,11 (powierzchnia aktywna)	0,038 (φ 0,22)
Konduktywność materiału części wtórnej	δ <sub>2</sub>	x10 <sup>6</sup> S/m	30,0		20,0	30,0



Rys. 6.9. Zależność siły unoszenia  $F_z$  od wymiaru szczeliny powietrznej  $d_3$  przy stałym obciążeniu liniowym  $A = \text{const}$  części pierwotnej w przetworniku prądu przemiennego o biegunach utajonych ( $\nu = 1$ ,  $f = 50$  Hz,  $d_2 = 3 \cdot 10^{-3}$  m,  $\gamma_2 = 30 \cdot 10^6$  S/m,  $v_2 = 0$ )

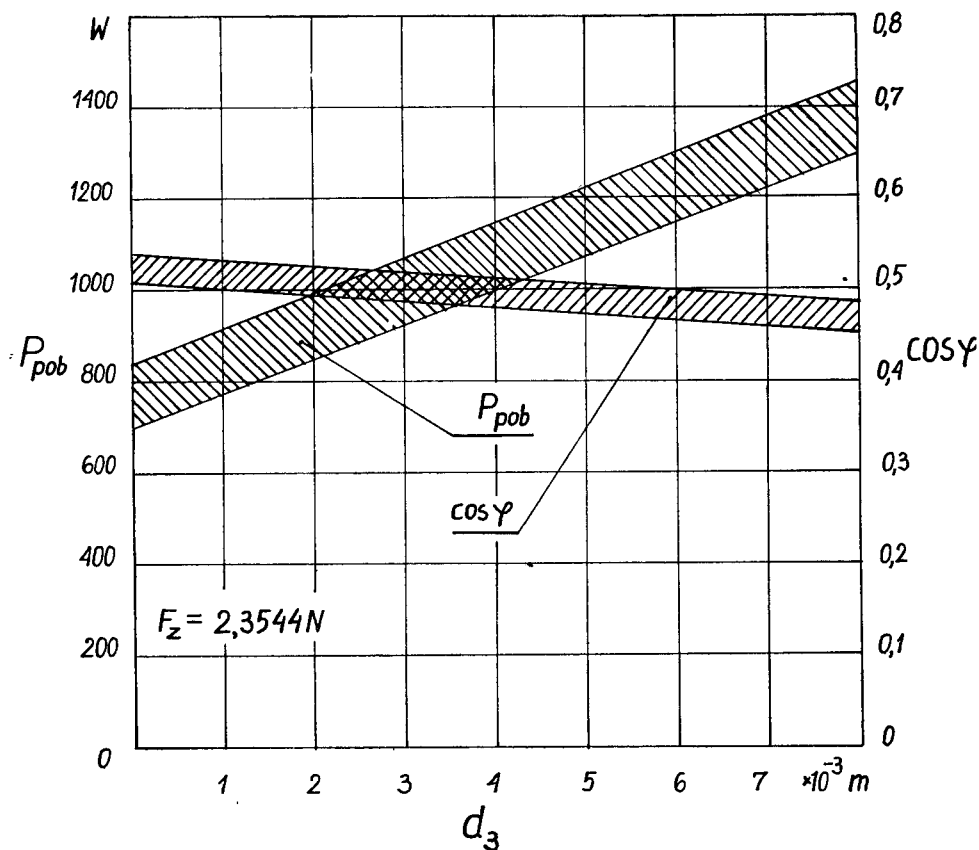


Rys. 6.10. Zależność obciążenia liniowego  $A$  części pierwotnej od wymiaru szczeliny powietrznej  $d_3$  przy stałej sile unoszenia  $F_z = \text{const}$  w przetworniku prądu przemiennego o biegunach utajonych ( $\nu = 1$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $d_2 = 3 \text{ mm}$ ,  $\gamma_2 = 30 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ ,  $v_2 = 0$ ) - wyniki obliczeń wg wzoru (6.54)



Rys. 6.11. Zależności obciążenia liniowego  $A$  oraz prądu  $I$  części pierwotnej od wymiaru szczeliny powietrznej  $d_3$  przy stałej sile unoszenia  $F_z = \text{const}$  w przetworniku o biegunach utajonych prądu przemiennego ( $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $d_2 = 3 \text{ mm}$ ,  $\gamma_2 = 30 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ ,  $v_2 = 0$ )  
 Wartości uzyskane z pomiarów zawarte są w obszarach zakreskowanych, krzywą uzyskaną z obliczeń wg wzoru (6.54) dla  $\nu = 1$  wykreślono linią ciągłą grubą





Rys. 6.12. Zależność mocy pobieranej  $P_{pob}$  oraz współczynnika mocy  $\cos \varphi$  przetwornika o biegunach utajo-prądu przemiennego od wymiaru szczeliny powietrznej  $d_3$  ( $f = 50$  Hz,  $d_2 = 3$  mm,  $\gamma_2 = 30 \cdot 10^6$  S/m,  $v_2 = 0$ ) przy stałej sile unoszenia  $F_z = 2,3544$  N - wyniki pomiarów

dowaną najprawdopodobniej nieuwzględnieniem w obliczeniach wyższych harmonicznych pola. Siły unoszenia są niewielkie, jak również parametry eksploatacyjne - rys. 6.12 są niezadawalające.

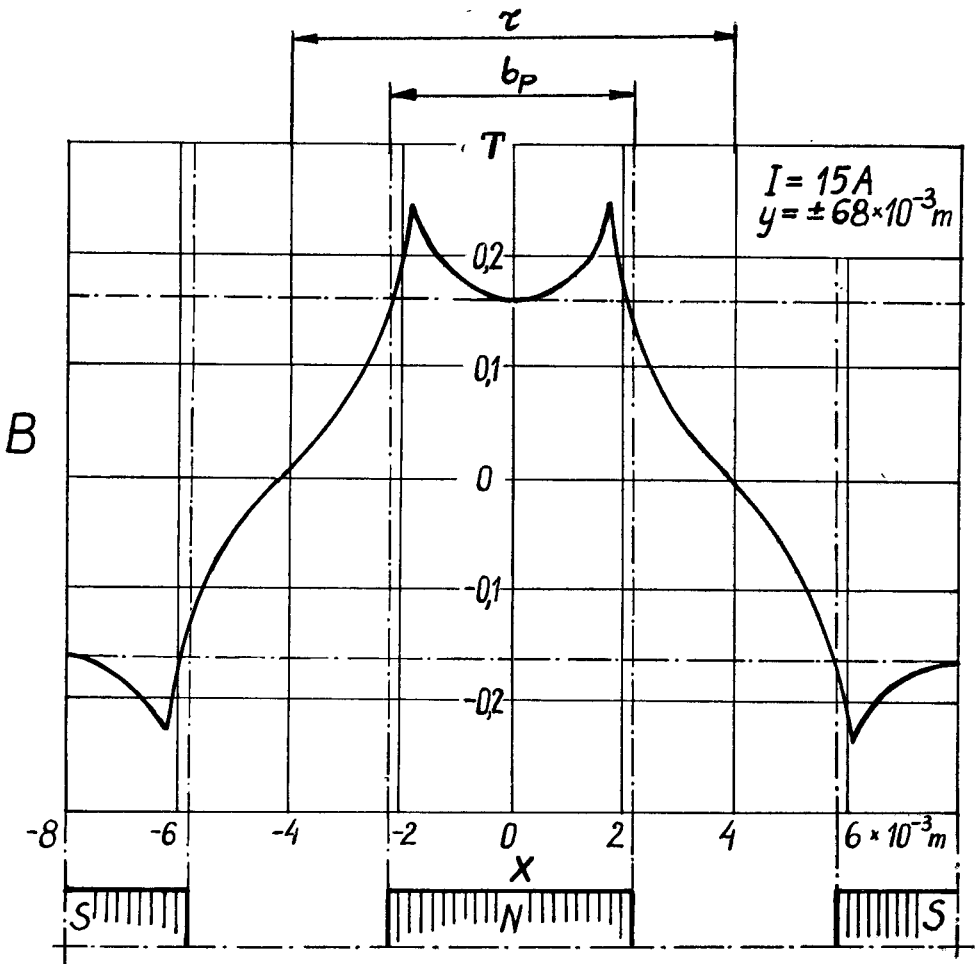
Rozkład indukcji magnetycznej wzdłuż współrzędnych  $x$  oraz  $y$  na powierzchni części pierwotnej przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem przemiennym - rys. 6.5, rys. 6.6 podano na rys. 6.13, rys. 6.14. Pomiary przeprowadzono teslomierzem z sondą Halla. Współczynnik występujący w równaniach (3.42), (6.50), (6.55) zależny od rozkładu indukcji wzdłuż współrzędnej  $x$  - rys. 6.13 wynosi [3.6]:

$$\begin{aligned}
 b_y = \frac{4}{\tau} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} & \left\{ \left[ \frac{\frac{2\alpha}{b_p}}{\left(\frac{2\alpha}{b_p}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right)^2} \sinh\alpha - 6\left(\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\right)^4 x \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left(\frac{2}{\tau - b_p}\right)^3 \cosh\alpha + 3\left(\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \frac{2}{\tau - b_p} \cosh\alpha \right] \sin\sqrt{\pi} \frac{\tau - b_p}{2\tau} + \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}{\left(\frac{2\alpha}{b_p}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right)^2} + 6\left(\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \left(\frac{2}{\tau - b_p}\right)^2 - \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \right] x \right. \\
 & \left. \times \cosh\alpha \cos\sqrt{\pi} \frac{\tau - b_p}{2\tau} \right\}. \quad (6.59)
 \end{aligned}$$

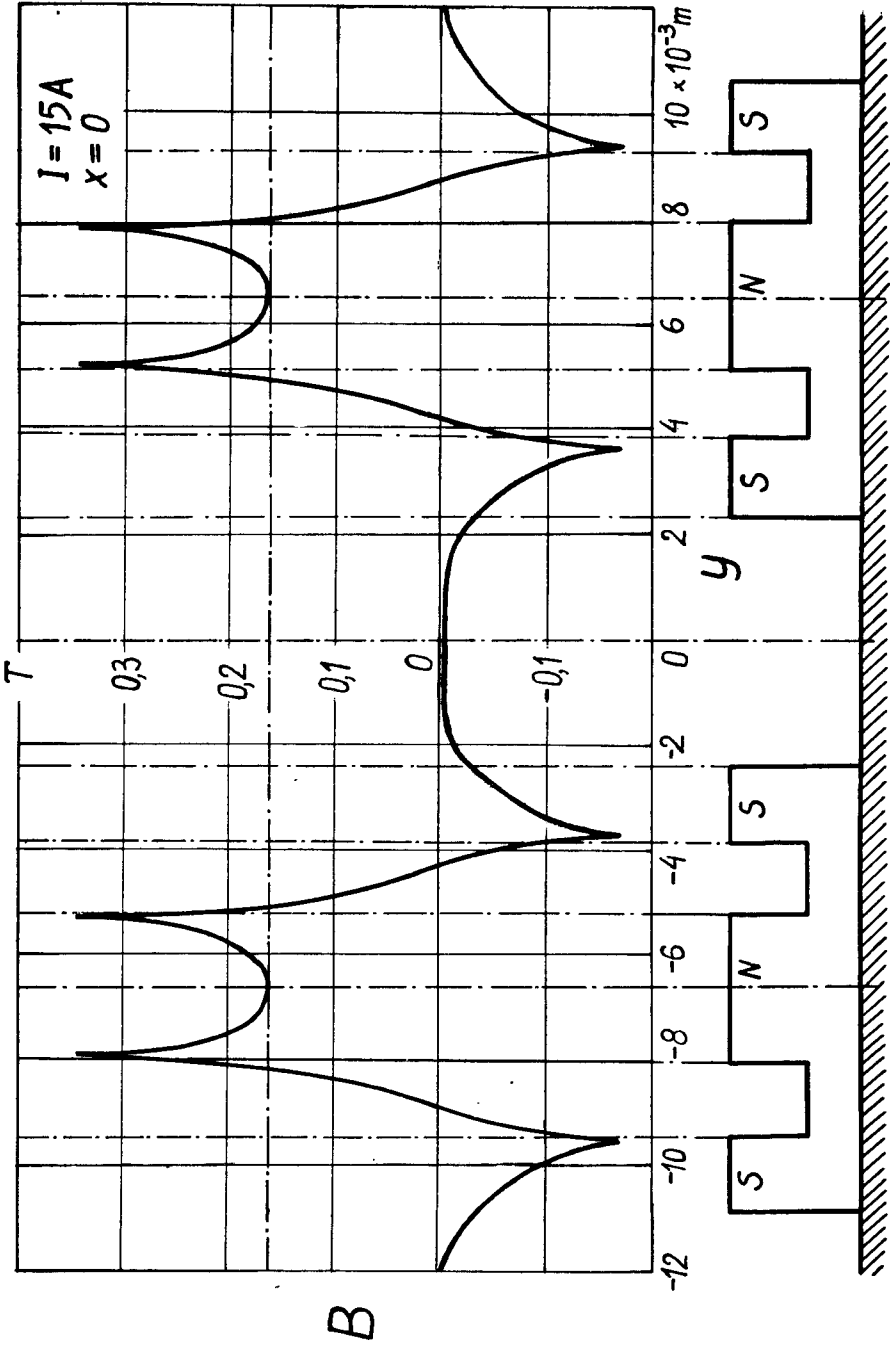
przy czym parametr  $\alpha = 0$ , gdy indukcja pod biegunem ma stałą wartość wzdłuż współrzędnej  $x$ , natomiast  $\alpha = 1$ , gdy indukcja pod biegunem zmienia się według funkcji cosinus hiperboliczny.

Oddziaływanie prądów wirowych transformacji w części wtórnej na pole magnetyczne części pierwotnej ilustrują rys. 6. 15 oraz rys. 6. 16.

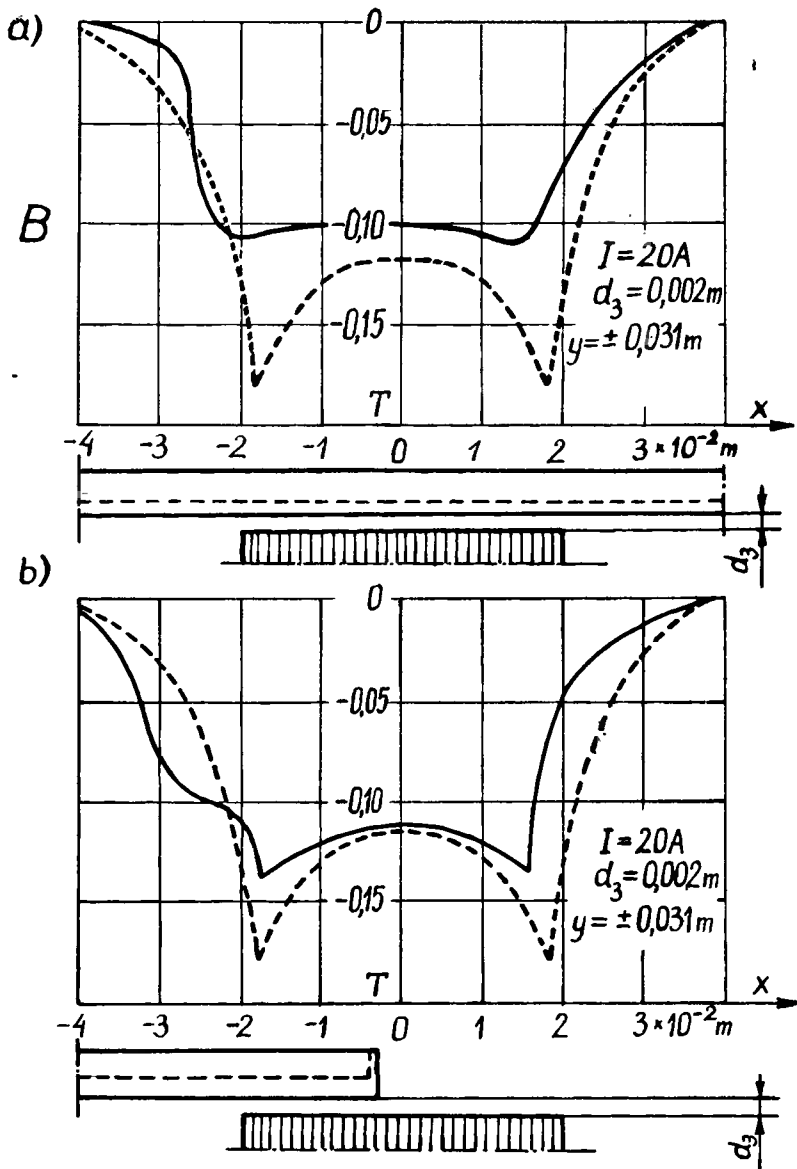
Zależność indukcji magnetycznej  $B$  na powierzchni części pierwotnej od prądu  $I$  w jej uzwojeniach, przedstawiono na rys. 6. 17.



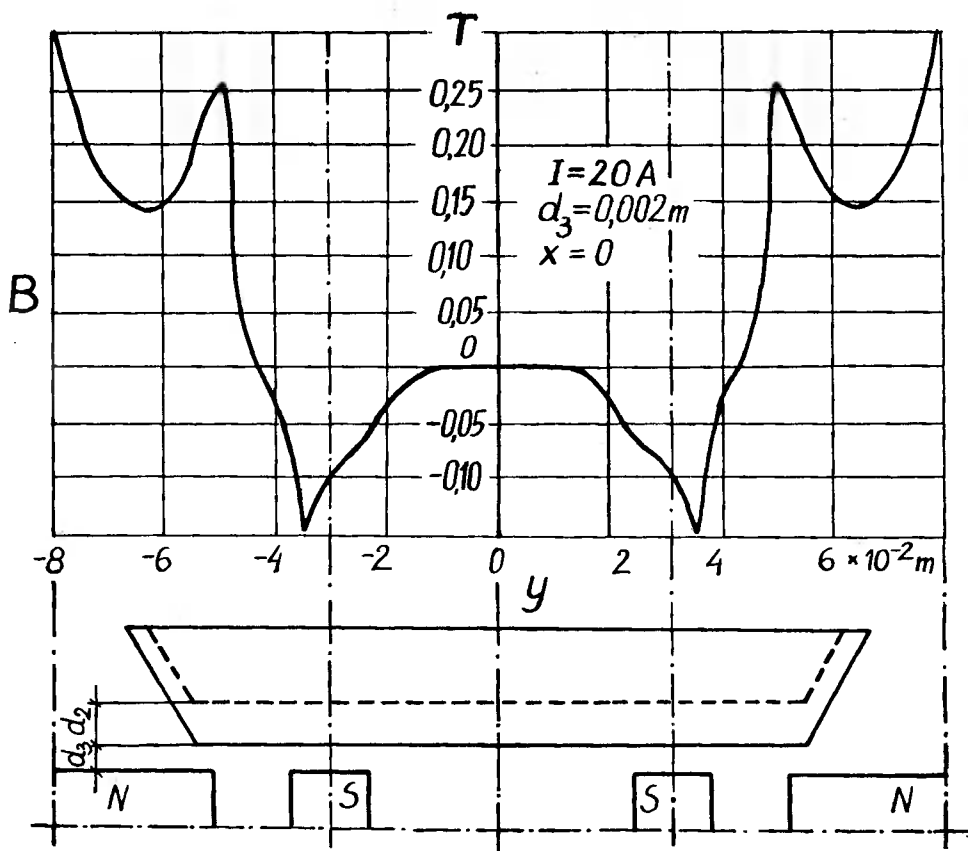
Rys. 6.13. Rozkład składowej normalnej indukcji magnetycznej  $B$  wzdłuż współrzędnej  $x$  (podziałki biegunowej) na powierzchni części pierwotnej przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem przemiennym jednofazowym ( $I = 15 \text{ A}$ ,  $y = \pm 68 \text{ mm}$ )



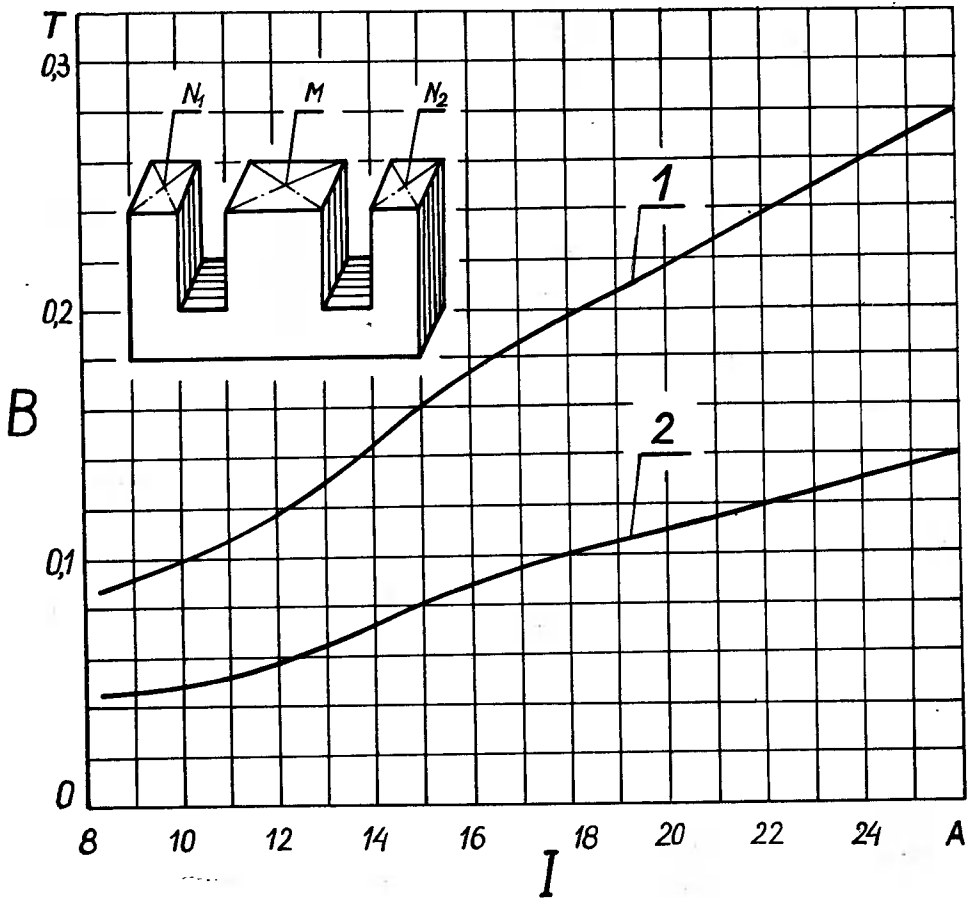
Rys. 6.14. Rozkład składowej normalnej indukcji magnetycznej wzdłuż współrzędnej  $y$  na powierzchni rdzenia części pierwotnej przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem prądowym jednofazowym ( $I = 15 \text{ A}$ ,  $x = 0$ )



Rys. 6.15. Oddziaływanie prądów wirowych transformacji indukowanych w części wtórnej na pole magnetyczne części pierwotnej - rozkład składowej normalnej indukcji magnetycznej wzdłuż współrzędnej  $x$  na powierzchni części pierwotnej przetwornika o biegunach jawnych (zasilanego prądem przemiennym jednofazowym ( $I = 20 A$ ,  $d_3 = 2 mm$ ,  $y = \pm 31 mm$ ): a) - część wtórna pokrywa całkowicie biegun części pierwotnej; b) - część wtórna pokrywa częściowo biegun części pierwotnej  
Linia przerywaną zaznaczono przebieg indukcji przy braku części wtórnej



Rys. 6.16. Oddziaływanie prądów wirowych transformacji indukowanych w części wtórnej na pole magnetyczne części pierwotnej - rozkład składowej normalnej indukcji magnetycznej wzdłuż współrzędnej  $y$  na powierzchni części pierwotnej przetwornika o biegunach jawnach zasilanego prądem przemiennym jednofazowym ( $I = 20 \text{ A}$ ,  $d_3 = 2 \text{ mm}$ ,  $x = 0$ )  
Analogiczny przebieg przy braku części wtórnej oraz  $I = 15 \text{ A}$  przedstawiono na rys. 6.14



Rys. 6.17. Zależność składowej normalnej indukcji magnetycznej  $B$  na powierzchni rdzenia części pierwotnej od prądu  $I$  w jej uzwojeniach ( $f=50$  Hz): 1 - w punktach  $M$ ; 2 - w punktach  $N_1, N_2$  ( $y = \pm 68$  mm dla punktu  $M$ ,  $y = \pm 31$  mm dla punktu  $N_1$ ,  $y = \pm 101$  mm dla punktu  $N_2$ )

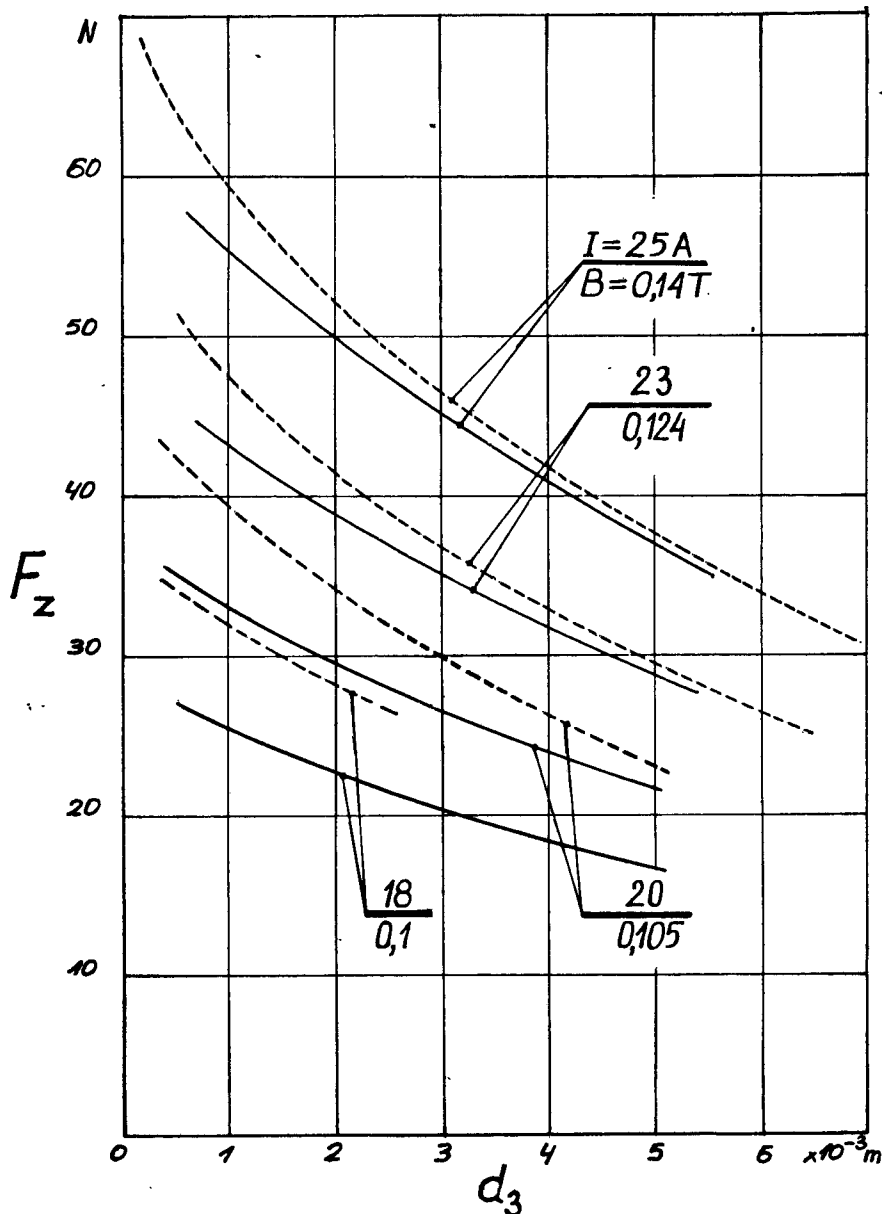
Na podstawie wzoru (6.55) obliczono siły unoszenia  $F_z$  w zależności od wysokości  $d_3$  dla harmonicznej podstawowej  $\nu = 1$ , przy  $d_2 = 9,75 \text{ mm} = \text{const}$  oraz stałej indukcji  $B = \text{const}$  na powierzchni aktywnej części pierwotnej. Dla części pierwotnej składającej się z dwóch rzędów elektromagnesów zmienność indukcji wzdłuż współrzędnej  $y$  jest duża - rys. 6.14, rys. 6.16, i należałoby zasadniczo dokonać obliczeń sił unoszenia w oparciu o analizę trójwymiarową pola elektromagnetycznego - rozdz. 4. Ponieważ autor dysponował tylko programem obliczeń sił według analizy dwuwymiarowej, prz yjęto w obliczeniach, że indukcja magnetyczna wzdłuż współrzędnej  $y$  ma na powierzchni aktywnej rdzenia części pierwotnej wartość stałą, taką jak w punktach  $N_1$  ( $y = \overset{+}{-} 31 \text{ mm}$ , rys. 6. 5b, rys. 6. 17). Siły  $F_z$  obliczone oraz zmierzone przedstawiono na rys. 6. 18. Jak widać, zgodność obliczeń z pomiarami jest dobra, tym lepsza, im większa jest indukcja  $B$ . Nieco zawyżone wartości obliczone wynikają przede wszystkim z nieuwzględnienia w obliczeniach osłabienia pola pierwotnego przez oddziaływanie części wtórnej - rys. 6. 15, rys. 6.16 .

Siły stabilizacji  $F_y(d_3)$  w osi  $y$  uzyskane z pomiarów przedstawiono na rys. 6. 19.

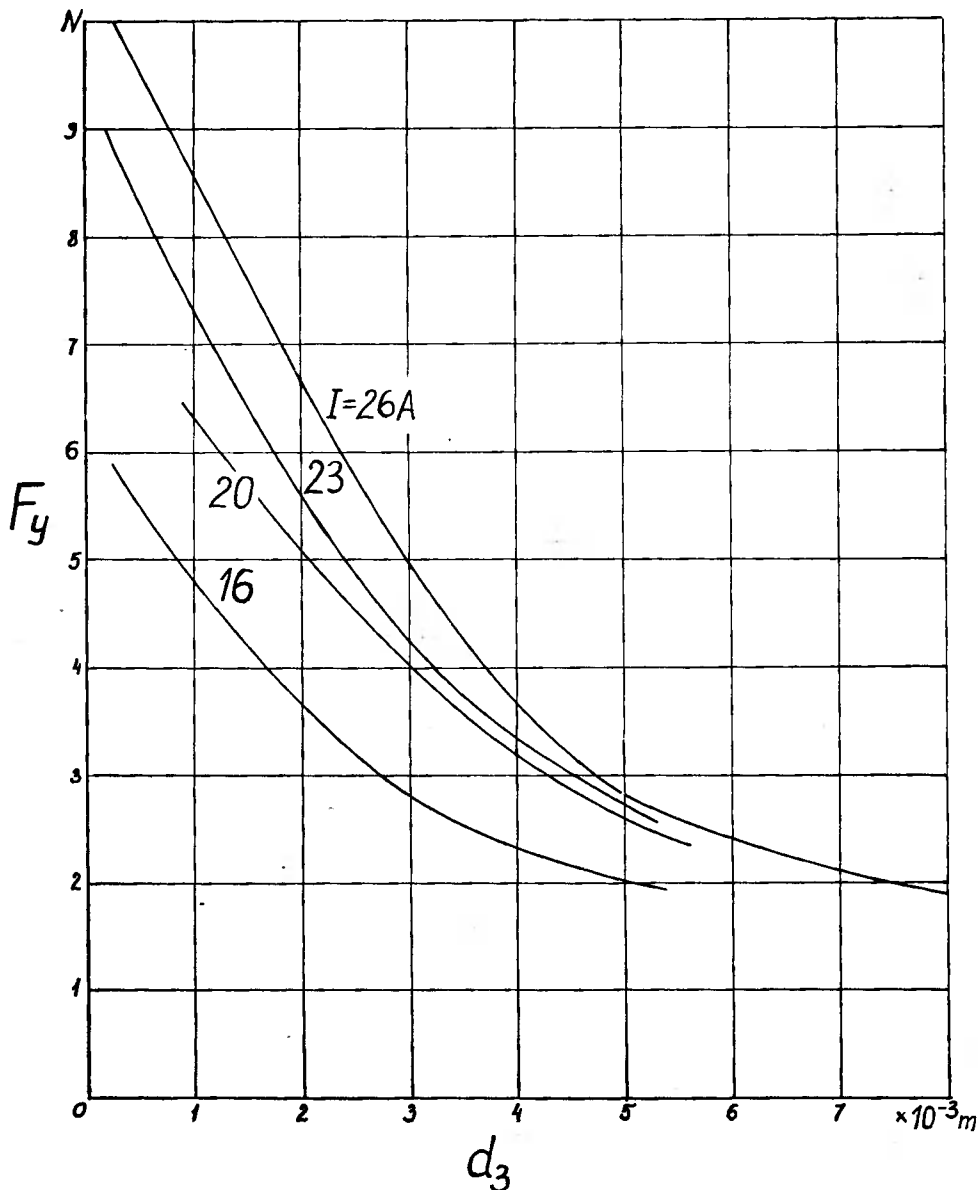
Dla porównania dołączono również wykresy sił unoszenia  $F_z(d_3)$  przy  $I = \text{const}$  - rys. 6.20 oraz siły ciągu  $F_x(F_z)$  przy  $I = \text{const}$ ,  $\nu_2 = 0$  - rys. 6.21 dla zasilania trójfazowego. Rys. 6.20 odpowiada schematowi połączeń według rys. 6. 7a, rys. 6. 21 natomiast - schematowi połączeń według rys. 6. 7b .

Większe siły unoszenia  $F_z$  można uzyskać na zasadzie reakcji prądów wirowych rotacji na pole magnetyczne stacjonarne, np. w przetworniku tarczowym o biegunach jawnych - rys. 6. 8, którego charakterystyki pracy zamieszczone są na rys. 6. 22, rys. 6.23, rys. 6.24, rys. 6.25, rys. 6. 26. Obliczenia tych charakterystyk przeprowadzono również dla harmonicznej podstawowej  $\nu = 1$ , zakładając trapezowy rozkład indukcji magnetycznej wzdłuż podziałki biegunowej, tzn. że współczynnik zależny od rozkładu indukcji wzdłuż współrzędnej  $x$  wynosi [3.6] ;

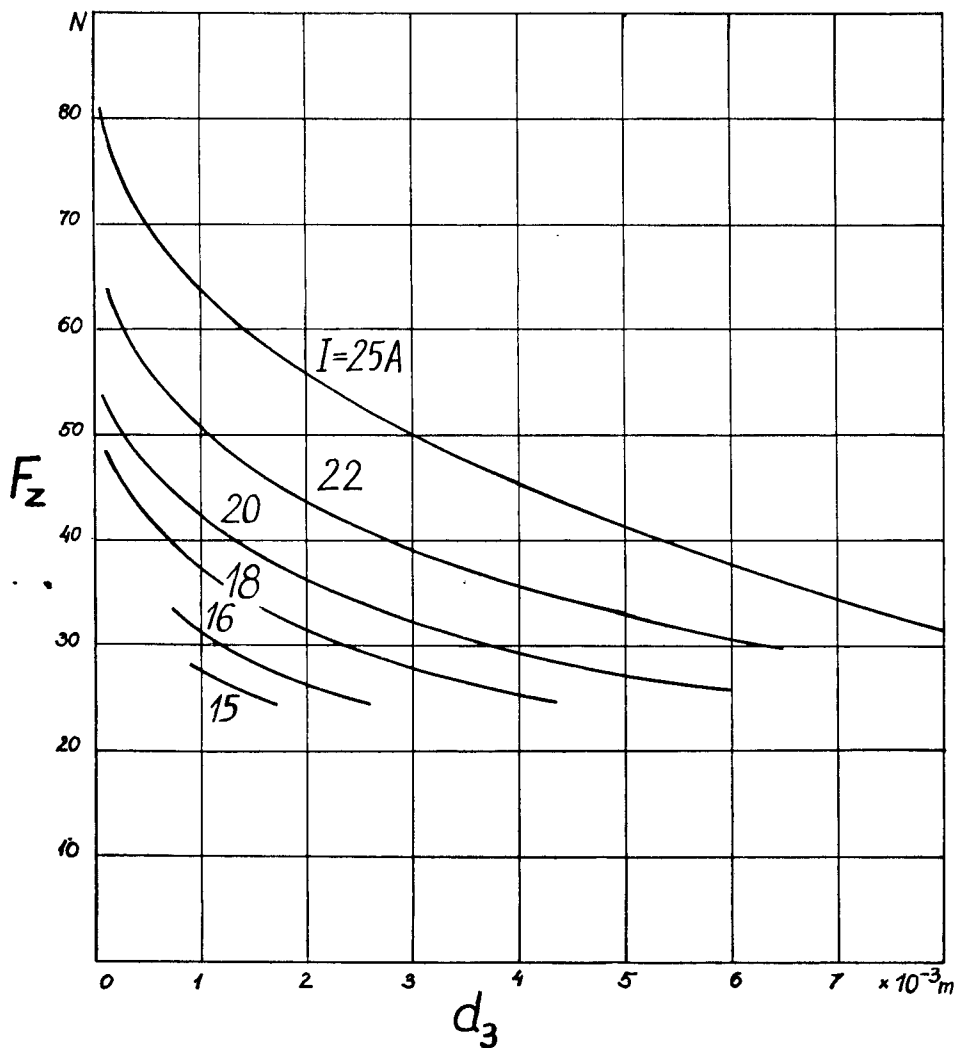




Rys. 6.18. Zależność siły unoszenia  $F_z$  od wysokości unoszenia  $d_3$  (szczeliny powietrznej)  $z$  przy stałym prądzie  $I = \text{const}$  w uzwojeniach części pierwotnej przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem przemiennym jednofazowym ( $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $d_2 = 9,75 \text{ mm}$ ,  $\gamma_2 = 20 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ ,  $v_2 = 0$ )  
 Krzywe uzyskane z pomiarów wykreślono linią ciągłą, krzywe uzyskane z obliczeń dla  $\nu = 1$  według wzoru (6.55) - linią przerywaną

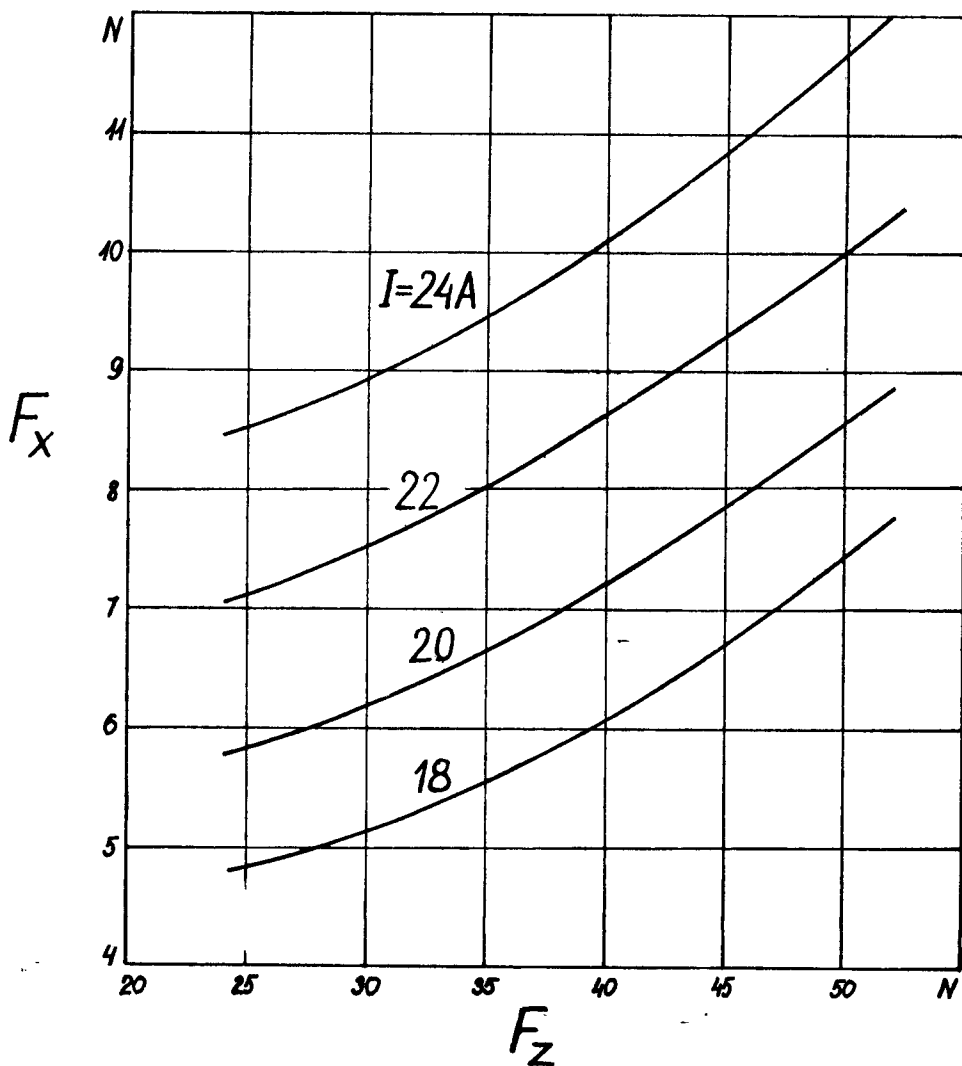


Rys. 6.19. Zależność siły stabilizacji  $F_y$  od wysokości unoszenia  $d_3$  przy stałym prądzie  $I = y_{const}$  w uzwojeniach części pierwotnej przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem przemiennym jednofazowym ( $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $d_2 = 9,75 \text{ mm}$ ,  $\chi_2 = 20 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ ,  $v_2 = 0$ )  
Krzywe otrzymane z pomiarów

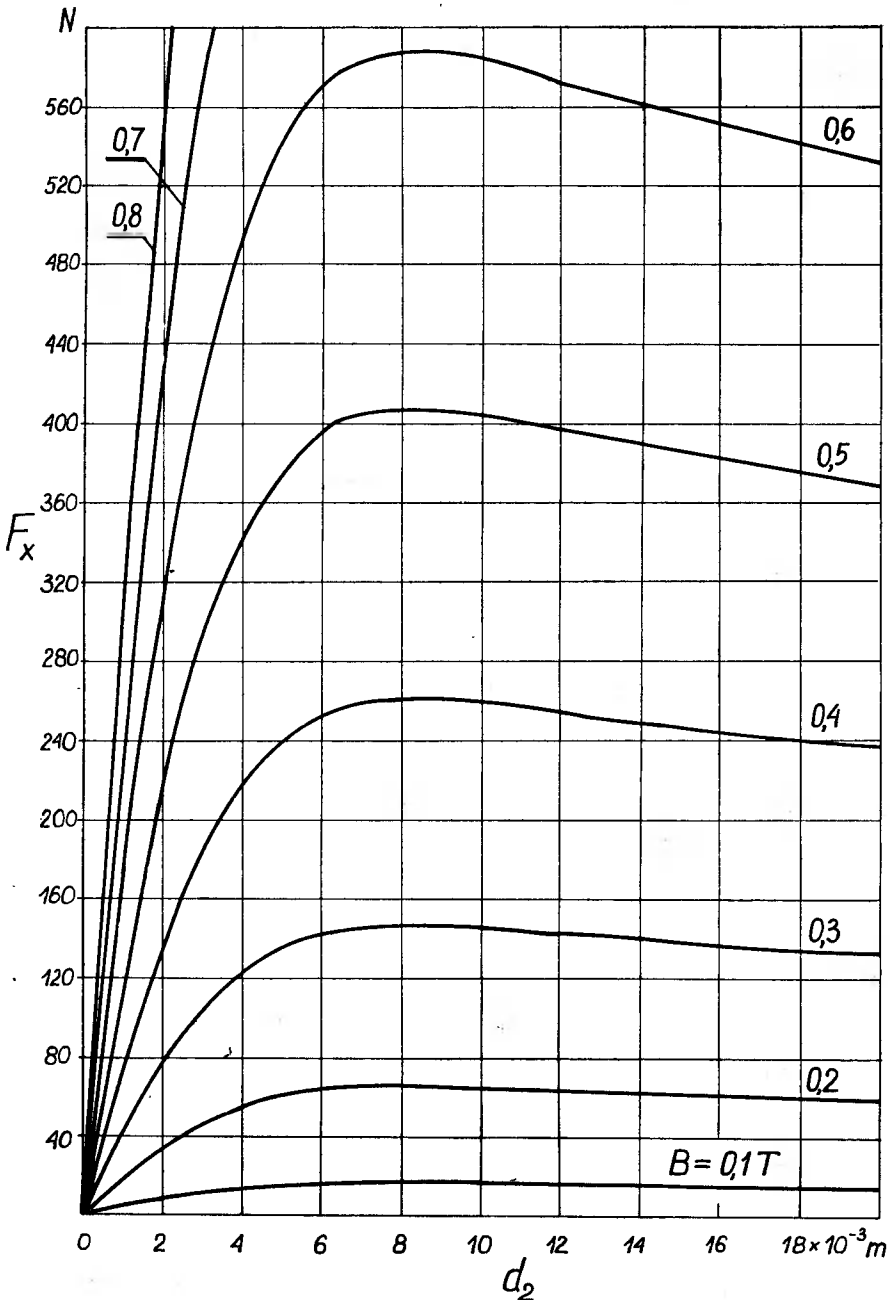


Rys. 6.20. Zależność siły unoszenia  $F_z$  od wysokości unoszenia  $d_3$  przy stałym prądzie  $I = \text{const}$  w uzwojeniach części pierwotnej przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem przemiennym trójfazowym - schemat połączeń jak na rys. 6.7a ( $f = 50$  Hz,  $d_2 = 9,75$  mm,  $\gamma_2 = 20 \cdot 10^6$  S/m,  $v_2 = 0$ )

Krzywe otrzymane z pomiarów

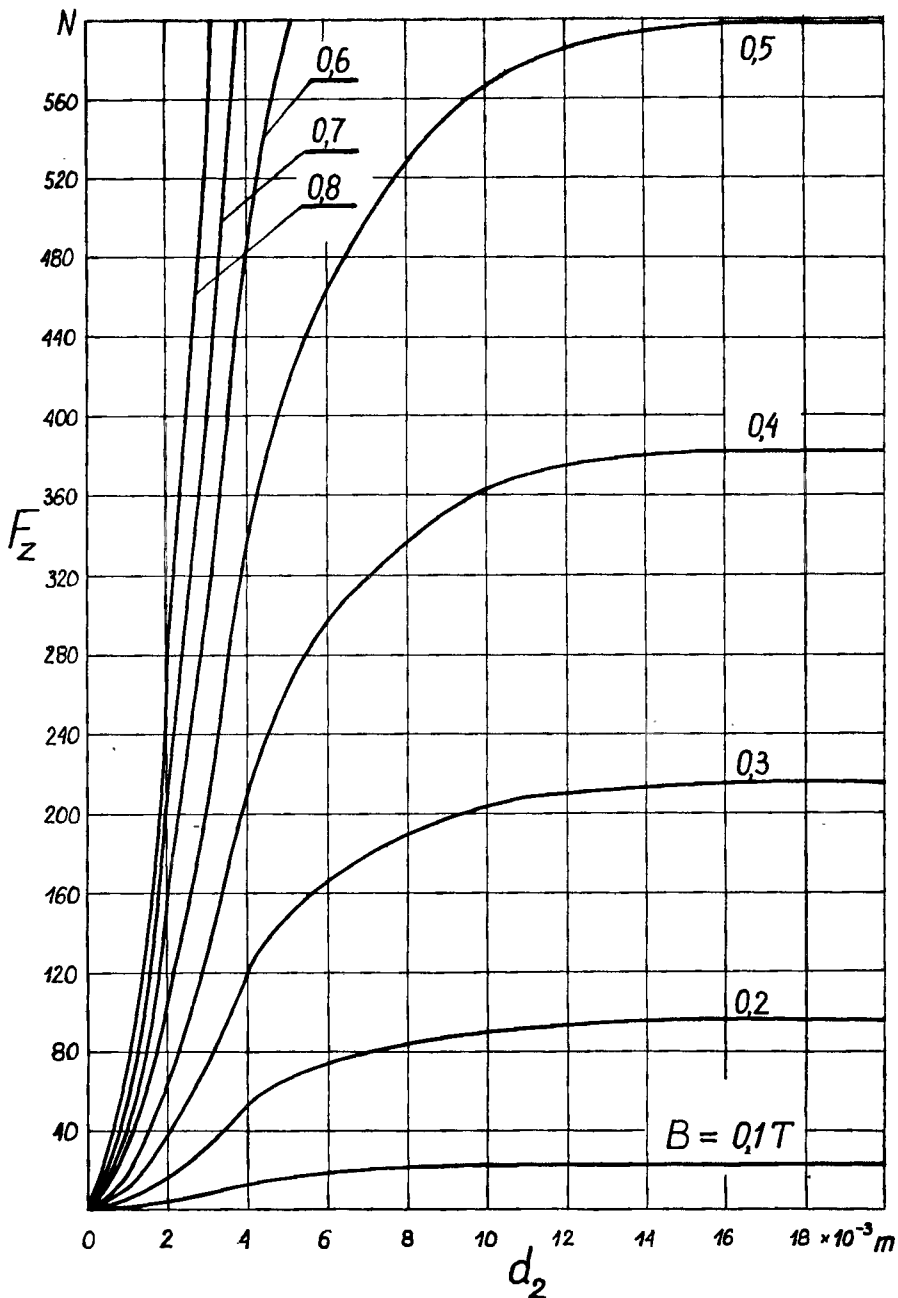


**Rys. 6.21.** Zależność siły ciągu  $F_x$  od siły unoszenia  $F_z$  przy stałym prądzie  $I = \text{const}$  w uzwojeniach części pierwotnej dla przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem trójfazowym - schemat połączeń uzwojeń jak na rys. 6.7b ( $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $d_2 = 9,75$   $\gamma_2 = 20 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ ,  $v_2 = 0$ )  
 Krzywe otrzymane z pomiarów

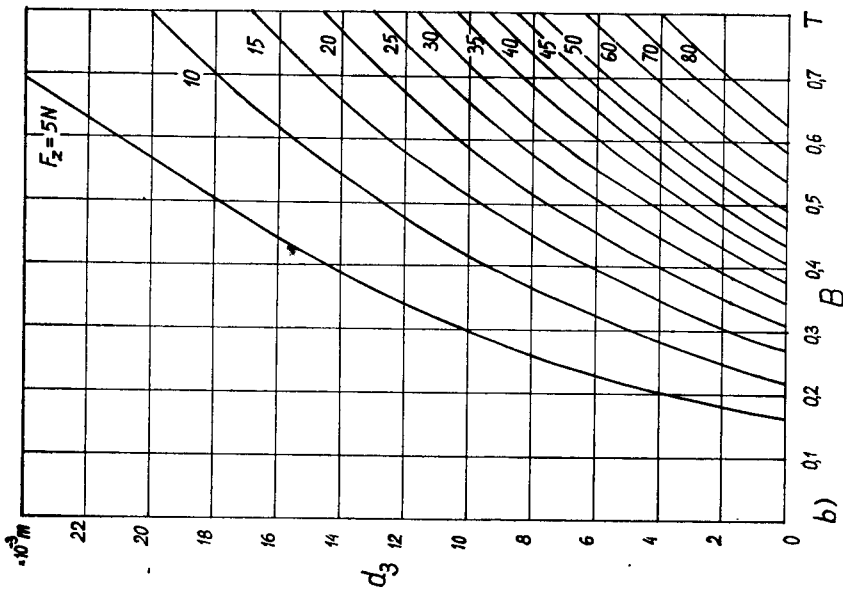
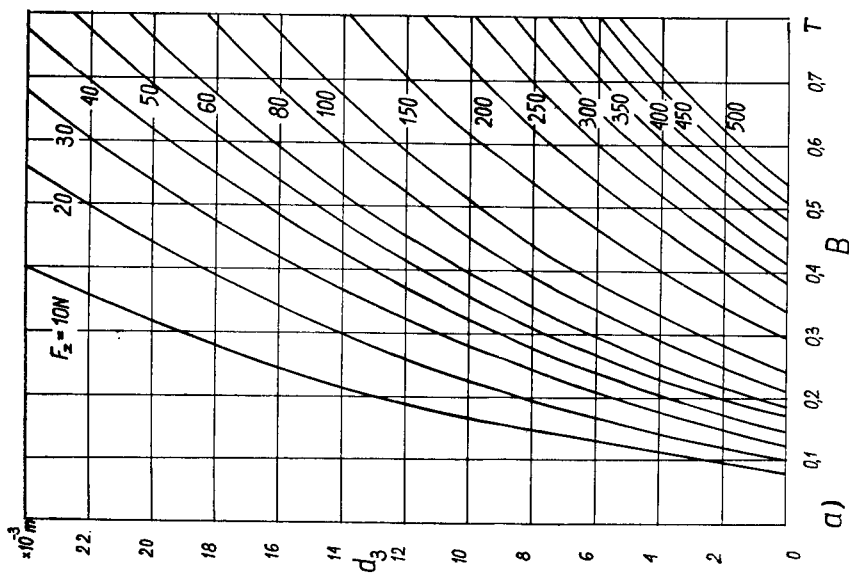


Rys. 6.22. Zależność siły hamującej  $F_x$  od grubości tarczy wirującej  $d_2$  przy stałej indukcji magnetycznej  $B = \text{const}$  w szczelinie powietrznej przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem stałym ( $\omega = 1$ ,  $f = 0$  Hz,  $d_3 = 5$  mm,  $\gamma_2 = 30 \cdot 10^6$  S/m,  $v_2 = 15$  m/s)

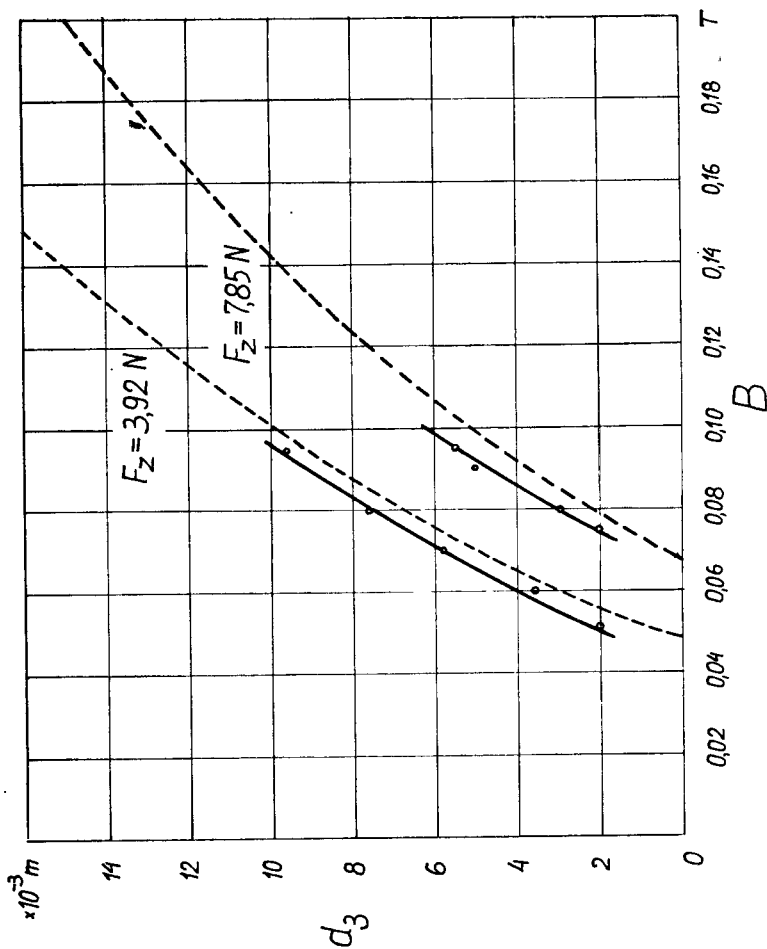
Krzywe otrzymane z obliczeń według wzoru (6.50)



Rys. 6.23. Zależność siły unoszenia  $F_z$  od grubości tarczy wirującej  $d_2$  przy stałej indukcji w szczelinie powietrznej  $B = \text{const}$  w przetworniku o biegunach jawnym zasilanym prądem stałym ( $\nu = 1$ ,  $f = 0$  Hz,  $d_3 = 5 \cdot 10^{-3}$  m,  $\delta_2 = 30 \cdot 10^{-6}$  S/m,  $v_2 = 15$  m/s) Krzywe otrzymane z obliczeń według wzoru (6.55)

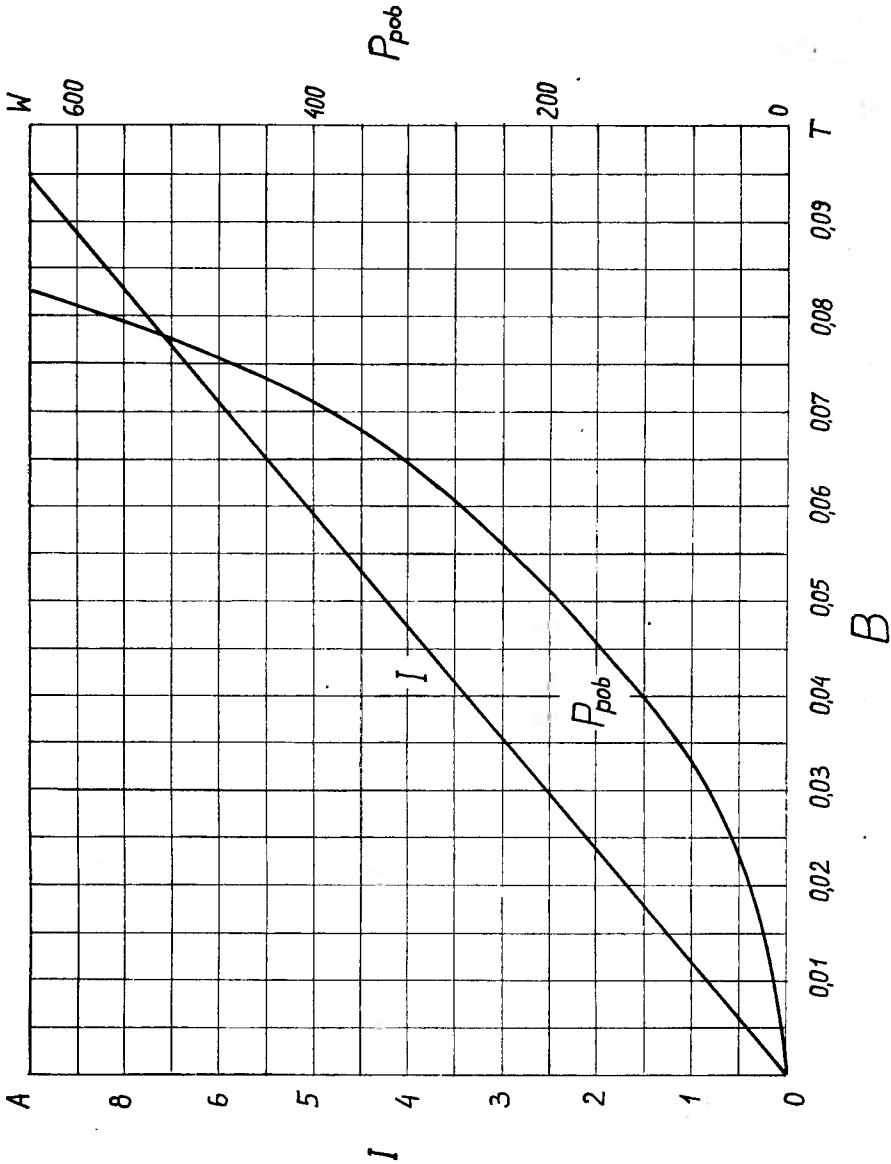


Rys. 6.24. Zależność wysokości unoszenia  $d_3$  (szczeliny powietrznej) tarczy wirującej od indukcji magnetycznej  $B$  w szczelnie powietrznej przy stałej sile unoszenia  $F_z = \text{const}$  dla przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem stałym ( $\omega = 1$ ,  $f = 0 \text{ Hz}$ ,  $d_2 = 3 \text{ mm}$ ,  $\gamma_2 = 30 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ ): a)  $v_2 = 15 \text{ m/s}$ , b)  $v_2 = 5,3 \text{ m/s}$



Rys. 6.25. Zależność wysokości unoszenia  $d_3$  (szczeliny powietrznej) tarczy wirującej przetworznika o biegunach jawnych zasilanego prądem stałym od indukcji  $B$  w szczelinie powietrznej dla dwóch wartości sił unoszenia:  $F_z = 3,92$  N oraz  $F_z = 7,85$  N ( $f = 0$  Hz,  $d_2 = 3$  mm,  $\gamma_2 = 30 \cdot 10^6$  S/m,  $v_2 = 15$  m/s). Krzywe uzyskane z pomiarów wykreślono linią ciągłą, krzywe uzyskane z obliczeń wg wzoru (6.55) dla  $\nu = 1$  - linią przerywaną





Rys. 6.26. Zależność prądu oraz mocy pobieranej przez część pierwotną przetwornika o biegunach jawnych zasilanego prądem stałym od składowej normalnej indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej - wyniki pomiarów (sondę hallotroną umieszczono w osi symetrii bieguna, na jego powierzchni)

$$b_{\nu} = \frac{4\tau}{(\nu\pi)^2} \frac{2}{\tau - b_p} \cos\left(\beta_{\nu} \frac{b}{2}\right) \quad (6.60)$$

Począwszy od pewnej grubości krytycznej części wtórnej, wynoszącej w rozpatrywanym przetworniku  $d_2 = 8$  mm, przy prędkości  $v_2 = 15$  m/s, siła hamująca maleje i stosunek wyrażony zależnością (6.58) rośnie. Stosunek ten będący niejako miernikiem dobroci przetwornika, zależy przede wszystkim od konduktywności, grubości i pulsacji prądu w części wtórnej oraz od szczeliny powietrznej; w rozpatrywanym przypadku przybiera wartości maksymalne dla  $d_2 \geq 20$  mm - rys. 6.22, rys. 6.23. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że istnieje możliwość budowy np. lekkiego pojazdu unoszonego w polu magnetycznym bez konieczności stosowania urządzeń nadprzewodzących wzbudzających pole. Zakładając bowiem  $d_3 = 5$  mm,  $d_2 = 20$  mm,  $v_2 = 15$  m/s, rozmieszczenie biegunów różnoimiennych co  $\tau = 0,0503$  m, indukcję w szczelinie powietrznej  $B = 0,1$  T, można odczytać z rys. 6.23, że powierzchnia aktywna  $2p\tau L = 0,006784$  m<sup>2</sup> części pierwotnej wytwarza siłę unoszenia  $F_z = 23$  N, co oznacza, że z 1 m<sup>2</sup> powierzchni aktywnej można uzyskać siłę  $F_z = 3390,3$  N. Zmniejszenie prędkości  $v_2$  powoduje znaczny spadek siły unoszenia  $F_z$ , co można stwierdzić porównując wykresy na rys. 6.24 a) oraz rys. 6.24 b). Możliwość budowy pojazdu unoszonego w polu magnetycznym stacjonarnym przy wykorzystaniu konwencjonalnych środków technicznych jest realna, gdyż badania eksperymentalne potwierdzają słuszność wzoru (6.55) i wykluczają ewentualne błędy w rozważaniach teoretycznych - rys. 6. 25. Zależność prądu oraz mocy pobieranej przez część pierwotną od indukcji w szczelinie powietrznej przedstawiono na rys.6.26. Pomiaru indukcji wykonano teslomierzem hallotronowym, umieszczając sondę w osi symetrii bieguna, na jego powierzchni.

Zależności (6.49), (6.50), (6.54), (6.55) są słuszne również dla wszystkich innych przetworników indukcyjnych o analogicznej strukturze trójwarstwowej, np. silników, hamulców czy sprzęgieł. Obliczenia przetworników, w których jest konieczne uwzględnienie zjawiska anizotropii są również podobne.

## 7. WNIOSKI

W pracy przedstawiono metodę ogólną analizy elektromechanicznych przetworników indukcyjnych w stanach ustalonych na podstawie teorii pola elektromagnetycznego. Uzyskane zależności rekurencyjne na rozkład pola, impedancję części wtórnej, moc elektromagnetyczną przekazywaną z części pierwotnej do części wtórnej, straty mocy w części wtórnej oraz siły, jak również algorytm obliczeń na maszynę cyfrową, są słuszne dla wszystkich rodzajów przetworników o zwartym uzwojeniu części wtórnej. Jest to podstawową zaletą opracowanej metody analizy polowej - w odróżnieniu od metod dotychczas stosowanych. Wykazano zatem słuszność postawionej tezy naukowej.

Rozpatrywano trzy przypadki rozkładu pola: jednowymiarowego - rozdz. 2, dwuwymiarowego - rozdz. 3 oraz trójwymiarowego - rozdz. 4. Przedstawiono oryginalną analizę struktur wielowarstwowych dla wszystkich trzech konfiguracji pola. Zależności rekurencyjne na rozkład pola trójwymiarowego w środowisku składającym się z dowolnie dużej liczby warstw nie były dotąd opracowane.

Dokładność wyprowadzonych zależności sprawdzono doświadczalnie dla czterech rodzajów przetworników dotychczas analizowanych w sposób uproszczony lub w ogóle nie będących przedmiotem rozważań: indukcyjnego silnika wirującego o cylindrycznym wirniku dwuwarstwowym i ułożyskowanym stojanie wewnętrznym, podnośnika działającego na zasadzie zjawiska lewitacji elektromagnetycznej zasilanego prądem przemiennym, indukcyjnego silnika liniowego o biegunach jawnych i części wtórnej unoszonej na poduszce magnetycznej oraz przetwornika repulsyjnego tarczowego zasilanego prądem stałym. We wszystkich czterech przypadkach uzyskano bardzo dobrą zgodność wyników obliczeń według opracowanego algorytmu z wynikami badań eksperymentalnych.

Ponadto rozszerzono metodę uwzględnienia zmiennej przenikalności magnetycznej oraz strat histerezowych podaną przez autora dla półprzestrzeni ferromagnetycznej w pracach [2.19 , 2.20] , dostosowując ją do analizy pola w cienkich płytach ferromagnetycznych - rozdz. 2. Opracowano również metodę rozwiązania równań polowych w uwarstwionym środowisku anizotropowym - rozdz. 3, co umożliwia analizę przetworników indukcyjnych o niejednorodnej strukturze poszczególnych warstw części wtórnej, np. silników indukcyjnych o wirniku klatkowym i rdzeniu pakietowanym.

Uogólnienie analizy polowej wszystkich rodzajów elektromechanicznych przetworników indukcyjnych nabiera szczególnego znaczenia w komputerowo wspomaganym projektowaniu maszyn i urządzeń elektrycznych. Jeden algorytm i jeden program obliczeń wyczerpuje bowiem wszystkie możliwe ich rodzaje i odmiany konstrukcyjne.

Wyniki pracy mają znaczenie szersze i mogą być przystosowane również do układów o innych strukturach niż występujące w przetwornikach elektromechanicznych, np. do transformatorów, aparatów i urządzeń elektrycznych, w których występuje problematyka ekranowania elektromagnetycznego.

## LITERATURA

## Książki

- 1.1 Briechowskij L.M.: Wołny w stoistych sriediach, AN SSSR, Moskwa, 1957
- 1.2 Hague B.: The principles of electromagnetism applied to electrical machines, Dover edition, London, 1962
- 1.3 Krawczienko A.N., Niżnik L.P.: Elektrodinamiczieskije rascziety w elektrotechnike, Technika, Kijew, 1977
- 1.4 Wait J.R.: Electromagnetic waves in stratified media, Pergamon Press, Oxford - London - New York, - Paris, 1962
- 1.5 Wiszniewskij N.E., Głuchanow N.P., Kowaliew I.S.: Apparatura vysokogo dawlienija s germieticzieskim priwodom, GNTIML Maszgziz, Moskwa-Leningrad, 1960 oraz Masziny i aparaty s giermieticzieskim elektropriwodom. Maszinostrojenije, Leningrad, 1977
- 1.6 Turowski J.: Elektrodynamika techniczna, WNT, Warszawa, 1968 oraz Tiechniczieskaja elektrodinamika, Enerģia, Moskwa, 1974

## Artykuły

- 1.7 Boldea I., Babescu M.: Multilayer theory of d.c. linear brakes with solid-iron secondary, Proc. IEE, 123, 1976, Nr 3, ss. 220-222
- 1.8 Carter F.W.: Note on air-gap and interpolar induction, Journal IEE, 29, 1899-1900, ss. 925 - 933
- 1.9 Chari M.V.K., Reece P.: Magnetic field distribution in solid metallic structures in the vicinity of current carrying conductors, and associated eddy-current losses, IEEE Trans., vol. PAS-93, 1974, Nr 1, ss. 45 - 56
- 1.10 Chimiuk I.W.: Rascziet elektromagnitnogo polia w mnogo-stojnych cilindriczieskich sriediach, Problemy tiechniczieskoj elektrodinamiki, wyppusk 46, 1974, ss. 83-85
- 1.11 Creedy F.: Electric wave phenomena in the dynamo - electric machine, Journal IEE, 55, 1917, ss. 450 - 461
- 1.12 Cullen A.L., Barton T.H.: A simplified electromagnetic theory of the induction motor, using the concept of wave impedance, Proc. IEE, 105, part C, 1958, Nr 8, ss. 331 - 336, Monograph 283 U
- 1.13 Discussion on "Electromagnetic theory of electrical machines", Proc. IEE, 112, 1965, Nr 10, ss. 1927 - 1932
- 1.14 Douglas J.F.H.: The reluctance of some irregular magnetic fields, Trans. AIEE, 34, part I, 1915, s. 1067

- 1.15 Fornasieri E., Monti C., Morini A., Rizzi M., Zecchin R.: Electromagnetic and thermal behaviour of the rotating multiple shell shielding system of superconducting alternator, World Electrotechnical Congress, Section 1, Paper 44, June 1977, Moscow
- 1.16 Freeman E.M.: Travelling waves in induction machines: input impedance and equivalent circuits, Proc. IEE, 115, 1968, Nr 12, ss. 1772 - 1776
- 1.17 Freeman E.M., Smith B.E.: Surface-impedance method applied to multilayer cylindrical induction devices with circumferential exciting currents, Proc. IEE, 117, 1970, Nr 10, ss. 2012 - 2013
- 1.18 Freeman E.M.: Equivalent circuits from electromagnetic theory: low-frequency induction devices, Proc. IEE, 121, 1974, Nr 10, ss. 1117 - 1121
- 1.19 Freeman E.M.: Computer-aided steady-state and transient solutions of field problems in induction devices, Proc. IEE, 124, 1977, Nr 11, ss. 1057 - 1061
- 1.20 Gieras J.: General equations of electromagnetic field distribution in composite multilayer structures for one-sided wave penetration, Acta Technica ČSAV, 1977, Nr 5, ss. 361 - 386
- 1.21 Greig J., Freeman E.M.: Travelling-wave problem in electrical machines, Proc. IEE, 114, 1967, Nr 11, ss. 1681-1683
- 1.22 Gubienko T.P., Zawgorodnyj W.D., Fiedan R.G.: Schiema zamieszczienija i analogowij rasczietnyj stoł indukcionnych dwigatellej s raspriedielennymi wtoricznymi paramietrami, Elektriczieskije dwigatieli małoj moszcznosti, czast II, Naukowa Dumka, Kijew, 1969, ss. 230-244
- 1.23 Hellmund R.E.: Graphical treatment of zigzag and slot leakages in induction motors, Journal IEE, 46, 1910, s. 239
- 1.24 Hird W.B.: The reluctance of the teeth in slotted armature, Journal IEE, 29, 1899-1900, s. 933
- 1.25 Jones C.V., Gibson R.C.: Correlation of the air-gap vector potential of an induction motor with the magnetising current, Proc. IEE, 116, 1969, Nr 3, ss. 385 - 390
- 1.26 Karacuba L.A., Karacuba A.S.: Rascziet elektromagnitnogo polia i potier w mnogostoinoj magnitno-anizotropnoj sriedie, Problemy techniczieskoj elektrodinamiki, wypusk 51, 1975, ss. 44-50
- 1.27 Krawczienko A.N., Chimiuk I.W.: Issliedowanije impiedansa i udielnych powierchnostnych potier w biegszczziem elektromagnitnom polie, Problemy techniczieskoj elektrodinamiki, wypusk 44, 1973, ss. 65 - 70
- 1.28 Lawrenson P.J., Reece P., Ralph M.C.: Tooth-ripple losses in solid poles, Proc. IEE, 113, 1966, Nr 4, ss. 657-662, Correspondence Nr 11, ss. 1846 - 1847
- 1.29 Mendrela E., Turowski J.: Rotary-linear induction motor, IEEE PES Winter Meeting, New York, 1978, artykuł Nr A 78 091-1
- 1.30 Mishkin E.: Theory of the squirrel-cage induction motor derived directly from Maxwell's field equations, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 7, 1954 ss. 472 - 487

- 1.31 Monti C., Morini A., Verde B.: Steady state analysis of the magnetic fields and eddy currents in the rotating screen of a superconducting alternator, *Archiv für Elektrotechnik*, 57, 1976, ss. 319 - 327
- 1.32 Mukherji K.C.: Certain approaches to electromagnetic field problems pertaining to dynamo-electric machines, *Proc. IEE*, 108, part C, 1961, ss. 405 - 411
- 1.33 Nasar S.A.: Electromagnetic theory of electrical machines, *Proc. IEE*, 111, 1964, Nr 6, ss. 1123 - 1131
- 1.34 Pipes L.A.: Matrix theory of skin effect in laminations, *Journal of the Franklin Institute*, 262, 1956, Nr 2, ss. 127-138
- 1.35 Postnikow I.M., Niżnik L.P., Bieriezowski A.A., Krawczyński A.N.: Rascziet biegunskiego elektromagnitnogo polia w słoistoj przewodiaszcziej sriedie, *Elektriczestwo*, 1965, Nr 9, ss. 1 - 7
- 1.36 Purczyński J.: Wykorzystanie metody rozdzielania zmiennych i metod wariacyjnych do analizy stacjonarnych pól elektromagnetycznych, *Prace naukowe Politechniki Szczecińskiej, Instytut Automatyki Przemysłowej*, Nr 74, 1977, Szczecin
- 1.37 Rizk F.A.M.: Low Frequency Shielding Effectiveness of Double Cylinder Enclosure, *IEEE Trans.*, vol. EMC - 19, Nr 1, 1977, ss. 14 - 21
- 1.38 Rolicz P.: Zastosowanie bezpośrednich metod analizy funkcjonalnej do analizy niestabilnych procesów elektromagnetycznych w maszynach i urządzeniach elektrycznych, *Politechnika Poznańska, Rozprawy*, Nr 85, Poznań, 1977
- 1.39 Stoll R.L., Hammond M.A.: Calculation of the magnetic field of rotating machines, Part 4. Approximate determination of the field and losses associated with eddy currents in conducting surfaces, *Proc. IEE*, 112, 1965, Nr 12, ss. 2083 - 2094
- 1.40 Turowski J.: Pole elektromagnetyczne i straty w obudowie transformatora, *Zeszyty Nauk. Polít. Łódzkiej „Elektryka”*, 1957, Nr 3, ss. 47 - 65
- 1.41 Turowski J.: Straty i lokalne przegrzania wywołane strumieniami rozproszenia, *Zeszyty Naukowe Polít. Łódzkiej „Elektryka”*, 1963, Nr 11, ss. 89 - 179
- 1.42 Turowski J.: Wołnowy metod rasczieta ekranow i elementow elektriczieskich maszin, *Elektriczestwo*, 1965, Nr 12, ss. 53 - 57
- 1.43 Turowski J.: Obliczanie strat i temperatur w ekranie rurowym szyny, *Archiwum Elektrotechniki*, 18, 1969, z.1, ss. 61 - 79
- 1.44 Turowski J., Brulikowski J.: Wpływ odległości ekranu od ściany stalowej na straty mocy w układzie ekranowanym, *Materiały Sesji 25 - lecia Wyd. Elektr. Polít. Łódzkiej*, Łódź, 1970, z. 2, ss. 94 - 101
- 1.45 Uczkiewicz J.: Ekranowanie nadprzewodzącego uzwojenia wzbudzenia generatora synchronicznego od zmiennych zewnętrznych pól magnetycznych, *Inst. Układów Elektromaszynowych Polít. Wrocławskiej, Komunikat* Nr 106, Wrocław, 1976

- 1.46 Wojciechowski M.: Własności ekranów w polu zakłóceń radioelektrycznych, Sympozjum Elektrodyneamiki Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektr., Polit. Łódzka - Inst. Elektrotechniki (Oddz. Łódzki), Uniejów, 1974

#### Książki

- 2.1 Dąbrowski M.: Pola i obwody magnetyczne maszyn elektrycznych, Warszawa, WNT, 1971
- 2.2 Descloux J.: Méthode des éléments finis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Department de Mathématiques, Lausanne, Suisse, 1973
- 2.3 Kolesnikow P.M.: Wwiedienije w nielinieijnuju elektrodinamiku, Nauka i technika, Minsk, 1971
- 2.4 Lammeraner J., Štafl M.: Eddy currents, ILIFFE Books, London, SNTL, Prague, 1956
- 2.5 Nejman L.R.: Powierchnostnyj effiekt w ferromagnitnych tietach, GEI, Leningrad-Moskwa, 1949
- 2.6 Panasienkow M.A.: Elektromagnitnyje rascziety ustrojstw s nielinieijnymi raspriedieliennymi paramietrami, Energia Moskwa, 1971
- 2.7 Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego, WNT, Warszawa, 1977
- 2.8 Słuchockij A.E., Ryskin S.E.: Induktory dla indukcionno-go nagriewa, Energia, Leningrad, 1974
- 2.9 Štafl M.: Elektrodinamika ve stavbě elektrických strojů, Nakladatělstvi ČSAV, Praha, 1962
- 2.10 Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego, WNT, Warszawa, 1964
- 2.11 Wienikow W.A.: Teorija podobija i modielirowanija, Wyszaja szkoła, Moskwa, 1976
- 2.12 Zienkiewicz O.C.: The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, London, 1971

#### Artykuły

- 2.13 Agarwal P.D.: Eddy-current losses in solid and laminated iron, Trans. AIEE - Communication and Electronics, 78, 1959, May, ss. 169 - 181
- 2.14 Barth J.B.: Alternating electromagnetic fields, eddy currents and power loss in solid iron, Proc. IEE, 120, 1973, Nr 11, ss. 1454 - 1461
- 2.15 Dąbrowski M.: Wiroprowadowe straty mocy w rdzeniu o prostokątnej charakterystyce magnesowania, Zeszyty Nauk. Polit. Poznańskiej "Elektryka", 1970, Nr 13, ss. 53-70
- 2.16 Demenko A.: The iterative methods of modelling stationary magnetic fields with the use of the hybrid analyser APH-600, Conference on "Simulation of Systems", AICA, Hague, 1976, ss. 347 - 352
- 2.17 Frumkin E.P.: Cykl artykułów w zbiorze „Matematyčeskaja fizika i elektrodynamika”, Moskowskij uniwersitet, Moskwa, 1973, ss. 95 - 116
- 2.18 Gieras J.: Electromagnetic field, impedance and power loss in the screened ferromagnetic halfspace, Acta Technica ČSAV, Nr 5, 1976, ss. 514 - 534



- 2.19 Gieras J.: Analiza pola elektromagnetycznego w środowisku ferromagnetycznym z uwzględnieniem zmiennej przenikalności magnetycznej i strat mocy na przemagnesowywanie, *Archiwum Elektrotechniki*, 25, 1976, z.4, ss. 1035 - 1050
- 2.20 Gieras J.: Analytical method of calculating the electromagnetic field and power losses in ferromagnetic halfspace, taking into account saturation and hysteresis, *Proc. IEE*, 124, 1977, No 11, ss. 1098 - 1104
- 2.21 Gillot D.H., Calvert J.F.: Eddy current losses in saturated solid magnetic plates, rods, and conductors, *IEEE Trans.*, vol. MAG-1, No 2, 1965, ss. 126 - 137
- 2.22 Haberland F.: Theorie des magnetischen Wechselfeldes im Luftspalt von massivem Eisen, *Arch. für Elektrot.*, Bd. 28, 1934, ss. 234 - 246
- 2.23 Haberland G., Haberland F.: Das Wechselfeldes im gesättigten massiven Eisen, *Arch. für Elektrot.*, Bd. 30, 1936, ss. 126 - 133
- 2.24 Heller B., Sarma M.S.R.: The electromagnetic field in solid iron, *Acta Technica ČSAV*, 1968, Nr 6, ss. 735 - 753
- 2.25 Kaźmierski M.: Przenikalność zastępcza masywnego żelaza przy częstotliwości technicznej, *Rozprawy Elektrotechniczne*, 21, 1975, z. 2, ss. 435 - 453
- 2.26 O'Kelly D.: Flux penetration and core loss in solid iron, *IEEE Trans.*, vol. MAG-11, Nr 1, 1975, ss. 55 - 60
- 2.27 Kesavamurthy N., Rajagopalan P.K.: Eddy currents in solid iron due to alternating magnetic flux, *Proc. IEE*, 106, part C, 1959, ss. 207 - 213, Monograph 339U
- 2.28 Kesavamurthy N., Rajagopalan P.K.: An analytical method taking account of saturation and hysteresis for evaluating the iron loss in solid-iron cores subjected to an alternating field, *Proc. IEE*, 108, part C, 1961, ss.237-243
- 2.29 Kesavamurthy N., Rajagopalan P.K., Subba Rao V.: Effects of saturation on the core loss of thin ferromagnetic plates subjected to alternating flux, *Proc. IEE*, 110, 1963, No 2, ss. 459-473
- 2.30 Křenek P.: Vnik magnetického pole do poloprostoru s nelineární permeabilitou v kvazistacionárním stavu, *Elektrotechnický časopis*, 28, 1977, č. 3, ss. 161-178
- 2.31. Lasociński J.: Przybliżone metody analizy jednowymiarowego pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie, *Rozprawy Elektrotechniczne*, 13, 1967, z.3, ss.555-577
- 2.32 Liese M.: Verfahren zur Berechnung von Wirbelströmen in massiven Eisen, *Arch. für Elektrot.*, Bd. 59, 1977, ss. 75 - 85
- 2.33 Lim K.K., Hammond P.: Numerical method for determining the electromagnetic field in saturated steel plates, *Proc. IEE*, 119, 1972, Nr 11, ss. 1667 - 1674
- 2.34 Mulhall B.E.: Eddy-current losses in thin magnetic sheet *Proc. IEE*, 111, 1964, Nr 1, ss. 183-192
- 2.35 Oberretl K.: Magnetic fields, eddy current and losses, taking the variable permeability into account, *IEEE Trans.*, vol. PAS-88, 1969, Nr 11, ss. 1646-1657

- 2.36 Pelz P.: Ferromagnetický plech se závislou permeabilitou v homogenním střídavém magnetickém poli, *Elektrotechnický časopis*, 13, č. 7, 1962, ss. 377 - 391
- 2.37 Rosenberg E.: Wirbelströme in massivem Eisen, *ETZ*, H. 22, 1923, ss.513- 518
- 2.38 Sanda Mastero: Imposition of sinusoidal flux by feedback for analogue and digital computation of the field distribution in a.c. magnetised ferromagnetic laminas, *Proc. IEE*, 116, 1969, Nr 9, ss.1613-1620
- 2.39 Subba Rao V.: Eddy-current losses in finite sections of solid iron under saturation, *Proc. IEE*, 111, 1964, Nr 2 ss. 343 - 348
- 2.40 Subba Rao V.: Losses in ferromagnetic laminations due to saturation, *Proc. IEE*, 111, 1964, Nr 12, ss. 2111 - 2117
- 2.41 Subba Rao V.: Nonlinear magnetisation of thin ferromagnetic plate, *Proc. IEE*, 113, 1966, Nr 6, ss. 1125-1131
- 2.42 Zakrzewski K.: Zastosowanie maszyny cyfrowej do analizy pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie, *Zeszyty Nauk. Polit. Łódzkiej "Elektryka"*, 72, 1965, Nr 17, ss. 5 - 26
- 2.43 Zakrzewski K.: Analiza pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie metodą numeryczną, *Archiwum Elektrotechniki*, 18, 1969, z.3, ss. 569-585
- 2.44 Zakrzewski K., Pietras F.: Method of calculating the electromagnetic field and power losses in ferromagnetic materials, taking into account magnetic hysteresis, *Proc. IEE*, 118, 1971, Nr 11, ss. 1679 - 1685
- 2.45 Zakrzewski K.: Pole elektromagnetyczne w ciałach ferromagnetycznych przewodzących, *Zeszyty Nauk. Polit. Łódzkiej "Elektryka"*, 160, 1968, Nr 38

#### Książki

- 3.1 Laithwaite E.R.: *Induction machines for special purposes*, Chemical Publishing Company, New York, 1966
- 3.2 Nasar S.A., Boldea I.: *Linear motion electric machines*, John Wiley and Sons, New York - London - Sydney - Toronto, 1976,
- 3.3 Ollendorff F.: *Berechnung magnetischer Felder*, Springer-Verlag, Wien, 1952

#### Artykuły

- 3.4 Carpenter C.J.: Surface-integral methods of calculating forces on magnetised iron parts, *Proc. IEE*, 107, part C, 1960, ss. 19 - 28, Monograph 342
- 3.5 Dąbrowski M.: Pole elektromagnetyczne w anizotropowym pręcie o przekroju prostokątnym, *Rozprawy Elektrotechniczne*, 11, 1965, z.2, ss. 301 - 318
- 3.6 Gieras J., Paul P.: Pole magnetyczne wzbudzone przez stojan maszyny dwufazowej, *Rozprawy Elektrotechniczne*, w druku

- 3.7 Nasar S.A.: Electromagnetic fields and forces in a linear induction motor, taking into account edge effects, Proc. IEE, 116, 1969, Nr 4, ss. 605 - 609
- 3.8 Pawluk K.: Champ magnétique dans le rotor du turboalternateur considéré comme un milieu anisotrope, Acta Technica ČSAV, 1965, Nr 5, ss. 516-526
- 3.9 Poklonow S.W.: Raspredielienije elektromagnitnogo polia, tokow i potier w massiwnom korotkozamknutom rotorie, Issliedowanije turbo- i gidrogeneratorow bolszoi moszcznosti, Nauka, Leningrad, 1977, ss. 152 - 157
- 3.10 Postnikow I.M., Rallie W.W., Asanbajew W.N.: Parametry schiemy zamieszczienija elektriczeskoj masziny pierie - miennogo toka s massiwnym obmotannym rotorom w razlicznych sistemach jedinic, Problemy techniczeskoj elektrodinamiki, wypusk 32, 1971, ss. 7 - 11
- 3.11 Postnikow I.M.: Asanbajew W.N., Caratow W.A.: Schiema zamieszczienija i parametry massiwnogo rotora s bielicziej klietkoj, Problemy techniczeskoj elektrodinamiki, wypusk 46, 1974, ss. 3 - 7
- 3.12 Tozoni O.W., Korotienko L.M.: Analiticeskij rascziet polia liniejnogo dwigatielja, Kibiernietika i wyczislitel'naja tiechnika, wypusk 35, 1977, ss. 105-116
- 3.13 Turowski J.: Metody obliczania pola i parametrów bieźni indukcyjnych silników liniowych, Rozprawy Elektrotechniczne, 19, 1973, z.2, ss. 371 - 396
- 3.14 Yamamura S., Ito H., Ishikawa Y.: Theories of the linear induction motor and compensated linear induction motor, IEEE Trans., vol.PAS-91, 1972, Nr 4, ss. 1700 - 1710

#### Książki

- 4.1 Dąbrowski M., Gieras J.: Maszyny indukcyjne o wirniku masywnym, PWN, Warszawa - Poznań, 1977
- 4.2 Tozoni O.W., Maergojz I.D.: Rascziet triechmiernych elektromagnitnych poliej, Technika, Kijew, 1974

#### Artykuły

- 4.3 Angst G.: Polyphase induction motor with solid rotor; Effects of saturation and finite length, Trans. AIEE, vol. PAS-81, 1962, February, ss. 902-909
- 4.4 Beckert U.: Beitrag zur Theorie des Zweiphasenstellmotors mit massivem Stahlläufer, Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik, Bd 9, 1969, Nr 3, ss. 169-185
- 4.5 Brynskij E.A.: Torcowyj effiekt w massiwnom anizotropnom rotorie, Wysokoispolzowannyje turbo- i gidrogeneratory s neposriedstwiennym ochłazdzenijem, Nauka, Leningrad, 1971, ss. 53 - 62
- 4.6 Carpenter C.J.: Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic field and eddy-current problems at power frequencies, Proc. IEE, 124, 1977, Nr 11, ss. 1026 - 1033

- 4.7 Davies E.J., Wright M.T., Mc Kibbin H.: Three-dimensional theory of eddy-current couplings with copper-faced drums, Proc. IEE, 124, 1977, Nr 12, ss. 1187 - 1196
- 4.8 Gieras J.: Theory of induction machines with double-layer secondary, Rozprawy Elektrotechniczne, 23, 1977, z. 3, ss. 577- 631
- 4.9 Gieras J., Hebenstreit J.: Trojrozměrná analýza indukčního stroje s neferromagnetickou sekundární částí, Elektrotechnický časopis, 28, č.5, 1977, ss. 342- 356
- 4.10 Kesavamurthy N., Rajagopalan P.K.: Equivalent circuit and evaluation of eddy-current loss in solid cores subjected to alternating and rotating magnetic fields, Proc. IEE, 107, part C, 1960, ss. 353- 361, Monograph 385U
- 4.11 Lasociński J.: Pole elektromagnetyczne w szczelinie maszyny o maszynym wirniku ferromagnetycznym przy uwzględnieniu skończonej długości maszyny, Rozprawy Elektrotechniczne, 12, 1966, z.1, ss.69- 92
- 4.12 Oberretl K.: Dreidimensionale Berechnung des Linearmotors mit Berücksichtigung der Endeffekte und der Wicklungsverteilung, Arch. für Elektrot., Bd. 55, 1973, ss.181- 190
- 4.13 Ochriemienko N.M.: Magnitnoje polie ploskogo indukcionogo nasosa, Elektricziestwo, 1964, Nr 8, ss. 18- 26
- 4.14 Preston T.W.: Reece A.B.J.: Transverse edge effects in linear induction motors, Proc. IEE, 116, 1969, Nr 6, ss. 973- 979
- 4.15 Skalski C.A.: A general analysis for linear induction motors and electromagnets, MITRE Technical Report MTR-6724, Mc Lean, July, 1974
- 4.16 Skalski C.A.: Application of a general analysis for single-sided linear induction motors, Conference on "Linear Electric Machines", London, October, 1974, ss. 197- 202
- 4.17 Schieber, D.: Electrodynamics of Polyphase Windings, Arch. für Elektrot., Bd. 58, 1976, H.2, ss. 117- 127
- 4.18 Wood A.J., Concordia C.: An analysis of solid rotor machines, Part III. Finite length effects, Trans. AIEE, vol. PAS-79, 1960, April, ss. 21 - 26
- 4.19 Yee H.: Effects of finite length in solid-rotor induction machines, Proc. IEE, 118, 1971, Nr 8, ss.1025- 1033

#### Książki

5. 1 Awietisjan D.A., Sokołow W.S., Chan W.Ch.: Optimalnoje projektowanije elektrieskich maszin na EWM, Energija, Moskwa, 1976
- 5.2 Dąbrowski M.: Konstrukcja maszyn elektrycznych, WNT, Warszawa, 1977

#### Artykuły

- 5.3 Łopuchina E.M. i inni : Sowriemiennyje metody rasczieta asinchronnych mikrodwigatieliej, IWUZ Elektromechanika, 1972, Nr 12, ss. 1327 - 1333

- 5.4 Ramaratham R., Desai B.G.: Optymization of polyphase induction motor design; a nonlinear programming approach, IEEE Trans. , vol. PAS-90, 1972, Nr 2, ss. 570-578

#### Książki

- 6.1 Geary P.J.: Magnetic and electric suspensions, British Scientific Instrument Research Association, London, 1964
- 6.2 Habiger E.: Two-phase servo motors, VEB Verlag Technik, Berlin, 1973
- 6.3 Laithwaite E.R.: Propulsion without wheels, English Universities Press, London, 1966
- 6.4 Laithwaite E.R.: Linear electric motors, Mills and Boon Limited, London, 1971

#### Artykuły

- 6.5 Abel E., Corbett A.E., Mulhall B.E., Rhodes R.G.: Levitation and propulsion of guided vehicles using superconducting magnets, Conference on "Linear Electric Machines", London, October, 1974, ss. 223 - 229
- 6.6 Apstein M., Blum L.M.: Low-inertia induction motors, Trans. AIEE, vol. PAS-76, 1957, June, ss. 253 - 257
- 6.7 Boerdijk A.H.: Technical aspects of levitation, Philips Research Reports, 11, 1956, Nr 1, ss. 45 - 56
- 6.8 Borcherts R.H., Davis L.C.: Force on moving coil over a conducting surface including edge and channel effects, Journal of Applied Physics, 43, 1972, Nr 5, ss. 2418 - 2427
- 6.9 Borcherts R.H.: Repulsion magnetic suspension research US progress to date, Cryogenics, 1975, July, ss. 385 - 393
- 6.10 Davis L.C., Wilkie D.F.: Analysis of motion of magnetic levitation systems: implications for high-speed vehicles, Journal of Applied Physics, 42, 1971, Nr 12, ss. 4779-4793
- 6.11 Freeman E.M., Lowther D.A.: Normal force in single-sided linear induction motors, Proc. IEE, 120, 1973, Nr 12, ss. 1499 - 1506
- 6.12 Gieras J., Frydrychowicz G., Paul P.: K rasczietu odnofaznych asinchronnych dwigatieliej s korotkozamknu - tym witkom na polusie, Elektrotechnický časopis, 29 , 1978, č. 3, ss. 169 - 181
- 6.13 Hochhäusler P.: Die magnetische Schwebbahn, ETZ b, Bd. 23, 1971, H. 13, ss. 311-313
- 6.14 Hochhäusler P.: Neue Erkenntnisse für Betrieb der magnetischen Schwebbahn, ETZ b, Bd. 25, 1973, H.3, ss. 45-47
- 6.15 Hochhäusler P.: Der Katamaran als magnetisches Schwebfahrzeug, ETZ b, Bd. 26, 1974, H. 16, ss. 412 - 413
- 6.16 Hochhäusler P.: A catamaran as magnetically levitated vehicle, Conference on "Linear Electric Machines", London, October, 1974, ss. 216 - 222

- 6.17 Hochhausler P.: Modell einer elektrodynamischen Schwebebahn, ETZa, Bd. 96, 1975, H. 9, ss. 394 - 396
- 6.18 Jayawant B.V., Parr P.J.: Sleeve-rotor induction motors for control applications, IEEE Trans., vol. PAS-88, 1969, Nr 7, ss. 1103 - 1114
- 6.19 Laithwaite E.R.: Electromagnetic levitation, Proc. IEE, 112, 1965, Nr 12, ss. 2361 - 2375
- 6.20 Langerholc J.: Torques and forces on moving coil due to eddy currents, Journal of Applied Physics, 44, 1973, Nr 4, ss. 1587 - 1594
- 6.21 Langerholc J.: Electrodynamics of a magnetic levitation coil, Journal of applied Physics, 44, 1973, Nr 6, ss. 2829-2837
- 6.22 Ooi B.T., Eastham A.R.: Transverse edge effects of sheet guideways in magnetic levitation, IEEE Trans., vol. PAS-94, 1975, Nr 1, ss. 72-80
- 6.23 Ooi B.T.: Electromechanical stiffness and damping coefficients in the repulsive magnetic levitation system, IEEE Trans., vol. PAS-95, 1976, Nr 3, ss. 936 - 943
- 6.24 Ooi B.T.: Impedance modelling and persistent mode currents for the repulsive levitation system, IEEE Trans., vol. PAS-96, 1977
- 6.25 Ooi B.T.: A dynamic circuit theory of the repulsive magnetic levitation system, Conference Record, IEEE IAS Annual Meeting, 1975, 75CH0999-3IA, ss. 949-955
- 6.26 Reitz J.R.: Forces on moving magnets due to eddy currents, Journal of Applied Physics, 41, 1970, Nr 5, ss. 2067-2071
- 6.27 Reitz J.R.; Davis L.C.: Force on a rectangular coil moving above a conducting slab, Journal of Applied Physics, 43, 1972, Nr 4, ss. 1547 - 1553
- 6.28 Richards P.L., Tinkham M.: Magnetic suspension and propulsion systems for high-speed transportation, Journal of Applied Physics, 43, 1972, Nr 6, ss. 2680 - 2691
- 6.29 Thornton R.D., Iwasa Y., Kolm H.H.: The magneplane system, Fifth International Cryogenic Engineering Conference, Kyoto, 1974, ss. 42 - 45
- 6.30 Thornton R.D.: Magnetic levitation and propulsion 1975, IEEE Trans., vol. MAG-11, 1975, Nr 4, ss. 981-995

## ELEMENTS OF ELECTROMAGNETIC THEORY OF INDUCTION MACHINES

### Summary

The dissertation contains the steady-state analysis and algorithm of computations of the induction machines on the basis of electromagnetic field theory. Taking the electrodynamics equations as a starting point, the common features of various machines are shown, and their structure is replaced by multilayer region. The possibility of general analysis and construction of general algorithm of computations is shown too. One-dimensional, two-dimensional and three-dimensional analysis of electromagnetic field is performed. For the ferromagnetic medium, the variable magnetic permeability in the direction of electromagnetic wave penetration is assumed. Moreover, for two-dimensional field, the anisotropy is taken into account. Owing to this fact, the field analysis e.g. in squirrel-cage induction motor is possible. The recurrent formulas for field distribution, impedance of the secondary, electromagnetic power flowing from the primary to the secondary, power losses in the secondary and for forces are obtained. These relationships are valid for all types of the induction machines with short-circuited winding of the secondary. It is the fundamental advantage of the field analysis method worked out by the author. The results of theoretical considerations are in good accordance with experiments.

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ИНДУКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПРИ ПОЛЕВОМ ПОДХОДЕ

### Резюме

Диссертация содержит анализ и алгоритм расчета на основании теории электромагнитного поля электромеханических преобразователей в установленном режиме. Исходя из уравнений электродинамики, показано существование общих свойств различных преобразователей, их структура сведена к многослойной системе, показаны возможности общего анализа и построения общих алгоритмов расчета. Рассмотрены три случая распределения поля: одномерное, двухмерное и трехмерное. Кроме нелинейных свойств, для двухмерного поля учтены анизотронные свойства среды, благодаря чему является возможным полевой анализ, например двигателя с беличьей клеткой. Получены возвратные зависимости для распределения поля, импеданса вторичной части преобразователя, электромагнитной мощности передаваемой из первичной во вторичную часть, потери мощности, а также силы во вторичной части. Эти зависимости справедливы для всех случаев преобразователей с короткозамкнутой обмоткой вторичной части, что является основным достоинством разработанного метода полевого анализа. Достоверность результатов теоретических рассуждений проверена на опытах.



Cena zł 40,-